Trabajos de Colaboración

«Sobre la construcción de funciones de elasticidad variable según ley prefijada»

Por Leoncio FERNANDEZ MAROTO

Sabido es el papel fundamental que representa en las aplicaciones económicas el concepto de elasticidad de una función (*). Ello es debido a que en dichas aplicaciones reviste a veces más interés, cuando se estudian las relaciones de dependencia entre magnitudes económicas, el comportamiento de los incrementos relativos o porcentajes que el de los incrementos absolutos. La elasticidad $E(y/x)$ de una función $y = f(x)$ viene dada, según se sabe, por el límite del cociente de incrementos relativos, por lo que tiene, en el punto x, la siguiente expresión:

$$E(y/x) = \frac{dy}{y} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \qquad [1]$$

es decir, es igual a la derivada de la función en dicho punto, multiplicada por el cociente de la variable independiente por la función, en el punto considerado.

En la teoría económica general y, en particular, en la teoria matemática de los ingresos públicos, interesa a veces hallar la expresión analítica de funciones sencillas que cumplan la condición de que su elasticidad varíe según una ley prefijada: lineal, cuadrática, polinómica en general, etc. El

(*) Véase, p. ej., *Econometría*, de E. Chacón, o *Mathematical Analysis for Economists*, de R. G. D. Allen.

objeto de este trabajo es indagar la solución matemática general de este problema y particularizarla para algunos casos sencillos que pueden tener importancia en las aplicaciones económicas o fiscales (**).

Consideremos primeramente el caso de funciones de una variable. Si la elasticidad E(y/x) ha de variar según una ley prefijada $\varphi(x)$, en función de la variable independiente **x**, tendremos:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \varphi(x) \qquad [2]$$

ecuación diferencial ordinaria en la que, separando variables tenemos

$$\frac{dy}{y} = \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \qquad [3]$$

por lo que

$$\ln y = \int \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + C$$

y en definitiva será:

$$y = e^{\int \frac{\varphi(x)}{x} dx + C} = Ae^{\int \frac{\varphi(x)}{x} dx} \qquad [4]$$

habiendo puesto $e^C = A$.

Hemos obtenido así la expresión general de las funciones *y*, cuya elasticidad es una función determinada, $\varphi(x)$, de la variable independiente.

Ejemplos:

a) En el caso extremo de que $\varphi(x)$ sea constante, es decir, no dependa de x, tendremos:

$$y = Ae^{\int \frac{k}{x} \cdot dx} = Ae^{k \ln x} = A\, x^k \qquad [5]$$

(**) Véase L. Fernández Maroto, "Sobre la construcción de escalas tributarias con una medida prefijada de progresividad puntual". *Técnica Económica*, año VI, núm. 2, 1961, pp. 35-42.

expresión potencial que representa las funciones de elasticidad constante k.

b) Sea $\varphi(x) = ax + b$, es decir, queremos hallar la expresión genérica de las funciones cuya elasticidad varía en función lineal de x. Será:

$$y = Ae^{\int \frac{ax+b}{x} dx} = Ae^{ax+b \ln x} = Ae^{ax}x^{b} \qquad [6]$$

sencilla función de tipo mixto, exponencial potencial, que puede ser de viable empleo en las aplicaciones. La constante b representa, evidentemente, la elasticidad en el origen. Según que $a \gtrless 0$, la elasticidad de [6] será, de manera respectiva, creciente o decreciente.

c) Caso de variación parabólica: $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$. Tendremos:

$$y = Ae^{\int \frac{ax^2+bx+c}{x} dx} = Ae^{\frac{ax^2}{2}} \quad x^c \qquad [7]$$

función que permite matizar con mayor suavidad que la ley lineal el crecimiento o decrecimiento de la elasticidad y, en consecuencia, el comportamiento de los incrementos relativos de la función con respecto a los de la variable independiente.

d) Caso de variación polinómica. En tal supuesto será $\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n$. Sin dificultad se obtiene:

$$y = Ae^{\left(a_1x + \frac{a_2}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n}x^n\right)} x^{a_0} \qquad [8]$$

que es la generalización natural de (6) y (7).

En general, puede decirse que las expresiones particulares que resulten de [4] serán más o menos complicadas según las posibilidades de integración de la diferencial $\frac{\varphi(x)}{x}$ dx, y que en las aplicaciones serán de preferente uso las expresiones más sencillas o más accesibles al cálculo, dentro de las finalidades previstas.

Trataremos ahora el caso de funciones de varias variables. Sin perjuicio de generalización posterior al caso de n variables, consideremos primero, por razones de sencillez, el caso de la función $z = f(x_1, x_2)$. Si las elasticidades parciales de la misma han de variar según leyes prefijadas $\varphi_1(x_1)$ y $\varphi_2(x_2)$ en función de las respectivas variables independientes x_1 y x_2, habrá de verificarse, en virtud de dicha hipótesis y de la definición de elasticidades parciales, que

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{z} &= \varphi_1(x_1) \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{z} &= \varphi_2(x_2) \end{aligned}\right\} \qquad [9]$$

o bien

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= \frac{z}{x_1}\, \varphi_1(x_1) \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} &= \frac{z}{x_2}\, \varphi_2(x_2) \end{aligned}\right\} \qquad [10]$$

sistema completamente integrable, porque la condición de integrabilidad

$$\frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{\partial A}{\partial z} B = \frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial z} A \qquad [11]$$

en la que

$$A = \frac{z}{x_1}\, \varphi_1(x_1)$$

$$B = \frac{z}{x_2}\, \varphi_2(x_2)$$

se reduce a una identidad como se comprueba fácilmente. La integración del sistema [10] se realiza (*) integrando la primera de las [10] considerada como ecuación diferencial ordinaria en x_1 y z, lo cual conduce, dada su identidad esencial con la [2] del caso de una variable, a la expresión

$$z = u e^{\int \frac{\varphi_1(x_1)}{x_1} dx_1} \qquad [12]$$

en que u ha de ser función de x_2, que se determina por la condición que ha de satisfacer, de cumplir la segunda de las [10]. En seguida se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{u}{x_2} \varphi_2(x_2) \qquad [13]$$

esencialmente idéntica a las [10] y [2]. En consecuencia,

$$u = A e^{\int \frac{\varphi_2(x_2)}{x_2} dx_2}$$

por lo cual, en [12] será

$$z = A e^{\int \frac{\varphi_1(x_1)}{x_1} dx_1 + \int \frac{\varphi_2(x_2)}{x_2} dx_2} \qquad [14]$$

con A constante arbitraria. La [14] es pues, la integral buscada del sistema [10].

En el caso de n variables, se plantea análogamente el sistema

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{z}{x_i} \varphi_i(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n) \qquad [15]$$

que es completamente integrable, pues las condiciones de integrabilidad

(*) Véase, p. ej., D. Marín Toyos, *Ecuaciones Diferenciales*, p. 384.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial z} \cdot f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial z} \cdot f_i$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

en que

$$f_i = \frac{z}{x_i} \varphi_i(x_i)$$

se reducen todas a la identidad

$$\frac{\varphi_i(x_i)}{x_i} \cdot \frac{\varphi_k(x_k)}{x_k} \cdot z = \frac{\varphi_k(x_k)}{x_k} \cdot \frac{\varphi_i(x_i)}{x_i} \cdot z$$

Se ve claramente, por analogía e iteración del procedimiento expuesto para dos variables, que la solución del caso general de n variables viene dada por

$$z = Ae^{\sum_1^n \int \frac{\varphi_i(x_i)}{x_i} dx_i} \qquad [16]$$

expresión general de las funciones de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con elasticidades parciales prefijadas $\varphi_i(x_i)$, $(i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ respecto de cada una de dichas variables.

Ejemplos:

a) Caso de que $\varphi(x_i) = k_i$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$, obtenemos

$$z = Ae^{\sum^n \int \frac{k_i}{x} dx_i} = Ax_1^{k_1} \, x_2^{k_2} \ldots\ldots x_n^{k_n} \qquad [17]$$

función que presenta elasticidades parciales k_i constantes respecto de todas sus variables x_i.

b) Si $n = 2$, siendo $\varphi_1(x_1) = a_1x_1 + b_1$, y $\varphi_2(x_2) = a_2x_2 + b_2$ se llega sin dificultad a

$$z = Ae^{a_1x_1 + a_2x_2} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \qquad [18]$$

cuya función tiene elasticidades parciales que varían linealmente con relación a la respectiva variable independiente.

Análogamente se desarrollarían los ejemplos c) y d) anteriormente expuestos en el caso de variable única, e idéntica consideración cabe hacer respecto de las expresiones obtenidas en el caso de n variables, con relación a su estructura analítica, que dependerá de las posibilidades de integración de la suma de diferenciales

$$\sum_{1}^{n} \int \frac{\varphi_i(x_i)}{x_i} \, dx_i$$

que interviene en [16].