

USING WAVELET TO NON-PARAMETRIC GRADUATION OF MORTALITY RATES

Ismael Baeza Sampere ¹.

Profesor Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa.

Francisco G. Morillas Jurado ².

Profesor Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa.

ABSTRACT

The graduation of some biometric functions of the life's tables is a topic widely studied in actuarial science and used in actuarial practice. This paper proposes the use of a nonparametric technique. This technique has been used successfully in a variety of fields of knowledge. In particular, it proposes the use of wavelets for the graduation of the mortality rates.

To do this to end, to determine whether the wavelets may or may not be used as an alternative to other techniques, it has resorted to numerical simulation techniques to increase the existing information about the phenomenon of mortality. To do this we used a standard biometric and built various synthetic experiences of mortality which has been applied two types of ranking non-parametric: kernel estimation and estimation by wavelets.

Key words: non-parametric graduation, mortality rate, life's tables, wavelets, kernel estimation, numeric simulation.

RESUMEN

La graduación de algunas funciones biométricas utilizadas en tablas de mortalidad es un tema ampliamente estudiado y utilizado en la práctica actuarial. En este trabajo se propone la utilización de una técnica de graduación no paramétrica que ha sido utilizada con éxito en una gran variedad de campos del conocimiento. En particular se propone la utilización de wavelets para realizar la graduación de las tasas de fallecimiento.

Con esta finalidad, determinar si las wavelets pueden o no ser utilizadas como alternativa a otras técnicas no paramétricas, se ha recurrido a técnicas de simulación numérica aumentando la información existente. Para ello se ha utilizado un modelo biométrico estándar y se han construido diferentes experiencias sintéticas de mortalidad a las cuales se les ha aplicado dos tipos

1) Dpto. Economía Aplicada, Facultat d'Economia, Universitat de València. Av. Tarongers, s/n. 46022, Valencia. Ismael.Baeza@uv.es

(2) Dpto. Economía Aplicada, Facultat d'Economia, Universitat de València. Av. Tarongers, s/n. 46022, Valencia. Francisco.Morillas@uv.es (Correspondence author)

Este artículo ha sido recibido en versión revisada el 10 de noviembre de 2011

de graduación no paramétrica: estimación kernel y estimación mediante wavelets.

Palabras clave: graduación no paramétrica, tasas de mortalidad, tablas de mortalidad, wavelets, estimación kernel, simulación numérica.

1. INTRODUCCIÓN

La graduación de las funciones biométricas que conforman las tablas de mortalidad es un tema ampliamente estudiado en la práctica actuarial (Benjamin et al., 1992), (Felipe et Al., 2001), (Nielsen et Al., 2003), (Debón et Al., 2006). En este trabajo se propone la utilización de una técnica de graduación no paramétrica la cual ha sido utilizada con éxito en una gran variedad de campos del conocimiento y que, hasta donde conocemos, no ha sido utilizada en el ámbito actuarial. En particular se propone la utilización de wavelets para la graduación de las tasas y las probabilidades de fallecimiento observadas con la finalidad de obtener una estimación adecuada de las verdaderas funciones biométricas.

En el ámbito actuarial es habitual la utilización de tablas de mortalidad de referencia para realizar cálculos actuariales y análisis de la mortalidad con diferentes propósitos. La mortalidad de un grupo de individuos suele modelizarse suponiendo que existen unas *verdaderas* tasas de mortalidad, las cuales son alteradas mediante una fluctuación aleatoria. La suma de la tasa de mortalidad y de la fluctuación aleatoria es lo que se percibe habitualmente, por ello es frecuente asumir que la verdadera tasa de mortalidad tiene un comportamiento estructural según cierto modelo biométrico (prefijado), como pueden ser los que vienen determinados por las leyes de Dormoy, Gompertz o Gompertz-Makeham. Esta hipótesis de comportamiento estructural justifica el amplio desarrollo de la graduación paramétrica en la última década. No obstante, la asunción de un modelo biométrico prefijado puede ser a veces demasiado restrictiva y conducir a resultados no deseados en función de la información disponible, por lo que en esta situación las técnicas no paramétricas son complementarias a las técnicas paramétricas o incluso una alternativa adecuada.

Las técnicas de suavizado o de graduación tienen como finalidad eliminar y/o separar las fluctuaciones aleatorias de los verdaderos valores de la función biométrica considerada. La graduación no paramétrica puede ser utilizada en una fase previa a la graduación paramétrica con el objetivo de encontrar los verdaderos valores de los parámetros del modelo. También puede utilizarse posteriormente cuando la graduación paramétrica proporciona resultados no satisfactorios. El análisis que se presenta en este

trabajo se centra en la graduación no paramétrica y consiste en la comparación de los resultados obtenidos con dos tipos de graduación no paramétrica, wavelet y kernel. Para poder realizar la comparación entre las dos técnicas y así determinar cuál de ellas es mejor, es conveniente disponer de la información adecuada de manera que se pueda cuantificar el error que cada una comete. Es deseable disponer de valores *verdaderos* para así estimar las diferencias de estos con los valores graduados. No obstante es conocido que los verdaderos valores no son observables, por lo que la bondad de la graduación no puede medirse directamente según las diferencias *valor real-valor graduado*. Por otro lado, si la comparación se realiza directamente con los datos observados se puede no cumplir la condición de suavidad para algunos de los métodos que se suelen utilizar, con lo que el proceso de graduación perdería parte de su finalidad. Además, la mortalidad es un fenómeno no-reproducible que depende de la época y/o región de observación, de la calidad de la información recogida y de las técnicas utilizadas en su tratamiento, por lo que si no se reducen estas fuentes de error resulta difícil determinar cuál de los dos métodos es más adecuado.

Para resolver parte de este problema, teniendo en cuenta que los verdaderos valores no son conocidos, en este trabajo se recurre a la simulación numérica a través de la utilización de un modelo biométrico estándar que proporciona las supuestas *verdaderas* tasas de fallecimiento. Estas tasas teóricas (*verdaderas*) son los valores de entrada para el proceso numérico el cual proporciona un número arbitrariamente grande de experiencias sintéticas de mortalidad, supuestos valores observados. Las series numéricas obtenidas son graduadas por ambas técnicas, de manera que pueden compararse directamente con los valores asumidos como verdaderos.

Es interesante señalar que existen leyes generales que son aplicables a todo el rango de edades y que determinan la forma funcional de las funciones biométricas que se proponen en este trabajo, ley de Gompertz-Makeham (Renshaw, 1995). No obstante, debido a la aplicación que se realiza en este trabajo para datos de la población española entre los años 2007 y 2009 par edades de 25 años o más, el modelo biométrico elegido para la generación de las experiencias sintéticas de mortalidad es la ley de Gompertz, que se considera adecuada por su sencilla especificación y por su aplicabilidad al rango de edad considerado. Notar que esta ley modela el envejecimiento natural de la población, el cual está presente a lo largo de toda la vida.

En resumen, como suele ser habitual en el campo actuarial, y en particular en estudios relacionados con la mortalidad, la información relacionada es insuficiente debido a que estos fenómenos no pueden reproducirse. Para realizar un análisis completo y determinar si esta técnica no paramétrica

(graduación wavelet) puede o no ser utilizada, se recurre a la simulación numérica con el objetivo de generar información suficiente, la cual recoja una variedad amplia de situaciones posibles no observables ni reproducibles en la práctica. Para ello se utiliza un modelo biométrico estándar a partir del cual se construyen diferentes experiencias sintéticas de mortalidad, a cada una de estas experiencias sintéticas se le aplican los dos tipos de graduación no paramétrica: estimación kernel (Ayuso et al., 2007), y graduación wavelet (propuesta por los autores), realizando la comparación entre ambas.

Este trabajo se estructura como sigue: en la segunda sección se define el concepto de wavelet, así como las propiedades más relevantes de estas. En la tercera sección se detalla la metodología empleada en la construcción de las experiencias sintéticas de mortalidad, el modelo biométrico utilizado y la introducción de las fluctuaciones aleatorias, también se definen las medidas de bondad utilizadas para la posterior comparación entre técnicas. En la primera parte de la sección cuarta se presentan los resultados obtenidos en la graduación, tanto wavelets como kernel, para los valores observados de la población española entre los años 2007 y 2009 para cada sexo. En la segunda parte de esta sección cuarta se expone la comparación para los valores obtenidos de forma sintética. En la última sección se presentan las conclusiones de la comparación realizada entre ambos métodos no paramétricos y se describen futuras líneas de investigación para mejorar la técnica.

2. ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA: GRADUACIÓN WAVELET.

En esta sección se realiza una breve introducción del concepto de wavelet, tanto en el caso continuo como discreto. En otras áreas del conocimiento diferentes tipos de wavelet han sido utilizadas con éxito en multitud de aplicaciones, por ejemplo en transmisión de señales en telecomunicaciones (Martínez et. al. 2004), tratamiento digital de imágenes (tecnologías de la información), valoración de derivados en economía (Gómez del Valle et. al. 2004). Esta técnica ha proporcionado un nuevo punto de vista de manera el cual permite visualizar estructuras, patrones y fenómenos que con otro tipo de técnicas no era posible o no de forma sencilla.

Uno de los campos donde las wavelets han sido utilizadas con mayor éxito es el campo de las telecomunicaciones, en el de la transmisión de señales. Estas se han utilizado con éxito para reconstruir o limpiar la señal transmitida desde un emisor hasta un receptor. Se elimina el *ruido* -la causa de pérdida de información en el proceso de transmisión- con el objetivo de

reproducir las características y patrones que la señal posee al inicio del proceso. En el campo actuarial es habitual no conocer las tasas o probabilidades de fallecimiento, disponiendo únicamente de lo que se denomina *experiencia de mortalidad*. En este trabajo esta serie de valores reales es tratada de forma similar a la ‘señal’ utilizada en el área de las telecomunicaciones. Como se describe posteriormente, cada experiencia de mortalidad (observada o sintética) se supone compuesta por dos términos aditivos: los valores verdaderos de la serie y los de una fluctuación aleatoria. Aplicando la descomposición wavelet como en el caso descrito de la transmisión de señales, tratando la fluctuación aleatoria como *ruido*, se pretende reconstruir los valores verdaderos de la función biométrica considerada, que en este trabajo son las probabilidades o tasas de fallecimiento. Con este objetivo es oportuno introducir el concepto de wavelet.

Una wavelet es una familia de funciones que queda caracterizada a partir de un elemento generador: la función *wavelet madre* $\psi(t)$. Esta es una función de variable real t que debe oscilar en el tiempo y estar *bien localizada* en el dominio temporal. El concepto de localización temporal se puede interpretar como un rápido decaimiento hacia cero cuando la variable t tiende a infinito. Esta propiedad oscilatoria es la que proporciona su nombre, en inglés "wave", que por estar acotada en tiempo queda reducida a pequeña onda, en inglés "wavelet". El concepto de oscilación se expresa en términos de los momentos absolutos de orden $m-1$ de la función $\psi(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{m-1} \psi(t) dt = 0.$$

A partir de la wavelet madre se definen el resto de elementos de la familia, estos son generados mediante cambios de escala y traslaciones de $\psi(t)$. A esta familia de funciones que genera $\psi(\cdot)$ se la denota como

$$\{\psi_{a,b}(t), a > 0, b \in \mathbf{R}\}.$$

Se debe de notar que la caracterización de $\psi_{a,b}(t)$ se realiza considerando de forma conjunta las operaciones de cambio de escala y traslación:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right),$$

Donde a se denomina parámetro de escala y queda asociado a un estiramiento o una compresión de la función madre. En el caso escalar

$\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t}{a}\right)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Se puede notar que $\psi_a(t)$ conserva la forma de $\psi(t)$ pero aumenta el soporte de la función. El parámetro b se denomina parámetro de traslación, que ‘localiza’ temporalmente la distribución de energía que se está calculando.

A partir de las funciones $\psi_{a,b}(t)$ se define la *Transformada Wavelet* continua de la función $f(t)$ a través de las expresiones siguientes:

$$W_f(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt,$$

$$W_f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle.$$

Se conoce que si la wavelet madre es real, entonces la familia de funciones definidas por su traslación y escalado es una base completa del espacio de funciones de interés. Este hecho permite asegurar que cualquier función puede ser representada mediante una combinación lineal de las funciones wavelets $\psi_{a,b}(t)$.

La definición de la *Transformada Wavelet Discreta* es similar a la de la wavelet continua. En este caso los parámetros a y b sólo pueden tomar valores discretos, parámetros de dilatación y de traslación respectivamente. Para obtener los valores discretos de estos parámetros se puede proceder como se indica.

- Para la discretización del parámetro de escala a se toma arbitrariamente un valor a_0 , denominado *escala de referencia*, entonces los valores admisibles de a son las potencias enteras de a_0 , $a = a_0^m$.
- La discretización del parámetro de traslación b se obtiene añadiendo una restricción a los valores de b : *los valores de b dependen de los valores del parámetro de escala a* , de esta manera se obtiene que para escalas grandes la traslación también es grande, dando consistencia al proceso.

Una forma posible de obtener los valores discretos de las traslaciones puede ser $b = nb_0 a_0^m$. En esta expresión m se fija a partir de la escala a la que se trabaja y n es un factor que proporciona diversidad en las traslaciones para la escala considerada.

Con estas consideraciones, la familia¹ de wavelets que se construye viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned}\psi_{m,n}(t) &= a_0^{-\frac{m}{2}} \psi\left(a_0^{-m}\left(t - nb_0 a_0^m\right)\right), \\ &= a_0^{-\frac{m}{2}} \psi\left(a_0^{-m}t - nb_0\right).\end{aligned}$$

La Transformada Wavelet Discreta se obtiene de forma similar a (Mallat 1980) o (Mallat 1998) utilizando el producto escalar discreto entre la función a descomponer y las funciones de escala $\psi_{m,n}(t)$, ya que estas forman una base del espacio de funciones.

El resultado de la aplicación de la Transformada Wavelet (continua o discreta) está formado por dos funciones –dos series de datos para el caso discreto- la primera parte suele denominarse scaling (S), la segunda wavelet (W). La parte scaling se interpreta como una réplica de la función o serie inicial a escala diferente y obtenida utilizando promedios y otras transformaciones que dependen del filtro considerado. Con la parte scaling se obtiene una primera aproximación que recoge la tendencia. Esta parte pierde los detalles de la serie inicial los cuales son recogidos en la parte wavelet. A menudo estos ‘detalles’, las diferencias entre la serie original y la obtenida por escalado, son considerados perturbaciones. Combinando apropiadamente las dos partes se puede reconstruir de manera exacta los valores iniciales de la función (o la serie de datos).

Este proceso puede aplicarse de manera iterativa, esto es, se puede obtener una nueva Transformada Wavelet de los datos obtenidos anteriormente en la parte scaling (S^1). Esta segunda aplicación da lugar, en otra escala, a nuevas parte scaling (S^2) y wavelet (W^2), en este trabajo se denomina este proceso como *transformación wavelet con dos escalas*. Para la obtención de una transformación wavelet con tres escalas se procedería a aplicar el proceso de nuevo sobre la parte scaling obtenida en la transformación wavelet con dos escalas, dando lugar a dos series de datos: S^3 y W^3 .

Una propiedad interesante es que la información que contienen la parte wavelet y la parte scaling son ortogonales, complementarias: la información que contienen no es redundante. Una aplicación de esta complementariedad de la información consiste en suponer que cuando una serie de datos posee *ruido*, este se encuentra en la parte wavelet, en la parte que contiene los

¹Es interesante señalar que es sencillo obtener otras familias de wavelets discretas considerando otra metodología en el cálculo de los parámetros a y b .

detalles de la función. Teniendo esto en cuenta la eliminación o reducción de ruido queda vinculada al *filtrado* de la parte wavelet. En este trabajo el filtrado pretende reducir o incluso eliminar las fluctuaciones aleatorias a partir del truncado de valores de la parte wavelet, asumiendo cierto *umbral de truncamiento* como elemento que determina cuando un valor es considerado perturbación y cuando no puede ser considerado de esta manera.

La tabla 1 muestra una representación gráfica de los filtros correspondientes a la parte "scaling" y la parte "wavelet" para dos tipos de wavelets, la Daubechies 3 y Daubechies 4. También muestra los coeficientes que conforman la *Base* del espacio de funciones discretas considerado.

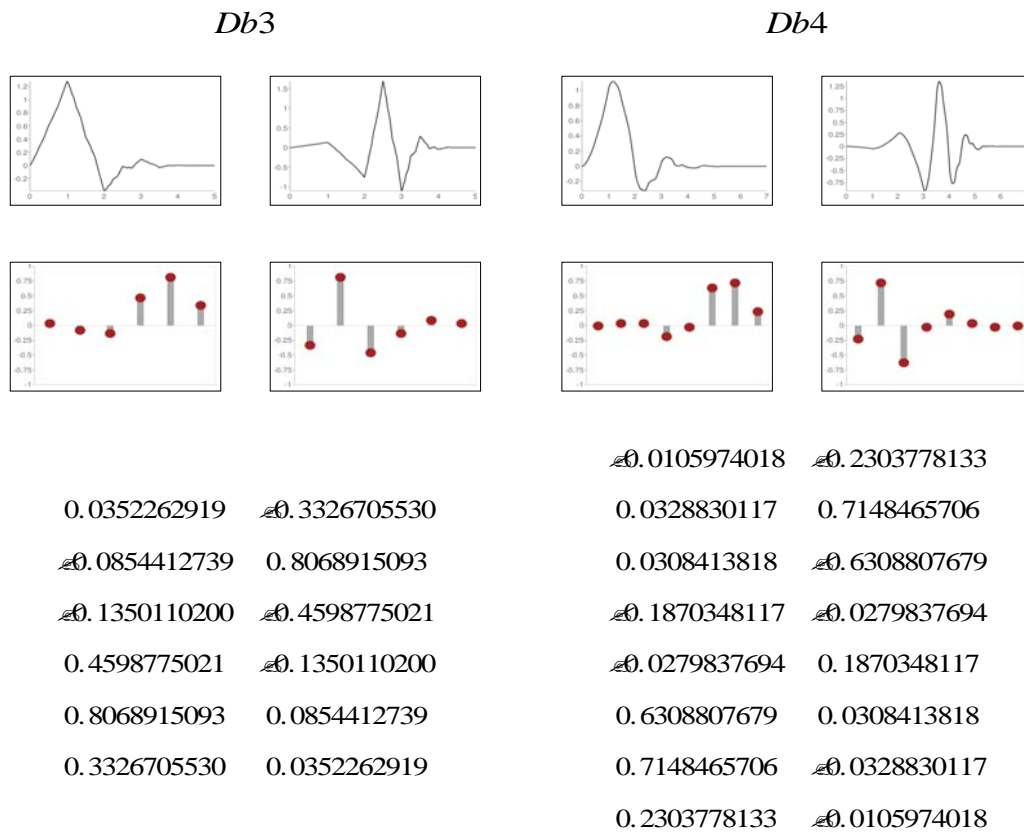


Tabla 1. Filtros y coeficientes wavelets

Nota: Es importante señalar que no es habitual encontrar una expresión explícita de la wavelet o de su valor en un punto. No obstante esto no supone un problema ya que existen algoritmos recurrentes, como el de cascada o similares, (ver Section 13.10., Wavelet Transforms, Press 2007), implementados en paquetes de software como *Matlab*, *Mathematica* o *R* que proporcionan la estimación adecuada

3. GENERACIÓN DE LAS EXPERIENCIAS DE MORTALIDAD

El estudio que se realiza en este trabajo está fundamentado en un conjunto de datos obtenidos de manera sintética. En esta sección se describe la metodología utilizada en la construcción de lo que se denominan *experiencias sintéticas de mortalidad*, las cuales se basan en un modelo biométrico concreto junto a unas fluctuaciones aleatorias generadas numéricamente. En esta sección también se definen las medidas utilizadas para la comparación entre las técnicas no paramétricas consideradas.

A diferencia de otras áreas de conocimiento, el estudio de la mortalidad de un colectivo tiene el inconveniente importante de la no reproducibilidad de los experimentos. Esto hace que sea necesario asumir hipótesis más o menos restrictivas, las cuales ponen de manifiesto la percepción que de la realidad tiene el investigador o incluso las limitaciones técnicas que pueden existir en un momento u otro. Algunos modelos biométricos aceptados por la comunidad científica para caracterizar el fenómeno de la mortalidad son los descritos por la ley de Gompertz, las leyes de Makeham, las de Heligman y Pollard, entre otros (Ayuso et al., 2007) (Debón, 2003).

Como se puede observar en la Figura 1, una forma de tratar el problema es considerar que la mortalidad se puede dividir en tres componentes: el primero de ellos representa la mortalidad infantil, el segundo de ellos representa la mortalidad en las edades adultas y recoge lo que se denomina joroba de accidentes y por maternidad (que recoge la muerte por estas circunstancias). Finalmente, el último componente suele denominarse curva de mortalidad natural, que modela el aumento de la probabilidad (o de la tasa) de fallecimiento debido a causas naturales, imputadas al deterioro del organismo por el aumento de la edad. Esta puede ser modelada haciendo uso de la ley de Gompertz.

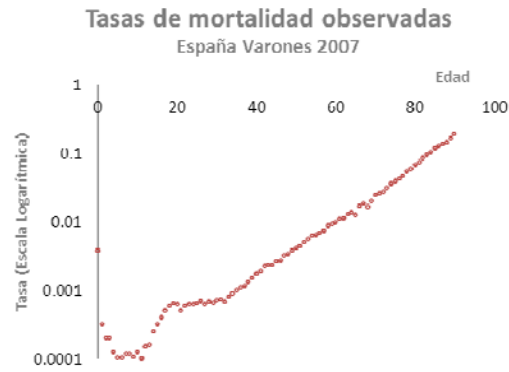


Figura 1. Tasas de mortalidad para la población española de 2007 (hombres). Fuente: Datos publicados por el INE. Gráfico: Elaboración propia.

En este trabajo el modelo biométrico (Gompertz) es utilizado con una doble finalidad. La primera en la generación de las experiencias sintéticas de mortalidad, con ello se pretende simplificar el análisis realizado eliminando componentes particulares de una época o de una región concreta. En segundo lugar para poder estimar las diferencias entre los conocidos *verdaderos valores* y los valores graduados.

A efectos de completitud se exponen, es interesante exponer los fundamentos de la ley de Gompertz.

- Esta establece un tanto instantáneo de mortalidad creciente, denotado este como $\mu(x)$.
- Un crecimiento relativo constante, $\mu'(x)/\mu(x)=C$, donde $\mu'(x)$ denota la derivada del tanto instantáneo.

Con estos dos supuestos se determina la función de supervivencia a una edad concreta x , $l(x)$, la cual es utilizada para determinar la probabilidad de supervivencia y la probabilidad de fallecimiento a la edad x de una población, $p(x)$ y $q(x)$ respectivamente. La expresión funcional de las funciones biométricas introducidas haciendo uso de la ley de Gompertz y haciendo uso de la notación indicada es la siguiente:

$$l_x = l_0 g^{C^x - 1},$$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = g^{C^x(C-1)},$$

$$q_x = 1 - p_x = 1 - g^{C^x(C-1)}.$$

En esta expresión l_0 denota el tamaño inicial de la cohorte considerada, con g y C dos parámetros a determinar del modelo que diferencia una población de otra. Es interesante señalar que el valor de g determina un punto de inflexión en la función según sea superior o no al valor e^{-1} .

La Figura 2 muestra la probabilidad de fallecimiento, denotada q_x , y calculada según la ley de Gompertz con parámetros² $g = 0.999611897$, $C = 1.10183797$.

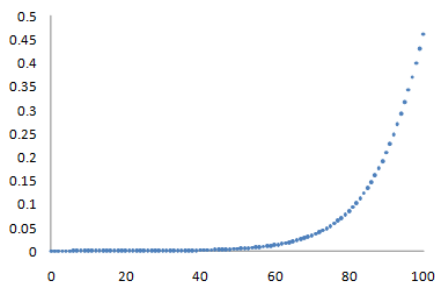


Figura 2a. Probabilidad teórica de fallecimiento para cada edad. Ley de Gompertz.

Fuente: Elaboración propia.

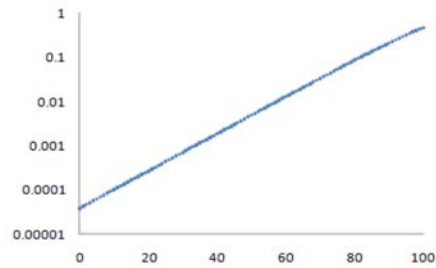


Figura 2b. Probabilidad teórica de fallecimiento para cada edad. Ley de Gompertz.(Escala logarítmica)

Fuente: Elaboración propia.

Como se ha comentado anteriormente, una interpretación asumida por la comunidad científica en relación de la estructura de la mortalidad observada de una población consiste en dividir la función biométrica en dos términos: los valores reales y la fluctuación aleatoria. La asunción de esta hipótesis es la que se utiliza en este trabajo de manera que los *verdaderos* valores de la función biométrica se obtienen de forma determinista haciendo uso de la ley de Gompertz, mientras que las fluctuaciones aleatorias se obtienen haciendo uso de estos verdaderos valores, tomados como inputs en un proceso

² Para eliminar posibles sesgos de los datos observados, los valores de los parámetros utilizados son arbitrarios.

aleatorio como se describe posteriormente. Este proceso aleatorio permite la obtención de las denominadas *experiencias de mortalidad*, también referidas como *realizaciones* del proceso de muerte.

El método de obtención de las experiencias sintéticas de mortalidad se basa en la hipótesis que se realiza sobre la distribución de fallecimientos a cada edad x , y que se denomina hipótesis HB, la cual se enuncia como sigue:

El número de fallecidos³ a la edad x , se distribuye según una distribución binomial: $d_x \sim Bi(l_x, q_x)$.

Nota En lo que sigue q_x denotara la probabilidad o la tasa teórica de fallecimiento a la edad x , la cual es obtenida haciendo uso del modelo biométrico de Gompertz y \tilde{q}_x^i (o simplemente \tilde{q}_x) denotara la estimada a partir de la información obtenida en la *realización* i .

Llegados a este punto se está en disposición de describir el proceso de generación de las diferentes experiencias de mortalidad. Este proceso básicamente consiste en simular el número de fallecimientos para cada una de las edades consideradas mediante simulación secuencial dando lugar a un conjunto de valores simulados, de experiencias sintéticas de mortalidad.

Notamos que:

- d_x denota el número de fallecidos a la edad x .
- $\left\{ \tilde{d}_x^n \right\}_{x=0, \dots, 100}^{n=1, \dots, 100}$ denota cada una de las realizaciones, así para n_0 fijo, $\left\{ d_x^{n_0} \right\}_{x=0, \dots, 100}$ denota el número de fallecimientos acaecidos a cada una de las edades consideradas, una posible experiencia de mortalidad.

El proceso que se describe a continuación se realiza tantas veces como experiencias diferentes se desee generar.

³ d_x denota el número de individuos que sobreviven a la edad x pero que no lo hacen a la edad $x + 1$.

- Se inicia el proceso haciendo uso de las probabilidades teóricas de fallecimiento q_x obtenidas mediante la expresión de la ley de Gompertz para $x = 0, 1, \dots, 100$, y teniendo en cuenta un número arbitrario de individuos, $l_0 = 10.000, 100.000, \dots$
- Haciendo uso de la hipótesis HB , se genera un número aleatorio que proviene de una distribución $Bi(l_0, q_0)$, el cual es interpretado como el número de fallecidos a la edad 0, \tilde{d}_0 , y que es utilizado para estimar \tilde{l}_1 .
- Seguidamente se vuelve a generar un número aleatorio que proviene de una distribución $Bi(\tilde{l}_1, q_1)$, obteniendo el número de fallecidos simulado para la edad $x = 1$, \tilde{d}_1 , el cual es a su vez utilizado para obtener \tilde{l}_2 .
- Iterando este proceso, se generan números aleatorios que provienen de una variable aleatoria que se distribuye según una ley binomial cuyos parámetros son: el número de supervivientes estimado a partir de los fallecidos en el paso anterior (\tilde{l}_x), y el riesgo de fallecimiento a la edad considerada (q_x), el cual es constante para todas las realizaciones y se calcula utilizando Gompertz. De esta manera se obtienen \tilde{d}_x y \tilde{l}_{x+1} , este último utilizado en la siguiente etapa como parámetro de entrada para la generación de un número aleatorio que proviene de una distribución $Bi(\tilde{l}_{x+1}, q_{x+1})$.
- El proceso se termina una vez obtenido el valor \tilde{d}_{100} .

Nota La generación de números aleatorios, denotados r_i , que siguen una ley de distribución de probabilidad $Bi(N, q)$ se realiza mediante técnicas estándar las cuales son descritas brevemente a continuación. Es conocido que si N es suficientemente grande y q pequeño de manera que el producto Nq es pequeño, entonces una ley $Bi(N, q)$ puede ser aproximada mediante una distribución de probabilidad normal de esperanza y varianza iguales a las de la distribución binomial, esto es $Bi(N, q) \sim \mathbf{N}(Nq, Nq(1 - q))$.

Teniendo en cuenta este hecho junto a la propiedad de estandarización de las distribuciones normales, es sencillo generar números aleatorios de la distribución binomial. Para ello se generan números aleatorios $z_i \sim \mathbf{N}(0,1)$ de manera que estos se escalan en otros valores que proceden de una distribución $\mathbf{N}(Nq, Nq(1-q))$, para ello simplemente se hace uso de la transformación lineal $n_i = Nq + z_i \sqrt{Nq(1-q)}$. En esta situación sólo queda convertir los valores reales de la distribución normal, denotados n_i , en valores discretos que procedan de la binomial de interés, que se denotan r_i . Para ello se procede como sigue:

$$r_i = \begin{cases} \min\{[n_i + \frac{1}{2}], N\}, & \text{si } n_i > Nq \\ \max\{[n_i - \frac{1}{2}], 0\}, & \text{si } n_i \leq Nq \end{cases}$$

En la expresión anterior $[\cdot]$ denota el operador parte entera.

En la Figura 3 puede observarse el resultado de este proceso, tres experiencias sintéticas de mortalidad que corresponden a las realizaciones números 1, 3 y 5 del trabajo.

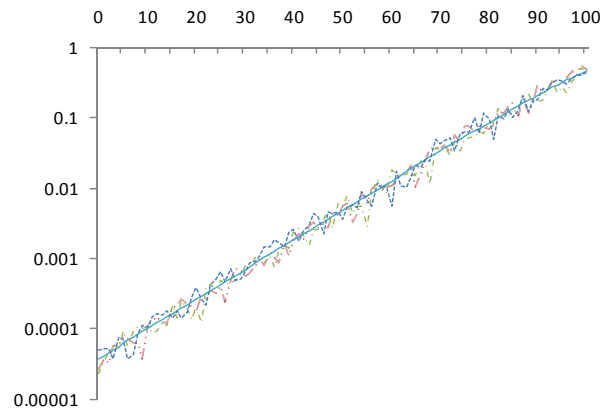


Figura 3. Probabilidades de fallecimiento teóricas y simuladas según edad, realizaciones 1, 3 y 5. En escala logarítmica. (Fuente: Elaboración propia)

Se termina esta sección introduciendo las medidas utilizadas en la comparación posterior de los métodos de graduación considerados. Estas tienen como objetivo informar de la idoneidad de cada una de las técnicas comparadas.

Los indicadores definidos se denotan y estiman como sigue:

- Indicador Absoluto Medio (IAM):

$$IAM(q) = \frac{1}{100} \sum_{x=0}^{100} |q_x - \hat{q}_x|.$$

- Indicador Relativo Medio (IRM):

$$IRM(q) = \frac{1}{100} \sum_{x=0}^{100} \frac{|q_x - \hat{q}_x|}{q_x}.$$

De forma análoga se definen los indicadores absoluto y relativo, cuadrático medio:

- Indicador Absoluto Cuadrático Medio (IACM):

$$IACM(q) = \frac{1}{100} \sum_{x=0}^{100} |q_x - \hat{q}_x|^2.$$

- Indicador Relativo Cuadrático Medio (IRCM):

$$IRCM(q) = \frac{1}{100} \sum_{x=0}^{100} \frac{|q_x - \hat{q}_x|^2}{q_x^2}.$$

En estas definiciones q_x denota la probabilidad teórica de fallecimiento que la ley de Gompertz proporciona para los parámetros prefijados y que se ha utilizado para la generación de las experiencias de mortalidad; \hat{q}_x denota la probabilidad graduada, valor que se obtiene de aplicar un tipo de graduación (kernel o wavelet) a cada una de las realizaciones generadas, de esta manera se evalúa la capacidad de la técnica en la recuperación de los verdaderos valores de la función: los indicadores definidos sugieren que a menor valor mejor es la estimación que de la probabilidad teórica se obtiene, lo cual sugiere que una técnica mejora a otra en este sentido.

4. GRADUACIÓN WAVELET

Esta sección se divide en tres partes. En la primera se presentan los resultados obtenidos en la graduación, tanto wavelet como kernel, para los valores observados de la población española entre los años 2007 y 2009 para cada sexo. En la segunda parte de esta sección se muestran los resultados de

la graduación aplicada a cada experiencia sintética de mortalidad generada por el método descrito en la sección anterior. Esta consta de dos partes diferenciadas. La primera es utilizada para calibrar la graduación wavelet, en particular muestra el resultado de utilizar la wavelet de Daubechies⁴ para graduar las realizaciones generadas anteriormente de forma numérica y así encontrar el valor de los parámetros adecuados en cuanto a vecindad, escalado y nivel de truncamiento se refiere. La última parte de esta sección es utilizada para mostrar los resultados de las graduaciones realizadas con las dos técnicas comparadas, wavelet y kernel (aplicada con núcleo gaussiano).

4.1 APLICACIÓN A LA POBLACIÓN ESPAÑOLA 2007-2009

En este apartado se realiza la graduación de series de mortalidad reales haciendo uso de las técnicas descritas y se expone la comparación de los resultados obtenidos para edades igual o superiores a 25 años. La información utilizada corresponde a las tablas de mortalidad publicadas por el INE para los años 2007, 2008 y 2009, tanto para hombres como para mujeres. Los datos utilizados han sido extraídos de las *Tablas de Mortalidad de la Población de España por año, sexo, edad y funciones*, del instituto Nacional de Estadística (INE 2011). Una muestra de esta información se puede consultar en el Anexo 2.

Los resultados de la graduación obtenidos para el año 2009 para cada una de las técnicas comparadas se muestran en las figuras 4a-4d. Las figuras correspondientes a los años 2007 y 2008 se pueden encontrar en el anexo 1.

⁴ La elección del wavelet de Daubechies se debe a diferentes motivos: que esta es sencilla en su especificación, que es habitual encontrarla en diferentes paquetes informáticos especializados como Matlab o R, y a que es conocida su versatilidad en diferentes campos.

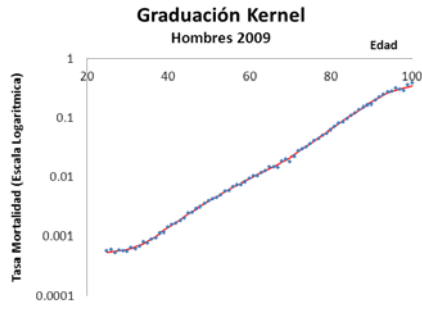


Figura 4a.

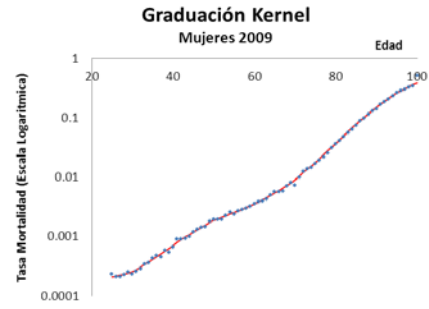


Figura 4b.

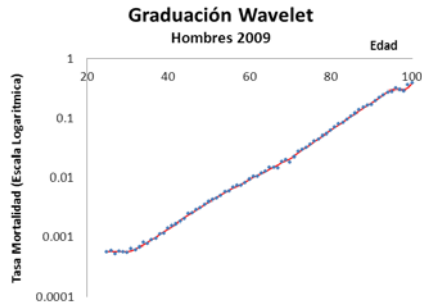


Figura 4c.

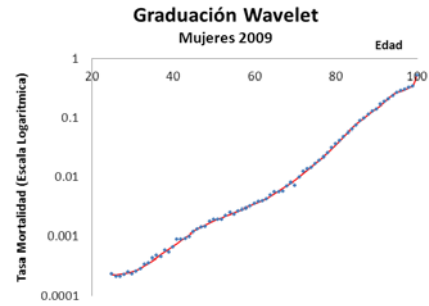


Figura 4d.

Graduaciones Kernel y wavelet. Año 2009. Varones y Mujeres.
Escala logarítmica. (Fuente: elaboración propia)

La graduación kernel utilizada tiene núcleo Gausiano y parámetro ventana $b=2$; el filtro considerado para la graduación wavelet es el de Daubechies con 3 escalas y nivel de truncamiento 0.35. En el caso de datos observados como el que tratamos la comparación entre las técnicas utilizadas no se puede hacer directamente. Los indicadores definidos en la sección anterior han de ser modificados debido a que los *verdaderos* valores de los parámetros no son conocidos, por este motivo la comparación se realiza utilizando el indicador *IRCM* pero considerando como valores verdaderos los valores observados, con el sesgo que ello pueda introducir.

El Cuadro 1 muestra el indicador de bondad de ajuste *IRCM* para los dos métodos comparados, para ambos sexos y para los años 2007, 2008 y 2009.

	<i>IRCM</i>			
	Wavelet		Kernel	
	Varones	Mujeres	Varones	Mujeres
2007	0.16243351	0.30776212	0.16616222	0.29421056
2008	0.14167674	0.21533206	0.17248443	0.290023
2009	0.14551765	0.23151855	0.2052255	0.33583671

Cuadro 1. Resumen del Indicador de bondad *IRCM* por año y sexo. (Fuente: Elaboración propia)

Se puede observar en esta tabla que los valores del indicador para la graduación wavelet son inferiores en los años 2008 y 2009, mientras que sólo para el año 2007 y en el caso de las mujeres, este indicador es ligeramente inferior para la graduación kernel. No obstante, es interesante señalar que la graduación wavelet es más robusta que la kernel en el sentido que se describe: los valores del indicador para el año 2007 son similares para ambas técnicas, para los años 2008 y 2009 la diferencia entre los valores del indicador es considerable. Esto puede visualizarse al calcular el ratio (*IRCM kernel/IRCM wavelet*), de manera que valores entorno a un 100% indican que el indicador es similar para ambas técnicas, por encima del 100% que la graduación wavelet mejora la kernel, y por debajo del 100% a la inversa. Este ratio queda resumido en el Cuadro 2.

	Año	Ratio (%)		
		2007	2008	2009
Varones		102	122	141
Mujeres		96	135	145

Cuadro 2. Resumen del ratio $IRCM_{kernel} / IRCM_{wavelet}$ por año y sexo. (Fuente: Elaboración propia)

Es interesante señalar que los valores del indicador de bondad de cada método han sido obtenidos asumiendo como verdaderos los valores

observados. Esto presenta inconvenientes que pueden introducir cierto sesgo en las conclusiones del trabajo. Con el objetivo de eliminar este posible sesgo se recurre a la simulación numérica, haciendo uso de un modelo biométrico estándar, como ya se ha comentado previamente.

4.2 DATOS SINTÉTICOS: ELECCIÓN DEL MODELO WAVELET

Notamos que la elección del tipo de wavelet a utilizar (Daubechies) se ha realizado de manera arbitraria respondiendo a sencillez y utilidad en otras áreas. No obstante es necesario determinar tanto el número de escalas que se va a utilizar (de iteraciones del proceso), como el umbral por debajo del cual los ‘detalles’ que el proceso proporciona de cada experiencia de mortalidad a la escala determinada es considerado ‘ruido’ (la fluctuación aleatoria). Los valores por debajo de este umbral serán eliminados del proceso de reconstrucción. Con este propósito se realiza un análisis de sensibilidad para el modelo biométrico considerado y se determina el nivel de escalado adecuado (1, 2, 3 o 4 escalas)- Daubechies1, Daubechies2, Daubechies3 o Daubechies4; y se determina que umbral de truncamiento es más adecuado, analizando valores comprendidos entre $\alpha = 0.25$ y $\alpha = 0.5$. Este umbral va a permitir reducir la fluctuación aleatoria para obtener una mejor estimación/graduación de la tasa teórica. Para llevar a cabo el análisis de sensibilidad se utilizan las medidas definidas con anterioridad: *IAM*, *IRM*, *IACM*, *IRCM*.

Al realizar la comparación directa de los valores reconstruidos para diferentes umbrales de truncamiento (graduación wavelet), se observa que las diferencias no son significativas, lo cual motiva que la elección del umbral sea arbitraria y pueda responder a otros criterios, como el de conservar⁵ la mayor información posible de la función a graduar mediante un umbral pequeño ($\alpha = 0.25$). Una vez se ha fijado este umbral, se realiza una comparación de los valores reconstruidos con las diferentes Daubechies consideradas, *Db1*, *Db2*, *Db3* y *Db4*, para diferente número de escalas.

El proceso seguido es el siguiente:

1. Para cada realización, cada filtro y cada escala se obtienen los cuatro indicadores: *IAM*, *IRM*, *IACM*, *IRCM*.
2. Fijado un indicador, para cada realización se determina en qué

⁵ Notemos que existen otros procesos para la determinación del umbral de truncamiento, algunos de ellos se basan en técnicas estadísticas, en el estudio de la distribución de probabilidad de la parte wavelet a una escala concreta.

modelo de wavelet se produce el error más pequeño.

3. Se contabiliza el número de veces en las que cada modelo de wavelet alcanza el valor mínimo.
4. Utilizando el criterio dado como *el mejor modelo es aquel que tiene la mayor cantidad de mínimos* en el indicador considerado, se determina el modelo de wavelet óptimo (en el sentido descrito).

La tabla 2 muestra un resumen de los resultados obtenidos, para cada tipo de wavelet y para cada indicador de *bondad de reconstrucción* utilizado. Es casi inmediato que el número de escalas apropiado es 3, no quedando tan evidente si es más apropiado utilizar el filtro *Db3* o *Db4*. La elección de uno u otro filtro para realizar la comparación de las dos técnicas no paramétricas se realiza teniendo en cuenta que *Db3* tiene una vecindad menor que *Db4*, siendo aparentemente ‘peor’, lo cual puede darle cierta ganancia a la estimación kernel. Se deja como cuestión abierta determinar en qué casos es más fiable utilizar cada uno de los filtros *Db* en el contexto de tablas de mortalidad más generales, notando que la aplicación realizada en los datos reales ha utilizado *DB4*.

	IAM	IRM	IACM	IRCM
<i>Db3</i> , 1 escala.	0	0	0	0
<i>Db3</i> , 2 escalas.	2%	0%	4%	0
<i>Db3</i> , 3 escalas.	50%	48%	52%	49%
<i>Db4</i> , 1 escala.	0	0	0	0
<i>Db4</i> , 2 escalas.	3%	0	1%	2%
<i>Db4</i> , 3 escalas.	45%	52%	43%	49%

Tabla 2. Resumen de Indicadores de bondad. $\alpha = 0.25$.
(Fuente: Elaboración propia.)

La figura 5a muestra las probabilidades de fallecimiento (en escala logarítmica) que el modelo de referencia proporciona, así como los valores de la experiencia de mortalidad simulada número 1. También se muestra el resultado de graduar la realización 1 para las wavelets de Daubechies consideradas en el análisis de sensibilidad. La figura 5b muestra la misma información a la cual se le ha sumado una constante con la finalidad de trasladar las probabilidades anteriores y así facilitar la interpretación de la información dada en la figura 5a.

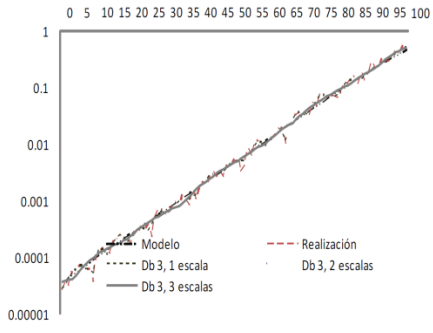


Figura 5a. Tasas de fallecimiento de: el modelo, realización 1 y de los valores graduados con la wavelet D_3 a escalas 1, 2 y 3.

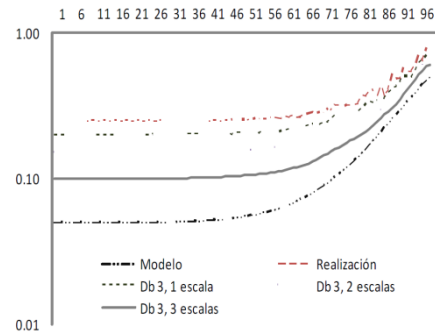


Figura 5b. Tasas de fallecimiento trasladadas de: el modelo, realización 1 y D_3 a escalas 1, 2 y 3.

Con la finalidad de realizar una comparación gráfica más adecuada, las Figuras 6 a 9 muestran las tasas de fallecimiento de referencia y las graduadas mediante la base de wavelets Db_3 , con 1, 2 y 3 escalas.

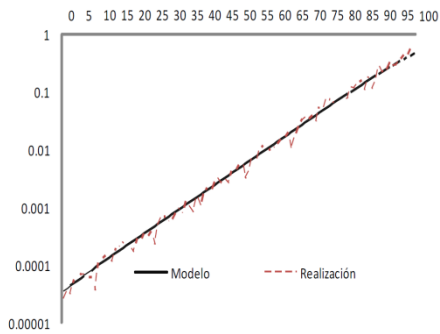


Figura 6.

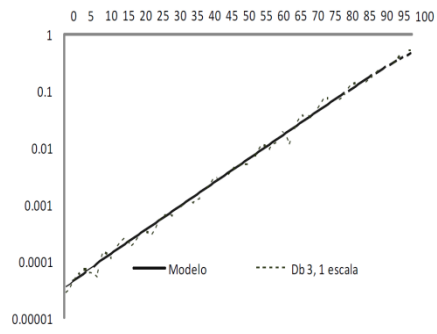


Figura 7.

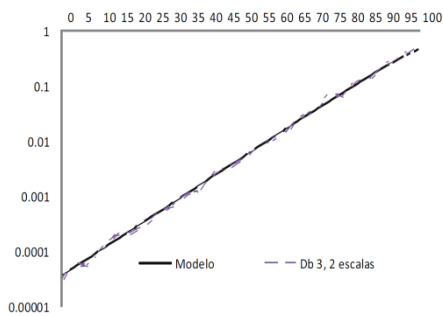


Figura 8.

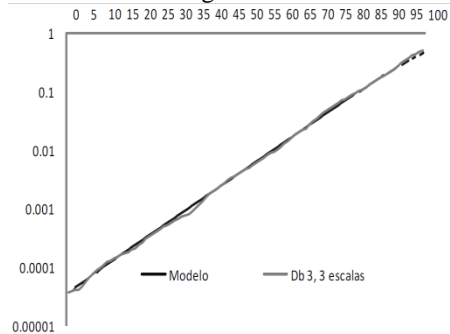


Figura 9.

Tasas de fallecimiento de referencia y graduadas mediante la base wavelet Db_3 , con 1, 2 y 3 escalas. (Fuente: elaboración propia)

En virtud al análisis de sensibilidad descrito, en lo que sigue y con el objeto de realizar la comparación entre las técnicas de graduación (kernel /wavelet), se ha determinado la utilización de un filtro *Daubechies 3*, con 3 escalas, junto a un umbral de truncamiento $\alpha = 0.25$.

4.3 DATOS SINTÉTICOS: COMPARACIÓN WAVELET - KERNEL

En esta parte se realiza la comparación entre las dos técnicas no paramétricas objeto de este estudio: estimación kernel y estimación con wavelets. Como se ha concluido en la sección anterior, el filtro a utilizar en la estimación wavelet es *Daubechies 3*, con 3 escalas.

Para la estimación kernel (Ayuso et al., 2007) se utiliza la expresión

$$q_x = \frac{\sum_{r=0}^{100} q_r K_b(x-r)}{\sum_{r=0}^{100} K_b(x-r)}, x = 0, \dots, 100.$$

En el caso de utilizar núcleo Gaussiano se toma como referencia la función

$$K(s) = e^{-\frac{s^2}{2}},$$

Y se utiliza este para definir la función de pesos a utilizar en la graduación la cual depende de un parámetro b , conocido como parámetro *ventana o bandwidth*. De esta forma se tiene

$$K_b(t) = \frac{1}{b} K\left(\frac{t}{b}\right).$$

En este caso se considera como parámetros ventana $b = 1$ y $b = 2$.

La comparación entre los dos tipos de graduación no paramétrica es análoga a la realizada en el análisis de sensibilidad descrito en 4.1, en la elección del modelo de wavelet. Este está basado en el cálculo de los indicadores *IAM*, *IRM*, *IACM*, *IRCM*. De esta manera se obtiene la tabla 3, la cual se construye de forma análogamente a la tabla 1. Los resultados recogen el porcentaje de veces que una de las técnicas (nombrada inicialmente en cada fila de la tabla) es mejor que las otras para el correspondiente indicador, es decir, cuando el valor de la medida es menor, estas calculadas sobre el total de experiencias sintéticas de mortalidad generadas previamente.

	IAM	IRM	IACM	IRCM
Kernel , $b=1$.	0	0	0	0
Kernel , $b=2$.	37%	53%	35%	39%
Db3 , 3 escalas.	63%	47%	65%	61%

Tabla 3. Resumen de indicadores para Db3 y Kernel.

La figura 10 muestra las probabilidades de referencia y una de las experiencias sintéticas de mortalidad (realización 8), y en la figura 11 se muestra las probabilidades de referencia (Gompertz) junto a la graduación de la experiencia 8 haciendo uso de la wavelet *Db3*, con 3 escalas. La figura 12 muestra la graduación kernel con parámetro $b=2$ de la experiencia 8 – todas ellas en escala logarítmica. Finalmente, la figura 13 muestra las tres series de probabilidad en un mismo gráfico de manera que se puede realizar una comparación visual de las técnicas de graduación tratadas.

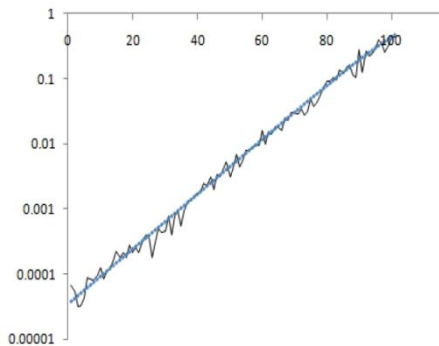


Figura 10. Tasas de mortalidad de referencia y realización 8.

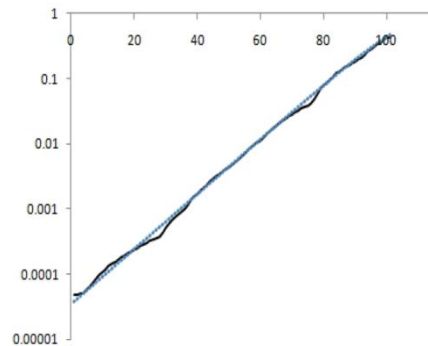


Figura 11. Tasas de mortalidad de referencia y graduación con *Db3*.

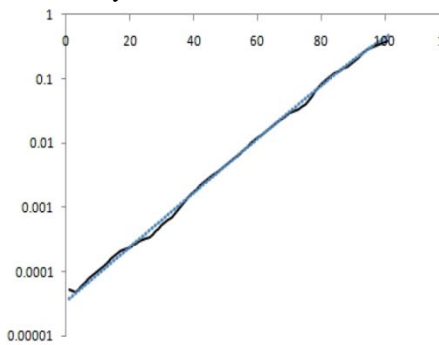


Figura 12. Tasas de mortalidad de referencia y graduación kernel.

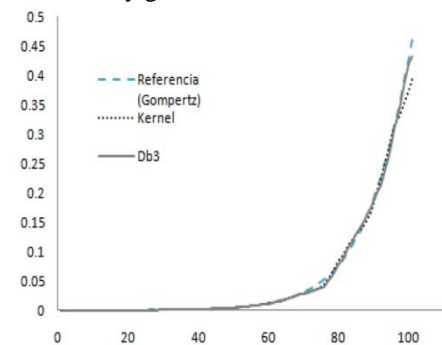


Figura 13. Tasas de mortalidad de referencia junto a graduaciones kernel y *Db3*.

Observando con detenimiento las figuras 11 y 12 se pone de manifiesto la precisión de ambas técnicas no paramétricas aplicadas a la graduación de tasas de fallecimiento. No obstante se puede apreciar como los valores graduados manifiestan cierto comportamiento oscilatorio, este se percibe en las dos graduaciones y se asocia de forma empírica a la forma oscilatoria de la experiencia de mortalidad tratada (ver figura 10), en este caso la realización 8. Finalmente, en la figura 13 queda reflejado como la graduación wavelet mejora notablemente a la graduación kernel para las edades altas.

Para terminar con la comparación realizada entre las dos técnicas, se realiza un pequeño análisis de *robustez* de la técnica propuesta: en aquellas realizaciones (experiencias sintéticas) en las cuales la graduación con el método kernel ha sido mejor que la graduación wavelet, la mejora relativa es inferior a la que se obtiene cuando el método wavelet es mejor que el kernel. Esto es, 'la graduación wavelet no sólo supera con mayor frecuencia en todas las medidas utilizadas a la graduación kernel, además, cuando la graduación wavelet no ajusta mejor que la graduación kernel el *ratio de pérdida relativa* es mejor que cuando esto sucede al revés'. Notemos que la graduación utilizando *Db3* mejora a la kernel, por lo que haciendo uso de *Db4* la mejora será igual o superior.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado la comparación entre dos técnicas de graduación no paramétricas: haciendo uso de wavelets y utilizando estimación kernel. Este tipo de graduación es ampliamente reconocido y suele utilizarse para la construcción de, por ejemplo, tablas de mortalidad de referencia o para la construcción de indicadores. La técnica de graduación wavelet ha sido utilizada con éxito en multitud de áreas de conocimiento, por ejemplo en el ámbito de las telecomunicaciones para reconstruir señales que han sufrido degradación en el proceso de transmisión. El objetivo de este trabajo ha sido determinar si la estimación wavelet puede ser o no utilizada en los mismo ámbitos que la estimación kernel en el contexto de las ciencias actuariales. Este trabajo no sólo contesta afirmativamente a esta cuestión sino que pone de manifiesto que la graduación wavelet supera en algunos aspectos a la graduación kernel, por ejemplo en edades avanzadas los valores graduados están más próximos de los de referencia y, en general, por la robustez de la técnica, como se he descrito al final de la sección anterior. Las conclusiones se han basado en los resultados obtenidos en los indicadores definidos en la sección 3: *IAM*, *IRM*, *IACM*, *IRCM* y cuyos resultados han

sido resumidos en las tablas 2 y 3. Notemos que estos indicadores se han calculado a partir de la generación de experiencias sintéticas de mortalidad las cuales se basan en la hipótesis de distribución binomial del número de fallecidos, de manera que se puede estimar de manera exacta en cuántas de estas experiencias el indicador considerado (o indicadores) es menor, lo cual equivale a considerar que la técnica no paramétrica para la que se alcanza este valor mínimo es más precisa, reconstruye mejor los valores de referencia. La conclusión obtenida es que la graduación wavelet con filtro *Db3* y 3 escalas reconstruye mejor que la graduación kernel los valores originales. De hecho se observa que en el caso en que una experiencia de mortalidad tiene asociada una graduación kernel con menor error que el que proporciona la graduación wavelet, el error que se produce con la wavelet es menor que cuando esto se produce a la inversa. Por tanto parece evidente que para la tasa de mortalidad para edades superiores a los 25 años, la graduación wavelet es una técnica cuanto menos adecuada y que supera en ciertos aspectos a la graduación kernel. Esto queda evidenciado en la aplicación realizada sobre los datos reales obtenidos de las tablas de mortalidad de la población española para los años 2007, 2008 y 2009.

Finalmente es interesante señalar que se dejan cuestiones abiertas en relación al proceso seguido y que deben ser analizadas en otros trabajos. Por ejemplo cuestiones relacionadas con el número de experiencias sintéticas de mortalidad, de manera que los resultados obtenidos no dependan de las realizaciones concretas que por este procedimiento se obtengan. Otro aspecto a considerar es la utilización de leyes más generales que la de Gompertz para la obtención de cada experiencia sintética de mortalidad: por ejemplo Gompertz-Makeham o Heligman y Pollard, las cuales son aplicables a todo el rango de edades. También es interesante plantearse un análisis similar en el caso en que se admitan determinadas hipótesis en relación a la estructura del fenómeno de muerte: la estabilidad en el tiempo de la ley asumida o la distribución de fallecidos de una edad determinada según otras leyes diferentes a la binomial, por ejemplo la distribución beta.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ayuso, M., Corrales, H., Guillén, M., Pérez-Marín, A.M. y Rojo, J.L. (2007). *Estadística Actuarial Vida*. UBe. Barcelona (Spain).
- [2]. Benjamin, B. and Pollard, J. (1992). *The Analysis of Mortality and other Actuarial Statistics*. Butterworth-Heinemann. London (61 ed.).
- [3] Chui, C. K. (1992). *An Introduction to Wavelets*. Academic Press. New York (USA).

- [4] Chui, C. K. (1992) *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press Inc. San Diego (USA).
- [5] Daubechies, I. (1992). *Ten lectures on wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia (USA).
- [6] Debón Aucejo, A. (2003). *Graduación de tablas de mortalidad. Aplicaciones actuariales*. Universitat de València (Tesis Doctoral). Valencia (Spain).
- [7] Debón Aucejo, A., Montes, F. y Sala, R. (2006). A comparison of nonparametric methods in the graduation of mortality: application to dat afrom Valencia región. *International Statistical Review*, 74, 215-233.
- [8] Felipe, A., Guillén, M. and Nielsen, J. (2001). Longevity studies base don kernel hazard estimation. *Insurance: Mathematics & Economics*, 28, 191-204.
- [9] Gómez del Valle, L. y Martínez Rodríguez, J. (2004). Valoración de derivados del tipo de interés utilizando wavelets. *Proceedings of the 7th Spanish-Italian meeting on Financial Mathematic*. Universidad de Castilla la Mancha, Cuenca (Spain).
- [10] Instituto Nacional de Estadística, INE (2011). *Tablas de mortalidad de la población de España 1991-2009*. <http://www.ine.es/jaxi/tabla.do> (8 de noviembre de 2011).
- [11] Mallat, S.G. (1980). A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Translation*, PAMI Vol. 11, 7, 84-95.
- [12] Mallat, S.G. (1998). *Wavelet Tour of signal Processing*. American Press (USA).
- [13] Martínez Giménez, F., Peris Manguillot, A. y Rodenas Escribá, F. (2004). *Tratamiento de Señales Digitales Mediante Wavelets y su Uso con Matlab*. ECU. San Vicente, Alicante (Spain).
- [14] Meyer, Y. (1992). *Wavelets and Operators*. Cambridge University Press. Cambridge (UK).
- [15] Nielsen, J. (2003). Smoothing and prediction with a view to actuarial science, biostatistics and finance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 51-74
- [16] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P. (2007), *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press. New York (USA)
- [17] Renshaw, A.E. (1995). Joint modelling for actuarial graduation and duplicate policies. *Journal of the institute of Actuaries*, Vol. 1, 119, pags. 69-85.

ANEXO 1: GRADUACIÓN DE TABLAS DE MORTALIDAD.

En este anexo se muestran las figuras resultantes de la graduación por las técnicas analizadas (wavelet y kernel), para hombres, mujeres y para los años 2007 y 2008.

Año 2007

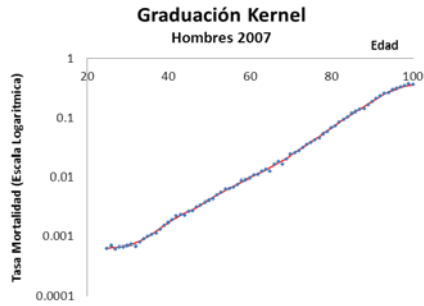


Figura A1.

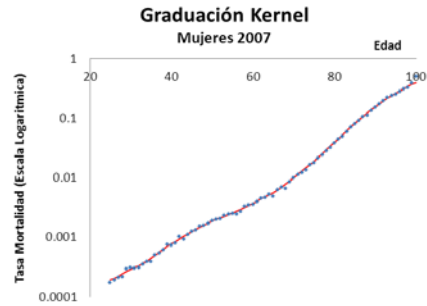


Figura A2.

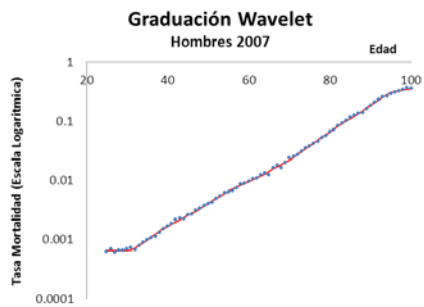


Figura A3.

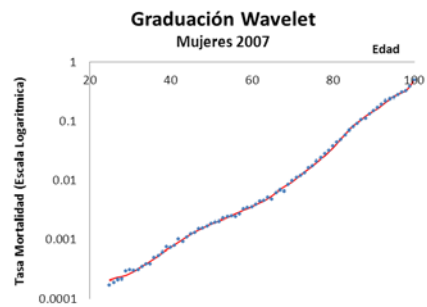


Figura A4.

Año 2008.

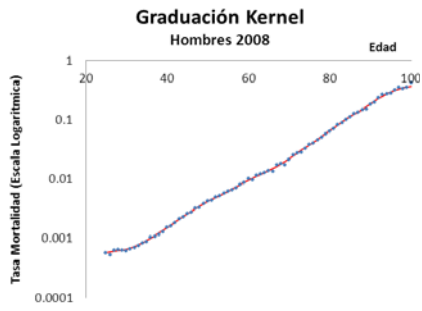


Figura A5.

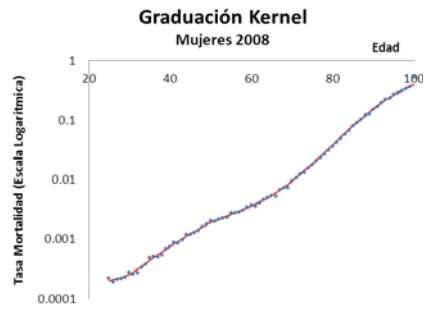


Figura A6.

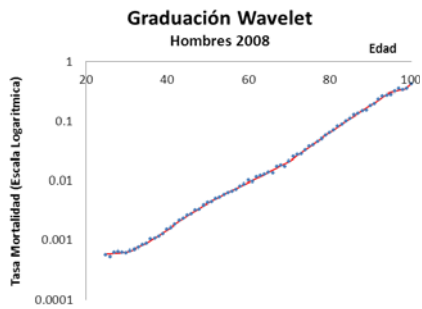


Figura A7.

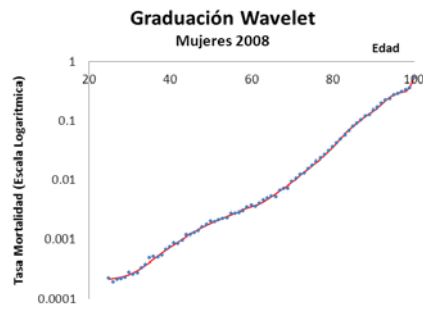


Figura A8.

ANEXO 2: EXTRACTO DE TABLAS DE MORTALIDAD

Año 2007. Varones

	Tasa de mortalidad	Promedio de años vividos el último año de vida	Riesgo de muerte	Supervivientes	Población estacionaria	Esperanza de vida
25	0.634428	0.454479	0.634208	98881.251	98847.041	53.518913
26	0.698556	0.502095	0.698313	98818.54	98784.182	52.552588
27	0.614153	0.500503	0.613965	98749.534	98719.25	51.588961
28	0.662815	0.521704	0.662605	98688.905	98657.628	50.620347
29	0.658378	0.510832	0.658166	98623.513	98591.761	49.653565
30	0.702334	0.521805	0.702098	98558.603	98525.513	48.68593
31	0.727066	0.510824	0.726808	98489.405	98454.388	47.71977
32	0.674957	0.51307	0.674735	98417.822	98385.487	46.754106

33	0.79883	0.500637	0.798512	98351.416	98312.199	45.785328
34	0.887465	0.478455	0.887055	98272.881	98227.416	44.821517
35	0.989855	0.506385	0.989371	98185.708	98137.757	43.860887
36	1.083908	0.51485	1.083338	98088.566	98037.012	42.903823
37	1.12372	0.514874	1.123108	97982.303	97928.917	41.949794
38	1.305519	0.479874	1.304633	97872.258	97805.844	40.996383
39	1.516491	0.494899	1.51533	97744.571	97669.757	40.049311
40	1.704909	0.510702	1.703488	97596.455	97515.107	39.10934
41	1.871139	0.50141	1.869395	97430.201	97339.39	38.175204
42	2.209366	0.508438	2.20697	97248.065	97142.565	37.245763
43	2.30144	0.497079	2.298779	97033.442	96921.261	36.327021
44	2.272638	0.493821	2.270027	96810.383	96699.144	35.409576
45	2.593678	0.51077	2.590391	96590.621	96468.212	34.489016
46	2.690055	0.493283	2.686393	96340.414	96209.271	33.577261
47	3.144831	0.505151	3.139945	96081.606	95932.314	32.666377
48	3.356356	0.500628	3.35074	95779.915	95619.649	31.76768
49	3.727575	0.518044	3.720891	95458.981	95287.794	30.8728
50	4.084482	0.484359	4.075898	95103.789	94903.909	29.986169
51	4.258471	0.50325	4.249482	94716.155	94516.216	29.106907
52	4.94255	0.501984	4.930414	94313.661	94082.081	28.228976
53	5.453163	0.52006	5.438928	93848.655	93603.677	27.366359
54	6.250348	0.507897	6.231182	93338.219	93052.008	26.513173
55	6.322538	0.490435	6.302234	92756.612	92458.733	25.676233
56	6.702379	0.486073	6.679372	92172.038	91855.638	24.835966

Año 2007. Mujeres

	Tasa de mortalidad	Promedio de años vividos el último año de vida	Riesgo de muerte	Supervivientes	Población estacionaria	Esperanza de vida
25	0.169584	0.514072	0.16957	99319.449	99311.265	59.633418
26	0.190152	0.534036	0.190135	99302.607	99293.809	58.643445
27	0.206969	0.535876	0.206949	99283.726	99274.19	57.654496
28	0.213293	0.500434	0.21327	99263.179	99252.604	56.666319
29	0.292186	0.447883	0.292139	99242.009	99226.002	55.6783
30	0.308452	0.48279	0.308402	99213.017	99197.192	54.694439
31	0.301813	0.475518	0.301765	99182.419	99166.722	53.711164
32	0.310787	0.48605	0.310738	99152.49	99136.655	52.727233
33	0.345084	0.484371	0.345022	99121.679	99104.045	51.743471

34	0.383897	0.515881	0.383825	99087.48	99069.068	50.761163
35	0.385995	0.505289	0.385921	99049.448	99030.537	49.780456
36	0.495802	0.495711	0.495678	99011.223	98986.473	48.79948
37	0.540582	0.536364	0.540447	98962.145	98937.348	47.823435
38	0.610067	0.51007	0.609885	98908.661	98879.107	46.849005
39	0.75297	0.487077	0.75268	98848.338	98810.176	45.877283
40	0.723501	0.50412	0.723242	98773.937	98738.513	44.911473
41	0.788789	0.48599	0.788469	98702.5	98662.497	43.943614
42	1.018969	0.513189	1.018464	98624.676	98575.778	42.977906
43	0.922999	0.504212	0.922577	98524.23	98479.165	42.021199
44	1.103911	0.50013	1.103302	98433.334	98379.047	41.059537
45	1.253624	0.505561	1.252848	98324.732	98263.824	40.104335
46	1.303391	0.503216	1.302548	98201.546	98138.001	39.154009
47	1.51879	0.508202	1.517657	98073.634	98000.434	38.204419
48	1.559689	0.505067	1.558486	97924.792	97849.258	37.261716
49	1.683381	0.492528	1.681944	97772.178	97688.725	36.31909
50	1.892063	0.516574	1.890334	97607.73	97518.533	35.37945
51	1.995054	0.513482	1.993119	97423.219	97328.749	34.445477
52	2.019061	0.497906	2.017016	97229.043	97130.576	33.513243
53	2.298506	0.500224	2.295869	97032.93	96921.593	32.57997
54	2.428272	0.511714	2.425396	96810.155	96695.505	31.65379
55	2.493907	0.500414	2.490804	96575.352	96455.177	30.729506
56	2.44865	0.490031	2.445596	96334.802	96214.655	29.804988