Cursillo de Investigación Operativa

Resumen de las exposiciones desarrolladas por don Juan Béjar Alamo

Se define la investigación operativa como una técnica que trata de tomar una decisión, en general de tipo óptimo (máximo o mínimo de una función). Se necesita un modelo matemático con el que hay que operar para buscar tal decisión.

Después de hacer una breve historia sobre el origen y desarrollo de la investigación operativa, pasa el conferenciante a exponer la programación lineal.

La programación lineal apareció en 1941 con el problema de Hitchcok de transporte. Se disponen de ciertas cantidades de un producto situados en ciertos orígenes A, B y C que hay que distribuir a unos centros consumidores E, F, G, H de forma que cada uno reciba una cantidad determinada. Se conoce el coste de transporte por unidad y se trata de determinar la cantidad que debe recibir cada centro consumidor de cada centro de origen de tal forma que el coste total sea mínimo. Se supone que el total de la oferta iguala a la demanda.

Hay que buscar una primera solución de manera que se cumplan todas las condiciones impuestas, y mejorarlas después hasta obtener la solución definitiva. Una solución básica se obtiene por la llamada "regla de la esquina noroeste" (stoppingstore), por partir de dicha esquina y asignarle el más pequeño de los números que representan la oferta y la demanda y saturar los restantes por las condiciones impuestas. Esta solución básica dará un cierto coste, la cual se puede mejorar mediante adiciones y sustracciones iguales con la condición de que disminuya su coste.

En términos generales, la programación lineal trata de hacer máximo o mínimo una función lineal con las restricciones siguientes. Las variables tienen que ser no negativas y satisfacer a un sistema de ecuaciones o inecuaciones lineales de mayor número de ecuaciones que de incógnitas para que tenga infinitas soluciones y de ellas obtener la que dé valor máximo o mínimo a la función.

La teoría de máximos y mínimos que se estudia en análisis (multiplicadores de Lagrange), no es de aplicación, ya que aquí se estudian los máximos o mínimos relativos y en la programación lineal se trata de máximos o mínimos absolutos.

* * *

Una vez hallada una solución inicial, como hemos visto anteriormente, la cual verifica todas las restricciones, se puede mejorar de forma que dé un coste más pequeño y llegar a la solución final mediante un procedimiento más sistemático que el anterior y que constituye el llamado método "Modi".

Consiste en asignar a cada fila y columna un número, que luego veremos cómo se determinan, por lo que a cada casilla le corresponde un par de números que son los correspondientes a la fila y columna. Para determinarlos se forma un sistema de ecuaciones de la forma siguiente:

Por cada casilla que tenga solución inicial (no vacía) se forma una ecuación, igualando la suma de los dos números correspondientes a la misma al coste de la casilla con signo menos. En este sistema, se hacen nulas las incógnitas necesarias para que quede un sistema del mismo número de ecuaciones que de incógnitas, con lo que ya se puede resolver.

Para saber qué casilla vacía (con solución inicial cero) hay que valorar, para que el coste total disminuya, se hace lo siguiente:

Para cada casilla vacía se forma un número, que es el que se obtiene sumando el par de números que le corresponde y el coste correspondiente a su casilla.

Si el número que se obtiene es positivo no se mejora con valorar esa casilla, por el contrario, si es negativo, sí se mejora, y cuanto más negativo mejor. Se toma, por tanto, la casilla que dé *más negativo,* y que es la que conviene valorar, mediante rotación por el método visto anteriormente. Se obtiene así otra solución básica, con lo que se repite la operación, hasta que los números obtenidos en las casillas vacías, según acabamos de ver, sean todos positivos, lo que nos indica que la solución obtenida no se puede mejorar, y es, por tanto, la solución.

Se indica otro método gráfico para el caso que haya solamente dos variables independientes.

Como las restricciones o ecuaciones de condición son ecuaciones o inecuaciones lineales, las soluciones básicas constituyen un recinto en el plano coordenado, limitado por los ejes positivos y las rectas obtenidas al igualar a cero los primeros miembros de las restricciones.

Como la función del coste es también lineal en estas dos variables, al hacer variar el coste se obtiene un haz de rectas paralelas. La solución será, por tanto, la recta de ese haz que corte al contorno y dé valor más pequeño para el coste, que en general será un vértice del recinto, cuyas coordenadas dan la solución.

* * *

Método simplex o de Dantzig.

Antes de dar el desarrollo general por este método, vamos a ver su aplicación mediante un ejemplo.

Sea: $C = x_2 - x_1$ la función que debe ser mínima, con las restricciones

$$\left.\begin{array}{r} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{array}\right\} \text{ y todas no negativas.}$$

Es un sistema de 3 ecuaciones con 5 incógnitas, y suponiendo se cumplan las condiciones para que el sistema sea compatible se pueden dar valores arbitrarios a 2 incógnitas, para obtener un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

Se llama "solución básica factible" del sistema, la que tiene (en este caso) 2 incógnitas nulas y las restantes no negativas. Las incógnitas nulas se llaman "no básicas" y las no negativas "básicas".

Hay que partir de que hemos encontrado una solución básica, sea ésta

no básica			básica		
C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0	0	2	2	5

Resolviendo el sistema respecto las incógnitas básicas en función de las no básicas

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 2 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 &= 2 - x_1 + 2x_2 \\ x_5 &= 5 - x_1 - x_2 \end{aligned}\right\} \quad C = x_2 - x_1$$

Veamos si la solución anterior se puede mejorar mediante variaciones de una sola de las incógnitas no básicas.

Puesto que $C = x_2 - x_1$, nos conviene hacer variar x_1, pues como sólo puede tomar valores positivos, al aumentar ésta disminuye C; lo que no ocurre haciendo variar sólo x_2.

Veamos el valor máximo que puede tomar x_1 siendo $x_2 = 0$ con la condición de ser $x_3 \geqslant 0 \quad x_4 \geqslant 0 \quad x_5 \geqslant 0$:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 2 + 2x_1 \geqslant 0 \\ x_4 &= 2 - x_1 \geqslant 0 \\ x_5 &= 5 - x_1 \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x_1 \geqslant -1 \; ; \; 0 \leqslant x_1 \leqslant 2 \; ; \; 0 \leqslant x_1 \leqslant 5$$

La solución es $0 \leqslant x_1 \leqslant 2$, y por tanto el valor máximo es $x_1 = 2$; para el cual $x_3 = 6 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 3 \quad x_2 = 0$ y $C = -2$, o sea:

no básica			básica		
C	x_2	x_4	x_1	x_3	x_5
-2	0	0	2	6	3

Hemos conseguido un valor más pequeño para C, la incógnita x_1 ha entrado en la base, y la x_4 ha salido de ella.

Repitamos el procedimiento, despejando las incógnitas no básicas y poniendo C también en función de las no básicas

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 6 - 2x_4 + 3x_2 \\ x_1 &= 2 - x_4 + 2x_2 \\ x_5 &= 3 + x_4 - 3x_2 \end{aligned}\right\} \quad C = -2 + x_4 - x_2$$

Puesto que en el valor de C, x_2 tiene signo negativo, nos conviene hacer variar ésta permaneciendo $x_4 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 6 + 3x_2 \geqslant 0 \\ x_1 = 2 + 2x_2 \geqslant 0 \\ x_5 = 3 - 3x_2 \geqslant 0 \end{array}\right\} 0 \leqslant x_2 \geqslant -2 \;;\; 0 \leqslant x_2 \geqslant -1 \;;\; 0 \leqslant x_2 \leqslant 1$$

La solución es $0 < x_2 \leqslant 1$ y el valor máximo $x_2 = 1$, para el cual $x_3 = 9 \quad x_1 = 4 \quad x_5 = 0$ y $x_4 = 0$, y $C = -3$, o sea·

no básicas			básicas		
C	x_4	x_5	x_1	x_2	x_3
-3	0	0	4	1	9

por lo que x_2 ha entrado en la base y x_5 ha salido.

Repitiendo el razonamiento:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 9 - x_4 - x_5 \\ x_1 = 4 - \dfrac{x_4}{3} - \dfrac{2}{3} x_5 \\ x_2 = 1 + \dfrac{x_4}{3} - \dfrac{x_5}{3} \end{array}\right\} C = -3 + \frac{2}{3} x_4 + \frac{1}{3} x_5$$

Como los coeficientes de x_4 y x_5 son positivos, cualquier variación de éstos por ser positivos hace aumentar C; lo que nos dice que la última solución hallada no se puede mejorar y por tanto es la óptima.

La solución óptima se encuentra cuando al expresar C en función de las incógnitas no básicas, todos los coeficientes de éstas son positivos.

* * *

Veamos la resolución en toda su generalidad por el método de simplex.

Sea la función que tiene que ser mínima:

$$C = c_1 x_1 + \dots\dots\dots + c_n x_n$$

con las restricciones:

$$a_1j \; x_1 + \dots\dots\dots + a_nj \; x_n = bj_t$$
$$j = 1, 2, \dots, m \qquad ; \qquad n > m$$

que constituye un sistema de m ecuaciones con n incógnitas. Una solución factible básica es la que se obtiene mediante m incógnitas no negativas y n — m nulas.

Supongamos que hemos encontrado una solución factible básica (inicial), y para distinguir las variables básicas de las no básicas, emplearemos las notaciones.

básicas

$$Xu_1 \ldots Xu_j \ldots Xu_m \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

no básicas

$$Xu_{m+1} \ldots Xu_{m+k} \ldots Xu_n \quad ; \quad k = 1 \ldots (n - m)$$

El sistema se puede poner pasando las no básicas al segundo miembro

$$a_{u_1 j}\, x_{u_1} + \ldots\ldots\ldots + a_{u_h j}\, x_{u_h} + \ldots\ldots\ldots + a_{u_m j}\, x_{u_m} = bj -$$
$$- (a_{u_{m+1} j}\, x_{u_{m+1}} + \ldots\ldots\ldots + a_{u_{m+k} j}\, x_{u_{m+k}} + \ldots\ldots\ldots + a_{u_n j}\, x_{u_n})$$

Resolviendo este sistema de m ecuaciones con m incógnitas por la regla de Cramer, el numerador se puede descomponer en una suma de determinantes, que es una función lineal en las incógnitas no básicas, y como el denominador es una constante, se obtiene una expresión de la forma

$$Xu_j = Zu_{j0} - \sum_{k=1}^{n-m} Zu_j\, u_{m+k}\, Xu_{m+k}$$

que da las variables básicas en función de las no básicas, y por ser $Xu_{m+k} = 0$ es $Xu_j = Zu_{j0}$ y constituye la solución inicial, luego $Zu_{j0} \geqslant 0$.

Descomponiendo C en suma de las variables básicas y no básicas

$$C = \sum_{j=1}^{m} Cu_j\, Xu_j + \sum_{k=1}^{n-m} Cu_{m+k}\, Xu_{m+k}$$

y sustituyendo el valor de Xu_j

$$C = \sum_{j=1}^{m} Cu_j\, Zu_{j0} + \sum_{k=1}^{n-m} \left[Cu_{m+k} - \sum_{j=1}^{m} Cu_j\, Zu_j\, u_{m+k} \right] Xu_{m+k}$$

$$C = Z_{00} - \sum_{k=1}^{n-m} Z_0\, u_{m+k}\, Xu_{m+k} \qquad [1]$$

siendo

$$Z_{00} = \sum_{j=1}^{m} Cu_j \; Zu_{j0}$$

$$Z_0 \; u_{m+k} = \sum_{j=1}^{m} Cu_j \; Zu_j \; u_{m+k} - Cu_{m+k}$$

Con estos datos formaremos la primera tabla de simplex.

			Xu_{m+1}	Xu_{m+k}	Xu_{m+h}	Xu_n
			Cu_{m+1}	Cu_{m+k}	Cu_{m+h}	Cu_n
Xu_1	Cu_1	Zu_{10}	$Zu_1 \; u_{m+1}$	$Zu_1 \; u_{m+k}$	$Zu_1 \; u_{m+h}$	$Zu_1 \; u_n$
Xu_j	Cu_j	Zu_{j0}	$Zu_j \; u_{m+1}$	$Zu_j \; u_{m+k}$	$Zu_j \; u_{m+k}$	$Zu_j \; u_n$
Xu_r	Cu_r	Zu_{r0}	$Zu_r \; u_{m+1}$	$Zu_r \; u_{m+k}$	$\boxed{Zu_r \; u_{m+h}}$	$Zu_r \; u_n \leftarrow$
Xu_m	Cu_m	Zu_{m0}	$Zu_m \; u_{m+1}$	$Zu_m \; u_{m+k}$	$Zu_m \; u_{m+h}$	$Zu_m \; u_n$
	C	Z_{00}	$Z_0 \; u_{m+1}$	$Z_0 \; u_{m+k}$	$Z_0 \; u_{m+h}$ $\uparrow$	$Z_0 \; u_n$

La primera columna está formada por los términos independientes al expresar las variables básicas en función de las no básicas (solución inicial) y las restantes columnas son coeficientes de las no básicas con signo contrario. Z_{00} es la suma de los productos de la primera columna por la columna de las Cu_j. Su valor es la de C para la solución inicial. $Z_0 \; u_{m+k}$ se forma de la misma manera pero restándole el correspondiente Cu_{m+k}.

Si todos los $Z_0 \; u_{m+k}$ fuesen negativos en [1], los coeficientes de Xu_{m+k} serían positivos, lo que indica que al tomar ésta un valor positivo aumenta C y, por tanto, la solución inicial sería la óptima. Si hay varios positivos nos convendrá hacer variar la que sea "más positiva". Sea ésta la $Z_0 \; u_{m+h}$, con lo que h es fijo.

Veamos ahora qué valor máximo podemos dar a Xu_{m+h}, con la condición de que todos los Xu_j sean no negativos y permaneciendo nulas las restantes variables no básicas, y todo ello para que C disminuya lo más posible.

Entonces es $Xu_j = Zu_{j0} - Zu_j\ u_{m+h}\ Xu_{m+h}$; $j = 1, \ldots, m$, y por ser $Xu_j \geqslant 0$ debe ser:

$$Zu_{j0} - Zu_j\ u_{m+h}\ Xu_{m+h} \geqslant 0$$

Si algún $Zu_j\ u_{m+h}$ es negativo, como $Zu_{j0} \geqslant 0$, la desigualdad anterior siempre se cumple para $Xu_{m+h} \geqslant 0$. Si algunos aquellos son positivos, debe ser:

$$0 \leqslant Xu_{m+h} \leqslant \frac{Zu_{j0}}{Zu_j\ u_{m+h}}$$

que para todos los valores de j, el valor máximo qué cumple con todas las desigualdades, es la que da al segundo miembro "el valor positivo más pequeño". Supongamos que éste es para $j = r$, es decir:

$$Xu_{m+h} = \frac{Zu_{r0}}{Zu_r\ u_{m+h}} \qquad [1]$$

Se forman, por tanto, los cocientes de la primera columna por la fijada anteriormente, y se toma entre los positivos el menor.

Los otros variables básicos tomarán los valores

$$Xu_j = Zu_{j0} - Zu_j\ u_{m+h} \frac{Zu_{r0}}{Zu_r\ u_{m+h}} \qquad [2]$$

excepto $Xu_r = 0$, con lo que la variable Xu_r sale de la base y entra Xu_{m+h} con el valor [1].

El valor [2] es una diferencia, de minuendo el valor que tenía antes, y de sustraendo un cociente que tiene por numerador el producto de los dos correspondientes en la misma fila y columna de los seleccionados, y por denominador el opuesto en diagonal (pivotado), que es fijo para todo j.

Hay que formar la segunda tabla de simplex, para lo que hay que determinar los coeficientes de los variables no básicas al despejar las básicas por haber entrado en la base Xu_{m+h} y ser Xu_r nueva variable no básica.

Veamos los coeficientes al despejar Xu_{m+h} de:

$$Xu_j = Zu_{j0} - \sum_{k=1}^{n-m} Zu_j\ u_{m+k}\ Xu_{m+k}$$

haciendo $j = r$

$$Xu_r = Zu_{j0} - \sum_{\substack{k=1 \\ (\text{k distinto de h})}}^{n-m} Zu_r\ u_{m+k}\ Xu_{m+k} - Zu_r\ u_{m+h}\ Xu_{m+h}$$

$$Xu_{m+h} = \underbrace{\frac{Zu_{r0}}{Zu_r\ u_{m+h}}}_{[1]} - \sum_{k=1}^{n-m} \underbrace{\frac{Zu_r\ u_{m+k}}{Zu_r\ u_{m+h}}}_{[3]} Xu_{m+k} - \underbrace{\frac{1}{Zu_r\ u_{m+h}}}_{[4]} Xu_r$$

El coeficiente [3] se forma como el [1], dividiendo el que había antes por el pivotado; y el [4] es el inverso de éste.

Veamos los coeficientes de las restantes incógnitas básicas

$$Xu_j = Zu_{j0} - \sum_{k=n}^{n-m} Zu_j\ u_{m+k}\ Xu_{m+k} - Zu_j\ u_{m+h}\ Xu_{m+h}$$

y sustituyendo el valor de Xu_{m+h}

$$Xu_j = \left[Zu_{j0} - \underbrace{\frac{Zu_{r0}\ Zu_j\ u_{m+h}}{Zu_r\ Zu_{m+h}}}_{[2]} \right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-m} \left[Zu_j\ u_{m+k} - \underbrace{\frac{Zu_j\ u_{m+h}\ Zu_r\ u_{m+h}}{Zu_r\ u_{m+h}}}_{[5]} \right] Xu_{m+k}$$

$$- \left[- \underbrace{\frac{Zu_j\ u_{m+h}}{Zu_r\ u_{m+h}}}_{[6]} \right] Xu_r$$

La formación del coeficiente [5] es como la del [2]; y la del [6] como [1] y [3] pero con signo contrario.

De esta forma tenemos la segunda tabla de simplex formada con los datos de la primera.

Los elementos de la última fila se forman de la misma manera, pues si en las expresiones [1] de C sustituimos el valor de Xu_{m+h} obtenido anteriormente se tiene

$$C = Z_{00} - \sum_{\substack{k=1 \\ (k \text{ distinto de } h)}}^{n-m} Z_0\, u_{m+k}\, Xu_{m+k} - Z_0\, u_{m+h}\, Xu_{m+h} =$$

$$Z_{00} - \sum_{k=1}^{n-m} Z_0\, u_{m+k}\, Xu_{m+k} - Z_0\, u_{m+h} \frac{Zu_{r0}}{Zu_r\, u_{m+h}} +$$

$$Z_0\, u_{m+h} \sum_{k=1}^{n-m} \frac{Zu_r\, u_{m+k}}{Zu_r\, u_{m+h}} Xu_{m+k} + \frac{Z_0\, u_{m+h}}{Zu_r\, u_{m+h}} Xu_r =$$

$$\Bigg[\underbrace{Z_{00} - \frac{Z_0\, u_{m+h}\, Zu_{r0}}{Zu_r\, u_{m+h}}}_{[2]} \Bigg] -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-m} \Bigg[Z_0\, u_{m+k} - \underbrace{\frac{Z_0\, u_{m+h}\, Zu_r\, u_{m+k}}{Zu_r\, u_{m+h}}}_{[5]} \Bigg] Xu_{m+k}$$

$$- \Bigg[\underbrace{- \frac{Z_0\, u_{m+h}}{Zu_r\, u_{m+h}}}_{[6]} \Bigg] Xu_r$$

		Xu_{m+1} ...	Xu_{m+k} ...	Xu_r ...	Xu_n
Xu_1	[2]	[5]	[5]	[6]	[5]
Xu_j	[2]	[5]	[5]	[6]	[5]
Xu_{m+h}	[1]	[3]	[3]	[4]	[3]
Xu_m	[2]	[5]	[5]	[6]	[5]
	[2]	[5]	[5]	[6]	[5]

Así se continúa hasta que todos los elementos de la última fila sean negativos, excepto el primero, que da el valor de C.

Si lo que se busca es el máximo de C, basta hallar el mínimo de $-C$.

* * *

Hagamos aplicación del método de Dantzig al ejemplo visto anteriormente

$$C = x_2 - x_1 \text{ (mínimo)}$$

$$\left.\begin{array}{r} -2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 \end{array}\right\}$$

Se introducen las variables de "holgura" $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$ y $x_5 \geqslant 0$ para convertir las desigualdades en igualdades

$$\left.\begin{array}{r} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_3 = 2 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 2 - x_1 + 2x_2 \\ x_5 = 5 - x_1 - x_2 \end{array}$$

con lo que se obtiene la solución inicial

$$x_1 = x_2 = 0 \quad ; \quad x_3 = 2 \qquad x_4 = 2 \qquad x_5 = 5$$

con lo que se obtiene la primera tabla de simplex y las sucesivas

		-1	1
		x_1	x_2
$0\ x_3$	2	-2	1
$0\ x_4$	2	1	-2
$0\ x_5$	5	1	1
	0	1	-1

		x_4	x_2
x_3	6	2	-3
x_1	2	1	-2
x_5	3	-1	3
	-2	-1	1

		x_4	x_5
x_3	9	1	1
x_1	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	1	$-\frac{1}{3}$	1
	-3	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

y por ser negativos todos los elementos de la última fila, la solución óptima es

$$x_3 = 9 \qquad x_1 = 4 \qquad x_2 = 1 \quad \text{con} \quad C = -3$$

Veamos otros ejemplos de aplicación de esta teoría.

Un empresario desea maximizar los beneficios con la producción de 2 productos R y S. Las operaciones iniciales se realizan en la máquina I y las finales en las IIA ó IIB. Una cierta cantidad de horas extraordinarias puede utilizarse en la máquina IIA y la designaremos por IIAA. El uso de estas horas extraordinarias hace decrecer el beneficio pero no la producción por unidad. Las unidades de tiempo requeridas para producir una unidad de R y S, las horas utilizables para cada máquina y los beneficios por unidad son:

	Producto R			Producto S			Horas utilizables
Máquina	R_1	R_2	R_3	S_1	S_2	S_3	
I	0,01	0,01	0,01	0,03	0,03	0,03	850
IIA	0,02			0,05			700
IIAA		0,02			0,05		100
IIB			0,03			0,08	900
Beneficio	0,40	0,28	0,32	0,72	0,64	0,60	

Sean x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 las cantidades que se deben producir de R_1, R_2, R_3, S_1, S_2, S_3, respectivamente. La función a maximizar es $C = 0{,}40x_1 + 0{,}28x_2 + 0{,}32x_3 + 0{,}72x_4 + {}$ $+ 0{,}64x_5 + 0{,}60x_6$ con las restricciones

$$\left.\begin{aligned} &0{,}01\,(x_1 + x_2 + x_3) + 0{,}03\,(x_4 + x_5 + x_6) \leqslant 850 \\ &0{,}02x_1 + 0{,}05x_4 \leqslant 700 \\ &0{,}02x_2 + 0{,}05x_5 + x_9 = 100 \\ &0{,}03x_3 + 0{,}08x_6 \leqslant 900 \end{aligned}\right\}$$

Introduciendo las variables de holgura x_7, x_8, x_9 y x_{10} se tiene:

$$\left.\begin{aligned} &0{,}01\,(x_1 + x_2 + x_3) + 0{,}03\,(x_4 + x_5 + x_6) + x_7 = 850 \\ &0{,}02x_1 + 0{,}05x_4 + x_8 = 700 \\ &0{,}02x_2 + 0{,}05x_5 + x_9 = 100 \\ &0{,}03x_3 + 0{,}08x_6 + x_{10} = 900 \end{aligned}\right\}$$

y la función a minimizar

$$-C = -0{,}40x_1 - 0{,}28x_2 - 0{,}32x_3 - 0{,}72x_4 - 0{,}64x_5 - 0{,}60x_6$$

Se obtiene la solución óptima

$$x_1 = 35.000 \qquad x_2 = 5.000 \qquad x_3 = 30.000 \qquad x_7 = 150$$

y las restantes nulas, con $C = 25.000$.

Veamos otro ejemplo:

Una fábrica debe producir dos partes A y B de un montaje, utilizando dos piezas de A y una de B y siempre en esta proporción. Estas piezas se producen indiferentemente con una de las máquinas I y II. La siguiente tabla da el tiempo en horas para cada componente, así como el beneficio por pieza. Se impone además que el tiempo perdido por la máquina I incurre en una penalización de 10 pesetas por hora. Se desea saber el número de piezas de A y B que debe hacer cada máquina para obtener el máximo beneficio.

	Horas utilizables	Tasa producción Hora por pieza		Beneficio por pieza	
		A	B	A	B
I	240	0,2	0,6	10	20
II	180	0,25	1	8	16

Sean x_1 y x_2 el número de piezas de A y B manufacturadas con la máquina I; y x_3 y x_4 con la II.

Las restricciones son

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}2x_1 + 0{,}6x_2 \leqslant 240 \\ 0{,}25x_3 + x_4 \leqslant 180 \\ x_1 + x_3 = 2(x_2 + x_4) \end{array}\right\}$$

La función a maximizar:

$$C = 10x_1 + 20x_2 + 8x_3 + 16x_4 - 10x_5$$

siendo x_5 el tiempo que está parada la máquina I.

Introduzcamos las variables de holgura x_5 y x_6

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}2x_1 + 0{,}6x_2 + x_5 = 240 \\ 0{,}25x_3 + x_4 + x_6 = 180 \\ x_1 + x_3 - 2(x_2 + x_4) = 0 \end{array}\right\}$$

Tres de estas seis variables deben ser nulas y los valores de las otras se obtendrán resolviendo el sistema que resulte, pero teniendo que dar valores no negativos. Para evitar esto, se introduce una variable "artificial" x_7 a la última ecuación y, por tanto, tendrá que ser nula, y para tener la certeza de que va a ser así, se introduce en la función a maximizar, esta variable con un coeficiente $M > 0$ y todo lo grande que se quiera y que no es preciso determinar, o sea:

$$C = 10x_1 + 20x_2 + 8x_3 + 16x_4 - 10x_5 - Mx_7$$

y al tener M en esta ecuación signo negativo y muy grande, debe ser: $x_7 = 0$ en la solución óptima.

El problema queda, por tanto, planteado así. Las restricciones son

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}2x_1 + 0{,}6x_2 + x_5 = 240 \\ 0{,}25x_3 + x_4 + x_6 = 180 \\ x_1 + x_3 - 2(x_2 + x_4) + x_7 = 0 \end{array}\right\}$$

y se obtiene fácilmente la solución inicial

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \qquad x_5 = 240 \qquad x_6 = 180 \qquad x_7 = 0$$

La función a minimizar es

$$-C = -10x_1 - 20x_2 - 8x_3 - 16x_4 + 10x_5 + Mx_7$$

La solución óptima es

$$x_1 = 48 \qquad x_2 = 384 \qquad x_3 = 720 \qquad x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$$

con $C = 13.920$.

* * *

En una granja se tienen 1.000 Ha de terreno cultivable y un fondo de 2.400.000 pesetas.

Hay posibilidad de sembrar tres productos diferentes, A, B y C, cuyas características son:

	Producción en media por Ha. Kilogramos	Coste de la siembra por Ha. Pesetas	Precio de renta por Kg. Pesetas
A	1.800	2.000	2
B	2.400	3.000	2,58
C	2.000	2.500	2,50

Se trata de hallar el número de hectáreas que hay que cultivar de cada producto para obtener el beneficio máximo.

Sean x, y, z el número de hectáreas que hay que sembrar de A, B y C, respectivamente.

Las restricciones son

$$x + y + z = 1.000 \qquad 2.000\, x + 3.000\, y + 2.500\, z \leqslant 2.400.000$$

Las funciones a maximizar

$$C = 2 \cdot 1.800\, x + 2{,}58 \cdot 2.400\, y + 2{,}50 \cdot 2.000\, z - 2.000\, x - \\ - 3.000\, y - 2.542$$

Simplificando e introduciendo la variable n de holgura

$$- C = - 1.600\, x - 3.192\, y - 2.500\, z$$

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1.000 \\ 4\,x + 6\,y + 5\,z + n &= 4.800 \end{aligned}\right\}$$

Partiendo de la solución factible básica

$$y = z = 0 \qquad x = 1.000 \qquad n = 800$$

se obtiene la solución óptima

$$x = 200 \qquad y = 0 \qquad z = 800 \quad \text{con} \quad C = 2.320.000$$

Veamos una aplicación a las fábricas de papel y acero.

De un rollo de papel o lámina de acero de un ancho de 28 1/4 pulgadas, hay que cortar para sacar rollos de anchos

$9\,\frac{7}{8}$ $9\,\frac{3}{8}$, $8\,\frac{1}{2}$, $4\,\frac{1}{16}$, $3\,\frac{47}{64}$, y $2\,\frac{7}{32}$, en total 6,

y de una longitud respectiva equivalente a 40, 280, 30, 35, 69 y 55 rollos. Estos cortes se realizan mediante cuchillas que se pueden colocar en posiciones distintas. Se quiere saber las combinaciones en que hay que colocar las cuchillas para que el desperdicio de papel o acero que se obtenga en total sea mínimo.

Designando por C_1, C_2, ..., las combinaciones de colocación de las cuchillas, se obtiene el siguiente cuadro:

	C_1	C_2 ... ... C_{47}	
$9\frac{7}{8}$	2	2	40 rollos
$9\frac{3}{8}$			280 "
$8\frac{1}{2}$	1		30 "
$4\frac{1}{16}$		2	35 "
$3\frac{47}{64}$			69 "
$2\frac{7}{32}$			55 "
Desperdicio	0	0,375	

Mediante la colocación C_1 de cuchillas, el ancho total es $2\left(9 + \frac{7}{8}\right) + \left(8 + \frac{1}{2}\right) = 28 + \frac{1}{4}$; no hay desperdicio.

Por la C_2 es $2\left(9 + \frac{7}{8}\right) + 2\left(4 + \frac{1}{16}\right) = 27 + \frac{7}{8}$ y el desperdicio $\left(28 + \frac{1}{4}\right) - \left(27 + \frac{7}{8}\right) = \frac{3}{8} = 0{,}375$, etc.

Las restricciones son

$$\left.\begin{array}{l} 2\ C_1 + 2\ C_2 + \dots = 40 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots = 280 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots = 55 \end{array}\right\}$$

La función a minimizar es

$$C = 0 \cdot C_1 + 0{,}375\ C_2 + \dots$$

* * *

PROGRAMACIÓN NO LINEAL.

Se trata de hallar el mínimo de la función

$$f(x_i) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

con las restricciones

$$F_j(x_i) = F_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m \quad ; \quad m < n$$

Mediante los multiplicadores de Lagrange, hay que hallar el mínimo de la función

$$L(x_i) = f(x_i) - \sum_{f=1}^{m} V_j F_j(x_i)$$

para lo que hay que formar el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta x_i} = \frac{\delta j}{\delta_i} - \sum_{j=1}^{m} V_j \frac{\delta F_j}{\delta x_i} &= 0 \\ F_j(x_i) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

de m + n ecuaciones e incógnitas

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots, n \\ j &= 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

Si $f(x_i)$ es convexa y las restricciones son lineales, estas condiciones son suficientes.

Si las restricciones son desigualdades, es minimizar la función $f(x_i)$ con $F_j(x_i) \geqslant 0$ y para reducirlo al caso anterior, se hace $F_j(x_i) = y_j^2$

Habrá que hallar el mínimo de

$$L(c_i\, y_j) = f(x_i) - \sum_{j=1}^{m} V_j \left[F_j(x_j) - y_j^2\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta x_i} = \frac{\delta j}{\delta x_i} - \sum_{j=1}^{m} V_j \frac{\delta F}{\delta x_i} &= 0 \\ \frac{\delta L}{\delta y_j} = 2\, V_j\, y_j &= 0 \\ F_j &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$

Sistema de $m + n$ ecuaciones e incógnitas

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad v_1, v_2, \ldots, v_m$$

Los mínimos serán relativos o no.

Khun y Tucher han demostrado que una condición necesaria para el mínimo es que $Vj \geqslant 0$. Si $f(x_i)$ es convexa y $Fj(x_i)$ cóncava, ese mínimo es absoluto.

Método de Wolfe para programas cuadráticos.

Se trata de minimizar la función

$$f(x_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{jk}\, x_j\, x_k + \sum_{j=1}^{n} P_j\, x_j$$

con las restricciones

$$[1] \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geqslant b_i \qquad x_j \geqslant 0 \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$$

y las condiciones

$$C_{jk} = c_{kj} \qquad y \qquad \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\, x_j\, x_k \geqslant 0$$

La restricción [1] se puede poner en la forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - x_{n+i} = b_i \qquad x_{n+i} \geqslant 0$$

La solución se reduce a un problema de programación lineal de la siguiente forma:

Se hace mínima la función

$$F = \sum_{j=1}^{n} Z_j \qquad Z_j \geqslant 0 \qquad \text{siendo} \qquad \left\{ Z_j = \sum_{k=1}^{n} C_{jk}\, x_k + P_j \right.$$

con las restricciones siguientes, todas ellas lineales

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j - x_{n+1} = b_i \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\begin{array}{ll} x_j \geqslant 0 & j = 1, 2, \ldots, m + n \\ v_j \geqslant 0 & j = 1, 2, \ldots, m + n \\ z_j \geqslant 0 & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ v_{n+i} - \sum_{k=1}^{n} C_{jk} + v_j - p_j \pm z_j = 0 \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

donde para el doble signo hay que tomar el signo de

$$\sum_{k=1}^{n} C_{jk}\ x_k^0 + p_j$$

siendo x_k^0 una solución factible $x_k = x_k^0$ de la ecuación ya escrita

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j - x_{n+1} = b_i \qquad\qquad x_j \geqslant 0$$

La solución de este problema de programación lineal nos da la solución del problema. Hay que advertir que al resolver el problema de programación lineal indicado, si la x_j es una variable básica entonces v_j no debe ser básica, y al contrario, si v_j es básica entonces x_j no debe serlo.

* * *

TEORÍA DE COLAS.

La teoría de colas se desarrolló con el fin de disponer de un modelo para predecir la conducta de un sistema que trata de suministrar a demandas que surgen aleatoriamente. El interés de las colas es por su repercusión económica en las pérdidas. El origen de las colas fue el tráfico telefónico y fue estudiado por Erlang. La longitud de una cola depende principalmente del tiempo, pues en cada instante hay una longitud diferente, por lo que este proceso es estocástico.

Las características que influyen en la formación de la cola son:

1.ª) La manera en que las unidades lleguen a formar parte de la línea de espera. Es el sistema de llegadas.

2.ª) El número de unidades de servicio que operan.

3.ª) El orden en que son servidas las unidades que están en la cola.

4.ª) El sistema de salidas.

Los problemas de cola surgen cuando hay demasiada demanda sobre el servicio, o cuando hay poca demanda, pues entonces las estaciones de servicio están vacías.

Veamos un ejemplo:

Llegadas: Una unidad cada diez minutos de media.

El tiempo de servicio dura seis minutos.

Llegadas	TIEMPO SERVICIO		Tiempo perdido	Espera	Cola
	Empieza	Termina			
8,07	8,07	8,13	0	0	0
8,14	8,14	8,20	1^m	0	0
8,25	8,25	8,31	5	0	0
8,39	8,39	8,45	8	0	0
8,43	8,45	8,51	0	2^m	1
8,56	8,56		5	0	0

Se observa, pues, que sólo ha habido una unidad en la cola, durante 2^m, entre las 8,43 y 8,45.

Notación	
n	número de unidades en total.
ν	número de unidades en la cola.
s	número de canales.
j	número de canales en servicio.
ρ	número de canales desocupados $\quad s = \rho + j$

Sea $p_n(t)$ la probabilidad de que en un tiempo *t* lleguen *n* unidades y supongamos de momento que es independiente de *t*. Sea p_n.

Los valores medios de las variables anteriores son:

$$\bar{n} = 0\ p_0 + 1\ p_1 + 2\ p_2 + \ldots$$

$$\bar{\nu} = 1\ p_{s+1} + 2\ p_{s+2} + \ldots$$

$$\bar{\rho} = 1\ p_{s-1} + 2\ p_{s-2} + \ldots$$

$$\bar{j} = 0\ p_0 + 1\ p_1 + 2\ p_2 + \ldots + s(p_{s+1} + p_{s+2} \ldots)$$

De $\quad s = \rho + j \quad$ es $\quad \bar{s} = \bar{\rho} + \bar{j}$

LEY DE POISSON.

Consideremos ahora una secuencia de sucesos idénticos que se van sucediendo a partir de un instante inicial $t = 0$ y sea *n* el número de los que se han sucedido hasta el instante *t*.

Sea $p_n(t)$ la probabilidad de que en el intervalo de amplitud *t* haya *n* entradas.

Hagamos tres hipótesis:

a) La probabilidad $p_n(t)$ depende sólo de *t*, no del origen.

b) No se producen dos entradas al mismo tiempo.

c) Si se considera un intervalo muy pequeño Δt elegido en cualquier instante, la probabilidad de que una entrada se produzca en su intervalo es $\lambda \cdot \Delta t$ en que λ es la "tasa media de llegadas".

Se demuestra (admitidas las tres hipótesis anteriores) que la probabilidad $p_n(t)$ de que en el intervalo de amplitud *t* haya *n* entradas es:

$$p_n(t) = (\lambda \cdot t)^n \frac{e^{-\lambda \cdot t}}{\underline{|n}}$$

La distribución de esta probabilidad es la llamada *Ley de Poisson.*

En el caso de fenómeno *Poissoniano* la ley de probabilidad que corresponde al intervalo que media entre dos entradas sucesivas es

$$\text{Pro.}\ \{\Theta > \theta\} = e^{-\lambda \cdot \theta}$$

la media y la desviación típica $1/\lambda$.

PROCESOS DE POISSON.

Sea

λ número medio de llegadas por unidad de tiempo.

$\frac{1}{\lambda}$ distancia media entre dos llegadas.

N número medio de servicios completos por unidad de tiempo.

$\frac{1}{N}$ tiempo medio de servicio.

Si $p_n(t)$ es la probabilidad de que en el tiempo *t* haya *n* llegados, será

$$p_n(t + h) = p_n(t)\,(1 - \lambda_n\,h - N_n\,h) + p_{n-1}(t)\,\lambda_{n-1}\,h + \\ + p_{n+1}\,N_{n+1}\,h$$

$$\frac{p_n(t + h) - p_n(t)}{h} = -\,(\lambda_n + N_n)\quad p_n(t) + p_{n-1}(t)\,\lambda_{n-1} + \\ + p_{n+1}\,N_{n+1}$$

$$p'_n(t) = -\,(\lambda_n + N_n)\;p_n(t)\;p_{n-1}(t)\;\lambda_{n-1} + p_{n+1}\,N_{n+1} \qquad [1]$$

con la condición inicial

$$p'_0(t) = -\,(\lambda_0 + N_0)\;p_0(t) + p_1(t)\;N_1 \qquad [2]$$

La integración de la ecuación diferencial [1] con la ecuación de condición [2] nos dará $p_n(t)$.

Igualando a cero los primeros miembros de [1] y [2] se obtiene una ley de recurrencia para $p_n(t)$.

En la práctica, lo que nos interesa es lím $p_n(t) = p_n$.

Veamos como aplicación, una central telefónica con infinitos canales, o sea que siempre se puede utilizar.

La probabilidad de obtener una llamada en el tiempo h es $\lambda \cdot h$. Si la línea está ocupada, la probabilidad de que termine en este intervalo es $N \cdot h$.

El sistema está en el estado E_n si hay *n* líneas ocupadas con probabilidad $p_n(t)$.

En el intervalo $t + h$ se tendrá:

$$p_n(t + h) = p_n(t)\,(1 - \lambda\,h - n \cdot N\,h) + p_{n-1}(t)\,\lambda\,h + \\ + p_{n+1}(t)\,(n + 1)\,N\,h$$

que para $h \to 0$ se tiene

$$p'_n(t) = -(\lambda + n N) p_n(t) + p_{n-1}(t) \lambda + p_{n+1} (n + 1) N$$

con la condición inicial

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + N p_1(t)$$

Igualando a cero las dos últimas ecuaciones para hallar el límite

$$0 = -(\lambda + n N) p_n + \lambda p_{n-1} + (n + 1) N p_n$$
$$0 = -\lambda p_0 + N p_1$$

de donde

$$(\lambda + n N) p_n = \lambda p_{n-1} + (n + 1) N p_{n+1}$$

que es la ley de recurrencia, obteniéndose de esta ley

$$p_n = e^{-\frac{\lambda}{N}} \frac{\left(\frac{\lambda}{N}\right)^n}{\underline{|n}}$$

es decir, en el límite es una distribución de Poisson con parámetro $\frac{\lambda}{N}$.

Veamos ahora el caso de una central con número finito de canales, en número de *a*.

Para

$$\begin{array}{ll} n = 0 & p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + N p_1(t) \\ n < a & p'_n(t) = -(\lambda + n N) p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \\ & + (n + 1) N p_{n+1}(t) \\ n \geqslant a & p'_n(t) = -(\lambda + a N) p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \\ & + a N p_{n+1}(t) \end{array}$$

Igualando a cero para obtener la ley de recurrencia.

Para

$$\begin{array}{ll} n = 0 & -\lambda p_0 + N p_1 = 0 \\ n < a & -(\lambda + n N) p_n + \lambda p_{n-1} + (n + 1) N p_{n+1} = 0 \\ n \geqslant a & -(\lambda + N a) p_n + \lambda p_{n-1} + a N p_{n+1} = 0 \end{array}$$

y se obtiene para

$$n < a \qquad p_n = p_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{N}\right)^n}{\underline{|n}}$$

$$n \geqslant a \qquad p_n = p_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{N}\right)^n}{\underline{|n}\; a^{n-a}}$$