Sobre la evolución de los métodos cuantitativos económico-financiero-actuariales

JULIO G. VILLALÓN

F. de Cc. Económicas. Universidad de Valladolid
(garvillalon@gmail.com)

ANTONIO SEIJAS MACÍAS

F. de Economía e Empresa. Universidade da Coruña
(jasm@udc.es)

RESUMEN

Los métodos cuantitativos económico-financiero-actuariales han experimentado un gran avance a lo largo del tiempo. Los economistas se han visto obligados a aplicar, de forma creciente, nuevos métodos para resolver los distintos problemas que han ido apareciendo y la relación de tales problemas aumenta continuamente. La habilidad de los economistas para plantear los problemas, refleja un cuerpo de teoría bien desarrollado, modos de análisis que enfatizan la lógica e instrumentos cuantitativos sofisticados.

Las Matemáticas y la Estadística en el ámbito económico-financiero-actuarial, han jugado un papel central en el análisis económico, lo que ha proporcionado un mayor avance en el campo, particularmente financiero, al permitir a los economistas establecer rigurosamente sus teoremas y contrastar la validez empírica de sus teorías.

Por lo que se refiere a la Teoría Financiera, hace más de 50 años, esta se reducía en términos generales, a un solo aspecto: Cálculo de los valores financiero actuariales. Ahora bien, los economistas financieros comenzaron a utilizar una gran variedad de técnicas estadístico-matemáticas cada vez más sofisticadas como: Teoría de la Probabilidad, Optimización, Procesos Estocásticos, Cálculo Estocástico, Tiempo Continuo (Itô), Martingalas, Integración Browniana, Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, etc.

Pues bien, el trabajo que presentamos hace referencia a la evolución de las técnicas matemáticas y a sus aplicaciones, anteriormente mencionadas.

INTRODUCCIÓN

Después de hacer algunas referencias a la evolución de la ciencia económico-financiero-actuarial a lo largo del tiempo, consideramos que para modelar y analizar el comportamiento de los fenómenos económicos en ambiente de incertidumbre, modernamente se vienen utilizando diversos métodos del cálculo estocástico como son la integral estocástica, el Lema de Itô, las ecuaciones diferenciales estocásticas, la estabilidad estocástica y el control óptimo estocástico, algunos de tales aspectos consideramos a continuación.

MÉTODOS CUANTITATIVOS ECONÓMICO FINANCIERO ACTUARIALES

La Ciencia Financiero Actuarial en su nacimiento en el siglo XVII se dedicó fundamentalmente a las operaciones del seguro de vida: Cálculo de primas para las operaciones de rentas, capitales diferidos de supervivencia $({}_nE_x)$ y operaciones de los seguros de vida entera $(P_x\ddot{a}_x = A_x)$. Pronto se vio que eran necesarias las técnicas financiero actuariales para calcular las reservas matemáticas $({}_tV_x)$. En este aspecto, la ciencia financiero actuarial mostró los primeros rudimentos del cálculo estocástico hace más de un siglo. Las ecuaciones diferenciales para las reservas de una póliza del seguro de vida las obtuvo T. Nicolai Thiele en 1875 (ver Hansen, 1946) y para la probabilidad de ruina eventual de un seguro de vida, Filip Lundberg en 1903 (ver Cramer, 1969), en momentos en los que la noción de proceso estocástico no se había definido de forma concreta.

A parte de su trabajo práctico en el “seguro de vida” y su tesis doctoral en 1903, Filip Lundberg (1876-1965) fue pionero en el seguro de enfermedad, utilizó la técnica del seguro de vida para la obtención de las reservas. Así mismo, fue pionero en el campo del reaseguro y de la “Swedish Actuarial Society” en 1904. Creó su original “Collective Risk Theory” publicada en sueco en 1906 y 1926 y en alemán en 1909 y 1930. En su tesis doctoral consideró ya la descripción “estocástica” de la corriente de pagos como un proceso de Poisson compuesto. Donde los momentos de los pagos constituían un “Proceso de Poisson” en el tiempo; las cantidades sucesivas pagadas eran independientemente obtenidas de una distribución de la masa de riesgo. Probablemente este fue el primer ejemplo en el cual se introdujo y, a parte de los trabajos de Erlang en 1909 y de Louis Bachelier en 1900, constituyen un ejemplo pionero importante de la definición y uso de los procesos estocásticos en tiempo-continuo. En la tesis, prueba el Teorema Central del Límite para los procesos, utilizando de forma original la ecuación de futuro para la función de distribución del proceso, es decir, Lundberg introdujo el “proceso de riesgo” que describía el superávit, donde los ingresos eran continuos al tanto dado por la prima y el desembolso era un “proceso de Poisson compuesto”. Para este proceso, consideró la “probabilidad de ruina”, probabilidad de que el resultado fuera negativo, como función del resultado inicial, el tanto de prima y la distribución de la masa de riesgo. Hay una ecuación integral para la probabilidad de ruina, que se utiliza para deducir la famosa “desigualdad de Lundberg”: $P(Ruina) < exp(-Ru)$, donde u es el superávit y R es el “coeficiente de ajuste”, una medida de la dispersión de la distribución de la masa de riesgo.

Por otra parte, Harald Cramer (1955) estudió la “Teoría del riesgo” consistente en el análisis matemático de las fluctuaciones aleatorias en las empresas de seguros y discusión de los diversos medios de protección frente a sus efectos adversos.

En la “Teoría del riesgo individual”, la ganancia o pérdida de la compañía que surge durante un tiempo dado sobre una póliza se considera una variable aleatoria y el desarrollo matemático de la teoría estaba basado en un estudio de las distribuciones de probabilidad de variables de este tipo. Las ganancias o pérdidas totales de la compañía durante el mismo tiempo será la suma de las variables aleatorias asociadas a las pólizas individuales en vigor en la compañía. De acuerdo con el Teorema Central del Límite, esta suma estará aproximadamente normalmente distribuida si el número de pólizas es lo suficientemente grande y se pudiera obtener los tipos de las sumas aseguradas de todas las pólizas individuales, sería posible obtener los valores aproximados de las diversas probabilidades ligadas a las ganancias o pérdidas de la compañía bajo ciertas condiciones.

Respecto a la “Teoría del Riesgo Colectivo” fundada y desarrollada por F. Lundberg en una serie de trabajos (1903/48), el riesgo empresarial de una compañía de seguros se consideraba como un total, como un juego de azar continuo entre la compañía y la totalidad de los accionistas. En el curso de este juego, ciertos sucesos aleatorios: las “reclamaciones” acaecen durante un intervalo de tiempo y tienen que considerarse por la compañía mientras que por parte de la compañía recibe una corriente continua de primas de riesgo de los accionistas. Mediante ciertas hipótesis simplificadoras, es posible estudiar las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias fundamentales asociadas a este juego, tal como el montante total de las reclamaciones que acaecen durante un intervalo de tiempo dado, la ganancia total de la compañía que surge durante el mismo intervalo, etc.

La “Teoría del Riesgo Colectivo”, constituye una parte de la teoría general de los procesos estocásticos, que posteriormente ha tenido un gran desarrollo y ha encontrado un gran número de aplicaciones importantes. Se ha demostrado que se puede presentar desde un punto de vista unificador el de la teoría de los procesos estocásticos. El negocio del riesgo de una Compañía de seguros constituye un caso particular de un proceso estocástico. El proceso de riesgo Y(t) es un proceso estocástico que pertenece a la clase de los procesos estocásticos con incrementos

FIGURA 1. Función muestral del Proceso Y(t), montante de las reclamaciones

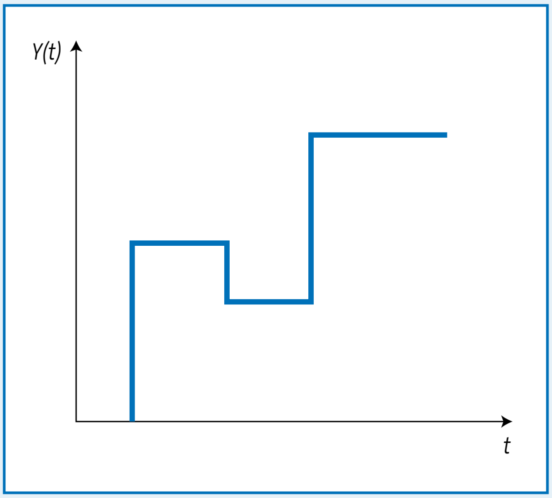
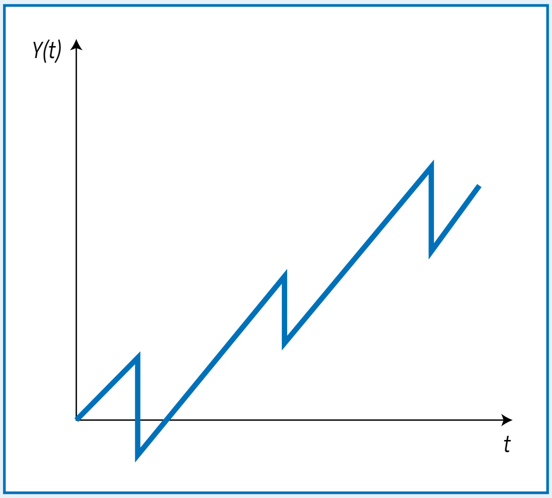


FIGURA 2. Función muestral del Proceso X(t), correspondiente a Y(t)



estacionarios e independientes (Fig. 1 y Fig. 2). Para toda función muestral Y(t) la transformación X(t)= p1t – Y(t), proporciona la función muestral correspondiente X(t) que tiene los mismos saltos que Y(t), con signos invertidos y crece linealmente a lo largo de cada intervalo entre dos saltos, siendo el coeficiente angular p1.

En el siglo XX, la revista "Astin", jugó un papel esencial en lo relativo a los métodos financiero-actuariales que se habían aplicado a las operaciones del seguro no-vida (seguro del automóvil, incendios, etc.). Emergió una nueva clase de actuarios: "Actuarios de segunda clase", donde se dio entrada a las técnicas del pensamiento probabilista: Actuarios vida y Actuarios no-vida. Posteriormente, un nuevo desarrollo dio lugar a la emergencia del Actuario de la tercera clase, grupo de expertos matemáticos que extendieron sus técnicas a lo relativo a la inversión del seguro y Banca.

Conviene observar que si los analistas matemático-financieros, en el corazón de la tempestad, venían desde hacía tiempo participando en la eclosión teórica, el mundo de los "actuarios" ha permanecido, hasta recientemente, bastante rezagado con respecto a estos problemas financieros. Ahora bien, gracias a alguno de sus pioneros, la comunidad actuarial ha tomado conciencia de la importancia de estos riesgos financieros y sus impactos sobre los modelos financiero-actuariales clásicos y como consecuencia de este movimiento se creó en 1986, en el seno de la Asociación Actuarial Internacional, la sección financiera "Actuarial Approach for Financial Risks" (AFIR), dedicada a estudiar el desarrollo de los métodos actuariales en el campo financiero-estocástico.

En 1914, se creo el Journal of Swedish Society of Actuaries, celebró el aniversario de cien años en 2014. Hoy se denomina Scandinavian Actuarial Journal (SAJ), un "journal" de las ciencias actuariales de gran prestigio internacional donde han publicado muchos famosos actuarios y matemáticos sus trabajos analizadores y autores.

El SAJ es un "journal" dedicado a las ciencias actuariales donde se publica todo lo relativo a métodos para el seguro y tópicos de específica relevancia relacionados con las aplicaciones actuariales. El "journal" publica artículos de matemáticas del seguro con una base teórica en la teoría de la probabilidad, estadística, investigación operativa, análisis numérico, ciencias del "computer", demografía, economía matemática y cualquier área de las matemáticas aplicadas.

La segunda revolución financiera está relacionada con la explicación en el mercado de los "títulos derivados". El trabajo inicial fue realizado por Fisher Black y Scholes en los años 70, mediante la deducción de una ecuación diferencial que debía satisfacer el precio de un título derivado dependiente de un título subyacente que no paga dividendos. Utilizaron la ecuación para obtener los valores de las opciones de compra *(Call)* y opciones de venta *(Put)* europeas sobre el título. La idea básica para valorar una opción *Call* europea es construir una cartera compensadora; es decir, una combinación de acciones del título sobre el cual se suscribe la *Call* de modo que la cartera resultante reproduzca la opción. En cualquier momento, la opción debería valer exactamente lo mismo que la cartera compensadora ya que en otro caso sería posible el "arbitraje". Basados en este principio llamado "ausencia de arbitraje", Black y Scholes (1973) obtuvieron la fórmula para determinar el valor de la opción *Call* europea, extendida por Merton (1973) en una variedad de formas muy significativas. Por este trabajo original Rober C. Merton y Miron S. Scholes fueron galardonados con el Premio Nobel de Economía en 1997.

Tan pronto como pensamos respecto a la inversión en términos estocásticos se presentó el gran problema de que: los riesgos de inversión son típicamente dependientes, y por tanto, desequilibrados. La contestación a este problema: como no hay ninguna ley matemática que automáticamente equilibre el riesgo de inversión implicó crear nuevos instrumentos artificiales para este fin: los mercados de las opciones *call, put* y futuros. Por tal motivo se crearon técnicas avanzadas. La base estadístico matemática debía sustancialmente ampliarse para los profesionales de la tercera clase, economistas financiero-actuariales, con nociones como la teoría de los proceso estocásticos, integración estocástica, Fórmula de Itô, Fórmula de Black-Scholes, etc. En resumidas cuentas, dar entrada al cálculo estocástico. Nueva clase de especialistas en las aplicaciones del "cálculo estocástico".

El término "estocástico" significa "el arte de suponer". En primer lugar fue utilizado por Jacob Bernoulli en su libro "Ars Conjuctandi" en 1773 en el que probó la primera ley de los grandes números. *Stochastic modern day*, es un dominio de las matemáticas aplicadas. Comprende, (entre otras, la Teoría de la Probabilidad, los Procesos Estocástico y la Estadística). Se utiliza para examinar los sucesos aleatorios, desarrollos temporales, y estructuras especiales tratando de encontrar las regularidades posibles. Los métodos estocásticos son aplicables a todas las disciplinas científicas, obteniéndose ventajas del comportamiento mediante los computadores modernos. Lo estocástico ha llegado a ser un instrumento inestimable para las ciencias naturales, desarrollo tecnológico y particularmente para la economía.

El cálculo que estudiamos en los primeros cursos de matemáticas nos proporciona los instrumentos analíticos para las funciones deterministas. Ahora bien, cuando modelamos la incertidumbre futura de un objeto, por ejemplo, el precio de un título o los tantos de interés a lo largo del tiempo, estos son aleatorios en cualquier momento considerado, por tanto, son llamados procesos estocásticos.

El cálculo estocástico es el instrumento analítico adecuado para los procesos estocásticos. Entonces, con tales instrumentos, podemos predecir el comportamiento futuro de estos aspectos y cuantificar los riesgos asociados a ellos. Esto es por lo que tiene gran importancia.

La Teoría de los Procesos Estocásticos, estudia los acontecimientos aleatorios asociados al tiempo regidos por las leyes de probabilidad.

El cálculo estocástico se refiere a una clase específica de procesos estocásticos que son estocásticamente integrables y frecuentemente expresados como soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Las primeras aplicaciones financieras de los procesos estocásticos, aparte de lo mencionado relativo a Lunberg y Cramer, datan de 1900 cuando el matemático francés Louis Bachelier aplicó un proceso estocástico especial llamado movimiento Browniano o proceso de Wiener para describir los precios de los títulos en su tesis doctoral.

En 1892 Louis Bachelier llegó a París para continuar su educación universitaria en la Universidad de la Sorbona. Allí tuvo un insigne cuadro de profesores: Paul Apell, Joseph Bousiness y Henri Poincaré. El desarrollo como científico fue bastante rápido y escribió su interesante tesis “Teoría de la Especulación” sobre la aplicación de la Teoría de la probabilidad a los mercados de títulos. Este se considera ahora históricamente el primer intento de utilizar las matemáticas avanzadas en la matemática financiero-actuarial y testimoniar la introducción del movimiento Browniano. De acuerdo con la tradición de la época, también defendió una segunda tesis sobre una materia elegida por la universidad sobre la mecánica de fluidos. Su título refleja el bagaje educativo de L. Bachelier “La resistencia de una masa líquida indefinida dotada de fricciones interiores regidas por las fórmulas de Navier, a los pequeños movimientos variados de traslación de una esfera sólida, sumergida en una masa y adherente a la capa fluida que la contacta”.

La primera parte de la tesis de Louis Bachelier, “Teoría de la Especulación”, contiene una descripción detallada de los productos disponibles en aquel momento en el mercado de títulos en Francia, tales como los contratos a plazo *(forward)* y las opciones. Sus especificaciones fueron completamente diferentes de los productos correspondientes en el mercado americano; por ejemplo, todos los pagos estaban relacionados con una fecha dada y no se tenía necesidad de pensar en el descuento o cambio de numerario. Después de los preliminares financieros, Louis Bachelier comenzó con la modelación matemática de los movimientos y fórmulas de los precios de los títulos, el principio de que “La esperanza del especulador fuera nula”. Obviamente, interpretaba mediante la esperanza condicionada dada por la información pasada. Es decir, implícitamente aceptaba como axioma que el mercado valoraba los activos utilizando una medida, la “martingala”. La hipótesis posterior era que el precio evolucionaba como un proceso de Markov continuo, homogéneo en el espacio y el tiempo. Louis Bachelier demostró que la densidad de las distribuciones unidimensionales de este proceso satisfacía la relación, ahora conocida como la ecuación Chapman-Kolmogorov y observó que la densidad Gaussiana con la varianza lineal creciente resolvía esta ecuación. La cuestión de la unicidad no se discutía pero Louis Bachelier proporcionó algunos argumentos para confirmar esta conclusión. Llegó a la misma ley considerando el proceso de los precios como límite de las trayectorias aleatorias. Louis Bachelier también observó que la familia de funciones de distribución de los procesos satisfacía la ecuación del calor.

El modelo se aplicó para calcular algunos precios de las opciones. Teniendo en cuenta las opciones americanas y dependientes de la trayectoria, Louis Bachelier calculó la probabilidad de que el movimiento Browniano no excediera un nivel fijo y obtuvo la distribución del *supremum* del movimiento Browniano.

La tesis de Louis Bachelier se puede considerar como el origen de la “financiera matemática moderna” y de varias ramas importantes del cálculo estocástico tal como la teoría del movimiento Browniano, procesos de Markov (1856-1922), procesos de difusión e incluso de la convergencia en los espacios funcionales. Evidentemente, el razonamiento no fue riguroso pero a nivel intuitivo básicamente correcto. Esto es realmente asombroso, ya que a comienzos del siglo XX los fundamentos matemáticos de la probabilidad no existían. A. Markov comenzó sus estudios sobre lo que ahora llamamos cadenas de Markov en 1906 y el concepto de esperanzas condicionadas con respecto a una variable arbitraria o σ-álgebra fueron desarrollados en 1930.

El informe de Henri Poincare, firmado por P. Apell y J. Bousssines, tribunal que juzgó la tesis de Louis Bachelier, contiene un profundo análisis no solamente de los resultados matemáticos sino también una penetración en las leyes de mercado. En contraste con la leyenda de que la nota de evaluación “honorable” significaba algo como que los examinadores fueron escépticos respecto a la tesis, esta parece que fue la nota más alta que podía habérsele reconocido a una tesis que estaba esencialmente fuera de las matemáticas y que tenía algunos argumentos lejos de ser rigurosos. La nota de “excelente” usualmente se asignaba a memorias que contenían la solución al cambiante problema en una disciplina matemática bien establecida.

Creemos que el informe mostraba que H. Poincare era un lector atento y benévolo y su moderada crítica fue positiva. La crítica que expresó fue que Louis Bachelier no estudiaba con detalle la relación descubierta de los procesos estocásticos con las ecuaciones en derivadas parciales, podía interpretarse que fue realmente intrigado, viendo allí ulteriores perspectivas. El informe de Poincare y la conclusión fue publicar la tesis en las revistas prestigiosas de aquel tiempo, contradecía lo que algunos consideraron como la decepción de "honorable". Se podía conjeturar que Louis Bachelier no fue galardonado con la nota de "muy honorable" debido a una presentación más débil de su segunda tesis (pero el correspondiente informe de P. Appell fue muy positivo).

No es necesario decir que las ideas innovadoras de Louis Bachelier estuvieron por encima del nivel prevaleciente en la teoría financiera existente en aquella época, lo cual fue ciertamente percibido.

Los notables resultados obtenidos por Louis Bachelier en su tesis sobre la "Teoría de la Especulación" en 1900 permanecieron en una especie de "limbo científico" durante más de 75 años, hasta que el célebre economista, premio Nóbel Paul Samuelson influenciado por el insigne profesor de estadística William Feller, corrigió a Louis Bachelier, en 1965, reemplazando el movimiento Browniano (aritmético) por su exponencial (geométrico), evitando así obtener como resultados valores negativos del modelo, luego comenzó a jugar un papel esencial en el cálculo de los precios de las opciones mediante la famosa fórmula de Black-Scholes en 1973.

Desde 1980 se ha comprobado la explosión de los modelos matemático financieros junto con los productos financieros, todos a su vez llegados a ser más complejos.

Toda esta tecnología existe debido a que algunos conceptos matemáticos financieros simples y universales han permitido construir una "Teoría matemática financiera de las leyes de los mercados" basada en principios tales como que los precios de un activo a lo largo del tiempo tienen la estructura probabilista de un juego equitativo, es decir, una "martingala". A partir de este concepto, poco a poco, se ha ido construyendo toda la teoría de los procesos estocásticos, pilar sobre el cual se ha desarrollado la "Teoría Matemática del Arbitraje" por Delbaen y Schahermayor en 1994.

Desde comienzos de 1990, la matemática y particularmente la teoría de la probabilidad han jugado un papel creciente, en general y particularmente, en el campo económico financiero actuarial, influenciado por las investigaciones de A. Kolmogorov relativas a los procesos temporales continuos.

A partir de la tesis de Louis Bachelier surgió el nuevo nacimiento de los procesos estocásticos y, por otra parte, la estrategia de tiempo continuo para la cobertura de riesgos financieros.

Aunque Louis Bachelier estableció en su tesis la conexión entre el precio de los instrumentos financieros y algunos cálculos de probabilidad relativos a ciertos procesos estocásticos, el problema de la cobertura correspondiente al riesgo fue resuelto mediante los trabajos de Black/Scholes/Merton en 1973. En aquella época la idea de diversificación estaba vigente debido a los trabajos pioneros de Markowitz en 1952 (Nóbel de Economía en 1990) relativos a la optimización de la cartera.

La teoría del cálculo estocástico, desarrollada principalmente durante la pasada mitad del siglo XX, sitúa la cuestión para un tratamiento unificado de una amplia clase de problemas relacionados con la predicción del desarrollo futuro de un tratado de seguros, cartera o empresa sobre la base de su historia pasada. Variaciones adecuadas del teorema muestral opcional de Doob y la regla de la cadena para semimartingalas (la fórmula de Itô generalizada) junto con la descomposición de Doob-Meyer y algunos otros aspectos básicos en la teoría de las martingalas producen integrales, diferenciales o ecuaciones integro-diferenciales para distribuciones de probabilidad y momentos de valores actuales, probabilidad de ruina y otras funciones de interés práctico. El enfoque opera con modelos suficientemente elaborados como para representar realidades complejas que se adapten al riesgo de responsabilidad y al riesgo del activo. Su potencial se demuestra mediante ejemplos en el seguro de vida, seguro no-vida, teoría del riesgo actuarial y economía financiera, **la revelación es que los actuarios de todas las clases: primera, segunda y tercera (vida, no-vida y financiera), se unificaron debido a la revolución que significó el "cálculo estocástico" y quedaron eliminadas la fronteras entre las distintas clases de actuarios.**

La teoría del cálculo estocástico, desarrollada principalmente durante la pasada mitad del siglo XX, sitúa la cuestión para un tratamiento unificado de una amplia clase de problemas relacionados con la predicción del desarrollo futuro de un tratado de seguros, cartera o empresa sobre la base de su historia pasada

RELACIONES DEL CÁLCULO CLÁSICO CON EL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Respecto a las relaciones del "Cálculo Clásico" con el "Cálculo Estocástico" procede hacer la siguientes consideraciones.

Si $X{:}[0,\infty] \to R$ es una función real $X(t) = X_t$. Por ejemplo, la función X_t puede representar la velocidad de un cuerpo sólido dependiente del tiempo t. También X_t puede representar el precio de un título a lo largo del tiempo, "diagrama" del título X. Ahora bien, hay una diferencia fundamental entre las dos interpretaciones. En el primer caso, X como función de t es una función "suave" no solamente continua, sino también diferenciable. Para esta clase de funciones se aplican los instrumentos conocidos del cálculo clásico. Utilizando la notación

$$X{:} = \frac{dX_t}{dt}$$

para la derivada de X_t con respecto al tiempo t, la relación básica entre la derivación e integración se puede establecer como

$$X_t = X_0 + \int_0^t X_s ds,$$

o bien,

$$dX_t = X_t dt.$$

Si $F \in C^2(R)$ es una función real continuamente diferenciable dos veces sobre la recta real R. Entonces la fórmula de Taylor establece:

$$\Delta f(X_t) = F(X_{t+\Delta t}) - F(X_t) = F'(X_t)\Delta X_t + \frac{1}{2} F''(X_t)(\Delta X_t)^2$$

con $\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t$ y cierto $\tilde{t} \in [t, t+\Delta t]$

Tomando límites cuando $\Delta t \to 0$, obtenemos

$$dF(X_t) = F'(X_t)dX_t$$

o también,

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)dX_s$$

puesto que para una función suave

$$X_t, \Delta X_t \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} dX_t = X_t dt$$

y los términos de orden superior $(dt)^2$ son despreciables.

Ahora bien, esta relación clásica no es aplicable para algunas de las funciones reales que se presentan en la Matemática Financiera. Cuando el matemático alemán Weierstrass construyó en el siglo XIX una función real continua, pero no diferenciable en ninguna parte, esto se consideró como una curiosidad matemática. Desgraciadamente, esta "curiosidad" está en el corazón de la Matemática Financiera. Los gráficos de los tantos de cambio, de los tantos de interés y de los activos líquidos son prácticamente continuos, como los disponibles hoy en día que presentan datos de alta frecuencia, pero son de variación ilimitada en todo el intervalo de tiempo. En particular, No son diferenciables en ninguna parte. Por tanto, el Cálculo Clásico necesita una extensión a funciones de variación no acotada, tema estudiado por los matemáticos durante mucho tiempo.

Este déficit se cubrió mediante el desarrollo del "Cálculo Estocástico" que se puede considerar como la teoría de la diferenciación e integración de los procesos estocásticos.

Existen numerosos libros recientemente publicados que desarrollan ampliamente el cálculo estocástico con énfasis sobre las aplicaciones a los mercados financieros a diferentes niveles de sofisticación matemática, por ejemplo Föllmer y Schied (2010).

¿Qué extensión del cálculo clásico se necesita para las funciones reales de variación ilimitada? Simplemente, cuando al desarrollar la diferencial $dF(X_t)$, el segundo término de la fórmula de Taylor no se puede despreciar, puesto que el término $(\Delta X_t)^2$, la variación cuadrática de X_t, no desaparece para $\Delta t \to 0$. Por tanto, para las funciones de variación no acotada, la diferencial es de la forma:

(1) $$dF(X_t) = F'(X_t)dX_t + \frac{1}{2} F''(t)(dX_t)^2$$

o bien, de forma explícita

(2) $$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s)(dX_s)^2$$

donde $(dX_t)^2$ es la variación cuadrática infinitésimal de X.

Esta no fue, la nuevamente aparición del segundo término, lo que creó la principal dificultad para desarrollar el Cálculo Estocástico. Para funciones de variación cuadrática finita este término F'' es una integral bien definida Lebesgue-Stieltjes. El cambio real consistió en dar un significado preciso a la primera integral donde tanto el argumento del integrando y del integrador son de variación no-acotada sobre todo el intervalo de tiempo, arbitrariamente pequeño. Esta cuestión fue resuelta en primer lugar por Itô, de ahí el nombre de la "fórmula de Itô" para la relación **(1)** y la integral de Itô para la primera integral de la **(2)**. Kiyosi Itô (1915-2008), es conocido como el creador de la teoría matemática moderna del análisis estocástico. El análisis de Itô es indispensable como instrumento que permanecerá en el futuro ampliamente usado en campos tan diversos como la economía, la física, ingeniería y biología. Quizá el campo de aplicación más espectacular actualmente es en economía y financiera. En realidad, el Premio Nobel en Economía de 1997 fue concedido a Black, Roberto Merton y Myron Scholes por su deducción de la célebre fórmula de valoración de opciones utilizando el cálculo estocástico.

Por otra parte, utilizando el enfoque a lo largo de una trayectoria de Föllmer, se puede deducir la fórmula de Itô y la integral de Itô sin recurrir a la teoría de la probabilidad. Observando un proceso estocástico “paso a paso”, se puede dar un significado preciso a las expresiones **(1)** y **(2)** utilizando solamente instrumentos elementales del análisis real clásico. Solamente se necesita la teoría de la probabilidad posteriormente, cuando consideramos la acción recíproca de todas las trayectorias de los procesos estocásticos como difusiones y semimartingalas.

El Lema de Itô

Si X_t es un proceso de Itô que satisface

(3) $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$

y $f(t, x)$ es una función dos veces diferenciable, entonces tenemos que $f(t, X_t)$ es un proceso de Itô y que

(4) $d(f(X_t, t)) = \frac{af}{at}(X_t, t)dt + f'_x(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(X_t, t)dX_t^2$

donde dX^2 está definido por

(5) $dt^2 = 0$

(6) $dtdW = 0$

(7) $dW^2 = dt$

Observemos que la regla de la multiplicación final es la crucial que da el término complementario.

Un argumento análogo, nos proporciona una regla cuando tenemos varios procesos Itô basados en el mismo movimiento Browniano. En efecto, sean $X_t^{(j)}$ un proceso de Itô para cada j que satisface

(8) $dX_t^{(j)} = \mu_j(t, X_t)dt + \sigma_j(t, X_t)dW_t$

y sea $f(t, X_1,..., X_n)$ una función doblemente diferenciable, entonces tenemos que $f(t, X_t^{(1)}, X_t^{(2)},..., X_t^{(n)})$ es un proceso Itô y que

(9) $d(f(t, X_t^{(1)}, X_t^{(2)})) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{n} dX_t^{(j)} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j x_k}dX_t^{(j)}dX_t^{(k)}$

donde $dX_t^{(j)}dX_t^{(k)}$ están definidos por

(10) $dt^2 = 0$

(11) $dtdW_t = 0$

(12) $dW_t = dt$

Observemos que todos los procesos Itô aquí están definidos por el mismo movimiento Browniano.

Una consecuencia importante del Lema de Itô es una regla producto para los procesos de Itô; si $f(x, y) = xy$, entonces tenemos:

Si X_t e Y_t son procesos Itô, entonces

(13) $d(X_tY_t) = X_tdY_t + Y_tdX_t + dX_tdY_t$

Observemos que esto generaliza la regla de Leibniz del cálculo ordinario, introduciendo un tercer término.

Sobre este tema se podrían consultar: Itô (1951), Gikman y Skorokhod (1969), Arnold (1974), o bien Malliaris y Brock (1982).

CUESTIONES PRÁCTICAS

EJEMPLO 1

Sea una función del proceso de Wiener estándar W_t dada por

(14) $F(W_t, t) = W_t^2$

Se pide aplicar la fórmula de Itô a esta función.

Solución: Teniendo en cuenta que W_t tiene un parámetro de tendencia 0 y un parámetro de difusión 1.

Aplicamos la fórmula de Itô a la función:

(15) $dF_t = \frac{1}{2}[2dt] + 2W_tdW_t$

o bien,

(16) $dF_t = dt + 2W_tdW_t$

Entonces, en este caso, la fórmula de Itô resulta una ecuación diferencial estocástica que tiene de coeficiente de tendencia a

(17) $(l_t, t) = 1$

y coeficiente de difusión

(18) $\sigma(I_t, t) = 2W_t$

Por tanto, la tendencia es constante y la difusión depende del conjunto de información I_t

EJEMPLO 2

Aplicar la fórmula de Itô a la función

(19) $F(W_t, t) = 3 + t + e^{Wt}$

Solución: Obtenemos

(20) $dF_t = dt + e^{Wt}\, dW_t + \frac{1}{2}\ e^{Wt}\, dt$

Agrupando:

(21) $dF_t = \left[1 + \frac{1}{2}\ e^{Wt}\right] dt + e^{Wt}\, dW_t$

En este caso, obtenemos una ecuación diferencial estocástica para con tendencia -dependiente y término de difusión:

$$a(I_t, t) = \left[1 + \frac{1}{2}\ e^{Wt}\right]$$

y

$$\sigma(I_t, t) = e^{Wt}$$

EJEMPLO 3

Sea una variable aleatoria S que sigue el proceso $dS = \mu dt + \sigma dz$. Durante los tres primeros años $\mu = 2$ y $\sigma = 3$; durante los tres años siguientes $\mu = 3$ y $\sigma = 4$. Si el valor inicial de la variable es 5 ¿Cuál es la distribución de probabilidad del valor de la variable al final del año 6?

Solución: El cambio en S durante los tres primeros años tiene la distribución de probabilidad

$$\varphi(2 \text{ x } 3{,}9 \text{ x } 3) = \varphi(6{,}27)$$

El cambio durante los tres años siguientes tiene la distribución de probabilidad

$$\varphi(3 \text{ x } 3{,}16 \text{ x } 3) = \varphi(9{,}48)$$

El cambio durante los 6 años es la suma de una variable con distribución de probabilidad $\varphi(6{,}27)$ y una variable con distribución de probabilidad $\varphi(9{,}48)$. La distribución de probabilidad del cambio es, por tanto

$$\varphi(6 + 9{,}27 + 48) = \varphi(15{,}75)$$

Puesto que el valor inicial de la variable es 5, la distribución de probabilidad del valor de la variable al final del año 6º sería $\varphi(20{,}75)$:

EJEMPLO 4

Sea G una función del precio de un título S y del tiempo. Si σ_s y σ_g son las volatilidades de S y G. Demostrar que cuando el rendimiento esperado de S crece en $\lambda\sigma_s$, el tanto de crecimiento de G crece en $\lambda\sigma_g$, donde λ es una constante.

Solución: Teniendo en cuenta el Lema de Itô:

$$\sigma_g G = \frac{\partial g}{\partial S}\ \sigma_s S$$

También la tendencia de G es

$$G = \frac{\partial g}{\partial S}\ \mu S + \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 g}{\partial S^2}\ \sigma^2 S^2$$

donde μ es el rendimiento esperado del título. Cuando μ crece en $\lambda\sigma_s$, la tendencia de G crece en

$$\frac{\partial G}{\partial S}\ \lambda\sigma_s S$$

Por tanto, el tanto de crecimiento de G, crece en $\lambda\sigma_G$.

EJEMPLO 5

Los títulos A y B siguen el movimiento Browniano geométrico. Los cambios en cada intervalo de tiempo están incorrelados entre sí. ¿Siguen el movimiento Browniano geométrico el valor de una cartera que consta de un título A y un título B? Justifica la contestación.

Solución: Sean S_A, μ_A yσ_A el precio del título, el rendimiento esperado y la volatilidad del título A. Sean S_B, μ_B yσ_B, el precio del título, el rendimiento esperado y la volatilidad del título B. Definimos por ΔS_A y ΔS_B como el cambio en S_A y S_B en el momento Δt. Puesto que cada uno de los títulos sigue un movimiento Browniano geométrico

$$\Delta S_A = \mu_A S_A \Delta t + \sigma_A S_A \epsilon_A \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta S_B = \mu_B S_B \Delta t + \sigma_B S_B \epsilon_B \sqrt{\Delta t}$$

donde ϵ_A y ϵ_B son muestras aleatorias independientes de una distribución normal,

$$\Delta S_A + \Delta S_B = [(\mu_A)]\, S_A + \mu_B S_B)\Delta t + (\sigma_A S_A \epsilon_A + \sigma_B S_B \epsilon_B)\ \sqrt{\Delta t}$$

Esto no se puede escribir como

$$\Delta S_A + \Delta S_B = \mu(S_A + S_B)\Delta t + \sigma(S_A + S_B)\,\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

Para cualesquiera constantes . (Ni el término tendencia ni el término estocástico se corresponde). Por tanto, el valor de la cartera no sigue el movimiento Browniano.

CONCLUSIONES

Después de haber realizado una revisión de los métodos cuantitativos a lo largo del tiempo, se hace referencia al "Cálculo Estocástico versus Cálculo Clásico", observando que la relación clásica ya no es aplicable para las funciones reales que se presentan con frecuencia en la Matemática Financiera. Cuando en el siglo XIX el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897), a quien se le solía citar como el padre del Análisis Matemático, construyó la célebre "Función de Weierstrass", real continua pero no diferenciable *(nowhere differenttiable)*, esto se consideró entonces como una "curiosidad matemática". Ahora bien, esta curiosidad se encuentra en el centro de la Matemática Financiera. Las representaciones de los tantos de cambio, de los tantos de interés, etc., son prácticamente los datos de alta frecuencia disponibles hoy día. Pero son de "variación No acotada" en todo el intervalo de tiempo considerado. En particular, no son diferenciables, por tanto, la función de Weierstrass representa un posible gráfico financiero. Debido a tal circunstancia, el cálculo financiero ha necesitado una extensión para las funciones de variación no acotadas, tarea estudiada durante mucho tiempo por los matemáticos. Esta laguna, se ha cubierto mediante la creación y el desarrollo práctico del "Cálculo Estocástico (de Itô)", que se puede considerar como la "Teoría de la Diferenciación e Integración de los Procesos Estocásticos"

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Baxter, M y Rennie, A (1999). *Financial Calculus*. Cambridge University Press.
- Cramer, H. (1955). *Colective Risk Theory*. Skandia Insurance Company.
- Cramer, H. (1969). Historical review of Filip Lundberg's works on risk theory. *Scandinavian Actuarial Journal*, Supplement 3, 6-12.
- Duffie, D. (1996). *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton.
- Elliott, R.J. y Kopp, P.E. (2004). *Mathematics of Financial Markets*. Springer.
- Föllmer, H. (1981). Calcul d'Itô sans probabilitiés. *Séminaire de probabilités de Strasbourg*, 15, 143-150.
- Föllmer, H. y Schied, A. (2002). *Stochastic Finance*. De Gruyter.
- Gihman, I. y Skorohold, A. (1974). *The Theory of Stochastic Processes*, vol. I y II. Springer-Verlag.
- Hansen, C. (1946). *Om Thiele's Differentialligning for Premiereserver i Livsforsikring*. H. Hagerups Forlag, Copenhagen.
- Itô, K. (1944). Stochastic Integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, 20 (8), 519-524.
- Itô, K. (1951). On Stochastic Differential Equations. *Memoires American Mathematical Society*, 4, 51.
- Karatzas, I. y Shreve, S.E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer
- Lundberg, F. (1903). *Approximerad framställning af sannolikhetsfunktionen*. Almquist und Wicksell, Uppsala
- Martínez Barbeito, J. y G. Villalón, J. (2003). *Introducción al Cálculo Estocástico. Aplicado a la Modelación Económico-Financiero-Actuarial*. Netbiblo.
- Norberg, R. (1995). Stochastic Calculus in Actuarial Science. *Industrial and Applied Mathematics*, 2 (5), 1-23.
- Oskendal, B. (1992). *Stochastic Differential Equations*. Springer.
- Protter, P. (1990). *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer.
- Revuz, D. y Yor, M. (1994). *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer.
- Villalon, J. G. (1996). *Introducción a las Bases Matemáticas de la Teoría de la Probabilidad*. F. de Economía de la Universidad Complutense. Madrid.
- Villalon, J. G. y Martínez Barbeito, J. (2009). *Diccionario Técnico Económico-Financiero-Actuarial*. Inglés-Español. (Ed. Autores).
- Wilmott, P., Howison, S. y Dewynne, J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press.