Cálculo de Seguros de vida en progresión geométrica

(Continuación)

Por

AGUSTIN SANS Y DE LLANOS

En el número 24 de los Anales del IAE, correspondiente al año 1984, se publicó un trabajo de colaboración con el mismo título que el presente y en cuya presentación ya anunciaba que iría dando a conocer nuevas contribuciones al tratamiento actuarial de los seguros con prestación creciente exponencialmente (campo continuo), o geométricamente (campo discreto).

Este nuevo trabajo presenta los resultados a que se llega en el campo de las Rentas de Supervivencia con Expansión, siendo de advertir que se respetan las notaciones introducidas en el publicado en el citado número de los Anales.

Y se ha pensado que la presentación más cómoda para el lector es la adoptada, consistente en dar a conocer, inicialmente, la prima única generalizada con expansión doble de una Renta de Supervivencia que se causa si la cabeza de edad inicial (x) muere en el intervalo (0;n) y si le sobrevive otra de edad inicial (y).

Tras el análisis de los diversos casos que pueden plantearse, se aportan ejemplos de cálculo.

Al final, en dos notas, se da a conocer el proceso de integración que conduce a las fórmulas de las primas únicas y que, por ofrecer alguna complejidad, hubiera dificultado la lectura a aquél que no dèsee conocer más que las fórmulas finales.

RENTA DE SUPERVIVENCIA. PRIMA UNICA GENERALIZADA CON EXPANSION: EJEMPLOS CIFRADOS

Tiene la siguiente expresión:

$$(v\bar{a})_{x/y} = \int_0^n e^{-\delta \cdot t} \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \cdot {}_tp_y \cdot e^{\theta t} \cdot \int_0^\infty e^{-\eta \cdot u} \cdot e^{\theta' \cdot u} \cdot {}_up_{y+t} \cdot du$$

siendo:

n = plazo en que (x) está expuesto a morir.

δ = tipo de interés mientras viven (x) e (y).

η = tipo de interés para valorar la renta a favor de (y).

θ = tasa de expansión mientras viven (x) e (y).

θ' = tasa de expansión para la renta a favor de (y).

A) Falleciendo (x) en (0;n)

Normalmente es $\theta' = \theta$ y $\eta = \delta$, lo que simplifica el cálculo.

Caso 1.—La renta crece desde el origen del contrato.

Resulta la siguiente integral:

$$\int_0^n e^{-\delta \cdot t} \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \cdot {}_tp_y \cdot e^{\theta \cdot t} \cdot \bar{a}^*_{y+t}$$

expresión en la cual es:

$$\bar{a}^*_{y+t} = \int_0^\infty e^{-\delta \cdot u} \cdot e^{\theta \cdot u} \cdot {}_up_{y+t} \cdot du = \int_0^\infty e^{-\phi \cdot u} \cdot {}_up_{y+t} \cdot du =$$

$$= \bar{a}^{(\phi)}_{y+t} \quad (\delta - \theta = \phi)$$

Su integración conduce a la fórmula:

$$(\bar{a}^*_y - \bar{a}^*_{xy}) - e^{-\delta \cdot u} \cdot {}_np_x \cdot e^{\theta u} \cdot (\bar{a}^*_{y+n} - \bar{a}^*_{x+n:y+n}) \qquad (1)$$

Caso 2.—La renta crece desde que se genera

En este caso la integral es:

$$\int_0^n e^{-\delta \cdot t} \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \cdot {}_tp_y \cdot \bar{a}^*_{y+t}$$

y su integración no proporciona una fórmula operativa, por lo cual es preferible calcular el sumatorio siguiente:

$$\sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_{xy}(v^{1/2} \cdot q_{x+t}) \cdot a^*_{y+t} \qquad (2)$$

B) **Falleciendo (x) en (0; ∞)**

Basta hacer n = ∞ en (1) y (2) obteniéndose:

Caso 1.—

$$a^*_y - a^*_{xy} \qquad (3)$$

Caso 2.—

$$\sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_{xy}(v^{1/2} \cdot q_{x+t}) \cdot a^*_{y+t} \qquad (4)$$

OBSERVACION:

Haciendo $\theta = 0$ resultan las fórmulas de Renta de Supervivencia constante.

A)**Falleciendo (x) en (0;n)**

$$(a_y - a_{xy}) - e^{-\delta \cdot n} \cdot {}_np_x \cdot {}_np_y \cdot (a_{y+n} - a_{x+n:y+n}) \qquad (5)$$

B) **Falleciendo (x) en (0; ∞)**

$$a_y - a_{xy} \qquad (6)$$

EJEMPLOS DE RENTAS DE SUPERVIVENCIA CON EXPANSION $\theta = 0$ y $\theta = 5$ %

x = 45 ; y = 40 ; Tabla P.E.M.70 con i = 6 %. Edad común = 43

A) **Falleciendo x en (0:n) con n = 20**

Caso a.—La renta crece desde el origen de la operación

1) Clásica con $\theta = 0$

Por fórmula:

$$(a_{40} - a_{43:43}) - {}_{20}E_{40:45}(a_{60} - a_{63:63}) = 1{,}257971$$

Por cálculo directo:

$$\sum_{t=0}^{t=19} {}_tE_{45:40} \cdot (1{,}06)^{-1/2} \cdot q_{45+t} \cdot a_{40+t} = 1{,}294755$$

2) Expansión $\theta = 5\ \%$

Por fórmula:

$$(a^*_{40} - a^*_{43:43}) - {}_{20}E_{45:40} \cdot (1{,}05)^{20} \cdot (a^*_{60} - a^*_{63:63}) = 3{,}668076$$

Por cálculo directo:

$$\sum_{t=0}^{t=19} {}_tE_{45:40} \cdot (1{,}06)^{-1/2} \cdot q_{45+t} \cdot (1{,}05)^t \cdot a^*_{40+t} = 3{,}661078$$

Caso b.—La renta crece desde que se genera

1) Clásica con $\theta = 0$

Por fórmula:

$$(a_{40} - a_{63:63}) - {}_{20}E_{40:45} \cdot (a_{60} - a_{63:63}) = 1{,}257971$$

Por cálculo directo:

$$\sum_{t=0}^{t=19} {}_tE_{45:40} \cdot (1{,}06)^{-1/2} \cdot q_{45+t} \cdot a_{40+t} = 1{,}294755$$

2) Expansión $\theta = 5\ \%$

Por fórmula:

No es práctica. Se puede aproximar por la 39(a) de Hardy.

Por cálculo directo:

$$\sum_{t=0}^{t=19} (1{,}06)^{-20} \cdot {}_tp_{45} \cdot {}_tp_{40} \cdot (v^{1/2} \cdot q_{45+t}) \cdot a^*_{40+t} = 2{,}264157$$

B) **Falleciendo (x) en $(0; \infty)$**

Caso a.—La renta crece desde el origen de la operación

1) Clásica con $\theta = 0$

Por fórmula:

$$a_{40} - a_{43:43} = 1{,}852193$$

Por cálculo directo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_{45:40} \cdot (1{,}06)^{-1/2} \cdot q_{45+t} \cdot a_{40+t} = 1{,}937649$$

2) Expansión $\theta = 5\ \%$

Por fórmula:

$$a^*_{40} - a^*_{43:43} = 6{,}855803$$

Por cálculo directo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_{45:40} \cdot (1{,}06)^{-1/2} \cdot q_{45+t} \cdot (1{,}05)^t \cdot a^*_{40+t} = 6{,}858647$$

Caso b.—La renta crece desde que se genera

1) Clásica con $\theta = 0$

Es igual que en el caso a) n.º 1 de este grupo B).

2) Expansión con $\theta = 5\ \%$

Por fórmula:

No es práctica. Se puede usar la 39(a) de Hardy.

Por cálculo directo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_{45:40} \cdot (1{,}06)^{-1/2} \cdot q_{45+t} \cdot a^*_{40+t} = 3{,}160319$$

RENTA DE SUPERVIVENCIA: CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE LA PRIMA UNICA AL VARIAR t

A) Muriendo (x) en (0;n)

a) Con expansión a la tasa θ:

Caso 1.—La renta crece desde el origen:

Como el riesgo es decreciente, la prima única decrece conforme t crece y se aproxima a n.

Caso 2.—La renta crece desde que se genera:

La prima única, generalmente, crece (dependiendo ello de los valores de x; y; n) conforme crece t y se aproxima a n.

B) **Muriendo (x) en (0;∞)**

Con expansión o sin ella, la prima única es siempre decreciente, se dé o no, un crecimiento inicial seguido de un decrecimiento.

RESERVAS MATEMATICAS

En el caso de que la cabeza asegurada *(x)* fallezca en el intervalo máximo, o sea, en (0;∞), es habitual valorar la prima anual (bien sea constante, bien a la tasa de expansión θ) con la renta vitalicia sobre las cabezas asegurada y beneficiaria, es decir:

$$a_{xy} \quad \text{para } \theta = 0$$

$$a^*_{xy} \quad \text{para } \theta > 0$$

En todo caso, hay que evitar la existencia, para ningún valor de t, de reservas matemáticas negativas. Por ello, cuando el intervalo dentro del cual haya de fallecer, si fallece, la cabeza *(x)* sea el (0;n), el decrecimiento del riesgo que acusa la prima única puede exigir un acortamiento en la duración del pago de primas, por ejemplo, que sea pagadera durante n-5 años. *Esto en el supuesto de un Seguro en póliza individual, pues en un Fondo de Pensiones no es necesario.*

Sucede, en efecto, que en un Fondo de Pensiones, que comporte la prestación de pensión de viudedad, ésta se suele calcular por el denominado método colectivo (con independencia de que exista expansión desde el origen o desde que se genera); y una vez determinado el coste a prima única de tal prestación, se divide por el valor actual de los salarios de los cotizantes (salarios expansionados según la tasa que se haya estimado como válida para valorar su evolución futura). Así, en ese valor actual de salarios no entran las probabilidades de vida de las esposas (cabezas de edad y).

Pues bien, ningún tratadista se plantea que la cuota resultante de tal cálculo pueda conducir a reservas negativas; lo que se comprende fácilmente ya que la prestación de pensión de viudedad no queda aislada de la de jubilación y las demás que hubiera previstas por el Reglamento del Fondo.

A continuación se presenta el cálculo de las primas anuales y la formulación de las reservas matemáticas para un caso concreto. Y es de advertir que las primas se han determinado para ser pagadas durante n años, o sea, sin el eventual acortamiento de esa duración que se precisará para evitar la negativización de las reservas. Estas no han sido tabuladas, por lo que no se sabe si son negativas para algún valor de t.

RENTA DE SUPERVIVENCIA CON EXPANSION DESDE QUE SE GENERA Y DESDE EL ORIGEN. EN AMBOS CASOS FALLECIENDO (x) EN (0;n). PRIMA ANUAL Y RESERVA MATEMATICA

P.E.M.70 al 6 %; x = 45; y = 40; n = 65 − x = 20; θ = 5 %

Edad común = 43

Caso a.—Con expansión desde que se genera:

La prima anual pura creciente con expansión θ = 5 % sería:

$$_{/n}P^{*}_{x/y} = \frac{\sum_{t=0}^{19} {}_tE_{45:40} \cdot (v^{1/2} \cdot q_{45+t}) \cdot \ddot{a}^{*}_{40+t}}{\ddot{a}^{*}_{45:40:\overline{20|}}}$$

Si la prima ha de ser constante, en el denominador hay que sustituir la renta expansión temporal $\ddot{a}^{*}_{45:40:\overline{20|}}$ por la renta constante $\ddot{a}_{45:40:\overline{20|}}$, o sea:

$$_{/n}P_{x/y} = \frac{\sum_{t=0}^{19} {}_tE_{45:40} \cdot (v^{1/2} \cdot q_{45+t}) \cdot \ddot{a}^{*}_{40+t}}{\ddot{a}_{45:40:\overline{20|}}}$$

Caso b.—Con expansión desde el origen:

La prima expansión y la prima constante tienen igual estructura que en el caso a).

Basta cambiar la prima única por la siguiente:

$$\sum_{t=0}^{19} {}_tE_{45:40} \cdot (v^{1/2} \cdot q_{45+t}) \cdot (1{,}05)^t \cdot \ddot{a}^{*}_{40+t}$$

Se tiene entonces:

Caso a.—

Prima inicial expansión:

$$_{/n}P^{*}_{x/y} = \frac{2{,}264157}{\ddot{a}^{*}_{43:43:\overline{20|}}} = \frac{2{,}264157}{16{,}227218} = 0{,}139528$$

Prima constante:

$$_{/}P_{x/y} = \frac{2{,}264157}{\ddot{a}_{43:43:\overline{20|}}} = \frac{2{,}264157}{11{,}066197} = 0{,}204601$$

Caso b.—

Prima inicial expansión:

$$_{/}P^{*}_{x/y} = \frac{3{,}661078}{a^{*}_{43:43:\overline{20}|}} = \frac{3{,}661078}{16{,}227218} = 0{,}225613$$

Prima constante:

$$_{/n}P_{x/y} = \frac{3{,}661078}{a_{43:43:\overline{20}|}} = \frac{3{,}661078}{11{,}066197} = 0{,}330834$$

RESERVAS MATEMATICAS

Se distinguen los mismos casos y modalidades que para las primas.

Caso a.—Con expansión desde que se genera:

A prima expansión:

$$\sum_{k=0}^{19-t} {}_{k}E_{43+t:43+t} \cdot (v^{1/2} \cdot q_{45+t+k}) \cdot a^{*}_{40+t+k} - 0{,}139528 \cdot (1{,}05)^{t} \cdot$$

$$\cdot\ a^{*}_{43+t:43+t:\overline{20-t}|} \quad (\text{con } t = 1 \text{ a } 20)$$

A prima constante:

$$\sum_{k=0}^{19-t} {}_{k}E_{43+t:43+t} \cdot (v^{1/2} \cdot q_{45+t+k}) \cdot a^{*}_{40+t+k} - 0{,}204601 \cdot$$

$$\cdot\ a_{43+t:43+t:\overline{20-t}|} \quad (\text{con } t = 1 \text{ a } 20)$$

Caso b.—Con expansión desde el origen:

A prima expansión:

$$\sum_{k=0}^{19-t} {}_{k}E_{43+t:43+t} \cdot (v^{1/2} \cdot q_{45+t+k}) \cdot (1{,}05)^{t} \cdot a^{*}_{40+t+k} - 0{,}225613 \cdot$$

$$\cdot\ (1{,}05)^{t} \cdot a^{*}_{43+t:43+t:\overline{20-t}|} \quad (\text{con } t = 1 \text{ a } 20)$$

A prima constante:

$$\sum_{k=0}^{19-t} {}_{k}E_{43+t:43+t} \cdot (v^{1/2} \cdot q_{45+t+k}) \cdot (1{,}05)^{t} \cdot a^{*}_{40+t+k} - 0{,}330834 \cdot$$

$$\cdot\ a_{43+t:43+t:\overline{20-t}|} \quad (\text{con } t = 1 \text{ a } 20)$$

Es importante tener presente que, en este caso b), la prima única para una duración *n* dentro de la cual puede morir (x) y se pagan las primas, se formula según la siguiente expresión:

$$(a^*_y - a^*_{xy}) - {}_nE_{xy} \cdot (1{,}05)^n \cdot (a^*_{y+n} - a^*_{x+n:y+n})$$

Ello permite, en las fórmulas de las reservas de este caso b) sustituir el cálculo, al fin de cada año *t*, de los sumatorios:

$$\sum_{k=0}^{19-t} {}_kE_{43+t:43+t} \cdot (v^{1/2} \cdot q_{45+t}) \cdot 1{,}05)^t \cdot a^*_{40+t}$$

por la expresión:

$$(a^*_{40+t} - a^*_{43+t:43+t}) - {}_{20-t}E_{45+t} \cdot {}_{20-t}p_{40+t} \cdot (1{,}05)^{20-t} \cdot (a^*_{60} - a^*_{63:63})$$

en la que *t* va de $t = 1$ a $t = 20$

NOTA SOBRE CALCULO DE RENTA DE SUPERVIVENCIA CON EXPANSION EXPONENCIAL (HORIZONTE VITALICIO)

Siendo (y) la cabeza beneficiaria de la renta y (x) la cabeza causante de la renta, es preciso distinguir dos casos:

a) La renta crece desde el origen de la operación:

Denotando con θ a la tasa anual de expansión, la expresión de la prima única pura se puede obtener en el campo continuo haciendo:

$$\log_e (1 + \theta) = \eta$$

Dicha prima vale entonces:

$$\int_0^\infty e^{-\delta \cdot t} \cdot (1 - {}_tp_x) \cdot {}_tp_y \cdot e^{\eta \cdot t} \cdot dt = \overline{a}^*_y - \overline{a}^*_{x:y}$$

b) La renta crece desde que se genera:

En este caso la prima única es:

$$\int_0^\infty e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(\frac{-dl_{x+t}}{l_x}\right) \cdot {}_tp_y \cdot \int_0^\infty e^{-\delta \cdot u} \cdot e^{\theta \cdot u} \cdot {}_up_{y+t} \cdot du$$

Haciendo ahora $\delta - \theta = \eta$, se observa que la segunda integral, —que es el capital constitutivo de la renta causada al morir (x)—, es la prima única de una renta sobre la cabeza (y + t), unitaria, al interés η.

Es decir:

$$\int_0^\infty e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(\frac{-dl_{x+t}}{l_x}\right) \cdot {}_tp_y \cdot \overline{a}_{y+t}^{(\eta)}$$

El cálculo de esta integral conviene hacerlo por partes, resultando en primer paso:

$$\frac{-1}{l_x}\left[(e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_y \cdot \overline{a}_{y+t}^{(\eta)} \cdot l_{x+t})_0^\infty - \int_0^\infty l_{x+t} \cdot d[e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_y \cdot \overline{a}_{y+t}^{(\eta)}]\right] =$$

$$= \overline{a}_y^{(\eta)} + \int_0^\infty {}_tp_x \cdot d[e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_y \cdot \overline{a}_{y+t}^{(\eta)}]$$

Calculando la diferencial se obtiene:

$$\overline{a}_y^{(\eta)} = \int_0^\infty {}_tp_x \cdot [(-\delta \cdot e^{-\delta \cdot t}) \cdot {}_tp_y \cdot \overline{a}_{y+t}^{(\eta)} - e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_y \cdot \mu_{y+t} \,.\, \overline{a}_{y+t}^{(\eta)} +$$

$$+ e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_y \cdot (\mu_{y+t} \cdot \overline{a}_{y+t}^{(\eta)} - A_{y+t}^{(\eta)})] \cdot dt$$

Agrupando términos:

$$\overline{a}_y^{(\eta)} - \delta \cdot \int_0^\infty e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_{xy} \cdot \overline{a}_{y+t}^{(\eta)} \cdot dt - \int_0^\infty e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_{xy} \cdot \overline{A}_{y+t}^{(\eta)} \cdot dt =$$

$$= \overline{a}_y^{(\eta)} - \int_0^\infty e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_{xy} \cdot [\delta \cdot \overline{a}_{x+t}^{(\eta)} + \overline{A}_{y+t}^{(\eta)}] \cdot dt$$

Ahora bien; se sabe que es $A_{y+t}^{(\eta)} = 1 - \eta \cdot \overline{a}_{y+t}^{(\eta)}$ resultando:

$$\overline{a}_y^{(\eta)} - \overline{a}_{xy}^{(\delta)} - \delta \cdot \int_0^\infty e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_{xy} \cdot \overline{a}_{y+t}^{(\eta)} \cdot dt + \eta \cdot \int_0^\infty e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_{xy} \cdot$$

$$\cdot \overline{a}_{x+t}^{(\eta)} \cdot dt = \overline{a}_y^{(\eta)} - \overline{a}_{xy}^{(\delta)} - (\delta - \eta) \cdot \int_0^\infty e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_{xy} \cdot \overline{a}_{y+t}^{(\eta)} \cdot dt$$

O si se prefiere:

$$\overline{a}_y^{(\eta)} - \overline{a}_{xy}^{(\delta)} - \theta \cdot \int_0^\infty {}_tE_{xy}^{(\delta)} \cdot \overline{a}_{y+t}^{(\eta)} \cdot dt$$

Obviamente, en el caso $\theta = 0$ se obtiene:

$$\bar{a}_{x/y} = \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}$$

La integral que figura como segundo sustraendo de la fórmula obtenida no es integrable, por lo cual es preferible, en el caso b) considerado, determinar la prima única correspondiente por uno de estos dos sistemas:

a) **En el campo discreto:**

Es de aplicación el siguiente sumatorio:

$$\sum_{t=0}^{w-x} {}_tE_{xy} \cdot (v^{1/2} \cdot q_{x+t}) \cdot a^*_{y+t}$$

b) **En el campo continuo:**

Resolviendo por la 39(a) de Hardy la siguiente integral:

$$\int_0^\infty (1+i)^{-t} \cdot {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot \mu_{y+t} \cdot \bar{a}^*_{y+t} \cdot dt$$

EJEMPLOS con $\left\{\begin{array}{l} x = 45 \text{ (varón)} \\ y = 40 \text{ (varón)} \end{array}\right.$ Edad común x' = 43 $\left\{\begin{array}{l} i = 6\ \% \\ \theta = 5\ \% \end{array}\right.$

TABLA P.E.M. 70

1) **Renta clásica de supervivencia:**

$$a_{40} - a_{43:43} = 14{,}506350 - 12{,}654157 = \mathbf{1{,}852193}$$

2) **Renta con expansión:**

Caso a.—Crece desde el origen:

$$a^*_{40} - a^*_{43:43} = 28{,}673006 - 21{,}817203 = \mathbf{6{,}855803}$$

Caso b.—Crece desde que se genera:

$$\int_0^\infty (1{,}06)^{-t} \cdot {}_tp_{45} \cdot {}_tp_{40} \cdot \mu_{45+t} \cdot a^*_{40+t} \cdot dt = \mathbf{3{,}092972}$$

Resuelta por la 39(a) de Hardy.

NOTA SOBRE CALCULO DE RENTA DE SUPERVIVENCIA «EXPANSION» FALLECIENDO (x) EN (0;n)

En la nota anterior se exponen las primas únicas de la renta de supervivencia expansión en el caso de que la cabeza (x) muera antes que la cabeza (y), con horizonte vitalicio.

Interesa más examinar la cuestión imponiendo la condición de que (x) fallezca en (0;n), pudiendo ser n = j − x con j = edad de jubilación.

Caso a.—La renta crece desde el origen de la operación

Utilizando las mismas notaciones que en el caso vitalicio se tiene:

$$\int_0^n e^{\delta \cdot t} \cdot \left[\frac{-dl_{x+t}}{l_x}\right] \cdot {}_tp_y \cdot (\bar{a}^*_{y+t} \cdot e^{\theta \cdot t})$$

Ordenada más ortodoxamente es:

$$\int_0^n e^{-\delta \cdot t} \cdot {}_tp_y \cdot \frac{-dl_{x+t}}{l_x} \cdot e^{\theta \cdot t} \cdot \bar{a}^*_{y+t}$$

siendo:

$$\bar{a}^*_{y+t} = \int_0 e^{\theta \cdot u} \cdot e^{\delta \cdot u} \cdot {}_up_{y+t} \cdot du = \bar{a}^{(\eta)}{}_{y+t}$$

$$\text{con } \eta = \delta - \theta$$

La integral se convierte en esta otra:

$$\frac{-1}{l_x} \cdot \int_0^n e^{-\eta \cdot t} \cdot {}_tp_y \cdot \bar{a}^{(\eta)}_{y+t} \cdot dl_{x+t}$$

la cual corresponde al caso en que, en mi tesis, son:

$$k = 0\,;\, r = r\,;\, n = 0\,;\, m = \infty$$

con la sola modificación de que, aquí, la duración *r* se denota con *n*.

El resultado, entonces, es el siguiente:

$$\bar{a}^*_{x/y} - {}_nE^{(\delta)}_{xy} \cdot e^{\theta \cdot n} \cdot \bar{a}^*_{x+n/y+n} =$$

$$= (\bar{a}^*_y - \bar{a}^*_{xy}) - {}_nE^{(\delta)}_{xy} \cdot e^{\theta \cdot n} \cdot (\bar{a}^*_{y+n} - \bar{a}^*_{x+n:y+n})$$

Expresada esta fórmula en función del tipo de interés $\eta = \delta - \theta$, resulta:

$$\left[\overline{a}_{y}^{(\eta)} - \overline{a}_{xy}^{(\eta)}\right] - {}_{n}E_{xy}^{(\eta)}\left[\overline{a}_{y+n}^{(\eta)} - \overline{a}_{x+n:y+n}^{(\eta)}\right]$$

Obviamente, para $n = \infty$, se obtiene: $\overline{a}_{y}^{*} - \overline{a}_{x:y}^{*} = \overline{a}_{y}^{(\eta)} - \overline{a}_{xy}^{(\eta)}$

Caso b.—La renta crece desde que se genera:

La prima única es la integral:

$$\int_{0}^{n} e^{-\delta \cdot t} \cdot \left[\frac{-d l_{x+t}}{l_x}\right] {}_{t}p_{y} \cdot \overline{a}_{y+t}^{*}$$

Integrando por partes, tal y como se hizo para el caso b) con horizonte vitalicio, se llega al siguiente resultado:

$$\left[\overline{a}_{y}^{(\eta)} - \overline{a}_{x:y:\overline{n}|}^{(\delta)} + {}_{n}E_{xy}^{(\delta)} \cdot \overline{a}_{y+n}^{(\eta)})\right] - \theta \cdot \int_{0}^{n} {}_{t}E_{xy}^{(\delta)} \cdot \overline{a}_{y+t}^{(\eta)} \cdot dt$$

Se puede comprobar que, para $n = \infty$, se obtiene el resultado del caso b) del planteamiento vitalicio, es decir:

$$\overline{a}_{y}^{(\eta)} - \overline{a}_{xy}^{(\delta)} - \theta \cdot \int_{0}^{\infty} {}_{t}E_{xy}^{(\delta)} \cdot \overline{a}_{y+t}^{(\eta)} \cdot dt$$

La fórmula obtenida no es operativa, por lo que es preferible plantear la prima única en el campo finito, según la siguiente expresión:

$$\sum_{t=0}^{n-1} {}_{t}E_{xy} \cdot (v^{1/2} \cdot q_{x+t}) \cdot a_{y+t}^{*}$$

EJEMPLOS:

Con iguales datos que en la Nota anterior y *con n = 20.*

1) **Renta Clásica:**

$$(a_{40} - a_{43:43}) - {}_{20}E_{45:40} \cdot (a_{60} - a_{63:63}) = \mathbf{1{,}257971}$$

2) **Renta con expansión:**

Caso a.—(crece desde el origen):

$$(a_{40}^{*} - a_{43:43}^{*}) - (1{,}06)^{-20} \cdot {}_{20}p_{45} \cdot {}_{20}p_{40} \cdot (1{,}05)^{20} \cdot (a_{60}^{*} - a_{63:63}^{*}) =$$
$$= 6{,}855803 - 0{,}210861 \times 2{,}653298 \times (15{,}764460 - 10{,}066769) =$$
$$= \mathbf{3{,}668076}$$

Caso b.—(crece desde que se genera):

$$\sum_{t=0}^{t=19} (1{,}06)^{-20} \cdot {}_tp_{45} \cdot {}_tp_{40} \cdot (v^{1/2} \cdot q_{45+t}) \cdot \overset{*}{a}_{40+t} = \mathbf{2{,}264157}$$

APENDICE

Cálculo por integración aproximada de la prima única de la Renta de Supervivencia a favor de (y) con expansión a la tasa θ, si la cabeza (x) muere en el intervalo (0;n).

En lo que precede, al abordar esta modalidad concreta, se afirma que es de difícil integración —como lo prueban las fórmulas obtenidas—, y que tales fórmulas no son operativas.

Ello es cierto. Pero también lo es que algunas fórmulas de integración aproximada dan muy buenas aproximaciones a los valores exactos (calculadas directamente en el campo finito)

Seguidamente se ofrece un ejemplo. Pero antes conviene recordar que no es conveniente usar la fórmula de Weddle, a menos que la duración sea divisible por 6, ni la de Simpson (utilizada en el ejemplo posterior) si *n* no es divisible por 2, ni la de Simpson repetida si no es divisible *n* por 4,6 ó 10, ni la regla de los 3/8, a menos que la duración sea divisible por 3

Y en general es de recordar que si la duración es la de 25, 35, 55, ..., sólo es de aplicación válida la fórmula de Bizley.

RENTA DE SUPERVIVENCIA CON EXPANSION DESDE QUE SE GENERA A FAVOR DE y = 40, SI x = 45 FALLECE EN (0;20)

1) **Cálculo directo:**

$$\sum_{t=10}^{19} {}_tE_{45} \cdot {}_tp_{40} \cdot (v^{1/2} \cdot q_{45+t}) \cdot \overset{*}{a}_{40+t} = 2{,}264157$$

(P.E.M.70 al 6 % y $\theta = 5$ %)

2) **En continuo es:**

$$\int_0^{20} (1{,}06)^{-t} \cdot {}_tp_{45} \cdot {}_tp_{40} \cdot \mu_{45+t} \cdot \overset{*}{a}_{40+t} \cdot dt = \int_0^{20} u_t \cdot dt$$

Integración por SIMPSON:

$$\int_0^{2n} u_t \cdot dt = \frac{n}{3} \cdot \left[u_0 + 4u_n + u_{2n}\right]$$

En nuestro caso es: $2n = 20 \rightarrow n = 10$

t	$(1{,}06)^{-t}$	${}_tp_{45}$	${}_tp_{40}$	μ_{45+t}	$\overset{*}{a}_{40+t}$	u_t
0	1,000000	1,000000	1,000000	0,00418967	28,673006	0,120130
10	0,558395	0,934151	0,957540	0,01040201	22,089940	0,11 770
20	0,311805	0,786697	0,859623	0,02646092	15,764460	0,087959

$$\int_0^{20} u_t \cdot dt = \frac{10}{3}\left[0{,}120130 + 4 \cdot 0{,}114770 + 0{,}087959\right] = 2{,}223897$$

(Desviación $-2{,}24\ \%$)

MADRID, Junio de 1985