Contribución a la resolución de ecuaciones numéricas

(Los números directos y rotados)

Por **D. José Antonio Estrugo Estrugo**,

Catedrático de la Escuela Central Superior de Comercio de Madrid

(PUBLICADO TAMBIÉN EN LA «REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS», DE MADRID, TOMO XXXVII, PÁGINAS 57 A 72.)

I. Definiciones.—Al conjunto de dos números primos entre sí, dados en orden prefijado, el segundo afectado de signo: $\bar{x}_1 = (\alpha_1;\ \pm\beta_1)$, le denominaremos raíz aritmética. A los enteros de la forma

$$\overrightarrow{N}_1 = 10\,\alpha_1 \pm \beta_1, \quad \text{y} \quad \overleftarrow{N}_2 = 10\,\beta_1 \pm \alpha_1,$$

los llamaremos número directo y número rotado, respectivamente, de la raíz $\bar{x}_1$.

Si dos números N_1 y N'_1, cumplen la propiedad señalada, los escribiremos:

$$N_1 \rightleftarrows N'_{1\,(\alpha_1;\ \pm\beta_1)},$$

leyéndose: N_1 directo del rotado N'_1 según la raíz aritmética $(\alpha_1;\ \pm\beta_1)$. Así, por ejemplo:

$$74 \rightleftarrows 47_{(7;\,4)} \quad ; \quad 29 \rightleftarrows 7_{(3;\,-1)} \quad ; \quad 53 \rightleftarrows 35_{(5;\,3)} \quad ; \quad 11 \rightleftarrows 11_{(1;\,1)} \;;$$

$$11 \rightleftarrows 88_{(2;\,-9)} \quad ; \quad -1 \rightleftarrows 109_{(1;\,-11)}$$

De la definición establecida se deduce que dos números pares no pueden ser directo y rotado de una misma raíz.

II. Lema.—La condición necesaria para que dos números sean directo y rotado de una misma raíz aritmética, es que la suma de ambos sea $\dot{1}\dot{1}$ ó $\dot{9}$, y la diferencia $\dot{9}$ u $\dot{1}\dot{1}$, respectivamente. En el primer caso, el segundo elemento de la raíz es positivo, y negativo en el otro.

En efecto, si los números $\overrightarrow{N}_1$ y $\overleftarrow{N}_1$, cumplen las condiciones impuestas, se verificará:

$$\text{para } \bar{x}_1 = (\alpha_1 ; \beta_1) \begin{cases} \overrightarrow{N}_1 = 10\alpha_1 + \beta_1 \\ \overleftarrow{N}_1 = 10\beta_1 + \alpha_1 \end{cases} ; \quad \text{o bien, si } \bar{x}_1 = (\alpha_1 ; \beta_1) \begin{cases} \overrightarrow{N}_1 = 10\alpha_1 - \beta_1 \\ \overleftarrow{N}_1 = 10\beta_1 - \alpha_1 \end{cases}$$

y de aquí,

$$\text{sumando } s_1 = \overrightarrow{N}_1 + \overleftarrow{N}_1 = 11(\alpha_1 + \beta_1) = 11 \cdot p_1 \;,,\; s'_1 = \overrightarrow{N}_1 + \overleftarrow{N}_1 = 9(\alpha_1 + \beta_1) = 9p'_1$$

$$[1]$$

$$\text{restando } d_1 = \overrightarrow{N}_1 - \overleftarrow{N}_1 = 9(\alpha_1 - \beta_1) = 9 \cdot p_2 \;,,\; d'_1 = \overrightarrow{N}_1 - \overleftarrow{N}_1 = 11(\alpha_1 - \beta_1) = 11p'_2$$

que nos confirma lo indicado, siendo fácil hallar los elementos que forman la raíz, puesto que de [1] se deduce

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2) \qquad \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(p'_1 + p'_2)$$
$$\beta_1 = \tfrac{1}{2}(p_1 - p_2) \qquad \beta_1 = \tfrac{1}{2}(p'_1 - p'_2)$$

afectando a β, en el segundo caso, de signo negativo.

Comprobemos los tres últimos ejemplos propuestos anteriormente:

$$\begin{matrix} \overrightarrow{N}_1 = 11 & s_1 = 22^{(2} & \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(2+0) = 1 \\ \overleftarrow{N}_1 = 11 & d_1 = 0^{(0} & \beta_1 = \tfrac{1}{2}(2-0) = 1 \end{matrix} \quad \bar{x}_1 = (1 ; 1) ;$$

$$\begin{matrix} \overrightarrow{N}_1 = 11 & s_1 = 99_{(11} & \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(11-7) = 2 \\ \overleftarrow{N}_1 = 88 & d_1 = -77_{(-7} & \beta_1 = \tfrac{1}{2}(11+7) = 9 \end{matrix} \quad \bar{x}_1 = (2 ; -9) ;$$

$$\begin{matrix} \overrightarrow{N}_1 = -1 & s_1 = 108_{(12} & \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(12-10) = 1 \\ \overleftarrow{N}_1 = 109 & d_1 = -110_{(-10} & \beta_1 = \tfrac{1}{2}(12+10) = 11 \end{matrix} \quad \bar{x}_1 = (1 ; -11) .$$

Esta condición no es suficiente puesto que, por ejemplo, los números 147 y 84 cumplen la propiedad impuesta, dando, sin embargo, la raíz (14 ; 7), cuyos elementos no son primos entre sí. Las raíces aritméticas que tienen sus elementos no primos entre sí, las denominaremos, en lo que sigue, *compuestas*, siendo *simples* las establecidas por la definición.

III. Raíces aritméticas mínimas.—Fijada la raíz, los números directo y rotado son únicos. Igualmente, es único el rotado (directo), una vez determinada la raíz y el directo (rotado). Un número cualquiera N, puede ser considerado como directo de infinitas raíces (simples y compuestas), dando lugar cada una a un rotado diferente. Así, por ejemplo, el número 76 puede ser considerado como directo de las raíces

$$\overline{x}_1 = (7\,;6)\ ;\ \overline{x}_2 = (6\,;16)\ ;\ \overline{x}_3 = (5\,,26)\ ;\ \overline{x'}_1 = (9\,;-14)\ ;\ \overline{x'}_2 = (11\,;-34), \text{ etc.}$$

siendo raíces aritméticas simples todas las indicadas, excepto $\overline{x_2}$ y los rotados respectivos a que dan lugar 67; 166; 265, 131, 329, etc.

Si de entre todas las raíces posibles de un número N, nos fijamos exclusivamente en aquellas en que $|\ \beta_1\ | < 10$, el problema queda determinado formándose dos raíces mínimas opuestas (si $\beta_1 > 0$, positiva; si $\beta_1 < 0$, negativa), pudiendo ser simples las dos, solamente una de ellas, o ninguna.

Ejemplos:

1.º El número 37 tiene las dos raíces mínimas, ya que

$$37 \rightleftarrows 73_{(3\,;\,7)} \qquad \text{y} \qquad 37 \rightleftarrows 26_{(4\,;\,-3)}$$

2.º En cambio 33 sólo tiene la raíz mínima negativa, pues se verifica

$$33 \leftarrow\!|\!\rightleftarrows 33_{(3\,;\,3)} \qquad \text{y} \qquad 33 \rightleftarrows 66_{(4\,;\,-7)}\ (*)$$

3.º El número 147 carece de raíces aritméticas mínimas simples, pues

$$147 \leftarrow\!|\!\rightleftarrows 84_{(14\,;\,-7)} \qquad \text{y} \qquad 147 \leftarrow\!|\!\rightleftarrows 15_{(15\,;\,-3)}$$

Debiendo ser necesariamente el primer elemento de la raíz positivo, es fácil observar que todo $N < 10$, carece de raíz mínima positiva.

Partiendo de la raíz aritmética mínima positiva (simple o compues-

---

(*) El símbolo $\leftarrow\!|\!\rightleftarrows$ lo creamos al objeto de indicar que no es raíz aritmética simple, única que nos interesa.

ta), $\overline{x_1} = (\alpha_1 ; \beta_1)$, la ley de formación de todas las posibles de un número cualquiera N_1 es la siguiente:

$$N_1 \rightleftarrows N'_{k\,(\alpha_1 - k;\, 10k + \beta_1)} \begin{cases} k = 1, 2, 3 \ldots, \alpha - 1 & \text{positivas} \\ k = -1, -2, -3 \ldots & \text{negativas} \end{cases} \qquad [2]$$

Ejemplo: Tomando como base el número 37, se tiene:

$37 \rightleftarrows 224$	$37 \rightleftarrows 125$	$37 \rightleftarrows 26$	$37 \rightleftarrows 73$	$37 \rightleftarrows 172$	$37 \rightleftarrows 271$
$(6 ; -23)$	$(5 ; -13)$	$(4 ; -3)$	$(3 ; 7)$	$(2 ; 17)$	$(1 ; 27)$
$k = -3$	$k = -2$	$k = -1$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$

raíces mínimas

De lo anteriormente expuesto se deduce que el número posible de raíces aritméticas negativas de un número cualquiera N_1 es ilimitado; en cambio, el de positivas no puede exceder a $E\left(\frac{N_1}{10}\right)$.

IV. Propiedades.—Consecuencia inmediata de [2], es que podemos formar los distintos rotados de un mismo directo N_1, mediante la expresión del correspondiente a la raíz mínima, ya que fácilmente deducimos:

$$\begin{array}{ll} N_1 \rightleftarrows N'_1 + 99 \cdot k & \text{para las positivas} \\ N_1 \rightleftarrows 99\,k - N'_1 & \text{para las negativas} \end{array} \quad (k = 1, 2, 3 \ldots \qquad [3]$$

lo que nos permite obtener las notables propiedades siguientes:

1.ª Fijado el directo y rotado de la raíz mínima, todos los demás rotados difieren del primero en un $\dot{99}$ para las positivas y en un $\dot{99}$ de la diferencia entre 99 y el rotado mínimo, para las negativas.

2.ª La suma de dos rotados de raíces complementarias (es decir, del mismo valor absoluto para k en [2]), es $198 \cdot k$, valor independiente del número tomado como base.

Así, en el ejemplo anterior, podemos comprobar:

1.º $\quad 73 + 99 = 172 \;\; ; \;\; 172 + 99 = 271$, etc.

$99 - 73 = 26 \;\; ; \;\; 26 + 99 = 125 \;\; ; \;\; 125 + 99 = 224$, etc.

2.º $\quad |k| = 1 \quad 172 + 26 = 198 \;\; ; \;\; |k| = 2 \quad 271 + 125 = 396 = 198 \times 2$, etc.

V. Números directo y rotado de dos raíces.—Fijadas dos raíces

$$\overline{x_1}=(\alpha_1\,;\pm\beta_1) \quad \text{y} \quad \overline{x_2}=(\alpha_2\,;\pm\beta_2),$$

denominaremos número directo y número rotado de las dos raíces, a los enteros

$$\overrightarrow{N_2}=(10\,\alpha_1\pm\beta_1)(10\,\alpha_2\pm\beta_2) \quad \text{y} \quad \overleftarrow{N_2}=(10\,\beta_1\pm\alpha_1)(10\,\beta_2\pm\alpha_2).$$

formados por los productos de los directos y rotados de cada raíz. Simbólicamente lo indicamos escribiendo: $N_2 \rightleftarrows N'_{2\,(\overline{x_1}\,;\,\overline{x_2})}$.

El procedimiento para reconocer si un número es rotado de otro de dos raíces, consiste en descomponerlos en sus factores primos, viendo luego si verifican lo indicado, bastando para ello aplicar á la investigación de cada raíz las reglas dadas anteriormente.

Así, por ejemplo, los números $\overrightarrow{N_2}=533$ y $\overleftarrow{N_2}=434$, son directo y rotado, respectivamente, de las raices $\overline{x_1}=(4\,;1)$ y $\overline{x_2}=(1\,,3)$, puesto que descompuestos en sus factores primos y aplicando a cada uno de éstos o producto de varios la condición necesaria, se tiene:

$$\begin{array}{llcll} 533=41\,.\,13 \;; & 41+14=55^{(5} & \multirow{2}{*}{$\alpha_1=4\;\beta_1=1$} & 13+31=44^{(4} & \multirow{2}{*}{$\alpha_2=1\;\beta_2=3$} \\ 434=14\,.\,31 \;; & 41-14=27^{(3} & & 13-31=-18^{(-2} & \end{array}$$

También puede ser conveniente efectuar la investigación haciendo uso de la propiedad 1.ª partiendo del directo. Sean los números $\overrightarrow{N_2}=340$ y $\overleftarrow{N_2}=2.716$. Se tiene

$$\overrightarrow{N_2}=340=2\,.\,2\,.\,5\,.\,17 \quad .,, \quad \overleftarrow{N_2}=2716=2\,.\,2\,.\,7\,.\,97.$$

Raíces mínimas de cada factor del directo:

$$2\rightleftarrows 79_{(1\,;\,-8)} \quad ; \quad 4\rightleftarrows 59_{(1\,;\,-6)} \quad ; \quad 5\rightleftarrows 49_{(1\,;\,-5)} \left\{ \begin{array}{l} 17\rightleftarrows 71_{\,(1\,;\,7)} \\ 17\rightleftarrows 28_{\,(2\,;\,-3)} \end{array} \right. \;(^*)$$

y habiendo en el rotado un producto de factores (2 . 2 . 7) que coincide con el de una raíz mínima negativa, que es $\overline{x_1}=(2\,;-3)$, queda en-

(*) **En este caso no hace falta calcular más rotados, pues sumando 99, se ve que no corresponde ya a ningún factor o producto de ellos.**

contrar la otra, lo que resulta ya automático, pues suprimiendo el factor 17 en el directo y el (2 . 2 . 7 = 28) en el rotado, queda

$$\overrightarrow{N}_1 = 20 \quad s_1 = 117 \ (13 \qquad \alpha_2 = {}^1/_2(13 - 7) = 3 \ ,,$$
$$\overleftarrow{N}_1 = 97 \quad d_1 = -77 \ (-7$$
$$\beta_2 = {}^1/_2(13 + 7) = 10, \quad \text{luego } x_2 = (3\,;\,-10)$$

VI. Ampliación del concepto de raíz.—Por ser necesario en las aplicaciones de la presente teoría, convendremos en considerar como raíz mínima simple a todas aquellas en que el primer elemento es un número irracional o complejo, y el segundo la unidad positiva. Como los números directos y rotados han de ser necesariamente enteros, las raíces aritméticas irracionales o complejas deben ser por lo menos dos.

Si después de haber aplicado las reglas dadas, los números $\overrightarrow{N}_2$ y $\overleftarrow{N}_2$ no tienen raíces simples racionales, debemos investigar las dos irracionales o complejas que poseen, para lo cual, suponiendo sean de la forma $z_1 = (m + n\,;\,1)$ y $z_2 = (m - n\,;\,1)$ en donde m es la parte racional y n la irracional o imaginaria, podemos escribir en virtud de la definición de números de dos raíces:

$$\overrightarrow{N}_2 = [10(m+n)+1][10(m-n)+1] = 100(m^2-n^2)+20m+1$$
$$\overleftarrow{N}_2 = [10+(m+n)][10+(m-n)] = 100+20m+(m^2-n^2)$$

donde, por eliminación, deducimos que

$$m = \frac{100\,\overleftarrow{N}_2 - \overrightarrow{N}_2 - 9999}{1.980} \quad \text{y} \quad n = \pm\sqrt{m^2 - \left[\frac{\overrightarrow{N}_2 - \overleftarrow{N}_2}{99} + 1\right]}. \quad [4]$$

Ejemplos:

1.° Si $\overrightarrow{N}_2 = 101$ y $\overleftarrow{N}_2 = 101$, siendo ambos iguales y primos, no tienen raíces aritméticas racionales (*). Aplicando [4], se tendrá:

$$m = \frac{10 \,.\, 100 - 101 - 9 \,.\, 999}{1980} = 0 \ ; \ n = \pm\sqrt{-(0+1)} = \pm i$$

luego las raíces son $z_1 = (+i\,;\,1)$ y $z_2 = (-i\,;\,1)$.

(*) Es imprescindible intentar primero la investigación de las raíces aritméticas racionales, antes de aplicar directamente la [4], pues el no hacerlo así puede dar lugar a la obtención de raíces de carácter extraño, que denominaremos equivalen-

2.º $\overrightarrow{N}_2 = -79 \qquad m = \dfrac{11 . 900 + 79 - 9999}{1980} = 1$

$\overleftarrow{N}_2 = 119 \qquad n = \pm\sqrt{1 - \left(\dfrac{-79 - 119}{99} + 1\right)} = \pm\sqrt{2}$

luego

$$z_1 = (1 + \sqrt{2}\,;\, 1) \qquad \text{y} \qquad z_2 = (1 - \sqrt{2}\,;\, 1)$$

3.º Sean ahora:

$$\overrightarrow{N}_2 = 1 \qquad m = \frac{100 - 1 - 9999}{1980} = -5$$

$$\overleftarrow{N}_2 = 1 \qquad n = \pm\sqrt{25 - 1} = \pm\sqrt{24}$$

por tanto,

$$z_1 = (-5 + \sqrt{24}\,;\, 1) \qquad \text{y} \qquad z_2 = (-5 - \sqrt{24}\,;\, 1)$$

---

tes. Un ejemplo aclarará esta cuestión: dadas dos raíces $\overline{x_1} = (2\,;\,3)$ y $\overline{x_2} = (1\,;\,2)$, formemos el directo y rotado de ambas, obteniendo

$$\overrightarrow{N}_2 = (10 . 2 + 3)(10 . 1 + 2) = 276 \quad \text{y} \quad \overleftarrow{N}_2 = (10 . 3 + 2)(10 . 2 + 1) = 672 .$$

Si aplicamos directamente [4], se obtendrá

$$m = \frac{115}{4} \quad , \quad n = \pm\sqrt{\left(\frac{115}{4}\right)^2 + 3} ,$$

dando las raíces extrañas

$$z_1 = \left(\frac{115}{4} + \sqrt{\left(\frac{115}{4}\right)^2 + 3}\;;\, 1\right) \quad \text{y} \quad z_2 = \left(\frac{115}{4} - \sqrt{\left(\frac{115}{4}\right)^2 + 3}\;;\, 1\right),$$

que cumplen, sin embargo, la condición exigida, pues

$$\left[10\left(\frac{115}{4} + \sqrt{\left(\frac{115}{4}\right)^2 + 3}\right) + 1\right]\left[10\left(\frac{115}{4} - \sqrt{\left(\frac{115}{4}\right)^2 + 3}\right) + 1\right] = 276$$

y

$$\left[10 + \left(\frac{115}{4} + \sqrt{\left(\frac{115}{4}\right)^2 + 3}\right)\right]\left[10 + \left(\frac{115}{4} - \sqrt{\left(\frac{115}{4}\right)^2 + 3}\right)\right] = 672 .$$

De estos extremos, como de otros muchos surgidos anteriormente y tan interesantes desde otro punto de vista al que nos hemos fijado, no nos ocuparemos en el presente trabajo.

4.° Como ejemplo de que la unidad es conveniente muchas veces tenerla en cuenta como factor, resolveremos el siguiente caso:

$$\overrightarrow{N}_2 = 21 = 3 \cdot 7$$

$$\overleftarrow{N}_2 = 1.068 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 89$$

las raíces mínimas de los factores del directo son

$$3 \rightleftarrows 69_{(1\,;\,-7)} \quad , \quad 7 \rightleftarrows 29_{(1\,;\,-3)} \quad \text{y} \quad 21 \rightleftarrows 12_{(2\,;\,1)}\ ;$$

como existe el factor 12 en el rotado, una raíz es (2 ; 1), debiendo ser la otra racional, la obtendremos dividiendo directo y rotado por 21 y 12, respectivamente, obteniéndose

$$\overrightarrow{N}_1 = 1 \ ,, \ \overleftarrow{N}_1 = 89 \ , \ \text{que nos da } s_1 = 90^{(10} \ , \ d_1 = -88_{(-8} \ \text{luego } \bar{x}_2 = (1\,;\,-9)$$

VII. Números directo y rotado de n *raíces.*—Por extensión de las definiciones dadas, podemos sentar la de carácter general siguiente:

Dadas n raíces.

$$\bar{x}_1 = (\alpha_1\,;\,\pm\beta_1)\ ;\ \bar{x}_2 = (\alpha_2\,;\,\pm\beta_2)\ ;\ \bar{x}_3 = (\alpha_3\,;\,\pm\beta_3)\,;\,\ldots\ \bar{x}_n = (\alpha_n\,;\,\pm\beta_n),$$

denominaremos número directo de las n raíces aritméticas simples, al entero

$$\overrightarrow{N}_n = (10\,\alpha_1 \pm \beta_1)(10\,\alpha_2 \pm \beta_2)(10\,\alpha_3 \pm \beta_3)\ldots(10\,\alpha_n \pm \beta_n)$$

y número rotado de las mismas n raíces, al

$$\overrightarrow{N}_n = (10\,\beta_1 \pm \alpha_1)(10\,\beta_2 \pm \alpha_2)(10\,\beta_3 \pm \alpha_3)\ldots(10\,\beta_n \pm \alpha_n)$$

formado cada uno por el producto de los directos y rotados de cada raíz, respectivamente. Esta propiedad se designará simbólicamente:

$$N_n \rightleftarrows N'_{n\,(\bar{x}_1\,;\,\bar{x}_2\,;\,\bar{x}_3\,;\,\ldots\,\bar{x}_n)}.$$

Si existiesen raíces de carácter irracional o complejo, z, éstas tendrán que ser por lo menos dos. Conviene advertir que en el estado actual de la presente teoría, se considera como caso de imposibilidad la separación simultánea de las raíces de tipo z, cuando sean tres o más.

La investigación de las raíces aritméticas de dos números dados, una vez fijado el número de aquéllas (lo que nos ocurrirá siempre en las aplicaciones), se efectúa por los procedimientos indicados anteriormente. Si quedasen dos raíces por separar, una vez halladas las racionales $\bar{x}_i$, se procederá a calcular las dos z por medio de las fórmulas [4].

Ejemplos:

1.° Calcular las tres raíces correspondientes a los números

$$\overrightarrow{N}_3 = 7161 \quad \text{y} \quad \overleftarrow{N}_3 = 1761.$$

a) Por la condición necesaria de suma y resta (*):

$$\overrightarrow{N}_3 = 7161 = 3 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 31 \qquad s_1 = 11 + 11 = 22^{(2}$$

$$\overleftarrow{N}_3 = 1761 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 11 \,.\, 13 \qquad d_1 = 11 - 11 = 0^{(0} \quad \bar{x}_1 = (1\,;1)$$

$$s_2 = 31 + 13 = 44^{(4} \qquad s_3 = 21 + 12 = 33^{(3}$$

$$d_2 = 31 - 13 = 18^{(2} \quad \bar{x}_2 = (3\,;1) \qquad d_3 = 21 - 12 = 9^{(1} \quad \bar{x}_3 = (2\,;1)$$

b) Por raíces mínimas:

$$8 \rightleftarrows 69_{(1\,;-7)} \;;\; 7 \rightleftarrows 29_{(1\,;-3)} \;,\; 11 \rightleftarrows 11_{(1\,;1)} \;\text{y}\; 31 \rightleftarrows 13_{(3\,;1)}.$$

Como ya aparecen en el rotado los factores 11 y 13, tenemos separadas dos raíces y suprimidos en el directo y rotado nos queda $21 \rightleftarrows 12_{(2\,;1)}$; por tanto, las raíces son:

$$\bar{x}_1 = (1\,;1) \;;\; \bar{x}_2 = (3\,;1) \;\text{y}\; \bar{x}_3 = (2\,;1).$$

2.° Calcular las cuatro raíces aritméticas de los números

$$\overrightarrow{N}_4 = -11 \,.\, 613 \quad \text{y} \quad \overleftarrow{N}_4 = 41 \,.\, 412\,.$$

Lo primero que habría que hacer es determinar a qué factor corresponde el signo negativo, pero es fácil ya separar dos raíces, puesto que

$$21 \rightleftarrows 12_{(2\,;1)} \quad \text{y} \quad 7 \rightleftarrows 29_{(1\,;-3)}\,,$$

(*) Suprimimos por su sencillez el tanteo preliminar de encontrar los números cuya suma sea $\dot{1}\dot{1}$ ó dé $\dot{9}$.

luego suprimiendo estos factores nos queda

$$\overrightarrow{N}_2 = -79 \quad \text{y} \quad \overleftarrow{N}_2 = 119,$$

que ya fué resuelto en VI, ejemplo 2.° Por tanto, tienen las siguientes raíces:

$$\bar{x}_1 = (2\,;1) \quad ; \quad \bar{x}_2 = (1\,;-3) \quad ; \quad \bar{x}_3 = (1+\sqrt{2}\,;1) \quad \text{y} \quad \bar{x}_4 = (1-\sqrt{2}\,;1).$$

VIII. Aplicación de esta teoría a la resolución de ecuaciones.—Dada una ecuación reducida de grado n, supuesta con n raíces racionales $x_i = \pm \alpha_i / \beta_i$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad [5]$$

la ecuación cuyas raíces son las recíprocas de la [5] será:

$$\varphi(x) = a_n\ x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0. \qquad [6]$$

Por el teorema fundamental del Algebra podemos escribir:

$$f(x) = a_0 \left(x \mp \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)\left(x \mp \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)\left(x \mp \frac{\alpha_3}{\beta_3}\right) \ldots\ldots \left(x \mp \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) = 0; \qquad [7]$$

$$\varphi(x) = a_n \left(x \mp \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)\left(x \mp \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)\left(x \mp \frac{\beta_3}{\alpha_3}\right) \ldots\ldots \left(x \mp \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) = 0. \qquad [8]$$

Efectuando operaciones en cada paréntesis y simplificando en [7] y [8], obtenemos:

$$f(x) = (x\beta_1 \mp \alpha_1)(x\beta_2 \mp \alpha_2)(x\beta_3 \mp \alpha_3) \ldots\ldots (x\beta_n \mp \alpha_n) = 0. \qquad [9]$$

$$\varphi(x) = (x\alpha_1 \mp \beta_1)(x\alpha_2 \mp \beta_2)(x\alpha_3 \mp \beta_3) \ldots\ldots (x\alpha_n \mp \beta_n) = 0. \qquad [10]$$

Haciendo ahora en [9] y [10] $x = -10$,

$$f(-10) = (-10\beta_1 \mp \alpha_1)(-10\beta_2 \mp \alpha_2)(-10\beta_3 \mp \alpha_3) \ldots\ldots (-10\beta_n \mp \alpha_n) =$$

$$= (-1)^n (10\beta_1 \pm \alpha_1)(10\beta_2 \pm \alpha_2) \ldots\ldots (10\beta_n \pm \alpha_n) \qquad [11]$$

$$\varphi(-10) = (-10\alpha_1 \mp \beta_1)(-10\alpha_2 \mp \beta_2)(-10\alpha_3 \mp \beta_3) \ldots\ldots (-10\alpha_n \mp \beta_n) =$$

$$= (-1)^n (10\alpha_1 \pm \beta_1)(10\alpha_2 \pm \beta_2) \ldots\ldots (10\alpha_n \pm \beta_n) \qquad [12]$$

Suprimiendo el signo correspondiente al grado (*), por interesar exclusivamente el que produzcan las raíces, podemos escribir en definitiva, designando a los números así obtenidos F (— 10) y φ (— 10):

$$\varphi(-10) = (10\alpha_1 \pm \beta_1)(10\alpha_2 \pm \beta_2)(10\alpha_3 \pm \beta_3)\ldots\ldots(10\alpha_n \pm \beta_n) \qquad [13]$$

$$F(-10) = (10\beta_1 \pm \alpha_1)(10\beta_2 \pm \alpha_2)(10\beta_3 \pm \alpha_3)\ldots\ldots(10\beta_n \pm \alpha_n) \qquad [14]$$

Lo anterior nos permite unir la teoría expuesta en el presente trabajo con la resolución de ecuaciones, al demostrarnos el siguiente

Teorema fundamental.

Dada una ecuación reducida de grado n y coeficientes enteros $f(x)$, los números obtenidos sustituyendo en ella y en $f(^1/x)$, x por — 10, y prescindiendo del signo del grado F (— 10) y φ — 10), cumplen la condición

$$\varphi(-10) \rightleftarrows F(-10)_{[\overline{x_1};\, \overline{x_2};\, \overline{x_3} \ldots \overline{x_n}]}$$

en donde se verifica que el primero y el segundo elemento de cada raíz aritmética es el numerador y el dominador, respectivamente, de cada raíz algebraica correspondiente.

IX. Ejemplos y ejercicios.—I. Como caso curioso de aplicación resolveremos las ecuaciones de primer grado siguientes:

a)

$$3x - 7 = 0 \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{N}_1 = 70 + 3 = 73 \\ \overleftarrow{N}_1 = 30 + 7 = 37 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} s_1 = 110^{(10} \\ d_1 = 36^{(4} \end{array} \quad \alpha_1 = 7\,,\, \beta_1 = 3\,, \quad \text{luego} \quad \overline{x_1} = (7\,;\,3)\,,\; x_1 = {}^7/_3\,.$$

b)

$$5x + 7 = 0 \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{N}_1 = -70 + 5 = \overline{65} \\ \overleftarrow{N}_1 = 50 - 7 = 43 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} s_1 = 108_{(12} \\ d_1 = 22_{(2} \end{array} \quad \alpha_1 = 7\,,\, \beta_1 = 5\,, \quad \text{luego} \quad \overline{x_1} = (7\,;\,-5)\,,\; x_1 = \frac{7}{-5} = -{}^7/_5$$

(*) Este convenio tiene por objeto, como ya se indica, conocer el número de factores (raíces) negativas. Esto último se evidenciará prácticamente, sabiendo que el segundo elemento de la raíz aritmética es negativo, lo que se verifica si la suma es $\dot{9}$, como en lugar oportuno se demostró.

c) En general,

$$a\,x - b = 0 \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{N}_1 = 10\,b + a \\ \overleftarrow{N}_1 = 10\,a + b \end{array} \right. \quad \overline{x}_1 = (b\,;a) \quad , \quad x_1 = b/a\,.$$

II. Sea resolver la ecuación

$$5\,x^4 - 26\,x^3 + 60\,x^2 - 86\,x + 15 = 0\,.$$

Para formar el número directo y rotado, puede seguirse este procedimiento abreviado, partiendo del signo positivo del término de mayor grado:

	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
	5	-26	$+60$	-86	$+15$
directo	$\times 1$	$\times 10^1$	$\times 10^2$	$\times 10^3$	$\times 10^4$
rotado	$\times 10^4$	$\times 10^3$	$\times 10^2$	$\times 10^1$	$\times 1$

obteniéndose

$$\overrightarrow{N}_4 = 5 + 260 + 6000 + 86000 + 150.000 = 242.265 = 3 \times 5 \times 31 \times 521\,.$$

$$\overleftarrow{N}_4 = 50.000 + 26000 + 6.000 + 860 + 15 = 82.875 = 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 13 \times 17\,.$$

Tomando como base el directo que tiene menor número de factores, se observa inmediatamente que

$$15 \rightleftarrows 51_{(1\,;\,5)} \quad \text{y} \quad 31 \rightleftarrows 13_{(3\,;\,1)}\;;$$

por *tanto*, nos queda

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{N}_2 = 521 \\ \overleftarrow{N}_2 = 125 \end{array} \right\}$$

y aplicando [4] tenemos: $m = 1$ y $n = \pm 2\,i$. Las raíces aritméticas son,

$$\overline{x}_1 = (1\,;\,5) \quad , \quad \overline{x}_2 = (3\,;\,1) \quad , \quad z_1 = (1 + 2\,i\,;\,1) \;\; \text{y} \;\; z_2 = (1 - 2\,i\,;\,1)\,.$$

Las de la ecuación dada serán, por tanto,

$$x_1 = {}^1/_5 \quad , \quad x_2 = {}^3/_1 = 3 \quad , \quad x_3 = 1 + 2\,i \;\; \text{y} \;\; x_4 = 1 - 2\,i\,.$$

III. Sea ahora la ecuación

$$7\,x^4 + 6\,x^3 - 15\,x^2 - 12\,x + 2 = 0\,.$$

Aplicando el método abreviado se obtiene inmediatamente

$$\overrightarrow{N}_4 = 30.447 = 3 \times 3 \times 17 \times 199$$
$$\overleftarrow{N}_4 = 62.622 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 71 .$$

Por la condición necesaria de suma y resta se observa inmediatamente que

$$9 \rightleftarrows 9_{(1\,;\,-1)} \quad \text{y} \quad 17 \rightleftarrows 71_{(1\,;\,7)}$$

Al ser la primera raíz aritmética negativa, entraña un cambio de signo en el directo, lo que nos permite escribir, haciendo corresponder a los factores

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{N}_4 = \overline{9}\,.\,17\,.\,\overline{199} \\ \overleftarrow{N}_4 = 9\,.\,71\,.\,98\end{array}\right. \quad ; \quad \text{luego} \quad \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{N}_2 = -199 \\ \overleftarrow{N}_2 = 98\end{array}\right.$$

y aplicando [4], se tiene $n = 0$, $m = \pm \sqrt{2}$, luego

$$\overline{x}_1 = (1\,;\,-1) \quad , \quad \overline{x}_2 = (1\,;\,7) \quad , \quad z_1 = (\sqrt{2}\,;\,1) \quad , \quad z_2 = (-\sqrt{2}\,;\,1)$$

siendo las raíces de la ecuación

$$x_1 = \frac{1}{-1} = -1 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{7} \quad , \quad x_3 = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad x_4 = -\sqrt{2} .$$

IV. Propongámonos resolver la ecuación

$$4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$$

Siguiendo idéntico proceso, obtendremos

$$\overrightarrow{N}_3 = 4 + 120 - 100 - 3000 = -2.976 = -2^5\,.\,3\,.\,31 = 31 \times 12 \times \overline{8}$$

$$\overleftarrow{N}_3 = 4000 + 1.200 - 100 - 3 = 5.187 = 3\,.\,7\,.\,13\,.\,19 = 13 \times 21 \times 19$$

Por consiguiente, al ser

$$\overline{x}_1 = (3\,;\,1) \quad , \quad \overline{x}_2 = (1\,;\,2) \quad \text{y} \quad \overline{x}_3 = (1\,;\,-2) ,$$

se tiene

$$x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = {}^1/_2 \quad \text{y} \quad x_3 = -{}^1/_2 .$$

V. Consideremos la ecuación

$$x^4 - 1 = 0$$

Se tiene, aplicando la regla

	+	−	+	−	+
	I	O	O	I	− I
directo	× I	× IO	× IO²	× IO³	× IO⁴
rotado	× IO⁴	× IO³	× IO²	× IO	× I

Por tanto,

$$\overrightarrow{N}_4 = 1 - 10.000 = -9.999 = \overline{9}.11.101$$

$$\overleftarrow{N}_4 = 10.000 - 1 = 9.999 = 9 \cdot 11.101$$

quedando determinadas

$$9 \rightleftarrows 9_{(1\,;\,-1)} \quad \text{y} \quad 11 \rightleftarrows 11_{(1\,;\,1)}, \qquad \text{queda} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{N}_2 = 101 \\ \overleftarrow{N}_2 = 101 \end{array} \right\}$$

que ya fué resuelta en VI, ejemplo 1.º. Luego:

$$\overline{x}_1 = (1\,;\,-1) \quad \overline{x}_2 = (1\,;\,1) \quad z_1 = (+i\,;\,1) \quad z_2 = (-i\,;\,1),$$

y

$$x_1 = {}^1/_{-1} = -1 \quad , \quad x_2 = 1 \quad x_3 = +i \quad x_4 = -i$$

VI. Ejemplo de caso de imposibilidad nos lo suministra la ecuación

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

que nos da

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{N}_3 = -7699 \quad \text{número primo} \\ \overleftarrow{N}_3 = 923 \end{array} \right.$$

indicándonos tiene las tres raíces de tipo z.

Como aplicación de todo lo anterior, indicamos sintéticamente el cálculo de las raíces de la siguiente ecuación:

$$216x^7 - 180x^6 - 4.542x^5 + 9.113x^4 + 558x^3 - 5293x^2 - 12x + 140 = 0.$$

Se tiene:

$$\overrightarrow{N}_7 = -886.685.184 = -2^9 \times 3^3 \times 7^3 \times 11 \times 17 = 11 \times 21 \times \overline{49} \times 16 \times \overline{4} \times \overline{17} \times 72$$

$$\overleftarrow{N}_7 = 1.795.757.040 = 2^4 \times 3^4 \times 5 \times 7 \times 11 \times 59 \times 61 = 11 \times 12 \times 5 \times 61 \times 59 \times 28 \times 27$$

que da lugar a las raíces aritméticas

$$\overline{x_1} = (1 ; 1) \; , \; \overline{x_2} = (2 ; 1) \; ; \; \overline{x_3} = (5 ; -1) \; , \; \overline{x_4} = (1 ; 6) \; , \; \overline{x_5} = (1 ; -6) \; ,$$
$$\overline{x_6} = (2 ; -3) \quad \text{y} \quad \overline{x_7} = (7 ; 2)$$

siendo las de la ecuación:

$$x_1 = 1 \; , \; x_2 = 2 \; , \; x_3 = -5 \; , \; x_3 = {}^1/_6 \; , \; x_5 = -{}^1/_6 \; , \; x_6 = -{}^2/_3 \text{ y } x_7 = {}^7/_2 \, .$$

X. Iniciación de una tabla de factores directos y rotados.—Sería posible dar un carácter marcadamente mecánico a la investigación de las raíces racionales de una ecuación numérica de cualquier grado, si poseyésemos una tabla de factores directos y rotados que nos evitase los sencillos tanteos para ver si se verifica la condición necesaria y el cálculo de los elementos de la raíz aritmética, una vez encontrados los factores que la cumplan.

Es evidente que la practicidad de la indicada tabla dependerá de su extensión; pero su construcción es tan sencilla que, fijado un límite cualquiera, es fácil extenderla hasta donde pueda interesar, para ser utilizada en las aplicaciones más frecuentes en cada especialidad.

A título meramente de ejemplo hemos calculado la siguiente tabla, cuya construcción y manejo son tan simples que nos relevan de extendernos en explicaciones sobre el particular.

Iniciación de una tabla de directos y rotados con raíces aritméticas simples

Factor del directo	Factor del rotado: $k=-5$	$k=-4$	$k=-3$	$k=-2$	Raíz mínima negativa	Raíz mínima positiva	$k=1$	$k=2$
1 ⇄	$485_{(5;-49)}$	$386_{(4;-39)}$	$287_{(3;-29)}$	$188_{(2;-19)}$	$89_{(1;-9)}$			
2 ⇄	$475_{(5;-48)}$		$277_{(3;-28)}$		$79_{(1;-8)}$			
3 ⇄	$465_{(5;-47)}$	$366_{(4;-37)}$	$267_{(3;-27)}$	$168_{(2;-17)}$	$69_{(1;-7)}$			
4 ⇄	$455_{(5;-46)}$		$257_{(3;-26)}$		$59_{(1;-6)}$			
5 ⇄		$346_{(4;-35)}$	$247_{(3;-25)}$	$148_{(2;-15)}$	$49_{(1;-5)}$			
6 ⇄	$435_{(5;-44)}$				$39_{(1;-4)}$			
7 ⇄	$425_{(5;-43)}$	$326_{(4;-33)}$	$227_{(3;-23)}$	$128_{(2;-13)}$	$29_{(1;-3)}$			
8 ⇄	$415_{(5;-42)}$		$217_{(3;-22)}$		$19_{(1;-2)}$			
9 ⇄	$405_{(5;-41)}$	$306_{(4;-31)}$		$108_{(2;-11)}$	$9_{(1;-1)}$			
10 ⇄			$197_{(3;-20)}$					
11 ⇄	$385_{(5;-39)}$	$286_{(4;-29)}$	$187_{(3;-19)}$	$88_{(2;-9)}$		$11_{(1;1)}$		
12 ⇄	$375_{(5;-38)}$					$21_{(1;2)}$		
13 ⇄	$365_{(5;-37)}$	$266_{(4;-27)}$	$167_{(3;-17)}$	$68_{(2;-7)}$		$31_{(1;3)}$		
14 ⇄	$355_{(5;-36)}$		$157_{(3;-16)}$			$41_{(1;4)}$		
15 ⇄		$246_{(4;-25)}$		$48_{(2;-5)}$		$51_{(1;5)}$		
16 ⇄	$335_{(5;-34)}$		$137_{(3;-14)}$			$61_{(1;6)}$		
17 ⇄	$325_{(5;-33)}$	$226_{(4;-23)}$	$127_{(3;-13)}$	$28_{(2;-3)}$		$71_{(1;7)}$		
18 ⇄	$315_{(5;-32)}$					$81_{(1;8)}$		
19 ⇄	$305_{(5;-31)}$	$206_{(4;-21)}$	$107_{(3;-11)}$	$8_{(2;-1)}$		$91_{(1;9)}$		
20 ⇄			$97_{(3;-10)}$			$101_{(1;10)}$		
21 ⇄	$285_{(5;-29)}$	$186_{(4;-19)}$				$111_{(1;11)}$	$12_{(2;1)}$	
22 ⇄	$275_{(5;-28)}$		$77_{(3;-8)}$			$121_{(1;12)}$		
23 ⇄	$265_{(5;-27)}$	$166_{(4;-17)}$	$67_{(3;-7)}$			$131_{(1;13)}$	$32_{(2;3)}$	
24 ⇄	$255_{(5;-26)}$					$141_{(1;14)}$		
25 ⇄		$146_{(4;-15)}$	$47_{(3;-5)}$			$151_{(1;15)}$	$52_{(2;5)}$	
26 ⇄	$235_{(5;-24)}$		$37_{(3;-4)}$			$161_{(1;16)}$		
27 ⇄	$225_{(5;-+22)}$	$126_{(4;-13)}$				$171_{(1;17)}$	$72_{(2;7)}$	
28 ⇄	$215_{(5;-22)}$		$17_{(3;-2)}$			$181_{(1;18)}$		
29 ⇄	$205_{(5;-21)}$	$106_{(4;-11)}$	$7_{(3;-1)}$			$191_{(1;19)}$	$92_{(2;9)}$	
30 ⇄						$201_{(1;20)}$		
31 ⇄	$185_{(5;-19)}$	$86_{(4;-9)}$				$211_{(1;21)}$	$112_{(2;11)}$	$13_{(3;1)}$