Trabajo Fin de Máster

El Seguro de Dependencia a través de Markov, Thiele y VBA

Gabriel Rodríguez González

2015/2016

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

MÁSTER EN CIENCIAS ACTUARIALES Y FINANCIERAS

Trabajo Fin de Máster

El Seguro de Dependencia a través de Markov, Thiele y VBA

Gabriel Rodríguez González

Julio, 2016

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Autorización

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Ciencias Actuariales
Título: El Seguro de Dependencia a través de Markov, Thiele y VBA
Directores: José Miguel Rodríguez Pardo y Jesús Simón del Potro
Breve descripción del contenido
a)Revisión del marco legislativo español en el seguro de dependencia. b)Análisis de la base muestral para el estudio estadístico. c)Construcción del método de tarificación para seguros de dependencia bajo el modelo de múltiples estados basados en procesos de Markov. d)Applicaciones de las tablas de mortalidad construidas. e)Revisión de las ecuaciones diferenciales de Thiele para la aproximación de la reserva y su ilustración. f) Códigos en VBA, de elaboración propia, de algoritmos matemáticos como la graduación kernel, spline cúbico y Thiele.

Índice

Resumen

En el presente trabajo se traza un procedimiento para el tratamiento actuarial de los seguros de dependencia. Para ello, se revisan los principales modelos de tarificación de esta tipología de producto. En particular, el conocido modelo de múltiples estados basado en procesos de Markov. Por otra parte, el propósito planteado conllevará la revisión de la Ley de Dependencia en España, así como el análisis de la base muestral del modelo, que consistirá en la Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud. Asimismo, señalaremos los pros y contras de la información estadística disponible sobre la población española en materia de dependencia. Además, atenderemos a otro importante proceso actuarial en el manejo de productos aseguradores: el cálculo de la reserva. Con el objetivo de aproximar la provisión matemática generada por este tipo de seguros, revisaremos las conocidas ecuaciones diferenciales de Thiele. Adicionalmente, para llevar a cabo algunas de estas tareas será necesaria la utilización de ciertas técnicas matemáticas, como la graduación kernel, interpolación mediante spline cúbico y el método de Euler. En este sentido, se proporcionan códigos en VBA, de elaboración propia, para dar apoyo a dichos cálculos. Igualmente, a lo largo del documento los métodos analizados irán acompañados de ilustraciones, ejemplos y aplicaciones.

Abstract

On this work a procedure for the actuarial treatment of dependency insurance products is drawn up. To achieve it, we will go through the main pricing models of this type of products. In particular, the well-known multiple states model based on Markov processes. What is more, the purpose entails the review of the related 2006 Spanish Law of Dependency, as well as the analysis of the 1999 Survey of Dependency developed by the INE, taken as the sample to conduct this study. Additionally, pros and cons of the statistical information available from Spanish population on dependency are pointed out. Furthermore, the study is focused on another important actuarial task concerning the management of an insurance product: the estimation of the reserve. In order to approach the mathematical provision arisen from these

products, the Thiele differential equations are checked over. Moreover, all along this study it will become necessary to make use of some mathematical techniques, such as the kernel smoothing, the cubic spline interpolation and even the Euler method. This way, some VBA's own codes are provided on this document in order to make calculations easier. In addition, the procedures are illustrated with examples, images and applications.

Introducción

La Ley 39/2006, del 14 de diciembre, de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia, marca un antes y un después en cuanto a la protección social en España. Hasta el momento existían normativas que ofrecían amparo a personas de la tercera edad y discapacitados. Sin embargo, se daban situaciones en las que debido a la edad, a la inexistencia de enfermedad o discapacidad, ciertos individuos no encontraban apoyo a sus necesidades por parte de la Administración Pública.

Paralelamente a esta Ley, nace el seguro de dependencia como producto ideado para complementar la prestación pública contemplada en esta norma.

Desde sus comienzos, el seguro de dependencia en España ha estado sufriendo un grado de evolución muy bajo en comparación con otros países. En efecto, encontramos en países como Alemania ejemplos de gran desarrollo en este tipo de productos. Las causas de estas diferencias atienden a asuntos de cobertura desde el sector público, así como a la fiscalidad, entre otros motivos.

Ciertamente, los modelos de España y Alemania son muy diferentes. Por un lado tenemos el modelo Beverdgiano, representado en este caso por España. Por otro lado el modelo Bismarckiano, el cual sigue Alemania. Su principal diferencia es que el primero se caracteriza por la prestación universal, otorgándose a todos los ciudadanos que lo requieran, independientemente de los recursos o situación laboral, mientras que en el segundo, las prestaciones se encuentran condicionadas a la cotización previa del individuo al sistema. Es decir, un seguro de dependencia obligatorio que ofrece protección al trabajador y a su familia, financiándose mediante una cotización sobre los salarios. No es de extrañar entonces que el ciudadano español no tenga la necesidad ni obligación de contratar este tipo de seguros, sino la posibilidad de mejora en caso de hacerlo.

Sin embargo, desde que la Ley entró en vigencia, han estado surgiendo ciertos problemas de financiación y equilibrio económico. De hecho, la Ley de

Presupuestos para el año 2012, junto con el Real Decreto-ley 20/2012[1] son pruebas del endurecimiento de los requisitos para acceder a la prestación, haciendo más rigurosa la valoración de la situación de dependencia. Por lo tanto, en aras de no reducir la calidad de las prestaciones, y en vista de la situación económica actual que sufre España, el interés por retomar el seguro de dependencia puede aumentar.

A lo largo del presente trabajo se recorrerán diferentes aspectos que rodean a este tipo de productos.

Primeramente, nos encontraremos en el Capítulo 1 con una revisión del marco legislativo en España. Aunque profundizar en aspectos legales no es el objetivo de este documento, se considera importante conocer las bases establecidas en la Ley de Dependencia del 2006, ya que a la hora de atender a una clasificación de los datos muestrales, comprender el proceso de reconocimiento del carácter de dependencia, así como dejar claros ciertos conceptos sobre la materia, es necesario poseer cierto conocimiento sobre la Ley.

Asimismo, en los Capítulos 4.1 y 4.2 revisaremos algunos de los principales trabajos sobre modelos de tarificación de seguros de dependencia. En particular, esbozaremos un procedimiento basado en el modelo de múltiples estados desarrollados a partir de los procesos de Markov. No obstante, debido a la escasez de muestras y estudios estadísticos sobre dependencia en el territorio español, nos veremos obligados a establecer hipótesis y asunciones acercándonos en ocasiones al modelo de incidencia/renta. En efecto, profesionales del sector como Eduardo Sánchez y Pociello, reivindican en sus trabajos la falta de información adecuada para estudios estadístico-actuariales en materia de dependencia. De hecho, es la dificultad en la obtención de las probabilidades de transición uno de los motivos por los que el empleo del método de múltiples estados no está generalizado. No obstante, en el Capítulo 3 se lleva a cabo una revisión de la Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud (EDDS) de 1999, analizando las diferencias que presenta con la más actual Encuesta de Discapacidad, Autonomía personal y situaciones de Dependencia del 2008. Siendo la primera la base muestral del modelo en cuestión.

Por otra parte, en cuanto a la provisión matemática generada por este

[1] La aplicación de la Ley de Dependencia en España. Consejo Económico y Social España

tipo de seguros, revisamos en el Capítulo 6 una técnica basada en ecuaciones diferenciales. Se trata en efecto de las ecuaciones diferenciales de Thiele. Nos detendremos en su formulación, hipótesis y adaptación al modelo de múltiples estados. Igualmente, con el propósito de hallar la solución a este problema matemático, se propondrá un método numérico para aproximar las soluciones de estas ecuaciones.

Paralelamente, a lo largo del documento surgirá la necesidad de emplear ciertas herramientas para poder alcanzar los objetivos propuestos, como pueden ser la graduación kernel, la interpolación spline cúbico y el método de Euler. En este sentido, se recogen en el Capítulo A los códigos en VBA, de elaboración propia, en los cuales estas técnicas se encuentran implementadas, siendo su aplicación directa mediante ejecución en Excel.

Capítulo 1

El seguro de dependencia en la legislación española

La base legislativa de este estudio se tendrá en [5], la *Ley 39/2006, de 14 de diciembre, de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia.* Asimismo, también se hará hincapié en [6], el *Real Decreto 174/2011, de 11 de febrero, por el que se aprueba el baremo de valoración de la situación de dependencia establecido por la Ley 39/2006.*

La revisión de la Ley es necesaria tanto para realizar un correcto estudio estadístico, como para asentar las bases de un posible producto asegurador. En efecto, a nivel estadístico es necesario saber qué clasificación de la muestra sería la adecuada para adaptarse a lo que dictamina ley.

En particular, nos interesará saber qué entiende la Ley por dependencia, cuáles son los grupos que considera, y bajo qué baremos se valoran a las personas susceptibles de encontrarse en alguno de estos grupos.

Anticipar además que en este documento se emplearán constantemente las palabras *dependencia*, *deficiencia* y *discapacidad*. Para no caer en el error de usarlas indistintamente, se definen a continuación:

- *Dependencia*[1]*: el estado de carácter permanente en que se encuentran las personas que, por razones derivadas de la edad, la enfermedad o la discapacidad, y ligadas a la falta o a la pérdida de autonomía física, mental, intelectual o sensorial, precisan de la atención de otra u otras*

[1] Definición extraída de [5], texto consolidado con última modificación el 30 de octubre de 2015.

personas o ayudas importantes para realizar actividades básicas de la vida diaria o, en el caso de las personas con discapacidad intelectual o enfermedad mental, de otros apoyos para su autonomía personal.

- *Discapacidad*[2]*: toda limitación grave que afecte o se espere que vaya a afectar durante más de un año a la actividad del que la padece y tenga su origen en una deficiencia.*
- *Deficiencias* [3]*: hacen referencia a las anormalidades de la estructura corporal y de la apariencia, y a la función de un órgano o sistema cualquiera que sea su causa; en principio las deficiencias representan trastornos a nivel de órgano.*

Cabe anticipar que esta definición de *dependencia* caracteriza, junto con otros motivos, la matriz de transición. Bajo el carácter permanente que recoge la misma, se considera que una persona dependiente no se recupera, es decir, que la probabilidad de volver a un estado anterior es 0. Lo veremos en más detalle en la Sección 4.1.

Por otro lado, el *artículo 26* de la Ley establece los grados de dependencia considerados, y son los siguientes:

a) *Grado I. Dependencia moderada: cuando la persona necesita ayuda para realizar varias actividades básicas de la vida diaria, al menos una vez al día o tiene necesidades de apoyo intermitente o limitado para su autonomía personal. Se corresponde a una puntuación final del BVD de 25 a 49 puntos.*

b) *Grado II. Dependencia severa: cuando la persona necesita ayuda para realizar varias actividades básicas de la vida diaria dos o tres veces al día, pero no requiere el apoyo permanente de un cuidador o tiene necesidades de apoyo extenso para su autonomía personal. Se corresponde a una puntuación final del BVD de 50 a 74 puntos.*

c) *Grado III. Gran dependencia: cuando la persona necesita ayuda para realizar varias actividades básicas de la vida diaria varias veces al día y, por su pérdida total de autonomía física, mental, intelectual o sensorial, necesita el apoyo indispensable y continuo de otra persona o tiene necesidades de apoyo generalizado para su autonomía personal. Se corresponde a una puntuación final del BVD de 75 a 100 puntos.*"

[2] A efectos de [12], la Encuesta de Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud (*EDDS*), y extraída de la misma.

[3] Definición extraída de la *EDDS*.

Como se puede observar, el reconocimiento de la dependencia obedece a la puntuación final del conocido *Baremo de Valoración de la Dependencia* (en adelante, BVD). Los criterios atendidos en dicho estudio se encuentran detallados en [6]. En efecto, la Ley establece en su *artículo 27* que "*los grados de dependencia, a efectos de su valoración, se determinarán mediante la aplicación del baremo que se acuerde en el Consejo Territorial de Servicios Sociales y del Sistema para la Autonomía y Atención a la Dependencia para su posterior aprobación por el Gobierno mediante real decreto. Dicho baremo tendrá entre sus referentes la Clasificación Internacional del Funcionamiento, la Discapacidad y la Salud (CIF) adoptada por la Organización Mundial de la Salud. (...) El baremo establecerá los criterios objetivos de valoración del grado de autonomía de la persona, de su capacidad para realizar las distintas actividades de la vida diaria, los intervalos de puntuación para cada uno de los grados de dependencia y el protocolo con los procedimientos y técnicas a seguir para la valoración de las aptitudes observadas, en su caso. El baremo valorará la capacidad de la persona para llevar a cabo por sí misma las actividades básicas de la vida diaria, así como la necesidad de apoyo y supervisión para su realización por personas con discapacidad intelectual o con enfermedad mental*".

Con respecto a la obtención de información para la aplicación del BVD, se siguen cuatro procedimientos:

- los informes de salud y del entorno de la persona a valorar,
- la entrevista,
- la observación y comprobación directa, y
- la aplicación de pruebas en un contexto estructurado.

Cabe señalar que este mismo procedimiento es el que se ha llevado acabo en la EDDS, pudiendo ser consultado en [12].

Capítulo 2

Elementos de cobertura del riesgo de dependencia

En España, se ofrece cobertura al fenómeno de la dependencia tanto desde el sector público como del privado. En efecto, es el potente sistema de Seguridad Social de España uno de los principales motivos por los que la cobertura de esta contingencia está aún poco desarrollada en el sector privado. Sin embargo, y desgraciadamente, dicho sistema podría cambiar en un futuro próximo debido a la desfavorable situación económica en la que nos encontramos.

Dentro de la oferta privada, y como comenta Eduardo Sánchez en [22], existen varias opciones en el mercado español que permiten cubrir dicho riesgo. Entre ellos se destacan los seguros de dependencia y los productos de transformación del patrimonio.

Por una parte, los seguros de dependencia consisten en el pago de una prima por parte del tomador a cambio de una contraprestación, que conlleva la obligación por parte del asegurador al pago o a la prestación de un servicio en caso de acaecimiento de la contingencia de dependencia.

Por otro lado, las fórmulas de transformación del patrimonio, que no se consideran instrumentos de previsión, le ofrecen al asegurado una vez en estado de dependencia financiarse para hacer frente a los gastos generados por tal estado.

Una de las diferencias entre ambos productos reside en que mientras en el seguro los flujos probables se corrigen con probabilidades de acaecimiento de la contingencia y permanencia en cada uno de los estados, los segundos no asumen, por lo general, riesgos biométricos asociados a la dependencia.

Entre los productos de transformación del patrimonio se encuentran la *hipoteca inversa*, habiendo sido comercializada por algunas compañías como Caixa Sabadell y La Caixa, entre otros, según se indica en [22]; y la vivienda pensión. Pudiendo incluso ser utilizados para tal cobertura productos como acciones o depósitos.

En cuanto al seguro de dependencia, son ejemplos de compañías con este producto CASER y AXA. En ambos productos, se ofrece cobertura para las contingencias de dependencia severa y grand dependencia. Sin embargo, ya en [22] se dejó constancia del escaso éxito de este tipo de productos. En efecto, no sólo es la cobertura pública que ofrece la Seguridad Social ni la poco beneficiosa fiscalidad de la que gozan estos seguros los enemigo del seguro privado, sino también la inexistente o escasa información acerca de la situación y evolución de la población dependiente, la cual imposibilita la obtención de estadísticas adecuadas para llevar a cabo las tarificaciones de dichos productos.

Actualmente, tres de los más conocidos procedimientos de tarificación son el de incidencia/renta, el Friendly Society y el basado en procesos de Markov. Será este último en el que centremos el trabajo.

Por lo que respecta al método incidencia/renta (*inception rate and disability annuity value*), y con base en [7], podemos afirmar que tuvo su origen en Estados Unidos, y es el método más popular hoy en día en UK, Austria, Alemania y Suiza. En este tipo de modelo, son necesarios dos componentes: la tasa de incidencia, y el valor de la renta por discapacidad en el momento del siniestro. No obstante, Haberman y Pitacco demuestran en [10] que los resultados obtenidos al usar este método pueden ser también obtenidos usando el modelo de múltiples estados bajo ciertas hipótesis. Consideran consistentes ambos métodos.

En cuanto al modelo Friendly Society, como comenta Sánchez en [22], fue el procedimiento empleado por las asociaciones mutuales surgidas en el Reino Unido en el sigo XIX para calcular la prima de los seguros de incapacidad laboral. Su uso se restringe en la actualidad a las entidades aseguradoras de salud en Alemania para seguros de enfermedad y dependencia. Algunos de los inconvenientes de este método son la desinformación sobre la duración de la dependencia y de la distribución del coste según los distintos niveles de discapacidad.

No obstante lo anterior, en este trabajo tomaremos como marco el modelo de múltiples estados desarrollados a partir de los procesos de Markov. Como su nombre indica, esta técnica permite modelizar las operaciones actuariales en las que se contemplen múltiples estados, y en particular, el seguro de dependencia.

Capítulo 3

La muestra

Como comentábamos, el método de tarificación empleado en este estudio será el modelo de múltiples estados desarrollados a partir de los procesos de Markov.

Una de las piezas claves en este proceso son las tasas de prevalencia para cada grado de dependencia. Por ello, es necesario contar con una base de datos a partir de cual se puedan extraer dichas tasas para proceder a continuación con el ajuste de un modelo.

Es sabido que en España la información y estadísticas referente al tema de la dependencia no cumple los requisitos necesarios para construir un sólido modelo de tarificación. En efecto, en [11] se recogen una serie de características idóneas que debería tener toda muestra para realizar un estudio consistente en nuestra región. Entre ellas se encuentran las siguientes:

1. Datos suficientes y representativos,

2. basados en estadísticas españolas.

3. Datos de tipo longitudinal y no transversal[1].

4. De población asegurada.

5. Ajustada a las definiciones contractuales de dependencia que aparecen fijadas en la póliza y cuya entrada en ese estado da derecho a la percepción de las prestaciones aseguradas.

[1] la diferencia fundamental es que los segundos pueden confundir los efectos de edad y de cohorte, es decir, pueden no diferenciar si las variaciones dependen de la edad o del momento de nacimiento.

6. Basados en los resultados de evaluadores expertos y no en autoevaluaciones de las personas a las que se les realiza la encuesta.

7. Repetición periódica de la estadística para incorporar carácter dinámico.

8. Derivadas directamente y no a partir de datos de prevalencia.

En la línea de lo anticipado en secciones anteriores, no será posible encontrar información muestral que cumpla todos y cada uno de los requisitos anteriores.

Son numerosos los trabajos en los que se deja constancia de la necesidad de información muestral apropiada en el ámbito de la dependencia. Véase [22], [2], o incluso [21] como ejemplo fuera de España.

En particular, es especialmente difícil cumplir con los puntos 4, 6, 7 y 8. Con respecto al punto 6, decir que en la *EDDS* son los propios encuestados quienes dan respuesta a las preguntas formuladas, no existiendo presencia de profesionales que sí podrían participar en el proceso de reconocimiento de dependencia a nivel oficial. En cuanto al punto 7, podríamos asumir la hipótesis de que la dependencia evoluciona al mismo ritmo que la supervivencia. Es decir, aplicar a la tasa de prevalencia (que se obtendrá más adelante) un factor de mejora basado en la variación de la probabilidad de supervivencia. Por último, señalar acerca del punto 8 que precisamente el estudio que se lleva a cabo en este documento, y que está basado en trabajos como el de Pociello en [2], de Pitacco en [10] y de Sánchez en [22], parte de tasas de prevalencia debido a la escasez de información adecuada sobre este tema. Adicionalmente, cabe decir con respecto al punto 4 que la población encuestada se corresponde con la general española. Es decir, el INE ha llevado a cabo este imparcial estudio considerando la población general, no encuestando a personas pertenecientes a una determinada cartera de asegurados. Por lo tanto, y dado que en cierto modo las compañías pueden seleccionar los integrantes de su cartera, las tablas a las que el método empleado da lugar estarán sobrevalorando las probabilidades de transición, si se compara con la cartera de una aseguradora.

No obstante, y pese a no cumplir con estos requerimientos, tomamos como base [12], la *Encuesta de Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud (EDDS)* de 1999. Aunque en la *EDAD*,[13], encontramos información más actualizada, las diferencias no se consideran importantes a la hora de ilustrar las técnicas propuestas en este trabajo. Además nos apoyamos en multitud de documentos que abalan el uso de dicha encuesta. En particular, los trabajos de Pociello, E. y otros en [2]; Alegre, A. y otros en [1] y Ayuso, M. y otros en [3] emplean dicha encuesta. Además, en [22] se afirma que a fecha de dicha publicación, de los veintisiete trabajos a los que hace referencia [18], la EDDS ha sido utilizada en veintiuno de ellos.

3.1. La encuesta de 1999

Dicha encuesta contó con la participación de aproximadamente 220.000 personas, y cuyo objetivo fue "*cubrir las necesidades de información sobre los fenómenos de la discapacidad, la dependencia, el envejecimiento de la población y el estado de salud de la población residente en España*".

A fecha 1999, se estableció el número total de personas con discapacidades en el territorio español en 3.528.221, lo que en ese momento suponía un 9 % de la población. Para hacernos una idea de la similitud con los datos recogidos en la encuesta de 2008, ésta última estableció dicha cifra en unos 3,8 millones, lo que a esa fecha significaba el 8,5 % de la población.

Si bien es cierto que la población mayor de 64 años ha aumentado entre dichos años (un 14,4 %), el ritmo de vida, junto con una mejora de las condiciones sociales y de salud, hace que el aumento de las personas con discapacidad no crezca al mismo ritmo. En efecto, son entre las edades de 75 a 79 y de 80 a 84 años donde se producen mayores descensos en la tasa de discapacidad, con porcentajes del 16,2 % y 10,2 % respectivamente. No obstante, dadas las dificultades por las que pasa nuestro país en la actualidad, podría ocurrir que la inversión en mejoras sociales y sanidad se vea reducida. En cuyo caso, se correría el riesgo de poner a las personas de edades más avanzadas (y a las que más afecta el acaecimiento de deficiencias) en una situación desfavorable. Por lo tanto, no resulta desproporcionado tomar como referencia una situación más conservadora a nivel de cifras, como la de 1999. En la Figura 3.1 se muestran las diferencias de los resultados extraídos de ambas encuestas, pudiéndose extraer que en el 2008 la discapacidad surge en edades más avanzadas:

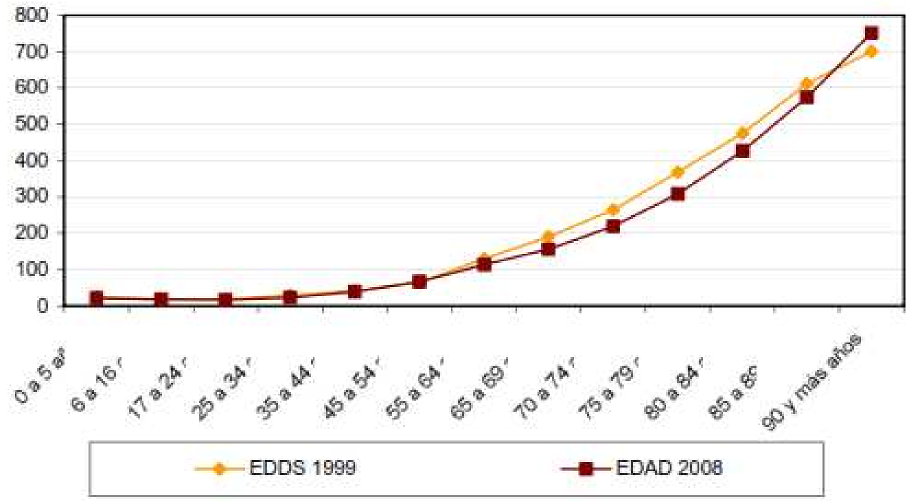


Figura 3.1: Personas con discapacidad por grupos de edad (tasas por mil habitantes). Fuente: INE.

Ahora bien, detengámonos en la *EDDS*. Desde un punto de vista asegurador, podría resultar interesante conocer cómo se distribuyen las proporciones de personas con discapacidades, ya que en cierto sentido, cada compañía selecciona su cartera de asegurados (sus riesgos).

En primer lugar, cabe saber qué criterios y metodología se ha seguido en esta encuesta. En efecto, se han tenido en cuenta tres grupos de severidad (recordemos, tres grados de dependencia) para las discapacidades padecidas: moderada, grave y total.

En cuanto a los sujetos tratados, se ha atendido a los siguientes cuestionarios:

- *Cuestionario de Hogar*: capta a los residentes del hogar que padecen alguna discapacidad o limitación. Solicita también información de tipo sociodemográfico y económico de todos los residentes del hogar.

- *Cuestionario de Discapacidades y Deficiencias*: recoge información sobre las personas de 6 y más años que padecen alguna discapacidad con el fin de conocer las características de las discapacidades padecidas y las deficiencias que las originan, así como información más específica sobre la persona con discapacidades y su relación con el entorno social, sanitario y económico.

- *Cuestionario de Limitaciones y Deficiencias*: recoge información sobre los menores de 6 años que padecen alguna limitación.
- *Cuestionario de Salud*: recoge información sobre temas tales como: medida de la utilización de los servicios, autovaloración del estado de salud, características antropométricas, limitaciones temporales de las actividades cotidianas, hábitos de vida, accidentalidad, prevalencia de enfermedades crónicas, victimación, accesibilidad y hábitos de nutrición.

Se muestra en la Figura 3.2 el número de personas que presentan alguna discapacidad, agrupados por rangos de edades:

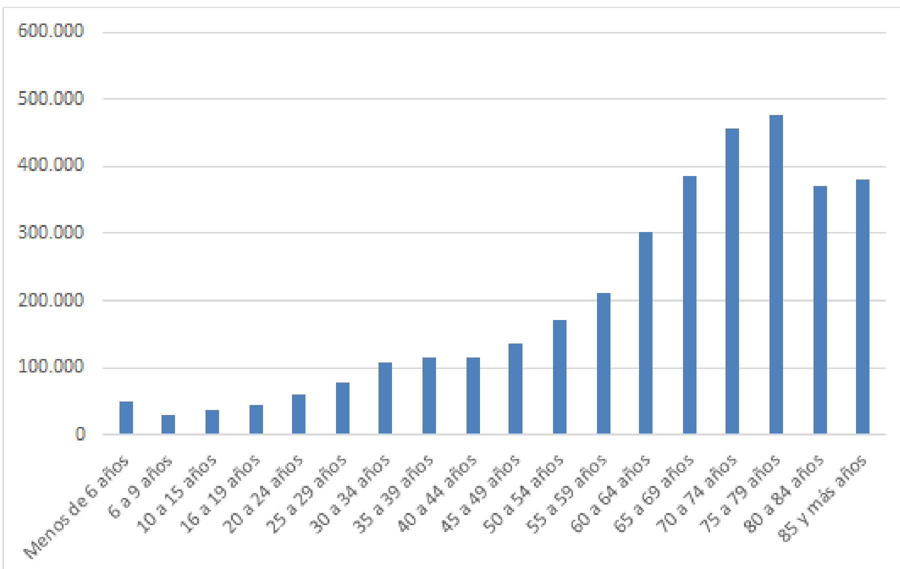


Figura 3.2: Personas con discapacidad por grupos de edad. Elaboración propia a partir de los datos de la *EDDS*.

A efectos de la Figura 3.2, deducimos que las discapacidades no siempre proceden de una deficiencia claramente delimitada, sino que más bien obedecen a procesos degenerativos ligados, como rasgo general, a la edad de la persona. Asimismo, en la Figura 3.3 encontramos dichos datos agrupados en mayores rangos:

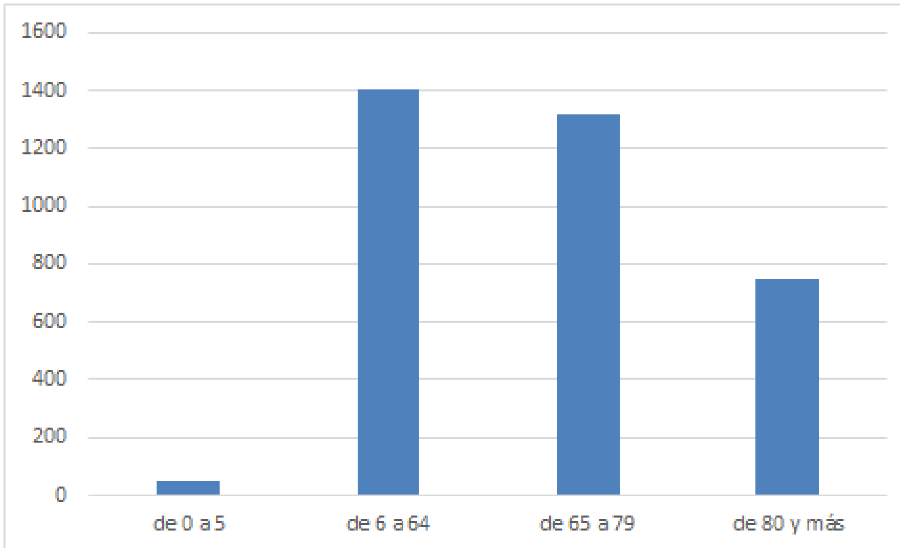


Figura 3.3: Personas con discapacidad por grupos de edad (en miles). Elaboración propia a partir de los datos de la *EDDS*.

De hecho, si nos centramos en el sector de la población con mayor número de personas con discapacidad, es decir, el que queda comprendido entre los 6 y 64 años, en la Figura 3.4 puede apreciarse cómo las causas que originan un mayor número de deficiencias se relacionan con enfermedades comunes, es decir "*las alteraciones de la salud que no tengan la condición de accidentes de trabajo ni de enfermedades profesionales*[2]."

[2]Según se establece en el artículo 117.1 y 2 del texto refundido de la Ley General de la Seguridad Social (TRLGSS)

Figura 3.4: Deficiencias en personas de 6 a 64 años según las causas. Elaboración propia a partir de los datos de la *EDDS*.

Como ya anticipábamos, desde el punto de vista de una aseguradora, las cuales tienen cierto control sobre la selección de los integrantes de su cartera de asegurados, podría resultar interesante conocer cuáles son los grupos de discapacidades más y menos comunes. En la *EDDS*, la clasificación se hace en función de las acciones ver; oír; comunicarse; aprender, aplicar conocimientos y desarrollar tareas; desplazarse; utilizar brazos y manos; desplazarse fuera del hogar; cuidar de sí mismo; realizar las tareas del hogar; y relacionarse con otras personas. El resultado se muestra la Figura 3.5 para el rango de edades entre 6 y 64 años:

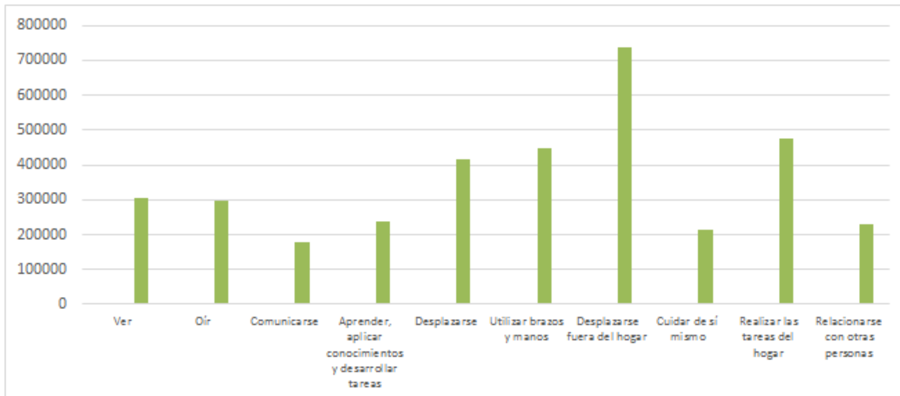


Figura 3.5: Personas con discapacidad por grupos de discapacidades. Elaboración propia a partir de los datos de la *EDDS*.

Se puede observar que son las acciones que necesitan habilidades motrices las que más discapacidades engloban.

Por otra parte, como se ha podido notar, en esta sección aún no se ha empleado la palabra *dependiente*. El concepto de dependencia surge de la necesidad de clasificar a las personas con discapacidades, en función de la ley, con el objetivo de ofrecer ayudas adecuadas a sus necesidades. Como ya se ha comentado en el Capítulo 1, esta clasificación depende de la puntuación *BVD*.

En efecto, la *EDDS* tiene en cuenta esta metodología y clasifica la severidad de la discapacidad en cuestión en tres grupos. "*La severidad de la discapacidad hace referencia al grado de dificultad para realizar una determinada actividad, sin ayuda (si no la recibe) o con ayudas (en el caso de que las perciba). Se considera que una persona tiene una discapacidad total cuando no puede realizar la actividad. Si la persona tiene una gran dificultad para realizarla, la discapacidad es severa y si la realiza sin dificultad alguna por recibir ayudas o con poca dificultad, la discapacidad es moderada.*"

En este sentido, se muestra en la Figura 3.6 el número de personas con alguna discapacidad para las actividades de la vida diaria, agrupadas por rangos de edades.

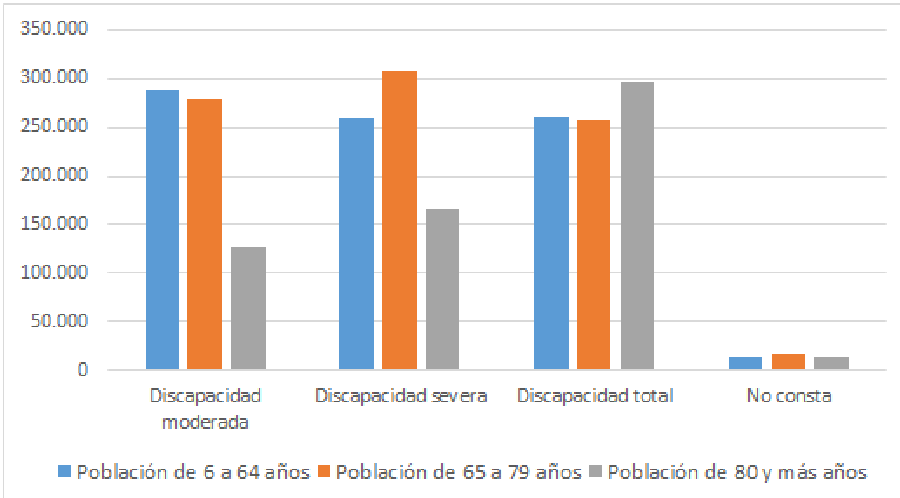


Figura 3.6: Personas con alguna discapacidad para las actividades de la vida diaria. Elaboración propia a partir de los datos de la *EDDS*.

De este modo, vemos como es posible emplear la información de la encuesta para la creación de tablas de mortalidad para personas dependientes.

3.2. La encuesta de 2008

Como comentábamos, la tasa de discapacidad entre las encuestas de 1999 y 2008 se ha visto reducida en un 0,5 %. Sin embargo, este descenso no se debe a una disminución del número de personas con discapacidades, si no al aumento del total de población con respecto a este grupo. De hecho, el número de personas con discapacidad ha crecido en 320.000.

En la línea de lo discutido en la Sección 3.1, y a juzgar por la Figura 3.1, las diferencias más significativas en cuanto a ramos de edad entre ambas encuestas se encuentra a partir de los 65 años. En efecto, se reduce la tasa en 6,2 % para el rango de 65-79 años. Mientras que para edades superiores a 80 años, la tasa se reduce en un 5,4 % con respecto al 99. Es decir, la discapacidad aparece a edades más tardías. Una de las razones es el cuidado que se les ha ofrecido a las personas de mayor edad en nuestro país, gracias a una sólida Seguridad Social. Sin embargo, desde el 2008 no sólo se frenó el crecimiento del Fondo de Reserva de la SS, sino que entre los años 2011 y 2014 éste se redujo en aproximadamente un 38 %[3]. Por lo tanto, esto no hace más que incrementar la necesidad de nuevas políticas que incentiven la protección de estos sectores de la población.

Por otra parte, con respecto a los grupos de discapacidades, no hay cambios significativos. En la Figura 3.7 podemos observar como el grupo de discapacidad que acumula mayor número de personas sigue siendo el de movilidad:

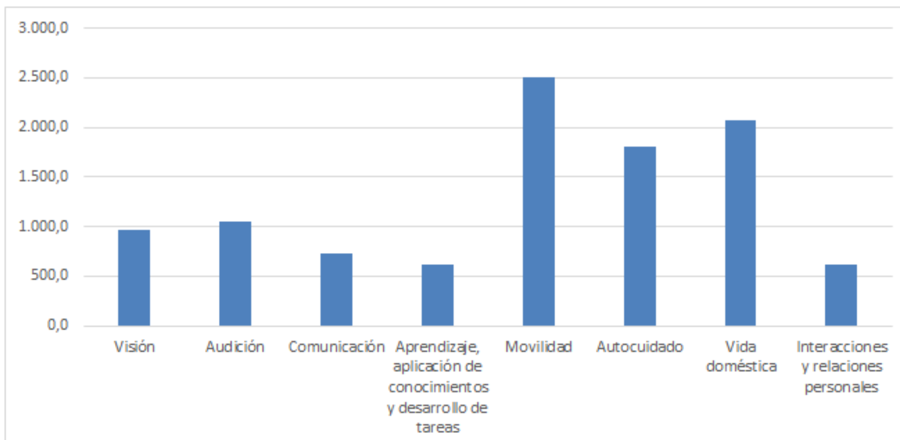


Figura 3.7: Población de 6 o más años con discapacidad según grupo de discapacidad (en miles). Elaboración propia a partir de datos del INE.

Por lo que concierne al número de deficiencias según las causas, vemos que entre las Figuras 3.4 y 3.8 no hay grandes diferencias:

[3] información extraída de El País

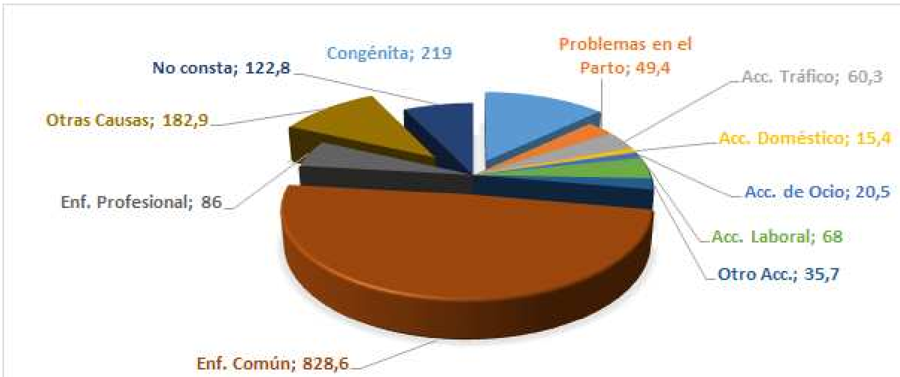


Figura 3.8: Deficiencias (en miles) en personas de 6 a 64 años según las causas. Elaboración propia a partir de los datos de la *EDAD*.

La causa de enfermedad común sigue siendo la más habitual. Esto no hace más que reafirmar la fuerte relación entre el grado de dependencia y la edad.

Por otra parte, de un modo análogo a la sección anterior, se muestra en la Figura 3.9 el número de personas con alguna discapacidad para las actividades de la vida diaria, agrupadas por rangos de edades.

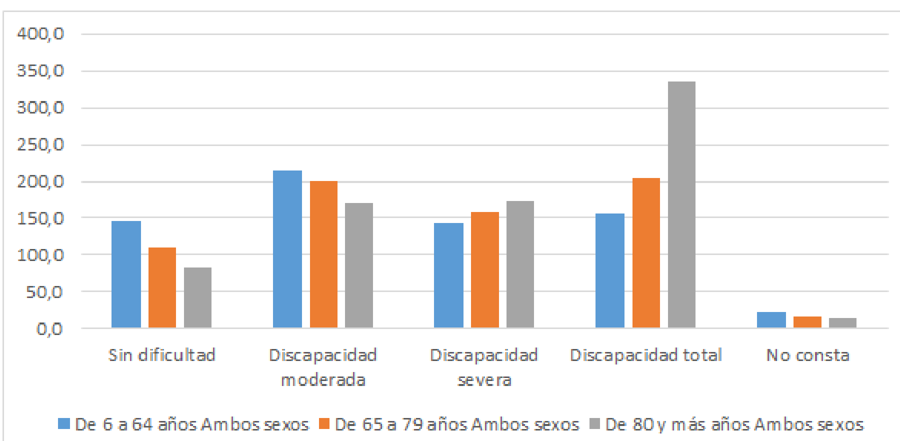


Figura 3.9: Personas (en miles) con alguna discapacidad para las actividades de la vida diaria (con ayudas). Elaboración propia a partir de los datos de la *EDDS*.

Capítulo 4

De la muestra a las tablas: el método

El objetivo en este capítulo es obtener unas tablas de mortalidad que nos permitan tarificar seguros de dependencia. Es decir, seguros que mediante el pago de una prima por parte del asegurado, le garanticen un capital o una renta en caso de quedar dependiente. De esta forma, el asegurado podrá hacer frente a los gastos que le generará dicha situación de dependencia.

4.1. La matriz de transición

Para llevar a cabo el objetivo propuesto, se procederá con la cuantificación de las probabilidades de transición anuales entre los distintos estados empleando el modelo markoviano de transiciones anuales.

En la teoría de la probabilidad y en estadística, un proceso de Markov es un fenómeno aleatorio dependiente del tiempo para el cual se cumple una propiedad específica: la propiedad de Márkov (o también conocida como *carencia de memoria*). Frecuentemente, el término cadena de Markov se usa para dar a entender que un proceso de Markov tiene un espacio de estados discreto (infinito o numerable), como es nuestro caso.

En particular, en el modelo estudiado partimos de la hipótesis de que el paso entre estados solo puede ser el que se muestra en la Figura 4.1:

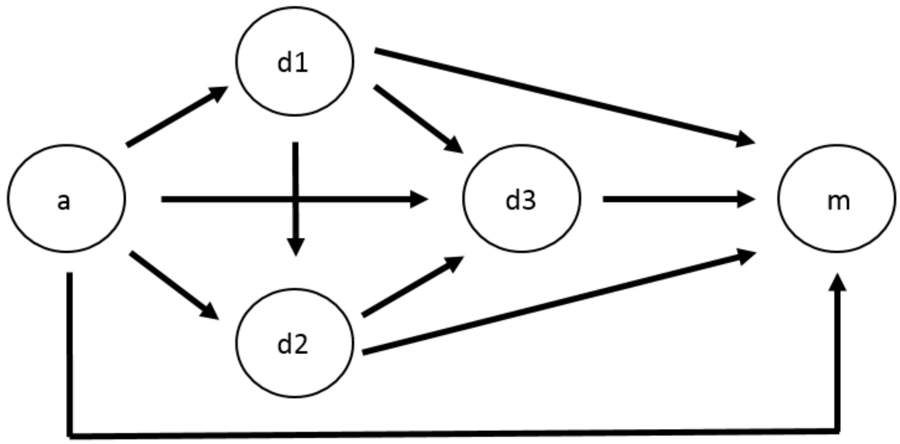


Figura 4.1: Diagrama de transiciones entre estados.

Esta hipótesis no supone pérdida de generalidad. De hecho, es la empleada por Alegre y Pociello en [2]. Adicionalmente, en la Figura 3.2, se había observado como el fenómeno de la discapacidad se encuentra fuertemente ligado a la edad, y por lo tanto la difícil recuperación con el paso del tiempo. Recordemos además la definición de *dependencia* recogida en la Sección 1, donde se habla de dicho carácter permanente.

Consecuentemente, la matriz de transición anual que resulta puede escribirse como sigue:

$$\mathcal{M}_x = \begin{pmatrix} p_x^{aa} & p_x^{ad_1} & p_x^{ad_2} & p_x^{ad_3} & p_x^{am} \\ 0 & p_x^{d_1d_1} & p_x^{d_1d_2} & p_x^{d_1d_3} & p_x^{d_1m} \\ 0 & 0 & p_x^{d_2d_2} & p_x^{d_2d_3} & p_x^{d_2m} \\ 0 & 0 & 0 & p_x^{d_3d_3} & p_x^{d_3m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde p_x^{ij} representa la probabilidad de que una persona con edad x en estado i pase en el transcurso de un año al estado j. Indicando d_1, d_2 y d_3 dependencia moderada, severa y total (gran dependencia), respectivamente.

4.2. Las tasas de prevalencia

La tasa de prevalencia de la dependencia es el indicador utilizado en el análisis de la frecuencia de la dependencia, y es un estadístico empleado en numerosos trabajos. Nos apoyamos de hecho en los artículos [2], [3], [1] y [21], en los cuales se emplea dicho estadístico.

Cabe recordar además, que en los tres primeros trabajos mencionados también se tomó como muestra los datos de la *EDDS*.

Como comentamos en secciones anteriores, la clasificación de las discapacidades por severidad nos permite agrupar los resultados en los grados de dependencia que establece la Ley, del mismo modo que Alegre y Pociello en [2]. Por lo tanto, podemos calcular la tasa de prevalencia a partir de los datos del INE para una persona de edad x y para un grado de dependencia (o severidad) d como sigue:

$$\lambda_x^d = \frac{NPD_x^d}{PT_x},$$

siendo NPD_x^d el número de personas dependientes de grado d y edad x, y PT_x el número de personas de la población total. Es decir, λ_x^d indica la proporción de personas dependientes con grado d respecto al total de la población con la misma edad.

En particular, para el caso que nos concierne tendríamos las siguientes tasas:

- λ_x^1: Tasa de prevalencia de grado 1 para una persona de edad x.
- λ_x^2: Tasa de prevalencia de grado 2 para una persona de edad x.
- λ_x^3: Tasa de prevalencia de grado 3 para una persona de edad x.

Ahora bien, para hallar los elementos de la matriz de transición $\mathcal{M}_x$ es necesario partir de una ley de supervivencia. En [2], Pociello opta por tomar como punto de partida la tabla GRM-95. En nuestro caso, podríamos emplear las tablas PERM 2000, conocidas como las Tablas Generacionales Españolas de Supervivencia. Sin embargo, estas tablas utilizadas en la práctica aseguradora llevan implícitos una serie de ajustes y recargos. Por lo tanto, no sería del todo correcto aplicar las tasas de prevalencia calculadas a partir de la población española general a estas tablas dirigidas a un determinado sector. Por ello, optamos en este trabajo por partir de las tasas de mortalidad, q_x, de la población española general proporcionadas por el INE en [14], cuyo logaritmo se muestra en la Figura 4.2:

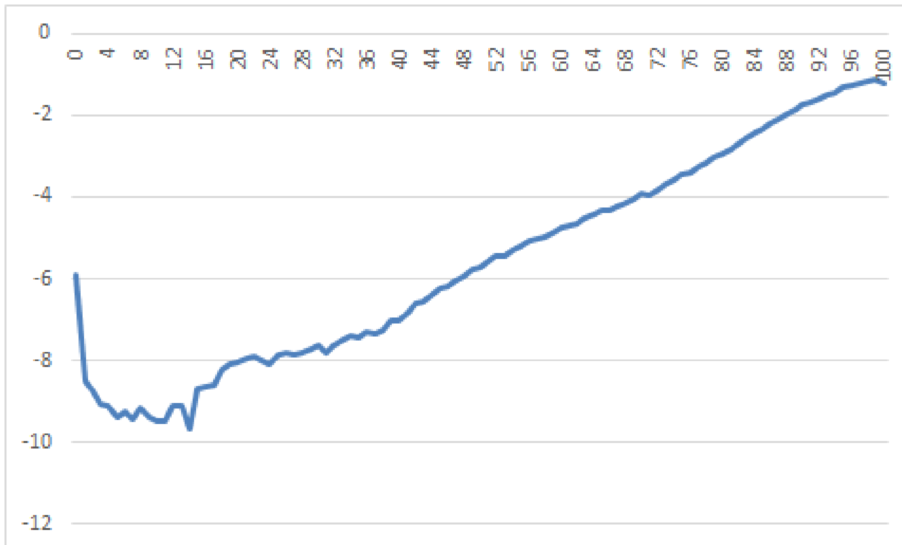


Figura 4.2: $\ln(q_x)$ por edad x, para hombres, de la población española general.

Como se puede observar, no es el tipo de curva que se acostumbra ver, a diferencia de la Figura 4.3, donde la curva está suavizada.

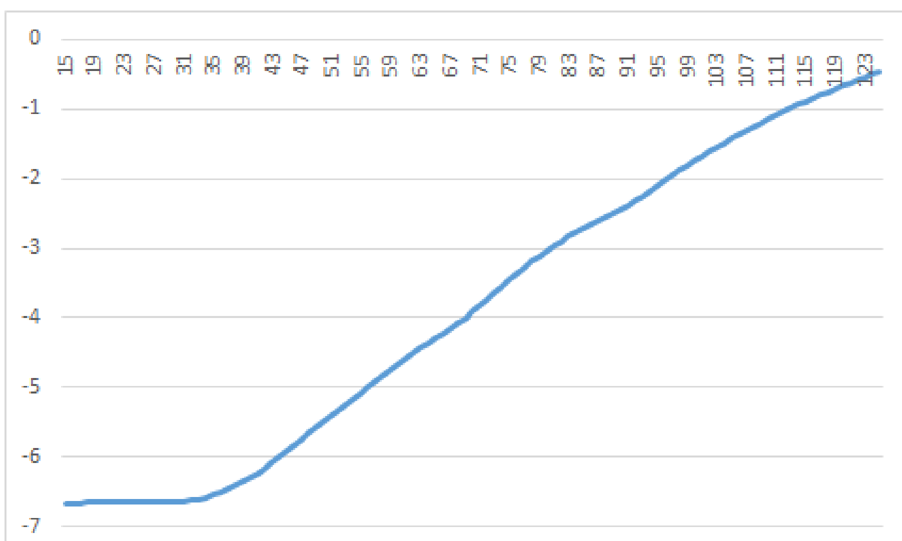


Figura 4.3: $\ln(q_x)$ por edad x, para hombres, de la GRM95.

Este mismo problema suele darse en las compañías aseguradoras a la hora de representar gráficamente las tasas de mortalidad realistas, es decir, las de sus carteras. Para ello proponemos en este documento el suavizamiento kernel, introducido en nuestro país por Ayuso (véase [4]). Otros trabajos en los que se aplica esta misma técnica arrojan resultados satisfactorios, como es el caso de [15] y [19], elaborados por Lledó, Pavía y Morillas.

4.3. El suavizamiento kernel

Este método de graduación permite ajustar las probabilidades brutas, eliminando fluctuaciones y perturbaciones aleatorias.

Un suavizamiento kernel es una técnica estadística para la estimación de una función real a partir de sus observaciones cuando no se conoce un modelo paramétrico para dicha función. El nivel del suavizado depende de un único parámetro al que se le llama tamaño de ventana[1].

Desde un punto de vista puramente matemático se define una función continua $\hat{Y}(X) : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de X tal que, para cada $X_0 \in \mathbb{R}^p$ la media ponderada kernel de Nadaraa-Watson queda definida por:

$$\hat{Y}(X_0) = \frac{\sum_{i=1}^{N} K_{h_\lambda}(X_0, X_i) Y(X_i)}{\sum_{i=1}^{N} K_{h_\lambda}(X_0, X_i)},$$

con N el número de observaciones; $Y(X_i)$ el valor observado para un punto X_i (en nuestro caso, la tasa de mortalidad para una edad); $h_\lambda(X_0)$ el parámetro conocido como tamaño de ventana; y $K_{h_\lambda}(X_0, X_i)$ la función kernel.

Para este caso, y apoyándonos en [9], tomamos como función kernel la gaussiana (núcleo gaussiano.). Renombremos por comodidad $K_{h_\lambda}(X_0, X_i) \equiv K_b(t) = \frac{1}{b} K(\frac{t}{b})$, quedando en este caso b como el parámetro tamaño ventana y siendo *K(t)* la densidad de una normal tipificada, $K(t) = \dfrac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$.

Con base las expresiones anteriormente comentadas, se tiene que la estimación Kernel con núcleo gaussiano, una ventana de tamaño b y tasa de mortalidad observada q_z para una edad z, responde a la siguiente expresión:

[1] wikipedia

$$\hat{q}_x = \frac{\displaystyle\sum_{z=0}^{N} \frac{e^{-\frac{(\frac{x-z}{b})^2}{2}}}{b\sqrt{2\pi}} q_z}{\displaystyle\sum_{z=0}^{N} \frac{e^{-\frac{(\frac{x-z}{b})^2}{2}}}{b\sqrt{2\pi}}},$$

con $x = 0, 1, \ldots, N$.

En la Sección A.1 se proporciona el código VBA, de elaboración propia, a través del cual el cálculo de los elementos anteriormente comentados y su aplicación a las tasas q_x es directa mediante ejecución en Excel.

El resultado para un tamaño de ventana $b = 2$ puede verse en la Figura 4.4:

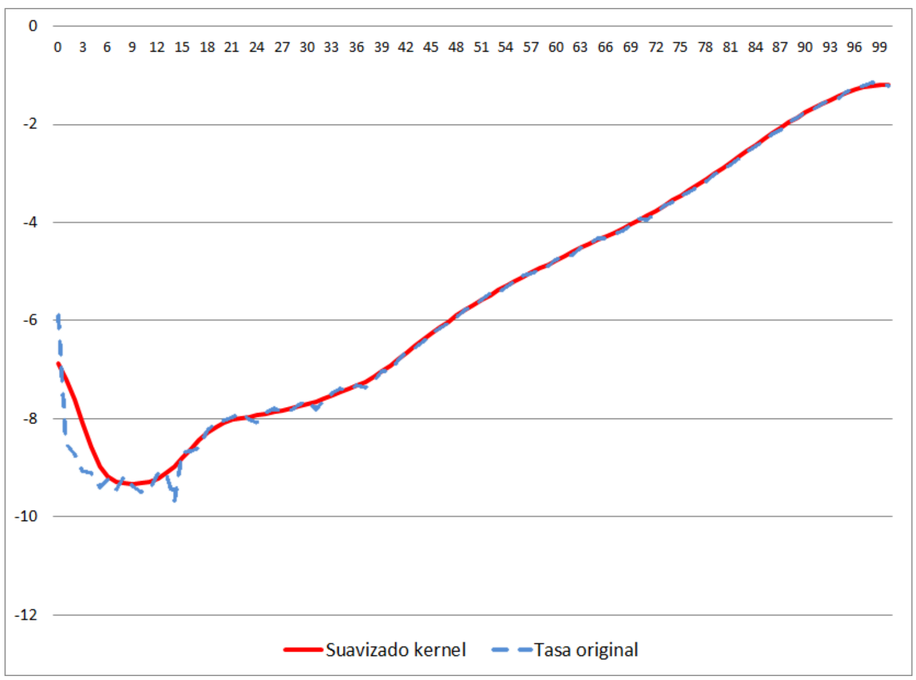


Figura 4.4: Comparativa $\ln(q_x)$

La mejora es clara. Se han obtenido tasas de mortalidad suavizadas y fieles a las de partida.

En este punto, para conocer el número de personas vivas a la edad x, no hace falta más que aplicar la conocida expresión

$$l_{x+1} = l_x * q_x, \quad l_0 \text{ arbitrario},$$

obteniéndose la representación de la Figura4.5:

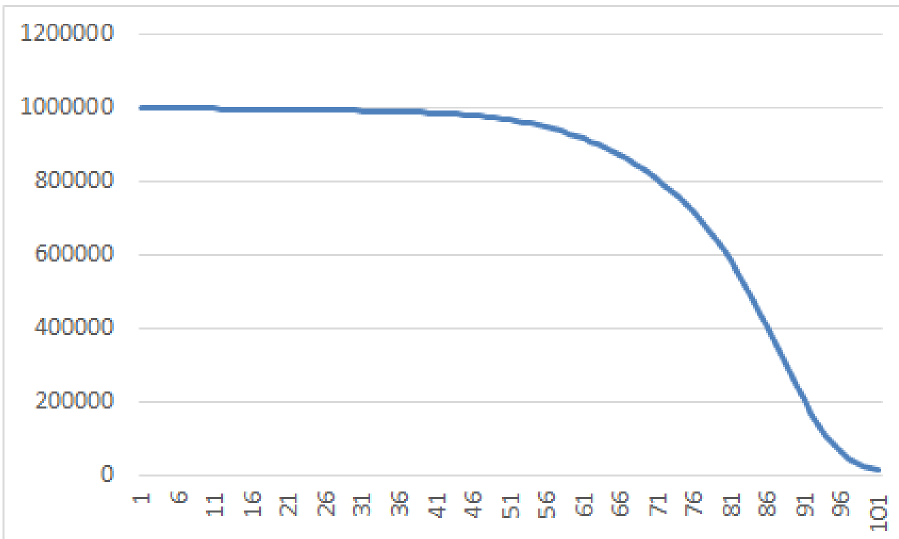


Figura 4.5: Ley de supervivencia para la población española con datos del INE.

4.4. Ley de supervivencia para las personas dependientes

Una vez obtenida una ley de supervivencia para la población y las tasas de prevalencia para cada estado, es necesario establecer una metodología para hallar las probabilidades de transición.

Encontramos en los trabajos [10] y [21] dos consistentes métodos desde un punto de vista estadístico.

4.4.1. El método de Rickayzen

Se tiene en [21] un artículo cuyo objetivo es analizar un modelo de múltiples estados y proyectar el número de personas con discapacidades en UK en los próximos 35 años.

Cabe señalar que el estudio de Rickayzen se nutre de tres tipos de datos, y son los siguientes:

- Tasas de prevalencia: son el punto de partida. Se emplean para saber qué proporción de personas de una determinada edad tienen discapacidades en ese momento.

- Tasas de transición: son necesarias para saber qué probabilidad tienen estas personas de pasar a otro estado. Por ejemplo, que probabilidad tiene una persona en estado dependiente grado 1 de pasar a dependiente grado 2. Referente a este punto, señalar que ya Rickayzen se encontró con problemas para encontrar información en esta materia, incluso en un país como UK, donde la investigación en el ámbito actuarial va un paso adelantada con respecto a España.

- Tendencia en las tasas: es recomendable conocer cómo las tasas de transición varían a lo largo del tiempo. Es decir, saber si una persona de una determinada edad se vuelve más o menos propensa a tener una discapacidad.

En cuanto a las tasas de prevalencia, de un modo análogo al presentado en este documento, Rickayzen obtuvo su muestra en la encuesta OPCS (Office of Population Censuses and Surveys) de discapacidad en Gran Bretaña, con fecha 1985. Por lo tanto, que en nuestro caso la encuesta date de 1999 no supone una aberración, y más habiendo observado que los resultados no distan en exceso con los obtenidos en la encuesta del 2008.

En cuanto a las categorías de severidad, la OPCS considera 10 niveles. Se muestra en la Figura 4.6 el número de hombres autónomos y con discapacidades, por edad y nivel:

		OPCS Disability Category									
Age	Able	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20–29	4,235	24	15	14	16	13	13	9	8	5	7
30–39	3,717	42	16	22	20	18	13	11	10	4	5
40–49	3,015	57	30	25	25	21	18	15	11	6	4
50–59	2,577	100	58	53	41	40	25	21	18	12	6
60–69	1,956	173	116	81	69	58	32	32	30	27	11
70–79	1,020	152	117	86	71	60	46	38	38	29	13
80+	137	55	39	37	38	41	29	34	33	38	18

Figura 4.6: Nº de hombres con discapacidad (en miles). Fuente: [8]

Por lo referente a las tasas de transición, debido a la escasez de datos apropiados en UK para la determinación de las mismas, Rickayzen se ve forzado a emplear [23], un informe de la Society of Actuaries Long-Term Care Valuation Insurance Methods Task Force con datos de US.

	Age	Initial status	Status after 2 years				
			0 ADL	1 ADL	2 ADL	3+ ADL	DEAD
Males	65–74	0 ADL	*94.23*	0.45	0.27	0.48	4.57
		1 ADL	17.60	*59.60*	5.20	3.60	14.00
		2 ADL	9.80	9.80	*56.86*	5.88	17.65
		3+ ADL	5.97	1.49	4.48	*66.42*	21.64
	75–84	0 ADL	*89.50*	1.21	0.47	0.92	7.89
		1 ADL	10.98	*54.55*	4.92	5.30	24.24
		2 ADL	5.88	3.92	*56.86*	9.80	23.53
		3+ ADL	3.17	1.59	3.17	*66.67*	25.40
	85+	0 ADL	*81.38*	2.28	1.46	1.79	13.09
		1 ADL	7.14	*59.52*	2.38	10.32	20.63
		2 ADL	0.00	6.25	*54.17*	10.42	29.17
		3+ ADL	2.63	0.00	13.16	*57.89*	26.32
Females	65–74	0 ADL	*96.62*	0.67	0.19	0.30	2.21
		1 ADL	19.06	*62.81*	4.69	4.69	8.75
		2 ADL	10.94	8.59	*57.03*	13.28	10.16
		3+ ADL	4.49	3.21	3.85	*69.87*	18.59
	75–84	0 ADL	*90.78*	2.21	0.64	0.91	5.46
		1 ADL	16.20	*61.97*	3.05	7.98	10.80
		2 ADL	8.67	5.33	*58.67*	12.00	15.33
		3+ ADL	4.79	2.66	5.85	*70.74*	15.96
	85+	0 ADL	*81.44*	4.77	1.58	2.37	9.84
		1 ADL	10.49	*62.94*	3.50	7.69	15.38
		2 ADL	5.00	6.67	*57.50*	9.17	21.67
		3+ ADL	4.12	2.94	2.94	*64.71*	25.29

Source: Society of Actuaries Long-Term Care Valuation Insurance Methods Task Force (1995)

Figura 4.7: Tasas de transición en US (% por año). Fuente: [8].

En la Figura 4.7 se muestran las tasas de transición anuales en Estados Unidos. Tanto el diagrama de transiciones entre estados que se deduce de esta tabla, como la clasificación realizada dista de las hipótesis que habíamos establecido para nuestro caso. En particular, se atiende a los 10 niveles considerados anteriormente, en vez de los tres grados dependencia que establece la Ley. Para continuar, sólo se incluyen las tasas para edades a partir de 65 años. Además, sólo se consideran tres grupos en cuanto a edad, abarcando cada uno de ellos 10 años. En cuanto al diagrama, se deduce el que se muestra en la Figura 4.8:

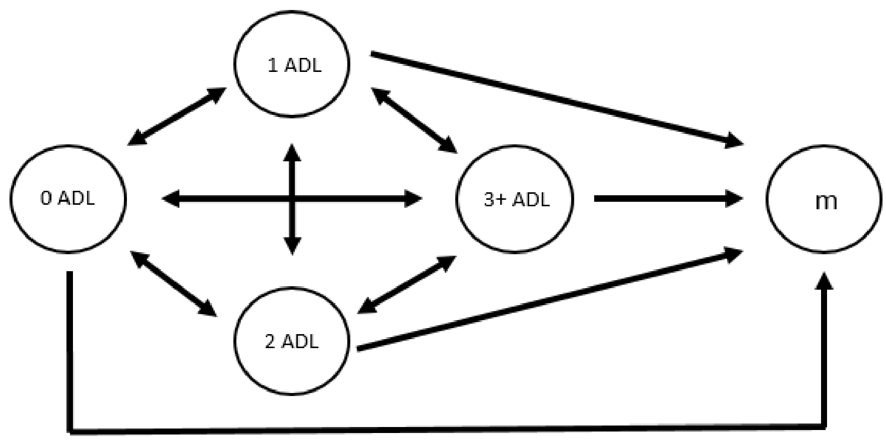


Figura 4.8: Diagrama de transiciones entre estados.

Es decir, se supone recuperación, hipótesis que nosotros habíamos descartado.

Al igual que le sucedió a Rickayzen, la inexistencia o extrema confidencialidad de este tipo de datos en el caso de España nos hace recurrir a otro método que veremos más adelante.

Por lo que concierne a la tendencia en los datos, dada una persona de edad x, se le podría aplicar la tasa de prevalencia y a continuación las tasas de transición para conocer su estado en un tiempo n. Sin embargo, Rickayzen opta por elaborar un método dinámico. Es decir, un método que tenga en cuenta el ritmo al que ha evolucionado la población considerada desde la fecha de la encuesta al momento que desee. En esta línea, Rickayzen considera los indicadores de tendencia: la esperanza de vida de personas autónomas (HLE), y la esperanza de vida de personas discapacitadas (DLE). Es decir, lo que se espera que viva una persona en estado saludable y lo que se espera de una persona con discapacidad, respectivamente. Lo que propone es hallar una posible reducción o aumento anual de la probabilidad de contraer alguna discapacidad.

4.4.2. El método de Pitacco

A diferencia del modelo dinámico basado en tasas de transición de Rickayzen, Pitacco llevó a cabo su estudio en [10] bajo la hipótesis de estacionariedad. Uno de sus objetivos fue obtener probabilidades de transición de un modelo con un solo estado de dependencia a partir del establecimiento de ciertas hipótesis basadas en la aplicación de *recargos actuariales*, estadísticamente razonables, sobre las relaciones existentes entre las diferentes probabilidades.

En efecto, el grado de investigación en España en materia actuarial aún no ha alcanzado los niveles de otros países, como US o UK. En esta situación, una alternativa ya escogida por Pociello en [2] es decantarse por el método de Pitacco, asumiendo dicha hipótesis de estacionariedad.

En primer lugar, la ley de supervivencia para las personas dependientes se puede obtener a partir de la de la población española general, mediante la aplicación de las tasas de prevalencia:

$$\begin{aligned}
l_x^{d_1} &= \lambda_x^1 \cdot l_x \\
l_x^{d_2} &= \lambda_x^2 \cdot l_x \\
l_x^{d_3} &= \lambda_x^3 \cdot l_x \\
l_x^{a} &= (1 - \lambda_x^1 - \lambda_x^2 - \lambda_x^3) \cdot l_x \\
l_x &= l_x^a + l_x^{d_3} + l_x^{d_2} + l_x^{d_1}
\end{aligned}$$

donde

l_x^a es el número de personas autónomos de edad x,
$l_x^{d_1}$ es el número de personas dependientes de grado 1 de edad x,
$l_x^{d_2}$ es el número de personas dependientes de grado 2 de edad x, y
$l_x^{d_3}$ es el número de personas dependientes de grado 3 de edad x.

Sin embargo, no emplearemos directamente las tasas de prevalencia poblacionales, sino que siguiendo el método de Pociello en [2], se utiliza un modelo de ajuste paramétrico para las tasas de prevalencia anuales para cada edad y grado de dependencia. En particular, el método empleado es el de los mínimos cuadrados, tomando como función de ajuste una Gompertz-Makeham del tipo *GM(0, 3)*.

Gompertz-Makeham y los mínimos cuadrados

La técnica de optimización numérica[2] conocida como mínimos cuadrados consiste en que, dados un conjunto de n pares ordenados, $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{n}$, y sea $\{f_j(x)\}_{j=1}^{m}$ una base de m funciones linealmente independientes, se quiere encontrar una función $f(x)$ que sea combinación lineal de las funciones base, tal que $f(x_k) \approx y_k$.

En particular, para el caso que nos concierne, x_k será la edad de la k-ésima persona e y_k será su tasa de prevalencia observada. Es decir, dado que las tasas de fallecimiento proporcionadas por el INE son las de personas de 0 a 100 años, empleando la notación usual se tendría que $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{n} = \{(x_k, \lambda_k)\}_{k=1}^{101}$, con $x_1 = 0, \ldots, x_{101} = 100$ y $\lambda_k \equiv \lambda_{x_k}$.

Por otro lado, haciendo uso de la elección de Pociello, las funciones $f_j(x)$ serían las que definen el modelo $GM(r, s)$, y que se expresan como sigue[3]:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} k^{(i)} x^i + \exp\left(\sum_{j=0}^{s-1} k^{(r+j)} x^j\right)$$

donde (r, s) es el orden del modelo de Gompertz-Makeham y $k^{(0)}, \ldots, k^{(r+s-1)}$ son parámetros que deben ser estimados.

Asimismo, Lockwood comenta en [16] que la mortalidad a edades jóvenes es caracterizada por los parámetros $k^{(0)}, \ldots, k^{(r-1)}$, mientras que para edades más avanzadas priman los parámetros $k^{(r)}, \ldots, k^{(r+s-1)}$.

Volviendo al trabajo de Pociello, como ya anticipábamos, su estudio le ha llevado a ajustar una Gompertz-Makeham del tipo $GM(0, 3)$. Es decir, un GM de orden ($r = 0, s = 3$), por lo que deducimos con base en [16] que lo que este modelo está caracterizando con más precisión son los datos en edades avanzadas.

En concreto, el ajuste de Pociello deja las expresiones para las tasas de prevalencia como sigue:

$$\begin{aligned}
\lambda_x^{d_1} &= e^{k_1^{(0)} + k_1^{(1)} \cdot y + k_1^{(2)} \cdot y^2} \\
\lambda_x^{d_2} &= e^{k_2^{(0)} + k_2^{(1)} \cdot y + k_2^{(2)} \cdot y^2} \\
\lambda_x^{d_2} &= e^{k_3^{(0)} + k_3^{(1)} \cdot y + k_3^{(2)} \cdot y^2}
\end{aligned}$$

[2] wikipedia

[3] extraído de [16]

donde $y = \frac{x-\alpha}{\beta}$ es una corrección en la edad, con $\alpha = 52,5$ y $\beta = 46,5$. En cuanto a los parámetros del modelo de Gompertz-Makeham, toman los siguientes valores:

$$\begin{pmatrix} k_1^{(0)} & k_1^{(1)} & k_1^{(2)} \\ k_2^{(0)} & k_2^{(1)} & k_2^{(2)} \\ k_3^{(0)} & k_3^{(1)} & k_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}033230691 & -4{,}451945122 & -5{,}312564466 \\ 3{,}690451386 & 5{,}514517028 & 6{,}373947115 \\ -2{,}057027026 & -3{,}094155265 & -1{,}481258615 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la ley de supervivencia tiene como representación gráfica la siguiente:

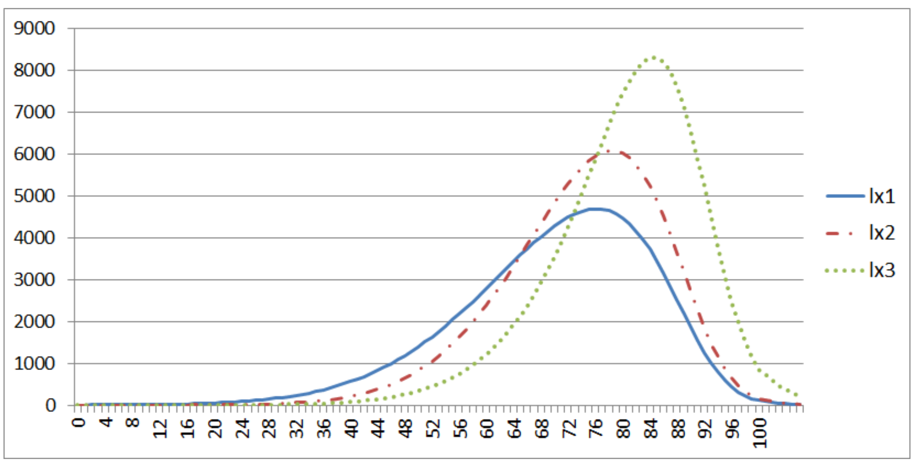


Figura 4.9: Ley de supervivencia para la población dependiente por edades.

A la vista de la Figura 4.9, podemos observar como el primer grado de dependencia es el que antes se empieza a extender entre la población, seguido del segundo y tercer grado, por ese orden. Adicionalmente, vemos qe la pendiente de las curva para dependientes de grado 3 es mayor a la de grado 2, y seguida en último lugar por la de grado 1. Es decir, a medida que la edad avanza se tiene mayor probabilidad para pasar a dicho estado dependencia, y también mayor probabilidad para salir de él (siempre en sentido de mayor severidad).

No obstante, cabe señalar que en [22] Sánchez también detalla un ajuste de las tasas de prevalencia basado en las curvas de tipo Gompertz-Makeham. Su estudio consiste en la construcción de 12 modelos combinando distintos números de parámetros. Llegando a obtener mejores resultados para funciones exponenciales, que no llevan asociadas polinomios adicionales. Es decir, funciones de la subfamilia $(0, s)$.

De las tasas de prevalencia a las tasas de incidencia

Como ya anticipábamos en capítulos anteriores, obtener directamente las tasas de incidencia a partir de información estadística en España es una ardua tarea. Por ello, se parte de las tasas de prevalencia y se asumen las hipótesis ya comentadas y señaladas por Dullaway en [8], al igual que fueron tomadas por Pitacco y Pociello en [2] y [10], respectivamente. Estas son la estacionariedad de la población, la no recuperación del estado de dependencia, y la consideración de recargos actuariales. En esta situación, se puede dar un procedimiento para calcular los elementos de la matriz de transición.

En efecto, en el Capítulo 4.1 introdujimos la matriz de transición, estableciendo algunas hipótesis básicas sobre nuestro modelo. Entre ellas, la de no recuperación. Es decir, una persona que pasa a un estado i, no puede volver a otro j de menor severidad. Esto no suponía una significativa pérdida de generalidad, ya que en el caso de seguros de dependencia, con ejemplos como las Figuras 3.2 y 3.4, teníamos fundamento para decir que el paso a estado de dependiente iba ligado fuertemente a la edad, y por ello, el no retroceso en grado de dependencia no resulta descabellado.

Volviendo a la ley de supervivencia para la población dependiente, habíamos obtenido en la Sección 4.4.2 el número de supervivientes para la edad x. A la hora de obtener las ecuaciones que nos permitirán hallar el número de supervivientes para la edad $x+q$, tomamos la base en [2]. En efecto, dichas ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}
l_{x+1}^{d_1} &= l_x^{d_1} + l_x^a \cdot p_x^{ad_1} - l_x^{d_1} \cdot p_x^{d_1 d_2} - l_x^{d_1} \cdot p_x^{d_2 d_3} - l_x^{d_1} \cdot p_x^{d_1 m} && (4.1)\\
l_{x+1}^{d_2} &= l_x^{d_2} + l_x^a \cdot p_x^{ad_2} + l_x^{d_1} \cdot p_x^{d_2 d_3} - l_x^{d_2} \cdot p_x^{d_2 d_3} - l_x^{d_2} \cdot p_x^{d_2 m} && (4.2)\\
l_{x+1}^{d_1} &= l_x^{d_3} + l_x^a \cdot p_x^{ad_3} + l_x^{d_1} \cdot p_x^{d_1 d_3} + l_x^{d_2} \cdot p_x^{d_2 d_3} - l_x^{d_3} \cdot p_x^{d_3 m} && (4.3)
\end{aligned}$$

La lectura de estas ecuaciones es la siguiente. El número de personas vivas con una determinada edad $x+1$, y en un cierto estado de dependencia i, l_{x+1}^i, es el número de ellas con un año menos, l_x^i, más las que estaban en otro estado j de severidad menor a esa edad x, l_x^j, y han pasado al estado i, menos las que en ese mismo año han pasado a un estado k de mayor severidad, l_x^k.

Los elementos p, ya introducidos en el Capítulo 4.1, son las probabilidades de transición anuales entre estados.

Como se puede observar, hay 9 elementos en ese sistema de tres ecuaciones que por el momento desconocemos. Estos son: $p_x^{ad_1}$, $p_x^{ad_2}$, $p_x^{ad_3}$, $p_x^{d_1d_2}$, $p_x^{d_1d_3}$, $p_x^{d_1m}$, $p_x^{d_2d_3}$, $p_x^{d_2m}$, $p_x^{d_3d_m}$. Por lo tanto, se tiene un sistema compatible indeterminado, es decir, un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones. Para convertirlo en un sistema compatible determinado se incorpora una matriz de recargos,

$$\delta_x = \begin{pmatrix} \delta_x^{aa} & \delta_x^{ad_1} & \delta_x^{ad_2} & \delta_x^{ad_3} & \delta_x^{am} \\ 0 & \delta_x^{d_1d_1} & \delta_x^{d_1d_2} & \delta_x^{d_1d_3} & \delta_x^{d_1m} \\ 0 & 0 & \delta_x^{d_2d_2} & \delta_x^{d_2d_3} & \delta_x^{d_2m} \\ 0 & 0 & 0 & \delta_x^{d_3d_3} & \delta_x^{d_3m} \end{pmatrix}$$

Esta hipótesis de recargos actuariales ya fue empleada por Pitacco en [10], por Pociello en [2], y por Rickayzen en [21]. Éste último a partir del ya citado informe de la Society of Actuaries en la Long-Term Care Valuation Insurance Methods Task Force, con datos de US.

Nos encontramos en España con el problema de la inexistencia o extrema confidencialidad de estadísticas sobre este tema. En efecto, no se han podido obtener valores contrastados para estos recargos actuariales. En cuanto a los datos de US obtenidos por la SOA, no se ha considerado apropiado aplicarlos debido a las hipótesis en su clasificación: solo abarca edades a partir de 65 años; los grupos establecidos van de 10 en 10 años; se consideran 10 grupos de severidades (por lo que nos alejamos del criterio del INE que tan bien se adaptaba a la Ley de Dependencia). En definitiva, optamos por no darles valor numérico a estos elementos de recargo, quedando pendiente su adaptación a la población que en algún momento futuro se quiera considerar.

Continuando con la metodología, y en línea con la matriz de recargos, suponemos lo siguiente:

- La población dependiente fallece al ritmo de la general, aplicándole su correspondiente recargo:

$$\begin{aligned} p_x^{d_1m} &= (1+\delta_x^{d_1m})\cdot q_x \\ p_x^{d_2m} &= (1+\delta_x^{d_2m})\cdot q_x \\ p_x^{d_3m} &= (1+\delta_x^{d_3m})\cdot q_x, \end{aligned}$$

con $\delta_x^{d_1m}$, $\delta_x^{d_2m}$, $\delta_x^{d_2m} \geq 0$, siendo una de las hipótesis consideradas por Pociello la de que los dependientes de mayor severidad tienen mayor probabilidad de fallecer que los de menor severidad. Es decir, $\delta_x^{d_1m} \leq \delta_x^{d_2m} \leq \delta_x^{d_3m}$.

- Adicionalmente, se considera que las probabilidades de transición entre estados de dependencia siguen el ritmo de las de autónomo a dependiente, incrementadas con su correspondiente recargo:

$$\begin{aligned} p_x^{d_1d_2} &= (1+\delta_x^{d_1d_2})\cdot q_x \\ p_x^{d_1d_3} &= (1+\delta_x^{d_1d_3})\cdot q_x \\ p_x^{d_2d_3} &= (1+\delta_x^{d_2d_3})\cdot q_x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, acabamos de reducir en 6 el número de incógnitas del sistema al que dan lugar las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3), por lo que las probabilidades de transición para las personas autónomas se pueden determinar a partir de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} p_x^{ad_1} &= \frac{l_{x+1}^{d_1} - l_x^{d_1} + l_x^{d_1}\cdot(1+\delta_x^{d_1d_2})\cdot p^{ad_2}}{l_x^a} \\ &\quad + \frac{l_x^{d_1}\cdot(1+\delta_x^{d_1d_3})\cdot p_x^{ad_3} + l_x^{d_1}\cdot p_x^{d_1m}}{l_x^a} \qquad (4.4) \\ p_x^{ad_2} &= \frac{l_{x+1}^{d_2} - l_x^{d_2} - l_x^{d_1}\cdot(1+\delta_x^{d_1d_2})\cdot p^{ad_2}}{l_x^a} \\ &\quad + \frac{l_x^{d_2}\cdot(1+\delta_x^{d_2d_3})\cdot p_x^{ad_3} + l_x^{d_2}\cdot p_x^{d_2m}}{l_x^a} \qquad (4.5) \\ p_x^{ad_3} &= \frac{l_{x+1}^{d_3} - l_x^{d_3} - l_x^{d_1}\cdot(1+\delta_x^{d_1d_3})\cdot p^{ad_3}}{l_x^a} \\ &\quad - \frac{l_x^{d_2}\cdot(1+\delta_x^{d_2d_3})\cdot p_x^{ad_3} + l_x^{d_3}\cdot p_x^{d_3m}}{l_x^a} \qquad (4.6) \end{aligned}$$

Como podemos observar, en la ecuación (4.6) solo se tiene una incógnita, $p_x^{ad_3}$, todos los demás elementos son conocidos. Por lo tanto, despejando este elemento se tiene que:

$$p_x^{ad_3} = \frac{l_{x+1}^{d_3} - l_x^{d_3} + l_x^{d_3} \cdot p_x^{d_3 m}}{l_x^a + l_x^{d_1} \cdot (1 + \delta_x^{d_1 d_3}) + l_x^{d_2} \cdot (1 + \delta_x^{d_2 d_3})}$$

Una vez obtenido este elemento se puede obtener (4.5), y a continuación (4.4). Asimismo, también es posible permanecer en el estado actual, por lo que para completar la matriz de transición se calculan los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
p_x^{aa} &= \frac{l_{x+1}^a}{l_x^a} \\
p_x^{aa} &= \frac{l_{x+1}^{d_1} - l_x^a \cdot p_x^{ad_1}}{l_x^{d_1}} \\
p_x^{d_2 d_2} &= \frac{l_{x+1}^{d_2} - l_x^a \cdot p_x^{ad_2} - l_x^{d_1} \cdot p_x^{d_1 d_2}}{l_x^{d_2}} \\
p_x^{d_3 d_3} &= \frac{l_{x+1}^{d_3} - l_x^a \cdot p_x^{ad_3} - l_x^{d_2} \cdot p_x^{d_2 d_3} - l_x^{d_1} \cdot p_x^{d_1 d_3}}{l_x^{d_3}}
\end{aligned}$$

A continuación, ilustramos esta metodología con un ejemplo.

Capítulo 5

Aplicaciones

5.1. Prestación en rentas para afrontar la dependencia

En esta sección aplicaremos las probabilidades de transición obtenidas anteriormente a un caso práctico. Crearemos un seguro de dependencia para una persona autónoma, que consistirá en el cobro de una prima única a cambio de una renta en caso de acaecimiento de la contingencia cubierta. El objetivo será, precisamente, la obtención de esa prima pura única. Señalar que trabajaremos bajo la hipótesis de nulidad de los recargos actuariales (es decir, tomando su valor igual a cero).

Sea entonces una persona de 40 años que se dispone a contratar dicho seguro de dependencia. Este seguro cubre la contingencia de dependencia mediante una prestación en forma de renta vitalicia. El importe de dicha renta será de 2.000 € (C_1) anuales si el estado es dependiente 1, de 5.000 € (C_2) si es dependiente 2, y de 7.000 € (C_3) si es dependiente 3. En efecto, podríamos incluir la garantía de fallecimiento, cubriéndola mediante un capital. En este caso, orientamos el seguro a personas sin familiares cercanos, que precisan este seguro para garantizarse una vida digna en caso de ocurrencia de dichas contingencias.

Nos apoyamos en [10] y [25] por lo que concierne a las fórmulas actuariales para el cálculo de primas en este tipo de seguros. En particular, podemos escribir la prima como sigue:

$$\begin{aligned}\pi \quad = \quad & C_1 \cdot \Big[{}_1p_x^{ad_1} \cdot \ddot{a}_{x+1}^{d_1} \cdot V^1 + {}_2p_x^{ad_1} \cdot \ddot{a}_{x+2}^{d_1} \cdot V^2 + \cdots \Big] + \\ & C_2 \cdot \Big[{}_1p_x^{ad_2} \cdot \ddot{a}_{x+1}^{d_2} \cdot V^1 + {}_2p_x^{ad_2} \cdot \ddot{a}_{x+2}^{d_2} \cdot V^2 + \cdots + \\ & {}_1p_x^{ad_1} \cdot p_{x+1}^{d_1d_2} \cdot \ddot{a}_{x+2}^{d_2} \cdot V^2 + {}_2p_x^{ad_1} \cdot p_{x+2}^{d_1d_2} \cdot \ddot{a}_{x+3}^{d_2} \cdot V^3 + \cdots \Big] + \\ & C_3 \cdot \Big[{}_1p_x^{ad_3} \cdot \ddot{a}_{x+1}^{d_3} \cdot V^1 + {}_2p_x^{ad_3} \cdot \ddot{a}_{x+2}^{d_3} \cdot V^2 + \cdots + \\ & {}_1p_x^{ad_1} \cdot p_{x+1}^{d_1d_3} \cdot \ddot{a}_{x+2}^{d_3} \cdot V^2 + {}_2p_x^{ad_1} \cdot p_{x+2}^{d_1d_3} \cdot \ddot{a}_{x+3}^{d_3} \cdot V^3 + \cdots + \\ & {}_1p_x^{ad_2} \cdot p_{x+1}^{d_2d_3} \cdot \ddot{a}_{x+2}^{d_3} \cdot V^2 + {}_2p_x^{ad_2} \cdot p_{x+2}^{d_2d_3} \cdot \ddot{a}_{x+3}^{d_3} \cdot V^3 + \cdots \Big]\end{aligned}$$

O lo que es equivalente,

$$\begin{aligned}\pi \quad = \quad & \sum_{t=1}^{\omega-x} \left({}_tp_x^{ad_1} \cdot \ddot{a}_{x+t}^{d_1} \cdot C_1 + {}_tp_x^{ad_2} \cdot \ddot{a}_{x+t}^{d_2} \cdot C_2 + {}_tp_x^{ad_3} \cdot \ddot{a}_{x+t}^{d_3} \cdot C_3\right) \cdot V^t + \\ & \sum_{t=2}^{\omega-x} \Big({}_{t-1}p_x^{ad_1} \cdot p_{x+t-1}^{d_1d_2} \cdot \ddot{a}_{x+t}^{d_2} \cdot C_2 + \big({}_{t-1}p_x^{ad_1} \cdot p_{x+t-1}^{d_1d_3} + \\ & {}_{t-1}p_x^{ad_2} \cdot p_{x+t-1}^{d_2d_3}\big) \cdot \ddot{a}_{x+t}^{d_3} \cdot C_3\Big),\end{aligned}$$

siendo:

- ${}_tp_x^{ij}$ la probabilidad de que un individuo inicialmente en el estado i a la edad x pase al estado j en el transcurso del t-ésimo año. Este elemento sigue la siguiente expresión:

$$ {}_tp_x^{aj} = {}_{t-1}p_x^{aa} \cdot p_{x+t-1}^{aj} = \prod_{k=0}^{t-2} p_{x+k}^{aa} \cdot p_{x+t-1}^{aj} $$

  En la Figura 5.1 podemos ver su representación gráfica:

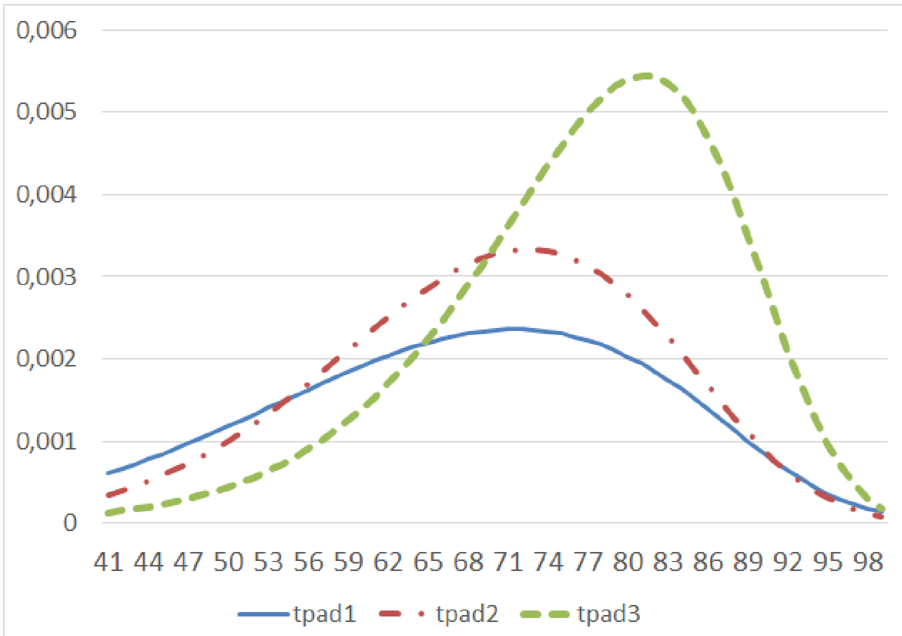


Figura 5.1: Elementos ${}_tp_x^{aj}$.

- ${}_tp_x^{ii}$ la probabilidad de que un individuo inicialmente en el estado i a la edad x llegue al $t{+}x$-ésimo año en el mismo estado. Su expresión se muestra a continuación:

$$ {}_tp_x^{ii} = \prod_{k=0}^{t-1} p_{x+k}^{ii} $$

En la Figura 5.2 podemos ver su representación gráfica:

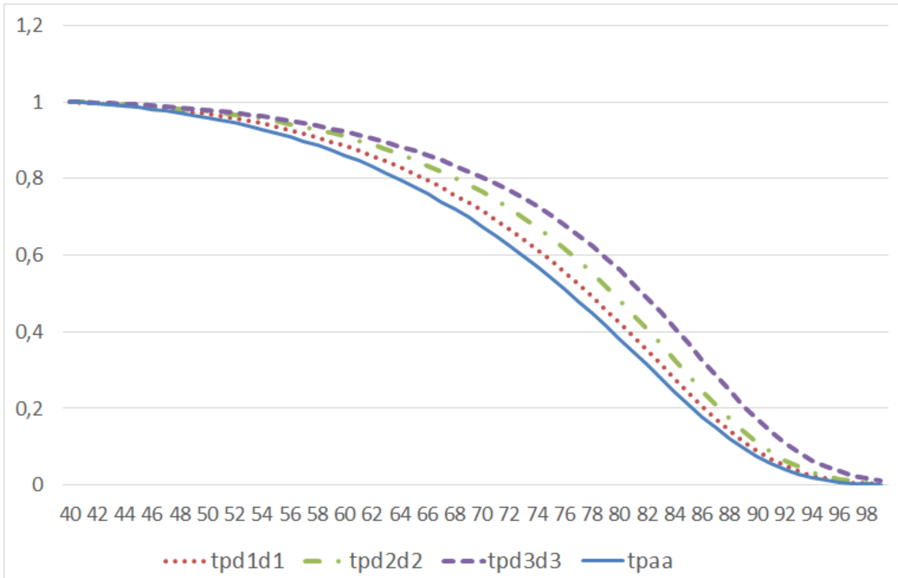


Figura 5.2: Elementos ${}_tp_x^{ii}$.

- $\ddot{a}_{x+t}^{d}$ es el valor actual actuarial de una renta unitaria vitalicia prepagable de una persona en el estado de dependencia d a la edad $x+t$. Y sigue la siguiente expresión:

$$\ddot{a}_{x+t}^{i} = \sum_{h=0}^{\omega-x-t-1} {}_hp_{x+t}^{ii} \cdot V^h,$$

En la Figura 5.3 podemos ver su representación gráfica:

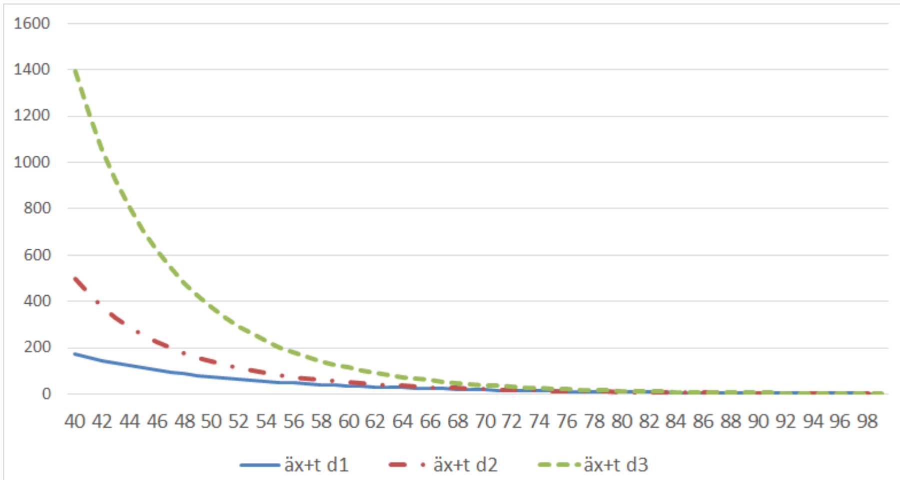


Figura 5.3: Elementos $\ddot{a}^i_{x+t}$.

- V^t el t-ésimo factor de descuento al tipo de interés técnico.

5.2. Evolución de cartera

Otra de las aplicaciones de la matriz de transición consiste en el estudio de la composición de la cartera de asegurados en un determinado momento de tiempo.

Por ejemplo, consideremos el grupo de asegurados de edad 60 años en la cartera del producto que venimos tratando. Podría resultar interesante conocer cuál es la mortalidad esperada en la cartera al cabo de un cierto número de años, o cual será la proporción de asegurados autónomos, dependientes de grado 1, de grado 2 o de grado 3. Supongamos como punto de partida que la cartera actual se distribuye de la siguiente manera: el 75 % de los asegurados son todavía autónomos; el 15 % se encuentra actualmente con grado de dependencia 1; el 7 % tienen grado de dependencia de nivel 2, y el 3 % de nivel 3.

La matriz de transición anual para una persona de 40 años es la siguiente:

i|j	a	d_1	d_2	d_3	d_4
a	0,9846	0,0023	0,0028	0,0018	0,0085
d_1	0	0,9869	0,0028	0,0018	0,0085
d_2	0	0	0,9897	0,0018	0,0085
d_3	0	0	0	0,9915	0,0085
d_4	0	0	0	0	1

Entonces, si lo multiplicamos por el vector de pesos, obtendríamos la proporción de personas en cartera en cada estado al cabo de un año:

$$(0,75 \quad 0,15 \quad 0,07 \quad 0,03 \quad 0)$$

$$\times$$

$$\begin{pmatrix} 0,9846 & 0,0023 & 0,0028 & 0,0018 & 0,0085 \\ 0 & 0,9869 & 0,0028 & 0,0018 & 0,0085 \\ 0 & 0 & 0,9897 & 0,0018 & 0,0085 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9915 & 0,0085 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$(0,6892 \quad 0,1003 \quad 0,1012 \quad 0,1008 \quad 0,0085)$$

Es decir, se espera que al cabo de un año (y suponiendo que el producto esté en *run-off*, o que no haya nuevos asegurados de dicha edad), el 68,92 % de los asegurados de 60 años sean autónomos; el 10,03 % dependientes de grado 1; el 10,12 % dependientes de grado 2; el 10,08 % son dependientes de grado 3; y que el 0,85 % haya fallecido.

Al cabo de un año, los que continúen vivos tendrán otra matriz de transición, la que les corresponde a las personas de edad 61 años:

i|j	a	d_1	d_2	d_3	d_4
a	0,9834	0,0024	0,003	0,002	0,0093
d_1	0	0,9858	0,00296	0,0020	0,0093
d_2	0	0	0,9887	0,0020	0,0093
d_3	0	0	0	0,9907	0,0093
d_4	0	0	0	0	1

Por lo tanto, siguiendo la misma dinámica que en el año anterior, obtendríamos las proporciones esperadas para el año 2:

$$
\begin{gathered}
(0,6892 \quad 0,1003 \quad 0,1012 \quad 0,1008 \quad 0,0085) \\
\times \\
\begin{pmatrix}
0,9834 & 0,0024 & 0,003 & 0,002 & 0,0093 \\
0 & 0,9858 & 0,00296 & 0,0020 & 0,0093 \\
0 & 0 & 0,9887 & 0,0020 & 0,0093 \\
0 & 0 & 0 & 0,9907 & 0,0093 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \\
= \\
(0,6778 \quad 0,1005 \quad 0,1024 \quad 0,1016 \quad 0,0177)
\end{gathered}
$$

Es decir, se espera que en dos años la cartera esté compuesta por un 67,78 % de autónomos; un 10,05 % de dependientes 1; un 10,24 % de dependientes 2; un 10,16 % de dependientes 3; y que el 1,77 % haya fallecido.

En caso de que hubiese nuevas pólizas, habría que actualizar los pesos anualmente.

Capítulo 6

La reserva: Una aproximación por Thiele

A finales del siglo XIX, Thorvald N. Thiele comenzó a aplicar las ecuaciones diferenciales a modelos simples de seguros. El objetivo en este capítulo es aplicar estas ecuaciones diferenciales al modelo de Markov.

Esta herramienta resultará útil tanto para el cálculo de reservas como para la prima. Las ecuaciones diferenciales de Thiele describen la evolución de dichos elementos en una póliza multiestados, como es el caso del seguro de dependencia, a través de un proceso de Markov.

Existen numerosos trabajos que estudian las ecuaciones diferenciales de Thiele desde un punto de vista puramente matemático, pero son escasos los que ilustran numéricamente esta metodología aplicada a productos aseguradores. Destacamos el trabajo realizado por R. Norberg en [17], entre otros.

Primeramente, Norberg considera la ecuación de Thiele en un modelo de un único estado, el fallecimiento. En efecto, establece la siguiente expresión de la reserva V para el momento t:

$$\frac{d}{dt}V_t = \pi_t - b_t\mu_{x+t} + (\delta_t + \mu_{x+t})V_t,$$

bajo la suposición de que los elementos b, Π y μ son funciones continuas. El miembro derecho varía en función de la supervivencia del asegurado. Se incrementa como consecuencia del exceso de primas (Π) sobre prestaciones (b), conforme evoluciona el interés δ y teniendo en cuenta el impacto del tanto instantáneo de mortalidad μ.

En esta línea, nos apoyamos en el manual [26] elaborado por Weishaus, el cual destaca la gran utilidad de esta técnica para la aproximación de reservas en contratos de múltiples estados. Para dicho modelo, la expresión correspondiente se puede escribir como sigue:

$$\frac{d}{dt}V_t^i = \delta_t V_t^i - B_t^i - \sum_{j=0;j\neq i}^{n} \mu_{x+t}^{ij}(b_t^{ij} + V_t^j - V_t^i) \tag{6.1}$$

donde δ_t es el tipo de interés en el momento t; V_t^i la reserva en el momento t para el asegurado en el estado i-ésimo; B_t^i la prestación que recibe el asegurado mientras permanezca en el estado i menos la prima; μ_{x+t}^{ij} la *fuerza de transición* (cuya idea base es la del *tanto instantáneo de mortalidad*) del estado i al j; y b_t^{ij} el capital (*lump sum*) que el asegurado recibiría en caso de pasar del estado i al j. Además, al elemento

$$R_{ij} = b_t^{ij} + V_t^j - V_t^i$$

se le conoce como *sum at risk*, asociado con la posible transición desde el estado i al j en el momento t. Dicha transición conlleva el pago inmediato de un determinado montante por parte del asegurador al asegurado. Además, se deberá proveer la reserva en el nuevo estado, pudiendo apoyarse en la cantidad ya aprovisionada para el estado anterior. A partir del capital en riesgo, se obtiene la denominada prima de riesgo al multiplicarla por μ.

Para analizarlo desde otro punto de vista, podemos reescribir esta expresión como Norberg en [17]:

$$-B_t^i dt = dV_t^i - \delta_t dt V_t^i + \sum_{j=0;j\neq i}^{n} \mu_{x+t}^{ij} R_{ij}.$$

Los dos términos izquierdos del miembro derecho son lo llamado *savings premium*. Son la cantidad que debe ser destinada a mantener la reserva en el estado actual. Son en realidad el incremento de reserva más los intereses ganados por poseer este montante. El miembro izquierdo es la prima pagada en el intervalo $(t, t + dt)$ menos la prestación.

Como ya se comenta en [26], encontrar expresiones cerradas que sean solución de este tipo de ecuaciones diferenciales es muy difícil en la práctica, por lo que varios autores, como Norberg, proponen emplear algún tipo de método numérico para aproximar la solución. En su caso, el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Revisemos este método.

6.1. Runge-Kutta de cuarto orden

El método numérico de Runge-Kutta es uno de los más importantes en cuanto a la resolución práctica de ecuaciones diferenciales ordinarias con valor inicial. Encontramos en [20] un importante trabajo sobre métodos numéricos en el cual esta técnica puede ser revisada.

Los métodos del tipo Runge-Kutta aproximan una solución empleando los resultados obtenidos al aplicar diferentes estilos de pasos de Euler.

Por lo tanto, partimos de la fórmula de Euler, que puede expresarse como sigue:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

donde h es el paso entre nodos, x_n representa la variable independiente (el nodo), e y_n la dependiente (en nuestro caso, la reserva que pretendemos aproximar).

En la literatura se advierte de las desventajas del método de Euler, como son la falta de precisión, la débil estabilidad, y el tamaño del error cometido en la aproximación.

Con el objetivo de corregir estas ineficiencias, los métodos de Runge-Kutta de orden superior evalúan el miembro derecho tomando nodos intermedios.

En particular, la modalidad de cuarto orden considera cuatro elementos que sustituyen al término $hf(x_n, y_n)$. Estos son:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\
k_1 &= hf(x_n + h, y_n + k_3),
\end{aligned}$$

de tal forma que el elemento y_{n+1} se aproxima como sigue:

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{3}k_2 + \tfrac{1}{3}k_3 + \tfrac{1}{6}k_4.$$

Además de la corrección de la estabilidad, la incorporación de estos nuevos términos reduce el error en una potencia de 3. Es decir, mientras que el método de Euler posee un error $O(h^2)$, el método RK4 pasa a un $O(h^5)$. Lo cual se traduce en que para un mismo tamaño de paso, el error cometido por RK4 es h^3 veces menor.

Esta técnica es comúnmente usada cuando se trata de aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias donde las variables independientes no proceden de resultados empíricos. Sin embargo, las variables de nuestro modelo (Thiele) tienen su origen en las probabilidades de transición para edades enteras. Digamos que no es tan directo como introducir un valor del nodo x_n en una fórmula cerrada del tipo $y_{n+1} = x_n^2 y_n$, sino que RK4 conllevaría en esta situación múltiples discretizaciones en subnodos, haciendo un uso reiterado de métodos de interpolación, suavizamiento, y suposiciones actuarialmente lógicas sobre dichos valores.

Por lo tanto, valorando conjuntamente este inconveniente con los resultados razonablemente satisfactorios obtenidos mediante el método de Euler en nuestro caso, consideramos apropiada la aplicación de este último.

De este modo, aplicando dicha técnica a la aproximación de la reserva, la variación se discretiza en una función del paso h como sigue:

$$\frac{V_t^i - V_{t-h}^i}{h}.$$

Y por lo tanto, sustituyendo este elemento en la expresión (6.1) se tiene la siguiente discretización de la ecuación mediante Euler:

$$V_{t-h}^i = V_t^i(1 - \delta_t h) + hB_t^i + h \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \mu_{x+t}^{ij}(b_t^{ij} + V_t^j - V_t^i). \tag{6.2}$$

Norberg comenta en [17] que a la ecuación diferencial de Thiele también se la denomina *backward differential equation*. Con base la ecuación (6.2), podemos ver efectivamente la tendencia *backwards*. A la hora de aproximar una solución de dicha ecuación, se establecería como edad de inicio la final considerada (por ejemplo, en seguros vitalicios, la conocida edad máxima teórica ω).

Para resolver esta ecuación, será necesaria la implementación del método en algún software. De este modo, se podrá realizar el cálculo computacional correspondiente. Además, para que sea preciso, es conveniente tomar pasos h pequeños. Esto plantea un desafío desde el punto de vista de la información disponible. Como es bien sabido, las probabilidades de fallecimiento se proporcionan generalmente para edades enteras. Sin embargo, necesitamos algún tipo de método que nos permita obtener probabilidades aproximadas para edades intermedias.

6.2. Interpolación mediante spline cúbico

En la línea de la obtención de probabilidades para edades intermedias, encontramos en [24] una técnica que nos permite construir una curva suave que aproxima dichas probabilidades. Se trata de la interpolación mediante spline cúbico.

Una de las virtudes del spline cúbico frente a otros métodos como la interpolación lineal, es que construye polinomios de grado tres. Es decir, traza curvas en vez de rectas. Por lo tanto, en general, este método de interpolación nos ayudará a evitar picos y variaciones atípicas. Su formulación es la siguiente:

Definición 6.1. Sea un conjunto de $n+1$ puntos $\{(x_j, y_j) : j = 0, \ldots, n\}$ tal que $X_0 < x_1 < \cdots < x_n$. La función $f(x)$ es un spline cúbico si existen n polinomios cúbicos $f_i(x)$ con coeficientes a_j, b_j, c_j t d_j cumpliendo las siguientes propiedades, entre otras:

- $f(x) = f_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + b_j(x - x_j)^2 + b_j(x - x_j)^3$ para cada $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ y $j = 0, 1, \ldots, n-1$.
- $f(x_j) = y_j,\ j = 0, 1, \ldots, n.$
- $f_j(x_{j+1}) = f_{j+1}(x_{j+1}),\ j = 0, 1, 2, \ldots, n-2.$

En [24] se puede observar el desarrollo de la derivación de los coeficientes, el cual da lugar a las siguientes expresiones:

- $a_j = y_j,$
- $b_j = \dfrac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \dfrac{h_j(2m_j + m_{j+1})}{6},$
- $c_j = \dfrac{m_j}{2},$
- $c_j = \dfrac{m_{j+1} - m_j}{6h_j},\ j = 0, \ldots, n-2.$

donde

$$m_j = \frac{u_j - h_{j+1} \cdot m_{j-1} - h_j \cdot m_{j+1}}{g_j},$$

siendo

$$g_j = 2(h_{j-1} + h_j)$$

y

$$u_j = 6\Big(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}}\Big).$$

Con respecto a esta última ecuación, vemos que es necesario conocer de antemano los puntos m_0 y m_n, pues de lo contrario se tendría un sistema indeterminado. En este caso, optamos por el spline cúbico natural, que se obtiene al tomar $m_0 = 0 = m_n$. La consecuencia de esta decisión es la minimización del comportamiento oscilatorio en los extremos. Además, convierte en lineal la extrapolación más allá del rango de nodos.

En la Sección A.2 se proporciona el código implementado en VBA, de elaboración propia, mediante el cual se puede calcular la nueva curva interpolada. En este caso, mostramos en la Figura 6.1 la curva para edades intermedias, obtenida a partir de la del INE a posteriori de la graduación kernel:

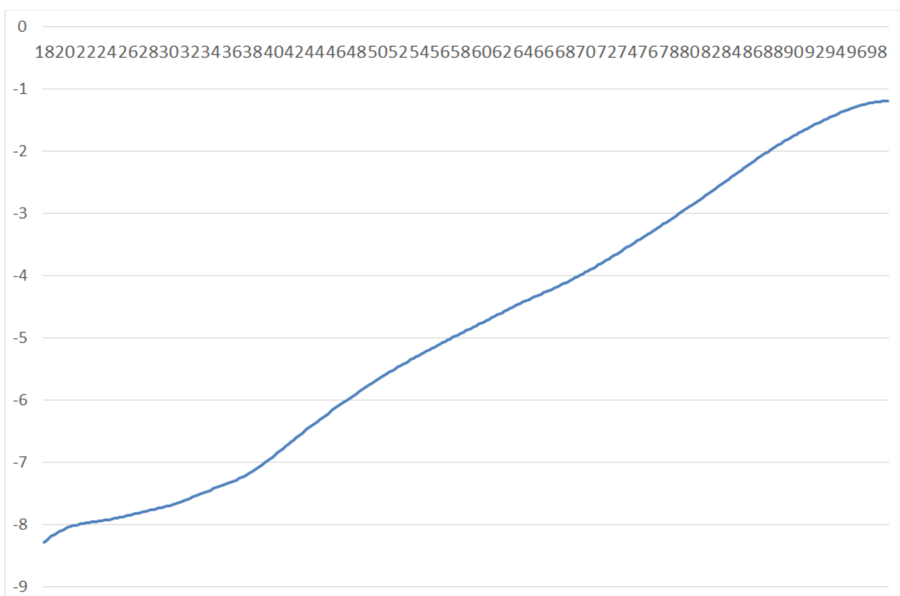


Figura 6.1: $\ln(\dot{x})$ para edades superiores a 18 años. $\dot{x}$ edades decimales.

6.3. Thiele: de la fórmula a los números

Como comentábamos anteriormente, si bien es cierto que existen numerosos trabajos que estudian las ecuaciones diferenciales de Thiele desde un punto de vista puramente matemático, son escasos los que ilustran numéricamente esta metodología aplicada a productos aseguradores.

Se ha elaborado para este trabajo una herramienta propia, mediante código VBA, que hace posible aproximar las reservas de productos aseguradores para la dependencia. En la Sección A.3 se puede consultar tanto su código como el procedimiento para su uso. En este sentido, será necesario introducir como datos de entrada las edades consideradas en la tabla de mortalidad; la edad del asegurado en cuestión; el factor de descuento; las fuerzas de transición; la prima periódica inicial; el paso h entre cada nodo (reserva); y las prestaciones.

El procedimiento es el siguiente. Tomamos como condición inicial $V_{99}^{i} = 0$, $\forall i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, donde el estado 0 es el de autónomo y 4 el de fallecido. Nótese que se parte de una edad final de 99 años, considerando que la reserva al final del periodo que abarca el contrato debe ser 0. Es decir, si el seguro fuese vitalicio, la edad final considerada sería ω.

A raíz de la ecuación (6.2), vemos que es necesario comenzar calculando la reserva del último estado de dependencia, dado que así, V_t^4 es 0 $\forall t$, y por tanto conocido (recordemos qe el único estado al que es posible acceder desde dependiente de grado tres el de fallecido). Por lo tanto, la ecuación para $i = 3$ sólo tendría una incógnita, V_{99-h}^{3}. Para cada momento hallamos las reservas desde el estado 3 al 0, y pasamos al siguiente momento. En cuanto a la prima periódica inicial, se ajustará al asegurado en cuestión. Es decir, se recalculará la prima empleada en el proceso de aproximación de las reservas de tal modo que la reserva en el momento del inicio del contrato sea 0. Veámoslo en un ejemplo.

Sea una persona de edad 40 años que contrata un seguro de dependencia que le garantice una renta de 5.000€ anuales mientras esté en estado de dependencia de grado I, 7.000€ anuales en grado II y 9.000€ anuales en grado III. Además, se establece un capital de 1.000€ si pasa de autónomo a dependiente de grado I, de 3.500€ si pasa a grado II, y de 4.500€ si pasa a grado III; un capital de 2.000€ si pasa de a dependiente de grado I a dependiente de grado II, y de 4.500€ si pasa a grado III; un capital de 3.000€ si pasa de dependiente de grado II a grado III; y un capital de fallecimiento de 50.000€ en cualquier estado. En esta situación, los elementos monetarios de la ecuación (6.2) son:

- $B_t^0 = 0,\ B_t^1 = 5{,}000,\ B_t^2 = 7{,}000,\ B_t^3 = 9{,}000,\ B_t^4 = 0,$
- $b_t = \begin{pmatrix} 0 & 1000 & 3500 & 4500 & 50000 \\ 0 & 0 & 2000 & 4500 & 50000 \\ 0 & 0 & 0 & 3000 & 50000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A partir de estos datos, se sigue el procedimiento de la Sección A.3, obteniéndose la representación gráfica en la Figura 6.2 de la evolución de la reserva:

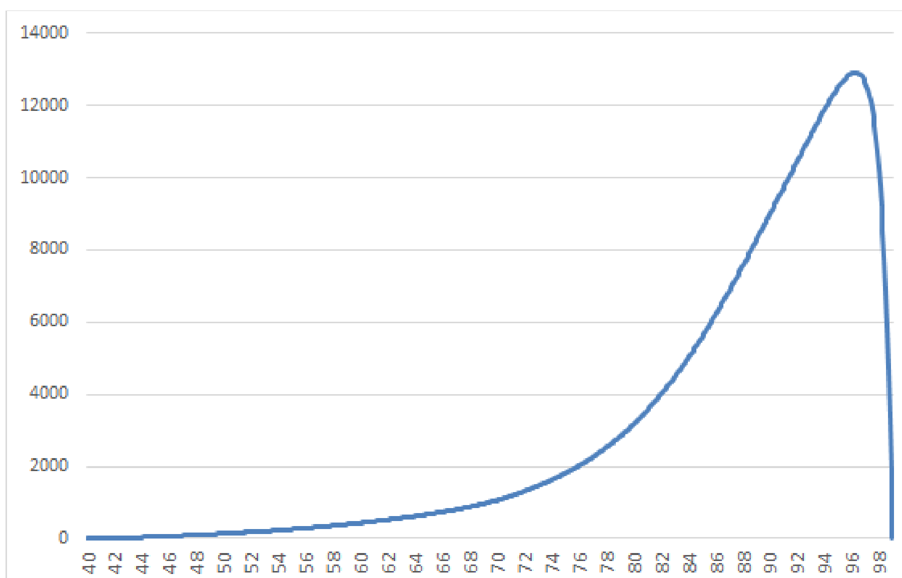


Figura 6.2: Valor de la reserva para el asegurado autónomo.

Podemos observar como hasta aproximadamente los 64 años la reserva se incrementa con una pendiente muy baja, sin embargo, a partir de esta edad la pendiente crece a un ritmo más elevado. Esto es debido al incremento en las fuerzas de transición, tanto entre grados de dependencia como hacia el fallecimiento. En efecto, pueden verse en las Figuras 6.3, 6.4, 6.5 y 6.6 como varían estos elementos μ:

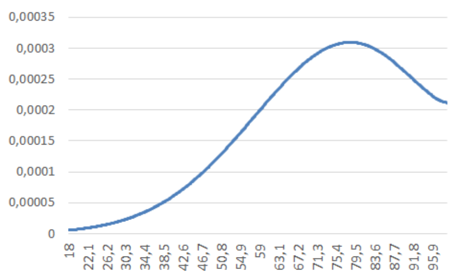


Figura 6.3: $\mu^{a1_{\dot{x}}}$ por edades.

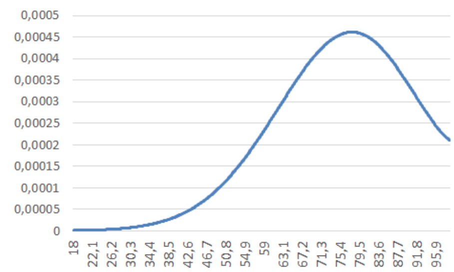


Figura 6.4: $\mu_{\dot{x}}^{a2}$ y $\mu_{\dot{x}}^{12}$ por edades.

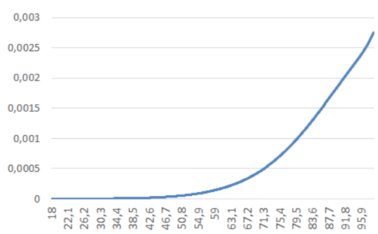


Figura 6.5: $\mu_{\dot{x}}^{a3}$, $\mu_{\dot{x}}^{13}$ y $\mu_{\dot{x}}^{23}$ por edades.

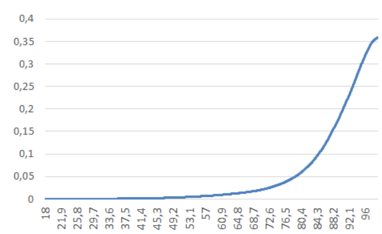


Figura 6.6: $\mu_{\dot{x}}^{am}$, $\mu_{\dot{x}}^{1m}$, $\mu_{\dot{x}}^{2m}$ y $\mu_{\dot{x}}^{3m}$ por edades.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se ha trazado un método de tarificación de seguros de dependencia basado en el modelo de múltiples estados con procesos de Markov. Asimismo, se han revisado las conocidas ecuaciones diferenciales de Thiele para la aproximación de la provisión matemática.

Para alcanzar dichos objetivos, se han recorrido caminos cualitativos y cuantitativos, examinando y empleando materia legislativa, estadística, matemática y de programación.

En particular, se ha revisado *la Ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia* del 2006, así como el *Baremo de valoración de la situación de dependencia, de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia* del 2011. De esta forma, se ha podido adaptar la información estadística a las bases que dicta la norma. En este sentido, y por lo que concierne a los grados de dependencia, se ha organizado la muestra y los resultados siguiendo los criterios que establece la Ley.

No obstante, se ha venido observando que la aplicación de esta norma ha estado generando un gran gasto de recursos públicos. En efecto, el modelo Beverdgiano que establece España pone en duda la suficiencia del sistema.

En particular, una de las causas que ha propiciado dicha situación ha sido el bajo grado de desarrollo del sistema complementario que establece la Ley, constituido por el sector privado.

En este aspecto, se han revisado distintos productos que ofrecen cobertura al fenómeno de la dependencia, entre los que se encuentra el seguro de dependencia.

Para llevar a cabo el estudio correspondiente, se ha tomado como información estadística la aportada por la *Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud* (*EDDS*). De este modo, se han seguido los pasos de gran cantidad de profesionales investigadores en materia de dependencia.

No obstante, algunos de los requisitos que ICEA señala en cuanto a bases muestrales no han podido ser cumplidos por esta encuesta. Por ello, se han establecido ciertas hipótesis como la estacionariedad de la población y la no recuperación de las personas en estado de dependencia, así como la necesidad de proporcionar un método de derivación de las tasas de incidencia a partir de las de prevalencia, o la aplicación de *recargos actuariales* en las probabilidades de transición.

En efecto, al igual que en otros trabajos en materia de dependencia, se ha dejado constancia de la escasa información estadística en nuestro país. De hecho, es este uno de los motivos por los que no ha sido el modelo de múltiples estados el más generalizado en el sector asegurador, sino el de incidencia/renta, el cual necesita una menor cantidad de información estadística para llevarse a cabo.

Pese a todo, se ha podido establecer un procedimiento para la derivación de las tabas de mortalidad de la población dependiente. En este sentido, ha sido necesaria la revisión de algunas técnicas matemáticas como la graduación kernel, llegándose a proporcionar una herramienta en VBA, de elaboración propia, para hacer posible su aplicación. En esta línea, también se han suministrado otros aplicativos con este software para poder alcanzar los objetivos propuestos. Ejemplos de ello son la herramienta para interpolar mediante spline cúbico, y el calculador que aproxima la provisión a través de las ecuaciones diferenciales de Thiele.

En este último aspecto, destacar el esfuerzo al ilustrar numéricamente el método de Thiele aplicándolo a seguros de dependencia. Si bien es cierto que es posible encontrar numerosos estudios sobre dichas ecuaciones desde el punto de vista matemático, son prácticamente inexistentes los que las ilustran a través de su implementación en algún software.

Apéndice A

Subrutinas de VBA

En este capítulo se recogen los códigos en VBA, de elaboración propia, que permiten llevar a cabo algunas de las técnicas comentadas en secciones anteriores. En particular, se proporcionan las subrutinas correspondientes a la graduación kernel, la interpolación del spline cúbico natural, y la aproximación de las ecuaciones diferenciales de Thiele mediante el método de Euler.

A.1. Subrutina para la graduación kernel

A continuación se muestra en la Figura A.1 un fragmento de la Hoja Excel de referencia, y la implementación en VBA del procedimiento detallado en la Sección 4.3:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Edad	qz	ln(qz)	Tamaño Ventana (b)	2		q_hat_x	ln(q_hat_x)
2	0	0,00277279	-5,88790233				0,00103426	-6,87407133
3	1	0,00020476	-8,49369153				0,00075033	-7,19500127
4	2	0,00016264	-8,72396524				0,00049817	-7,60456719
5	3	0,00011549	-9,06636991				0,00030708	-8,08840048
6	4	0,00011111	-9,10502586				0,00018784	-8,5799231
7	5	8,3675E-05	-9,38857031				0,00012759	-8,96672189
8	6	0,0000973	-9,23771157				0,00010255	-9,18512338
9	7	7,9064E-05	-9,44525291				9,342E-05	-9,27840164
10	8	0,00010439	-9,16734793				9,0045E-05	-9,31519847

Figura A.1: Fragmento Excel del graduador kernel.

```
Sub kernel()

    Dim suma_denom As Double
```

```
Dim suma_num As Double

b = Application.Workbooks("kernel_VBA.xlsm").Worksheets _
("Datos").Range("e1").Value

edades = Application.Workbooks("kernel_VBA.xlsm"). _
Worksheets("Datos").Range(Range("a2"), Range("a2"). _
End(xlDown)).Value

dimension = UBound(edades)

qz = Application.Workbooks("kernel_VBA.xlsm").Worksheets _
("Datos").Range(Range("b2"), Range("b2").End(xlDown)).Value

ReDim Kb(1 To dimension, 1 To 1) As Variant
ReDim q_hat_x(1 To dimension, 1 To 1) As Variant

'numero Pi en VBA
Pi = 4 * Atn(1)

For i = 1 To dimension
    x = edades(i, 1)
    suma_denom = 0
    suma_num = 0
    For j = 1 To dimension
        zeta = edades(j, 1)
        t = (x - zeta) / b
        K = Exp(-(t ^ 2 / 2)) / ((2 * Pi) ^ (1 / 2))
        Kb(j, 1) = 1 / b * K
        suma_denom = suma_denom + Kb(j, 1)
        suma_num = suma_num + qz(j, 1) * Kb(j, 1)
    Next j
    denom = suma_denom
    num = suma_num

    q_hat_x(i, 1) = num / denom
Next i

Application.Workbooks("kernel_VBA.xlsm").Worksheets _
("Datos").Range("g2:g" & dimension + 1) = q_hat_x
```

```
End Sub
```

A.2. Subrutina para la interpolación spline cúbico natural

En este apartado se proporciona una herramienta de elaboración propia implementada en VBA con apoyo de Excel. Esta herramienta permite, dado un rango de edades, de probabilidades, y estableciendo un paso h (distancia entre nodos), interpolar mediante spline cúbico natural. No obstante, puede ser aplicado a cualquier conjunto de nodos, tal y como se comenta en la Sección 6.2.

En este caso, introducimos como datos de entrada la información del INE: edades enteras y probabilidades de fallecimiento. Estas probabilidades se encuentran graduadas con kernel, después de haber empleado el software de la Sección A.1. A continuación, se muestran en la A.2 el fragmento en Excel de los *inputs* y el código en VBA.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Edad	qx		Paso h interpolación	0,25		xj (edades)	qx_splines	ln(qx_splines)
2	0	0,00103426					0	0,00103426	-6,87407133
3	1	0,00075033					0,25	0,00096204	-6,946450033
4	2	0,00049817					0,5	0,00089032	-7,023925949
5	3	0,00030708					0,75	0,00081959	-7,10671029
6	4	0,00018784					1	0,00075033	-7,195001273
7	5	0,00012759					1,25	0,00068304	-7,28895592
8	6	0,00010255					1,5	0,00061824	-7,388632058

Figura A.2: Fragmento Excel del graduador kernel.

```
Sub splines_cubico_natural()

    edades = Application.Workbooks("splines_VBA.xlsm"). _
    Worksheets("Datos").Range(Range("a2"), Range("a2"). _
    End(xlDown)).Value

    qx = Application.Workbooks("splines_VBA.xlsm"). _
    Worksheets("Datos").Range(Range("b2"), Range("b2") _
    .End(xlDown)).Value

    dimension = UBound(edades)
```

```
ReDim ai(1 To dimension, 1 To 1) As Variant
ReDim ci(1 To dimension, 1 To 1) As Variant

'es el paso de nodos en la interpolacion
ReDim hi(1 To dimension - 1, 1 To 1) As Variant

'condiciones iniciales del splines natural
'ci en la primera y ultima posicion es 0
'las demas se inicilizan a cero para que no error
'por vacio en el metodo de la manguera
'se aprovecha para rellenar ai
For i = 1 To dimension
    ci(i, 1) = 0
    ai(i, 1) = qx(i, 1)
Next i

For i = 1 To dimension - 1
    hi(i, 1) = edades(i + 1, 1) - edades(i, 1)
Next i

'para cada elemento calculado de ci, hay que
'volver a recalcular todos los ci (metodo
'manguera) cada vez
fin = 2
i = 2
Do While fin <= dimension - 1
    ci(i, 1) = (3 / hi(i, 1) * (ai(i + 1, 1) - _
    ai(i, 1)) - 3 / hi(i - 1, 1) * (ai(i, 1) - _
    ai(i - 1, 1)) - hi(i - 1, 1) * ci(i - 1, 1) _
    - hi(i, 1) * ci(i + 1, 1))* 1 / (2 * _
    (hi(i, 1) + hi(i - 1, 1)))

    If i = fin Then
        i = 2
        fin = fin + 1
    Else
        i = i + 1
    End If
```

```
Loop

ReDim bi(1 To dimension - 1, 1 To 1) As Variant
ReDim di(1 To dimension - 1, 1 To 1) As Variant

For i = 1 To dimension - 1
    bi(i, 1) = 1 / hi(i, 1) * (ai(i + 1, 1) - _
    ai(i, 1)) - hi(i, 1) / 3 * (2 * ci(i, 1) + _
    ci(i + 1, 1))

    di(i, 1) = (ci(i + 1, 1) - ci(i, 1)) * 1 / (3 * _
    hi(i, 1))
Next i

x_inter = Application.Workbooks("splines_VBA.xlsm") _
.Worksheets("Datos").Range(Range("g2"), Range("g2"). _
End(xlDown)).Value

dimension_inter = UBound(x_inter)

ReDim f_splines(1 To dimension_inter, 1 To 1) As Variant

For i = 1 To dimension_inter
    x = Int(x_inter(i, 1))

    'en el siguiente comando se supone que las edades
    'iniciales dan saltos de un año
    j = 1 + Int(x_inter(i, 1))

    'el siguiente if se establece porque bj y dj tienen
    'menor tamaño
    If Int(x_inter(i, 1)) < edades(dimension, 1) Then
        f_splines(i, 1) = ai(j, 1) + bi(j, 1) * _
        (x_inter(i, 1) - x)+ ci(j, 1) * (x_inter(i, 1) _
        - x) ^ 2 + di(j, 1) * (x_inter(i, 1) - x) ^ 3
    Else
        f_splines(i, 1) = ai(j, 1) + ci(j, 1) * ( _
        x_inter(i, 1) - x) ^ 2
    End If
Next i
```

```
    Application.Workbooks("splines_VBA.xlsm").Worksheets _
    ("Datos").Range("h2:h" & dimension_inter + 1).Value _
    = f_splines

    Application.Workbooks("splines_VBA.xlsm").Worksheets _
    ("Datos").Range("j2:j" & dimension + 1).Value = ai

    Application.Workbooks("splines_VBA.xlsm").Worksheets _
    ("Datos").Range("k2:k" & dimension + 1).Value = ci

    Application.Workbooks("splines_VBA.xlsm").Worksheets _
    ("Datos").Range("l2:l" & dimension).Value = bi

    Application.Workbooks("splines_VBA.xlsm").Worksheets_
    ("Datos").Range("m2:m" & dimension).Value = di

End Sub
```

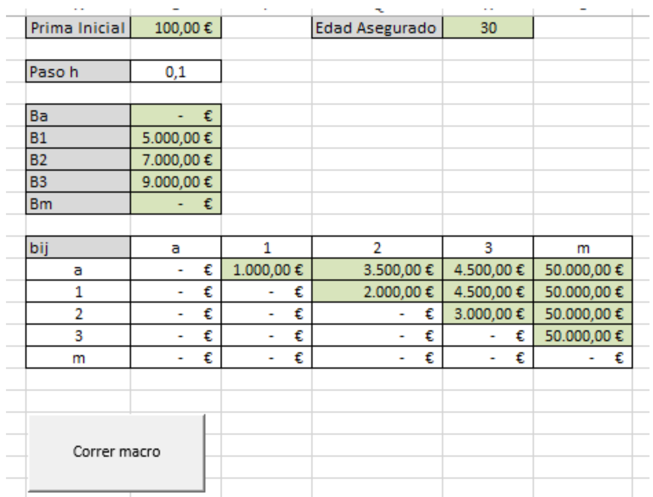
A.3. Subrutina para la aproximación de Thiele

En la Sección 6.3 se ilustró numéricamente la metodología para la aproximación de la provisión a través de una herramienta propia implementada en VBA. En esta sección comentamos dicho aplicativo.

En particular, se muestra en las Figuras A.3 y A.4 la pantalla en Excel de los datos de entrada del calculador. Pueden observarse de izquierda a derecha las edades, factores de descuento y fuerzas de transición ente estados. Además de la prima inicial de partida, que luego se ajustará, la edad del asegurado en cuestión, el paso h, las rentas netas de prima B, y los capitales b.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Edad	Desc	mu3m	mu2m	mu23	mu1m	mu13	mu12	muam	mua3	mua2	mua1
18	0,9360365	0,0002511	0,0002511	3,581E-07	0,0002511	3,581E-07	7,785E-07	0,0002511	3,581E-07	7,785E-07	5,391E-06
18,1	0,9360537	0,0002546	0,0002546	3,645E-07	0,0002546	3,645E-07	7,945E-07	0,0002546	3,645E-07	7,945E-07	5,463E-06
18,2	0,9360708	0,000258	0,000258	3,71E-07	0,000258	3,71E-07	8,109E-07	0,000258	3,71E-07	8,109E-07	5,535E-06
18,3	0,936088	0,0002615	0,0002615	3,776E-07	0,0002615	3,776E-07	8,275E-07	0,0002615	3,776E-07	8,275E-07	5,608E-06
18,4	0,9361052	0,0002649	0,0002649	3,843E-07	0,0002649	3,843E-07	8,445E-07	0,0002649	3,843E-07	8,445E-07	5,682E-06
18,5	0,9361224	0,0002683	0,0002683	3,912E-07	0,0002683	3,912E-07	8,617E-07	0,0002683	3,912E-07	8,617E-07	5,757E-06

Figura A.3: Fragmento Excel del aplicativo de Thiele.



Prima Inicial	100,00 €		Edad Asegurado	30	
Paso h	0,1				
Ba	- €				
B1	5.000,00 €				
B2	7.000,00 €				
B3	9.000,00 €				
Bm	- €				

bij	a	1	2	3	m
a	- €	1.000,00 €	3.500,00 €	4.500,00 €	50.000,00 €
1	- €	- €	2.000,00 €	4.500,00 €	50.000,00 €
2	- €	- €	- €	3.000,00 €	50.000,00 €
3	- €	- €	- €	- €	50.000,00 €
m	- €	- €	- €	- €	- €

Figura A.4: Fragmento Excel del aplicativo de Thiele.

Como resultado, y como se mostró en la Sección 6.3, el programa devuelve la provisión para el asegurado considerado.

A continuación, el código:

```
Sub thiele_aseg()
'dado un asegurado de edad x, hallamos la reserva tal que
'Vax=0

    Dim suma As Double

    'guardamos los inputs en vectores y matrices
    edades = Application.Workbooks("Thiele_VBA.xlsm"). _
    Worksheets("Inputs").    Range(Range("A2"), _
    Range("A2").End(xlDown))

    dimension = UBound(edades)

    ReDim edades2(1 To dimension, 1 To 1) As Variant

    'hago esto porque cuando lo programe el vector de edades
    'estaba al reves en el excel
    For i = 1 To dimension
        edades2(i, 1) = edades(dimension - i + 1, 1)
```

```
    edades(i, 1) = edades2(i, 1)
Next i

edad_aseg = Application.Workbooks("Thiele_VBA.xlsm"). _
Worksheets("Inputs").Range("R1").Value

dim_vec_va_aseg = (99 - edad_aseg) * 10 + 1

ReDim Va_aseg(1 To dim_vec_va_aseg, 1 To 1) As Variant
ReDim Va_aseg_ord(1 To dim_vec_va_aseg, 1 To 1) _
As Variant
ReDim edades_aseg(1 To dim_vec_va_aseg, 1 To 1) _
As Variant
ReDim edades_aseg_ord(1 To dim_vec_va_aseg, 1 To 1) _
As Variant

deltas = Application.Workbooks("Thiele_VBA.xlsm"). _
Worksheets("Inputs").Range(Range("B2"), Range("B2"). _
End(xlDown))

mus = Application.Workbooks("Thiele_VBA.xlsm"). _
Worksheets("Inputs").Range(Range("C2"), Range("L2"). _
End(xlDown))

Prima = Application.Workbooks("Thiele_VBA.xlsm"). _
Worksheets("Inputs").Range("O1")

h = Application.Workbooks("Thiele_VBA.xlsm"). _
Worksheets("Inputs").Range("O3")

B_renta = Application.Workbooks("Thiele_VBA.xlsm"). _
Worksheets("Inputs").Range(Range("O5"), Range("O5"). _
End(xlDown))

b_lumpsum = Application.Workbooks("Thiele_VBA.xlsm"). _
Worksheets("Inputs").Range(Range("O12"), Range("S12"). _
End(xlDown))

'definimos la matriz de reservas
ReDim V_reservas(1 To dimension, 1 To 4) As Double
```

```
'la condicion inicial es que la reserva en la edad final
'debe ser 0
For i = 1 To 4
    V_reservas(1, i) = 0
Next i
Va_aseg(1, 1) = 0
edades_aseg(1, 1) = 99

'hago esto para que entre la primera vez en el do while
For i = 1 To 4
    For j = 2 To dimension
        V_reservas(j, i) = 100
    Next j
Next i

'le meto condiciones no muy fuertes (prescindo del 0 puro)
'parara cuando la reserva para la persona de x autonomo
'sea proxima a 0
Do While V_reservas((99 - edad_aseg) * 10 + 1, 4) > 1 _
Or V_reservas((99 - edad_aseg) * 10 + 1, 4) < -1
'posicion de edad_aseg en el vector de edades
'aplicamos Thiele para ir obteniendo recursivamente
'las reservas
For j = 2 To dimension
    'tenemos que obtener V3, V2, V1 y Va, por ese orden
    'y cambio de fila
    'el 1 es V3, y el 4 es Va
    delt = deltas(j - 1, 1)
    For i = 1 To 4
        Vi = V_reservas(j - 1, i)

        'hacemos el sumatorio de los mus
        suma = 0
        If i = 1 Then 'estado 3
            Bi = B_renta(4, 1)
            muij = mus(dimension - j + 1, 1)
            bij = b_lumpsum(4, 5) 'paso del 3 a m
            vj = 0
            'en estado de fallecimiento la reserva es 0
```

```
        suma = suma + muij * (bij + vj - Vi)
    ElseIf i = 2 Then 'estado 2
        Bi = B_renta(3, 1)
        cont = 0
        For l = 2 To 3
            muij = mus(dimension - j + 1, l)
            If cont = 0 Then
                bij = b_lumpsum(3, 5) 'paso del 2 al m
                vj = 0
                'si se acaba de empezar el bucle la
                'reserva es la de fallecido,
                'y esta es 0
                cont = 1
            End If
            If cont = 1 And l = 3 Then
                bij = b_lumpsum(3, 4) 'paso del 2 al 3
                vj = V_reservas(j - 1, 1)
                'reserva en estado 3
            End If
            suma = suma + muij * (bij + vj - Vi)
        Next l
    ElseIf i = 3 Then 'estado 1
        Bi = B_renta(2, 1)
        cont = 0
        For l = 4 To 6
            muij = mus(dimension - j + 1, l)
            If cont = 0 Then
                bij = b_lumpsum(2, 5) 'paso de 1 a m
                vj = 0
                'si se acaba de empezar el bucle la
                'reserva es la de fallecido,
                'y esta es 0
                cont = 1
            End If
            If cont = 1 And l = 5 Then
                bij = b_lumpsum(2, 4) 'paso de 1 a 3
                vj = V_reservas(j - 1, 1)
                'reserva en estado 3
                cont = 2
            End If
```

```
            If cont = 2 And l = 6 Then
                bij = b_lumpsum(2, 3) 'paso de 1 a 2
                vj = V_reservas(j - 1, 2)
                'reserva en estado 2
            End If
            suma = suma + muij * (bij + vj - Vi)
        Next l
    ElseIf i = 4 Then 'estado autonomo
        cont = 0
        Bi = B_renta(1, 1) - Prima
        'si está autónomo se le cobra prima
        For l = 7 To 10
            muij = mus(dimension - j + 1, l)
            If cont = 0 Then
                bij = b_lumpsum(1, 5) 'paso de a a m
                vj = 0
                'si se acaba de empezar el bucle la
                'reserva es la de fallecido, y esta
                'es 0
                cont = 1
            End If
            If cont = 1 And l = 8 Then
                bij = b_lumpsum(1, 4) 'paso de a a 3
                vj = V_reservas(j - 1, 1)
                'reserva en estado 3
                cont = 2
            End If
            If cont = 2 And l = 9 Then
                bij = b_lumpsum(1, 3) 'paso de a a 2
                vj = V_reservas(j - 1, 2)
                'reserva en estado 2
                cont = 3
            End If
            If cont = 3 And l = 10 Then
                bij = b_lumpsum(1, 2) 'paso de a a 1
                vj = V_reservas(j - 1, 3)
                'reserva en estado 1
            End If
            suma = suma + muij * (bij + vj - Vi)
        Next l
```

```
        End If

        V_reservas(j, i) = Vi * (1 - delt * h) + h * Bi _
         + h * suma

    Next i

    If j <= (99 - edad_aseg) * 10 + 1 Then
        Va_aseg(j, 1) = V_reservas(j, 4)
        edades_aseg(j, 1) = edades(j, 1)
    End If

Next j

Prima = Prima - 0.5

If Prima < 0 Then Exit Do

Loop

'ordenamos las reservas desde la edad x hasta los 99 años
'ordenamos tambien el vector de edades del asegurado
For j = 1 To (99 - edad_aseg) * 10 + 1
    Va_aseg_ord(j, 1) = Va_aseg((99 - edad_aseg) * 10 _
    + 1 - j + 1, 1)
    edades_aseg_ord(j, 1) = edades_aseg((99 - edad_aseg) _
    * 10 + 1 - j + 1, 1)
Next j

Application.Workbooks("Thiele_VBA.xlsm").Worksheets _
("Outputs").Range("g2:h10000").Clear

Application.Workbooks("Thiele_VBA.xlsm").Worksheets _
("Outputs").Range("g2:g" & dim_vec_va_aseg + 1) _
.Value = edades_aseg_ord

Application.Workbooks("Thiele_VBA.xlsm").Worksheets _
("Outputs").Range("h2:h" & dim_vec_va_aseg + 1). _
Value = Va_aseg_ord
```

```
    Application.Workbooks("Thiele_VBA.xlsm").Worksheets _
    ("Outputs").Range("j1").Value = Prima

    If Prima < 0 Then
        MsgBox "La prima inicial es demasiado baja. _
        No se ha llegado a solución"
    Else
        MsgBox "Ejecución finalizada. Si has cambiado la _
        edad desde la última ejecución debes volver a hacer _
        el gráfico. Ver resultados en la pestaña Outputs."
    End If


End Sub
```

Bibliografía

[1] Alegre, A., Pociello, E., Pons, M. A., Sarrasi, F. J. y Varea, J. (2004). *Avance de la mediación de la tasa de prevalencia de la dependencia en España y criterios de valoración de la severidad.* Actuarios, N$^{\text{o}}$. 22, 2004, pags. 27-29 01/2004.

[2] Alegre, A., Pociello, E., Pons, M. A., Sarrasi, F. J. y Varea, J. (2004). *Modelo discreto de transiciones entre estados de dependencia.* Universitat de Barcelona.

[3] Alegre, A., Ayuso, M., Guillén, M., Monteverde, M. y Pociello, E. (2005). *Tasa de dependencia de la población española no institucionalizada y criterios de valoración de la severidad.* Rev. Esp. Salud Pública 2005; 79: 351-363.

[4] Ayuso, M., Corrales, H., Pérez-Marín, A.M. y Rojo, J.L. (2007). *Estadística Actuarial Vida* Universitat de Barcelona.

[5] BOE (2006). *Ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia.*

[6] BOE (2011). *Baremo de valoración de la situación de dependencia, de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia.*

[7] Booth P., Chadburn R., Haberman S., James D. Khorasanee Z., Plumb R., Rickayzen B. (2005). *Modern Actuarial Theory and Practice. Second Edition* Chapman & Hall/CRC.

[8] Dullaway, D. & Elliott, S. (1998). *Long-Term Care Insurance: A Guide to Product Design and Pricing.* Staple Inn Actuarial Society.

[9] Departamento de métodos cuantitativos (2011). *«Notas de Graduación y Ajuste».* Universitat de Valencia.

[10] Haberman, S. y Pitacco, E. (1999). *Actuarial models for disability insurance.* Chapman and Hall.

[11] ICEA (2006). *Investigación cooperativa entre entidades aseguradoras.*

[12] INE (1999). *Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud.*

[13] INE (2008). *Encuesta de Discapacidad, Autonomía personal y situaciones de Dependencia.*

[14] INE. *Tablas de mortalidad de la población de España 1991-2013.*

http://www.ine.es/jaxi/Tabla.htm?path=/t20/p319a/serie/p01/l0/&file=01001.px&L=0

[15] Lledó, J., Pavía, J.M. y Morillas, F. (2016) *Assessing Implicit Hypotheses in Life Table Construction* Scandinavian Actuarial Journal.

[16] Lockwood, O. (2009). *Time series modelling of Gompertz-Makeham mortality curves: historical analysis, forecasting and life insurance applications.*

[17] Norberg, A. (1991). *Reserves in life and pension insurance.* Scandinavian Actuarial Journal.

[18] Palacios, E. y Abellán, A. (2007). *Diferentes estimaciones de la discapacidad y la dependencia en España.* Informes Portal Mayores nº 56.

[19] Pavía, J.M., Morillas, F. y Lledó, J. (2012) *Introducing Migratory Flows in Life Table Construction* SORT, 36, 103-114.

[20] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Veterling, W.T., Flannery, B.P. (2007) *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. Third Edition* Cambridge University Press

[21] Rickayzen, B. D. (2002). *A multi-state model of disability for the UK: implications for future need for long term care for the elderly.* Department of Actuarial Science City University London.

[22] Sánchez, E. (2009). *Bases técnicas dinámicas del seguro de Dependencia en España: una aproximación en campo discreto* . Fundación Mapfre.

[23] Society of Actuaries Long-Term Care Valuation Insurance Methods Task Force. (1995). *Long-Term Care Valuation Insurance Methods.* Staple Inn Actuarial Society. Transactions of the Society of Actuaries, XLVII, 103?271.

[24] Stuart A., Harry H., Gordon E. (2008). *Loss Models: From Data to Decisions, 3rd. ed.* John Wiley & Sons.

[25] Vidal, C. (2012). *Prestaciones y Seguros de Salud y Dependencia.* Universitat de Valencia.

[26] Weishaus, A. (2011). *Study Manual for SOA Exam MLC. Life Contingencies.* Actuarial Study Materials.