El beneficio en el Ramo de Vida

Por el Dr. Ubaldo NIETO DE ALBA

I

INTRODUCCION

El problema de la determinación de la cuantía de los beneficios y su distribución ha sido objeto de estudio desde antiguo por numerosos autores: Wright, Sheppard, Homans (1864), Weeks (1899), Sprague y Karup (1903), etc. Posteriormente destacan las aportaciones de Höckner (1930) y de Ottaviani.

Según Zwinggi, las causas productoras del beneficio o pérdida son:

a) Por una menor o mayor mortalidad con respecto a la prevista en las bases de cálculo.

b) Por un rendimiento mayor o menor que el previsto; y

c) Por unos gastos menores o mayores con respecto a los utilizados en el cálculo de las primas.

A estas fuentes añade Saxer la correspondiente a las salidas anormales que se le suele llamar "utilidad o beneficio de extorno".

Las fórmulas que nos proporcionan la cuantía del beneficio según las distintas causas o fuentes que le producen reciben el nombre de Fórmulas de contribución.

II

FORMULAS GENERALES

En este trabajo nos proponemos obtener las fórmulas de contribución a partir de las correspondientes *fórmulas generales de variación* que figuran en nuestro trabajo publicado en los ANALES DEL INSTITUTO DE ACTUARIOS ESPAÑOLES (1967).

Además de las notaciones que figuran en dicho trabajo, utilizaremos las siguientes:

$$\underline{\quad B \quad}$$

$$\text{Gastos:} \quad df(t) = \begin{cases} f'(t)\ dt & \text{(continuo)} \\ g(t) & \text{(discreto)} \end{cases}$$

$$\text{Prima comercial:} \quad P'' = P + f(t)$$

$$\underline{\quad B^0 \quad}$$

$$\text{Gastos:} \quad df^0(t) = \begin{cases} f'^0(t)\ dt & \text{(continuo)} \\ g^0(t) & \text{(discreto)} \end{cases}$$

$$\text{Prima comercial:} \quad P^{0''} = P^0 + f^0(t)$$

La función que nos da el beneficio al pasar de las bases de primer orden a las de segundo orden, será:

$$d\Gamma'' = \begin{cases} \left(\dfrac{d\Gamma''}{dt}\right) dt & \text{(caso continuo)} \\ V_0\ b_{t+1} & \text{(caso discreto)} \end{cases}$$

siendo b_{t+1} el beneficio obtenido en $[t, t + 1)$, valorado al final del período, y $V_0 = (1 + i_0)^{-1}$.

El beneficio en [0, t) en base de Reservas comerciales será:

$$G''(t) = \int_0^{(-)t} E^0(\tau)\, d\Gamma''(\tau) =$$

$$= V''(x, 0) + \int_0^{(-)t} E^0(\tau)\, d[P''(\tau) - P^{0(n)} - f^0] - E^0(t)\, V''(x, t)$$

Por el mismo camino señalado en el Trabajo publicado se llegaría a las siguientes fórmulas generales de variación en base de Reservas comerciales:

$$E^0(s)\ \Delta V''(x, s) =$$

$$E^0(k)\ \Delta V''(x, k) + \int_k^{(-)s} E^0(t)\, d(\Delta P'' + \Gamma'')$$

$$d\Gamma'' = \frac{d(EV'')}{E} - \frac{d(E^0V'')}{E^0} - d(\Delta P^{(n)}) - d(\Delta f)$$

Las fórmulas generales de contribución se obtienen a partir de $d\Gamma''$. Especificando esta función para los casos continuo y discreto, será:

A) Caso continuo.

$$\frac{d\Gamma''(t)}{dt} = V''(t)\ \Delta\rho(x, t) -$$

$$- \left[\Delta r(t) + \sum_1^m \overset{0(r)}{S}_{x+t}\ \overset{0(r)}{\mu}_{x+t} - \sum_1^m \overset{(r)}{S}_{x+t}\ \overset{(r)}{\mu}_{x+t}\right] - \Delta f'(t)$$

siendo

$$\Delta\rho(x, t) = \left(\delta^0 + \sum_1^k \overset{0(r)}{\nu}_{x+t}\right) - \left(\delta + \sum_1^k \overset{(r)}{\nu}_{x+t}\right)$$

Para el caso particular en que $k = m$ y $\nu = \mu$ se tiene:

$$\frac{d\Gamma''}{dt} = V''(t)\ (\delta^0 - \delta) - \Delta r(t) - \Delta f'(t) -$$

$$- \sum_{1}^{m} \left\{ \left[\overset{0(r)}{S}_{x+t} - V''(t) \right] \overset{0(r)}{\mu}_{x+t} - \left[\overset{(r)}{S}_{x+t} - V''(t) \right] \overset{(r)}{\mu}_{x+t} \right\} =$$

$$= V''(t)\ (\delta^0 - \delta) + (f'\rho'(t) - f^{0\prime}(t)) + (r(t) - r^0(t)) +$$

$$+ \sum_{1}^{m} \left\{ \left[\overset{(r)}{S}_{x+t} - V''(t) \right] \overset{(r)}{\mu}_{x+t} - \left[\overset{0(r)}{S}_{x+t} - V''(t) \right] \overset{0(r)}{\mu}_{x+t} \right\}$$

= beneficio por interés +
+ beneficio por gastos +
+ beneficio por mortalidad

B) Caso discreto.

Teniendo en cuenta:

$$\frac{d(EV'')}{E} - \frac{d(E^0V'')}{E^0} = - V''(t + 1)\ \Delta(Vp_{x+t})$$

$$d(\Delta P^{(n)}) = \Delta r(t) + V^0 \sum_{1}^{m} \overset{0(r)}{S}_{x+t}\ \overset{0(r)}{a}_{x+t} - V \sum_{1}^{m} \overset{(r)}{S}_{x+t}\ \overset{(r)}{a}_{x+t}$$

$$d(\Delta f) = \Delta g(t) = g^0(t) - g(t)$$

y que el beneficio está situado al final del período $[t, t + 1)$ será:

$$b_{t+1} = (1 + i_0) \left\{ - V''(t + 1)\ \Delta(Vp_{x+t}) - \Delta g(t) - \Delta r(t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{1}^{m} \left[\overset{0}{V}\ \overset{0(r)}{S}_{x+t}\ \overset{0(r)}{a}_{x+t} - V\ \overset{(r)}{S}_{x+t}\ \overset{(r)}{a}_{x+t} \right] \right\}$$

Para el caso particular en que

$$p_{x+t} = 1 - \sum_{1}^{m} a_{x+t}^{(r)}$$

$$\overset{0}{p}_{x+t} = 1 - \sum_{1}^{m} a_{x+t}^{0(r)}$$

se tiene:

$$b_{t+1} = (1 + i_0) \Big\{ - \Delta v \, V''(x, t + 1) - \Delta g(t) - \Delta r(t) -$$

$$- \sum_{1}^{m} \Big\{ v^0 \Big[S_{x+t}^{0(r)} - V''(x, t + 1) \Big] a_{x+t}^{0(r)} - v \Big[S_{x+t}^{(r)} -$$

$$- V''(x, t + 1) \Big] a_{x+t}^{(r)} \Big\} \Big\} = v \, V''(x, t + 1) (i_0 - i) +$$

$$+ \big(g(t) - g^0(t) \big) (1 + i_0) + \big(r(t) - r^0(t) \big) (1 + i_0) +$$

$$(1 + i_0) \cdot \sum_{1}^{m} \Big\{ v \, (S^{(r)} - V'') \, a_{x+t}^{(r)} - v^0 \, (S^{0(r)} - V'') \, a_{x+t}^{0(r)} \Big\}$$

Teniendo en cuenta:

$$\big(V''(t) + P''(t) \big) = r(t) + g(t) +$$

$$+ v \sum_{1}^{m} S_{x+t}^{(r)} \; a_{x+t}^{(r)} + vpx + t \, V''(t + 1)$$

y suponiendo

$$px + t = 1 - \sum_{1}^{m} a_{x+t}^{(r)}$$

será

$$vV(t + 1) = \Big(V''(t) + P''(t) \Big) - r(t) - g(t) -$$

$$- v \sum_{1}^{m} \Big[S_{x+t}^{(r)} - V''(t + 1) \Big] \; a_{x+t}^{(r)}$$

que sustituido en la fórmula del beneficio:

$$b_{t+1} = (i_0 - i) \Big[(V''(t) + P''(t)) - r(t) - g(t) -$$

$$- v \sum_{1}^{m} [S^{(r)}_{x+t} - V''(t+1)] \; a^{(r)}_{x+t} \Big] + (g(t) - g^0(t)) \; (1 + i_0)$$

$$+ (r(t) - r^0(t)) \; (1 + i_0) +$$

$$+ (1 + i_0) \sum_{1}^{m} \Big[v(S^{(r)} - V'') \; a^{(r)}_{x+t} - v^0(S^{0(r)} - V'') \; a^{0(r)}_{x+t} \Big]$$

$$= (V''(t) + P''(t)) \; (i_0 - i) +$$

$$+ [g(t) \; (1 + i) - g^0(t) \; (1 + i_0)] + [r(t) \; (1 + i) -$$

$$- r^0(t) \; (1 + i_0)] + \sum_{1}^{m} \Big\{ \Big[S^{(r)}_{x+t} - V''(t+1) \Big] \; a^{(r)}_{x+t}$$

$$- \Big[S^{0(r)}_{x+t} - V''(t+1) \Big] \; a^{0(r)}_{x+t} \Big\}$$

En donde se tiene el beneficio por intereses, por gastos y por mortalidad.

III

FORMULAS PARTICULARES

a) Modelo de Ottaviani generalizado.

Para llegar a esta fórmula haremos la siguiente sustitución:

$$
\begin{aligned}
r(t)\,(1+i) - r^{0}(t)\,(1+i_0) \simeq - r(t)\,(i_0 - i) \\
- \left(r^{0}(t) - r(t)\right) \\
= - r(t)\,(i_0 - i) - \\
r(t)\,(p^{0}x + t - px + t) \\
= - r(t)\,(i_0 - i) - \\
r(t)\left[\sum_{1}^{m} \overset{(r)}{a}_{x+t} - \sum_{1}^{m} \overset{0(r)}{a}_{x+t}\right]
\end{aligned}
$$

con lo cual la fórmula del beneficio será:

$$
\begin{aligned}
b_{t+1} = {} & (V''(t) + P''(t) - r(t))\,(i_0 - i) + [g(t)\,(1+i) - \\
& - g^{0}(t)\,(1+i_0)] + \sum_{1}^{m}\Big[(\overset{(r)}{S}_{x+t} - r(t) - V''(t+1))\,\overset{(r)}{a}_{x+t} - \\
& - (\overset{0(r)}{S}_{x+t} - r(t) - V''(t+1))\,\overset{0(r)}{a}_{x+t}\Big]
\end{aligned}
$$

= el beneficio por interés +

\+ beneficio por gastos +

\+ beneficio por mortalidad

b) Modelo de Zwinggi generalizado.

Representando por P^z la prima Zillmer y por V^z el capital de cobertura zillmerizado, se tiene la siguiente fórmula:

$$b_{t+1} = [V^z(t) + P^z(t) - r(t)] (i_0 - i) + [g_z(1 + i) -$$

$$- g^0_z(t) (1 + i^0)] + \sum_1^m \Big[(S^{(r)}_{x+t} - r(t) - V^z(t + 1)) \, a^{(r)}_{x+t}$$

$$- (S^{0(r)}_{x+t} - r(t) - V^z(t + 1)) \, a^{0(r)}_{x+t} \Big].$$

en donde

$$P'' = P + \bar{\varphi} + g_z = P^z + g_z$$

siendo $\bar{\varphi}$ = tasa de zillmarización.

c) Fórmula de Saxer generalizada.

Llamando

$$a^{0(m+1)}_{x+t} = \text{probabilidad por salidas anormales}$$

será:

$$p^0 x + t + \sum_1^m a^{0(r)}_{x+t} + a^{0(m+1)}_{x+t} = 1$$

y suponiendo:

$S^{0(m+1)}_{x+t}$ = suma devuelta en caso de salida anormal

siendo:

$$S^{0(m+1)}_{x+t} \leq V^z_{(t+1)}$$

la fórmula de contribución será:

$$b_{t+1} = (V^z(t) + P^z(t)) (i_0 - i) + [g_z(1 + i) - g^0_z(1 + i^0)] +$$

$$+ \sum_1^m \Big[(S^{(r)}_{x+t} - r(t) - V^z_{(t+1)} \; a^{(r)}_{x+t} -$$

$$- (S^{0(r)}_{x+t} - r(t) - V^z_{(t+1)} \; a^{0(r)}_{x+t} \Big] -$$

$$- (S^{0(m+1)}_{x+t} - V^z_{(t+1)} \; a^{0(m+1)}_{x+t}$$

IV

PLANES DE DISTRIBUCION

También se les llama planes de dividendo o sistemas de distribución de beneficios. Deben reunir los siguientes requisitos: que la distribución del beneficio sea lo más próxima a la realidad, y que no sean administrativamente complicados.

A) En primer lugar nos encontramos con los planes de distribución naturales. En ellos se hace el cálculo año por año, según las fórmulas de contribución, y en base de la prima de tarifa.

El beneficio repartido se atribuye después mediante alguno de los siguientes criterios: pago inmediato, acumulación con intereses hasta, generalmente, el pago del capital o aumentando el capital asegurado.

Con el fin de llegar a una compensación en los diferentes años se suele formar un *Fondo de dividendos*. La fórmula puede ser:

$$F(t) = \frac{1}{E^0(t)} \int_0^{(-)\,t} E^0(\tau)\,d\left[\Gamma''(\tau) - \Delta(t)\right]$$

siendo $\Delta(t)$ los beneficios repartidos.

Se le suele atribuir, a este sistema, el inconveniente de requerir mucho trabajo administrativo al dar lugar a participaciones de distinta cuantía.

B) En los llamados *planes mecánicos* la cuantía del beneficio es independiente del efectivamente logrado cada año. De este modo, y hasta cierto punto, se invierte la solución.

Primeramente se considera la cuantía de los excedentes, y a partir de ellos se buscan las primas de tarifa. Estas incluyen los citados excedentes, en forma de suplemento de seguridad.

Ello da lugar a que en los *sistemas mecánicos* existan consideraciones prospectivas (a diferencia de lo que sucede en los planes naturales) que suelen abarcar períodos de cinco años.

La cantidad a repartir se busca que sea un porcentaje, normalmente, de la prima comercial o del capital asegurado.

1) Si el porcentaje es sobre la prima comercial y suponiendo un período (0, t) en el que se reparten, como promedio, los excedentes acumulados, se tiene:

$$0 = \frac{1}{E^0(t)} \int_0^{(-1)\,t} E^0(\tau)\,d\left[\Gamma''(\tau) - \alpha P''(\tau)\right]$$

es decir:

$$\alpha = \frac{\displaystyle\int_0^{(-)\,t} E^0(\tau)\,d\Gamma''(\tau)}{\displaystyle\int_0^{(-)\,t} E^0(\tau)\,dP''(\tau)}$$

2) *Método de Höckner.*—Este método nos permite llegar a un plan mecánico sobre el capital asegurado.

Partiendo del siguiente caso particular de la fórmula general:

$$b_{t+1} = (tV''x + P''x)\,(i_0 - i) + [g(1+i) - g_0(1+i_0)] +$$
$$+ (S_{x+t} - t + 1V''x)\,(q_{x+t} - q^0_{x+t})$$

y teniendo en cuenta que

$$(tV'' + P''x)\,(1+i) = S_{x+t}\,q_{x+t} + g(1+i) + p_{x+t}\cdot t + 1V''x$$

es decir:

$$t + 1V_x = \frac{(tV''_x + P''_x)(1 + i) - S_{x+t}\, q_{x+t} - g(1 + i)}{p_{x+t}}$$

que sustituido en b_{t+1} nos queda:

$$b_{t+1} = (tV''_x + P''_x)(i_0 - H.\, i) + [g(1 + i) - g_0(1 + i_0)] +$$

$$+ (q_{x+t} - q^0_{x+t}) \cdot$$

$$\cdot \left[S_{x+t} - \frac{(tV''_x + P''_x)(1 + i) - S_{x+t}\, q_{x+t} - g(1 + i)}{p_{x+t}} \right]$$

$$= S_{x+t} \frac{q_{x+t} - q^0_{x+t}}{p_{x+t}} +$$

$$+ \left(g(1 + i) \frac{p^0_{x+t}}{p_{x+t}} - g^0(1 + i_0) \right) +$$

$$+ (tV''_x + P''_x) \left[i_0 - i - (1 + i) \frac{q_{x+t} - q^0_{x+t}}{p_{x+t}} \right]$$

Con ello se tienen tres sumandos: El primero es el llamado beneficio por suma, que es proporcional al Capital asegurado y a un factor llamado de submortalidad. El segundo sumando contiene el beneficio por gestión, incluyendo submortalidad y rendimiento.

El tercer sumando es proporcional a los capitales de cobertura y a un factor $i_0 - j$, en donde

$$j = i + (1 + i) \frac{q_{x+t} - q^0_{x+t}}{p_{x+t}}$$

llamando tasa ficticia.

Cuando el factor de submortalidad resulta aproximadamente igual para los diferentes contratos, el llamado *beneficio de suma* dependerá solamente del capital asegurado. Si, además, este capital es constante, se tiene:

$$S_{x+t} \frac{q_{x+t} - q^0_{x+t}}{p_{x+t}} = S \cdot \alpha = \text{constante}$$

Sin embargo, el sumando $(tV''x + P''x)(i_0 - j)$ resulta de valoración más complicada, ya que intervienen las reservas. Por otra parte, es preciso tener en cuenta que en los primeros años la reserva es pequeña. En todo caso, considerando que $i_0 - j \simeq 0$ se llega al plan mecánico antes aludido.

La marcha de un plan mecánico sería la siguiente: a la reserva inicial $R_i(t)$, formada generalmente antes del período correspondiente a los beneficios, se le sumarán los beneficios realmente obtenidos $b(t)$ y se le restarán aquellos pagados o abonados a los asegurados según el plan $b^n(t)$. Es decir:

$$R_i(t) = b(t) - b^n(t) = R_i(t + 1)$$

Un *control dinámico* del plan exige comparar esta reserva con la realmente existente. Ello dará lugar a decisiones sobre la modificación de las futuras tasas de reparto de beneficios.

Como dice Saxer, esta reserva, que sirve de control de los beneficios repartidos, recibe el nombre de "Capital de cobertura de dividendos", y no debe confundirse con el Fondo de dividendos, en que están contenidos los excedentes efectivamente obtenidos. Su cálculo se hace por diferencia entre las reservas calculadas con bases de segundo orden y primas conteniendo el suplemento para beneficios y las reservas con bases de primer orden y primas sin suplemento para beneficios.

V

BIBLIOGRAFIA

AMMETER, H.: "Réserve de solvabilité naturelle ou mécanique en assurance sur la vie". *B. de l'Ass. des Act. Suisses*, octubre 1966).

DI MARE, A.: "Participación en las utilidades". *Anales Instituto Actuarios Españoles*, 1962.

LASHERAS-SANZ, A.: *Matemática del Seguro*.

NIETO DE ALBA, U.: "Obtención de fórmulas más generales en la Teoría matemática de la variación". *Anales del I. de A. Españoles*, 1967.

— "Teoría unitaria en la matemática de las operaciones de Seguros sobre la vida". *R. I. S.*, núm. 22.

OTTAVIANI: "Sulla Participazione degli Assicurati agli utili". *Giorn. dell'Inst. Ital. degli Att.*, anno XXII, núms. 3-4. Roma.

SAXER, W.: *Versicherungsmathematik*, 1.ª Parte, Cap. IX.

ZWINGGI, E.: *Versicherungsmathematik*, 2.ª edición, Cap. IV.