TRABAJOS DE COLABORACION

Una generalización de la teoría del riesgo colectivo

Por el Prof. KARL BORCH

1.1. En este trabajo vamos a examinar algunos de los juicios críticos que se han emitido —principalmente por actuarios italianos— con respecto a la Teoría del Riesgo Colectivo establecido por Lundberg, y veremos que muchos de esos juicios están justificados, pero también veremos que contienen aspectos estimables que pueden ser utilizados para construir una teoría más general. Estos aspectos que vamos a analizar y procuraremos desarrollar, son fundamentalmente debidos a De Finetti [4].

1.2. El más importante juicio crítico de De Finetti es el de que la teoría de Lundberg es *irrealizable,* porque supone que no existe un límite para los fondos de reserva que puedan acumularse en una entidad aseguradora (1). En sentido estricto esto no es muy serio, ya que objeciones similares pueden aducirse contra cualquier otra teoría abstracta. Sin embargo, lo cierto es que la Teoría del Riesgo Colectivo ha sido, no obstante, dedicada a la deducción de expresiones aproximadas, y minuciosos ejercicios de ajuste de curvas. El valor de este trabajo está en tela de juicio simplemente, porque el valor de un resultado aproximado depende de cómo se le utilice. Los más de los que escriben sobre la Teoría del Riesgo Colectivo, parece que eluden hacer afirmaciones precisas acerca de las aplicaciones prácticas de sus resultados.

1.3. El modelo de Lundberg constituye, en la moderna terminología, *una marcha incierta hacia un atractivo fin.* De Finetti manifiesta que si le añadimos un motivo relevante, el modelo se enriquece y puede conducir a una teoría de auténtico valor para la industria del Seguro. Por ello, vamos a tratar de interpretar esta idea de De Finetti, a la que no parece haber prestado plena atención por sí mismo.

2. EL MODELO BASICO

2.1. En esta sección vamos a considerar una entidad (1) aseguradora que opere en las siguientes condiciones:

(i) La entidad tiene un capital S.

(ii) En cada uno de los sucesivos períodos de operaciones, la entidad obtiene un beneficio x, que se ofrece como una variable estocástica con distribución $F(x)$.

(iii) Si el capital de la entidad se convierte en negativo al final de uno de los períodos de su vida operativa, la entidad queda arruinada e imposibilitada para continuar los negocios.

(iv) Si al final de un período de operaciones el capital de la entidad se incrementa en Z, este excedente puede ser aplicado al pago de dividendos.

De Finetti ha tratado este modelo [4] de una manera muy sucinta. Un caso especial simple de este modelo lo hemos estudiado con detalle en trabajos nuestros anteriores [2] y [3].

2.2. Si Z es finita, la entidad puede quedar eventualmente arruinada. La probabilidad de ruina de Lundberg es, por tanto, igual a la unidad y no interesa.

Como una expresión alternativa, consideraremos la función D(S, Z) = presunto número de ciclos o períodos operatorios al término del cual sobrevenga la ruina.

De las condiciones establecidas en 2.1. se desprende que

$$D(S, Z) = 0 \qquad \text{para} \qquad S < 0$$

$$D(S, Z) = D(Z, Z) \qquad \text{para} \qquad S > Z$$

(1) N. DEL T.—En el original se refiere a "Compañía aseguradora", pero nosotros la hemos reemplazado por entidad, por ser todo ello de aplicación, cualquiera que sea la naturaleza jurídica del asegurador.

Para $0 \leqslant S \leqslant Z$ se ve fácilmente que $D(S, Z)$ debe satisfacer la ecuación integral:

$$D(S, Z) = 1 + \int_{-S}^{\infty} D(S + x, Z) \cdot d\, F(x)$$

Al objeto de simplificar, supondremos la existencia de una función de densidad $f(x) = F'(x)$.

En consecuencia, la ecuación integral puede ser escrita:

$$D(S, Z) = 1 + \Big[1 - F(Z - S)\Big] \cdot D(Z, Z) + \tag{1}$$

$$+ \int_{0}^{Z} D(x, Z) \cdot f(x - S) \cdot dx$$

Esta ecuación es del tipo de las de Fredholm, con el solo argumento $f(x - S)$, que puede ser resuelta por diferentes métodos. Por ejemplo, podemos formar la sucesión de argumentos

$$f^{(1)}(x - S) = f(x - S)$$

$$f^{(n)}(x - S) = \int_{0}^{Z} f^{(n-1)}(x - t) \cdot f(t - S) \cdot dt$$

y obtener la expresión de Liouville-Neumann

$$D(S, Z) = 1 + \Big[1 - F(Z - S)\Big] \cdot D(Z, Z) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{Z} f^{(n)}(x - S) \cdot dx$$

donde podemos determinar D(Z, Z) de forma que la solución sea continua para $S = Z$. Esto da

$$D(Z, Z) = 1 + \Big[1 - F(0)\Big] \cdot D(Z, Z) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^Z f^{(n)}(x - S) \cdot dz$$

o

$$D(Z, Z) = \frac{1}{F(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^Z f^{(n)}(x - S) \cdot dx$$

2.3. Las series del parágrafe inmediatamente precedente, de ordinario son rápidamente convergentes, en particular para pequeños valores, de Z, así que no es muy difícil el cómputo de D(Z, Z) y, por tanto, de D(S, Z). En general es, sin embargo, imposible encontrar expresiones explícitas simples para esos dos fines y tratar de averiguar la naturaleza de la solución. Por ello, puede ser útil estudiar un caso particular, a modo de ejemplo, con cierto detalle, al objeto de obtener alguna información general acerca de la naturaleza del problema.

Como ejemplo razonablemente realístico, podemos considerar el siguiente caso:

$$f(x) = e^{x-P} \quad \ldots \quad x \leqslant P$$

$$f(x) = 0 \quad \ldots \quad x > P$$

Esto puede ser interpretado en forma de que "nuestra" entidad reciba en cada período de operaciones un total de primas P, y acepte la responsabilidad de una siniestralidad que sea una variable estocástica de distribución ($F(x) = 1 - e^{-x}$, siendo natural suponer que sea $P > 1$, por lo que el juego resulta favorable a la entidad.

2.4. En el caso especial que acabamos de exponer, la ecuación integral (1) puede ser escrita

$$D(S, Z) = 1 + e^{-S-P} \int_0^{S+P} D(x, Z) \cdot e^x \cdot dx \tag{2}$$

para $0 \leqslant S \leqslant Z - P$, y

$$D(S, Z) = 1 + [1 - e^{Z-S-P}] \cdot D(Z, Z) +$$

$$+ e^{-S-P} \int_0^Z D(x, Z) \cdot e^x \cdot dx \tag{2'}$$

para $Z - P < S \leqslant Z$.

Pero es conveniente omitir el segundo argumento y escribir $D(S, Z) = D(S)$, con lo que (2) se convierte en

$$D(S) = 1 + e^{-S-P} \int_0^{S+P} D(x) \cdot e^x \cdot dx \tag{3}$$

Y diferenciando, ahora, con respecto a S, resulta:

$$D'(S) = e^{-S-P} \int_0^{S+P} D(x) \cdot e^x \cdot dx + D(S + P)$$

que agregándola a (3) proporciona

$$D(S) + D'(S) = 1 + D(S + P) \tag{4}$$

que es una ecuación diferencial a diferencias, válida para $0 \leqslant S \leqslant Z - P$. Y diferenciando (2') con respecto a S, vemos que (4) se cumple también para $Z - P < S \leqslant Z$.

2.5. Ahora, podemos resolver (4) según un procedimiento debido a Bellman y Cooke [1]. Sin embargo, es conveniente hacer antes un cambio de notación, que nos dará los resultados en una forma más sencilla. A tal efecto, escribamos:

$$t = Z - D \qquad \text{y} \qquad u(t) = D(S)$$

La ecuación se convierte en

$$u(t) - u'(t) - u(t - P) = 1 \tag{4'}$$

que es válida para $0 \leqslant t \leqslant Z$.

Supongamos, ahora, que la ecuación se cumple también para Z > *t*, aunque la solución en este terreno es inadecuada para nuestro problema concreto.

Para $t \leqslant 0$ tenemos

$$u(t) = D(Z) = c$$

y tomando la transformación de Laplace para (4'), se tiene:

$$\int_0^{\infty} u(t) \cdot e^{-St} \cdot dt - \int_0^{\infty} u'(t) \cdot e^{-St} \cdot dt -$$

$$- \int_0^{\infty} u(t - P) \cdot e^{-St} \cdot dt = \frac{1}{S}$$

que se reduce a:

$$(1 - s - e^{-sP}) \int_0^{\infty} u(t) \cdot e^{-st} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{s}(1 + c + cs - ce^{-sP})$$

cuando s sea suficientemente grande.

Por la transformación de $u(t)$ según Laplace, se tiene:

$$(5) \qquad \int_0^{\infty} u(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \frac{c}{s} + \frac{1}{s(1 - s - e^{-sP})}$$

Podemos encontrar $u(t)$ por sí misma mediante alguno de los métodos de inversión. En nuestro caso especial esto será particularmente fácil.

2.6. *Para el último término de la* (5), *tenemos:*

$$\frac{1}{s(1 - s - e^{-sP})} = \sum_{n=a}^{\infty} \frac{e^{-snP}}{s(1 - s)^{n+1}}$$

donde se ve fácilmente que

$$\frac{1}{s(1-s)^{n+1}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \dots + \frac{1}{(1-s)^{n+1}}$$

También, de la conocida fórmula

$$\frac{1}{1-s)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^\infty t^n \cdot e^t \cdot e^{-st} \cdot dt$$

se desprende que $S^{-1}(1-S)^{-n-1}$ es una transformación de Laplace, de la función

$$1 - e^t\left[1 - t + \frac{1}{2} t^2 + \dots + (-1)^n\right]\frac{1}{n!} t^n =$$

$$= \int_{nP}^\infty g(t-nP) \cdot e^{-st} \cdot dt =$$

$$= \int_0^\infty g(t-nP) \cdot H(t-nP) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

donde $H(t)$ es la función de Heaviside definida por

$$H(t) = 1 \quad \dots \quad \text{para} \quad t > 0$$

$$H(t) = 0 \quad \dots \quad \text{para} \quad t < 0$$

Por tanto, $e^{-nsP} \cdot \varphi(s)$ es la transformación de Laplace, de la función

$$g(t-nP) \cdot H(t-nP)$$

con lo que podemos obtener la transformación de Laplace para $S^{-1}(1-s)^{-n-1} \cdot e^{-snP}$.

2.7. Vemos que el segundo miembro de (5) es la suma de transformaciones de Laplace para funciones bien conocidas, y que, por tanto:

$$u(t) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - e^{t-nP} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} (t - nP)^j \cdot H(t - nP) \right]$$

o, para $NP \leqslant t \leqslant (N + 1)P$,

$$u(t) = c + N + 1 -$$

$$- \sum_{n=0}^{N} e^{t-nP} \left[1 - (t - nP) + \dots + (-1)^n \frac{(t - nP)^n}{n!} \right]$$

o

$$u(t) = c + 1 + \left[\frac{t}{P} \right] - A(t)$$

donde $\left[\frac{t}{P} \right]$ es el mayor entero comprendido en $\frac{t}{P}$.

Y resulta fácil verificar que esta función es continua para $0 \leqslant t$.

2.8. (1) Para determinar la constante c, volvamos a la ecuación integral (2), y observemos que:

$$D(-P, Z) = u(Z + P) = 1$$

Así, tendremos que

$$c = A(Z + P) - 1 - \left[\frac{Z}{P} \right]$$

y

$$u(t) = A(Z + P) - \left[\frac{Z}{P} \right] - A(t) + \left[\frac{t}{P} \right]$$

o volviendo a nuestra notación original:

$$D(S, Z) = A(Z + P) - \left[\frac{Z}{P} \right] - A(Z - S) + \left[\frac{Z - S}{P} \right]$$

(1) N. DEL T.—Aunque en el original no había la conversión en parágrafo de lo que aquí se ha convertido en él, ha parecido conveniente el hacerlo.

Por esta expresión resulta fácil comprender que D(S, Z) es creciente con S y Z, conclusión que puede ser deducida inmediatamente por la naturaleza de nuestro modelo. También puede apreciarse que D(S, Z) se hace infinita con Z.

3. EL PROBLEMA DEL DIVIDENDO

3.1. La función D(S, Z) estudiada en la precedente sección contiene informaciones que resultan útiles para una entidad aseguradora. Sin embargo, no es tan fácil establecer cómo ha de ser aplicable esta información, para las decisiones que tenga que adoptar la aseguradora.

Es natural suponer que S esté dado y que la aseguradora necesita hacer para sus previsiones futuras, D(S, Z) tan grande como sea posible. No obstante, considerando que Z tienda a infinito y admitiendo que no se paguen dividendos, la aseguradora podrá tomar D(S, Z) como infinita.

Si se supone a Z infinitamente superior por causas externas al asegurador, D(S, Z) puede dar lugar a un criterio útil de decisión. La aseguradora podrá tomar entonces S y Z como conocidas y procurarse condiciones de reaseguro que le mejoren la perspectiva de su futuro.

Esta consideración pone de manifiesto el dilema fundamental de la teoría del riesgo colectivo. A fin de que pueda ser aplicado, la teoría necesita un *deus-ex-machine* que pueda dar de lado a las leyes (técnicas) que rigen la operatoria o funcionamiento de las entidades de seguros. A continuación vamos a procurar reducir estas leyes a algunos principios básicos que parecen ser de gran aceptación mundial.

3.2. Volviendo a 2.1., observamos que conforme a nuestras hipótesis, la aseguradora tendrá una sucesión de pagos de dividendos s_0, s_1, ..., s_t, ..., en la que s_t representa el dividendo pagadero al final del t^o año de su vida operatoria. Esta sucesión es claramente un discreto proceso estocástico.

Así, pues, podemos considerar el valor actual de los futuros dividendos, es decir:

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot s_t\right] \text{ (1)}$$

donde $0 < v < 1$ es el factor de descuento.

Ya que este valor naturalmente depende del capital inicial S, representando por Z el dividendo normal, podremos escribir:

$$V(S, Z) = E\left[\sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot s_t\right]$$

De nuestras hipótesis se desprende que

$$V(S, Z) = 0 \quad \ldots \text{ para } S < 0$$

$$V(S, Z) = S - Z + V(Z, Z) \quad \ldots \text{ para } S > 0$$

Para $0 \leqslant S \leqslant Z$, la función $V(S, Z)$ debe satisfacer la ecuación

$$V(S, Z) = v \int_{-S}^{Z-S} V(S + x, Z) \cdot d\, F(x) +$$

$$+ v \int_{-S}^{\infty} \Big[V(Z, Z) + x + S - Z\Big] \cdot d\, F(x) \tag{6}$$

3.3. Si $F(x)$ es continua y existe una función de densidad $f(x) = F'(x)$, la (6) puede ser escrita:

$$V(S, Z) = v \int_{0}^{Z} V(x, Z) \cdot f(x - S) \cdot dx +$$

$$+ v \int_{Z}^{\infty} \Big[V(Z, Z) + x - Z\Big] \cdot f(x - S) \cdot dx$$

---

(1) N. DEL T.—La E indica la naturaleza de esperanza matemática de la expresión, por lo que S_t lleva implícita su respectiva probabilidad.

Escribiendo V(S) en lugar de V(S, Z) esta ecuación se convierte en:

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
V(S) &= v \int_0^Z (x) \cdot f(x - S) \cdot dx + \\
&+ v\Big[1 - F(Z - S)\Big] \cdot V(Z) + v \int_0^\infty x \cdot f(x + Z - S) \cdot dx
\end{aligned}
$$

Y estamos nuevamente ante una ecuación integral del tipo de las de Fredholm, que podemos resolverla formando los reiterados argumentos y obtener la expresión de Liouville-Neumann:

$$
\begin{aligned}
V(S) &= v\Big[1 - F(Z - S)\Big] \cdot V(Z) + \\
&+ v \int_0^\infty x \cdot f(x + Z - S) \cdot dx + \sum_{n=1}^{\infty} v^n \int_0^Z f^{(n)}(x - S) \cdot dx
\end{aligned}
$$

Para determinar la constante V(Z) se requiere que sea continua la solución en S — Z, y se obtiene:

$$
\begin{aligned}
V(Z) &= v\Big[1 - F(0)\Big] \cdot V(Z) + \\
&+ v \int_0^\infty x \cdot f(x) \cdot dx + \sum_{n=1}^{\infty} v^n \int_0^Z f^{(n)}(x - Z) \cdot dx
\end{aligned}
$$

$$
V(Z) = \frac{v \displaystyle\int_0^\infty x \cdot f(x) \cdot dx + \sum_{n=1}^{\infty} v^n \int_0^Z f^{(n)}(x - Z) \cdot dx}{1 - v + v\,F(0)}
$$

3.4. Supongamos, como en 2.3.:

$$f(x) = e^{x-P} \quad \ldots \quad \text{para} \quad x \leqslant P$$

$$f(x) = 0 \quad \ldots \quad \text{para} \quad x > P$$

La ecuación integral (7) puede ser escrita ahora: Para $Z - P \leqslant$ $\leqslant S \leqslant Z$

$$V(S) = v\, e^{-S-P} \int_0^Z V(x) \cdot e^x \cdot dx + v[1 - e^{Z-S-P}] \cdot V(Z) +$$

$$+ v[S + P - 1 - Z + e^{Z-S-P}]$$

y para $0 \leqslant S \leqslant Z - P$

$$V(S) = v \cdot e^{-S-P} \int_0^{S+P} V(x) \cdot e^x \cdot dx$$

De esta expresión obtenemos la ecuación diferencial-diferencia

$$V(S) + V'(S) = v \cdot V(S + P)$$

válida para $0 \leqslant S \leqslant Z$. La condición limitativa es

$$V(S) = V(Z) + S - Z \quad \ldots \quad \text{para} \quad Z < S$$

3.5. Por una sustitución similar a la efectuada en 2.5., es decir:

$$t = Z - S \quad \text{y} \quad u(t) = (V(S)$$

obtenemos

$$u(t) - u'(b) - v \cdot u(t - P) = 0 \qquad \text{para } 0 \leqslant t$$

(8)

$$u(t) = u(0) - t = c - t \qquad \text{para} \quad t < 0$$

Esta ecuación es aparentemente más simple que la (4'), pero en el fondo es más complicada y conducirá a un considerable aumento del trabajo necesario para su cálculo.

Tomando la transformación de Laplace, de la (8), tenemos:

$$\int_0^\infty u(t) \cdot e^{-st} \cdot dt =$$

$$= \frac{c}{s} + \frac{v}{s^2} + \frac{v(c + P - 1) - c}{s[1 - s - v\,e^{-sP}]} - \frac{v(1 - v)}{s^2[1 - s - v\,e^{-sP}]}$$

Aquí se observa que

$$\frac{1}{1 - s - v\,e^{-sP}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n\,e^{-snP}}{(1 - s)^{n+1}}$$

Y se ve fácilmente que este segundo miembro es una suma de transformaciones de Laplace, de funciones muy conocidas. Razonando en términos de 2.6., se tiene, para $NP \leqslant t \leqslant (N + 1)P$:

$$u(t) = c + vt$$

$$+ \Big[v(c + P - 1) - c\Big] \sum_{n=0}^{N} v^n \Big[1 - e^{t-nP} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} (t - nP)^j\Big]$$

$$-v(1 - v) \sum_{n=0}^{N} v^n \Big[t - nP + n +$$

$$+ 1 - e^{t-nP} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} (n + 1 - j)\,(t - nP)^j\Big]$$

La constante c puede ser determinada como en 2.7. observando que $u(Z + P) = 0$. Podemos entonces volver a nuestra notación original y encontrar para $V(S, Z)$ una expresión explícita aunque muy complicada.

3.6. Determinada $V(S, Z)$, es natural suponer que nuestra entidad de seguros podrá hallar el valor de Z, que convierta en máxima esta función para un valor dado de S, es decir, la entidad verá alcanzar a su *reserva para siniestralidad* un nivel que haga máximo el esperado valor descontado de los futuros dividendos a satisfacer.

No vamos a tratar de este problema en su plena generalidad. Para nuestro ejemplo es fácil demostrar que

$$V(S, 0) = S + \frac{v(P - 1 + e^{-P})}{1 - v + ve^{-P}}$$

También podemos demostrar que V(S, Z) es continua y que crecerá con Z hasta alcanzar un máximo, y entonces tender a cero (para S finita) cuando Z tienda a infinito. El valor máximo de Z representará la *óptima* reserva para siniestralidad, de nuestra entidad. Está claro el interés de resaltar si este óptimo valor de Z es independiente de S, es decir, si la ecuación

$$\frac{\delta V(S, Z)}{\delta Z} = 0$$

tiene una solución independiente de S.

3.7. Podemos verificar la existencia de un valor óptimo de Z independiente de S por diferenciación directa de la expresión del 2.5.

Esto constituirá, no obstante, un proceso extremadamente laborioso. Tomaremos, pues, otra aproximación y estableceremos la siguiente ecuación

$$V(S, Z) + \frac{\delta V(S, Z)}{\delta S} - vV(S + P, Z) = 0$$

Diferenciando con respecto a Z, encontramos que el óptimo de Z —tratada como función de S— está determinada por

$$\frac{\delta V(S, Z)}{\delta Z} = 0$$

$$\frac{\delta^2 V(S, Z)}{\delta S \cdot \delta Z} - v\,\frac{\delta V(S + P, Z)}{\delta Z} = 0$$

Para $S > Z - P$, la última ecuación puede ser escrita

$$\frac{\delta^2 V(S, Z)}{\delta S \cdot \delta Z} = v\left[\frac{dV(Z, Z)}{dZ} - 1\right]$$

Si Z es óptima, podemos sencillamente tener $V'(Z, Z) = 1$. Entonces se sigue que

$$\frac{\delta^2 V(S, Z)}{\delta S \cdot \delta Z} = 0$$

y que la ecuación

$$\frac{\delta V(S, Z)}{\delta Z} = 0$$

tiene una solución en Z, independiente de S, cuando $Z - P \leqslant S \leqslant Z$. En tal caso el argumento puede repetirse para el intervalo $Z - 2P \leqslant$ $\leqslant S \leqslant S - P$, y podemos obtener una prueba general.

4. CONCLUSION

4.1. Sobre la base de lo que queda dicho en las secciones precedentes podemos deducir algunas conclusiones generales como las de cómo una entidad de seguros puede tomar sus decisiones ante una determinada situación, por ejemplo cuando tenga que seleccionar algún contrato de reaseguro. Parece natural distinguir tres casos diferentes:

(i) La entidad se desenvuelve estrictamente como una empresa de negocios, es decir, su único objetivo es obtener beneficios y pagar dividendos a los accionistas. En este caso es natural suponer que la entidad tomará la decisión que la conduzca al mayor valor posible de la función V(S, Z), es decir, el valor actual presumible de los futuros dividendos. El problema práctico que se le plantea a la entidad es el de:

"Determinar la reserva para siniestralidad, Z, y las condiciones de reaseguro que conjuntamente "maximicen" V(S, Z)."

(ii) La entidad se encuentra ante ciertas obligaciones sociales que implican que no puede aceptar los mismos riesgos como una empresa ordinaria de negocios. En este caso es natural suponer que la entidad considerará V(S, Z) y a la función D(S, Z) = al tiempo de vida presumible para ella, y tratará de hacer ambas tan grandes como sea posible. Hemos visto, en general, crecer ambas funciones simultáneamente. La entidad deberá decidir entonces sobre la relativa importancia a asignar a V y D. Se podrá establecer ésta suponiendo que la entidad verá qué reserva para siniestralidad y qué condiciones de reaseguro "maximizarán" alguna función U(V, D) que exprese el relativo peso atribuido a los dos elementos.

(iii) La entidad es ajena a toda consideración ordinaria de negocios. Su único objetivo consiste en procurar la máxima seguridad a sus asegurados. En este caso es natural suponer que la entidad quiera obtener el máximo para la función D(S, Z). Si por alguna causa hay un límite superior para Z, D(S, Z) será finita y se obtendrá un criterio de decisión viable. La entidad establecerá entonces la reserva para siniestralidad en su límite máximo y elegirá condiciones de reaseguro que proporcionen el más alto valor para D(S, Z).

Si no hay límite superior para Z, D(S, Z) se hará infinita y resultará inservible para criterio de decisión. Entonces es natural suponer que la entidad considerará la probabilidad de ruina de Lundberg, que será igual a la unidad tanto más cuanto que D(S, Z) sea finita. La entidad seleccionará entonces las condiciones de reaseguro que proporcionen la probabilidad de ruina tan pequeña como sea posible.

4.2. Es de esperar que estas consideraciones hagan más asequibles a los lectores la teoría de Lundberg en su propia exposición. Esta teoría se presenta al fondo de un amplio aspecto de posibles teorías. La teoría de Lundberg puede ser la cosa más natural para un actuario que investiga acerca de una pura teoría del seguro, independientemente de beneficios y otros conceptos económicos. Es también una ingeniosa teoría que abre un camino para proseguir a partir de donde termina el más corriente análisis económico.

Que sea *realístico* el modelo de Lundberg, como que no lo sea, dependerá en último extremo de la actitud adoptada —por propia iniciativa o por imposición autoritaria— por las gerencias de las entidades de seguros. Si el gerente se considera como un guardián del presente y del futuro de los asegurados, el modelo de Lundberg se presenta como completamente adecuado. Si, sin embargo, se considera como un hombre de negocios, puede prescindir de la teoría de Lundberg como inservible para los problemas de su compañía.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bellman, R.. and K. Cooke: *Differential-Difference Equation*, Academic Press, 1963.

[2] Borch, K.: "The Optimal Management Policy of an Insurance Company", *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. VI (1964), pp. 182-197.

[3] Borch, K.: "Control of a Portfolio of Insurance Contracts", *The ASTIN Bulletin*.

[4] Finetti, B. de: "Su un Impostazione Alternativa della Teoria Collectiva del Rischio". *Transactions of the XV International Congress of Actuaries*, 1957, vol. II, pp. 433-443.

[5] Lundberg, F.: "Ueber die Theorie der Rückversicherung", *Transaction of the VI International Congress of Actuaries* (1909), vol. I, pp. 877-955.