Empréstitos isorrentables

Por

RAMON SALA GARRIDO

Profesor de la Universidad de Valencia
Actuario de Seguros

1. INTRODUCCION

Es un hecho que en las últimas décadas han aparecido en el mercado español de renta fija una gran variedad de nuevos activos financieros que, junto a la diversificación de los ya existentes, ha producido una potenciación de dicho mercado.

Quedan ya lejanos los tiempos en que el único activo con rendimientos predeterminados eran las obligaciones clásicas suscritas por inversores que cedían exigencias de rentabilidad y liquidez a cambio de asegurar la recuperación del capital invertido.

La tendencia manifestada en este mercado no parece que vaya a cambiar, antes bien, la próxima integración en la Comunidad Económica Europea, favorecerá que la oferta de inversiones e intermediarios financieros sea cada vez más amplia y diversificada.

El trabajo que presentamos responde precisamente a este objetivo. Constituye una nueva modalidad de empréstito que, inspirado en el de Lenzi, proporciona como él una rentabilidad constante sea cual sea el valor de suscripción del título y el momento de la amortización.

2. EL EMPRESTITO DE LENZI

La introducción de las características comerciales en los empréstitos puros alteran como es sabido la rentabilidad de la emisión, que deja de ser coincidente con el tanto de emisión del empréstito.

Si estas características inciden con los mismos efectos sobre todas las obligaciones sólo alcanzarán igual rentabilidad las obligaciones amortizadas en un mismo sorteo. Un ejemplo en este sentido son las obligaciones emitidas con prima de amortización constante que proporcionan una rentabilidad decreciente en función de la duración de la operación.

Ante la frecuencia con que estos empréstitos eran emitidos, Lenzi diseña una nueva modalidad de empréstito que al actuar sobre las primas haciéndolas variables, proporciona una rentabilidad independiente del momento de la amortización.

Para la determinación de una ley de formación de las mismas, esencial en este planteamiento, puede procederse de la manera siguiente. Sea:

C: nominal de cada título obligación.
V: precio de emisión del título.
n: duración, en períodos, de la operación.
i_s: rédito del período s. ($s = 1, 2, ..., n$).
P_s: prima de amortización del período s.
$C.\, i_s$: cupón de interés del período s.
N_s: número de títulos en circulación al principio del período s. El total de títulos emitidos N_1.
M_s: número de títulos que se amortizan en el período s.
r: tanto de rendimiento constante que se pretende conseguir.
C'_s: valor de reembolso de un título en el periodo s.

Considérese dos obligaciones, adquiridas en el origen por un valor de emisión V que resultan amortizadas, una al cabo de m períodos por un valor C'_m $(C'_m = C + P_m)$ y la otra al cabo de $m + h$ períodos por el valor C'_{m+h} $(C'_{m+h} = C + P_{m+h})$.

Para que ambas ofrezcan el mismo tanto de rentabilidad:

$$V = \sum_{s=1}^{m} C\, i_s (1 + r)^{-s} + C'_m (1 + r)^{-m}$$

$$V = \sum_{s=1}^{m+h} C\, i_s (1 + r)^{-s} + C'_{m+h} (1 + r)^{-(m+h)}$$

al igualar los segundos miembros resulta:

$$C'_{m+h} = C'_m (1 + r)^h - \sum_{s=m+1}^{m+h} C\, i_s (1 + r)^{m+h-s}$$

ecuación que deberá cumplirse para todo h y m, si se desea que todas las obligaciones produzcan el mismo tanto r.

Para $h = 1$ se tiene la siguiente ley de recurrencia:

$$C'_{m+1} = C'_m (1 + r) — C\, i_{m+1} \qquad [1]$$

o lo que es lo mismo:

$$C'_m = V(1 + r)^m - \sum_{s=1}^{m} C\, i_s (1 + r)^{m-s} \qquad [2]$$

con lo cual, una vez determinados los valores de reembolso C'_m, las correspondientes primas de amortización se obtendrán como:

$$P_m = C'_m - C$$

La anualidad a_s que amortiza el empréstito es:

$$a_s = C\, i_s\, N_s + (C + P_s)\, M_s$$

y al sustituir M_s por la diferencia $N_s — N_{s+1}$ se obtiene:

$$N_{s+1} - (1 + \frac{C\, i_s}{C + P_s})\, N_s = - \frac{a_s}{C + P_s}$$

ecuación en diferencias, lineal, de primer orden, completa y con coeficientes variables.

Para resolverla se efectúa el cambio de variables:

$$i_s = \frac{C\, i_s}{C + P_s} \quad \text{y} \quad a'_s = \frac{a_s \cdot C}{C + P_s}$$

que permite obtener la nueva ecuación:

$$C\, N_{s+1} - C\, (1 + i'_s)\, N_s = - a'_s$$

Su solución, con la condición inicial para $s = 0$, $N_s = N_1$ es:

$$C\, N_1 = \sum_{s=1}^{n} a'_s \prod_{h=1}^{s} (1 + i'_h)^{-1}$$

en donde se establece la equivalencia financiera en el origen. Al sustituir a'_s e i'_h por su valor se llega a:

$$C\, N_1 = \sum_{s=1}^{n} a_s \frac{C}{V} (1 + r)^{-s}$$

o

$$V\, N_1 = \sum_{s=1}^{n} a_s (1 + r)^{-s}$$

lo que significa que las anualidades a_s amortizan el capital efectivo de emisión $V\, N_1$ al tanto de rendimiento constante r, que es también el tanto del emisor, pudiendo calcularse las mismas sin recurrir al proceso de la normalización.

Las expresiones anteriores se simplifican notablemente si se considera un rédito periodal constante i.

Así, la expresión [2] para $i_s = i$, es:

$$C'_m = V(1+r)^m - C_i\, S_{\overline{m}|r} \qquad [3]$$

y

$$C'_1 = V(1+r) - C_i$$

con lo que las primas son:

$$P_m = C'_m - C = P_{m-1}(1+r) + C(r\text{-}i) = P_1(1+r)^{m-1} + C(r\text{-}i)\, S_{\overline{m-1}|r}$$

Esta expresión permite obtener las primas de amortización de cada período sin necesidad de determinar previamente los valores de reembolso (C'_m).

3. EMPRESTITO CON CUPONES EXTRAORDINARIOS

El objetivo de mantener una rentabilidad constante con independencia del valor de emisión y del momento de la amortización se logra en este nuevo empréstito a través de un cupón extraordinario pagadero a las obligaciones que permanecen vivas, mientras que las que se amortizan lo hacen por su valor nominal.

Sean dos obligaciones adquiridas en el origen de la operación a un mismo precio V que resultan amortizadas en los períodos s y $s+m$, respectivamente. Teniendo en cuenta las características del empréstito, ambas obligaciones recibirán además de los cupones ordinarios y del valor de reembolso, $s-1$ y $s+m-1$, cupones extraordinarios de cuantía $C\,t_s$. Como el tanto de rentabilidad ha de ser el mismo podrá escribirse:

$$V_s = \sum_{h=1}^{s} C\, i_h (1+r)^{-h} + C(1+r)^{-s} + \sum_{h=1}^{s-1} C\, t_h (1+r)^{-h} \qquad [4]$$

$$V_{s+m} = \sum_{h=1}^{s+m} C\, i_h (1+r)^{-h} + C(1+r)^{-(s+m)} + \sum_{h=1}^{s+m-1} C\, t_h (1+r)^{-h}$$

igualando los segundos miembros se tiene:

$$1 = \sum_{h=s+1}^{s+m} i_h (1+r)^{s-h} + (1+r)^{-m} + \sum_{h=s}^{s+m-1} t_h (1+r)^{s-h}$$

y para $m = 1$, resulta:

$$t_s = \frac{r - i_{s+1}}{1 + r} \quad \text{para } s = 1, 2, ..., n-1 \qquad [5]$$

Es importante advertir que $t_n = 0$, ya que en el momento n no deben quedar obligaciones vivas, con lo cual las M_n obligaciones que se amorticen en el período n, habrán recibido $n-1$ cupones extraordinarios.

La interpretación de la expresión [5] es evidente ya que al final del período s solamente reciben el cupón extraordinario las obligaciones en circulación.

Estas obligaciones ya han recibido s cupones que les aseguran la rentabilidad r hasta el final del año s, mientras que t_s en [5] es el valor en el punto s de la diferencia entre la rentabilidad r y el rédito i_{s+1} que recibirán las M_{s+1} obligaciones que se amoricen en $s + 1$, y que ya no recibirán ningún cupón extraordinario más.

Conviene tener en cuenta, además, que en el primer período se amortizan M_1 obligaciones que no van a recibir ningún cupón extraordinario, por lo cual estas M_1 obligaciones, para obtener el tanto r de rentabilidad deben ser adquiridas a un precio V:

$$V = \frac{C(1 + i_1)}{(1 + r)}$$

que es, por tanto, el precio de emisión de los títulos.

Con este precio V, las M_1 obligaciones que resulten amortizadas en el período 1 reciben el tanto r, mientras que las M_s obligaciones que resulten amortizadas en los restantes períodos tienen asegurada la rentabilidad r, con la percepción del cupón extraordinario.

La estructura del término amortizativo del período s es:

$$a_s = C\, i_s\, N_s + C\, M_s + C\, t_s\, (N_s - M_s)$$

o lo que es lo mismo:

$$a_s = C\, N_s\, (i_s + t_s) + C\, M_s\, (1 - t_s) \qquad [7]$$

en la que se refleja una característica comercial no convencional, es decir, se trata de una amortización seca parcial, ex-parte del último cupón.

Esta ecuación [7] se puede expresar como:

$$a_s = C\, N_s\, (i_s + t_s) + C\, (1 - t_s)\, (N_s - N_{s+1})$$

o sea:

$$C N_{s+1} = C N_s \frac{1 + i_s}{1 - t_s} - \frac{a_s}{1 - t_s}$$

ecuación en diferencias, lineal, de primer orden, completa y con coeficientes variables, que se resuelve con el cambio de variables:

$$i'_s = \frac{i_s + t_s}{1 - t_s} \quad \text{y} \quad a'_s = \frac{a_s}{1 - t_s}$$

y la solución con la condición inicial $N_s = N_1$ es:

$$C N_1 = \sum_{s=1}^{n} a'_s \prod_{h=1}^{s} (1 + i'_h)^{-1} \qquad [8]$$

ecuación de equivalencia financiera en el origen.

Al sustituir en ella a'_s e i'_h por su valor conduce a (*):

$$V N_1 = \sum_{s=1}^{n} a_s (1 + r)^{-s} \qquad [9]$$

ecuación que permite determinar a_s sin necesidad de «normalizar», ya que al ser r el tanto efectivo del conjunto de obligacionistas, la ecuación [9] representa en el primer miembro de la igualdad la prestación real de los obligacionistas; y en el segundo miembro, la contraprestación real.

En la expresión [6] se determina el valor de emisión para un i_1 fijado previamente y para un r dado, o también para un valor de emisión dado se determina r. No obstante, si se desea fijar previamente V y r a la vez, se debe recurrir a la adición de una prima de amortización constante.

En el caso en que exista una prima de amortización constante (P) para los M_s títulos que se amorticen en el período s, la cuantía del cupón extraordinario, que reciben las $N_s — M_s$ obligaciones que no resulten amortizados en dicho período es en este caso:

$$t_s = \frac{r - i_{s+1}}{1 + r} + \frac{P}{C} \frac{r}{1 + r}$$

y el precio de emisión resulta ser: $V = \dfrac{C(1 + i_1) + P}{1 + r}$, o, lo que es lo mismo: $P = V(1 + r) - C(1 + i_1)$.

La estructura del término amortizativo a_s es:

$$a_s = C i_s N_s + (C + P) M_s + C t_s (N_s - M_s)$$

con $M_s = N_s - N_{s+1}$ es una ecuación en diferencias, lineal, de primer orden, completa y con coeficientes variables, que se resuelve con el cambio de variables:

$$a'_s = \frac{C a_s}{C(1 - t_s) + P} \quad \text{e} \quad i'_s = \frac{C(i_s + t_s)}{C(1 - t_s) + P}$$

(*) Ver a este respecto el Anexo.

4. ESTUDIO COMPARADO

Resulta interesante *efectuar una comparación entre ambos tipos* de empréstito con objeto de determinar sus anologías y diferencias.

En el empréstito de Lenzi, y supuesto un rédito periodal constante, las primas de amortización siguen la ley de recurrencia [4]:

$$P_m = P_1 (1+r)^{m-1} + C(r-i)\, S_{\overline{m-1}|r} \qquad \forall r$$

En el empréstito con cupones extraordinarios y rédito constante, se verifica la exprexión [5]:

$$t_s = \frac{r-i}{1+r} \qquad \forall S \qquad [10]$$

es decir, t_s es constante para todos los períodos, y además:

$$V = \frac{C(1+i)}{1+r}$$

Al operar en [10] se obtiene:

$$(r-i) = t(1+r)$$

y al sustituir en [4]:

$$P_m = P_1 (1+r)^{m-1} + C\,t\,(1+r)\, S_{\overline{m-1}|r} = P_1 (1+r)^{m-1} + Ct\, \ddot{S}_{\overline{m-1}|r} \qquad [11]$$

De la ecuación [11] se deduce que la prima del empréstito de Lenzi en m contiene a la primera prima capitalizada al tanto r durante $m-1$ períodos y la renta prepagable de cupones extraordinarios valorada en m.

Conviene también relacionar dos empréstitos de Lenzi, con el mismo rédito i y la misma rentabilidad r con la diferencia en el precio de emisión, uno emitido al precio C, es decir, el nominal, y el otro, con un precio de emisión.

$$V = \frac{C(1+i)}{1+r}$$

Para obtener el mismo tanto r, ambos empréstitos han de generar una secuencia distinta de primas de amortización. Si se denota por P_s a la prima de amortización que reciben las obligaciones que fueron emitidas por el nominal, *y por* P'_s *a la prima para las obligaciones emitidas al precio* V, se deduce que:

$$P'_1 = V(1+r) - C(1+i) = C\frac{(1+i)}{1+r}(1+r) - C(1+i) = 0$$

es decir, no se recibe prima el primer año, con lo que las primas de los años sucesivos obtenidas a partir de [11] son:

$$P'_m = Ct\, \ddot{S}_{\overline{m-1}|r} \qquad [12]$$

Como:

$$P_1 = V(1+r) - C(1+i) = C(1+r) - C(1+i) = C(r-i)$$

Al sustituir en [4] resulta:

$$P_m = P_1 (1+r)^{m-1} + C(r-i)\, S_{\overline{m-1}|r} =$$
$$= C(r-i)(1+r)^{m-1} + C(r-i)\, S_{\overline{m-1}|r} = C(r-i)\, S_{\overline{m}|r}$$

De [12] se deduce que:

$$P'_{m+1} = C\, t\, S_{\overline{m}|r} = C(r-i)\, S_{\overline{m}|r} = P_m$$

es decir, la prima del período m + 1 para obligaciones emitidas al precio V es la misma que la del período m para obligaciones emitidas por el nominal.

El empréstito con cupones extraordinarios presenta una serie de ventajas e inconvenientes, entre los que se pueden señalar los siguientes:

VENTAJAS:

— Si se desea, por lo general, que $r > i$, las obligaciones deben emitirse a un precio V inferior al nominal, lo que hace la emisión atractiva para los suscriptores y para el emisor que se resiste a reconocer en los títulos el tipo de interés normal de mercado.

— El cupón extraordinario es también un premio sicológico para las obligacionistas que no han sido «afortunados» en el sorteo.

— En el caso de que el rédito i sea constante, los cupone extraordinarios son también constantes.

INCONVENIENTES:

— El precio V no puede ser arbitrario si se desea obtener un tanto r constante. Sin embargo, este inconveniente puede ser obviado con la introducción de una prima constante.

— El pago de estos cupones puede complicar la gestión normal del empréstito. De todas formas, esta complicación en la gestión no es mayor que la que supone el pago de las primas variables de Lenzi.

5. ANEXO

A partir de la ecuación [8]:

$$CN_1 = \sum_{s=1}^{n} a'_s \prod_{h=1}^{s} (1 + i'_h)^{-1}$$

desarrollando se tiene:

$$CN_1 = a'_1(1+i'_1)^{-1} + a'_2(1+i'_1)^{-1}(1+i'_2)^{-1} + \ldots + \\ + a'_n(1+i'_1)^{-1} \ldots\ldots (1+i'_n)^{-1}$$

La obtención separada de las a'_s es:

$$a'_1 = \frac{a_1}{1-t_1} = \frac{a_1(1+r)}{1+i_2}$$

$$(1+i'_1)^{-1} = (1+\frac{i_1+t_1}{1-t_1})^{-1} = \frac{1+i_2}{(1+r)(1+i_1)}$$

$$a'_2 = \frac{a_2}{1-t_2} = \frac{a_2(1+r)}{1+i_3}$$

$$(1+i'_2)^{-1} = (1+\frac{i_2+t_2}{1-t_2})^{-1} = \frac{1+i_2}{(1+r)(1+i_2)}$$

así sucesivamente hasta $s=n$. En este caso, al ser $t_n=0$, resulta $a'_n = a_n$ e $i'_n = i_n$, con lo cual:

$$CN_1 = \frac{a_1(1+r)}{1+i_2} \cdot \frac{1+i_2}{(1+r)(1+i_1)} + \frac{a_2(1+r)}{1+i_3} \frac{1+i_2}{(1+r)(1+i_1)} \frac{1+i_3}{(1+r)(1+i_2)} +$$

$$+ \ldots + a_n \frac{1+i_2}{(1+r)(1+i_1)} \ldots\ldots \frac{1+i_n}{(1+r)(1+i_{n-1})} \frac{1}{1+i_n} =$$

$$= \frac{a_1}{(1+i_1)} + \frac{a_2}{(1+r)(1+i_1)} + \frac{a_3}{(1+r)^2(1+i_1)} + \ldots + \frac{a_n}{(1+r)^{n-1}(1+i_1)} =$$

$$= \frac{1}{1+i_1}\left[a_1 + \frac{a_2}{(1+r)} + \frac{a_3}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(1+r)^{n-1}}\right] =$$

$$= \frac{1+r}{1+i_1}\left[\frac{a_1}{(1+r)} + \frac{a_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(1+r)^n}\right] = \frac{1+r}{1+i_1}\sum_{s=1}^{n} a_s(1+r)^{-s}$$

es decir:

$$\frac{1+i_1}{1+r} CN_1 = VN_1 = \sum_{s=1}^{n} a_s(1+r)^{-s} \qquad [9]$$

6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

GIL PELÁEZ: *Matemática de las operaciones financieras*. I. Rodagraf. Madrid, 1982.

LEVI, E.: *Curso de Matemática financiera y actuarial*. Ed. Bosh. Barcelona, 1973.

MENEU FERRER, V.: «La suscripción individual de obligaciones: Tantos de rentabilidad». *Esic-Market*. Enero-abril, 1979.

PRIETO PÉREZ, E.; *Análisis financiero de los empréstitos obligaciones*. Ed. I.C.E. Madrid, 1982.

RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ, A.: *Matemática de la financiación*. Ed. Universidad de Barcelona, 1974.