PROBABILIDAD DE RUINA BAJO DIFERENTES HIPOTESIS DE LA SINIESTRALIDAD AGREGADA

M. Mármol Jiménez[1], A. Alegre Escolano[2] y M. Claramunt Bielsa[3]

RESUMEN

En este trabajo planteamos el cálculo de la probabilidad de ruina asumiendo dos hipótesis diferentes para modelizar el coste total.

Hallaremos la expresión de la probabilidad de ruina asumiendo un Proceso de Poisson Compuesto y asumiendo que la siniestralidad agregada se ve perturbada por un modelo de difusión.

Finalmente realizamos un análisis comparativo entre las expresiones obtenidas en función del nivel inicial de las reservas y del coeficiente de seguridad.

PALABRAS CLAVE: Solvencia, Proceso de Wiener, Ecuaciones diferenciales estocásticas

---

[1] Profesora Ayudante, Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial Universidad de Barcelona.

[2] Catedrático de Universidad. Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial Universidad de Barcelona.

[3] Profesora Titular, Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial Universidad de Barcelona.

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo de la probabilidad de ruina es un tema ampliamente tratado en la literatura actuarial. El cálculo de esa probabilidad, $\psi(u)$, se realiza en tiempo infinito, probabilidad de ruina última, y tiempo continuo, según la clasificación realizada por Bülhmann(1970, p.133), siendo:

$$\psi(u) = P[R(t) < 0]$$

donde $R(t)$ es el nivel de las reservas en el momento t:

$$R(t) = u + c \cdot t - S(t)$$

que depende del nivel inicial de las reservas $R(0) = u$, de c que es la intensidad de prima considerada aquí como constante en el tiempo, y de $S(t)$ que es el proceso de siniestralidad agregada hasta el momento t. $S(t)$es función de la cuantía de los siniestros $F(z)$ y de la distribución del número de siniestros N, con $E(N) = \lambda$. Consideraremos ρ como el recargo de seguridad $\rho = \dfrac{c}{\lambda \cdot E[z]}$, cumpliéndose $c > \lambda \cdot E[z]$.

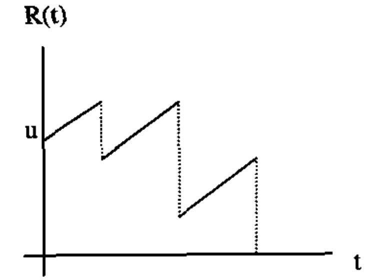
En función de como modelizemos $S(t)$, se produce una diferencia en el cálculo de R(t), y por tanto se ve afectada la probabilidad de ruina. En este trabajo asumimos dos posibles hipótesis para describir la siniestralidad agregada:

1) El proceso clásico del riesgo, donde la ocurrencia de los siniestros es un Proceso de Poisson Compuesto. El proceso de las reservas es:

$$R(t) = u + c \cdot t - S_t$$

donde $S(t) = Z_1 + ... + Z_N$

Gráficamente:



El desarrollo de esta hipótesis para el proceso del riesgo está ampliamente tratado (Panjer(1997),Bowers et al(1992))

2) La hipótesis que asume que la siniestralidad agregada se ve perturbada por un proceso de Wiener:

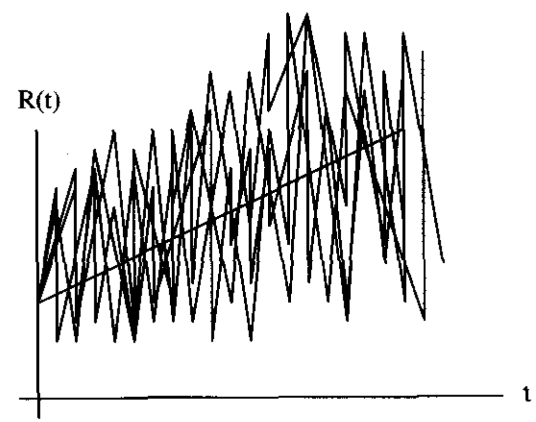
$$dS(t) = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW(t)$$

quedando el proceso de las reservas determinado por la siguiente ecuación estocástica:

$$dR(t) = \eta \cdot dt - \sigma \cdot dW(t)$$

siendo $W(t)$ un proceso de Wiener estándar.

Gráficamente



El desarrollo de esta hipótesis la podemos encontrar en Asmussen,S(1997) y Grandell,J.(1990).

En este trabajo hallamos la expresión para la probabilidad de ruina (partiendo de su complementaria, la probabilidad de supervivencia $\phi(u)=1-\psi(u)$) cuando asumimos un Proceso de Poisson Compuesto y cuando asumimos un modelo de difusión para la siniestralidad agregada. Finalmente hacemos un análisis comparativo entre las probabilidades de ruina halladas bajo las dos modelizaciones del coste total.

2. PROBABILIDAD DE RUINA BAJO LA HIPÓTESIS DEL PROCESO CLÁSICO DEL RIESGO

En el modelo clásico de la teoría de la ruina se calcula la probabilidad de ruina de una cartera de riesgos modelizando el coste total de los siniestros a través de un proceso de Poisson compuesto, es decir considerando que el número de siniestros sigue una distribución discreta de Poisson de parámetro λ y la cuantía individual del siniestro una distribución continua $F(z)$ siendo $E[z]=m$ y $Var[z]=s^2$. Como consecuencia de utilizar una distribución de Poisson en el número de siniestros, el tiempo que transcurre entre la ocurrencia de dos siniestros puede ser modelizado mediante una distribución exponencial de media $\frac{1}{\lambda}$.

Los valores de la esperanza y la varianza del coste total vendrán dados por

$$\begin{aligned} E[S_t] &= E[z]\cdot E[N] = m\cdot\lambda\cdot t \\ Var[S_t] &= E[z]^2\cdot Var[N] + E[N]\cdot Var[z] = \lambda\cdot t\cdot\left(m^2+s^2\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Una primera aproximación para la determinación de la ecuación que permite obtener la probabilidad de supervivencia es el argumento diferencial usado por Cramer (1930,p.75):

$$\phi(u)=(1-\lambda\cdot dt)\cdot\phi(u+c\cdot dt)+\lambda\cdot dt\cdot\int_0^{u+c\cdot dt}\phi(u+c\cdot dt-z)\cdot dF(z)$$

Un planteamiento alternativo, propuesto por Feller (1971,p 183), Grandell (1991, p 5) y Gerber (1975, p. 114), es el basado en las ecuaciones de renovación. Como el proceso de Poisson es un proceso de renovación, y la ruina no puede producirse antes del momento de ocurrencia del primer siniestro, tenemos:

$$\phi(u)=E[\phi(u+c\cdot t-z)]=\int_0^{\infty}\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}\cdot\int_0^{u+c\cdot t}\phi(u+c\cdot t-z)\cdot dF(z)\cdot dt$$

A partir de cualquiera de los dos planteamientos anteriores, llegamos a la ecuación integro-diferencial que determina la probabilidad de supervivencia.

$$\phi'(u)=\frac{\lambda}{c}\cdot\phi(u)-\frac{\lambda}{c}\cdot\int_0^{u}\phi(u-z)\cdot dF(z)$$

Si suponemos que la cuantía de los siniestros se distribuye según una exponencial normalizada $dF(z)=e^{-z}\cdot dz$, llegamos a:

$$\phi(u)=1-\frac{\lambda}{c}\cdot e^{-\left(1-\lambda/c\right)u}$$

por lo que

$$\psi(u)=\frac{\lambda}{c}\cdot e^{-\left(1-\lambda/c\right)u}$$

o:

$$\psi(u)=\frac{1}{1+\rho}\cdot e^{-\left(\rho/(1+\rho)\right)u} \tag{2}$$

donde debido a que hemos usado la exponencial normalizada el volumen inicial de las reservas, u, viene definido en unidades de cuantía media del siniestro, es decir que en unidades monetarias $R(0)$ son $u \cdot E[z]$

3. PROBABILIDAD DE RUINA BAJO LA HIPÓTESIS DE UN PROCESO DE DIFUSIÓN.

Una hipótesis alternativa al Proceso de Poisson consiste en asumir que el proceso de la siniestralidad agregada se ve modificado por un proceso de Wiener, siendo el diferencial de la siniestralidad un valor μ perturbado por su desviación standard σ :

$$dS(t) = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW(t) \tag{3}$$

siendo μ la intensidad de siniestralidad.

Si integramos la expresión (3):

$$S(t) = \mu \cdot t + \sigma \cdot W(t) \tag{4}$$

Como vamos a plantear la comparación con el modelo de Poisson Compuesto vamos a sustituir los parámetros de la ecuación (4) por los de la esperanza y la varianza del coste total hallados en (1):

$$S(t) = m \cdot \lambda \cdot t + \xi \cdot \quad \lambda \cdot t \cdot (m^2 + s^2)$$

Si diferenciamos el proceso de siniestralidad llegamos a la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{aligned} dS(t) &= m \cdot \lambda \cdot dt + d\left[\xi_t \cdot \quad \lambda \cdot t \cdot (m^2 + s^2)\right] = \\ &= m \cdot \lambda \cdot dt + \quad \lambda \cdot (m^2 + s^2) \cdot d\left[\xi \cdot \quad t\right] \end{aligned}$$

simplificando:

$$dS(t) = m \cdot \lambda \cdot dt + \sigma \cdot dW(t) \tag{5}$$

Si recordamos que el proceso de las reservas es:

$$R(t) = u + c \cdot t - S(t) \tag{6}$$

siendo su diferencial:

$$dR(t) = c \cdot dt - dS(t)$$

y sustituyendo (5) en (6) llegamos a la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{aligned} dR(t) &= c \cdot dt - m \cdot \lambda \cdot dt - \sigma \cdot dW(t) \\ dR(t) &= (c - \lambda \cdot m) \cdot dt - \sigma \cdot dW(t) \end{aligned}$$

integrando

$$R(t) = R(0) + (c - \lambda \cdot m) \cdot t - dW(t)$$

siendo $W(t)$ un proceso de Wiener estándar normalizado.

Si consideramos $R(0) = u$ y η la intensidad anual de beneficios, $\eta = c - \lambda \cdot m$, podemos reescribir las expresiones anteriores como:

$$\begin{aligned} R(t) &= u + \eta \cdot t - \sigma \cdot W(t) \\ dR(t) &= \eta \cdot t - \sigma \cdot dW(t) \end{aligned} \tag{7}$$

Vamos a calcular la probabilidad de ruina asumiendo que el coste de los siniestros se ve perturbado por un proceso de Wiener. La probabilidad de ruina que nos planteamos es:

$$\psi(u) = P[R(t) \leq 0, t \geq 0]$$

que de forma equivalente podría ser expresada como:

$$\psi(u)=E[\psi(u+dR(t))]$$

Si desarrollamos esa expresión como la función de una variable más el incremento:

$$\psi(u+dR(t))=\psi(u)+\psi'(u)\cdot dR(t)+\frac{1}{2}\cdot\psi''(u)\cdot(dR(t))^2 \tag{8}$$

Sustituyendo la expresión (7) en (8):

$$\begin{aligned}\psi(u+\eta\cdot dt-\sigma\cdot dW(t))&=\psi(u)+\psi'(u)\cdot(\eta\cdot dt-\sigma\cdot dW(t))+\\&+\frac{1}{2}\cdot\psi''(u)\cdot(\eta\cdot dt-\sigma\cdot dW(t))^2\end{aligned} \tag{9}$$

Aplicando el operador esperanza sobre (9):

$$\begin{aligned}E[\psi(u+\eta\cdot dt-\sigma\cdot dW(t))]&=E[\psi(u)]+E[\psi'(u)\cdot(\eta\cdot dt-\sigma\cdot dW(t))]+\\&+E\left[\frac{1}{2}\cdot\psi''(u)\cdot(\eta\cdot dt-\sigma\cdot dW(t))^2\right]\end{aligned}$$

por tanto:

$$\psi(u)=\psi(u)+\psi'(u)\eta\cdot dt+\frac{1}{2}\cdot\psi''(u)\cdot\sigma^2\cdot dt \tag{10}$$

Para el desarrollo de esta última expresión hemos usado las reglas del cálculo estocástico descritas en Malliaris (1991,p. 87)

Simplificando (10):

$$0=\psi'(u)\eta\cdot dt+\frac{1}{2}\cdot\psi''(u)\cdot\sigma^2\cdot dt$$

ecuación diferencial con las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{cases}\psi(0)=1\\\psi(\infty)=0\end{cases}$$

cuya solución es:

$$\psi(u)=e^{-\frac{2\cdot\eta}{\sigma^2}\cdot u}$$

que podemos reescribir como:

$$\psi(u)=e^{-\frac{2\cdot(c-\lambda\cdot m)}{\lambda\cdot(m^2+s^2)}\cdot u}$$

que asumiendo ocurrencia exponencial y cuantía de los siniestros de media unitaria nos permitiría escribir:

$$\psi(u)=e^{-\left(\frac{c}{\lambda}-1\right)u} \tag{11}$$

Por tanto,

$$\psi(u)=e^{-\rho\cdot u}$$

4. ANÁLISIS DE LA SENSIBILIDAD DE LA PROBABILIDAD DE RUINA RESPECTO AL NIVEL INICIAL DE LAS RESERVAS: ESTUDIO COMPARATIVO

Compararemos las expresiones conseguidas bajo la hipótesis de Poisson Compuesto y de normalidad.

$$\psi_{pc}(u)=\frac{1}{1+\rho}\cdot e^{-\left(\rho/_{1+\rho}\right)u} \tag{12}$$

$$\psi_w(u)=e^{-\rho\cdot u} \tag{13}$$

Podemos observar que la expresión obtenida para el caso en que asumimos que la siniestralidad agregada se ve perturbada por un proceso de Wiener, coincide con la complementaria de la función distribución de una exponencial.

Para empezar, la primera diferencia la encontramos en el valor de las funciones para $u=0$. En el caso de asumir la hipótesis de Poisson Compuesto, tendríamos:

$$\psi_{pc}(u)=\frac{1}{1+\rho}\cdot e^{-\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)u}\Rightarrow u=0\Rightarrow\psi_{pc}(0)=\frac{1}{1+\rho}$$

y en el caso de asumir normalidad:

$$\psi_{w}(u)=e^{-\rho\cdot u}\Rightarrow u=0\Rightarrow\psi_{w}(0)=1$$

Si estudiamos el **crecimiento y decrecimiento** de las funciones, tendríamos,

$$\psi'_{pc}(u)=-\frac{\rho}{(1+\rho)^2}\cdot e^{-\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)u}<0$$

por tanto decreciente

$$\psi'_{w}(u)=-\rho\cdot e^{-\rho\cdot u}<0$$

por tanto decreciente.

Para estudiar la **concavidad y convexidad**, trabajamos con las segundas derivadas de las funciones,

$$\psi''_{pc}(u)=\frac{\rho^2}{(1+\rho)^3}\cdot e^{-\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)u}>0$$

por tanto convexa hacia el origen.

$$\psi''_{w}(u)=\rho^2\cdot e^{-\rho\cdot u}>0$$

por tanto convexa hacia el origen.

Podemos pasar ahora a estudiar la función diferencia, que nos permitirá hallar los puntos de corte entre $\psi_{pc}(u)$ y $\psi_{w}(u)$.

Definiremos la función diferencia como $d(u)=\psi_{w}(u)-\psi_{pc}(u)$:

$$d(u)=e^{-\rho\cdot u}-\frac{1}{1+\rho}\cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho}\cdot u}$$

Hallaremos el punto de las reservas iniciales $u=u^*$ que cumple $d(u^*)=0$.

$$e^{-\rho\cdot u}-\frac{1}{1+\rho}\cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho}\cdot u}=0 \tag{14}$$

Aplicando logaritmos neperianos sobre (14) llegamos a:

$$-\rho\cdot u=\ln\frac{1}{1+\rho}-\frac{\rho}{1+\rho}\cdot u$$

Despejando:

$$u^*=\frac{1+\rho}{\rho^2}\cdot\ln(1+\rho)$$

Estudiamos el **decrecimiento** de la función diferencia, asegurándonos de sí existen óptimos en su dominio,

$$d'(u) = -\rho \cdot e^{-\rho \cdot u} + \frac{\rho}{(1+\rho)^2} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot u}$$

y aplicando la condición necesaria de optimalidad $d'(u) = 0$

$$-\rho \cdot e^{-\rho \cdot u} + \frac{\rho}{(1+\rho)^2} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot u} = 0$$

siendo el punto crítico u_0:

$$u_0 = \frac{2 \cdot (1+\rho)}{\rho^2} \cdot \ln(1+\rho)$$

Comprobamos por la condición suficiente el tipo de punto crítico:

$$d''(u) = \rho^2 \cdot e^{-\rho \cdot u} - \frac{\rho^2}{(1+\rho)^3} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot u} \qquad (15)$$

sustituyendo u_0 en (15):

$$d''(u) = \rho^2 \cdot \left[(1+\rho)^{-\frac{2 \cdot (1+\rho)}{\rho}} - (1+\rho)^{-\frac{2}{\rho} - 3} \right] = \rho^3 \cdot (1+\rho)^{-\frac{2}{\rho} - 3} > 0$$

quedando demostrado que u_0 es un mínimo de la función $d(u)$, es decir el valor máximo para la diferencia negativa. La máxima diferencia en valor absoluto esta en $u = 0$. Los valores de la función diferencia en u_0 y $u = 0$ son:

$$d(0) = \frac{\rho}{1+\rho}$$

$$d(u_0) = e^{-\frac{2 \cdot (1+\rho)}{\rho} \cdot \ln(1+\rho)} - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{2}{\rho} \cdot \ln(1+\rho)} =$$
$$= -\rho \cdot (1+\rho)^{-\frac{2 \cdot (1+\rho)}{\rho}}$$

Hallamos la diferencia entre esos dos valores de la diferencia en valor **absoluto:**

$$d(0) - d(u_0) = \frac{\rho}{1+\rho} - \rho \cdot (1+\rho)^{-\frac{2 \cdot (1+\rho)}{\rho}} =$$
$$= \frac{\rho}{1+\rho} \cdot \left[1 - (1+\rho)^{-1-\frac{2}{\rho}} \right]$$

expresión positiva ya que $\frac{\rho}{1+\rho} > 0$ y $1 > (1+\rho)^{-1-\frac{2}{\rho}}$, quedando **demostrado** que $|d(0)| > d(u_0)$.

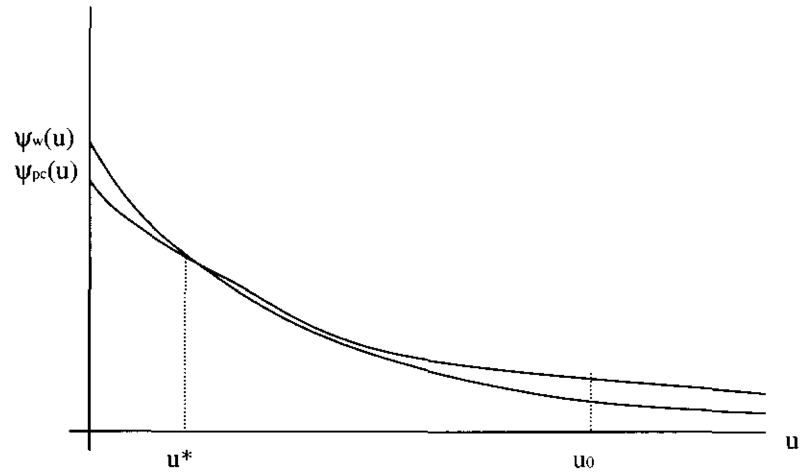
El punto de corte de la función diferencia con abscisas es

$$u^* = \frac{1+\rho}{\rho^2} \cdot \ln(1+\rho)$$

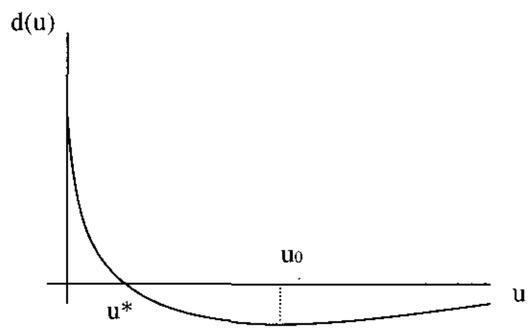
mientras que el mínimo de la función

$$u_0 = \frac{2 \cdot (1+\rho)}{\rho^2} \cdot \ln(1+\rho)$$

Podemos observar que $2 \cdot u^* = u_0$, y sabiendo que $\lim_{u \to \infty} d(u) = 0$ podemos representar la función diferencia como:



o de forma equivalente:



5. ANÁLISIS DE LA SENSIBILIDAD DE LA PROBABILIDAD DE RUINA RESPECTO AL COEFICIENTE DE SEGURIDAD: ESTUDIO COMPARATIVO

Ahora comparamos la probabilidad de ruina cuando depende del coeficiente de seguridad. Recordamos las expresiones cuando asumimos Poisson Compuesto y normalidad:

$$\psi_{pc}(\rho) = \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)u} \qquad (16)$$

$$\psi_w(\rho) = e^{-\rho \cdot u} \qquad (17)$$

Calculamos la probabilidad de ruina cuando el coeficiente de seguridad es igual a cero, $\rho = 0$. La probabilidad de ruina bajo esas dos hipótesis es igual a uno:

$$\psi_{pc}(\rho) = \psi_w(\rho) = 1$$

Para estudiar el **crecimiento y decrecimiento** trabajamos con la primera derivada:

$$\psi'_w(\rho) = -u \cdot e^{-\rho \cdot u}$$

$$\psi'_{pc}(\rho) = \frac{-1-\rho-u}{(1+\rho)^3} \cdot e^{-\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)u}$$

Las dos negativas, por tanto decrecientes.

Si calculamos la pendiente en $\rho = 0$, podemos saber cual de las dos funciones queda por encima:

$$\psi'_w(0) = -u$$

$$\psi'_{pc}(0) = -1 - u$$

como $-1-u<-u$ podemos asegurar que la probabilidad de ruina asumiendo Poisson Compuesto es mayor para valores bajos de ρ.

Si estudiamos la primera derivada observamos que en el caso de Poisson Compuesto es imposible que sea igual a cero, y en el caso de asumir Wiener, el valor de ρ que hace que la primera derivada sea igual a cero es $-1-u$, un valor negativo imposible para ρ. Por tanto no existen puntos críticos.

Para estudiar la **convexidad** estudiamos la segunda derivada:

$$\psi''_{w} = u^{2} \cdot e^{-\rho \cdot u}$$

$$\psi''_{pc} = \left[u + u \cdot \rho + u^{2} + \frac{2 \cdot (1+\rho) + 3 \cdot u}{(1+\rho)^{4}} \right] \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot u}$$

ambas positivas, por tanto convexas.

Nos planteamos el cálculo del punto de corte entre $\psi_{pc}(\rho)$ y $\psi_{w}(\rho)$:

$$e^{-\rho \cdot u} = \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{-\frac{\rho}{1+\rho} \cdot u}$$

No podemos hallar una expresión analítica del punto de corte. Si aplicamos logaritmos sobre esa expresión:

$$\ln(1+\rho) = \frac{u \cdot \rho^{2}}{1+\rho} \qquad (17)$$

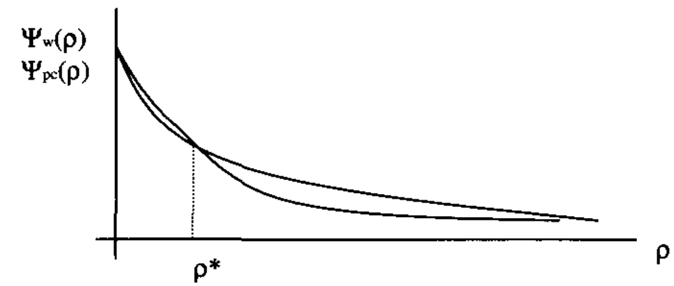
La función $\frac{u \cdot \rho^{2}}{1+\rho}$ es creciente para $\rho > 0$, (siendo sus puntos críticos $\rho = -2$ y $\rho = 0$ (mínimo)), y cóncava. La función $\ln(1+\rho)$ es una función creciente y convexa. Las dos cortan en el punto (0,0). Por tanto podemos asegurar la existencia de ρ^{*} que cumple $\psi_{pc}(\rho^{*}) = \psi_{w}(\rho^{*})$.

Sabemos que:

$$\lim_{\rho \to 0} \psi_{pc}(\rho) = \lim_{\rho \to 0} \psi_{w}(\rho) = 0$$

y no existe un valor de ρ que anula la probabilidad de ruina, es decir que existe una asíntota horizontal en el eje de abscisas.

Gráficamente:



Se adjuntan al final del artículo tres programas realizados en Mathcad en los que se calculan los valores de la probabilidad de ruina cuando asumimos el proceso clásico de la teoría del riesgo y cuando asumimos un modelo de difusión para describir la siniestralidad agregada. En el Anexo I y Anexo II se realiza el cálculo en función de u considerando dos valores predeterminados para el coeficiente de seguridad. En el Anexo III se realiza el cálculo en funcion del coeficiente de seguridad , considerando el nivel inicial de las reservas (que actúa aquí como variable exógena) igual a 1.

BIBLIOGRAFÍA

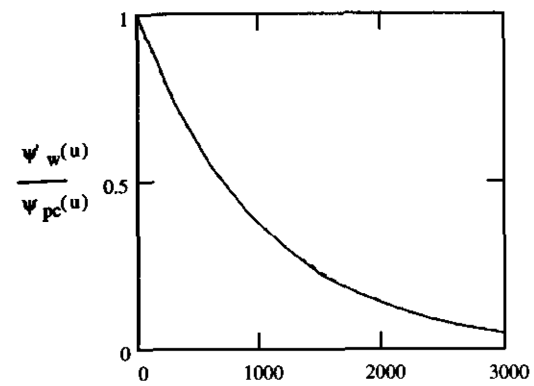
[1] ASMUSSEN, S. , TASKAR, J (1997) *"Controlled diffussion models for optimal dividend pay-out"*. Insurance: Mathematics and Economics, 20 (1997) p.1-15.
[2] BOWERS, N. , GERBER, H. , HICKMAN, J., JONES, D., NESBITT, C. (1997) *"Actuarial Mathematics"*, Society of Actuaries.

[3] BÜLLHMANN, H. (1970), *"Mathematical Methods in Risk Theory"*, Springer Verlag, New York.
[4] CRAMER, H. (1930),*"On the Mathematical Theory of risk"*, Skandia Jubilee Volume, Stockholm
FELLER, W. (1971), *"An Introduction to Probability and its Applications"*, Vol II, 2nd ed. John Wiley \& Sons, New York.
[5] GERBER, H. (1975), *"An Introduction to Mathematical Risk Theory"*. Ed. Richard D. Irwin. Illinois.
[6] GRANDELL, J (1990) *"Aspects of Risk Theory"*, Springer-Verlag, New York.
[7] MALLIARIS, A.G. , BROCK, W.A. (1991) *"Stochastic Methods in Economics and Finance"*, North-Holland
[8] PANJER, H., WILLMOT, G. (1992), *"Insurance Risk Model"*, Society of Actuaries

ANEXO I

$\rho := 0.001$

$\psi'_w(u) := e^{-\rho u}$ $\qquad \psi_{pc}(u) := \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{\frac{-\rho}{1+\rho} u}$ $\qquad d(u) := e^{-\rho u} - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{\frac{-\rho}{1+\rho} u}$

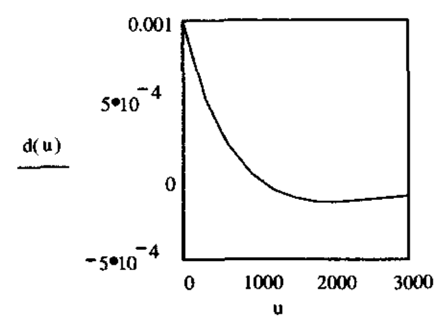


u =	$\psi'_w(u) =$	$\psi_{pc}(u) =$	$d(u) =$
0	1	0.999	$9.99\cdot10^{-4}$
300	0.74082	0.7403	$5.182\cdot10^{-4}$
600	0.54881	0.54859	$2.195\cdot10^{-4}$
900	0.40657	0.40653	$4.082\cdot10^{-5}$
$1.2\cdot10^{3}$	0.30119	0.30125	$-6.003\cdot10^{-5}$
$1.5\cdot10^{3}$	0.22313	0.22324	$-1.114\cdot10^{-4}$
$1.8\cdot10^{3}$	0.1653	0.16543	$-1.321\cdot10^{-4}$
$2.1\cdot10^{3}$	0.12246	0.12259	$-1.346\cdot10^{-4}$
$2.4\cdot10^{3}$	0.09072	0.09084	$-1.269\cdot10^{-4}$
$2.7\cdot10^{3}$	0.06721	0.06732	$-1.142\cdot10^{-4}$
$3\cdot10^{3}$	0.04979	0.04989	$-9.955\cdot10^{-5}$

$u_{pc} := \frac{1+\rho}{\rho^2} \cdot \ln(1+\rho)$ $\qquad u_{pc} = 1.04841 \cdot 10^{1}$ $\qquad \psi'_w(u_{pc}) = 0.35$, $\qquad \psi_{pc}(u_{pc}) = 0.35$

$uo := \frac{2\cdot(1+\rho)}{\rho^2} \cdot \ln(1+\rho)$ $\qquad uo = 20.968$ $\qquad \psi'_w(uo) = 0.123$ $\qquad \psi_{pc}(uo) = 0.135$ $\qquad d(uo) = -0.012$

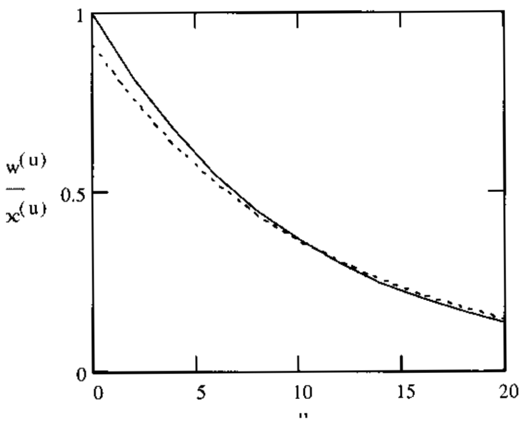
$d(0) = 0.091$



ANEXO II

$\rho := 0.1$

$\psi'_w(u) := e^{-\rho \cdot u}$ $\psi_{pc}(u) := \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{\frac{-\rho}{1+\rho} \cdot u}$ $d(u) := e^{-\rho \cdot u} - \frac{1}{1+\rho} \cdot e^{\frac{-\rho}{1+\rho} \cdot u}$

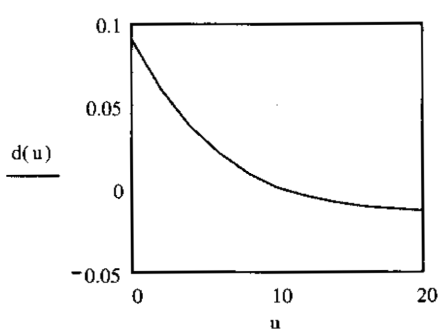


u =	$\psi'_w(u)$ =	$\psi_{pc}(u)$ =	d(u) =
0	1	0.90909	0.091
2	0.81873	0.75796	0.061
4	0.67032	0.63195	0.038
6	0.54881	0.52689	0.022
8	0.44933	0.4393	0.01
10	0.36788	0.36626	$1.616 \cdot 10^{-3}$
12	0.30119	0.30537	$-4.179 \cdot 10^{-3}$
14	0.2466	0.25461	$-8.009 \cdot 10^{-3}$
16	0.2019	0.21228	-0.01
18	0.1653	0.17699	-0.012
20	0.13534	0.14756	-0.012

$uo := \frac{2 \cdot (1+\rho)}{\rho^2} \cdot \ln(1+\rho)$ $uo = 2.001 \cdot 10^3$ $\psi'_w(uo) = 0.135$ $\psi_{pc}(uo) = 0.135$ $d(uo) = -1.352 \cdot 10^{-4}$

$d(0) = 9.99 \cdot 10^{-4}$

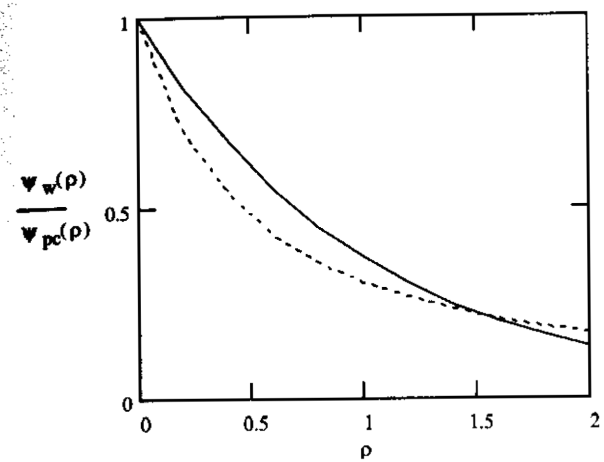
$u_{pc} := \frac{1+\rho}{\rho^2} \cdot \ln(1+\rho)$ $u_{pc} = 1.0005 \cdot 10^3$ $\psi'_w(u_{pc}) = 0.368$ $\psi_{pc}(u_{pc}) = 0.368$



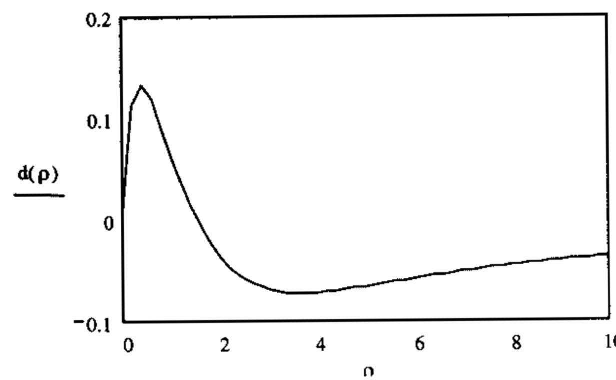
ANEXO III

$u := 1$

$\psi_w(\rho) := \exp(-\rho \cdot u)$ $\psi_{pc}(\rho) := \frac{1}{1+\rho} \cdot \exp\left(\frac{-\rho \cdot u}{1+\rho}\right)$ $d(\rho) := \exp(-\rho \cdot u) - \frac{1}{1+\rho} \cdot \exp\left(\frac{-\rho \cdot u}{1+\rho}\right)$



ρ =	$\psi_w(\rho)$ =	$\psi_{pc}(\rho)$ =
0	1	1
0.2	0.819	0.705
0.4	0.67	0.537
0.6	0.549	0.43
0.8	0.449	0.356
1	0.368	0.303
1.2	0.301	0.263
1.4	0.247	0.233
1.6	0.202	0.208
1.8	0.165	0.188
2	0.135	0.171



ρ =	d(ρ) =
0	0
0.2	0.113
0.4	0.134
0.6	0.119
0.8	0.093
1	0.065
1.2	0.038
1.4	0.014
1.6	$-5.962 \cdot 10^{-3}$
1.8	-0.022
2	-0.036