Análisis del riesgo en las operaciones financiero-aleatorias. Su repercusión en la estabilidad de la empresa financiera

Por

M.ª ANGELES GIL LUEZAS
M.ª LUISA MAESTRO MUÑOZ

INTRODUCCION

Toda operación financiera supone un intercambio no simultáneo de bienes económicos, esto es, el cambio de bienes actuales por otros cuya disponibilidad sólo será efectiva transcurrido un determinado periodo de tiempo.

El paso del tiempo es normalmente portador de riesgo, puesto que el futuro es por naturaleza incierto y, por tanto, toda operación financiera lleva inherente un determinado grado de riesgo.

Dentro de las operaciones financieras, nos interesa, pues, distinguir dos tipos de riesgos:

— Un riesgo indeterminado e incluido en todas las operaciones por el simple hecho de estar la disponibilidad de los capitales alejada en el tiempo y que queda recogido en el principio de subestimación de los capitales futuros.

— Otros riesgos determinados y concretos que, debido a su importancia, han de ser objeto de un tratamiento especial.

Las operaciones financieras en las que sólo existe el riesgo como consecuencia de su diferimiento, son las denominadas operaciones financieras ciertas, y en ellas, lógicamente, el riesgo es tanto mayor cuanto mayor es también su duración. Por el contrario, se denominan operaciones financiero-aleatorias a aquellas en las que además de este riesgo general, común para todas, existe alguna otra circunstancia de naturaleza aleatoria que afecta a los vencimientos o cuantías de los capitales que componen la operación, o bien a la duración de la misma.

Otra consideración que puede hacerse acerca del riesgo en la operación financiera es sobre los sujetos de la misma.

En la gran mayoría de las operaciones financieras uno de los sujetos que la realizan es una institución financiera dedicada a esta actividad. Esto hace que sea conveniente realizar un doble análisis del riesgo en las operaciones financieras: desde el punto de vista del individuo que contrata una operación aislada, y desde el punto de vista de la entidad financiera que realiza un gran número de operaciones de análogas características.

La entidad financiera define el riesgo de la operación de forma objetiva, esto es, partiendo de un conjunto de operaciones similares realizadas, mientras que el sujeto que contrata por separado una de estas operaciones, valora el riesgo ligado a ella en términos de incertidumbre, es decir, de forma subjetiva y a través de su función de utilidad.

Nos referimos en este trabajo a las operaciones que hemos llamado financiero-aleatorias, analizándolas desde las dos vertientes; primero como operaciones independientes o aisladas, y en segundo lugar, de forma conjunta, dando así entrada al problema de la estabilidad y solvencia de la entidad financiera.

Las operaciones financiero-aleatorias suponen un intercambio entre capitales, que no son conocidos de forma cierta, sino en términos de probabilidad, dependiendo su valor concreto del resultado de un suceso aleatorio.

Esto nos obliga en primer lugar a definir el capital financiero-aleatorio y a establecer relaciones de comparación entre los capitales ciertos y los aleatorios, y de estos últimos entre sí.

Siguiendo al profesor Gil Peláez, definimos el capital financiero-aleatorio como toda variable bidimensional $(\xi ; \eta)$ que representa a todos y cada uno de los posibles capitales asociados a los resultados de un fenómeno aleatorio. Siendo las variantes componentes unidimensionales ξ y η la cuantía aleatoria y el vencimiento aleatorio respectivamente.

Las decisiones de intercambio entre capitales aleatorios exigen el disponer de un criterio de valoración financiera (expresado mediante una ley financiera de valoración) que permita comparar capitales situados en dos puntos distintos del tiempo, y de un criterio estadístico o de utilidad para valorar los distintos resultados que puedan presentarse en un mismo momento del tiempo.

Dado un capital aleatorio $(\xi ; \eta)$ y fijado el criterio de valoración financiera mediante la ley completa F(t ; p), para cada posible concreción (c, t) de la variable $(\xi ; \eta)$ puede determinarse el capital equivalente en otro punto cualquiera τ.

$$\left\{(c ; t) \underset{F(t ; \rho)}{\sim} (c' ; \tau)\right\} \Leftrightarrow C' = C \frac{F(t ; \rho)}{F(\tau ; \rho)}$$

Manteniendo constante τ se obtiene un nuevo capital $(\xi' ; \tau)$ equivalente financieramente al $(\xi ; \eta)$ pero aleatorio únicamente en la cuantía:

$$(\xi ; \eta) \underset{F(t ; \rho)}{\sim} (\xi' ; \tau) \qquad \xi' = \xi \frac{F(\eta ; \rho)}{F(\tau ; \rho)}$$

Conocida la función de distribución de la variante $(\xi ; \eta)$

$$G(C ; \tau) = \text{prob}\,(\xi \leq C ; \eta \leq t)$$

podría inducirse la función de distribución correspondiente a la nueva variante unidimensional ξ'

$$G'(C) = \text{prob}\,(\xi' \leq C)$$

Entra ahora en juego el criterio estadístico de utilidad, para determinar qué cuantía cierta C_τ es equivalente a la aleatoria ξ'. Representando por $\varphi(C)$ la función que indica el criterio de utilidad y suponiendo la variable ξ' acotada entre los valores O_y C_m, la equivalencia:

$$(C_\tau ; \tau) \sim (\xi' ; \tau)$$

exige que:

$$C_\tau = \int_0^{C_M} \varphi(C)dG'(C)$$

El caso más usual es considerar la función $\varphi(C)$ constante

$$\varphi(C) = C$$

con lo que resulta:

$$C_\tau = \int_0^{C_M} CdG'(C) = E[\xi']$$

Es decir, que se considera al valor medio o esperanza matemática de la nueva variante ξ' como la cuantía cierta en τ equivalente al capital aleatorio $(\xi ; \eta)$.

Este criterio de sustitución entre $(\xi ; \eta)$ y $(E[\xi'] ; \tau)$ goza de la propiedad de ser equitativo, dado que las desviaciones respecto del mismo tienden a compensarse, y su aceptación por el sujeto económico supone adoptar una posición de neutralidad frente al riesgo. No obstante, podrían también aceptarse otras expresiones para la función de utilidad $\varphi(C)$.

En general, dos capitales aleatorios $(\xi_1 ; \eta_1)$ y $(\xi_2 ; \eta_2)$ se consideran equivalentes en base a una ley $F(t ; \rho)$ y a una función de utilidad si se verifica que sus equivalentes ciertos son, a su vez, capitales sustituibles entre sí:

$$\{(\xi_1 ; \eta_1) \sim (\xi_2 ; \eta_2)\} \Leftrightarrow \{(E[\xi'_1] ; \tau_1 \sim (E[\xi'_2] ; \tau_2)\}$$

ANALISIS DEL RIESGO EN UNA OPERACION FINANCIERO-ALEATORIA

La operación financiero-aleatoria se manifiesta como un intercambio de un conjunto de capitales por otro, con al menos un capital aleatorio en alguno de los conjuntos, y como todo intercambio implica un equilibrio bilateral o acuerdo mutuo entre las dos partes contratantes de la operación. Esto nos permite presuponer la existencia de una equivalencia entre ambos conjuntos de capitales de acuerdo con un criterio de sustitución (ley financiera más un criterio estadístico o de utilidad) previamente fijado.

Dada una operación financiero-aleatoria de prestación, el conjunto de capitales:

$$(\xi_1 ; \eta_1) ; (\xi_2 ; \eta_2) \dots (\xi_n ; \eta_n)$$

y de contraprestación:

$$(\xi'_1 ; \eta'_1) ; (\xi'_2 ; \eta'_2) \dots (\xi'_n ; \eta'_n)$$

utilizando como ley financiera $F(t ; \rho)$ y tomando como criterio estadístico el de la esperanza matemática, la equivalencia en un punto cualquiera vendrá dada por la siguiente ecuación:

$$\sum_{\rho=1}^{n} E[\xi_r^\tau] = \sum_{\rho=1}^{m} E[\xi_r'^\tau]$$

siendo:

$$\xi_r^\tau = \xi_r \frac{F(\eta_r ; \rho)}{F(\tau ; \rho)}$$

la variante unidimensional equivalente en τ al capital aleatorio $(\xi_r ; \eta_r)$.

Su valor se obtiene, pues, como la suma del resultado cierto de la parte de operación pasada (S' − S) más el resultado aleatorio de la parte de operación futura.

La segunda componente de este beneficio representa los posibles valores de la reserva matemática o saldo financiero de la operación por el método prospectivo y condicionada por S y S':

$$R_\tau = \sum_{\rho=\tau}^{m} \xi_\rho' \frac{F(\eta_\rho';\rho)}{F(\tau;\rho)} - \sum_{\rho=\tau}^{n} \xi_\rho \frac{F(\eta_\rho;\rho)}{F(\tau;\rho)} = \sum_{\rho=\tau}^{m} \xi_\rho'^{\tau} - \sum_{\rho=\tau}^{n} \xi_\rho^{\tau}$$

Cuyo valor medio $E[R_\tau] = \bar{R}_\tau$ puede considerarse como el capital cierto en τ que habría de entregarse a favor de la prestación o de la contraprestación según sea $R_\tau > 0$ ó $R_\tau < 0$ para cancelar la parte de operación pendiente.

El beneficio o pérdida que debe, pues, atribuirse a la operación futura (desde τ en adelante) y que denominaremos β_τ, estará constituido por la diferencia entre la contraprestación y prestación aleatorias futuras más el valor de la operación en ese punto, representado por la reserva R_τ. Así pues:

$$\beta_\tau = \sum_{\rho=\tau}^{m} \xi_\rho'^{\tau} - \sum_{\rho=\tau}^{n} \xi_\rho^{\tau} \pm R_\tau$$

El signo de R_τ será positivo o negativo según que fuese a favor o en contra de la contraprestación.

La esperanza de β_τ será nula, al igual que lo era $E[\beta]$ puesto que el valor de R_τ es precisamente el valor medio de los dos sumandos anteriores y actúa con signo inverso:

$$\bar{R}_\tau = E\left[\sum_{\rho=\tau}^{m} \xi_\rho'^{\tau} - \sum_{\rho=\tau}^{n} \xi_\rho^{\tau}\right]$$

y por consiguiente:

$$E[\beta_\tau] = \sum_{\rho=\tau}^{m} E[\xi_\rho'^{\tau}] - \sum_{\rho=\tau}^{n} E[\xi_\rho^{\tau}] \pm R_\tau = 0$$

Su varianza se determinaría de forma análoga a la citada para la variable beneficio en el origen β.

Es usual que la aleatoriedad afecte únicamente a los capitales de la prestación, o bien a los de la contraprestación, y también, tal como se dijo en la introducción, que uno de los sujetos contratantes sea una entidad financiera. Cabe considerar, asimismo, que el otro sujeto de la operación tenga una cier-

Esta equivalencia a priori entre los dos conjuntos de capitales objeto de intercambio, no tiene por que mantenerse una vez concretada la operación, obteniéndose una diferencia entre los valores ciertos de la prestación y contraprestación que expresaría el beneficio o pérdida obtenida respectivamente por cada uno de los sujetos contratantes de la operación.

La variable aleatoria β representativa de todos los posibles valores de este beneficio en el origen de la operación t_o vendrá definida por la siguiente expresión:

$$\beta = \sum_{r=1}^{m} \xi'_r \frac{F(\eta'_r\,;\rho)}{F(t_o\,;\rho)} - \sum_{r=1}^{n} \xi_r \frac{F(\eta_r\,;\rho)}{F(t_o\,;\rho)}$$

Esta variable beneficio se obtiene pues como una suma algebraica de otras (m + n) variables aleatorias, representativas, cada una de ellas, del valor en el origen de la operación de uno de los capitales aleatorios de la prestación o contraprestación, y su función de distribución será, por tanto, la inducida de éstas.

La esperanza matemática de la nueva variable β es la suma de las esperanzas de cada una de las variables que la definen, que en virtud de la equivalencia financiera de la operación anteriormente establecida resultará nula:

$$E[\beta] = \sum_{\rho=1}^{m} E[\xi'^{t_o}_r] - \sum_{\rho=1}^{m} E[\xi^{t_o}_r] = 0$$

Su varianza, en el supuesto de que los capitales aleatorios sean independientes entre sí, es también igual a la suma de las varianzas de las variables $\xi^{t_o}_r$ y $\xi'^{t_o}_r$:

$$\mathrm{Var}\,[\beta] = \sigma^2(\beta) = \sum_{\rho=1}^{m} \sigma^2[\xi'^{t_o}_r] - \sum_{\rho=1}^{n} \sigma^2[\xi^{t_o}_r]$$

En el caso de que las variables fuesen dependientes habría que tener en cuenta los momentos mixtos o covarianzas.

Situados en un punto τ intermedio de la operación, es decir, una vez transcurrido el período (t_o ; τ) podremos definir otra variable β' que representaría el beneficio o pérdida de la operación condicionado a los resultados obtenidos en la parte de operación ya realizada.

Denominando S al valor en τ de los capitales de la prestación ya realizados y por consiguiente ciertos y S' al mismo concepto, pero referido a la contraprestación, la expresión de β' será:

$$\beta' = \left(S' + \sum_{\rho=\tau}^{m} \xi'^{\tau}_r\right) - \left(S + \sum_{\rho=\tau}^{n} \xi^{\tau}_r\right) = (S' - S) + \left(\sum_{\rho=\tau}^{m} \xi'^{\tau}_r - \sum_{\rho=\tau}^{n} \xi^{\tau}_r\right)$$

ta aversión al riesgo, por lo que valoraria los capitales aleatorios de acuerdo con una función de utilidad que refleje tal actitud.

La equivalencia financiera de la operación, en este caso, habrá de verificarse en términos de utilidad, pero no necesariamente según el criterio estadístico de la esperanza matemática.

Esta circunstancia le permite a la entidad financiera incluir en la operación determinadas medidas, cuya finalidad sea reducir en parte el riesgo que lleva implícita.

Entre estas medidas cabe considerar la introducción de un coeficiente corrector al criterio de la esperanza matemática, y la modificación de la ley financiera para la valoración de los capitales aleatorios.

Con objeto de analizar la influencia de cada una de estas medidas, vamos a concretarnos en primer lugar al supuesto de que sea la prestación o conjunto de capitales que entrega la entidad, la que tenga el carácter de cierta. A dicha prestación la consideraremos en general definida por un único capital de cuantía C_0 y con vencimiento en el origen t_0 de la operación, ya que en cualquier otro caso siempre es posible, mediante la ley financiera correspondiente, determinar el equivalente en t_0 de todos los capitales que la constituyan.

Sea, pues, la operación aleatoria de prestación $(C_0\,;\,t_0)$ y contraprestación el conjunto de capitales financiero-aleatorios $(\xi_i\,;\,\eta_i)$ para $i = 1,2, \ldots n$.

Tomando como ley financiera la capitalización compuesta, cuyo factor sabemos que es:

$$\frac{F(t_1\,;\,\rho)}{F(t_2\,;\,\rho)} = (1+i)^{t_2-t_1}$$

y en base al criterio estadistico inicial de la esperanza matemática, la equivalencia en el origen de la operación vendrá dada por:

$$C_0 = \sum_{r=1}^{n} E[\xi_r(1+i)^{-\eta_r}]$$

que en el caso, aún más concreto, de que los capitales $(\xi_r\,;\,\eta_r)$ fueran sustituidos por otros con vencimiento cierto t_r, se transformaria en:

$$C_0 = \sum_{r=1}^{n} E[\xi_r]\,(1+i)^{-t_r}$$

y siendo la expresión de la variable aleatoria beneficio de la operación en este último caso:

$$\beta = \sum_{r=1}^{n} \xi_r(1+i)^{-t_r} - C_0 \Rightarrow E[\beta] = 0$$

Introducción de un coeficiente corrector

Este procedimiento para limitar el riesgo consiste en multiplicar la esperanza matemática de cada una de las variables ξ_r por un coeficiente α_r comprendido entre cero y la unidad, cuyo valor dependerá del grado de riesgo inherente a cada capital ξ_r. Cuanto mayor sea el riesgo de ξ_r menor ha de ser, lógicamente, el coeficiente α_r.

Introduciendo estos coeficientes la operación financiera quedaria modificada, pues sería menor la cuantía de la prestación que estaría dispuesta a intercambiar con los capitales de la contraprestación (ξ_r ; t_r). La nueva cuantía, denominada C_o^* se obtendría ahora a través de la ecuación:

$$C_o^* = \sum_{\rho=1}^{n} \alpha_r \, E[\xi_r] \, (1+i)^{-t_r}$$

esto repercutirá también en la variable β beneficio en el origen de la operación que vendrá definida ahora por la diferencia:

$$\beta_o^* = \sum_{\rho=1}^{n} \xi_r \, (1+i)^{-t_r} - C_o^* = \beta + (C_o - C_o^*)$$

La esperanza matemática de este nuevo beneficio no resulta ya nula sino positiva y de cuantía ($C_o - C_o^*$) a favor de la prestación, con la consiguiente reducción del riesgo para la entidad financiera, entendiendo éste como la posibilidad de obtener valores negativos para el beneficio β, es decir, pérdida en el conjunto de la operación:

$$E[\beta_*] = \sum_{\rho=1}^{n} E[\xi_r] \, (1+i)^{-t_r} - C_o^* = C_o - C_o^*$$

Sin embargo, la varianza de β^* no varía con respecto a la de β, por haberse incrementado todos los valores en la misma cuantía $C_o - C_o^*$. Así pues,

$$\sigma^2[\beta^*] = \sigma^2[\beta]$$

en el caso particular de que el coeficiente corrector α_r fuese constante, es decir, $\alpha = \alpha$, $\forall$ r resultará:

$$C_o^* = \alpha \sum_{\rho=1}^{n} E[\xi_r] \, (1+i)^{-t_r} = \alpha \, C_o$$

y

$$E[\beta^*] = C_o - \alpha \, C_o = C_o \, (1 - \alpha)$$

denominando $\gamma = 1 - \alpha$ puede escribirse:

$$C_o^* = C_o - C_o\,\gamma$$

donde $C_o\,\gamma$ es la cuantía en la que se reduce el capital cierto de la prestación, como consecuencia de la introducción del coeficiente α y que podríamos denominar prima de riesgo.

La aplicación de esta medida presenta el problema de especificar los valores de los coeficientes α_r, siendo lo más habitual que se determinen en función de la varianza $\sigma^2[\xi_r]$ de cada una de las variables ξ_r.

Así, por ejemplo:

$$\alpha_r = 1 - \lambda \frac{\sigma[\xi_r]}{E[\xi_r]}$$

con lo que:

$$C_o^* = \sum_{\rho=1}^{n} \left(1 - \lambda \frac{\sigma[\xi_r]}{E[\xi_r]} \right) E[\xi_r]\,(1+i)^{-t_r} =$$

$$= \sum_{\rho=1}^{n} E[\xi_r]\,(1+i)^{-t_r} - \lambda \sum_{\rho=1}^{n} \sigma[\xi_r]\,(1+i)^{-t_r} = C_o - \lambda \sum_{\rho=1}^{n} \sigma[\xi_r]\,(1+i)^{-t_r}$$

Cuando todas las variables ξ_r tienen la misma varianza, volveríamos al caso anteriormente considerado en el que α_r era constante $\alpha = \lambda\sigma[\xi]$.

Modificación de la Ley Financiera de Valoración

Un procedimiento alternativo del anterior es modificar la Ley Financiera de Valoración, de forma que el capital equivalente en t_o de cada posible valor de las variables ξ_r sea menor.

En lugar de aplicar el factor de actuación $(1 + i)^{-t}$ utilizaremos otro de expresión $(1 + i^*)^{-t}$, siendo $i^* = i + X$, donde X comprendido entre cero y la unidad representa el incremento en la tasa de actualización como consecuencia del riesgo, y por tanto podría denominársele tasa de riesgo.

En estas condiciones la cuantía cierta C_o^*, equivalente a la contraprestación aleatoria, es:

$$C_o^* = \sum_{\rho=1}^{n} E[\xi_r]\,(1+i)^{-t_r} = \sum_{\rho=1}^{n} E[\xi_r]\,(1+i+X)^{-t_r}$$

y la variable aleatoria beneficio en el origen:

$$\beta^* = \sum_{r=1}^{n} \xi_r (1 + i)^{-t_r} - C_o^*$$

La esperanza matemática de esta nueva variable será también positiva, por ser el factor $(1 + r)^{-t}$ decreciente con r.

$$E|\beta^*| = \sum_{r=1}^{n} E|\xi_r| (1 + i)^{-t_r} - C_o^* = C_o - C_o^* > 0$$

Y su varianza, tampoco variará en este caso respecto de la de β puesto que también aquí:

$$\beta^* = \beta + C_o - C_o^*$$

Tanto este criterio de modificación de la ley financiera, como el anterior de aplicar un coeficiente corrector, entrañan un elevado margen de subjetividad en la fijación de los coeficientes α_r o del incremento X en el parámetro i de la Ley Financiera de Valoración.

La diferencia fundamental entre ambos estriba en que el criterio de modificar la Ley Financiera contempla a la operación globalmente, mientras que el criterio de los coeficientes de corrección α_r contempla a cada uno de los capitales aleatorios $(\xi_r ; t_r)$ que intervienen en la operación de forma aislada.

En el caso de que exista una cierta correlación entre las variables ξ_r, sería conveniente contemplar la operación en conjunto, y en este sentido resultaría más adecuado la modificación o ajuste de la Ley Financiera de Valoración.

Sin embargo, este criterio presenta el inconveniente de que, al incrementar i en una cuantía constante, resultan coeficientes de correción α_r decrecientes, lo que no siempre concuerda con la realidad.

En efecto, el incremento en X del tanto i de la ley equivale para el capital $(\xi_r ; t_r)$ a un coeficiente de corrección:

$$\alpha_r = \frac{(1 + i + X)^{-t_r}}{(1 + i)^{-t_r}} = \frac{(1 + i)^{t_r}}{(1 + i + X)^{t_r}}$$

y de igual forma para $(\xi_{r+1} ; t_{r+1})$ tendríamos:

$$\alpha_{r+1} = \frac{(1 + i)^{t_r + 1}}{(1 + i + X)^{t_r + 1}} = \alpha_r \frac{1 + i}{1 + i + X}$$

y dado que $i + X > i$ resulta $\alpha_{r+1} < \alpha_r$

Para evitar este inconveniente podrían establecerse incrementos variables X_r en el tanto i de la ley inicial de valoración para cada uno de los capitales $(\xi_r ; t_r)$, siendo, $i_r^* = i + X_r$ el tanto de actualización para la variable ξ_r.

La equivalencia financiera quedaría entonces establecida por la expresión:

$$C_o^* = \sum_{r=1}^{n} E[\xi_r] (1 + i_r^*)^{-t_r}$$

Con lo que surge un inconveniente, quizá todavía mayor, pues obsérvese que esta operación sería de las denominadas complejas, por cuanto que no existe una única ley de valoración financiera que equilibre los compromisos de ambas partes, lo que plantea problemas de cara al tratamiento de la operación de forma conjunta.

Volviendo a la operación inicialmente planteada, consideremos ahora el caso contrario, es decir, que la institución financiera recibe una prestación formada por capitales ciertos a cambio de entregar otros de naturaleza aleatoria.

Si denominamos C'_o a la cuantía que recibe la entidad valorada en el origen t_o y $(\xi'_r ; t'_r)$ a los capitales aleatorios que entrega a cambio para $r = 1, 2, \ldots n$.

La equivalencia inicial, o en base a la esperanza matemática, sería:

$$C'_o = \sum_{r=1}^{n} E[\xi'_r] (1 + i)^{-t_r}$$

El coeficiente corrector habrá de ser ahora mayor que la unidad. Denominándolo $(1 + \xi_r)$ la ecuación de equivalencia modificada es:

$$C_o'^* = \sum_{r=1}^{n} (1 + \gamma_r) E[\xi'_r] (1 + i)^{-t_r} > C'_o$$

y la variable beneficio:

$$\beta'^* = C_o'^* - \sum_{r=1}^{n} \xi'_r (1 + i)^{-t_r}$$

que tendrá un valor medio:

$$E[\beta'^*] = C_o'^* - \sum_{r=1}^{n} E[\xi'_r] (1 + i)^{-t_r} = C_o'^* - C'_o > 0$$

y en el caso particular de que sea constante el coeficiente $(1 + \gamma)$ el resultado es:

$$C_o^{\cdot *} = (1 + \gamma)\sum_{r=1}^{n} E[\xi_r^{\cdot}]\,(1 + i)^{-t_r} = (1 + \gamma)\, C_o^{\cdot}$$

$$\beta^{\cdot *} = C_o^{\cdot *} - \sum_{r=1}^{n} \xi_r^{\cdot}(1 + i)^{-t_r}$$

y

$$E[\beta^{\cdot *}] = C_o^{\cdot *} - C_o^{\cdot} = C_o^{\cdot}\,\gamma$$

que como puede verse concuerda con el obtenido en el tipo de operación anteriormente estudiada, representanto en este caso $C_o^{\cdot}\,\gamma$ el incremento a exigir en la cuantía de la prestación como prima para reducir el riesgo.

Análogamente la modificación del tanto i de la Ley Financiera, debe hacerse en este caso en el sentido de disminuir su valor, siendo $i^* = i - X$ el nuevo tanto a aplicar.

$$C_o^{\cdot *} = \sum_{r=1}^{n} E[\xi_r^{\cdot}]\,(1 + i - X)^{-t_r}$$

$$E[\beta^{\cdot *}] = C_o^{\cdot *} - \sum_{r=1}^{n} E[\xi_r^{\cdot}]\,(1 + i)^{-t_r} = C_o^{\cdot *} - C_o^{\cdot} > 0$$

Por ser $(1 + r)^{-t_r}$ creciente al disminuir r.

Por último, en el caso de que tanto la prestación como la contraprestación fuesen de naturaleza aleatoria, cabría la posibilidad de aplicar estos criterios únicamente a una de las dos partes, consiguiéndose resultados similares a los obtenidos aquí para uno y otro de los dos supuestos analizados.

APLICACION A UN CASO PRACTICO

Como aplicación de estos criterios consideremos el siguiente ejemplo. Sea una operación de tres años de duración formada por los capitales aleatorios:

$$\text{Año 1} \;\ldots\ldots\ldots\; \xi_1 \begin{cases} 1.000 & P_1^1 = 0{,}10 \\ 1.500 & P_1^2 = 0{,}40 \\ 2.000 & P_1^3 = 0{,}40 \\ 2.500 & P_1^4 = 0{,}10 \end{cases}$$

$$\text{Año 2} \ \ldots\ldots\ldots \ \xi_2 \quad \left\{ \begin{array}{ll} 2.000 & P_2^1 = 0{,}20 \\ 2.300 & P_2^2 = 0{,}40 \\ 2.500 & P_2^3 = 0{,}20 \\ 2.800 & P_2^4 = 0{,}20 \end{array} \right.$$

$$\text{Año 3} \ \ldots\ldots\ldots \ \xi_3 \quad \left\{ \begin{array}{ll} 2.600 & P_3^1 = 0{,}20 \\ 3.000 & P_3^2 = 0{,}50 \\ 3.500 & P_3^3 = 0{,}20 \\ 4.000 & P_3^4 = 0{,}10 \end{array} \right.$$

Con Ley Financiera de Valoración $F(t\,;\rho) = (1 + 0{,}1)^{\rho - t}$.

Calculemos en primer lugar el capital cierto equivalente en el origen de la operación C_0 empleando como criterio de utilidad la esperanza matemática.

$$C_0 = \sum_{r=1}^{3} E[\xi_r]\,(1 + i)^{-r}$$

y dado que $E[\xi_1] = 1.750$; $E[\xi_2] = 2.380$, y $E[\xi_r] = 3.120$
resulta: $C_0 = 5.901{,}95$

Si la operación es equitativa, la variable aleatoria beneficio es igual:

$$\beta = \sum_{r=1}^{3} \xi_r (1 + i)^{-r} - C_0$$

y su valor medio es nulo:

$$E[\beta] = \sum_{r=1}^{3} E[\xi_r]\,(1 + i)^{-r} - C_0 = 0$$

con una varianza, en el supuesto de que las ξ_r sean independientes:

$$\sigma^2[\beta] = \sum_{r=1}^{3} \sigma^2[\xi_r]\,(1 + i)^{-2r}$$

$$\begin{array}{ll} \sigma^2[\xi_1] = 162.500 & \sigma[\xi_1] = 403{,}1 \\ \sigma^2[\xi_2] = 69.600 & \sigma[\xi_2] = 263{,}8 \\ \sigma^2[\xi_3] = 167.600 & \sigma[\xi_3] = 409{,}4 \end{array}$$

De donde la varianza de la variable beneficio es $\sigma^2[\beta] = 276.441$, y su desviación típica $\sigma[\beta] = 525{,}77$.

Supongamos ahora que el sujeto económico que recibe los capitales aleatorios es una entidad financiera que tiene la facultad de utilizar determinadas medidas para limitar el riesgo en la operación. Por ejemplo, puede introducir un coeficiente corrector constante $\alpha = 0{,}85$ en todos los capitales financiero-aleatorios, estimado en base a su experiencia.

En este caso el capital cierto que estaría dispuesto a entregar sería:

$$C_o^* = \alpha \sum_{r=1}^{3} E[\xi_r]\,(1 + 0{,}1)^{-r} = \alpha\, C_o = 5.016{,}6$$

La variable aleatoria beneficio sería en este caso:

$$\beta^* = \sum_{r=1}^{3} \xi_j (1 + 0{,}1)^{-r} - C_o^*$$

y su valor medio:

$$E[\beta^*] = C_o - C_o^* = C_o\, \gamma = 885{,}29 \text{ con } \gamma = (1 - \alpha) = 0{,}15$$

Es la cuantía en que excede el valor medio actualizado de los capitales aleatorios, a la cantidad cierta que se intercambia en el origen de la operación y que podemos considerar como prima de riesgo o precio que carga la entidad como consecuencia, exclusivamente, de la transferencia del riesgo. Si la entidad estimara más conveniente introducir unos coeficientes correctores variables, en función del riesgo de cada uno de los capitales aleatorios.

$$\alpha_r = 1 - \lambda \frac{\sigma[\xi_r]}{E[\xi_r]}$$

fijando, por ejemplo: $\lambda = 0{,}8$

$$C_o^* = C_o - \lambda \sum_{r=1}^{3} \sigma[\xi_r]\,(1 + i)^{-r} = 5.188{,}4$$

el beneficio esperado sería:

$$E[\beta^*] = C_o - C_o^* = 713{,}6$$

Por último, vamos a considerar que la entidad, con el fin de limitar el riesgo, opta por modificar la Ley Financiera de Valoración de los capitales financiero-aleatorios, incrementando la tasa de descuento $i = 10\ \%$ en un $x = 5\ \%$.

En estas condiciones el capital cierto equivalente en el origen de la operación sería:

$$C_o^* = \sum_{r=1}^{3} E[\xi_r]\,(1 + i^*)^{-r} = 5.372{,}8$$

La variable beneficio:

$$\beta^* = \sum_{r=1}^{3} \xi_r (1 + i)^{-r} - C_o^*$$

y su esperanza matemática:

$$E[\beta^*] = C_o - C_o^* = 529{,}13$$

Con cualquiera de las medidas apuntadas la entidad podrá limitar el riesgo de la operación; la elección de alguna de ellas, así como el establecimiento de los parámetros α, λ y X, plantea un problema de decisión que la entidad habrá de resolver en cada caso concreto.

ANALISIS DE LA ESTABILIDAD DE LA EMPRESA FINANCIERA

Por estabilidad entendemos aquella situación de la empresa en la que ésta es solvente para hacer frente a los compromisos contraídos a corto y largo plazo.

La empresa dedicada a la realización de operaciones financiero-aleatorias podrá, como cualquier otra, obtener un beneficio o pérdida como resultado de su gestión. Lógicamente la entidad hará una apreciación muy distinta de estos resultados, tratando de cubrirse de los negativos o pérdidas, puesto que su supervivencia depende de ello.

Si la empresa dispone de un fondo inicial F_o, que estará fundamentalmente compuesto por el capital propio más las reservas, y obtiene, en determinado momento, una pérdida de cuantía superior a la del fondo F_o, la empresa caerá en ruina y deberá cesar en su actividad.

Hasta ahora hemos realizado el estudio del riesgo en las operacines financiero-aleatorias de forma aislada, y definíamos la variable aleatoria β_i, beneficio de cada operación, en el origen y para el total de su duración, y la variable $\beta_{i\tau}$, beneficio de una operación, desde el momento τ en adelante.

Pues bien, si consideramos que todas las operaciones que realiza la empresa son equitativas, el valor medio de la variable aleatoria β, beneficio total de la empresa, obtenido como suma de los resultados de cada operación será nulo.

$$\beta = \sum_i \beta_i \qquad E[\beta] = \sum_i E[\beta_i] = 0$$

Sin embargo, el anularse $E[\beta]$ no es condición suficiente para garantizar la estabilidad de la empresa.

En efecto, en una serie infinita de juegos equitativos, la variable aleatoria, ganancia total, tiene valor medio nulo, pero puede tomar valores negativos incluso muy grandes en valor absoluto.

La probabilidad de que la variable aleatoria ganancia total tome un valor inferior a $-F_o$, se denomina probabilidad de ruina (para un fondo F_o) y se demuestra que si tienen lugar n juegos equitativos, la probabilidad de ruina para F_o fijo crece con n y tiende a 1 cuando n tiende a infinito.

Por tanto, y en base a este teorema, si la entidad realiza un gran número de operaciones aleatorias como juegos equitativos (es decir, en base al criterio de la esperanza matemática), tendría la casi certeza de arruinarse.

Si, por el contrario, la esperanza matemática de la variable toma un valor medio positivo, es posible determinar la cuantía del fondo F de manera que la probabilidad de ruina sea tan pequeña como se quiera.

En esta segunda parte del trabajo nos ocuparemos de las cuestiones relativas a la estabilidad de la institución financiera, haciendo uso de las denominadas «Teorías del Riesgo».

El objeto de toda teoría del riesgo, es el de proporcionar un modelo matemático de las fluctuaciones aleatorias de la variable beneficio que permita analizar las medidas a tomar para mantener la estabilidad. Se trata, en definitiva, de determinar cómo debe comportarse la institución para tener una alta probabilidad de no perder, es decir, de que $\beta \geq 0$, o por lo menos de no arruinarse, lo que exige $\beta \geq -F_o$ y haciendo esto compatible con una cierta equitatividad en las operaciones que realiza.

Entre las posibles formas de actuación para prevenir los efectos derivados de las desviaciones en la variable β, señalaremos los siguientes:

— En primer lugar, y de acuerdo con el principio de la división del riesgo, en igualdad de condiciones resulta preferible realizar muchas operaciones de pequeña cuantía, que un número menor de operaciones de cuantía elevada. Esta medida no soluciona por sí sola el problema de la estabilidad de la empresa, pero marca una línea de conducta a seguir, tratando de obtener una homogeneización cuantitativa de los riesgos, limitando la cuantía de cada una de las operaciones.

— Otra medida puede ser la alteración del principio de equivalencia (estableciendo coeficientes correctores, o bien modificando el tanto de valoración en una cuantía x) de forma que la esperanza matemática del beneficio dejase de ser nula, pasando a ser positiva.

— Creación de un fondo de garantía o reserva de estabilización.

— Cesión de parte de las operaciones a otra entidad financiera, con el fin de homogeneizar las cuantías y limitar el volumen total de riesgo que la empresa puede cubrir.

— Por último, y dado que la inestabilidad es muchas veces consecuencia de un problema coyuntural de liquidez, cabe considerar también la posibilidad de acudir a organismos públicos o consorcios, inter-entidades constituidas a este fin.

Pasamos a continuación a analizar cómo repercuten cada una de estas medidas en la estabilidad de la empresa.

Consideremos, en principio, que la empresa realiza n operaciones agrupadas en «k» categorías homogéneas:

$$n = n_1 + n_2 + \dots n_k$$

siendo n_j el número de operaciones realizadas de la categoría j.

Cada una de estas operaciones llevará asociada una variable β_{ij} que representa el beneficio aleatorio de la operación i-esima perteneciente a la categoría j y que tiene media cero $E[\beta_{ij}] = 0$ y varianza σ^2_{ij}.

La variable que define el beneficio total para la empresa es:

$$\beta = \sum_i \sum_j \sigma^2_{ij}$$

El conocimiento de la media y varianza de β nos permite obtener una primera aproximación de la probabilidad de ruina de la entidad, puesto que, mediante la desigualdad de Tchebycheff podemos determinar un límite inferior en la probabilidad de que las desviaciones de β respecto de su media sobrepasen un determinado nivel.

$$\text{prob}\,[|\beta - E(\beta)| > k] \leq \frac{\sigma^2[\beta]}{k^2}$$

No obstante, este resultado es poco significativo pues considera valores absolutos de las desviaciones en tanto que, a efectos de estabilidad, únicamente interesa la probabilidad de desviaciones negativas. Cuando el número de operaciones que realiza la entidad es suficientemente grande, al ser la variable beneficio total β suma de las variables asociadas a cada una de ellas, en virtud del Teorema Central del Límite, dicha variable suma tiende a la distribución normal.

En tal caso el valor de la desviación típica define totalmente la distribución, siendo posible determinar, con ayuda de las tablas, la probabilidad de desviaciones comprendidas en cualquier intervalo.

$$\text{prob}\left[(\beta - E(\beta)) \geq k\sigma\right] \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \varepsilon$$

Sin introducimos coeficientes correctores en las cuantías de los capitales, o modificamos la ley de forma que se obtenga una prima de riesgo unitaria para cada una de las categorías γ_j y suponiendo que dentro de éstas las operaciones son homogéneas, se verifica:

$$E[\beta^*_{ij}] = \gamma_j C_j \quad \text{y} \quad \sigma^2[\beta_{ij}] = \sigma_j^2$$

para cualquiera de las operaciones i pertenecientes a la categoría j.

En base a esto la variable beneficio total de la operación, pasará a ser:

$$\beta^* = \sum_j \beta^*_j$$

con

$$E[\beta^*] = \sum_{j=1}^{k} c_j\, \gamma_j\, n_j \quad \text{y} \quad \sigma^2[\beta] = \sum_{j=1}^{k} n_j \sigma_j^2 = \sigma^2$$

y la nueva probabilidad de ruina (supuesta la no existencia de fondos) que representaremos por P_1 vendrá dada por la expresión:

$$P_1 = \text{prob}\,(\beta^* < 0) = \text{prob}\left[\beta < -\sum_{j=1}^{k} c_j\, \gamma_j\, n_j\right]$$

Representando con λ_1 a la expresión:

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{j=1}^{k} c_j\, \gamma_j\, n_j}{\sigma} = \frac{\sum_{j=1}^{k} c_j\, \gamma_j\, n_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{k} n_j\, \sigma_j^2}}$$

se obtiene:

$$P_1 = \text{prob}(\beta < -\lambda_1\sigma)$$

probabilidad que podremos también acotar mediante el Teorema de Tchebicheff:

$$P_1 \leq \text{prob}[|\beta| > \lambda_1\sigma] \leq \frac{\sigma^2}{\lambda_1^2\sigma^2} = \frac{1}{\lambda_1^2}$$

o calcular directamente mediante las tablas de la normal N(0 ; 1) si se admite la aproximación $\beta \rightarrow N(0 ; \sigma)$.

$$P_1 = \text{prob}[\beta < -\lambda_1\sigma] \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt$$

Consideremos ahora que la entidad tiene constituido un fondo de estabilización F. En estas condiciones la probabilidad de ruina que representaremos por P_2 es:

$$P_2 = \text{prob}[\beta^* < -F] = \text{prob}\left[\beta < -F - \sum_{j=1}^{k} c_j \gamma_j n_j\right]$$

que podemos también escribir:

$$P_2 = \text{prob}[\beta < -\lambda_2\sigma]$$

con:

$$\lambda_2 = \frac{F + \sum_{j=1}^{k} c_j \gamma_j n_j}{\sigma} = \frac{F + \sum_{j=1}^{k} c_j \gamma_j n_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{k} n_j \sigma_j^2}}$$

Una cota de esta probabilidad es $P_2 \leq \frac{1}{\lambda_2^2}$ obtenida por la desigualdad de Tchebicheff, y en el caso de suponer la aproximación normal:

$$P_2 \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_2}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt$$

Cuanto mayores sean los valores de λ_1 y λ_2 menor será la probabilidad de ruina para la entidad, y, en cualquier caso, ésta siempre será menor que su inverso elevado al cuadrado. Por ello, los coeficientes λ_1 y λ_2 pueden considerarse como índices de estabilidad de la cartera de operaciones que representan.

También es posible plantear el problema contrario, es decir, ¿cómo debe fijarse el fondo F o la prima unitaria de riesgo γ para que las probabilidades de ruina P_1 ó P_2 sean inferiores a un determinado nivel ε?

Bajo la hipótesis de normalidad, de las expresiones:

$$P_1 = \text{prob}[\beta < -\lambda_1\sigma] \leq \varepsilon$$

$$P_2 = \text{prob}[\beta < -\lambda_2\sigma] \leq \varepsilon$$

se obtienen los límites inferiores de λ_1 y λ_2 respectivamente, o bien, $\lambda_1 > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}$ y $\lambda_2 > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}$ si sólo se tiene en cuenta la desigualdad de Tchebicheff.

Una vez determinados λ_1 y λ_2, para unos valores fijos de γ_j, n_j, c_j y σ_j^2, se deduce inmediatamente el límite inferior para F:

$$F \geq \lambda_2\sigma - \sum_{j=1}^{k} c_j\, \gamma_j\, n_j$$

si por el contrario se considera el valor de F como dato, las expresiones de λ_1 y λ_2 se convierten en ecuaciones con K incógnitas, que son los valores de γ_j:

$$\lambda_1 \leq \frac{\sum_{j=1}^{k} c_j\, \gamma_j\, n_j}{\sigma} \qquad \lambda_2 \leq \frac{F + \sum_{j=1}^{k} c_j\, \gamma_j\, n_j}{\sigma}$$

para $\gamma_j = \gamma\, \forall_j$ se obtiene::

$$\gamma \geq \frac{\lambda_1\sigma}{\sum_{j=1}^{k} c_j\, n_j} \qquad \text{o} \qquad \gamma \geq \frac{\lambda_2\sigma - F}{\sum_{j=1}^{k} c_j\, n_j}$$

Otra de las medidas enunciadas para favorecer la estabilidad era la cesión de parte de las operaciones a otra entidad financiera.

Suponiendo que se ceda un porcentaje δ de todas las operaciones, el valor medio del beneficio se transforma en:

$$E[\beta^*] = (1 - \delta)\sum_{j=1}^{k} c_j\, \gamma_j\, n_j$$

y la desviación típica:

$$\sigma^* = (1-\delta)\sqrt{\sum_{j=1}^{k} n_j\,\sigma_j^2} = (1-\delta)\sigma$$

por tanto λ_1 no varía, mientras que λ_2 para un Fondo dado F aumenta, en este segundo caso se obtiene, pues, una disminución de la probabilidad de ruina, pero acompañada también de una disminución en la ganancia media, si bien esto último podría evitarse destinando la cuantía total cedida a la realización de nuevas operaciones, de modo que el capital total en riesgo se mantenga constante.

En lugar de n_j, operaciones de cuantía c_j, podrían contratarse $n_j' = \frac{n_j}{1-\delta}$ operaciones, que se ceden en un porcentaje δ. Con esto el valor medio del beneficio permanece constante:

$$E[\beta^*] = (1-\delta)\sum_{j=1}^{k} c_j\,\gamma_j\,n_j' = \sum_{j=1}^{k} c_j\,\gamma_j\,n_j$$

manteniéndose el aumento del coeficiente λ_2:

$$\lambda_2 = \frac{F + \sum_{j=1}^{k} c_j\,\gamma_j\,n_j}{(1-\delta)\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{1-\delta}\sigma_j^2}} = \frac{F + \sum_{j=1}^{k} c_j\,\gamma_j\,n_j}{\sqrt{(1-\delta)\sum_{j=1}^{k} n_j\,\sigma_j^2}}$$

Otra posibilidad sería ceder de cada operación únicamente la parte de capital en riesgo que sobrepase un determinado nivel, consiguiéndose de este modo una homogeneización en estos capitales y consiguientemente un aumento de la estabilidad.

En efecto, si suponemos que todas las operaciones tienen análogas características pero diferentes cuantías, la varianza de la variable beneficio por unidad de capital, sería constante para todas las operaciones, y la representaremos por σ_1. En este caso el índice de estabilidad λ_2 troma la siguiente expresión:

$$\lambda_2 = \frac{F + \gamma\sum_{j=1}^{k} c_j\,n_j}{\sigma_1\sqrt{\sum_{j=1}^{k} n_j\,c_j^2}} \simeq \frac{F + \gamma\,n\,\overline{c}}{\sigma_1\sqrt{n\,\overline{c}^2}}$$

donde $\bar{c}$ y $\bar{c}^2$ representan el valor medio de las cuantías c_j y el valor medio del cuadrado de dichas cuantías.

$$c = \frac{\sum_{j=1}^{k} c_j \, n_j}{n} \quad \text{y} \quad c^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} c_j^2 \, n_j}{n}$$

Entre los valores de $\bar{c}$ y $\bar{c}^2$ se da la siguiente relación:

$$\mathrm{Var}[c] = \sigma_c^2 = \bar{c}^2 - (\bar{c})^2 \qquad \bar{c}^2 = \sigma_c^2 + (\bar{c})^2$$

sustituyendo c^2 en función de la varianza de c en la expresión de λ_2 resulta:

$$\lambda_2 = \frac{F + \gamma \, n \, \bar{c}}{\sigma_1 \sqrt{n[\sigma_c^2 + (\bar{c})^2]}}$$

permaneciendo constante el capital total $\sum_{j=1}^{k} c_j \, n_j$ y el número de operaciones y por tanto los valores medios $\bar{c}$ y $\bar{c}^2$, el índice de estabilidad λ_2 es función inversa de σ_c^2.

La estabilidad de una cartera de operaciones, será pues tanto mayor cuanto menor sea la varianza de las cuantías de sus capitales, o lo que es lo mismo, cuanto mayor sea su grado de homogeneidad, tomando su valor máximo cuando la varianza de los capitales es nula, o sea cuando los capitales son todos iguales permaneciendo constantes el resto de las condiciones.

Respecto a la última medida enunciada de acudir a organismos públicos para solventar problemas de liquidez, diremos que no todas las empresas tienen las mismas posibilidades, y, en cualquier caso, tampoco es una medida susceptible de una formulación matemática empírica.

Para un mismo valor exigido a los índices de estabilidad, hemos visto distintas posibilidades de actuación por parte de la entidad: cabe actuar sobre las primas de riesgo, sobre el fondo de estabilización o ceder una parte de las operaciones tendiendo a conseguir una mayor homogeneización en las mismas; la elección de la combinación más adecuada deberá resolverse dando entrada también a criterios económicos de decisión.

El análisis de estabilidad, tal y como lo hemos realizado, es válido para un conjunto de operaciones estático, pudiendo aplicarse para toda la duración de las operaciones, a partir de un determinado punto en adelante o incluso para un solo periodo, pero no permite dar entrada a la realización de nuevas operaciones, ni a la rescisión de alguna de las existentes. En el caso de que la cartera de operaciones varíe, es necesario plantear de nuevo el problema de la estabilidad introduciendo las variaciones.

No obstante, existen otras teorías como la Teoría del Riesgo Colectivo, o la Teoría de la Ruina del Jugador, en las que se consideran carteras abiertas, es decir, carteras en las que entran continuamente nuevos contratos, pero su desarrollo excede los límites de este trabajo.

APLICACION AL ANTERIOR CASO PRACTICO

Consideremos que de todas las operaciones que realiza una entidad, existe un grupo homogeneo con un número suficientemente grande de operaciones, independientes entre sí, cuyas características sean precisamente las señaladas en el ejemplo expuesto anteriormente; esto es, operaciones en las que, contra la entrega de un capital cierto en el origen de la operación, por parte de la entidad, ésta recibe durante tres años los capitales ξ_1; ξ_2 y ξ_3, respectivamente, y los valora con arreglo a la Ley Financiera $F(t;\rho) = (1 + 0{,}1)^{\rho - t}$.

Suponiendo, en primer lugar, que estas operaciones sean equitativas, el valor medio de la variable beneficio total de la empresa para este grupo, que supondremos formado por 100 operaciones, será nulo:

$$E[\beta] = n\, E[\beta_1] = 0 \quad \text{dado que} \quad E[\beta_1] = 0$$

con una varianza suma de varianzas:

$$\sigma^2[\beta] = n\, \sigma^2[\beta_1] = 27.644.100$$

$$\sigma[\beta] = 5.257{,}7$$

Vamos a calcular ahora la probabilidad de que se presenten desviaciones de forma que el beneficio sea negativo. Puesto que se dan todos los requisitos para que la variable β se distribuya según la ley normal, podemos comprobar que la probabilidad de ruina de la empresa es justamente el 50 %.

$$\text{prob}[\beta < 0] = 0{,}5$$

Ahora bien, en el caso más frecuente de que la entidad disponga de unos fondos de reserva F, ésta se arruina cuando la pérdida es superior a dicho fondo:

$$\text{prob}[\beta < -F] = \text{prob}[\beta > F] = 0{,}5 - \text{prob}[\beta < F]$$

Suponiendo que el fondo para este grupo de operaciones ascienda, por ejemplo, a F = 10.000 pts., la probabilidad de ruina sería:

$$\text{prob}[\beta < -10.000]$$

tipificando la variable:

$$\text{prob}\left[\beta < \frac{-10.000}{5.257,7}\right] = \text{prob}[\beta < -1,9] = 0,0287$$

Si la entidad financiera ha utilizado cualquiera de las medidas que señalamos anteriormente para limitar el riesgo en cada operación, lógicamente la probabilidad de ruina se reduce, haciéndose, en nuestro caso, prácticamente nula, en efecto, suponiendo que haya introducido un coeficiente corrector constante $\alpha = 0,85$, recordemos que:

$$E[\beta_1^*] = m = C_o\,\gamma = 885,29$$

era la prima de riesgo de una operación.

Su cuantía para el conjunto de operaciones del grupo será:

$$E[\beta^*] = n \cdot m = 88.529$$

y la probabilidad de ruina:

$$P_1 = \text{prob}[\beta^* < 0] = \text{prob}[\beta < -C_o\,\gamma\,n]$$
$$P_1 = \text{prob}[\beta \leq -16,8\,\sigma] \simeq 0$$

Limitándonos al caso de que la entidad haya alterado el principio de equivalencia, cargando unas primas de riesgo cuya cuantía total sea:

$$n\,C_o\,\gamma = 590.195 \times 0,025 = 14.754,875$$

vamos a tratar de fijar el fondo inicial para que la probabilidad de ruina P_2 sea inferior a un $\varepsilon = 0,0005$.

$$P_2 = \text{prob}[\beta \leq -(F + n\,C_o\,\gamma)] \leq 0,0005$$
$$P_2 = \text{prob}[\beta \leq -\lambda_2\,\sigma] \leq 0,0005$$

siendo:

$$\lambda_2 = \frac{F + 14.754,87}{5.257,7}$$

Mediante tabla obtenemos $\lambda_2 = 3,31$ y despejando en su expresión se obtiene la cuantía mínima del fondo de estabilidad:

$$F \geq 2.648,11$$

Si tratamos de fijar la prima de riesgo unitaria γ para que la probabilidad de ruina P_1 o P_2, según consideremos la existencia o no de un fondo inicial dad, sea como máximo $\varepsilon = 0{,}0005$:

$$P_1 = \text{prob}(\beta \leq - \lambda_1 \sigma) \leq 0{,}0005 \qquad \lambda_1 = 3{,}31$$

Dado que: $\lambda_1 = \dfrac{n\, C_o\, \gamma}{\sigma} = \dfrac{590.195\ \gamma}{5.257{,}7}$

se obtiene:

$$\gamma \geq 0{,}0295$$

supuesto que la entidad disponga de un fondo $F = 10.000$

$$P_2 = \text{prob}(B \leq - \lambda_2 \sigma) \leq 0{,}0005 \qquad \lambda_2 = 3{,}31$$

y dado que:

$$\lambda_2 = \frac{F + n\, C_o\, \gamma}{\sigma}$$

se obtiene:

$$\gamma \geq 0{,}125$$

Considerando esta última hipótesis, que supone la existencia de un fondo de estabilidad $F = 10.000$, una prima de riesgo unitaria $\gamma = 0{,}01254$ y un beneficio medio:

$$E[\beta] = n\, C_o\, \gamma = 7.401{,}05$$

Si la entidad cede un porcentaje $\delta = 0{,}10$ de todas sus operaciones, el beneficio medio se reduce:

$$E[\beta^*] = (1 - \delta)\, n\, C_o\, \gamma = 6.661$$

al igual que su desviación típica:

$$\sigma^* = 0{,}9\ \sigma = 4.731{,}93$$

aumentando el índice de solvencia, con la consiguiente reducción en la probabilidad de ruina:

$$\lambda_2 = \frac{F + (1 - \delta)\, n\, C_o\, \gamma}{(1 - \delta)\, \sigma} = 3{,}52$$

$$P_2 = \text{prob}[\beta \leq - 3{,}52] = 0{,}0002$$

Ahora bien, si queremos mantener constante el beneficio medio, podemos aumentar el número de operaciones hasta:

$$n' = \frac{n}{1-\delta} \simeq 111$$

y de esta forma, con un capital en riesgo igual al existente antes de la cesión, mantenemos el incremento en el índice de estabilidad y la misma reducción en la probabilidad de ruina:

$$\lambda_2 = \frac{F + (1-\delta)\, n'\, C_o\, \gamma}{\sigma\sqrt{n(1-\delta)}} = 3{,}49$$

$$P_2 = \text{prob}[\beta \leq -3{,}49] = 0{,}0002$$

BIBLIOGRAFIA

GIL PELAEZ, L.: «Matemática de las operaciones financieras». Impreso por Rodagraf.

LEVI, E.: «Curso de matemática financiera y actuarial». Tomos I y II. Ed. Bosch.

NIETO DE ALBA, U.: «Teoría matemática del seguro». Apuntes de cátedra. F.CC.EE.

PRIETO PÉREZ, E.: «Teoria d ela inversión». Ed. ICE. «El reaseguro. Función económica». Ed. ICE.