# La Dirección de las Compañías de Seguros

## Un estudio dentro de la Teoría Económica

Por el Prof. KARL BORCH

### 1. INTRODUCCIÓN

1.1. La función esencial de un Director es adoptar decisiones. Una teoría de la dirección debiera permitirnos predecir cuál habría de ser de entre las decisiones posibles, la que tomaría un Director ante una determinada situación.

En este trabajo desarrollaremos los elementos de una teoría para la dirección de las compañías de seguros. Empezaremos por hacer notar que las decisiones más importantes que tienen que adoptar los Directores de las compañías de seguros parece que se refieren a las cuestiones siguientes:

1.ª ¿Qué tipos de prima deben aplicarse para las modalidades de seguro que la compañía ofrece al público?

2.ª ¿Cuánto debe invertir la compañía para hacer la promoción de ventas de sus pólizas?

3.ª ¿Cuándo debe rehusar la compañía la aceptación de un riesgo que se le proponga?

4.ª ¿Cómo debe reasegurar la compañía su cartera de contratos de seguro?

5.ª ¿Qué fondos de reservas debe tener una compañía de seguros?

6.ª ¿Cómo deben invertirse los fondos de la compañía?

Las cuestiones que han quedado planteadas no deben considerarse, en absoluto, como una relación exhaustiva, puesto que el director de una compañía de seguros puede que tenga que adoptar también decisiones importantes en terrenos tales como la administración del personal o la organización interna de las oficinas, pero estos problemas de decisión no parece que sean típicos del seguro, ya que decisiones similares han de tomarse en toda clase de empresas y se pueden estudiar mejor en un sentido general.

1.2. Una teoría sobre la dirección de las compañías de seguros resultará de utilidad práctica si se pueden definir cuáles sean las mejores decisiones probables que deban tomarse ante todas las situaciones que se puedan concebir. Una teoría de esta índole, constituiría el ideal de un director atareado, pero esto no es más que un sueño y no es probable que se convierta en realidad en un futuro inmediato.

En esta charla no nos ocuparemos de manera especial de estos problemas prácticos. Nuestro objetivo principal consistirá en establecer los cimientos de una teoría que puede *predecir* cómo se *comportará* una compañía de seguros *ante una situación determinada*. Esta forma de actuar de una compañía en particular constituirá un elemento dentro de la situación que otras compañías —que a su vez, junto con otros elementos, también toman sus decisiones— dan por establecida y cuya situación rige su forma de comportarse. De aquí se deduce que debe haber una interacción entre las decisiones tomadas por los directores de las diferentes compañías y es precisamente la naturaleza de estas interacciones lo que deseamos estudiar. La teoría de cómo tomar sus decisiones el director de una compañía de seguros es sólo una parte de una teoría más general para todo el sector asegurador integrado en el campo de la economía nacional.

1.3. Para expresar nuestro objeto con mayor claridad, quizás resulte de utilidad hacer algunas referencias a la teoría económica clásica. En esta teoría se establece el supuesto de que el director de una empresa busca maximizar los beneficios. Si se conocen los precios de todos los productos, podemos predecir cuánto debe comprar, vender, producir o invertir el director de nuestro ejemplo. Considerada la interdependencia que existe entre las decisiones tomadas por los directores de diferentes empresas, podemos determinar los precios que equilibren la economía.

Si tratamos de aplicar estas ideas al seguro, nuestra primera dificultad consiste en formular una hipótesis básica sobre el objetivo de los directores. El beneficio de una compañía de seguros, considerado *a priori*, es una variable estocástica. Carecería, por tanto, de sentido establecer la hipótesis de que una compañía de seguros busca maximizar sus beneficios.

Debemos buscar otras hipótesis sobre cómo toman sus decisiones los directores de las compañías de seguros y éste es esencialmente el problema que estudiaremos en lo que sigue.

## 2. Teoría Estática

2.1. En algunos trabajos anteriores, (1) y (2), hemos desarrollado una teoría que generaliza la teoría clásica del equilibrio estático económico de forma que el seguro quede incluido en ella. No examinaremos aquí en detalle esta teoría, pero puede resultar de utilidad hacer una recapitulación de sus elementos principales.

A título ilustrativo, consideremos la cuestión 4.ª del párrafo 1.1 y establezcamos los supuestos siguientes:

1.º Nuestra compañía tiene un capital inicial $S_0$.

2.º La compañía recauda un total de primas $P$, mediante la adquisición de los contratos de seguro que forman su cartera. La cantidad de siniestros a pagar por los producidos de entre los contratos que integran la cartera, es una variable estocástica $x$ con distribución $F(x)$.

3.º La compañía puede reasegurar una parte $k$ de su cartera, mediante el pago de una prima de reaseguro $P(k)$, con $0 \leqslant k \leqslant 1$.

El problema consiste, entonces, en determinar la parte que debe ser reasegurada.

2.2. Si la compañía reasegura la parte $k$, cuando hayan expirado todas las pólizas de su cartera, tendrá un capital

$$S_1(k) = S_0 + P - P(k) - (1 - k)x$$

El capital final $S_1(k)$ es, en general, una variable estocástica que depende de $k$. Se trata, entonces, de determinar el valor de $k$ que dé la "mejor" variable estocástica en el conjunto $S_1(k)$; es decir, la mejor distribución de probabilidad de capital final que pueda obtenerse. Este problema carece de sentido, a menos que el director de la compañía pueda establecer un *orden de preferencias* en cuanto a $S_1(k)$. Con objeto de avanzar algo en nuestra exposición, deberemos suponer que esta ordenación existe. Parece, además, natural suponer que la ordenación es compatible en el sentido de Von Neumann y Morgens-

3.2. Si al final del ejercicio $t$, el capital de la compañía, $S_t$, es mayor que $Z$, la diferencia

$$s_t = S_t - Z$$

se pagará como dividendo a los accionistas o a los contratantes de sus pólizas, según sea la naturaleza jurídica de la empresa. Por tanto, la compañía hará una serie de pagos de dividendos

$$s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_t\ \ldots$$

Evidentemente, esta serie es un proceso estocástico discreto.

Podemos, entonces, considerar la esperanza del valor actual de estos pagos

$$E\left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t\ s_t\right)$$

donde $0 < v < 1$ es el factor de descuento.

Puesto que evidentemente este valor depende del capital inicial $S$ y de las reservas necesarias representadas por $Z$, pondremos:

$$V(S,\ Z) = E\left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t\ s_t\right)$$

De nuestras hipótesis se infiere que

$$\begin{array}{ll} V(S,\ Z) = 0 & \text{para}\quad S < 0 \\ V(S,\ Z) = S - Z + V(Z,\ Z) & \text{para}\quad S > Z \end{array}$$

Cuando $0 \leqslant S \leqslant Z$, la función $V(S,\ Z)$ debe satisfacer la ecuación integral

$$V(S,\ Z) = v\int_{-S}^{Z-S} V(S+x,\ Z)dF(x) +$$

$$+\ v\int_{Z-S}^{\infty}\Big[V(Z,\ Z) + x + S - Z\Big]dF(x)$$

Si $F(x)$ es continua y existe una función de densidad $f(x) = F'(x)$, podemos escribir la ecuación integral así:

$$V(S,\ Z) = v\int_{0}^{Z} V(x,\ Z)f(x-S)dx +$$

$$+\ v\int_{Z}^{\infty}\Big[V(Z,\ Z) + x - Z\Big]f(x-S)dx$$

Poniendo $V(S)$ en lugar de $V(S, Z)$, se obtiene la ecuación

$$V(S) = v\int_0^Z V(x)f(x - S)dx +$$

$$+ v\left[1 - F(Z - S)\right] V(Z) + v\int_0^\infty xf(x + Z - S)dx$$

*3.3.* La ecuación integral del párrafo anterior es del tipo de la de Fredholm. Tiene la parte central simple $f(x - S)$ y se puede resolver descomponiéndola en partes

$$f^{(1)}(x - S) = f(x - S)$$

$$f^{(n)}(x - S) = \int_0^Z f(n - 1)(x - t)\, f(t - S)dt$$

y aplicando la ampliación de Liouville-Neumann

$$V(S) = v\left[1 - F(Z - S)\right] V(Z) +$$

$$+ v\int_0^\infty xf(x + Z - S)dx + \sum_{n=1}^{\infty} v^n \int_0^Z f^{(n)}(x - S)dx$$

Para determinar la constante $V(Z)$ es necesario que la solución sea continua en $S = Z$ y obtenemos

$$V(S) = v\left[1 - F(0)\right]V(Z) +$$

$$+ v\int_0^\infty xf(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} v^n \int_0^Z f^{(n)}(x - Z)dx$$

o también

$$V(Z) = \frac{v\int_0^\infty xs(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} v^n \int^Z f^{(n)}(x - Z)dx}{1 - v + vF(0)}$$

3.4. En el párrafo 3.1 establecimos la hipótesis de que nuestra compañía se había decidido en algún sentido, sobre el nivel de un valor para $Z$. Podemos, entonces, preguntar si la compañía ha elegido el mejor valor posible de $Z$; es decir, si ha fijado el valor necesario de la reserva en el nivel óptimo. Evidentemente, resulta imposible contestar esta pregunta, a menos que hagamos algunas suposiciones sobre qué es lo que el director desea realmente lograr; es decir, cuáles son los objetivos de la compañía. Una suposición natural sería creer que el director trata de maximizar la esperanza del valor descontado, de los dividendos que la compañía haya de pagar a lo largo de sus años de actividad. Esto nos lleva a tener que resolver la ecuación

$$\frac{\delta V(S, Z)}{\delta Z} = 0$$

Este problema ha sido estudiado en un trabajo anterior (3) y se ha demostrado que, bajo ciertas condiciones, la ecuación tiene una solución única en $Z$, independiente de $S$. En la Sección 4, estudiaremos un ejemplo en el que se cumplen estas condiciones.

3.5. Supongamos ahora que nuestra compañía ha hallado cuál sea el nivel óptimo para sus reservas. Si el capital actual de la compañía es $S$, la esperanza del valor actual de los pagos por dividendos futuros será $V(S, Z)$.

Supongamos también que, de manera inesperada, se le ofrece a la compañía un contrato de seguro del tipo

Beneficio $R_1$ con probabilidad $\alpha$
Pérdida $R_2$ con probabilidad $1 - \alpha$

Estas probabilidades se pueden interpretar en otra compañía como una invitación a proveerse de la cobertura de un contrato de reaseguro a corto plazo.

Si nuestra compañía acepta esta oferta, la esperanza del valor de sus dividendos futuros será

$$\alpha V(S + R_1, Z) + (1 - \alpha) V(S - R_2, Z)$$

Si la compañía mantiene el objetivo general de maximizar la esperanza del valor descontado de los dividendos que habrá de pagar a lo largo de todo el tiempo a que extiende su actuación, aceptará la oferta, pero sólo si

$$\alpha V(S + R_1, Z) + (1 - \alpha) V(S - R_2, Z)$$

Ahora bien, esto significa que la compañía tomará su decisión como si deseara maximizar la esperanza de la utilidad, sirviéndose de $V(S, Z)$

como función de utilidad. Con esto, nuestra respuesta a la cuestión 5.ª del párrafo 1.1 da automáticamente la solución al problema 3.º.

3.6. En la Sección 2, hemos estudiado las cuestiones 1.ª y 4.ª, que se podrían analizar dentro de una estructura estática. Vimos entonces que podríamos resolver estos problemas únicamente si conociéramos la función de utilidad. Esta función hemos visto que representaba la "actitud frente al riesgo" que tomaba la compañía; es decir, constituía los elementos subjetivos. Nuestra conclusión fue la de que el director debía especificar con toda precisión su postura frente a la aceptación de riesgos, antes de que nosotros como matemáticos pudiéramos serle de utilidad para hallar la probablemente mejor solución.

En esta Sección hemos estudiado un modelo dinámico y hemos encontrado que este modelo nos da la función de utilidad que rige las decisiones de la compañía en situaciones estáticas simples. Sin embargo, no hemos podido desembarazarnos de los elementos subjetivos. Estos están ahora representados por el factor de descuento $v$, que expresa esencialmente el grado de preferencia en fecha cercana mejor que diferir en lo posible el pago de dividendos.

## 4. Un caso especial

4.1. En general, no es posible hallar una solución explícita sencilla para la ecuación integral vista en la Sección 3. Sin embargo, puede resultar de utilidad estudiar un caso especial en que la solución sea sencilla y se pueda examinar con todo detalle.

Supongamos que

$$f(x) = k\,\alpha e^{-\alpha x} \qquad \text{para} \qquad x > 0$$
$$f(x) = (1 - k)\alpha e^{\alpha x} \qquad \text{para} \qquad x < 0$$

El valor de $f(x)$ para $x = 0$ no interesa. Supongamos que $1/2 < k < 1$; es decir, que la contratación es favorable a la compañía. La objeción evidente a esta distribución de probabilidad es que no se señala ningún límite superior para la ganancia que la compañía puede obtener en un solo ejercicio. Podemos justificar nuestra elección de $f(x)$ simplemente por conveniencia matemática o podemos suponer que la compañía invierte sus fondos en acciones muy especulativas.

4.2. La ecuación integral la podemos escribir ahora como sigue:

$$V(S) = v(1 - k)\alpha e^{-\alpha S} \int_0^S V(X)e^{\alpha x}\, dx \qquad [1]$$

$$+ vk\ \alpha e^{\alpha S} \int_S^Z V(x)e^{-\alpha x}\, dx$$

$$+ vkV(Z)e^{\alpha(S-Z)} + \frac{vk}{\alpha}\ e^{\alpha(S-Z)}$$

Diferenciando dos veces con respecto a $S$, obtenemos

$$V'(S) = v(1 - k)\alpha\ V(S) - vk\alpha\ V(S)$$

$$- v(1 - k)\alpha^2 e^{-\alpha S} \int_0^S V(x)e^{\alpha x}\, dx +$$

$$+ vk\ \alpha^2 e^{\alpha S} \int_S^Z V(x)e^{-\alpha x}\, dx$$

$$+ vk\alpha\ V(Z)e^{\alpha(S-Z)} + vk\ e^{\alpha(S-Z)}$$

y

$$V''(S) = v(1 - 2k)\alpha\ V'(S) - v\alpha^2\ V(S)$$

$$+ v(1 - k)\alpha^3 e^{-\alpha S} \int_0^S V(x)e^{\alpha x}\, dx +$$

$$+ vk\ \alpha^2 e^{\alpha S} \int_S^Z V(x)e^{-\alpha x}\, dx$$

$$+ vk\ \alpha^2\ V(Z)\ e^{\alpha(S-Z)} + vk\ \alpha e^{\alpha(S-Z)}$$

De estas expresiones es fácil ver que $V(S)$ debe satisfacer la ecuación diferencial

$$V''(S) - \alpha^2\ V(S) = v(1 - 2k)\alpha\ V'(S) - v\alpha^2\ V(S)$$

ó

$$(1 - v)\alpha^2\ V(S) + v(1 - 2k)\alpha\ V'(S) - V''(S) = 0$$

Esta es una ecuación homogénea de segundo grado con coeficientes constantes, cuya solución general es

$$V(S) = C_1\ e^{r_1 S} + C_2\ e^{r_2 S} \qquad [2]$$

donde $C_1$ y $C_2$ son constantes arbitrarias y $r_1$ y $r_2$ son las raíces de la ecuación característica

$$r^2 - v(1 - 2k)\alpha r - (1 - v)\alpha^2 = 0 \qquad [3]$$

Entonces hallamos

$$r_1 = \frac{\alpha}{2}\left\{v(1 - 2k) + \left[v^2(1 - 2k)^2 + 4 - 4v\right]^{1/2}\right\}$$

$$r_2 = \frac{\alpha}{2}\left\{v(1 - 2k) - \left[v^2(1 - 2k)^2 + 4 - 4v\right]^{1/2}\right\}$$

4.3. Resulta fácil comprobar que ambas raíces de [3] son reales y que $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$.

Hay que determinar ahora las constantes $C_1$ y $C_2$, de forma que la solución general de la ecuación diferencial sea también una solución de la ecuación integral. A tal fin, sustituyendo el valor [2] en [1], obtenemos:

$$C_1\, e^{r_1 S} + C_2\, e^{r_2 S} = \frac{v(1 - k)\alpha}{r_1 + \alpha}\, C_1 \left\{e^{r_1 S} - e^{-\alpha S}\right\} +$$

$$+ \frac{v(1 - k)\alpha}{r_2 + \alpha}\, C_2 \left\{e^{r_2 S} - e^{-\alpha S}\right\} +$$

$$+ \frac{vk\,\alpha}{r_1 - \alpha}\, C_1 \left\{e^{(r_1 - \alpha)Z + \alpha S} - e^{r_1 S}\right\} +$$

$$+ \frac{vk\,\alpha}{r_2 - \alpha}\, C_2 \left\{e^{(r_2 - \alpha)Z + \alpha S} - e^{r_2 S}\right\} +$$

$$+ vk\, C_1\, e^{(r_1 - \alpha)Z + \alpha S} +$$

$$+ vk\, C_2\, e^{(r_2 - \alpha)Z + \alpha S} + \frac{vk}{a}\, e^{\alpha(S - Z)}$$

Esta expresión la escribiremos como sigue:

$$\left\{1 - \frac{v(1 - k)\alpha}{r_1 + \alpha} + \frac{vk\,\alpha}{r_1 - \alpha}\right\} C_1\, e^{r_1 S} +$$

$$+ \left\{ 1 - \frac{v(1-k)\alpha}{r_2+\alpha} + \frac{vk\,\alpha}{r_2-\alpha} \right\} C_2\, e^{r_2 S} -$$

$$- \left\{ \frac{vk\ r_1}{r_1-\alpha}\, e^{(r_1-\alpha)Z}\, C_1 + \frac{vk\ r_2}{r_2-\alpha}\, e^{(r_1-\alpha)Z}\, C_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{vk}{\alpha}\, e^{-\alpha Z} \right\} e^{\alpha S} +$$

$$+ \left\{ \frac{v(1-k)\alpha}{r_1+\alpha}\, C_1 + \frac{v(1-k)\alpha}{r_2+\alpha}\, C_2 \right\} e^{-\alpha S} = 0$$

4.4. La ecuación del párrafo anterior debe ser válida para todo valor de $S$. Por lo tanto, las cuatro expresiones comprendidas entre llaves tienen que ser iguales a cero.

Es fácil comprobar que las dos primeras expresiones entre llaves, o sea, los coeficientes de $e^{r_1 S}$ y $e^{r_2 S}$ son nulos cuando $r_1$ y $r_2$ son las raíces de la ecuación característica [3].

Obtenemos, entonces, las dos ecuaciones que escribimos a continuación para la determinación de $C_1$ y $C_2$:

$$\frac{r_1\ e^{r_1 Z}}{r_1-\alpha}\, C_1 + \frac{r_2\ e^{r_2 Z}}{r_2-\alpha}\, C_2 = - \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{1}{r_1+\alpha}\, C_1 + \frac{1}{r_2+\alpha}\, C_2 = 0$$

El determinante de estas ecuaciones es

$$D = \frac{r_1\ e^{r_1 Z}}{(r_1-\alpha)\ (r_2+\alpha)} - \frac{r_2\ e^{r_2 Z}}{(r_1+\alpha)\ (r_2-\alpha)}$$

y hallamos

$$C_1 = \frac{1}{\alpha(r_2+\alpha)D},\quad C_2 = \frac{1}{\alpha(r_1+\alpha)D}$$

Esto nos da la expresión explícita para la esperanza del valor actual de los pagos por dividendos:

$$V(S,\ Z) = \frac{1}{\alpha\, D} \left\{ \frac{e^{r_2 S}}{r_2+\alpha} - \frac{e^{r_1 S}}{r_2+\alpha} \right\}$$

Esta expresión está maximizada para el valor de $Z$, lo que minimiza el valor absoluto de $D$; es decir, el valor determinado por la ecuación

$$\frac{dD}{dZ} = \frac{r_1^2\, e^{r_1 Z}}{(r_1 - \alpha)\,(r_2 + \alpha)} - \frac{r_2^2\, e^{r_2 Z}}{(r_2 + \alpha)\,(r_2 - \alpha)} = 0$$

o por

$$e^{(r_1 - r_2)Z} = \frac{r_2^2\,(r_1 - \alpha)\,(r_2 + \alpha)}{r_1^2\,(r_1 + \alpha)\,(r_2 - \alpha)}$$

Evidentemente, este valor de $Z$ es único e independiente de $S$; o sea, que existe un nivel para las reservas de la compañía que es óptimo y único.

4.5. Quizá se encuentre de utilidad ilustrar estos resultados con un ejemplo numérico sencillo.

Hagamos

$$\alpha = 1 \qquad r_1 = 0{,}1 \qquad r_2 = -0{,}3$$

lo que corresponde a

$$v = 0{,}97 \qquad y \qquad k = 0{,}603$$

La reserva óptima viene determinada entonces por

$$e^{0{,}4Z} = \frac{0{,}09 \times 0{,}9 \times 0{,}7}{0{,}01 \times 1{,}1 \times 1{,}3} = 3{,}965$$

lo que nos da para $Z$ un valor de

$$Z = 3{,}44$$

La tabla que se inserta a continuación da el valor de $V(S, Z)$ para algunos valores elegidos de $S$ y de $Z$.

$V(S, Z)$ = esperanza del valor actual de los pagos por dividendos

| S \ Z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,41 | 1,57 | 1,68 | 1,74 | 1,73 | 1,68 |
| 1 | 2,41 | 2,74 | 2,93 | 3,02 | 3,02 | 2,94 |
| 2 | 3,41 | 3,74 | 4,03 | 4,16 | 4,16 | 4,04 |
| 3 | 4,41 | 4,74 | 5,03 | 5,41 | 5,40 | 5,24 |
| 4 | 5,41 | 5,74 | 6,03 | 6,41 | 6,19 | 6,02 |
| 5 | 6,41 | 6,74 | 7,03 | 7,41 | 7,19 | 6,98 |

## REFERENCIAS


(1) BORCH, K.: "La Teoría Económica y el Seguro", *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 1964, pp. 99-122.

(2) BORCH, K.: "Una Teoría Económica del Seguro", *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 1964, pp. 113-124.

(3) BORCH, K.: "Control of a Portfolio of Insurance Contracts" (Control de una cartera de Contratos de Seguro), *The ASTIN Bulletin*, vol. IV (1966), pp. 59-71.

(4) NEUMANN, J. VON and O. MORGENSTERN: "Theory of Games and Economic Behavier" (Teoría de Juegos y Comportamiento Económico), Second Edition, Princeton, 1947.