

# INCERTIDUMBRE EN LA VOLATILIDAD. UNA APLICACIÓN A LA VALORACIÓN DE OPCIONES CON BARRERA

Jacinto Marabel-Romo<sup>1</sup> y José Luis Crespo-Espert<sup>2</sup>

**Abstract:** Some barrier options, such as the down-and-out puts, exhibit a gamma that changes sign. In this article we price this kind of options assuming that there is uncertainty regarding volatility but it is assumed to lie within a certain range. We present the partial differential equation corresponding to the derivative and solve it numerically using the finite difference method. The results show that barrier option prices are quite sensitive to the existence of uncertainty about volatility.

We also show that the prices obtained using the uncertain volatility model are consistent with the prices generated under a stochastic volatility framework.

**Keywords:** uncertain volatility, barrier options, gamma, implied volatility, stochastic volatility.

## 1. Introducción

En los mercados financieros los precios de las opciones se suelen cotizar utilizando volatilidades implícitas obtenidas a partir del modelo de Black-Scholes (1973). La volatilidad implícita  $\Sigma$ , expresada como función del vencimiento  $T$  y del precio de ejercicio o strike de las opciones  $K$ , constituye la superficie de volatilidad implícita en el instante  $t$ , denotada por  $\Sigma_t(K, T)$ . Los supuestos del modelo de Black-Scholes (1973) implican que la superficie de volatilidad implícita debería ser plana y estática en el tiempo. Pero desde la caída de la bolsa en octubre de 1987, los mercados de opciones de renta variable se han caracterizado por la existencia de una dependencia negativa de la volatilidad implícita con respecto al precio de ejercicio. Esta

---

<sup>1</sup> Gestor de Derivados de Renta Variable BBVA. Vía de los Poblados s/n, 28033, Madrid. e-mail: [jacinto.marabel@grupobbva.com](mailto:jacinto.marabel@grupobbva.com) El contenido de este artículo representa la opinión personal del autor y no refleja la visión de BBVA.

<sup>2</sup> Profesor Titular de Economía Financiera y Contabilidad. Instituto Universitario de Análisis Económico y Social y Departamento de Ciencias Empresariales Universidad de Alcalá (UAH) Plaza de la Victoria, 2 28802, Alcalá de Henares (Madrid). e-mail: [jose Luis.crespo@uah.es](mailto:jose Luis.crespo@uah.es)  
Este artículo ha sido recibido en versión revisada el 6 de octubre de 2010.

dependencia negativa se conoce como *skew* de volatilidad y ha sido ampliamente documentada en la literatura. Algunos ejemplos son Heynen (1993), Derman y Kani (1994), Dupire (1994), Rubinstein (1994), Dumas, Fleming y Whaley (1997), Das y Sundaram (1999) y Derman (2003). Por otro lado, la evidencia empírica muestra que la superficie de volatilidad implícita, lejos de permanecer estática en el tiempo, evoluciona de forma aleatoria. Algunos ejemplos de este hecho pueden encontrarse en Franks y Schwartz (1991), Derman (1999), Bakshi, Cao y Chen (2000), Cont y da Fonseca (2001), Cont y da Fonseca (2002) y Daglish, Hull y Suo (2007).

Por lo anterior, han surgido distintos modelos de valoración de opciones, que abandonan el supuesto de volatilidad instantánea constante del modelo de Black-Scholes (1973) y que tratan de capturar las características de la superficie de volatilidad implícita, observadas en los mercados financieros. En este sentido, existen tres grandes grupos de modelos que permiten valorar productos de tipo europeo, así como dependientes de la trayectoria seguida por el activo subyacente de una forma consistente con el *skew* de volatilidad de mercado. Estos grupos se corresponden con los modelos de volatilidad estocástica, modelos de saltos y volatilidad local. Los modelos de volatilidad estocástica abandonan el supuesto de volatilidad constante del modelo de Black-Scholes (1973) y suponen que la volatilidad sigue un proceso estocástico posiblemente correlacionado con el proceso para el precio del activo subyacente. El modelo de Hull y White (1987), así como el modelo de Stein y Stein (1991) y el modelo Heston (1993) se encuadran dentro de este grupo. Estos modelos capturan la existencia de volatilidad en la volatilidad, la cual puede ser especialmente relevante en la valoración de ciertas opciones, como las opciones con barrera. El principal problema con este tipo de modelos es que puede resultar complicado ajustar toda la superficie de volatilidad implícita de mercado con la especificación paramétrica del modelo.

Merton (1976), entre otros, incorpora la posibilidad de saltos en el proceso estocástico para el precio del activo. Esta característica es consistente con el comportamiento de los activos financieros y permite generar *skew* en la superficie de volatilidad implícita. El problema de este tipo de modelos es que cuando los tamaños de los saltos se consideran estocásticos se necesita una opción distinta por cada tamaño de salto para construir una cartera réplica para el precio del activo derivado. Si la distribución correspondiente a la amplitud del salto es continua, se necesitarían infinitas opciones para poder construir la cartera réplica, de tal manera que el modelo es incompleto desde el punto de vista de la replicación.

Dentro de la clase de modelos de volatilidad local se incluyen, entre otros, los trabajos de Derman y Kani (1994), Dupire (1994), Rubinstein (1994), Derman *et al.* (1995), Derman *et al.* (1996a), Derman *et al.* (1996b), Andersen y Brotherton-Ratcliffe (1998), Dempster y Richard (1999) y Brown y Randall (1999). Al igual que el grupo de modelos de volatilidad estocástica, los modelos de volatilidad local abandonan el supuesto de volatilidad constante del modelo de Black-Scholes (1973). Dichos modelos postulan que la volatilidad instantánea correspondiente al proceso para el precio del activo subyacente, es una función determinista del tiempo y del precio del activo. Al considerar que la volatilidad es una función determinista del tiempo y del precio del activo subyacente, los modelos de volatilidad local no recogen adecuadamente la existencia de volatilidad en la volatilidad, lo cual puede ser especialmente relevante para la correcta valoración de productos sensibles a esta característica. En este sentido Hull y Suo (2002) muestran que el modelo de volatilidad local no es capaz de replicar los precios de opciones con barrera generados a partir de un modelo de volatilidad estocástica. Además, como plantea Derman (2003), la clase de modelos de volatilidad local genera unos skews de volatilidad futuros más planos que los actuales, lo que contradice la eterna presencia del skew en las superficies de volatilidad implícita correspondientes a los activos de renta variable.

Los modelos anteriores se utilizan profusamente por los bancos de inversión internacionales, así como por las tesorerías de los bancos comerciales para valorar sus productos derivados. Pero existe otro enfoque interesante, aunque menos extendido, para valorar y cubrir los riesgos de los activos derivados cuando los parámetros que influyen en la valoración se consideran inciertos. Avellaneda *et al.* (1995) y Lyons (1995) introdujeron este enfoque para valorar opciones cuando la volatilidad se considera incierta pero se supone que cae dentro de dos valores extremos. Estos autores mostraron que los precios, libres de arbitraje, correspondientes a las opciones se pueden describir por una ecuación diferencial estocástica en derivadas parciales no lineal. En esta ecuación la volatilidad se elige, de entre sus valores extremos, de acuerdo con la convexidad de la opción.

Como pone de manifiesto Wilmott (2006), el cual vuelve a poner de actualidad algunas ideas que abordaba Knight (1921), la incertidumbre debe entenderse de una forma diferente a la aleatoriedad. Incertidumbre hace referencia a que no es posible predecir un resultado, al igual que en el caso de la aleatoriedad, pero tampoco existe una descripción probabilística de lo que puede ocurrir. El principal supuesto es que los parámetros caen dentro de ciertos rangos predeterminados. Estos rangos pueden determinarse

utilizando realizaciones históricas o valores implícitos para los parámetros o mediante una mezcla de ambos métodos.

En un mundo como el de las finanzas, en el que los resultados dependen de una manera crucial del comportamiento humano, el enfoque de incertidumbre en los parámetros se presenta como un método natural para realizar la valoración de opciones. Además, este enfoque tiene aplicaciones muy útiles desde el punto de vista de la gestión de los riesgos inherentes a los productos derivados. En particular, puede usarse para realizar la valoración de opciones en escenarios desfavorables. En este sentido, Avellaneda y Buff (1999) aplican este modelo a la valoración de carteras formadas por una combinación de opciones europeas simples y con barrera. Por otro lado, Wilmott (2002) utiliza el modelo de volatilidad incierta para valorar opciones cliquet. Dicho autor muestra que, para este tipo de opciones, la vega puede ser relativamente pequeña precisamente en los puntos en los que la sensibilidad de la opción a la volatilidad es muy alta.

En este artículo se utiliza el modelo de incertidumbre en la volatilidad para valorar puts europeas con barrera down-and-out. Estas opciones son como las puts europeas simples, pero si el precio del activo subyacente alcanza la barrera durante la vida de la opción, entonces la opción se desactiva y pasa a valer cero. Como se muestra más adelante, la gamma correspondiente a este tipo de opciones cambia de signo dependiendo de la evolución del activo subyacente, lo cual complica sustancialmente la valoración de las mismas y las hace especialmente sensibles a la existencia de incertidumbre en la volatilidad. En este sentido, la aportación de este artículo con respecto al trabajo de Avellaneda y Buff (1999) consiste en investigar si los resultados obtenidos bajo el enfoque de incertidumbre en la volatilidad son compatibles con los precios generados en un entorno de volatilidad estocástica. En concreto, se muestra que los precios obtenidos con el modelo de incertidumbre en la volatilidad son compatibles con los precios generados a partir del modelo de Heston (1993) de volatilidad estocástica. Este hecho da soporte a la robustez del enfoque de valoración basado en la incertidumbre en los parámetros.

Nótese que las puts con barrera down-and-out pueden tener gran utilidad como un mecanismo de cobertura frente a caídas en el valor de un determinado activo. En particular, considérese una entidad exportadora que tiene una exposición positiva a la evolución del tipo de cambio entre dos divisas. Dicha entidad quiere cubrirse de la posibilidad de caídas en el tipo de cambio pero considera que este no va a estar por debajo de un determinado nivel  $H$ . En este caso, puede resultarle atractivo comprar una

put down-and-out con barrera  $H$ . Ésta es una forma de comprar protección con un coste menor al de una put europea simple o al de un put spread. Sea  $DOP_{tT}(K, H)$  el precio en el instante  $t$  de una put europea down-and-out con strike  $K$ , barrera  $H$  ( $H < K$ ) y vencimiento en el instante  $t=T$  y sea  $DIP_{tT}(K, H)$  el precio correspondiente a una put europea down-and-in con las mismas características, la cual se convierte en una put europea simple cuando el activo subyacente toca la barrera. Entonces, es fácil comprobar que ambas opciones satisfacen la siguiente ecuación:

$$P_{tT}(K) = DOP_{tT}(K, H) + DIP_{tT}(K, H) \quad (1)$$

donde  $P_{tT}(K)$  representa el precio correspondiente a una put europea corriente con precio de ejercicio  $K$ , de tal manera que resulta inmediato obtener el precio de la opción down-and-in conocido el precio de la opción down-and-out.

El resto del artículo se organiza de la siguiente forma. La sección 2 presenta el modelo de incertidumbre en la volatilidad con aplicación a la valoración de puts europeas con barrera down-and-out. En concreto, se plantea la ecuación diferencial correspondiente al activo derivado, la cual se resuelve por el método de diferencias finitas. Dicho método permite calcular de una manera relativamente sencilla el precio, así como las sensibilidades de las opciones para distintos niveles de evolución del precio del activo subyacente, lo cual es fundamental para la correcta gestión de los riesgos derivados del producto. La sección 3 muestra los resultados de la comparación de los precios obtenidos con el modelo de incertidumbre en los parámetros con los que se obtienen en un entorno de volatilidad estocástica. Finalmente, la sección 4 ofrece las conclusiones obtenidas, así como reflexiones sobre la extensión de la metodología presentada en este artículo a la valoración de activos derivados sobre activos no admitidos a negociación.

## **2. Incertidumbre en la volatilidad. Aplicación a la valoración de puts con barrera down-and-out**

En esta sección se utilizan argumentos de replicación para mostrar la ecuación diferencial no lineal correspondiente a un activo derivado bajo el modelo de incertidumbre en la volatilidad. Se plantea un análisis de escenarios en la valoración de las opciones, lo cual es de gran relevancia

para las entidades que gestionan los riesgos de este tipo de opciones, ya que permite obtener una valoración en el escenario más desfavorable posible.

## **2.1 Ecuación diferencial del activo derivado bajo el enfoque de incertidumbre en la volatilidad**

En esta sección se aplica el enfoque introducido por Avellaneda *et al.* (1995) y Lyons (1995) a la valoración de puts con barrera down-and-out cuando existe incertidumbre sobre la volatilidad. Para ello, se supone que la volatilidad instantánea del proceso para el precio del activo subyacente  $\sigma$ , cae dentro del intervalo determinado por dos valores extremos, que se consideran constantes:

$$\sigma^- < \sigma < \sigma^+$$

Estos valores extremos pueden determinarse utilizando realizaciones de volatilidad histórica, o utilizando volatilidades implícitas obtenidas del mercado o mediante una mezcla de ambos enfoques. Sea un activo de renta variable cuyo precio en el instante  $t$  viene dado por  $S_t$ . Por simplicidad se supone que tanto el tipo de interés libre de riesgo  $r$ , como la tasa de dividendos correspondiente al activo subyacente  $q$  son constantes. De tal manera que la evolución del precio del activo subyacente bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo  $Q$ , bajo la cual los activos expresados en unidades de la cuenta corriente son martingala, viene determinada por la siguiente ecuación diferencial estocástica<sup>3</sup>:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma dW_t^Q$$

donde  $W_t^Q$  es un proceso de Wiener bajo  $Q$ . Como se ha dicho previamente, el modelo de incertidumbre en los parámetros permite realizar análisis de escenarios en la valoración de productos derivados. Supóngase que se tiene comprada una put europea con barrera down-and-out con vencimiento en el instante  $t=T$ , precio de ejercicio  $K$  y barrera  $H$  ( $H < K$ ), cuyo precio en el instante  $t$  se denota por:

$$DOP_{tT}(K, H) = DOP_t(S_t, t)$$

---

<sup>3</sup> Si el activo subyacente es un tipo de cambio, la deriva vendría dada por la diferencia entre los tipos de interés correspondientes a las dos divisas.

A continuación se presenta la ecuación diferencial que sigue el activo derivado en el escenario más desfavorable posible, es decir, cuando la opción alcanza el valor más bajo posible en cada instante de tiempo. Para ello, se considera una cartera  $\Pi_t$  formada por una posición en el activo subyacente  $\alpha_t$  y en la cuenta corriente, denotada por  $\beta_t$ , tal que su valor en cada instante de tiempo coincida con el valor de la opción:

$$\Pi_t \equiv \alpha_t S_t + \beta_t = DOP_t$$

El cambio en el valor de la cartera viene dado por:

$$d\Pi_t = \alpha_t dS_t + \alpha_t q S_t dt + r \beta_t dt \quad (2)$$

Por otro lado, el cambio en el valor de la opción es:

$$dDOP_t = \Theta dt + \Delta dS_t + \frac{1}{2} \Gamma \sigma^2 S_t^2 dt \quad (3)$$

donde  $\Theta = \frac{\partial DOP_t}{\partial t}$  es la theta,  $\Delta = \frac{\partial DOP_t}{\partial S_t}$  recoge la delta y  $\Gamma = \frac{\partial^2 DOP_t}{\partial S_t^2}$  representa la gamma de la opción.

Incluso cuando la volatilidad instantánea es incierta, la elección de  $\alpha_t = \Delta$  elimina el riesgo asociado a la evolución del activo subyacente. Pero dado que no se conoce el valor de la volatilidad, se supone que dicha variable es tal que el valor de la cartera que replica la opción en cada momento, es el más bajo posible. Nótese que dado que se supone una posición larga en la opción, este será el peor escenario. Combinando las ecuaciones (2) y (3) se tiene:

$$\min_{\sigma^- < \sigma < \sigma^+} \left( \Theta - \Delta q S_t + \frac{1}{2} \Gamma \sigma^2 S_t^2 \right) = r(DOP_t - \Delta S_t)$$

Nótese que el valor de la volatilidad instantánea que genera el menor valor para la opción, dependerá del signo de la gamma. De tal manera que cuando la gamma es positiva, se elige  $\sigma = \sigma^-$  mientras que cuando la gamma es negativa, se elige  $\sigma = \sigma^+$ . Por tanto, se tiene la siguiente ecuación diferencial estocástica en derivadas parciales correspondiente al mínimo

valor de la opción  $DOP_t^-$ , bajo el enfoque de incertidumbre en la volatilidad:

$$\Theta^- + (r - q)\Delta^- S_t + \frac{1}{2}\Gamma^- \sigma^2(\Gamma^-) S_t^2 = rDOP_t^-$$

$$\sigma(\Gamma^-) = \begin{cases} \sigma^- & \Gamma^- > 0 \\ \sigma^+ & \Gamma^- < 0 \end{cases} \quad (4)$$

El resultado de la ecuación (4) es bastante intuitivo. Si se mantiene una cartera delta neutral y con gamma positiva, lo peor que puede pasar es que el activo subyacente se mueva poco, de tal manera que la volatilidad sea baja. Por el contrario, si se mantiene una cartera delta neutral pero con gamma negativa, lo peor que puede suceder es que el activo se mueva mucho, es decir que la volatilidad sea alta. Nótese que usando el argumento previo, es sencillo obtener la ecuación diferencial correspondiente al mayor valor para la opción  $DOP_t^+$ .

## **2.2 Cálculo del precio de la opción mediante el método de diferencias finitas**

La ecuación (4) es, por lo general, una ecuación no lineal por lo que tiene que resolverse de forma numérica. Para ello, en este artículo se utiliza el método de diferencias finitas, introducido por Brenann y Schwartz (1977) y Brenann y Schwartz (1978), el cual se presenta como un procedimiento natural para calcular el precio, así como las sensibilidades de los activos derivados que satisfacen la ecuación diferencial no lineal. Se considera el método explícito de diferencias finitas para discretizar la ecuación (4). A tal efecto, se introduce la siguiente notación:

$$S = idS \quad 0 \leq i \leq I$$

$$t = T - jdt \quad 0 \leq j \leq J$$

donde se considera que tanto el incremento en el precio del activo  $dS$ , como el paso temporal  $dt$  son constantes. Dado que la ecuación diferencial (4) se resuelve para  $0 \leq S \leq \infty$ , el término  $IdS$  es la aproximación del infinito usada en este trabajo. Además, se verifica que  $T = Jdt$ . Teniendo en cuenta lo anterior, se puede escribir el valor del activo derivado como:

$$DOP(S, t) = DOP(idS, T - jdt) = DOP_i^j$$



donde para simplificar la notación, se omite el superíndice  $\bar{\phantom{x}}$  correspondiente al mínimo valor posible para el precio de la opción. En este caso, el subíndice hace referencia al activo y el superíndice hace referencia al tiempo. Nótese que a medida que se incrementa  $j$ , nos movemos hacia atrás en el tiempo  $t$ . El método explícito de diferencias finitas aproxima la ecuación (4) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \frac{DOP_i^j - DOP_i^{j+1}}{dt} + (r - q)idS \left[ \frac{DOP_{i+1}^j - DOP_{i-1}^j}{2dS} \right] - rDOP_i^j + \\ & \frac{1}{2}\sigma^2(\Gamma)(idS)^2 \left[ \frac{DOP_{i+1}^j - 2DOP_i^j + DOP_{i-1}^j}{dS^2} \right] = O(dt, dS^2) \end{aligned} \quad (5)$$

donde se ha aproximado la delta de la opción utilizando una diferencia centrada y donde la gamma  $\Gamma$ , se aproxima por:

$$\Gamma = \frac{DOP_{i+1}^j - 2DOP_i^j + DOP_{i-1}^j}{dS^2}$$

El término de error  $O(dt, dS^2)$  se denomina *error de truncamiento local*. La ecuación anterior sólo se verifica para puntos interiores en el precio del activo subyacente, es decir para  $i = 1, \dots, I-1$ , de tal manera que se tienen  $I-1$  ecuaciones para las  $I+1$  incógnitas recogidas por  $DOP_i^j$ . Las dos ecuaciones restantes se obtienen de las condiciones de contorno para  $i = I$  y para  $i = H/dS$ , donde se elige  $dS$  de tal manera que  $i = H/dS$  sea un número entero. Cuando  $S = H$ , la condición de contorno viene dada por:

$$DOP_{H/ds}^j = 0 \quad i \leq \frac{H}{dS}$$

Por otro lado, como plantea Wilmott (2006), en el caso de opciones cuyo payoff es casi lineal para valores altos del precio del activo subyacente, como sucede en el caso de las puts europeas con barrera down-and-out, es posible utilizar la siguiente condición de contorno:

$$\lim_{S_t \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 DOP_t(S_t, t)}{\partial S_t^2} = 0$$

cuya representación discreta viene dada por:

$$DOP_i^j = 2DOP_{i-1}^j - DOP_{i-2}^j$$

Si se conoce el valor de  $DOP_i^j$  para todos los valores de  $i$ , la ecuación (5) permite obtener el valor de  $DOP_i^{j+1}$ . El payoff de la opción a vencimiento viene dado por:

$$DOP_i^0 = (K - idS)^+ 1_{(idS > H)}$$

donde  $1_{(idS > H)}$  es la función escalón que toma el valor uno si  $idS > H$  y cero en el resto. Por tanto, se puede calcular  $DOP_i^1$ , que representa el valor de la opción cuando queda un paso de tiempo para el vencimiento, de tal manera que es posible obtener el valor de la opción yendo hacia atrás en el tiempo. Dado que esta aproximación establece una relación entre  $DOP_i^j$  y  $DOP_i^{j+1}$ , se denomina método explícito de diferencias finitas.

En cuanto a la convergencia del método explícito de diferencias finitas, la estabilidad del mismo requiere que se verifique la siguiente relación entre el paso temporal y el incremento en el precio del activo subyacente:

$$dt \leq \frac{1}{\sigma^2 (\Gamma)} \left[ \frac{dS}{S} \right]^2$$

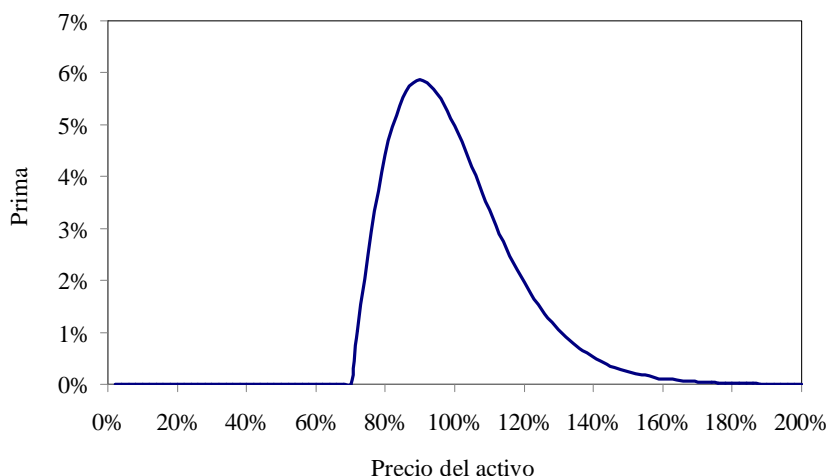
Puesto que el paso temporal  $dt$  es independiente del valor del activo subyacente, así como de su varianza instantánea, la desigualdad será más restrictiva para valores altos de  $S$  y de  $\sigma$ . Por tanto, la restricción anterior pasa a ser:

$$dt \leq \frac{1}{(\sigma^+)^2 I^2}$$

Cabe destacar que existen otros métodos en diferencias finitas, como el método de Crank y Nicolson (1947), que no tienen esta restricción en términos del paso temporal, pero cuya implementación es mucho menos intuitiva.

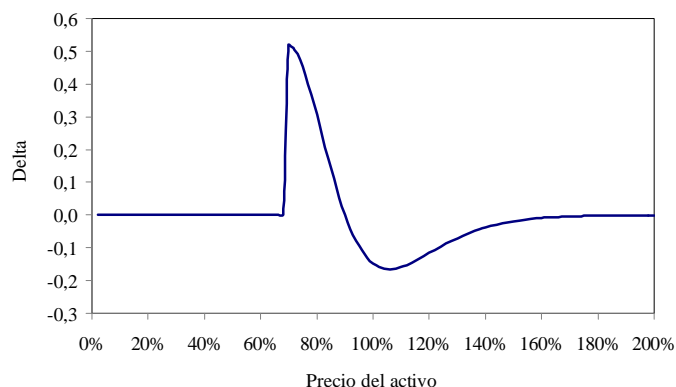
### 2.3 Volatilidad constante frente a volatilidad incierta

Supóngase inicialmente que la volatilidad instantánea correspondiente al proceso para el precio del activo subyacente  $\sigma$ , es constante e igual a un 30% anual. Las figuras 1, 2 y 3 muestran respectivamente el precio, la delta y la gamma de una put europea con vencimiento dentro de seis meses, strike at-the-money y barrera down-and-out igual al 70% del nivel at-the-money, que se obtienen a partir del método de diferencias finitas<sup>4</sup>. Se supone que el tipo de interés libre de riesgo es igual a un 2% anual, mientras que la tasa de dividendos correspondiente al activo subyacente es igual a un 1% anual.



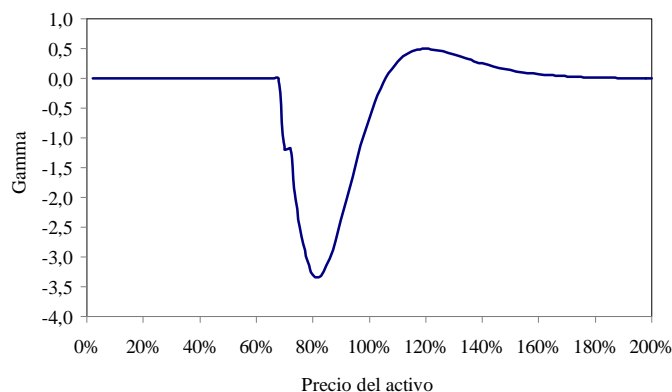
**Figura 1.** Prima de una put europea con vencimiento dentro de seis meses, strike at-the-money y barrera down-and-out igual al 70% del nivel at-the-money, obtenida con el método de diferencias finitas. Se supone que la volatilidad instantánea para el proceso correspondiente al precio del activo subyacente es igual a un 30% anual, el tipo de interés libre de riesgo es igual a un 2% anual y la tasa de dividendos del activo es igual aun 1% anual. Se ha utilizado  $S=2$  como máximo nivel para el precio del activo subyacente y se han considerado 100 pasos para la evolución de dicho precio.

<sup>4</sup> Los algoritmos numéricos correspondientes al método de diferencias finitas, así como al método de Montecarlo utilizado en la sección 3, se han implementado en Visual Basic.



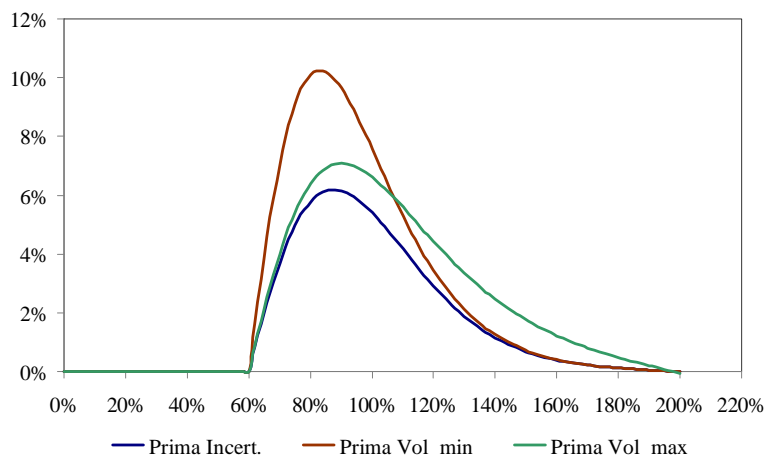
**Figura 2.** Delta de una put europea con vencimiento dentro de seis meses, strike at-the-money y barrera down-and-out igual al 70% del nivel at-the-money, obtenida con el método de diferencias finitas. Se supone que la volatilidad instantánea para el proceso correspondiente al precio del activo subyacente es igual a un 30% anual, el tipo de interés libre de riesgo es igual a un 2% anual y la tasa de dividendos del activo es igual a un 1% anual. Se ha utilizado  $S=2$  como máximo nivel para el precio del activo subyacente y se han considerado 100 pasos para la evolución de dicho precio.

La figura 2 muestra que a diferencia de lo que sucede con las puts europeas corrientes, las cuales siempre tienen delta negativa, la delta de la put con barrera down-and-out es considerablemente positiva en el entorno de la barrera. De tal manera que una entidad que tenga comprada la opción deberá, en teoría, vender títulos para cubrirse en el caso de que el activo toque la barrera y por tanto la opción se desactive.



**Figura 3.** Gamma de una put europea con vencimiento dentro de seis meses, strike at-the-money y barrera down-and-out igual al 70% del nivel at-the-money, obtenida con el método de diferencias finitas. Se supone que la volatilidad instantánea para el proceso correspondiente al precio del activo subyacente es igual a un 30% anual, el tipo de interés libre de riesgo es igual a un 2% anual y la tasa de dividendos del activo es igual a un 1% anual. Se ha utilizado  $S=2$  como máximo nivel para el precio del activo subyacente y se han considerado 100 pasos para la evolución de dicho precio.

La figura 3 muestra que la gamma de la put con barrera down-and-out pasa de ser positiva a negativa, a medida que el activo subyacente se acerca al nivel de la barrera. Es en estos casos, en los que la gamma cambia de signo, toma especial relevancia la existencia de incertidumbre en la volatilidad. Para ilustrar este hecho, la figura 4 compara las primas de las puts con barrera down-and-out obtenidas bajo el supuesto de volatilidad instantánea constante, con la prima que genera el modelo de volatilidad incierta. Se supone, al igual que en caso anterior, que el tipo de interés libre de riesgo es igual a un 2% anual, mientras que la tasa de dividendos del activo subyacente es igual a un 1% anual. Se considera el precio de una put europea con vencimiento dentro de seis meses, strike at-the-money y barrera down-and-out igual al 60% del nivel at-the-money. La línea *Prima Vol min* muestra el precio obtenido cuando se supone una volatilidad instantánea constante igual a un 36,45% anual. La línea *Prima Vol max* representa la prima bajo el supuesto de volatilidad instantánea constante igual a un 47,50% anual. Finalmente, la línea *Prima Incert.* muestra los precios generados por el modelo de incertidumbre en la volatilidad cuando se consideran los siguientes valores extremos para la volatilidad instantánea correspondiente al proceso para el precio del activo subyacente:  $\sigma^- = 36,45\%$ ,  $\sigma^+ = 47,50\%$ .



**Figura 4.** Precios de una put europea con vencimiento dentro de seis meses, strike at-the-money y barrera down-and-out igual al 60% del nivel at-the-money, obtenida con el método de diferencias finitas. Se supone que el tipo de interés libre de riesgo es igual a un 2% anual y la tasa de dividendos del activo es igual a un 1% anual. Se ha utilizado  $S=2$  como máximo nivel para el precio del activo subyacente y se han considerado 100 pasos para la evolución de dicho precio. La línea *Prima Vol min* muestra el precio obtenido suponiendo una volatilidad instantánea igual a un 36,45% anual, la línea *Prima Vol max* representa la prima obtenida cuando la volatilidad instantánea es igual a un 47,50% anual. Finalmente, la línea *Prima Incert.* recoge el precio obtenido bajo el modelo de volatilidad incierta con  $\sigma^+ = 47,50\%$  y con  $\sigma^- = 36,45\%$ .

En un entorno de volatilidad instantánea constante, cuanto menor sea ésta, menor será la probabilidad de que la barrera sea tocada y, por tanto, mayor será el valor de la opción. Lo contrario pasa cuando la volatilidad instantánea es alta. En este caso, la probabilidad de que la opción se desactive es más elevada lo que lleva a una prima más baja. Pero dado que la gamma cambia de signo en el entorno de la barrera, el modelo de incertidumbre en la volatilidad de la ecuación (4) muestra un precio todavía más bajo para la opción, que el que se consigue suponiendo una volatilidad constante igual al extremo superior para la volatilidad instantánea. Este ejemplo muestra el peligro que conlleva la utilización de una volatilidad instantánea constante para la correcta valoración y gestión de los riesgos inherentes a productos financieros derivados, para los que la gamma cambia de signo en función de la evolución del activo subyacente. En estos casos, el modelo de incertidumbre en la volatilidad se presenta como un método natural y robusto para llevar a cabo una adecuada gestión de los riesgos.

### **3. Incertidumbre en la volatilidad y volatilidad estocástica**

Como se dijo en la introducción de este artículo, los modelos de volatilidad estocástica permiten tener en cuenta la existencia de volatilidad en la volatilidad, la cual es de especial relevancia en la valoración de determinadas opciones, como las opciones con barrera. Uno de los modelos más utilizados dentro de la clase de modelos de volatilidad estocástica es el modelo de Heston (1993). El motivo principal es que bajo dicho modelo, es posible obtener soluciones semi-analíticas, en el sentido de que es preciso resolver integrales en la parte real de números complejos, para los precios de las opciones europeas. Este hecho es importante para la calibración de los parámetros del modelo a los datos de mercado.

Para comprobar la robustez de los precios generados a partir del modelo de incertidumbre en la volatilidad, en esta sección se investiga si los mismos son consistentes con los obtenidos bajo el modelo de Heston (1993) de volatilidad estocástica. A tal efecto, a continuación se presentan las principales características del modelo de Heston (1993). Posteriormente, se utiliza una especificación paramétrica correspondiente a dicho modelo para calcular los precios de puts europeas con barrera down-and-out, los cuales se comparan con los precios obtenidos con el modelo de incertidumbre en la volatilidad.

### 3.1 Especificación paramétrica para el modelo de Heston

El modelo de Heston (1993) postula los siguientes procesos para el precio del activo subyacente<sup>5</sup>  $S_t$ , así como para su varianza instantánea  $v_t$ , bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo  $Q$ :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sqrt{v_t}dW_{S,t}^Q \quad (6)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t}dW_{v,t}^Q \quad (7)$$

Donde  $\theta$  representa el nivel medio correspondiente a la varianza de largo plazo,  $\kappa$  recoge la velocidad de reversión a la media y  $\eta$  es la volatilidad de la varianza instantánea. Los procesos  $W_{S,t}^Q$  y  $W_{v,t}^Q$  son dos procesos de Wiener bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo  $Q$ . Ambos procesos están correlacionados, de tal manera que:

$$dW_{S,t}^Q dW_{v,t}^Q = \rho dt$$

Hay dos parámetros que afectan de forma determinante a los precios de las opciones, en términos de la distribución correspondiente al activo subyacente. El parámetro de correlación  $\rho$ , afecta a la asimetría de la distribución y, por tanto, permite generar skew de volatilidad. Un valor negativo para la correlación implica que la varianza es mayor ante caídas en el valor del activo subyacente, lo que lleva a colas más anchas en la parte izquierda de la distribución del activo y a mayores precios para las puts fuera de dinero. La volatilidad de la varianza  $\eta$ , por su parte, afecta a la curtosis de la distribución. Cuanto mayor es  $\eta$ , más anchas son las colas de la distribución. Este efecto incrementa los precios de las calls y las puts fuera de dinero, ya que hace más probable que dichas opciones venzan in-the-money.

Considérese una call europea con precio de ejercicio  $K$  y vencimiento en el instante  $t=T$ . Es inmediato comprobar que su payoff a vencimiento puede expresarse como:

$$(S_T - K)^+ = (S_T - K)1_{(S_T > K)}$$

---

<sup>5</sup> Aunque en el artículo original de Heston (1993), no se consideraba el pago de dividendos, aquí se presenta el modelo considerando una tasa de dividendos continua  $q$ , para el activo subyacente.

De tal manera que el precio de la opción europea bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo vendrá dado por:

$$\begin{aligned}
 C_{0KT} &= P(0,T) \left( E_Q \left[ S_T 1_{(S_T > K)} \right] - K E_Q \left[ 1_{(S_T > K)} \right] \right) \\
 C_{0KT} &= e^{-qT} S_0 E_Q \left[ \frac{S_T}{F_{0,T}} 1_{(S_T > K)} \right] - P(0,T) K E_Q \left[ 1_{(S_T > K)} \right] \quad (8) \\
 C_{0KT} &= e^{-qT} S_0 P_1 - P(0,T) K P_2
 \end{aligned}$$

donde  $P(0,T) = e^{-rT}$  representa el precio, en el instante  $t = 0$ , de un bono cupón cero que paga una unidad monetaria en el instante  $t = T$  y  $E_Q[\cdot]$  hace referencia al valor esperado bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo  $Q$ .

Nótese que la expresión para el valor de la call europea de la ecuación anterior es análoga a la fórmula de Black-Scholes (1973). Heston (1993) demostró que las funciones  $P_j$  para  $j = 1, 2$ , pueden obtenerse a partir de la transformación inversa de Fourier:

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-iz \ln(K)} f_j}{iz} \right] dz \quad (9)$$

donde  $i = \sqrt{-1}$  y  $f_j$  para  $j = 1, 2$ , son las funciones características correspondientes a  $P_j$  y toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 f_j &= e^{C_j + D_j v_0 + iz \ln(S_0)} \\
 C_j &= (r - q) iz T + \frac{\kappa \theta}{\eta^2} \left[ (b_j - \rho \eta iz + d_j) T - 2 \ln \left( \frac{1 - g_j e^{T d_j}}{1 - g_j} \right) \right] \\
 D_j &= \frac{b_j - \rho \eta iz + d_j}{\eta^2} \left[ \frac{1 - e^{T d_j}}{1 - g_j e^{T d_j}} \right] \\
 g_j &= \frac{b_j - \rho \eta iz + d_j}{b_j - \rho \eta iz - d_j} \\
 d_j &= \left[ (\rho \eta iz - b_j)^2 - \eta^2 (2u_j iz - z^2) \right]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$



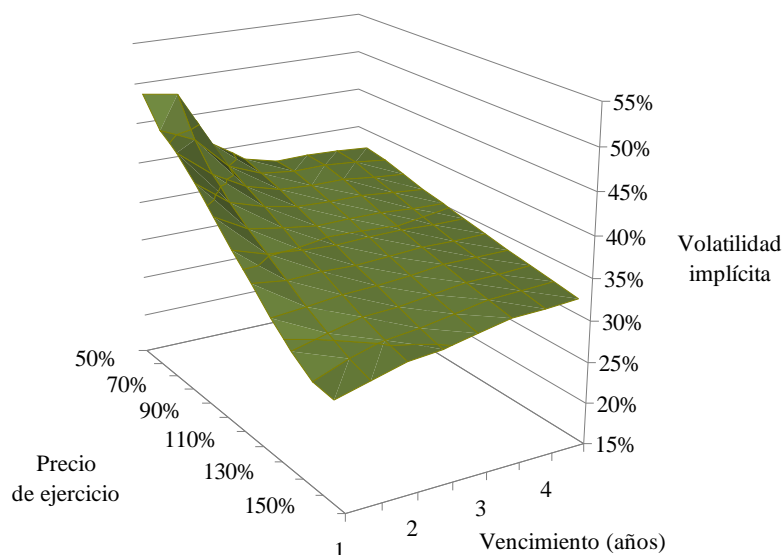
siendo  $u_1 = \frac{1}{2}$ ,  $u_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $b_1 = \kappa - \rho\eta$  y  $b_2 = \kappa$ . Por tanto, para calcular el precio de una opción europea utilizando la fórmula de la ecuación (8), es necesario evaluar numéricamente las dos integrales en la parte real de números complejos de la ecuación (9). Para ello, siguiendo a Rouah y Vainberg (2007), se utiliza la regla de integración trapezoidal correspondiente a la familia de integración de Newton-Cotes. Dicha regla consiste en formar un segmento para unir la función de integración al final de cada subintervalo, produciendo un trapecio. Dado que las integrales de la ecuación (9) convergen rápidamente, utilizamos como intervalo de integración  $[0,100]$  con un paso de 0,1.

El modelo de Heston (1993) permite generar distintos patrones para la superficie de volatilidad implícita en función de los valores correspondientes a los parámetros del modelo. La tabla 1 muestra la especificación que se utiliza en este artículo para generar los precios de las opciones europeas bajo el modelo de Heston (1993). Los valores de los parámetros son del mismo orden de magnitud que los estimados por Gatheral (2006) utilizando volatilidades implícitas de mercado para el índice de renta variable Standard and Poor's 500.

**Tabla 1.** Especificación de los parámetros del modelo de Heston

Parámetro:	$\kappa$	$\theta$	$\eta$	$\rho$	$v_0$
Valor:	1,7000	0,1500	0,5000	-0,9500	0,1444

La figura 5 muestra la superficie de volatilidad implícita generada a partir de la especificación de la tabla 1. Para obtenerla, se ha utilizado el método iterativo de Newton-Raphson. La superficie presenta un skew de volatilidad bastante pronunciado en el corto plazo, el cual se va aplanando a medida que los vencimientos de las opciones se van haciendo más lejanos. Este patrón de comportamiento ha sido ampliamente observado en los activos de renta variable. Algunos ejemplos son Derman *et al.* (1996a), Derman *et al.* (1995) o Gatheral (2006).



**Figura 5.** Superficie de volatilidad implícita generada con el modelo de Heston (1993). Se supone que la tasa de dividendos del activo subyacente es igual a un 1% anual, mientras que el tipo de interés libre de riesgo es igual a un 2% anual y se utiliza la especificación de la tabla 1. Los precios de ejercicio están expresados como porcentaje del precio correspondiente al activo subyacente.

### 3.2 Valoración de puts con barrera down-and-out

A diferencia de lo que sucede con las opciones europeas corrientes, por lo general, no es posible obtener soluciones analíticas para los productos derivados bajo el modelo de Heston (1993). Por tanto, se hace necesario recurrir a métodos de solución numéricos, tales como el método de diferencias finitas o el método de simulación de Montecarlo. Puesto que en la sección anterior se ha presentado el método de diferencias finitas, en esta ocasión se va a utilizar el método de Montecarlo para calcular el precio de las opciones con barrera bajo el modelo de Heston (1993) de volatilidad estocástica.

Aplicando el lema de Ito a  $\ln(S_t)$  en la ecuación (6) e integrando en el intervalo  $(0, T)$ , se llega a la siguiente expresión para el precio del activo subyacente en el instante  $t = T$  :

$$S_T = S_0 \exp \left[ (r - q)T - \frac{1}{2} \int_0^T v_t dt + \int_0^T \sqrt{v_t} dW_{S,t}^Q \right]$$

Por otro lado, integrando la ecuación (7) en el intervalo  $(0, T)$  se obtiene:

$$v_T = v_0 + \int_0^T \kappa(\theta - v_t) dt + \int_0^T \eta \sqrt{v_t} dW_{v,t}^Q$$

Sea  $[0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T]$ , una partición de un intervalo de tiempo en  $M$  segmentos iguales de amplitud  $\Delta t$ , de tal manera que  $t_j = jT / M$  para cada  $j = 0, 1, \dots, M$ . Para aproximar las distintas trayectorias que puede seguir el precio del activo subyacente, así como su varianza instantánea bajo el modelo de Heston (1993), se utilizan las siguientes discretizaciones:

$$S_{t_j}^M = S_{t_{j-1}}^M \exp \left[ \left( (r - q) - \frac{1}{2} v_{t_{j-1}}^M \right) \Delta t + \sqrt{v_{t_{j-1}}^M} \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1t_j} \right] \quad (10)$$

$$v_{t_j}^M = \left[ \kappa(\theta - v_{t_{j-1}}^M) - \frac{\eta^2}{4} \right] \Delta t + \left[ \sqrt{v_{t_{j-1}}^M} + \frac{\eta}{2} \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{2t_j} \right]^2 \quad (11)$$

$$\varepsilon_{2t_j} = \rho \varepsilon_{1t_j} + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_{t_j}$$

donde  $S_{t_j}^M$  y  $v_{t_j}^M$  representan respectivamente, el valor del activo y el de su varianza instantánea en el instante  $t_j$ , cuando se utilizan  $M$  pasos de tiempo,  $\varepsilon_{1t_j}$  y  $\varepsilon_{t_j}$  son variables independiente e idénticamente distribuidas según una distribución normal estándar. Además,  $\varepsilon_{1t_j}$  y  $\varepsilon_{t_j}$  son independientes.

Para discretizar el proceso correspondiente a la varianza instantánea se ha utilizado el esquema de Milstein. De la ecuación (11) se desprende que si  $v_{t_{j-1}}^M = 0$ , entonces  $v_{t_j}^M$  vendrá dado por:

$$v_{t_j}^M = \left[ \kappa\theta - \frac{\eta^2}{4} \right] \Delta t + \frac{\eta^2}{4} \Delta t \varepsilon_{2t_j}^2$$

El mínimo valor para  $v_{t_j}^M$  se alcanza cuando  $\varepsilon_{2t_j} = 0$ . En este caso  $v_{t_j}^M$  tomará siempre valores positivos si  $\frac{4\kappa\theta}{\eta^2} > 1$ . Nótese que esta desigualdad se verifica para la especificación paramétrica de la tabla 1. No obstante,

como plantea Gatheral (2006), con el esquema de Milstein se reduce sustancialmente la frecuencia de valores negativos para la varianza instantánea comparativamente con el esquema de Euler, incluso en los casos para los que  $\frac{4\kappa\theta}{\eta^2} \leq 1$ .

A partir de las discretizaciones correspondientes a las ecuaciones (10) y (11), es posible calcular el valor de las opciones con barrera bajo el modelo de Heston (1993) mediante la realización de  $N$  simulaciones de Montecarlo independientes. En concreto, es posible expresar el valor de una put europea down-and-out en el instante  $t=0$ , con precio de ejercicio  $K$ , barrera  $H$  y vencimiento en el instante  $t=T$ , bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo  $Q$ , de la siguiente manera:

$$DOP_{0T}(K, H) = P(0, T) E_Q \left[ (K - S_T)^+ 1_{(N_T > H)} \right]$$

$$N_T = \min_{0 \leq t \leq T} (S_t) \quad H \leq K$$

De tal manera, que se tiene el siguiente estimador de Montecarlo para el valor de la put europea con barrera down-and-out, realizando  $N$  simulaciones independientes:

$$DO\hat{P}_{0T}(K, H) = P(0, T) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K - \hat{S}_{T,i}^M)^+ 1_{(N_{T,i} > H)} \quad (12)$$

$$N_{T,i} = \min_{0 \leq t_j \leq T} (\hat{S}_{t_j,i}^M); \quad t_j = \frac{jT}{M}; \quad j = 0, 1, \dots, M$$

donde  $\hat{S}_{T,i}^M$  representa el valor simulado del activo subyacente en el instante  $t = T$ , obtenido en la simulación  $i$ -ésima, utilizando  $M$  pasos de tiempo.

Considérese una put europea con strike at-the-money, vencimiento dentro de seis meses y barrera down-and-out igual al 60% del nivel at-the-money. La tabla 2 compara el precio, expresado como porcentaje del precio del activo subyacente, obtenido con el modelo de Heston (1993), con los que se obtienen bajo el supuesto de volatilidad instantánea constante, así como con el modelo de incertidumbre en la volatilidad. En el caso del modelo de

Heston (1993), se realizan 15.000 simulaciones de Montecarlo<sup>6</sup> utilizando el estimador de la ecuación (12) junto con la especificación paramétrica de la tabla 1. En el caso del modelo de incertidumbre en la volatilidad, se consideran los siguientes valores extremos correspondientes a la volatilidad instantánea del activo subyacente:

$$\sigma^- = 36,58\% \quad \sigma^+ = 47,50\%$$

El límite inferior se ha elegido para que coincida con la volatilidad implícita at-the-money para las opciones con vencimiento dentro de seis meses, generada por la especificación paramétrica para el modelo de Heston (1993) de la tabla 1. Por otro lado, el extremo superior de volatilidad incierta se corresponde prácticamente con el nivel de volatilidad implícita a seis meses para un precio de ejercicio igual al 54% del nivel at-the-money. En particular, el valor concreto para esta volatilidad implícita es 47,41%. La tabla 2 también muestra los precios de la opción con barrera obtenidos utilizando el supuesto de volatilidad instantánea constante para cada uno de los dos valores extremos considerados.

**Tabla 2.** Precios de una put europea con strike at-the-money, vencimiento seis meses y barrera igual al 60% del nivel at-the-money

Modelo	$\sigma = 36,58\%$	$\sigma = 47,50\%$	Incertidumbre	Heston
Precio	7,58%	6,61%	5,41%	5,36%

Notas. Las dos primeras columnas de la tabla 2 recogen respectivamente, el precio obtenido cuando se supone una volatilidad instantánea constante igual a 36,58% y 47,50%. La tercera columna muestra el precio correspondiente al modelo de incertidumbre en la volatilidad, cuando se utilizan como valores extremos los dos niveles de volatilidad anteriores. Finalmente, la última columna recoge el precio obtenido con la especificación paramétrica de la tabla 1 para el modelo de Heston (1993).

Los resultados de la tabla 2 muestran que los precios obtenidos bajo el supuesto de volatilidad instantánea constante, están bastante alejados del precio generado a partir del modelo de Heston (1993) incluso en el caso en el que, en lugar de usar la volatilidad at-the-money, se considera un nivel de volatilidad mayor, correspondiente a las puts fuera de dinero próximas al nivel de barrera. Por otro lado, el precio que se obtiene con el modelo de incertidumbre en la volatilidad utilizando como valores extremos los niveles de volatilidad implícita generados por el propio modelo de Heston (1993)

<sup>6</sup> Utilizando este número de simulaciones se consigue un error de Montecarlo inferior a 0,10%, expresado en porcentaje del precio del activo subyacente. En particular, el error de Montecarlo o desviación estándar del estimador es de 0,08%

correspondientes al nivel at-the-money y a un entorno de la barrera, es completamente consistente con el precio generado a partir del modelo de Heston (1993) de volatilidad estocástica<sup>7</sup>. Este resultado muestra que el enfoque basado en la incertidumbre en la volatilidad, permite generar precios para las opciones con barrera compatibles con uno de los modelos de volatilidad estocástica más utilizados. Este hecho ofrece evidencia a favor de las buenas propiedades del modelo de incertidumbre en la volatilidad, que se presenta como un método natural para valorar y gestionar los riesgos asociados a los productos derivados, de una forma consistente con la información que aportan las volatilidades implícitas. Otra ventaja de este enfoque, reside en el hecho de que es posible realizar análisis de escenarios desfavorables, lo que permite a las entidades poder realizar estimaciones de los resultados que obtendrían en situaciones adversas.

#### **4. Conclusiones**

En este artículo se ha abordado la valoración de opciones con barrera utilizando el enfoque de incertidumbre en la volatilidad, el cual considera que la volatilidad instantánea del proceso para el precio del activo subyacente  $\sigma$ , cae dentro del intervalo determinado por dos valores extremos, que se consideran constantes. En un mundo como el de las finanzas sometido a resultados inciertos, el modelo de incertidumbre en la volatilidad se presenta como un mecanismo natural para gestionar y valorar los productos derivados. Dicho enfoque es aplicable a todo tipo de opciones, pero en este artículo se ha particularizado en el caso de las puts europeas con barrera down-and-out, porque son un caso paradigmático de opciones cuya gamma cambia de signo en función de la evolución del activo subyacente, lo cual las hace especialmente sensibles a la existencia de incertidumbre sobre el nivel de volatilidad.

En este artículo se ha investigado si el modelo de incertidumbre en la volatilidad es capaz de generar precios consistentes con las superficies de volatilidad implícitas generadas a partir del modelo de Heston (1993) de volatilidad estocástica. Este hecho es de especial relevancia ya que los modelos de volatilidad estocástica y, en particular el modelo de Heston (1993), permiten capturar factores como la existencia de volatilidad en volatilidad, que afectan de forma determinante al precio de las opciones con barrera. Los resultados muestran que el enfoque de incertidumbre en la

---

<sup>7</sup> Nótese que el error de Montecarlo asociado al precio obtenido bajo el modelo de Heston (1993) es de 0,08%.

volatilidad es capaz de generar precios para las puts con barrera down-and-out consistentes con los obtenidos bajo el modelo de Heston (1993). Este resultado corrobora la validez del enfoque de incertidumbre en la volatilidad como mecanismo adecuado para la valoración y gestión de los riesgos inherentes a los productos derivados exóticos cuya gamma cambia de signo en función del comportamiento del activo subyacente, tales como las opciones con barrera. Además, el modelo permite la realización de análisis de escenarios en situaciones adversas, lo cual es de gran relevancia para la determinación de los riesgos a los que se enfrentan las entidades que gestionan este tipo de productos derivados.

Por otro lado, como se dijo en la introducción de este artículo, es fácil obtener el precio de una put con barrera down-and-in a partir del precio de una put con barrera down-and-out y de una put europea simple. Las puts con barrera down-and-in están estrechamente relacionadas con los *Equity default swaps* (EDS), en los cuales el comprador de la estructura recibe una cantidad monetaria si el valor de la acción subyacente alcanza un determinado nivel de barrera inferior al nivel at-the-money existente al inicio del producto. Como plantean Albanese y Chen (2004), dada la magnitud de la caída en el valor del activo subyacente necesaria para alcanzar la barrera, es muy probable que ésta ocurra junto con un deterioro en la calidad crediticia de la compañía, generando grandes cambios en la estructura de capital de la empresa. Este hecho puede conducir a cambios importantes en la volatilidad implícita e incluso a una modificación del proceso correspondiente a la misma. En este sentido, el enfoque de incertidumbre en la volatilidad se presenta nuevamente como un mecanismo adecuado para valorar este tipo de productos. No obstante, cabe tener en cuenta que en estas circunstancias es muy probable que se reduzca considerablemente la capacidad de la compañía para repartir dividendos, por lo que podría ser adecuado incluir la existencia de incertidumbre en la tasa de dividendos del activo subyacente.

No obstante, cabe destacar que pese a lo razonable del planteamiento en el que se basa y a las buenas propiedades que presenta el modelo de incertidumbre en la volatilidad, el mismo ha tenido menos éxito aplicado entre las instituciones financieras que participan en los mercados de activos derivados que otros modelos tales como el modelo de volatilidad local o los modelos de volatilidad estocástica. Un de las posibles causas puede tener que ver con el hecho de que los parámetros de estos modelos, se pueden calibrar de forma objetiva utilizando los precios de las opciones europeas cotizadas en el mercado. Pero en el caso del modelo de incertidumbre en la volatilidad, puede existir cierta subjetividad en la determinación de las

bandas superior e inferior correspondientes a la volatilidad instantánea del activo subyacente.

Finalmente, merece la pena tener en cuenta que los mecanismos de valoración presentados en este artículo, descansan en el supuesto de que el activo subyacente cotiza en algún mercado, de tal manera que es posible realizar una estrategia que permita replicar el valor del activo derivado en cada instante de tiempo. En ausencia de oportunidades de arbitraje, el valor del activo derivado viene dado por el precio de la estrategia réplica. Pero existen productos derivados sobre activos que no cotizan en ningún mercado, como por ejemplo los derivados sobre el tiempo. En este caso, la valoración no puede hacerse por replicación y como plantea Wang (2002), se hace necesario acudir a argumentos de equilibrio general.

### **Referencias**

- Albanese, C. y O. Chen (2004). Pricing Equity Default Swaps. Imperial College, Mathematical Finance Division, Working Paper.
- Andersen, L. y R. Brotherton-Ratcliffe (1998). The Equity Option Volatility Smile: An Implicit Finite-Difference Approach. *Journal of Computational Finance* 1, 5-37.
- Avellaneda, M. y R. Buff (1999). Combinatorial Implications of Nonlinear Uncertain Volatility Models: the Case of Barrier Options. *Applied Mathematical Finance*, 6, 1-18.
- Avellaneda, M., A. Levy y A. Parás (1995). Pricing and Hedging Derivative Securities in Markets with Uncertain Volatilities. *Applied Mathematical Finance* 2, 73-88.
- Bakshi, G., C. Cao y Z. Chen (2000). Do Call Prices and the Underlying Stock Always Move in the Same Direction?. *Review of Financial Studies* 13, 549-584.
- Black, F. y M.S. Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637-654.
- Brenann, M.J. y E.S. Schwartz (1977). The Valuation of American Put Options. *Journal of Finance* 32, 449-462.
- Brenann, M.J. y E.S. Schwartz (1978). Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13, 462-474.
- Brown, G. y C. Randall (1999). If the Skew Fits. *Risk*, April, 62-65.



- Cont, R. y J. da Fonseca (2001). Deformation of Implied Volatility Surfaces: an Empirical Analysis. *Empirical Approaches to Financial Fluctuations*. Tokyo: Springer.
- Cont, R. y J. da Fonseca (2002). Dynamics of Implied Volatility Surfaces. *Quantitative Finance* 2, 45-60.
- Crank, J. y P. Nicolson (1947). A Practical Method for Numerical Evaluation of Solutions of Partial Differential Equations of the Heat Conduction Type. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 43, 50-67.
- Daglish, T., J. Hull y W. Suo (2007). Volatility Surfaces: Theory, Rules of Thumb, and Empirical Evidence. *Quantitative Finance* 7, 507-524.
- Das, S. R. y R. K. Sundaram (1999). Of Smiles and Smirks: a Term Structure Perspective. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 34, 211-240.
- Dempster, M.A.H. y D.G. Richard (1999). Pricing Exotic American Options Fitting the Volatility Smile. Working Paper 17/99, Judge Institute of Management Studies, University of Cambridge.
- Derman, E. (1999). Regimes of volatility. Quantitative Strategies Research Notes. Goldman Sachs.
- Derman, E. (2003). Laughter in the Dark - The Problem of the Volatility Smile. Working paper, University of Amsterdam.
- Derman, E., M. Kamal e I. Kani (1996a). Trading and Hedging Local Volatility. Quantitative Strategies Research Notes. Goldman Sachs.
- Derman, E. e I. Kani (1994). The Volatility Smile and its Implied Tree. Quantitative Strategies Research Notes. Goldman Sachs.
- Derman, E., I. Kani y N. Chriss (1996b). Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile. *Journal of Derivatives* 4, 7-22.
- Derman, E., I. Kani y J.Z. Zou (1995). The Local Volatility Surface: Unlocking the Information in Index Option Prices. Quantitative Strategies Research Notes. Goldman Sachs.
- Dumas, B., J. Fleming y R.E. Whaley (1997). Implied Volatility Functions: Empirical Tests. *Journal of Finance* 53, 2059-2106.
- Dupire, B. (1994). Pricing with a Smile. *Risk* 7, 18-20.
- Franks, J. R. y E.J. Schwartz (1991). The Stochastic Behavior of Market Variance Implied in the Price of Index Options. *The Economic Journal* 101, 1460-1475.
- Gatheral, J. (2006). *The Volatility Surface A Practitioner's Guide*. John Wiley & Sons. New Jersey. (United States of America).
- Heston, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies* 6, 327-343.

- Heynen, R. (1993). An Empirical Investigation of Observed Smile Patterns. *Review of Futures Markets* 13, 317-353.
- Hull, J. y W. Suo (2002). A Methodology for Assessing Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 37, 297-318.
- Hull, J. y A. White (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 3, 281-300.
- Knight, F.H. (1921). *Risk, Uncertainty, and Profit*. Boston, MA: Hart, Schaffner & Marx; Houghton Mifflin Co. Disponible en <http://www.econlib.org/library/Knight/knRUPCover.html>.
- Lyons, T.J. (1995). Uncertain Volatility and the Risk-Free Synthesis of Derivatives. *Applied Mathematical Finance* 2, 117-133.
- Merton, R. C. (1976). Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics* 3, 124-144.
- Rouah, F.D. y G. Vainberg (2007). *Option Pricing Models and Volatility Using Excel-VBA*. John Wiley & Sons. New York (United States of America).
- Rubinstein, M. (1994). Implied Binomial Trees. *Journal of Finance* 49, 771-818.
- Stein, E.M. y J.C. Stein (1991). Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: an Analytic Approach. *Review of Financial Studies* 4, 727-752.
- Wang, S.S. (2002). A Universal Framework for Pricing Financial and Insurance Risks. *ASTIN Bulletin* 32, 213-234.
- Wilmott, P. (2002). Cliquet Options and Volatility Models. *Wilmott magazine*.
- Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott On Quantitative Finance*. John Wiley & Sons. West Sussex (England).