

El análisis coste-volumen-beneficio bajo incertidumbre. Modelos de decisión

Por

**ANTONIO FERNANDEZ FERNANDEZ
ENRIQUE TORTAJADA ESPARZA**

Profesores de "Economía Financiera y Contabilidad". Facultad de Ciencias Económicas y
Empresariales. Universidad de Extremadura.

- 1. INTRODUCCION. CRITERIOS DE DECISION.**
- 2. DIFERENCIAS ENTRE LOS VOLUMENES DE PRODUCCION Y DE VENTAS ("THE NEWSBOY PROBLEM").**
- 3. EL ANALISIS COSTE-VOLUMEN-UTILIDAD.**
- 4. LOS CRITERIOS" SAFETY FIRST" Y LA PRODUCCION MULTIPLE.**
- 5. RELACIONES ECONOMICAS EN EL ANALISIS COSTE-VOLUMEN-BENEFICIO.
FUNCIONES DE DEMANDA Y COSTES**
- 6. RESUMEN Y CONSIDERACIONES FINALES.**

BIBLIOGRAFIA

1.- INTRODUCCION. CRITERIOS DE DECISION.

El Análisis Coste-Volumen-Beneficio (CVB) es una útil técnica de gestión que, como es bien sabido, se fundamenta en la relación clásica:

$$Z=(P-V)Q-F \quad [1]$$

que liga el beneficio Z con el volumen de producción y ventas Q del producto o servicio generado, su precio P y los costes correspondientes (fijos F y variables unitarios V).

Conocidos los valores que adoptan las variables P , V , Q y F , se determina con precisión, en base a la relación [1], el volumen de beneficios asociado, y ello proporciona a la gerencia una orientación clara en elecciones comprometidas: aceptar o rechazar la fabricación o comercialización de cierto producto; asumir nuevos procedimientos técnicos; o bien, seleccionar una entre varias opciones productivas o comerciales. Y, en general, proporciona luz cuando se aborda: A) el estudio de viabilidad económica de cualquier posible actuación empresarial, y B) la selección de la mejor o mejores oportunidades entre varias posibles.

Pero la realidad es muy difícil de encuadrar en modelos deterministas sencillos. Las variables Q , P , V y F , por lo general, están sometidas a factores incontrolables por la gerencia y son, por tanto, de difícil previsión. Cualquier estimación de las mismas puede estar sometida a error y así también, estará sometido a error el beneficio previsto. Por consiguiente, la utilidad del modelo clásico puede quedar en entredicho en la medida en que conduzca a adoptar decisiones desacertadas.

Ahora bien, si se conceptualizan dichas variables exógenas como variables aleatorias (VA), podemos explicar y describir, a través de los correspondientes modelos estocásticos, el comportamiento también aleatorio, del beneficio asociado a cualquier actuación productiva.

Este ha sido el enfoque básico adoptado por numerosos autores, desde JAEDICKE y ROBICHECK(1964), pasando por JOHNSON y SIMIK(1971), BUZBY(1974), HILLIARD y LEITCH(1975), LIAO(1975), KOTTAS y LAU(1978;a y b), etc., cuyos trabajos sirvieron de base a un artículo anterior nuestro (FERNANDEZ y TORTAJADA(1986)). Los modelos estocásticos allí estudiados, partían de consideraciones acerca de las características probabilísticas de las variables exógenas, para, posteriormente, obtener la distribución del beneficio (1) y algunos de sus estadísticos más relevantes, como son:

- La esperanza matemática o valor medio del beneficio ($E(Z)$).

(1) Básicamente, el procedimiento es, o bien, analítico, o bien, mediante simulación estocástica.

- La varianza del beneficio($\sigma^2(Z)$)o su desviación típica($\sigma(Z)$).

- La probabilidad de obtener beneficios superiores a cierto nivel Z_0 ($\Pr(Z>Z_0)$), donde si dicho nivel se establece en cero ($Z_0=0$), se convierte en la probabilidad de superar el punto muerto.

El conocimiento de dichos estadísticos aporta una gran ayuda para el decisor. Mientras el primero ($E(Z)$) se asocia al beneficio medio esperado (es decir, se trata de un indicador de rendimiento), los dos últimos revelan el riesgo de la actuación económica evaluada. Se entiende que cuanto menor sea la varianza del beneficio, menores posibilidades habrá de obtener resultados muy inferiores (o superiores) al esperado $E(Z)$; y que, cuanto menor sea, por ejemplo, la probabilidad de pérdida ($\Pr(Z<0)$), mayor será, obviamente, las posibilidades de obtener ganancias con la actividad estudiada.

No obstante, a estos modelos descriptivos estudiados (descriptivos de la variabilidad del beneficio) se les objeta que no señalen inequívocamente qué alternativas seleccionar o aceptar y cuáles rechazar, debido a que no incluyen, de una forma explícita, objetivos centrales orientados a determinar la viabilidad de una actividad o a seleccionar una entre distintas alternativas (DEMSKY y KREPS(1982:125)). Es decir, no son modelos de decisión.

Por tanto, los modelos descriptivos hasta aquí aludidos, aportan información relevante, pero no llegan a resolver, verdaderamente, el problema de decisión que siempre suele aparecer. A estos efectos, se sabe que todo modelo descriptivo se convierte en modelo de decisión si se incorpora al mismo una función objetivo que se persigue optimizar.

Dicha función objetivo debe reflejar el esquema de preferencias, los criterios del agente decisor e implica, en nuestro contexto, una valoración subjetiva (no arbitraria) tanto del beneficio esperado por abordar una actividad, como de su variabilidad o riesgo. De esta forma, el riesgo se introduce en los modelos como un factor más de decisión.

Es comprensible pues, que en los modelos de decisión un elemento básico de diferenciación entre los mismos sea la función objetivo a optimizar, que refleje las distintas posiciones, los distintos criterios de decisión en contexto de riesgo, aportados por cada autor.

Así, como sugiere MAGEE (1975) (2), el decisor debe establecer su propio valor

(2) Queriendo interpretar la postura al respecto de JADIECKE y ROBICHECK(1964) y de JOHNSON y SIMIK(1971).

de sustitución entre ganancia (beneficio) y riesgo, e incorporarlo en un objetivo a maximizar del tipo: $\text{Max. } (E(Z) - A \sigma(Z))$ donde A es ese valor de sustitución (o coste del riesgo) que refleja las unidades monetarias de beneficio esperado a las que se está dispuesto a renunciar para conseguir reducir la dispersión $\sigma(Z)$ o riesgo, en una unidad monetaria.

Nótese que este objetivo coincidiría con el de maximizar el beneficio esperado $\text{Max. } E(Z)$, sólo si el decisor resultara ser indiferente al riesgo, para quien su coste es nulo ($A=0$)(3).

En otras ocasiones (4), se tiende a seguir criterios más conservadores, del tipo "safety first", minimizándose, por ejemplo, la probabilidad de obtener pérdidas (5): $\text{Min. Pr}(Z < 0)$; o la de obtener beneficios inferiores a cierto valor Z_0 : $\text{Min. Pr}(Z < Z_0)$.

A menudo, la probabilidad de conseguir resultados inferiores a uno determinado Z_0 , aparece como restricción o limitación junto a otros objetivos (6), como por ejemplo:

$\text{Max. } E(Z)$ sujeta a que: $\text{Pr}(Z < Z_0) \leq \alpha$ o que: $\text{Pr}(Z \geq Z_0) \geq 1 - \alpha$

donde α es un valor que fija el decisor, significativo de la probabilidad de obtener resultados inferiores a un determinado beneficio Z_0 .

Adicionalmente, se han propuesto otros objetivos o criterios de decisión como:

- Maximizar la utilidad esperada del decisor (7), concepto dependiente positivamente de $E(Z)$ y negativamente de $\sigma(Z)$.

- Maximizar la expresión $[E(Z) - B \cdot \sigma(Z, M)]$, propuesta por MAGEE (1975), donde como estimador del riesgo no se toma a la desviación típica $\sigma(Z)$, sino la covarianza $\sigma(Z, M)$ entre el beneficio Z y la tasa de rendimiento (M) de la cartera de títulos del mercado (8).

En síntesis apretada éstos son los objetivos o criterios de decisión más significativos, que van a servir para aceptar o rechazar determinados cursos de acción o para

(3) Una exposición crítica del objetivo de maximizar el valor medio o esperanza matemática de un resultado monetario puede encontrarse en SUAREZ(1983:125).

(4) Por ejemplo, en SHIH(1979), CHEN(1980), etc.

(5) O lo que es lo mismo: $\text{Max. Pr}(Z \geq 0)$.

(6) En BROCKETT et al. (1984).

(7) Véase ADAR et al.(1977) y nota pie de página número 19

(8) Asumiendo las hipótesis básicas del Modelo del Mercado de Capitales debido a SHARPE (1964) y LINTNER (1965), y siempre que el objetivo de la dirección de la empresa sea maximizar la riqueza de sus accionistas, MAGEE (1975) demuestra que el riesgo de la empresa se representa mejor mediante la covarianza entre los beneficios y el rendimiento de la cartera media del mercado, que por la varianza de los beneficios de la empresa.

seleccionar los mejores de ellos, y que se encuentran incluidos en los modelos de decisión que a continuación contemplamos con un afán de completar la revisión crítica de las aportaciones al estudio del Análisis CVB bajo condiciones de incertidumbre (9).

Por último, se ha de resaltar que dichas aportaciones, siguiendo la línea de los modelos descriptivos anteriormente revisados, también levantan nuevos supuestos básicos del Análisis CVB hasta ahora no considerados. Así, se acepta en determinados modelos la existencia de relaciones (causales) de tipo económico entre las variables exógenas consideradas: se explicitan las funciones de demanda (relación entre P y Q) y de costes (relación entre V y Q) incorporándolas en el modelo.

Asimismo, se levanta la hipótesis de que lo vendido coincida plenamente con lo producido y con lo demandado. El modelo del Análisis CVB requiere entonces adaptarse al caso general en que la demanda (imprevista o aleatoria) pueda no coincidir con una producción "predeterminada" a seleccionar, lo que implicaría pérdida de oportunidades de venta, o bien, la pérdida de los excedentes productivos no vendidos.

2. - DIFERENCIAS ENTRE LOS VOLÚMENES DE PRODUCCIÓN Y DE VENTAS ("THE NEWSBOY PROBLEM").

La coincidencia entre volúmenes de producción y ventas ha sido una hipótesis clásicamente considerada por los modelos en el Análisis CVB. Estos suponen que, decidido producir un artículo o gama de ellos, es perfectamente posible adaptar el volumen de producción a la demanda efectiva (10). Ello simplifica el análisis, obviándose los efectos de generar excedentes o déficits a corto plazo.

Dicha hipótesis es de difícil cumplimiento. Es claro que, en el caso de productos estacionales o perecederos que se hacen obsoletos con rapidez, los modelos que la consideran sobrevaloran el beneficio a conseguir cuando la demanda efectiva sea inferior a la prevista y producida Q, ya que no tienen en cuenta la pérdida de valor de los excedentes.

Esta problemática se conoce en la literatura científica como "the newsboy problem" (el problema del vendedor de periódicos). Los modelos que la contemplan persiguen en esencia determinar el volumen óptimo de producción, bajo ciertos criterios, en contextos marcados por la falta de coincidencia entre el volumen de producción decidido y el volumen de ventas conseguido (como consecuencia de una demanda aleatoria).

MAGEE (1975) fue quien primeramente abordó este problema en el marco del

(9) Véase FERNANDEZ y TORTAJADA (1986)

(10) Bajo dicho supuesto, o bien la demanda es perfectamente conocida (pudiendo fijarse con precisión Q), o bien, se trata de una demanda infinita (SHIH (1979:688)) .

Análisis CVB, estableciendo la comparación de resultados bajo tres criterios diferentes (sintéticamente: Máx. $E(Z)$; $\text{Max.}(E(Z) - A\sigma(Z))$ y $\text{Max.}(E(Z) - B\sigma(Z, M))$), ya comentados.

No obstante, fue SHIH (1979) quien trató esta problemática con profundidad, criticando los modelos anteriores y proponiendo un modelo general de decisión que contemplase todas las situaciones posibles a este respecto.

Para una demanda D aleatoria, el modelo de Shih describe la influencia de ésta y del nivel de producción Q seleccionado (tomado como variable de decisión), sobre el volumen de ventas S y, por consiguiente, sobre el beneficio Z .

La ecuación característica del Análisis CVB queda ahora de la siguiente manera (11):

$$Z = \begin{cases} = (P-V)Q-F & \text{si } D \geq Q \\ = P D - V Q - F & \text{si } D < Q \end{cases} \quad [2]$$

donde D (la demanda) es la única variable aleatoria (VA), con media y desviación típica conocidas ($E(D)$ y $\sigma(D)$). Se supone que no existe demanda futura para los productos no vendidos ($Q-D$ o $Q-S$) cuyo valor de desecho es nulo. El resto de las variables Q , P , V y F se suponen de valor conocido con certeza.

Shih desarrolla su modelo y obtiene, primeramente, una serie de características propias de cualquier modelo descriptivo:

a) La expresión general de la función de distribución de Z , así como su media $E(Z)$ y su desviación típica $\sigma(Z)$.

b) Para el caso de que D sea normal (12), obtiene lo expresado en a) más la probabilidad de obtener, al menos, cierto nivel de beneficio (13).

Además, el modelo así construido es de gran utilidad para la toma de ciertas decisiones transcendentales como:

A) Aceptar o rechazar un producto.

Inicialmente, SHIH (1979) estableció que la aceptabilidad de un producto deberá

(11) La expresión [2] puede expresarse también como (LAU y LAU (1981)): $Z=PS-VQ-F$ donde $S=\text{Min.}(Q,D)$ es la única variable aleatoria. Obsérvese que si $D = S = Q$, la ecuación anterior se transforma en la clásica [1], siendo por tanto la [2] la expresión de un modelo más general.

(12) El análisis es extensible a otros tipos de distribución de D , como por ejemplo, las distribuciones gamma y beta.

(13) Las expresiones resultantes son todas ellas dependientes del nivel de producción seleccionado Q y alcanzan, en general, formulaciones muy complejas que han sido simplificadas por aportaciones posteriores de otros autores (LAU y LAU(1981) y FINLEY y LIAO (1981))

existir cuando la media estimada de su demanda $E(D)$, supere al punto de equilibrio según el análisis clásico bajo certidumbre ($F/(P-V)$). Posteriormente, en respuesta a ciertas críticas (14), SHIH (1981;a y b) propuso dos criterios diferenciados muy generales y ambos adaptables a la propia actitud del decisor ante el riesgo.

Según el primer criterio, el producto será comercializado si la $\Pr(D \geq (PM)) \geq \alpha$ donde (PM) es el punto muerto ($F/(P-V)$) y α es una probabilidad con valor determinado por el decisor pero superior a 0,5 si éste es adverso al riesgo.

El segundo criterio contempla aquellos casos en que el nivel de producción Q del producto cuestionado se fija de acuerdo con objetivos o condicionamientos externos al modelo. Entonces, el producto se comercializará si la $\Pr(Z \geq Z_0) \geq \alpha$ de donde se deduce que:

$$E(D) \geq \frac{F+Z_0+VQ}{P} - \Phi^{-1}(\alpha) \sigma(D) \quad [3]$$

Por tanto, la demanda esperada $E(D)$ debe ser, al menos, igual e la expresión de la derecha de [3], expresión dependiente del Q seleccionado, donde $\Phi^{-1}(\alpha)$ es aquel volumen de ventas (demanda) para el que existe una probabilidad $(1 - \alpha)$ de que sea superado (15).

B) Determinar el volumen óptimo de producción.

El modelo de Shih permite encontrar el volumen de producción Q optimizador tanto del beneficio esperado $E(Z)$ como de la probabilidad de conseguir, al menos, determinado nivel de beneficios (16).

C) Seleccionar una entre varias opciones excluyentes.

La selección de la mejor opción, como en el caso anterior, será la resultante de maximizar $E(Z)$, o bien, de maximizar la $\Pr(Z \geq Z_0)$.

(14) La primera propuesta de Shih resulta inaceptable para FINLEY y LIAO (1981), quienes demuestran que puede conducir a seleccionar productos cuyo beneficio esperado sea negativo. Por ello, dichos autores proponen que la aceptación de un producto suponga obtener un $E(Z)$ positivo o nulo (como mínimo), a lo que replica SHIH (1981;a) en el sentido de que tal criterio resulta inflexible y extremadamente pesimista en muchos casos.

(15) Obviamente, Φ es la función de distribución de la demanda D .

(16) Los procedimientos que emplea Shih, en ambos casos, resultan complejos y, en general, requieren el empleo de funciones o tablas de distribuciones poco comunes y difundidas.

Para el caso de maximización de $E(Z)$, el óptimo Q^* se alcanza para :

$$Q^* = E(D) + \Phi^{-1}(\beta) \sigma(D) \quad [4]$$

donde $\beta = (P-V)/P$. No obstante, KAPLAN (1982:202) llega a este mismo resultado de una forma más sencilla, utilizando el análisis marginal ; incluso sugiere cual sería el óptimo de Q cuando el valor de desecho de los excedentes no es nulo: si dicho valor es P_1 , Q^* viene dado por [4] pero para un $\beta = (P-V)/(P-P_1)$.

La complejidad aplicativa que conlleva el modelo de Shih anima a otros autores a construir modelos alternativos para resolver el problema planteado. Asimismo, los criterios aplicados por Shih, de maximización de $E(Z)$, o bien, el de la $Pr(Z \geq Z_0)$, no tienen por qué mostrarse alternativos, pudiendo integrarse ambos en un objetivo de maximización condicionada.

En esta línea, BROCKETT et al.(1984) proponen un modelo de programación matemática con una restricción aleatoria (17), donde el beneficio esperado $E(Z)$ (función objetivo) es el objetivo a maximizar, mientras que el riesgo se incorpora como restricción:

$$\text{Maximizar } E(Z(D,Q)) \text{ sujeto a la restricción de que } \\ Pr(Z(D,Q) \geq 0) \geq \alpha \quad [5]$$

donde D es la demanda aleatoria y Q (variable de decisión) es el volumen de producción a seleccionar antes del conocimiento de D .

De ambas variables depende Z , exigiéndose que la probabilidad de obtener resultados positivos sea, como mínimo, igual a cierto valor α preestablecido por el decisor, cubriéndose así contra el riesgo de obtener pérdidas.

La condición [5], como demuestran BROCKETT et al.(1984:477), puede desglosarse en las dos condiciones no estocásticas siguientes:

$$Q \geq F/(P-V) = Q_1 \\ Q \leq (P\Phi^{-1}(1-\alpha) - F)/V = Q_2$$

La primera expresa que el volumen de producción Q no debe ser inferior al punto muerto según el análisis tradicional, pero al mismo tiempo, por la condición segunda, no debe superar aquel nivel cuyo coste total coincida con los ingresos correspondientes a la venta de un volumen de demanda con probabilidad α de ser superado (18).

El programa permitiría seleccionar el volumen de producción óptimo Q dentro del intervalo $[Q_1, Q_2]$, maximizador del beneficio esperado $E(Z)$, necesitándose conocer tan sólo:

- a) La función de distribución de la demanda $\Phi(D)$ que puede tener un perfil muy general sin grandes especificaciones, y
- b) El coeficiente α que concreta la actitud del decisor ante el riesgo.

(17) "Chance constrained programming".

(18) $\Phi^{-1}(1-\alpha)$ es el valor de la demanda cuya probabilidad de que sea superada es igual a α . Obviamente ϕ es la función de distribución de D , y la condición segunda, modificando la posición de algunos de sus términos, queda: $P\phi^{-1} \geq VQ + F$

No obstante, independientemente del tipo de comportamiento aleatorio de la demanda así como de la actitud del decisor ante el riesgo, el nivel productivo óptimo nunca debe ser inferior a $F/(P-V)$, resaltándose así el papel central que juega la condición de punto muerto del análisis clásico. La producción óptima bajo este modelo optimizador de $E(Z)$, será en general, diferente de las obtenidas por el modelo de Shih.

Por último, Brockett et al. aseguran que, bajo la misma estructura proporcionada por la programación matemática con restricciones aleatorias, es posible adoptar otros objetivos, asimismo integradores del rendimiento y riesgo de las opciones, sugiriendo, entre otros, el de maximizar la utilidad esperada. Este criterio es el clásico aportado por la Teoría de la Utilidad (VON NEUMANN y MORGENSTERN (1947)) (19), cuya incorporación al Análisis CVB bajo incertidumbre, tratamos a continuación.

3.- EL ANÁLISIS COSTE-VOLUMEN-UTILIDAD

ADAR et al. (1977) introducen, por primera vez en el Análisis CVB, la función de la utilidad esperada de un decisor, para valorar opciones arriesgadas e incorporando en la misma su postura ante el riesgo (20).

Las características básicas del modelo son:

1^a) El decisor presenta aversión al riesgo y dispone de una función de utilidad conocida $U(E(Z), \sigma(Z))$. La utilidad esperada por el decisor depende positivamente de $E(Z)$ y negativamente de $\sigma(Z)$ (21).

(19) Von Neumann y Morgenstern, preocupados por analizar el comportamiento racional ante decisiones arriesgadas, crearon la Teoría de la Utilidad. La Utilidad (la utilidad del dinero para un decisor) es un concepto que viene a valorar en unidades propias (unidades de utilidad, distintas de las unidades monetarias) la satisfacción que proporcionan los resultados monetarios correspondientes a opciones arriesgadas. La relación que liga al beneficio Z con la utilidad U que le reporta a un decisor concreto, es la función de utilidad $U(Z)$, que está condicionada tanto por la riqueza del decisor como por su carácter o personalidad. La utilidad crece cuando lo hace el beneficio (es decir, la utilidad marginal es positiva ($U'(Z) > 0$), pero si el decisor presenta aversión al riesgo, este crecimiento no es proporcional sino cada vez menor (la utilidad marginal es decreciente ($U''(Z) < 0$)). Si la utilidad marginal es constante ($U''(Z) = 0$) se dice que el decisor es indiferente al riesgo; y si fuera creciente ($U''(Z) > 0$) se dice que el decisor ama o es aficionado al riesgo. Por último, la utilidad esperada por un decisor que abordase una opción con resultados Z aleatorios (la utilidad de una opción arriesgada), se determina mediante el valor medio o esperanza matemática de las utilidades correspondientes a dichos resultados.

(20) El riesgo, en este caso, está representado por $\sigma(Z)$ (o por $\sigma(P)$, porque, como se verá, P es el origen de la variabilidad de Z), y no por la $\Pr(Z \leq 0)$ como sucedía en los modelos vistos de Shih y de Brockett et al. (21) Puede depender, asimismo, de otros estadísticos de la distribución de Z , como expresan y proponen KOTTAS et al (1978). No obstante, Adar et al. se adhieren al enfoque media-varianza seguido por MARKOWITZ (1952) y TOBIN (1958), propio de la Teoría de Carteras, que considera sólo relevantes el valor medio y la varianza de los rendimientos de los títulos para determinar o explicar la utilidad que éstos reportan al inversor. Entonces, si U depende de $E(Z)$ y de $\sigma(Z)$, se deduce que

$$\frac{\delta u}{\delta E(Z)} > 0 \text{ y que } \frac{\delta u}{\delta \sigma(Z)} < 0$$

2ª) Se conocen con certeza los costes fijos F y variables unitarios V .

3ª) El volumen de producción Q (que coincidirá en este caso con el de ventas) se presenta como variable de decisión (como en modelos anteriores) a determinar.

4ª) El precio P del producto es la única VA exógena origen de incertidumbre e independiente de Q , con media $E(P)$ y dispersión $\sigma(P)$ conocidas. Por ello:

$$\left. \begin{aligned} E(Z) &= (E(P) - V) Q - F \\ \sigma(Z) &= Q \cdot \sigma(P) \end{aligned} \right\} \quad [6]$$

de donde se concluye que:

$$E(Z) = \frac{E(P) - V}{\sigma(P)} \sigma(Z) - F \quad [7]$$

5ª) La conducta óptima implica maximizar la utilidad del inversor ($\max. U(E(Z), \sigma(Z))$) sujeta a la condición lógica [7] que relaciona los beneficios esperados con el riesgo.

La aplicación del método de Lagrange conduce a unos valores óptimos $E^*(Z)$ y $\sigma^*(Z)$ (22) a partir de los cuales se determina (mediante [6]) el volumen óptimo de producción

$$Q^* = \frac{\sigma^*(Z)}{\sigma(P)} = \frac{E^*(Z) + F}{E(P) - V}$$

que interesa especificar. Este valor va a depender pues de:

1ª) La actitud ante el riesgo del decisor (especificada en su función de utilidad).

(22) En un plano ganancia-riesgo, representando en el eje de abscisas los valores de $\sigma(Z)$ y en el de ordenadas los de $E(Z)$, la utilidad aparece gráficamente como una familia de curvas de isoutilidad que son convexas respecto al origen y tanto más elevadas cuanto mayor es su utilidad esperada. En ese mismo plano, la expresión [2] es una recta creciente en el primer cuadrante. Los valores óptimos de $E(Z)$ y de $\sigma(Z)$ son los correspondientes al punto de tangencia entre la recta [2] y una de las curvas de isoutilidad (la de utilidad máxima posible). En dicho punto, se observa que el aumento marginal de la utilidad, elevando $E(Z)$ se iguala al descenso marginal de utilidad cuando aumenta $\sigma(Z)$. Es decir:

$$\frac{\delta u}{\delta E(Z)} = - \frac{\delta u}{\delta \sigma(Z)} = \frac{E(P) - V}{\sigma(P)}$$

2º) Los costes fijos F, pues éstos influyen en la determinación del conjunto de posibles soluciones (a través de la expresión [7]).

3º) El coste del riesgo o relación de sustitución ganancia-riesgo, que en este caso coincide con la pendiente de la recta [7] $(E(P)-V)/\sigma(P)$ o sea, la contribución esperada por unidad de dispersión del precio de venta.

Con el modelo de Adar et al. no sólo se puede determinar el volumen de producción óptimo, sino que además:

a) Permite seleccionar la mejor entre varias opciones (la que proporcione mayor utilidad).

b) Ante una información adicional que condujera a precisar mejor el precio de venta (o lo que es lo mismo, a reducir su dispersión) y, por tanto, a disminuir el riesgo, se puede determinar con el modelo el máximo valor que puede pagarse por la misma (23).

c) Se descubre, asimismo, el efecto insospechado de los costes fijos F sobre el volumen óptimo de producción a corto plazo.

En el supuesto (bastante común) de que el decisor disminuya su aversión por el riesgo conforme aumente su riqueza o beneficios, un aumento (o disminución) de los costes fijos originará un descenso (incremento) del volumen de producción óptimo (24).

4.- LOS CRITERIOS "SAFETY FIRST" Y LA PRODUCCIÓN MÚLTIPLE

La utilidad del modelo de Adar et al. se ve fuertemente limitada en la medida en que:

1) Sólo considera la existencia de un único producto.

2) Presupone como única variable origen de incertidumbre al precio de venta P.

3) Requiere del conocimiento expreso de la función de utilidad del decisor, función, que, en general, resulta de difícil especificación (CARSBURG (1977:228)) (25).

(23) Este valor se interpreta como aquel incremento de los costes fijos F que consigue anular el previsible incremento de la utilidad esperada que proporcionaría dicha información adicional.

(24) Si la aversión al riesgo crece con la riqueza o beneficios del decisor, ocurrirá al contrario. Recuérdese que una conclusión básica de los modelos de optimización bajo certidumbre es la irrelevancia de los costes fijos en la determinación del output óptimo, dependiente sólo de los ingresos y costes variables marginales. En nuestro caso, sólo si la aversión al riesgo permaneciera constante, los costes fijos no afectarían el volumen óptimo de producción.

(25) Pese a existir procedimientos o reglas para su obtención (ADAR et al.(1977:147), MAO (1980:46), GREER (1974),etc.)

CHEN(1980) corrige estas supuestas debilidades proponiendo unos modelos aplicables a la producción múltiple, donde los orígenes de incertidumbre están en las contribuciones $(P_i - V_i)$ (26) asociadas a cada producto; y como alternativa a la curva de utilidad individual, la actitud del decisor hacia el riesgo se refleja con el empleo de criterios "safety first" (seguridad primero) más fáciles de especificar.

A este respecto, conviene en principio recordar que en un contexto de multiproducto con rendimientos aleatorios, la aplicación del modelo original de MARKOWITZ (1952 y 1959) (27) es inmediata si se conoce la función de utilidad del decisor. Este modelo implica seleccionar, entre los conjuntos eficientes de productos, aquel que maximiza la utilidad esperada por el decisor, siendo eficiente aquel conjunto (combinación o cartera) de productos que, para una determinada varianza de su rendimiento, proporciona el rendimiento esperado máximo (o viceversa, para determinado nivel de ganancia esperada, proporciona la varianza mínima).

Inspirándose en el modelo de Markowitz, CHEN (1980) sustituye el criterio de la utilidad esperada por otros de optimización condicionada que reflejan, bajo unas formas más simples y primigenias, una actitud de prevención hacia el riesgo que garantice cierta seguridad de conseguir determinados niveles de ganancias para el decisor.

En concreto, Chen presenta tres modelos de programación cuadrática con restricciones estocásticas, correspondientes a tres objetivos a optimizar diferentes, pero condicionados por dos limitaciones o restricciones estocásticas comunes (28), a satisfacer por las combinaciones de productos posibles. Dichas restricciones son:

1ª) Restricción de punto muerto ("break-even"): Que la probabilidad de obtener, al menos, el punto muerto sea, como mínimo, de un determinado nivel α suficientemente elevado. Es decir:

$$\Pr (Z \geq 0) \geq \alpha$$

2ª) Restricción en cuanto a la probabilidad de lograr, el menos, determinados niveles de beneficios Z_0 : $\Pr (Z \geq Z_0) \geq \beta$, siendo $Z_0 > 0$ y, obviamente, $\beta < \alpha$.

(26) La variabilidad o riesgo ya no proviene sólo de los precios P_i , sino también de los costes variables unitarios V_i , dando lugar a unas contribuciones $(P_i - V_i)$ aleatorias con leyes probabilísticas propias y conocidas.

(27) O bien, el modelo "diagonal" de SHARPE (1963) que requiere menor volumen de información. Estos modelos han sido aplicados originalmente a la selección de carteras óptimas de títulos o valores mobiliarios.

(28) Además de las restricciones impuestas por las disponibilidades de recursos y la no negatividad de las producciones, que aparece en todo modelo de programación.

Los tres criterios que dan lugar a sendos modelos son (29):

Modelo 1º:

Maximizar la probabilidad β de conseguir al menos un nivel de beneficios Z_0 , cumpliéndose la condición de punto muerto:

$$\text{Max. } \beta \text{ sujeto a } \left\{ \begin{array}{l} \Pr(Z \geq Z_0) \geq \beta \\ \Pr(Z \geq 0) \geq \alpha \end{array} \right\} \quad [8]$$

Modelo 2º:

Maximizar un determinado nivel de beneficios Z_0 cuya probabilidad de ser superado es al menos de β , cumpliéndose la condición de punto muerto:

Max. Z_0 sujeto a [8]

Modelo 3º:

Maximizar la ganancia esperada $E(Z)$, dados Z_0 , β y α :

Max. $E(Z)$ sujeto a [8]

Cada uno de estos objetivos de seguridad, conduce a diferentes combinaciones óptimas de productos dentro de la frontera de eficiencia. La condición de "break-even" reduce, en todos ellos, el campo de soluciones eficientes posibles y, del mismo se selecciona aquella cartera de productos que, bien, maximiza β dado Z_0 (modelo 1º); o bien, la que maximiza Z_0 dado β (modelo 2º); o la que maximiza $E(Z)$ dados β y Z_0 (modelo 3º) (30).

Obsérvese que las soluciones alcanzadas dependen del valor asignado a los parámetros β , α y Z_0 , así como del criterio seleccionado. El modelo de Chen tiene la virtud de que bajo un mismo modelo de programación cuadrática paramétrica, puede ofrecer al decisor las soluciones óptimas frente a variaciones de los parámetros y del criterio, lo que facilita la toma de decisiones.

(29) Dichos criterios responden al tipo general de "safety first" y se corresponden con modificaciones de los propuestos con anterioridad por ROY (1952), KATAOKA (1963) y TELSER (1955), respectivamente. La modificación básica está en sustituir la renta o nivel de "ruina" (de difícil definición en la práctica), por una renta o nivel de ganancias deseado Z_0 (propuesta mucho más acorde con objetivos o especificaciones prácticos).

(30) CHEN (1980) expresa con gran claridad, de una forma gráfica, cómo se alcanzan las soluciones óptimas para cada uno de sus modelos.

Por último, una nota que conviene destacar es que la solidez teórica que proporciona el enfoque de la Teoría de la Utilidad a los modelos que la contemplan, no está ausente en los modelos de Chen, puesto que se ha demostrado (PYLE y TURNOVSKY (1970)) que los criterios "safety first", bajo condiciones poco restrictivas, están relacionados (son casos particulares) con el criterio de la utilidad esperada.

5.- RELACIONES ECONÓMICAS EN EL ANÁLISIS CVB. FUNCIONES DE DEMANDA Y DE COSTES

La hipótesis de independencia entre las variables exógenas de las que depende el beneficio ha estado presente habitualmente en el Análisis CVB (JAEDICKE y ROBICHEK (1966), FERRARA et al.(1972), ADAR et al.(1977), etc.) (31).

Sin embargo, en realidad se observa (y la teoría económica informa de ello) la existencia de relaciones económicas de tipo causal entre las mismas, de forma que, por ejemplo, un incremento de las ventas puede determinar o conseguirse mediante una reducción de precios (y viceversa) (32); o bien, que los costes variables pueden no guardar una proporcionalidad constante con el volumen producido.

Pero lo cierto es que la mayoría de los modelos y, por supuesto, la totalidad de los comentados hasta el presente no consideran estas relaciones. YUNKER y YUNKER (1982) atribuyen esta ausencia a la falta de información sobre las mismas, que estaría impidiendo su incorporación a los modelos de una forma realista.

Por otro lado, KARNANI (1983), en relación a la inclusión o no, en los modelos, de la función de demanda (que relaciona P con Q), arguye que aquellos que no la incorporan están asumiendo, de forma explícita o implícita, que la empresa es "precio-aceptante", mientras que los que sí la introducen, asumen que la empresa opera en un mercado monopolístico.

No obstante, a esta tónica general algunas excepciones se han de contabilizar. En primer lugar, hemos de mencionar la aportación de MORRISON y KACZKA (1969) quienes introducen, por primera vez, en su modelo sobre Análisis CVB, una función de demanda lineal estocástica con un término residual o perturbación aleatoria (que es lo que confiere estocasticidad al modelo) y siendo P la variable de decisión independiente. Con su modelo se puede obtener el precio y el volumen de producción que maximizan el beneficio medio (33).

(31) En algunas ocasiones, a lo sumo, se ha aceptado la existencia de relaciones de tipo estadístico no causales entre dichas variables. Por ejemplo, HILLIARD y LEITCH (1975) incorporan en su modelo coeficientes de correlación conocidos entre precios y volúmenes de ventas.

(32) Autores Como SANDMO (1971), LELAND (1972), etc., han desarrollado la teoría económica de la empresa ("theory of the firm") bajo contexto de incertidumbre, considerando especialmente, la función de demanda estocástica .

(33) Nótese que la incorporación de funciones de demanda o de costes en la relación clásica del beneficio, transforma el modelo lineal del Análisis CVB en una relación no lineal entre Z y Q (o entre Z y P).

Mucho más tarde, KOTTAS y LAU (1979) proponen el empleo de curvas de demanda y de costes, tanto lineales como no lineales, en donde las relaciones presentan también un término residual que se distribuye normalmente. En este escenario, el precio es, igualmente, la variable de decisión (establecida por la dirección con precisión), se deducen expresiones para $E(Z)$ y $\sigma(Z)$, y se sugiere cómo pueden ser incorporadas en una función de utilidad simple.

Posteriormente, CONSTANTINIDES et al. (1981) presentan un modelo donde la variable de decisión es el volumen de producción (como en el modelo de Shih). En su modelo se acepta que (34):

1) La función de demanda es lineal: $P=A-B \cdot Q$ donde A es VA de media y desviación típica conocidas. La pendiente B (variación de P frente a una variación unitaria de Q) se supone constante y conocida con certeza.

2) La función de costes totales es lineal, con costes fijos F aleatorios (con parámetros conocidos) y coste variable unitario V constante y conocido.

3) El objetivo a maximizar es el beneficio esperado $E(Z)$.

Por consiguiente: $Z=(A-BQ)Q-VQ-F=-F+(A-V)Q-BQ^2$ donde F , A y Z son VAs.

El beneficio medio y su varianza resultan ser

$$E(Z)=-E(F)+(E(A)-V)Q-BQ^2 \quad [9]$$

$$\sigma^2(Z)=\sigma^2(F)+Q^2\sigma^2(A)-2\sigma(F,A)Q$$

cuyos valores dependen del Q seleccionado.

Junto con la distribución de Z , del modelo puede obtenerse también, fácilmente (a partir de [9]), el volumen Q^* que maximiza $E(Z)$:

$$Q^* = (E(A)-V)/2B$$

Adicionalmente, si se supone que A y F se distribuyen normal y conjuntamente, puede deducirse la probabilidad de conseguir al menos, un beneficio determinado (dado que Z ahora es norma). Si se maximiza esta probabilidad, se obtiene un Q

(34) Los supuestos del modelo básico de Constantinides et al. pueden ser modificados y adaptados a casos más convenientemente, como los propios autores sugieren. Así, tanto A como B en la función lineal de demanda, pueden ser estocásticos. En lo que respecta a la función de costes totales, además de poder considerarse a V Como VA, puede aceptarse que sea una función cuadrática de Q (costes variables unitarios no constantes). Y en cuanto al objetivo, la maximización de $E(Z)$ se compara, de hecho, en el mismo artículo con la maximización de la $Pr(Z \geq Z_0)$.

optimizador que se demuestra es siempre inferior al alcanzado maximizando $E(Z)$ (lo cual no deja de ser intuitivo por cuanto $E(Z)$ es un objetivo menos conservador que la $\Pr(Z \geq Z_0)$).

Finalmente, Constantinides et al. desarrollan en su trabajo una extensión intertemporal que tiene en cuenta: a) el efecto de los inventarios (falta de coincidencia entre ventas y producciones anuales); b) las decisiones múltiples anuales sobre Q ; y c) el comportamiento aleatorio de los costes fijos y la contribución (P-V) a lo largo del tiempo.

Una última aportación en esta misma línea de trabajo, realizada paralelamente a la de Constantinides et al., es la YUNKER y YUNKER (1982) quienes intentan construir un modelo general que contemple la aleatoriedad de todas las variables de las que depende el beneficio.

Considerando como variable de decisión a la producción planificada \bar{Q} , el beneficio Z resulta ser una función de grado tres en \bar{Q} , pudiendo deducirse el valor del beneficio esperado:

$$E(Z) = a\bar{Q} - b\bar{Q}^2 - c\bar{Q}^3 - d \quad [10]$$

y su varianza (que es función de \bar{Q} en grado seis). Y todo ello, partiendo de los siguientes supuestos:

- Existe una función de demanda lineal estocástica tal como:

$$P = \alpha_1 + \beta_1 Q + \varepsilon_p$$

- Existe una función de costes cuadrática y estocástica del tipo:

$$V = \alpha_2 + \beta_2 Q + \gamma Q + \varepsilon_v$$

- La producción efectiva Q es iguala a la planificada \bar{Q} más una perturbación aleatoria ε_q . Es decir

$$Q = \bar{Q} + \varepsilon_q$$

- Los costes fijos F , las perturbaciones (ε_p , ε_v y ε_q) y todos los parámetros de las funciones de demanda y costes (α_1 , β_1 , α_2 , β_2 y γ) se distribuyen normalmente con medias y varianzas conocidas (concretamente, el valor medio de las perturbaciones es nulo).

Atendiendo al elevado número de factores de variabilidad (ocho) y a su supuesta

normalidad, puede considerarse como hipótesis plausible que, en la mayoría de los casos, la distribución de Z será aproximadamente normal (35) y podrá obtenerse, también, la probabilidad de que Z supere cierto nivel establecido (YUNKER y YUNKER (1982:26)).

Estos autores aplican y comparan tres criterios de optimización diferentes: 1º) La maximización de $E(Z)$, que, a través de la expresión [10], permite obtener la producción óptima Q^* ; 2º) La maximización de la probabilidad de superar cierto nivel de beneficios ($\Pr(Z \geq Z_0)$), como criterio que pretende seguridad ante todo, a costa de una reducción del beneficio esperado; y 3º) la maximización de la utilidad esperada $E(U)$ en dos versiones: primero, la versión clásica según la cual se relaciona a $E(U)$ con $E(Z)$ y con $\sigma(Z)$; y la segunda, incorporando en dicha relación a la $\Pr(Z \geq 0)$ en vez de $\sigma(Z)$ (36).

Es de observar, pues, que el modelo de Yunker y Yunker requiere un notable grado de información sobre los factores del riesgo en su formulación general (37). No obstante, como indican los mismos autores, una vez conocidas o estimadas las funciones de demanda y de costes, solamente resta estimar los datos correspondientes a F y a ϵ_q (38).

6.- RESUMEN Y CONSIDERACIONES FINALES.

El Análisis CVB bajo contexto de incertidumbre cuestiona el supuesto básico del modelo clásico relativo al conocimiento preciso o exacto del valor futuro que van a adoptar las variables (precios, costes y volúmenes de producción o ventas) de las que depende el beneficio asociado a determinada actividad productiva, beneficio sobre el que no cabe previsión perfecta.

Con objeto de reflejar el estado de la cuestión sobre esta línea de desarrollo (la más relevante) del Análisis CVB, se analizó, en un trabajo anterior, las primeras aportacio-

(35) En especial, lo será si la producción planificada coincidiera con la efectiva ($Q = \bar{Q}$), pues es la perturbación $\epsilon_q = Q - \bar{Q}$ introduce en la expresión de Z términos que son productos de VA normales (cuya normalidad no está garantizada, en general (FERRARA et al.(1972))).

(36) La incorporación de la $\Pr(Z \geq 0)$ en la función de utilidad, se debe, como indican los autores, a que, según se opina, $\sigma(Z)$ es una medida demasiado abstracta del riesgo, comparativamente a $\Pr(Z \geq 0)$, que expresa un concepto de seguridad muy clarificador, y que está relacionada de forma directa con la inversa del coeficiente de variación ($CV = \sigma(Z)/E(Z)$) (YUNKER y YUNKER (1982:28)).

(37) Obviamente, el modelo puede simplificarse, siempre que la realidad lo sugiera: muchas supuestas fuentes de variabilidad pueden, en la práctica, no ser relevantes. Por ejemplo, la función de costes, que genéricamente se diseña de segundo grado en Q (con forma de U a sugerencia de la teoría económica), puede adoptar niveles más simples (incluso la independencia de V respecto de Q , con β_2 y γ nulos).

(38) La determinación de medias y varianzas de los factores de riesgo puede hacerse (YUNKER y YUNKER (1982:27)): A) mediante juicio subjetivo de expertos en marketing (para la función de demanda) o en producción (para la función de costes), o mejor mediante B) técnicas de regresión lineal, especialmente si el producto se está ya produciendo y se dispone de información previa suficiente, o bien, a partir de datos sobre bienes análogos.

nes surgidas al respecto, que han consistido en determinados modelos estocásticos con una nota común destacada: su intención última de representar y explicar la variabilidad aleatoria del beneficio incierto, ofreciendo unos indicadores del rendimiento esperado (esperanza matemática del beneficio) y del riesgo (la varianza y la probabilidad de no superar cierto nivel de ganancias) que conllevan cada una de las actividades o estrategias evaluadas.

Todo ello, si bien resulta ser de suma utilidad, no proporciona siempre orientaciones concluyentes al decisor a la hora de seleccionar el curso de acción más adecuado.

Las aportaciones analizadas y expuestas en el presente artículo, históricamente las más recientes, han incorporado conceptos sustantivos de la Teoría General de la Decisión, al mismo tiempo que, en un esfuerzo por conectar y explicar mejor la realidad, levantan algunas hipótesis tradicionalmente utilizadas en el modelo clásico del Análisis CVB.

Los modelos aquí revisados son modelos de decisión, caracterizados por proporcionar soluciones óptimas de acuerdo con unos objetivos o criterios asumidos (hipotéticamente) por el decisor e incorporados en el mismo modelo. Estos criterios necesariamente implican una valoración cuantitativa y comparativa por el sujeto decisor, tanto de la ganancia esperada como del riesgo asociados a cada opción posible.

En este terreno es relevante la incorporación de la Teoría de la Utilidad y del criterio de la utilidad esperada. Como caso especial, también se han considerado aquellos criterios propios de decisores especialmente prudentes (criterios "safety first"), que contrastan con los asociados a decisores indiferentes al riesgo (criterio del beneficio esperado).

El Análisis CVB se ha ocupado recientemente de estudiar aquellas situaciones en las que lo producido no coincide con lo vendido y demandado. El objetivo, entonces, consiste en optimizar el plan de producción ante demandas aleatorias que, o bien originan pérdidas de oportunidad de ventas, o bien, pérdidas de los excedentes que el mercado infravalora o deprecia por obsoletos.

Igualmente, la independencia entre las variables producción, precios y costes, siendo difícil de sostener, ha conducido a presentar modelos que llevan incorporadas relaciones económicas definidas (funciones de demanda y de costes) entre las mismas.

Continúa, pues, el Análisis CVB con la tendencia expresada de adaptar las hipótesis y los modelos respectivos a situaciones de mayor realismo.

Dos inconvenientes, no obstante, hay que destacar. El primero de ellos se refiere a la necesidad creciente que plantean los modelos de disponer de mayor y mejor información para su puesta en práctica, no siempre fácil de obtener.

Una segunda fuente de inconvenientes se refiere al hecho de que todos estos nuevos planteamientos respecto al Análisis CVB bajo condiciones de incertidumbre, conlleven dosis progresivamente crecientes de complejidad y sofisticación en las herramientas informáticas y matemáticas (programación cuadrática, con restricciones estocásticas, etc.) implicadas por los modelos. Ello representa, sin duda, un "handicap" importante a la hora de lograr su aplicación práctica por los entes de decisión y gestión; quizá su relación beneficio/coste no lo justifique suficientemente en todos los casos.

Nos consta, sin embargo, la preocupación que reflejan la generalidad de los autores por divulgar la potencialidad de los modelos en cuanto a los resultados que ofrecen, así como por mejorar su manejabilidad por parte de usuarios no necesariamente expertos en estas técnicas. A pesar de ello, queda algún terreno por recorrer en este sentido.

Cabe pensar, no obstante, en un aumento progresivo aunque lento, en el grado de aceptación de los modelos de decisión por unos cuadros de empresa cada vez más abiertos y capacitados para el empleo de las herramientas científicas y de las técnicas de obtención y manejo de la información.

BIBLIOGRAFIA

ADAR, Z; BARNEA, A. Y LEV, B. (1977) "A comprehensive Cost-Volume-Profit Ananalysis under uncertainty" *The Accounting Review*, 52, January, 137-149.

BROCKETT, P.; CHARNES, A.; COOPER, W.W. Y SHIN, H. CH (1984) "A chance-constrained programming approach to Cost-Volume-Profit Analysis" *The Accounting Review*, 59, July, 474-487.

BUZBY, S.L. (1974) "Extending the applicability of probabilistic management planning and control models" *The Accounting Review*, January, 42-49

CARSBERG, B. (1977) Teoría económica de las decisiones empresariales. AU, nº 178. Alianza Editorial.

CONSTANTINIDES, G.M.; IJIRI, Y. Y LEITCH, R.A. (1981) "Stochastic cost-volume-profit analysis with a linear demand function". *Decision Sciences*, 12, 417-427.

CHEN, J.T. (1980). "Cost-volume-profit analysis in Stochastic Programming models". *Decision Sciences*, 11(Oct.), 632-47.

DEMSKY, J.S. Y KREPS, D.M. (1982). "Models in managerial accounting". *Journal of Accounting Research*, 20, Supplement.

FERNANDEZ, A. Y TORTAJADA, E. (1986) "El Análisis Coste-Volumen-Beneficio bajo incertidumbre (I). Modelos descriptivos. "(Aceptado y pendiente de su publicación en *Técnica Contable*)

FERRARA, W.L.; HAYYA, J.C. Y NACHMAN, D.A. (1972). "Normalcy of profit in the Jaedicke-Robicheck model" *The Accounting Review*, , 47, April, 299-307.

FINLEY, D.R. Y LIAO, W.M. (1981) "A general decision model for Cost-Volume-Profit Analysis under uncertainty: A comment" *The Accounting Review*, : April, 400-403.

GREER, W.R.JR. (1974) "Theory versus practice in risk analysis under uncertainty: An empirical study" *The Accounting Review*, , 44, July.

HILLIARD, J.E. Y LEITCH, R.A. (1975) "Cost-volume-profit analysis under uncertainty: A log-normal approach" *The Accounting Review*, , 50, January 69-80.

JAEDICKE, R.K. Y ROBICHECK, A.A. (1964) "Cost-volume-profit analysis under conditions of uncertainty" *The Accounting Review*, 39, October, 917-926.

JOHSON, G.L. Y SIMIK, S.S. (1971) "Multiproduct C-V-P analysis under uncertainty" *Journal of Accounting Research*, Autum, 278-286.

KAPLAN, R.S. (1982) *Advanced Management Accounting*. Prentice-Hall Inc.

KARNANI, A. (1983) "Stochastic cost-volume-profit analysis in a competitive oligopoly" *Decision Sciences*, 14, 187-193.

KATAOKA, S. (1963) "A stochastic programming model" *Econometrica*, 31, 181-196.

- KOTTAS, J.F. Y LAU, H.S. (1978;a) "On the accuracy of normalcy approximation in stochastic C-V-P analysis" *The Accounting Review*, , Jan, 247-51.
- (1978;b) "Direct simulation in stochastic CVP analysis" *The Accounting Review*, , 53, July, 698-707.
- (1979) "A decision model model with stochastic cost and demand curves" *Omega*, 7, 80-81.
- KOTTAS, J.F.; LAU, A. Y LAU, H.S. (1978) "A general approach to stochastic management planning models - An overview" *The Accounting Review*, 53, April, 389-401.
- LAU, A. Y LAU, H.S. (1981) "Acomment on Shih's general decision model for CVP analysis" *The Accounting Review*, October, 980-983.
- LELAND, H.E. (1972) "Theory of the Firm facing uncertain demand" *American Economic Review*, 62, 278-291. June.
- LINTNER, J. (1965) "The valuation of risk assets and selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets" *Review of Economics and Statistics*, 47, 13-37.
- LIAO, M. (1975) "Model Bamplng: A stochastic CVP analysis" *The Accounting Review*, , October, 780-790.
- MAGEE, R.P. (1975) "Cost-Volume-Profit Analysis, Uncertainty and Capital Market Equilibrium" *Journal of Accounting Research*, 13, 257-266.
- MAO, J.C.T. (1980) "Análisis Financiero" El Ateneo.
- MARKOWITZ, H.M. (1952) "Portfolio selection" *Journal of Finance*. March 77-91.
- (1959) *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley and Sons.
- MORRISON, T.A. Y KACZKA, E. (1969) "A new application of calculus and risk analysis to cost-volume-profit changes" *The Accounting Review*, 44, April, 330-343.
- PYLE, D.H. Y TURNOVSKY, S.J.(1970) "Safety-first and expected utility maximization in mean-satandard deviation portfolio analysis". *Review of Economics and Statistics*, 52, 75-81
- PYLE, D.H. Y TUNOVSKY, S.J. (1970) "Safety-first and expected utility maximization in mean-satandard deviation portfolio analysis". *Review of Economics and Statistics*, 52, 75-81
- ROY, A.D. (1952) "Safety first and the holding of assets" *Econometrica*, 20, 431-449
- SANDMO, A. (1971) "On the Toey of the competitive firm under price uncertainty" *American Economic Review*, 61, 65-73, March.
- SHARPE, W.F. (1963) "A simplified model for portfolio analysis" *Management Science*, 9, January, 277-293
- (1964) "Capital Assets Prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk". *Journal of Finance*, 19, 425-42.
- SHIH, W. (1979) " A general decision model for cost-volume-profit analysis under uncertainty" *The Accounting Review*, October, 687-706.
- (1981; a). "A general decision modelo for cost-volume-profit analysis under uncertainty: A reply". *The Accounting Review*, , 56, 2, 404-408.
- (1981; b). "A comment on Shih's general model for CVP analysis-A reply" *The Accounting Review*, , 56, 4, October, 984-5.

SUAREZ, A.S. (1983) Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa. Pirámide.

TELSER, L.G. (1955) "Safety first and hedging". *The Review of Economic Studies*, 23, 1-16.

TOBIN, J. (1958). "Liquidity preference as behavior toward risk". *Review of Economic Studies*, 25, 65-86.

VON NEUMANN, J. Y MORGENSTERN, O. (1947) Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press.

YUNKER, J.A. Y YUNKER, P.J. (1982). "Cost-Volume-Profit Analysis under Uncertainty: An integration of Economic and Accounting Concepts" *Journal of Economics and Business*, 34, 21-37