

# Elementos para la estimación de una tabla de mortalidad de inválidos

*La Superintendencia Financiera de Colombia (SFC) ha presentado para comentarios el proyecto de actualización de la tabla de mortalidad de inválidos, Hombres y Mujeres, reemplazando las tablas adoptadas mediante la Resolución 0585 del 11 de abril de 1994. Este ejercicio representa una oportunidad para incluir en la estimación de la mortalidad de este segmento particular de la población, los factores relevantes que determinan su dinámica.*

Por:

**Wilson Mayorga M**

Director de Cámara Técnica de Vida

**Yennifer Feo**

Investigadora Cámara de Vida

FASECOLDA

**Andrés Mauricio Villegas R**

Consultor Externo

La Superintendencia Financiera de Colombia (SFC) ha presentado para comentarios el proyecto de actualización de la tabla de mortalidad de inválidos, Hombres y Mujeres, reemplazando las tablas adoptadas mediante la Resolución 0585 del 11 de abril de 1994. Este ejercicio representa una oportunidad para incluir en la estimación de la mortalidad de este segmento

particular de la población, los factores relevantes que determinan su dinámica.

La metodología actuarial aceptada en los casos de poblaciones de asegurados o válidos es la graduación por métodos paramétricos o no paramétricos, donde la variable relevante en la estimación de la probabilidad de

muerte es la edad de las personas. (Ver London (1985) y Debon (2003)). La estimación de la tabla de mortalidad de inválidos realizada por la SFC para el caso de las tablas de mortalidad de inválidos, corresponde a un ejercicio de graduación en el cual se procedió a determinar los parámetros de una distribución Makeham, usando las ecuaciones recurrentes de King-Hardy, con base en la información de las estadísticas de mortalidad de personas pensionadas inválidas reportadas a la Superintendencia, tomando como periodo de análisis el periodo de 2005 a 2010 (Ver SFC (2012)).

Sin embargo el cálculo de mortalidad de inválidos está influenciado de manera determinante por la definición misma de invalidez, su causa, antigüedad o duración y el grado de calificación, que influyen en la dinámica de la población y tienen impacto directo en las tasas de mortalidad.

En particular, Pittaco (2012) menciona como factores determinantes de la mortalidad de poblaciones inválidas las siguientes:

- Tipo de invalidez, de acuerdo a su origen.
- Duración o antigüedad desde la ocurrencia del evento de invalidez.
- Grado de invalidez.
- Edad a la que inicia el evento de invalidez.

El autor considera que la combinación de estos factores hacen que la población de personas inválidas tenga un factor de “mortalidad extra” que debe ser modelado, vía la estimación de tablas de mortalidad específicas o la inclusión de ajustes a los parámetros de mortalidad de poblaciones inválidas, de manera tal que en cualquier caso se incluyan los factores mencionados previamente en la estimación de la mortalidad.

Bajo una definición formal, la mortalidad de las personas inválidas se puede expresar en términos de la probabilidad de muerte en el año siguiente como:

$$q_{x+t}^{(k)} = \psi(x, t; k)$$

Donde

- $x$  = Edad de inicio de la invalidez.
  - $t$  = Es el tiempo desde el inicio de la invalidez.
  - $k$  = Representa la categoría, en términos de gravedad,
  - $\psi$  = de la invalidez.
- Denota una ley paramétrica de mortalidad o una tabla de mortalidad numérica.

Pittaco (2012) propone: o bien estimar un modelo paramétrico que ajuste la mortalidad de la población teniendo en cuenta los anteriores parámetros, o como aproximación alternativa, en lugar de usar una función  $\psi$  específica, expresar la mortalidad de inválidos como una transformación de la mortalidad ajustada de la población válida. De esta manera, si  $q_{x+t}$  representa la probabilidad de muerte de un individuo válido o “estándar” a edad  $x + t$ , la probabilidad de muerte ajustada se podría expresar como:

$$q_{x+t}^{(k)} = \Phi(q_{x+t}, t; k)$$

Donde el tiempo y el grado de invalidez se incluyen mediante la estimación de parámetros apropiados. Un modelo paramétrico que cumpla con este ajuste podría ser:

$$\Phi(q_{x+t}, t; k) = A_t^{(x)} q_{x+t} + C_t^{(k)}$$

Donde los parámetros  $A$  y  $C$  varían según la categoría de invalidez y dependen de  $t$ , capturando el efecto de la duración de la invalidez sobre la mortalidad.

Algunos estudios a nivel mundial ya han tenido en cuenta el impacto de estos factores sobre la mortalidad de inválidos. El lector interesado puede ver Segerer (1993), Rickayzen (2007) y Pittaco (2012) para una revisión de algunos casos de uso de esta metodología.

Para ilustrar la importancia de considerar las variables asociadas con el fenómeno de invalidez que afectan la mortalidad, se realizó un análisis preliminar de la

mortalidad de los hombres inválidos, segmentados por tiempo desde el inicio de la pensión (duración) con la información que fue compartida por la SFC con el Gremio Asegurador, y que coincide con la información utilizada por las SFC en el proyecto de actualización de la tabla de mortalidad de inválidos.

El momento de inicio de la pensión es una proxy para el momento de estructuración de invalidez y es de esperar que las personas que están recién invalidadas tengan mayor mortalidad que aquellas que llevan mayor tiempo como inválidas. Intuitivamente, las personas que llevan mayor tiempo invalidadas tendrán diferentes tipos de invalidez, por ejemplo no tendrán enfermedades graves, ya que aquellos inválidos con enfermedades graves ya habrán fallecido después de cierto tiempo.

El gráfico 1 muestra las tasas de mortalidad para inválidos que llevan menos de 5 años como inválidos y las tasas de mortalidad para aquellos que llevan 5 o más años como inválidos. Los resultados muestran que la mortalidad de aquellos recién invalidados es significativamente más

alta que la mortalidad de aquellos con mayor tiempo como inválidos.

Adicionalmente, y sólo con propósitos ilustrativos, se estimó un modelo GLM donde la mortalidad además de depender de la edad, depende de la duración. Específicamente se ajustó el modelo:

$$D_{x+t} \sim \text{Poisson}(E_{x+t}\mu_{x+t})$$

$$\log \mu_{x+t} = \beta_0 + \beta_1(x+t) + \beta_2(x+t)^2$$

Donde  $\mu_{x+t}$  es la fuerza de mortalidad para un individuo de edad  $x+t$  y tiempo desde la invalidación  $t$ ,  $t=0, 1, 2, 3-4, 5+$ , y  $D_{x+t}$ , y  $E_{x+t}$  son las muertes y las exposición central observadas a edad  $x+t$  y duración  $t$ . Si tomamos como referencia la duración  $5+$  en este modelo el factor  $A_t = \exp(a_t)$  representa el porcentaje de sobremortalidad que experimentan los individuos de duración, respecto a la mortalidad última (es decir cuando  $t=5+$ ).

El Gráfico 2 muestra las tasas de mortalidad observadas y ajustadas para las diferentes duraciones. La línea

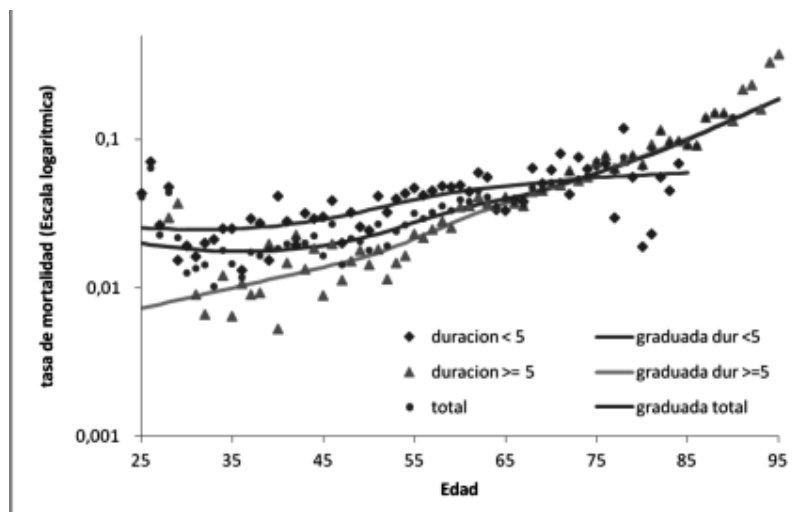


Gráfico 1. Tasa de Mortalidad por tiempo desde la Invalidez

## Análisis

negra representa las tasas de mortalidad ajustadas, ignorando la duración, es decir, utilizando el modelo.

$$\log \mu_x = \beta_0^* + \beta_1^* x + \beta_2^* x^2$$

Por su parte, el Gráfico 3 presenta el factor de ajuste por sobremortalidad,  $A_t$ , para las diferentes duraciones. De esta figura se observa que la mortalidad para los individuos recién inválidos es

considerablemente mayor, con la mortalidad durante el primer año desde la invalidación, siendo alrededor de 2.2 veces superior al nivel de mortalidad última.

La no consideración del efecto de selección sobre la mortalidad en el cálculo de las tarifas y las reservas de pensiones, puede conllevar a una subestimación significativa de la esperanza de vida, y en consecuencia

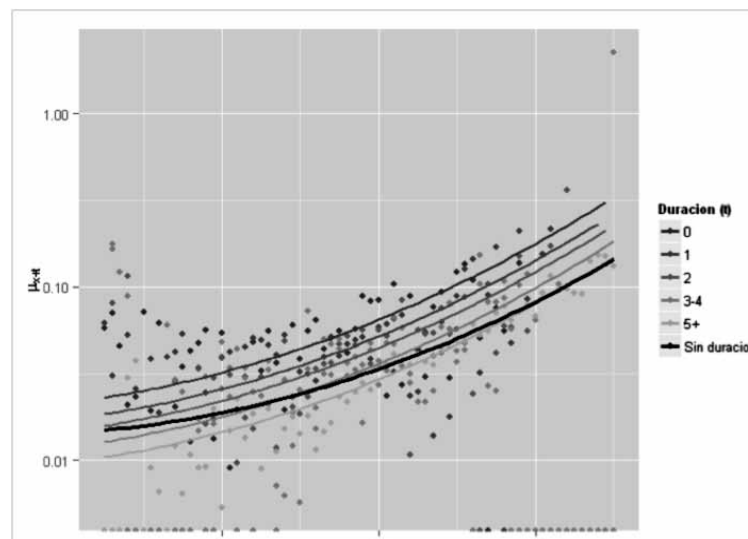


Gráfico 2. Tasas de Mortalidad por Duración (Escala logarítmica)

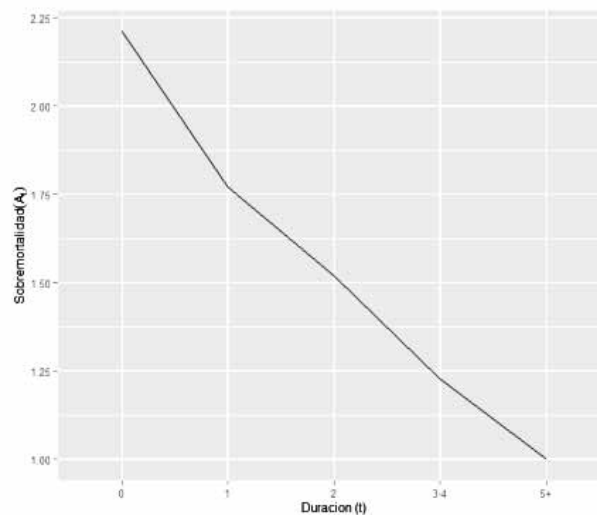


Gráfico 3. Tasas de Mortalidad por Duración (Escala logarítmica)

,de las obligaciones financieras. Para ilustrar este punto, se calculó la esperanza de vida para individuos de diferentes edades  $x$  y diferentes duraciones desde la estructuración de la invalidez, utilizando las tasas de mortalidad resultantes del modelo GLM descrito anteriormente y utilizando el modelo GLM sin dependencia de la duración (1). La tabla 1 muestra los resultados correspondientes.

$$\log \mu_x = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 \quad (1)$$

Esperanza de Vida  
Modelo Estimado en función de Duración

Edad ( $x$ )	Duración ( $t$ )						Modelo Sin Duración
	0	1	2	3	4	5+	
30	33.2	33.7	34.0	34.2	34.2	34.3	31.3
40	27.1	27.6	27.9	28.1	28.1	28.2	26.2
50	21.2	21.7	22.1	22.3	22.3	22.4	21.1
60	15.7	16.3	16.6	16.9	16.9	17.0	16.3

Tabla 1

En general, se observa que las esperanzas de vida que se estimarían con la tabla de mortalidad que consideraría la dependencia de la duración son significativamente mayores a la calculadas, ignorando la dependencia de la duración.

Por ejemplo, para un individuo de 30 años con una duración de 5 años o más (es decir, cuya estructuración de invalidez ocurrió antes de los 25 años), ignorar el impacto de la duración sobre la mortalidad implica una subestimación de la esperanza de vida en un 9%, equivalente a 3 años adicionales de vida.

El ejercicio ilustrativo anterior nos lleva a analizar la importancia de considerar el impacto de variables que influyen en el fenómeno de invalidez, lo cual nos permitirá estimar con mayor precisión el comportamiento de la mortalidad de inválidos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Segerer, G (1993) The actuarial treatment of the disability risk in Germany, Austria and Switzerland. Insurance: Mathematics and Economics 13 (1993) 131-140.
- Pittacco (2012) Mortality of Disabled People. University of Trieste. Working Paper
- Olivieri A. and Pitacco E. (2011), Introduction to Insurance Mathematics. Technical and Financial Features of Risk Transfers, Springer.
- Rickayzen B.D. (2007), An Analysis of Disability-linked Annuities, Actuarial Research Paper No. 180, Faculty of Actuarial Science and Insurance, Cass Business School, City University, London
- Superintendencia Financiera de Colombia (2012), Tablas De Mortalidad de Inválidos: Estudio y Construcción, Dirección de Investigación y Desarrollo.