CRITERIOS ASINTÓTICOS PARA EL CÁLCULO DE PRIMAS EN SISTEMAS BONUS-MALUS

José Antonio Gil Fana, Mª Pilar García Pineda,
Antonio Heras Martínez y José Luis Vilar Zanón
Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
Tfno: 91 3942568 - Fax: 91 3942570
E-mail: mpigarci@ccee.ucm.es aheras@ccee.ucm.es
jagilfan@ccee.ucm.es jlvilarz@ccee.ucm.es

Resumen: En este trabajo exponemos una nueva metodología para el diseño de sistemas de tarificación Bonus-Malus basada en técnicas de Programación Lineal Multiobjetivo. Consideramos que la nueva técnica permite alcanzar un elevado grado de flexibilidad en el diseño, gracias a la cual se pueden introducir características deseables que estaban ausentes en los sistemas Bonus Malus construidos mediante la metodología clásica. Las ventajas de la nueva metodología quedan patentes cuando se compara con los métodos existentes desde un punto de vista teórico, así como en los ejemplos realistas que presentamos en el artículo.

Palabras clave: Tarificación, sistemas Bonus-Malus, programación por metas.

1. Introducción

En el presente trabajo estudiaremos el problema del diseño de un *Sistema Bonus-Malus* que combine propiedades de eficiencia con cierta flexibilidad para ajustarse a los requerimientos tanto de las empresas aseguradoras como de las condiciones de mercado en que estas desarrollan su actividad.

Es bien sabido que las técnicas de tarificación a priori no pueden eliminar el riesgo de heterogeneidad en las distintas clases de asegurados, debido a que algunos de los factores de riesgo más importantes son inobservables. Este hecho fuerza a las compañías de seguros a adoptar sistemas de tarificación Bonus-Malus (en adelante, SBM) para conseguir ajustar, en la medida de lo posible, las primas a la experiencia de siniestralidad de los asegurados. En la Sección 2 centraremos nuestra atención sobre los SBM empleados en la práctica por las empresas que operan en el ramo del automóvil, estableciendo las principales características de su funcionamiento, su problemática y su caracterización matemática en el marco de los Procesos de Markov.

Diseñar un SBM exige, tal y como estableceremos en dicha Sección 2, elegir unas reglas de transición entre las diferentes clases, una clase inicial y una prima para cada clase. Es evidente el interés de que todas estas elecciones sean, en cierto sentido, óptimas. Por razones que se discutirán posteriormente, restringiremos nuestra atención al tercer y último problema, el cálculo de las primas.

El problema de la obtención de escalas de primas óptimas o eficientes para unas reglas de transición dadas en un SBM ha sido tratado en la literatura actuarial desde hace varias décadas. Uno de los trabajos pioneros más influyentes se debe a Pesonen (1963), quien propuso que la prima para una clase de bonus malus dada debería calcularse como la siniestralidad anual esperada para una póliza "infinitamente antigua" perteneciente a esa clase. A partir de este se han propuesto diversos criterios para el cálculo de las primas que analizaremos a lo largo de este trabajo, llevando a cabo además un estudio comparativo de sus aptitudes para reflejar con suficiente flexibilidad las necesidades reales en el diseño de los SBM.

La Sección 3 se dedica a analizar los criterios asintóticos propuestos en literatura actuarial para la determinación de las primas asociadas con las distintas clases. En la Subsección 3.1, nos referiremos a la denominada *Escala de Bayes* propuesta en el trabajo de Norberg (1976), que fundamenta rigurosamente la propuesta de Pesonen (1963) y constituye el punto de partida comúnmente aceptado para el diseño de un SBM óptimo. La Escala de Bayes tiene características deseables, principalmente el equilibrio financiero de las primas resultantes, aunque sufre también de algunos inconvenientes, que serán discutidos en el texto. Algunos de estos problemas, como la posible no monotonía de las primas, han sido abordados y resueltos en la literatura posterior (Gilde y Sundt (1989)). Otros, como la falta de flexibilidad del sistema para incorporar otras características deseables, parecen de difícil solución en el marco conceptual de la Escala de Bayes. Por esta razón, en la Subsección 3.2 expondremos y fundamentaremos rigurosamente una metodología alternativa para el diseño de SBM óptimos, recientemente aparecida en la literatura (Heras, Vilar y Gil (2002), García Pineda (2002)), que empleando la técnica de Programación Matemática conocida como *Programación por Metas* permite tener en cuenta las principales restricciones que se presentan en la práctica a la hora de diseñar un SBM. La metodología de diseño de SBM óptimos fundamentada en Programación por Metas permite superar así algunos de los inconvenientes asociados tanto con la Escala de Bayes original como con las posteriores escalas más sofisticadas basadas en ella, sin perder, como veremos, ninguna de sus ventajas.

Finalmente, en la Sección 4 compararemos los criterios analizados sobre la base de un ejemplo numérico, analizando sus posibilidades para incorporar las distintas restricciones técnicas y comerciales que aparecen en la práctica empresarial.

2. **Sistemas Bonus Malus.**

Dado un grupo de riesgo, supondremos que el nivel de riesgo de cada póliza viene representado por un parámetro de riesgo $\lambda>0$, el número esperado de siniestros por periodo. Supondremos que no es posible determinar el verdadero valor de este parámetro para cada póliza y que existe una variable aleatoria Λ (*la variable de estructura*) cuyas realizaciones son los valores del parámetro de riesgo para las pólizas pertenecientes al grupo. La función de distribución asociada a la variable de estructura será representada como $U(\lambda)$ y denominada función de estructura. Supondremos, además que Λ es independiente del tiempo. Las variables aleatorias $N_t / \Lambda=\lambda$, número de siniestros de una póliza en sucesivos periodos condicionados a algún valor λ, se supone que son mutuamente independientes e idénticamente distribuidas de acuerdo a una distribución de Poisson de media λ. Por lo tanto, la variable aleatoria no condicionada N_t seguirá una distribución de Poisson ponderada por la función de estructura. Supondremos también que las cuantías de los siniestros individuales $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ son independientes del número de siniestros y de la variable de estructura, y mutuamente independientes e idénticamente distribuidas con media $E[X_i] < \infty$. Tomaremos esta última como unidad monetaria, de tal forma que la prima pura de una póliza con parámetro de riesgo λ será igual a λ medido en unidades de $E[X_i]$.

Finalmente, nos situaremos en el caso más sencillo en el que las variables aleatorias $N_t / \Lambda=\lambda$, N_t y X son independientes de la elección del BMS, esto es, no tendremos en cuenta el hambre de bonus.

Siguiendo a Lemaire (1995, pág. 6), diremos que una compañía de seguros utiliza un *Sistema Bonus-Malus* (SBM) cuando se verifican las condiciones siguientes:

- Existen únicamente un número finito de clases $C_1,\ldots, C_n$ tales que cada póliza permanece en una sola clase durante un periodo de tiempo (habitualmente un año).
- La prima correspondiente a cada póliza depende únicamente de la clase en que se encuentra.
- La clase a la que pertenece un asegurado durante un cierto periodo depende únicamente de la clase a la que pertenecía durante el periodo anterior y del número de siniestros durante dicho periodo (*Condición Markoviana*).

A su vez, un Sistema Bonus-Malus consta de tres elementos:

- La *clase inicial*, C_{io} a la que son asignados los nuevos asegurados.
- La *escala de tarifas*, $\pi = (\pi(1),...,\pi(n))$ en la que se establecen las primas asociadas a cada clase.

-.Las reglas de transición, que determinan cuándo se pasa de una clase a otra, y vienen dadas por unas transformaciones T_k tales que $T_k(i)=j$ si se pasa de C_i a C_j cuando se tienen k siniestros. T_k se puede expresar matricialmente:

$$T_k = \left(t_{ij}^k\right)$$

donde

$$t_{ij}^k = 1 \text{ si } T_k(i) = j$$

$$t_{ij}^k = 0 \text{ si } T_k(i) \neq j$$

La *Probabilidad de Transición* de C_i a C_j para un asegurado de parámetro $\lambda=\lambda_0$ se calcula como

$$p_{ij}(\lambda_0) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda_0).t_{ij}^k$$

donde

$$p_k(\lambda_0) = \Pr[N = k / \lambda = \lambda_0]$$

Las *Matrices de Transición* condicionadas serán

$$P(\lambda) = \left(p_{ij}(\lambda)\right)$$

Las hipótesis anteriores permiten modelizar el comportamiento de cada asegurado de parámetro λ en el SBM mediante una *Cadena de Markov* (con matriz de transición $P(\lambda)$) . En consecuencia, si suponemos, como es habitual, que la cadena es *ergódica* (es decir, que siempre es posible acceder a una clase dada a partir de cualquier otra, en un número finito de pasos) y *sin ciclos*, entonces, como es bien sabido (véase Kemeny y Snell (1976)), la teoría de las Cadenas de Markov nos asegura la existencia de una *distribución estacionaria de probabilidades* $(p_\lambda(1),..., p_\lambda(n))$ que representa el comportamiento a largo plazo de dicha póliza. La cantidad $p_\lambda(k)$ se interpreta como la probabilidad de que la póliza de parámetro λ haya sido asignada a la clase *k* cuando, pasado cierto tiempo, el sistema alcanza o al menos se aproxima a su estado estacionario

.

La distribución estacionaria no es difícil de calcular. Se demuestra que la distribución estacionaria de una Cadena de Markov coincide con el autovector por la izquierda de la matriz de transición asociado con el autovalor unidad (el *autovalor de Fröbenius*) y cuyas componentes suman la unidad.

Además de las probabilidades estacionarias condicionadas al valor de λ, es posible definir las probabilidades estacionarias no condicionadas (p(1),...,p(n)), con una interpretación similar pero referida a una póliza arbitraria. Tales probabilidades se definen como

$$p(k)=\int_0^\infty p_\lambda(k)\,dU(\lambda)$$

Es intuitivamente claro que el conocimiento de la distribución estacionaria puede resultar muy útil a la hora de diseñar un SBM, ya que nos informa de cuál será aproximadamente el comportamiento de las pólizas cuando haya transcurrido cierto tiempo. Pero debemos ser más precisos con la terminología y con la elección del problema que queremos estudiar. En efecto, como ya adelantamos en la Introducción, de los comentarios anteriores se deduce que se pueden distinguir tres problemas en la construcción de un SBM:

- La elección del número de clases y de las reglas de transición.
- La elección de la clase inicial.
- El cálculo de la prima correspondiente a cada clase.

El primer problema sigue siendo un problema abierto: no es posible todavía encontrar el número de clases y las reglas de transición óptimas en general, aunque sí es posible, como veremos, concluir que ciertas reglas son mejores que otras en base a ciertas medidas de eficiencia.

La elección de una clase inicial óptima no puede basarse en la distribución estacionaria, ya que esta última no depende de dicha clase inicial (lo que sí depende de la clase inicial es, obviamente, la velocidad de convergencia a la distribución estacionaria).

Cuando hablamos de diseño "óptimo" de un SBM nos referiremos, por tanto, al tercer problema anteriormente mencionado, el problema de encontrar unas primas "óptimas". Como veremos, el conocimiento de la distribución estacionaria nos resultará de suma utilidad.

Pero todavía nos resta por aclarar en qué sentido, es decir, respecto a qué función objetivo, deben ser óptimas las primas, así como especificar las posibles restricciones a las que deben sujetarse. En este sentido, parece claro que a la hora de diseñar un SBM han de tenerse en cuenta ciertas características comerciales y técnicas:
- Ciertamente, la competencia y las características del mercado de seguros impondrán ciertas restricciones al modelo diseñado, como puede ser un límite a la diferencia entre la prima de la primera y de la última clase, o también un incremento máximo entre las primas de una clase y la siguiente.
- Por otra parte, la empresa ha de tener siempre presente que la cuantía total de sus ingresos por primas ha de ser suficiente (al menos en términos de esperanza matemática) para hacer frente a los siniestros. Esto es, el SBM ha de ser *financieramente equilibrado.*
- Finalmente, no debemos olvidar que la principal finalidad de la implantación de un SBM es conseguir que cada asegurado pague en función del riesgo que comporta, es decir, conseguir tarifas equitativas o justas.

Puesto que, según este último comentario, la consecución de tarifas equitativas constituye la razón de ser de cualquier SBM, parece intuitivamente claro que la optimalidad de las primas deberá definirse respecto a este criterio. En otras palabras, el objetivo del diseño debe ser maximizar la *equidad* del sistema resultante, medida de alguna forma, y bajo ciertas restricciones que han sido puestas de manifiesto en los párrafos anteriores. A continuación analizaremos las posibilidades de los criterios asintóticos para el cálculo de primas establecidos en la literatura actuarial para incorporar en el SBM resultante a todas estas características deseables.

3. Cálculo de las primas mediante criterios asintóticos.

Las dos metodologías cuyas características más relevantes comentaremos a continuación responden a dos concepciones diferentes de lo que debe entenderse por equidad de un SBM. Por simplicidad de la exposición, supondremos que el sistema ha alcanzado o se ha aproximado suficientemente a su estado estacionario. Ambas metodologías pueden, sin embargo, extenderse al caso no asintótico, aunque en este artículo no abordaremos tales extensiones (véase Borgan, Hoem y Norberg (1981), en el caso de la escala de Bayes).

3.1 Escala de Bayes.

La primera solución que consideraremos para el problema del cálculo de las primas fue propuesta por Norberg (1976), quien retomó la idea de Pesonen (1963) de elegir como prima asociada a una clase de bonus malus la esperanza matemática de la siniestralidad anual de una póliza "infinitamente antigua" perteneciente a esa clase, es decir, de una póliza perteneciente a esa clase después de que el sistema haya alcanzado ya su estado estacionario:

$$\pi(j) = E\left[\lambda \,/\, \text{la póliza está en la clase } C_j \text{ después de infinitos periodos}\right]$$

Norberg demostró que la escala anterior (conocida como *escala de Bayes*) minimiza el *error cuadrático de tarificación esperado* (*expected squared rating error*) definido como la esperanza del cuadrado de la diferencia entre el verdadero valor de la siniestralidad media y la prima realmente pagada, para una póliza aleatoria que ha alcanzado ya el estado estacionario. Dicho error cuadrático sirve asimismo para comparar diferentes escalas de Bayes asociadas con reglas de transición distintas.

En definitiva, para unas reglas de transición dadas, se trata de obtener los valores de π(1),...,π(n) que maximizan la equidad del sistema haciendo mínima la siguiente función:

$$Q_1\left(\pi(1),...,\pi(n)\right)=\int_0^\infty \sum_{j=1}^{n}\left(\lambda-\pi(j)\right)^2 p_\lambda(j)\,dU(\lambda)$$

Ya que Q_1 es convexa, la solución buscada será la del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial Q_1}{\partial \pi(1)}=\int_0^\infty -2\left(\lambda-\pi(1)\right)p_\lambda(1)\,dU(\lambda)=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial \pi(n)}=\int_0^\infty -2\left(\lambda-\pi(n)\right)p_\lambda(n)\,dU(\lambda)=0 \end{array}\right\}$$

esto es,

$$\left.\begin{array}{c} \pi(1)=\dfrac{1}{p(1)}\int_0^\infty \lambda p_\lambda(1)\,dU(\lambda) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \pi(n)=\dfrac{1}{p(n)}\int_0^\infty \lambda p_\lambda(n)\,dU(\lambda) \end{array}\right\}$$

Las primas así obtenidas, además de minimizar Q_1, mantienen el equilibrio financiero del sistema, como se comprueba fácilmente:

$$\sum_{j=1}^{n}\pi(j)p(j)=\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty \lambda p_\lambda(j)\,dU(\lambda)=\int_0^\infty \lambda\sum_{j=1}^{n}p_\lambda(j)\,dU(\lambda)=\int_0^\infty \lambda\,dU(\lambda)=E[\lambda]$$

La escala de Bayes constituye actualmente el modelo básico para la construcción de un SBM óptimo: se trata de una escala de primas fundamentada teóricamente, fácilmente calculable y con la importante propiedad de equilibrio financiero. Sin embargo, puede dar lugar a sorpresas desagradables: por ejemplo, a veces las primas resultantes no forman una secuencia monótona, lo que impide totalmente su implementación práctica; o, aún siendo monótonas, las bonificaciones o penalizaciones entre clases consecutivas pueden variar bruscamente o tomar valores excesivamente grandes o pequeños, lo que dificulta asimismo su uso en un problema real.

Gilde y Sund (1989) dieron una solución a los problemas mencionados sin salirse del marco conceptual de la escala de Bayes, forzando a que los valores de las primas varíen linealmente con el número de la clase de bonus. La escala de primas resultante se suele denominar *Escala de Credibilidad.*

Matemáticamente, se trata de minimizar la función objetivo Q_1 con las nuevas restricciones

$$\pi(j)=a+bj \quad j=1,\ldots,n$$

Esto es equivalente a minimizar sin restricciones la nueva función objetivo

$$Q_2(a,b)=\int_0^\infty \sum_{j=1}^{n}\left(\lambda-(a+bj)\right)^2 p_\lambda(j)\,dU(\lambda)$$

De nuevo las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial Q_2}{\partial a}=\displaystyle\int_0^\infty -2\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda-(a+bj)\right)p_\lambda(j)\,dU(\lambda)=0\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial Q_2}{\partial b}=\displaystyle\int_0^\infty -2\sum_{j=1}^{n}j\left(\lambda-(a+bj)\right)p_\lambda(j)\,dU(\lambda)=0\end{array}\right\}$$

nos proporcionan los valores de a y b que minimizan Q_2 , a los que denominaremos a^* y b^*:

$$a^*=\int_0^\infty \lambda\,dU(\lambda)-b^*\sum_{j=1}^{n}jp(j)$$

$$b^* = \frac{\int_0^\infty \sum_{j=1}^{n} j\lambda p_\lambda(j)\, dU(\lambda) - \int_0^\infty \lambda\, dU(\lambda) \sum_{j=1}^{n} jp(j)}{\sum_{j=1}^{n} j^2 p(j) - (\sum_{j=1}^{n} jp(j))^2}$$

siendo las primas a aplicar

$$\pi(j) = a^* + b^* j \quad j = 1,\dots,n$$

para las cuales se verifica el equilibrio financiero del sistema:

$$\sum_{s=1}^{n} \pi(s) p(s) = \sum_{s=1}^{n} (a^* + b^* s) p(s) = a^* + b^* \sum_{s=1}^{n} sp(s) =$$
$$= \int_0^\infty \lambda dU(\lambda) - b^* \sum_{j=1}^{n} jp(j) + b^* \sum_{s=1}^{n} sp(s) = \int_0^\infty \lambda dU(\lambda)$$

El modelo de Gilde y Sundt mantiene el equilibrio financiero del sistema mediante unas primas cuya cuantía se incrementa linealmente, eliminando así la posibilidad de cambios bruscos en su ritmo de crecimiento. El modelo no controla, sin embargo, la cuantía total de dicho incremento, que puede resultar excesiva para las características de un mercado concreto. Una posible forma de arreglar este problema sería imponer como restricción a priori una cierta distancia entre las cuantías de las clases extremas:

$$\pi(n) = m\pi(1)$$

esto es,

$$a + bn = m(a + b)$$

de donde

$$a = \frac{n-m}{m-1} b = Mb$$

con $M = \dfrac{n-m}{m-1}$; el programa a resolver sería ahora

$$\left.\begin{array}{c} Min\, Q_3(a,b) = \int_0^\infty \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda - (a+bj)\right)^2 p_\lambda(j)\, dU(\lambda) \\ s.a. \quad a = Mb \end{array}\right\}$$

pero se comprueba fácilmente que la escala de primas obtenida no posee en general la propiedad de equilibrio financiero. Si deseamos tal propiedad, hemos de añadir una nueva restricción al programa anterior:

$$\sum_{j=1}^{n} \pi(j)\, p(j) = \sum_{j=1}^{n} (a+bj) p(j) = a + b\sum_{j=1}^{n} j p(j) = \int_0^\infty \lambda\, dU(\lambda)$$

Dadas las características del programa matemático resultante, la solución del sistema de ecuaciones formado por las dos restricciones del programa

$$\left.\begin{array}{c} a + b\sum_{j=1}^{n} j p(j) = \int_0^\infty \lambda\, dU(\lambda) \\ a = Mb \end{array}\right\}$$

esto es,

$$b^* = \frac{\int_0^\infty \lambda\, dU(\lambda)}{M + \sum_{j=1}^{n} j p(j)}$$

$$a^* = M \frac{\int_0^\infty \lambda\, dU(\lambda)}{M + \sum_{j=1}^{n} j p(j)}$$

nos proporciona la escala de primas que posee equilibrio financiero y la deseada relación entre la primera y la última. Desgraciadamente, en la obtención de estos valores no ha intervenido la función objetivo, lo que significa que hemos perdido de vista la finalidad primordial de todo SBM, a saber, conseguir tarifas lo más equitativas posibles.

Parece, pues, difícil conseguir introducir restricciones adicionales (comerciales o de cualquier otro tipo) en el modelo de Gilde y Sundt, sin desvirtuar la esencia de la idea de Norberg acerca de la maximización de la equidad del sistema resultante. Facilidad de cálculo, equilibrio financiero e incrementos lineales de las primas son, entonces, las propiedades de los modelos "tipo Norberg" que justifican su gran popularidad. En el siguiente apartado estudiaremos un nuevo tipo de modelos que, en nuestra opinión, tienen aún mejores propiedades.

3.2 Modelo de programación por metas para el cálculo de la prima

Los trabajos de Heras, Vilar y Gil (2002) y García Pineda (2002), proponen una nueva medida para la evaluación de la equidad de un SBM que sirve de fundamento a un nuevo criterio asintótico para la determinación de las primas. En este apartado intentaremos justificar este criterio.

El modelo "estándar" de construcción de un Bonus-Malus óptimo expuesto en la sección anterior, que permite como sabemos calcular escalas de primas con unas propiedades razonablemente buenas, está sujeto a algunas críticas. En efecto, el problema de decisión bayesiano que fundamenta la escala de primas no es el único posible que se puede plantear, y ni siquiera es el más razonable. El motivo es que, cuando una póliza arbitraria alcanza el estado estacionario, no permanece necesariamente en una clase fija, sino que en el futuro puede cambiar de clase (como recientemente ha puesto de manifiesto, aunque en otro contexto, Verico (2002)).

Nuestro modelo toma como hipótesis de partida el hecho de que lo que permanece constante en el estado estacionario es la probabilidad $p_\lambda(j)$ de que una póliza alcance la clase j, para $j=1,...,n$, y no la clase alcanzada. Es decir, en el estado estacionario las primas siguen cambiando de clase, de acuerdo con las probabilidades anteriores. Desde este punto de vista, una medida alternativa de equidad para un SBM debería tomar como error de tarificación las diferencias entre los verdaderos valores de la siniestralidad media o posibles realizaciones λ de la variable aleatoria Λ, y el promedio de las primas realmente pagadas o primas estacionarias medias, $\sum_{j=1}^{n} \pi(j) p_{\lambda}(j)$.

Nuestra propuesta consiste, además, en el empleo de la norma L^1 en lugar de la norma cuadrática L^2 para evaluar la distancia implicada en dicho error de tarificación. Puede parecer que al hacerlo así perderemos la importante propiedad de equilibrio financiero pero, como veremos, esto no es necesariamente cierto, y las ventajas de semejante enfoque quedarán claras en breve.

Nuestro objetivo es, por tanto, minimizar una función que pondere, respecto de la función de estructura, el valor absoluto de la diferencia entre el verdadero valor de la siniestralidad de cada asegurado y la prima media que realmente paga:

$$Q_4(\pi(1),\ldots,\pi(n)) = \int_0^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{n} \pi(j) p_{\lambda}(j) - \lambda \right| dU(\lambda)$$

Este es un programa de difícil resolución. Sin embargo, si, como es habitual en la literatura, suponemos una distribución discreta del parámetro Λ (que toma los valores $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ con probabilidades $q_1,\ldots,q_m$, respectivamente) entonces minimizar Q_4 es equivalente a resolver el programa

$$Min \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} \pi(j) p_{\lambda}(j) - \lambda_i \right| q_i$$

y también el siguiente programa lineal, al que llamaremos Programa (*P*):

$$Min\sum_{i=1}^{m}\left(y_i^+ + y_i^-\right)q_i$$

s. a.

$$\left.\begin{array}{c}\pi(1)p_{\lambda_1}(1)+...+\pi(\mathrm{n})p_{\lambda_1}(n)+y_1^+ + y_1^- = \lambda_1 \\ ..... \\ \pi(1)p_{\lambda_m}(1)+...+\pi(\mathrm{n})p_{\lambda_m}(n)+y_1^+ + y_1^- = \lambda_m \\ y_i^+, y_i^- \geq 0, \quad i=1,...,m\end{array}\right\}$$

en el que los valores óptimos de las nuevas variables y_i^+, y_i^- (que representaremos como y_i^{*+}, y_i^{*-}) nos indican los errores de tarificación por exceso y por defecto, respectivamente, para una póliza de parámetro λ_i. Este hecho, así como la equivalencia entre los dos programas anteriores, es consecuencia de que la solución óptima del programa lineal verifica $y_i^{*+}.y_i^{*-}=0, \forall i$, (véase, por ejemplo, Sawaragi, Nakayama y Tanino (1985, pág. 253)), esto es, solo uno de ellos puede ser no nulo y, por tanto,

$$\forall i, \left|\sum_{j=1}^{n}\pi(j)p_{\lambda_i}(j)-\lambda_i\right| = y_i^{*+} + y_i^{*-}$$

Es importante hacer notar que el programa (*P*) puede ser interpretado como una clara aplicación de la técnica de Programación Multiobjetivo conocida con el nombre de *Programación por Metas* (*Goal Programming*, en terminología anglosajona). En efecto, por medio de la Programación por Metas el decisor trata de encontrar los valores de las variables de decisión que hacen que determinadas funciones objetivo tomen valores tan cercanos como sea posible a un conjunto de objetivos previamente definidos. En nuestro problema tales objetivos son $\lambda_1,...,\lambda_m$, esto es, los parámetros que caracterizan a los asegurados y que son posibles realizaciones de la variable aleatoria Λ, y tratamos de encontrar los valores de las variables de decisión $\pi(1),...,\pi(n)$ que mejor aproximen, para cada póliza con parámetro λ_i, el valor medio de la prima pagada por el asegurado,

$\sum_{j=1}^{n}\pi(j)p_{\lambda_i}(j)$, y su verdadera frecuencia media de siniestralidad λ_i.

La metodología de la Programación por Metas ha llegado a ser una de las herramientas más importantes para la resolución de problemas de optimización multicriterio, probablemente por tratarse de una técnica fácilmente manejable y con gran capacidad de adaptación a los complejos problemas de la realidad (véase Romero (1993)). Esta flexibilidad de la técnica es la que nos va a permitir incorporar a nuestro SBM algunas de las características técnicas y comerciales mencionadas anteriormente. De hecho, teniendo en cuenta que el Programa (*P*) es un programa lineal, podremos incorporar en él sin un aumento excesivo de su complejidad cuantas características deseables sean modelizables matemáticamente por medio de restricciones lineales. Veamos algunos ejemplos:

- Restricciones de monotonía:

$$\pi(i)\leq\pi(i+1) \quad i=1,...,n-1$$

- Restricción de equilibrio financiero:

$$\pi(1)p(1)+\pi(2)p(2)+...+\pi(n)p(n)=\int_0^{\infty}\lambda dU(\lambda)$$

- Diferencias entre los valores de las primas de la primera clase y de la última:

$$\pi(1)\leq,=,\geq m\,\pi(n)$$

- Diferencias entre los valores de dos primas sucesivas:

$$\pi(i)-\pi(i+1)\leq d$$
$$\pi(i)\leq r\pi(i+1)$$

Como podemos comprobar, son restricciones lineales las que representan el equilibrio financiero, la monotonía y las distancias iguales entre primas consecutivas, propiedades todas ellas que ya habían sido incorporadas en los SBM construidos mediante la metodología basada en errores de tarificación cuadráticos. Sin embargo, otras restricciones también lineales, como las referentes a los límites inferiores y/o superiores para la separación entre primas consecutivas o entre las primas extremas, no podían incorporarse al SBM mediante dicha metodología, como hemos comprobado en este último caso al final del apartado anterior. Puesto que sí puede hacerse tal cosa mediante nuestra propuesta, añadiendo simplemente nuevas restricciones lineales al Programa (*P*), esto representa una clara ventaja de nuestra metodología. Y no se trata de los únicos ejemplos. Propiedades relativas al valor de la prima de la clase inicial o de cualquier otra, como la fijación exacta de sus valores o la imposición de ciertos límites a su variación, pueden representarse asimismo mediante restricciones lineales. Incluso la *Elasticidad* de un BMS o el valor de su *nivel estacionario medio relativo* (*Relative Stationary Average Level*), dos medidas muy conocidas utilizadas para la evaluación de los BMS ya existentes (véanse Loimaranta (1972), De Pril (1978), Lemaire (1985, 1995 y 1998)), pueden controlarse a priori mediante restricciones lineales. En el apartado siguiente ilustraremos estas cuestiones comparando las propiedades de las escalas de primas obtenidas mediante los diversos métodos aquí estudiados en un ejemplo numérico realista.

4. Ejemplo numérico

La función de estructura discreta

λ_i	0.033	0.066	0.099	0.132	0.165	0.198	0.231	0.264	0.297	0.330
$p(\lambda_i)$	0.28770	0.21179	0.23174	0.06609	0.08872	0.02623	0.03636	0.01126	0.01592	0.00510

λ_i	0.363	0.396	0.429	0.462	0.495	0.528	0.561	0.594	0.627	0.660
$p(\lambda_i)$	0.00732	0.00240	0.00348	0.00116	0.00171	0.00058	0.00085	0.00029	0.00043	0.00078

procede de la aplicación del método de discretización de Vilar (2000) a la función de estructura continua correspondiente a una *distribución inversa gaussiana* de parámetro λ

$$u(\lambda)=\frac{g}{\sqrt{2\pi h\lambda^{3/2}}}e^{-\frac{1}{2h\lambda}(\lambda-g)^2}\quad g,h>0$$

con $g=0.101081$ y $h=0.062981$, tomada de Lemaire (1995, págs 35 a 37).

Hemos elegido asimismo las siguientes reglas de transición:

	Clase después de siniestros				
Clase	0	1	2	3	≥4
10	**9**	**10**	**10**	**10**	**10**
9	**8**	**10**	**10**	**10**	**10**
8	**7**	**10**	**10**	**10**	**10**
7	**6**	**9**	**10**	**10**	**10**
6	**5**	**8**	**10**	**10**	**10**
5	**4**	**7**	**9**	**10**	**10**
4	**3**	**6**	**8**	**9**	**10**
3	**2**	**5**	**7**	**9**	**10**
2	**1**	**4**	**6**	**7**	**9**
1	**1**	**3**	**5**	**6**	**8**

En el contexto de los criterios estudiados en la sección anterior, calcularemos dos medidas de eficiencia, a las que denominaremos Q_c y Q_m, que se corresponden con las funciones objetivo de los dos métodos básicos expuestos en los apartados anteriores (Q_c se corresponde con Q_1, Q_2 o Q_3, según las restricciones incorporadas, y Q_m se identifica con Q_4).

$$Q_c\left(\pi(1),\ldots,\pi(n)\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_i-\pi(j)\right)^2 p_{\lambda_i}(j)q_i$$

$$Q_m\left(\pi(1),\ldots,\pi(n)\right)=\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}\pi(j)p_{\lambda_i}(j)-\lambda_i\right|q_i$$

Recordemos que ambas miden de forma distinta la equidad del SBM. Dado que la estructura y las reglas de transición están dadas, la sustitución de las primas asignadas a cada clase en la correspondiente función nos proporciona su medida de eficiencia.

En las tablas posteriores se recogen los resultados obtenidos aplicando los criterios asintóticos para el cálculo de las primas al SBM que acabamos de diseñar.

Para cada caso, junto con la escala de primas se calculan las proporciones entre las primas de clases consecutivas y entre la prima de la última clase y de la primera (aunque en algún caso estas relaciones están prefijadas). Asimismo se calculan los valores de Q_c y Q_m para cada escala de primas.

En la tabla 1 se recogen los resultados correspondientes a la escala de Bayes y a la escala de Credibilidad. En los dos primeros casos se calculan la escala de Bayes (EB) y de Credibilidad sin restricciones adicionales (EC). En el tercer caso se calcula la escala de Credibilidad imponiendo que EC_{10}=3 EC_1 y forzando el equilibrio financiero (EC^0)

i	EB	$\frac{EB_{i+1}}{EB_i}$	EC	$\frac{EC_{i+1}}{EC_i}$	EC^0	$\frac{EC_{i+1}{}^0}{EC_i}$
1	0.0824	1.481	0.0820	1.368	0.0886	1.222
2	0.1222	1.046	0.1121	1.269	0.1083	1.181
3	0.1278	1.356	0.1423	1.212	0.1279	1.153
4	0.1734	1.088	0.1725	1.174	0.1476	1.133
5	0.1887	1.240	0.2027	1.148	0.1673	1.117
6	0.2324	1.118	0.2329	1.129	0.1870	1.105
7	0.2620	1.159	0.2631	1.114	0.2067	1.095
8	0.3039	1.115	0.2933	1.102	0.2264	1.086
9	0.3391	1.117	0.3235	1.093	0.2461	1.080
10	0.3789	$\frac{EB_{10}}{EB_1} = 4.6$	0.3537	$\frac{EC_{10}}{EC_1} = 4.3$	0.2658	$\frac{EC_{10}{}^0}{EC_1} = 3$
Q_c	Q_1=0.00415		Q_2=0.00418		Q_3=0.00444	
Q_m	Q_4=0.04036		Q_4=0.04020		Q_4=0.04498	

Tabla 1

Parece razonable elegir, como clase de entrada al SBM, aquella cuya prima asociada sea lo más cercana posible a la siniestralidad media de toda la cartera. Puesto que en nuestro caso dicho valor es igual a 0.10100, la clase de entrada sería la primera o la segunda. Suponiendo este último caso, tendríamos una clase de "Bonus" y ocho de "Malus", respecto de la clase inicial.

La columna (EB) se corresponde, como sabemos, con la escala de Bayes. Aunque los valores de las primas parecen razonables, una inspección atenta revela algunas deficiencias como, por ejemplo, cambios bruscos en las penalizaciones (la penalización entre las clases 1 y 2 es mucho mayor que entre las clases 2 y 3). Asimismo, la penalización máxima entre las clases 1 y 10, que es igual a 4.6, pudiera resultar excesiva para las características de algún mercado concreto.

La columna (EC), correspondiente a la escala de Credibilidad, establece incrementos iguales entre primas consecutivas, como se comprueba fácilmente. Sin embargo, la cuantía de estos incrementos no está sujeta a ningún tipo de restricciones, lo que podría dar lugar a penalizaciones excesivas entre clases consecutivas o entre las clases extremas. Aunque afortunadamente esto no ha sucedido en nuestro ejemplo (en el que incluso la penalización máxima se ha reducido a 4.3), no tenemos ninguna seguridad de que las primas obtenidas en otros ejemplos sigan teniendo estas buenas propiedades. Por otro lado, no se ha producido una pérdida excesiva de eficiencia, medida mediante la función Q_c, en el paso de la escala de Bayes a la de Credibilidad (de 0.00415 a 0.00418).
Finalmente, la columna (EC^0) impone una penalización máxima igual a 3, mucho menor que en los casos anteriores. Como sabemos, el precio a pagar consiste en la falta de control sobre la eficiencia del sistema resultante. En nuestro ejemplo, tampoco se ha producido una excesiva pérdida de eficiencia respecto de la escala de Credibilidad (de 0.00418 a 0.00444), aunque no tenemos ninguna seguridad de que esto siga siendo cierto en otras situaciones.

En la siguiente tabla, tabla 2, se calcula la escala de primas obtenida mediante Programación por Metas (a la que denominaremos *Escala de*

Metas (EM)). En una primera aproximación, las únicas restricciones que impondremos son las de monotonía y de equilibrio financiero:

i	EM	$\frac{EM_{i+1}}{EM_i}$
1	0.0083	49.7
2	0.4135	1
3	0.4135	1
4	0.4135	1
5	0.4135	1
6	0.4135	1
7	0.4135	1
8	0.4135	1
9	0.4135	1.3
10	0.5408	$\frac{EM_{i+1}}{EM_i} = 65$
Q_c	0.0236	
Q_m	0.00294	

Tabla 2

Es evidente que la escala de Metas obtenida no resulta en absoluto realista y que sería totalmente inaplicable en la práctica: ocho clases se han fundido en una sola, y las penalizaciones toman valores disparatados. Para remediar esta situación debemos incluir restricciones adicionales, como por ejemplo las que comentamos a continuación:

- En la escala (EM^*), imponemos que la prima de cada clase debe ser al menos un 5% mayor y como máximo un 30\% mayor que la de la clase anterior ($1.05\ EM_i \leq EM_{i+1} \leq 1.3\ EM_i$, $i=1,...,9$). Además, la prima de la última clase será como máximo 4.6 veces la de la primera ($EM_{10} \leq 4.6\ EM_1$). De esta manera, evitaremos las penalizaciones excesivas entre las clases 1 y 2 que hemos encontrado tanto en la escala de Bayes (EB) como en la de Credibilidad (EC).

- En la escala (EM^{**}), la prima de cada clase debe ser al menos un 5% mayor y como máximo un 60\% mayor que la de la clase anterior ($1.05\ EM_i \leq EM_{i+1} \leq 1.6\ EM_i$, $i=1,...,9$). Asimismo, la prima de la última clase será como máximo 10 veces la de la primera ($EM_{10} \leq 10\ EM_1$. Permitimos de esta manera unas penalizaciones mayores que en el caso anterior, tanto entre primas consecutivas como entre primas extremas.

- En la escala (EM^{***}), la prima de cada clase debe ser al menos un 5% mayor y como máximo un 30\% mayor que la de la clase anterior ($1.05\ EM_i \leq EM_{i+1} \leq 1.3\ EM_i$, $i=1,...,9$). Además, la prima de la última clase debe ser como máximo 3 veces la de la primera ($EM_{10} \leq 3EM_1$). Las penalizaciones entre clases extremas están más restringidas que en el caso de la escala (EM^*).

Los valores de las escalas (EM^*), (EM^{**}) y (EM^{***}) aparecen en la tabla 3:

i	EM^*	$\frac{EM_{i+1}}{EM_i}^{*}$	EM^{**}	$\frac{EM_{i+1}}{EM_i}^{**}$	EM^{***}	$\frac{EM_{i+1}}{EM_i}^{***}$
1	0.0802	1.3	0.0611	1.6	0.0846	1.3
2	0.1043	1.3	0.0978	1.6	0.1100	1.3
3	0.1356	1.3	0.1566	1.6	0.1430	1.3
4	0.1764	1.3	0.2505	1.6	0.1859	1.07
5	0.2293	1.3	0.4009	1.25	0.1989	1.05
6	0.2981	1.07	0.5033	1.05	0.2088	1.05
7	0.3190	1.05	0.5285	1.05	0.2192	1.05
8	0.3350	1.05	0.5549	1.05	0.2302	1.05
9	0.3517	1.05	0.5826	1.05	0.2417	1.05
10	0.3696	$\frac{EM_{10}}{EM_1} = 4.6$	0.6118	$\frac{EM_{10}}{EM_1} = 10$	0.2538	$\frac{EM_{10}}{EC_1} = 3$
Q_c	0.00429		0.00817		0.00440	
Q_m	0.03822		0.02327		0.04251	

Tabla 3

Es inmediato comprobar que las penalizaciones entre clases consecutivas de la escala (EM^*) varían menos bruscamente que las de la escala de Bayes (EB) y de Credibilidad (EC); asimismo, el valor de Q_m mejora, pasando de 0.04036 y 0.04020, respectivamente, a 0.03822 (aunque, como es lógico, el valor de Q_c empeora, pasando de 0.00415 / 0.00418 a 0.00429). El valor de Q_m mejora aún más si permitimos mayores oscilaciones en las penalizaciones, tal y como sucede en la escala (EM^{**}): en efecto, parece bastante razonable que el poder discriminatorio de un SBM (su equidad, en suma), aumente conforme permitimos una mayor variabilidad en los valores de las primas (aunque, curiosamente, esto no sucede con la función Q_c, como podemos comprobar en el presente ejemplo). Sin embargo, permitir incrementos incontrolados de dicha variabilidad puede tener efectos no deseados, como la huída de los asegurados a otras compañías y un aumento del fenómeno conocido como "hambre de bonus".

Por otro lado, es claro que la escala (EM^{***}) tiene mejores propiedades que (EC^0): no solo mejora, como era de esperar, el valor de Q_m sino que también mejora Q_c.

Ya hemos comentado anteriormente que utilizando el método de programación por metas es posible fijar de antemano el valor exacto de alguna de las primas, como por ejemplo la correspondiente a la clase de entrada al sistema. En la tabla siguiente hemos obligado a que la tercera prima coincida con la esperanza de la estructura discretizada (0.10100), con las restricciones adicionales de monotonía, equilibrio financiero y que la prima de cada clase tome un valor entre un 5% y un 30% mayor que la de la clase anterior ($1.05\ EM_i \leq EM_{i+1} \leq 1.3\ EM_i$, $i=1,\ldots,9$). De esta forma conseguimos aumentar de una a dos las clases de "Bonus" del SBM, y que la prima de la clase de entrada coincida exactamente con la prima pura a priori, lo que puede resultar interesante desde el punto de vista comercial. Supondremos, asimismo, que

- En la escala ($EM^{\times}$), la prima de la última clase es como máximo 4.6 veces la de la primera ($EM_{10} \leq 4.6\ EM_1$).

- En la escala (EM^+), la prima de la última clase es como máximo 3 veces la de la primera ($EM_{10} \leq 3\ EM_1$), restringiendo de esta manera la máxima penalización entre las clases extremas.

i	$EM^{\times}$	$\frac{EM_{i+1}}{EM_i}^{\times}$	EM^+	$\frac{EM_{i+1}}{EM_i}^{+}$
1	0.08797	1.09	0.09155	1.05
2	0.09619	1.05	0.09619	1.05
3	0.10100	1.3	0.10100	1.3
4	0.13130	1.3	0.13130	1.3
5	0.17070	1.3	0.17070	1.3
6	0.22191	1.3	0.22191	1.07
7	0.28848	1.27	0.23726	1.05
8	0.36705	1.05	0.24912	1.05
9	0.38540	1.05	0.26158	1.05
10	0.40467	$\frac{EM_{10}}{EM_1} = 4.6$	0.27466	$\frac{EM_{10}}{EM_1} = 3$
Q_c	0.00487		0.00449	
Q_m	0.04031		0.04585	

Tabla 4

La escala ($EM^{\times}$) tiene una equidad, medida por la función Q_m, algo mejor que la de la escala de Bayes (EB), y tiene también mejores propiedades respecto a la variabilidad de las penalizaciones entre primas consecutivas y respecto a la clase y prima de entrada en el SBM. No resulta descabellado concluir que la escala ($EM^{\times}$) debería preferirse frente a la escala clásica (EB), al menos si, como se ha defendido aquí, la equidad se mide mediante la función Q_m. No es posible, sin embargo, decir lo mismo respecto de las escalas (EM^+) y (EC^0), ya que, al imponer la propiedad referente a la clase y prima de entrada, se produce una pérdida de equidad respecto de la escala (EC^0), medida mediante Q_m.

Como ilustración final de la capacidad de incorporar restricciones de diverso tipo por parte de la escala de Metas, veremos cómo se definen las correspondientes al denominado *RSAL* (*Relative Stationary Average Level*). Se trata de una medida de la concentración de las pólizas en las clases de mayor descuento, que a su vez nos indica la situación de una asegurado medio una vez que se ha alcanzado el estado estacionario (véase Lemaire (1995), págs. 59 y ss), y que se define como

$$RSAL = \frac{\sum_{i=1}^{n} \pi(i)p(i) - \pi(1)}{\pi(n) - \pi(1)}$$

Evidentemente, resulta conveniente que el SBM no posea un valor excesivamente pequeño de esta medida.

La técnica de programación por metas permite introducir como restricción un valor mínimo de *RSAL*. Es fácil comprobar que, para imponer que el SBM resultante tenga al menos un valor $RSAL_0$ de la citada medida, basta introducir en el programa (*P*) la siguiente restricción lineal:

$$\pi(1)\left(p(1) - 1 + RSAL_0\right) + \pi(2)p(2) + \ldots + \pi(n-1)p(n-1) + \pi(n)\left(p(n) - RSAL_0\right) \geq 0$$

Así, los dos primeros ejemplos de la tabla 3 poseen valores $RSAL^*$=0.07166 y $RSAL^{**}$=0.07232; si imponemos un valor mínimo para dicha medida de 0.1, obtenemos los resultados de la tabla siguiente:

i	$EM^{*'}$	$\frac{EM_{i+1}}{EM_i}^{*'}$	$EM^{**'}$	$\frac{EM_{i+1}}{EM_i}^{**'}$
1	0.08535	1.3	0.06953	1.6
2	0.11096	1.3	0.11125	1.6
3	0.14425	1.25	0.17800	1.6
4	0.18048	1.05	0.28480	1.057
5	0.18950	1.05	0.30107	1.05
6	0.19898	1.05	0.31613	1.05
7	0.20893	1.05	0.33194	1.05
8	0.21937	1.05	0.34853	1.05
9	0.23034	1.05	0.36596	1.05
10	0.24186	$\frac{EM_{10}}{EM_1}=2.8$[illegible]	0.38426	$\frac{EM_{10}}{EM_1}=5.5$[illegible]
Q_c	0.00446	*RSAL*=0.1	0.00516	*RSAL*=0.1
Q_m	0.04319		0.03168	

Tabla 5

Notemos que, si se desea un incremento del RSAL manteniendo los límites de variación entre primas sucesivas, se producirá una disminución en el rango entre la primera y la última prima, así como un mayor crecimiento de las primeras primas.

5. Conclusiones.

En las páginas anteriores se han estudiado los diversos métodos de cálculo de las primas asociadas a las clases de un sistema bonus-malus (SBM) que, fundamentados en criterios asintóticos, aparecen en la literatura actuarial. Se han analizado principalmente sus posibilidades para reflejar las diferentes restricciones técnicas y comerciales que se presentan en la realidad a la hora del diseño de un SBM.

A lo largo del presente estudio hemos constatado que uno de dichos métodos, recientemente publicado y basado en técnicas de

Programación Lineal Multiobjetivo, se ha revelado suficientemente flexible como para permitir la introducción de un gran número de propiedades que pudieran resultar convenientes en los SBM reales, referentes al equilibrio financiero del sistema, monotonía y variabilidad de las primas, clases de entrada y posibles valores prefijados mínimos o máximos de ciertas medidas de concentración de las primas, entre otras.

Gran parte de las citadas propiedades no eran tenidas en cuenta por los métodos clásicos (escala de Bayes y sus derivaciones) en los que es muy difícil, o imposible, introducir restricciones que las reflejen.

Por otra parte, la nueva técnica se basa en una forma diferente de definir la equidad de un SBM, que resulta tanto o más razonable que la definición usual.

Finalmente, el empleo de la Programación Lineal como herramienta de modelización posibilita un alto grado de interacción entre el modelo matemático y el diseñador del sistema, el cual, si no ve satisfechas todas sus aspiraciones, siguiendo esta metodología puede llegar a alcanzar un grado razonable de compromiso entre ellas.

6. Bibliografía.

Borgan, O.; Hoem, J.M. y Norberg, R. (1981). A Nonasymptotic Criterion for the Evaluation of Automobile Bonus Systems. Scandinavian Actuarial Journal 165-178.

De Pril, N. (1978). The Efficiency of a Bonus-Malus System. ASTIN Bulletin 10 (1), 59-72.

García Pineda, P. (2002). Diseño de Sistemas de Tarificación Bonus-Malus mediante la metodología de Programación por Metas. Tesis Doctoral pendiente de publicación, Universidad Complutense de Madrid.

Gilde, V. y Sundt, B. (1989). On Bonus Systems with Credibility Scales. Scandinavian Actuarial Journal 11-32.

Kemeny, J.G. y Snell, J.L. (1976). Finite Markov Chains. Springer-Verlag.

Klugman, S.A.; Panjer, H.H. y Willmot, G.E. (1998). Loss Models. From Data to Decisions}. Wiley series in Probability and Statistics.

Heras, A.; Vilar, J.L. y Gil, J.A (2002). Asymptotic Fairness of Bonus-Malus Systems and Optimal Scales of Premiums. The Geneva Papers of Risk and Insurance Theory 27, 61-82.

Lemaire, J. (1985). Automobile Insurance. Actuarial Models. Kluwer-Nijhoff Publishing.

Lemaire, J. (1995). Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance. Kluwer Academic Publishers.

Lemaire, J. (1998). Bonus-Malus Systems: the European and Asian Approach to Merit-Rating. North American Actuarial Journal 2 (1), 26-47.

Loimaranta, K. (1972). Some Asymptotic Properties of Bonus Systems. ASTIN Bulletin 6, 233-245.

Norberg, R. (1976). A Credibility Theory for Automobile Bonus Systems. Scandinavian Actuarial Journal, 92-107.

Pesonen, M. (1963). A Numerical Method of Finding a Suitable Bonus Scale. ASTIN Bulletin 2, 102-108.

Romero, C. (1993). Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones. Alianza Universidad Textos, Madrid.

Sawaragi, Y.; Nakayama, H. Y Tanino, T. (1985). Theory of Multiobjective Optimization. Academic Press.

Vilar, J.L. (2000). Arithmetization of Distributions and Linear Goal Programming. Insurance: Mathematics and Economics 27, 113-122.
Verico, P. (2002). Bonus-Malus Systems: "Lack of Transparency" and Adequacy Measure. ASTIN Bulletin 32 (2), 315-318.