Cálculo del tanto de interés en las rentas ciertas

Por **José Antonio Estrugo,**
Catedrático de Matemática Financiera
en la Escuela Central Superior
de Comercio.

Partiendo de la igualdad fundamental:

$$a = \frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n}\,, \qquad [1]$$

se deduce quitando denominadores y haciendo

$$z = 1 + i \quad \therefore \quad i = z - 1 \qquad [2]$$

$a\,(z-1)\,z^n = z^n - 1$,, $az^{n+1} - (1+a)\,z^n + 1 = 0$; y de aquí para

$$\alpha = \frac{1}{a}\,,$$

$$z^{n+1} - (1+\alpha)\,z^n + \alpha = 0. \qquad [3]$$

Si, por último, efectuamos el cambio de variable haciendo

$$z = y\,(1+\alpha)\,, \quad \text{de donde} \quad y = \frac{1+i}{1+\alpha} \qquad [4]$$

se tiene en [3]

$$(1+\alpha)^{n+1}\,y^{n+1} - (1+\alpha)^{n+1}\,y^n + \alpha = 0$$

o bien,

$$y^{n+1} - y^n + \frac{\alpha}{(1+\alpha)^{n+1}} = 0$$

y en definitiva para $\beta = \frac{\alpha}{(1+\alpha)^{n+1}}$.

$$y^n - y^{n+1} = \beta \qquad [5]$$

ecuación que por ser en general de grado $n > 4$, no es posible resolver de manera inmediata.

La forma singular que presenta la ecuación [5]—diferencia de dos potencias consecutivas—, nos sugiere la idea de resolver la misma mediante una tabla de valores previamente calculados, que resultará útil siempre que los que pueda alcanzar y en los casos prácticos, tengan un límite muy estrecho de oscilación.

Al objeto de conseguir una orientación a este respecto, basta observar, en primer lugar, el valor de y en [4].

$$y = \frac{1+i}{1+\alpha}$$

para obtener un valor superior a y, pues al ser $i < \alpha$, será $y < 1$; un límite inferior nos lo suministra el siguiente desarrollo en serie:

$$y = \frac{1+i}{1+\alpha} = \frac{1+i}{1+\dfrac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n-1}} = \frac{(1+i)\,[(1+i)^n-1]}{(1+i)^{n+1}-1} = \frac{(1+i)\,(1-(1+i)^{-n})}{(1+i)-(1+i)^{-n}} =$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-(n+1)}} = \frac{n}{n+1}\left\{1+\frac{i}{2}-\frac{n+2}{12}i^2+\frac{n+2}{24}i^3+\dots\right\} > \frac{n}{n+1}\,. \quad [6]$$

consiguiéndose así la doble limitación

$$\frac{n}{n+1} < y < 1\,.$$

Como en la práctica es, en general, $n > 20$, se tendrá

$$\frac{n}{n+1} \overline{<} 0'96$$

que permite a partir de esta base construir una tabla de diferencia de potencias, cuya formación es tan simple que nos releva de toda explicación.

A título de ejemplo, damos al final de este trabajo unos valores calculados a partir de 0'97 y variable de milésima en milésima hasta 0'98, encontrándose los de n comprendidos entre 20 y 30, como iniciación de una más completa que pudiera calcularse.

Ejemplo:

El valor actual de una renta unitaria postpagable, de duración 21 años, es de 12,82115. Calcular el tipo de interés a que ha sido evaluada.

En este caso, $n = 21$, $\alpha = 1/12,82115 = 0'077996$.

Calculemos el valor de β por logaritmos. Se tiene

$$\begin{aligned} \log 0'077996 &= \bar{2},892072 \\ -22 \log 1,077996 &= 0,717574 \\ \beta = \text{ant} \log \bar{2}174498 &= 0'014.945. \end{aligned}$$

Leyendo ahora la tabla en la fila correspondiente a $n = 21$, observamos que el valor de β se encuentra comprendido entre

$$0'975 > y > 0'974$$

Una interpolación proporcional nos suministra el valor

$$y_1 = 0'974026$$

y, por tanto, según [4]

$$i_1 = (1 + \alpha)\, y_1 - 1 = 1,077996 \times 0'974026 - 1 = 0'049996.$$

[El tanto exacto es el 5 %.]

La expresión [6] nos permite obtener directamente un valor muy aproximado de i, sin utilización de la tabla, pues teniendo en cuenta la igualdad fundamental de los métodos que se basan en el desarrollo en serie:

$$\frac{a}{n} = 1 - \frac{n+1}{2} i + \frac{(n+1)\,(n+2)}{6} i^2 - \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{24} i^3 + \dots$$

se obtiene elevando ambos miembros a la potencia $-\frac{1}{n+1}$,

$$\left[\frac{a}{n}\right]^{-\frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{i}{2} - \frac{n+2}{24} i^2 + \frac{n+2}{48} i^3 \pm \dots$$

y de aquí,

$$\left[\left(\frac{n}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1\right] 2 = i - \frac{n+2}{12} i^2 + \frac{n+2}{24} i^3 + \dots$$

valor que, sustituído en [6], nos da

$$y = \frac{1+i}{1+\alpha} = \frac{n}{n+1} \left\{ 1 - \frac{i}{2} + 2\left[\left(\frac{n}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1\right] \right\}$$

y despejando *i*, se tiene

$$i = 2\,\frac{k\left[2\left(\frac{n}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1\right] - 1}{2 + k} \qquad [7]$$

en donde hemos hecho para simplificar $k = (1 + \alpha)\frac{n}{n+1}$.

Así, el ejemplo anterior, resuelto de acuerdo con la fórmula [7], da siendo

$$k = 1{,}028.996 \qquad 2\left(\frac{n}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1 = 1{,}04536$$

y, por tanto,

$$i = 2\,\frac{1{,}028996 \times 1{,}04536 - 1}{2 + 1{,}028996} = 0{,}0499.97,$$

valor suficientemente aproximado en la práctica.

Tabla de valores de β *para* $o'97 \leqq y \leqq o'98$ $(20 \leqq n \leqq 30)$

n	0,970	0,971	0,972	0,973	0,974	0,975	0,976	0,977	0,978	0,979	0,980
20	0,016.314	0,016.100	0,015.867	0,015.618	0,015.351	0,015.067	0,014.764	0,014.442	0,014.099	0,013.736	0,013.352
21	15.824	15.633	15.422	15.196	14.952	14.691	14.410	14.110	13.789	13.448	13.085
22	15.350	15.179	14.981	14.786	14.564	14.323	14.064	13.786	13.486	13.166	12.823
23	14.889	14.739	14.571	14.387	14.185	13.965	13.726	13.468	13.189	12.889	12.567
24	14.443	14.312	14.163	13.998	13.816	13.616	13.397	13.158	12.899	12.618	12.316
25	14.009	13.897	13.766	13.620	13 457	13.276	13,075	12.856	12.615	12.353	12.069
26	13.589	13.494	13.381	13.253	13.107	12.944	12.762	12.560	12.338	12.094	11.828
27	13.813	13.102	13.007	12.895	12.766	12.620	12.455	12.271	12.066	11.840	11.591
28	12.786	12.722	12.642	12.547	12.454	12.305	12.156	11.989	11.801	11.591	11.359
29	12 402	12.353	12.288	12 208	12.111	11.997	11,865	11.713	11.541	11.348	11.132
30	12.030	11.995	11.944	11.878	11.796	11.697	11.580	11.444	11.287	11.109	10.910