$$\mu_{1,t} = a + bc^t$$

$$\theta(n,t) \begin{cases} \theta(1,t) = \theta(0,0)\, e^{-at - \frac{b}{lc}(c^t - 1)} \\ \theta(0,t) = \theta(0,0) - \theta(1,t) = \theta(0,0) \left[1 - e^{-at - \frac{b}{lc}(c^t - 1)} \right] \end{cases}$$

$$\Phi(n,t) \begin{cases} \Phi(1,t) = \left[1 - e^{-at - \frac{b}{lc}(c^t - 1)} \right] \\ \Phi(0,t) = \dfrac{\theta(0,0) - \theta(0,t)}{\theta(0,0)} = \dfrac{\theta(1,t)}{\theta(0,0)} = e^{-at - \frac{b}{lc}(c^t - 1)} \end{cases}$$

C) Ahora ya estamos en condiciones de hallar la distribución de las variantes X_t, será, para la función de probabilidad en riesgos elementales,

$$n \neq 0 \qquad f_t(n)\,dn = \Phi''_{nt}(n,t)\,dn\,dt = 0(n,t) \;,,$$

$$f_t(0) = 1 - \lim_{\Delta n \to 0} \int_{\Delta n}^{N} f_t(n)\,dn = 1 - 0(t) \to 1$$

Es decir, la probabilidad de que ocurra cualquier suceso del intervalo (n, n + dn), en el instante (t, t + dt) ($n \neq 0$ y $t \neq 0$), es un infinitésimo respecto de *n* y de *t*. La probabilidad de no ocurrencia de siniestro en un instante (t, t + dt) es igual a la unidad menos un infinitésimo respecto a *t*.

Y el valor medio, tal como se resaltó al principio caso de ser el riesgo asegurable,

$$E(X_t) = 0 \cdot f_t(0) + \lim_{\Delta n \to 0} \int_{\Delta n}^{N} n\, f_t(n)\,dn = m(t)\,dt \to 0$$

En el caso de un contrato cuyas variantes X_t fuesen dependientes, sería interesante estudiar el coeficiente de correlación parcial de cada dos variantes, correspondientes a dos instantes de tiempo distintos, que, si la distribución conjunta no es conocida, puede estimarse por medio del r_{ij} muestral.

Cartera total

A) En un determinado momento de la vida del ente asegurador, habrá en vigor una serie de contratos, que, atendiendo al período que falta por transcurrir en cada uno, se trata de variantes,

$$X_1, X_2, \ldots, X_r \qquad X_i \text{ definida en } (0, Ti]$$

siendo *r*, en general, grande. Entonces la distribución de la cartera total, para ese instante, es la correspondiente a la suma de un número grande de variantes independientes, normales unas y logarítmico-normales otras; denominando por $f_{x_c}(x)$ a la función de densidad, si se cumplen las condiciones suficientes,

$$f_{x_c}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{[x - P_c]^2}{\sigma_c^2}}$$

En donde,

$P_c = \sum_i^r P_i = \sum_i \int_0^{Ti} m_i(t)\, dt =$ suma de primas únicas de todos los contratos.

$$\sigma_c^2 = \sum_i \int_0^{Ti} \sigma_i^2(t)\, dt.$$

B) Asimismo, para toda la cartera y para un instante dado *t*, tenemos que se distribuye con arreglo a la suma de variantes independientes

$$X_c(t) = X_1(t) + X_2(t) + \cdots + X_r(t)$$

y, por tanto,

$$f_{x_{c(t)}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_1^r D_i^2(t)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{[x - P_c(t)]^2}{\sum_1^r D_i^2(t)}}$$

siendo

$P_c(t) = \sum_1^r P_i(t) = \sum_1^r m_i(t)\; dt =$ suma de las primas instantáneas de todos los contratos.

De aquí se deduce un caso particular, ya conocido si consideramos cada contrato como capaz de presentar en cada instante únicamente uno cualquiera de los dos resultados siguientes:

1) Acaecimiento del siniestro, con probabilidad igual a la suma de probabilidades de las distintas reclamaciones

$$p_i(t) = \frac{d_t\, \theta(0,t)}{\lim. \int_{\Delta_n}^{N} \theta(n,t)\, dn} = 0(t)$$

2) *No acaecimiento. Probabilidad* $q_i(t) = 1 - 0(t)$.

Por tanto, cada contrato está asimilado a una variante dicotómica, y la cartera total se distribuye asintónicamente normal

$$\left(\sum_{1}^{r} p_i (t) \; , \sum_{1}^{r} \sqrt{r \; p_i (t) \; q_i (t)} \right)$$

siendo los contratos independientes.

C) Observando la cartera del ente asegurador en un determinado período $[t_1, t_2]$, se ve que van surgiendo una serie de contratos o variantes,

$$\begin{array}{cccc} V_1 , & V_2 , & \ldots & , V_\nu \\ (t_1 , \omega_1] & (t_1 + \Delta t, \omega_2] & \ldots & (t_2 - \Delta' t, \omega_\nu] \end{array}$$

es decir, se genera un proceso estocástico de parámetro discreto. Refiriendo todos los contratos al extremo del intervalo t_1, por ejemplo, también el curso de la aseguradora aparece distribuído de acuerdo con una suma de variantes independientes.

Teniendo en cuenta también las salidas de contratos (por vencimientos, indemnización, rescisión, etc.), aparece el proceso estocástico correspondiente a un *colectivo abierto,* siendo, por tanto, de completa aplicación la teoría de éstos para determinar el número medio o esperado de contratos existentes, la distribución de las desviaciones con respecto a éste, y luego ya es posible seguir el estudio con respecto a la siniestralidad, tal como lo veníamos haciendo.

D) Todo lo expuesto en los puntos anteriores puede razonarse para variantes bidimensionales, según la segunda interpretación del contrato como variante bidimensional $(\xi_n \; , \; \xi_t \,)$.

De C) se desprende la siguiente cuestión, que tratará de desarrollarse en un trabajo posterior:

Bastaría que el ente asegurador dispusiera de un fondo de maniobra que le permitiera constituir en cada instante (salvo desviaciones que podrían reasegurarse) el valor medio de la variante-contrato surgido en ese instante. Esto atendiendo a una visión actualizada de un determinado período y teniendo en cuenta también las salidas de contratos.

III

A) Si los vectores X del apartado A anterior son de cuadrado sumable (esto es, su función de densidad) en su intervalo de definición, y tomando el mayor intervalo común a todos ellos, por combinaciones de la forma (para las funciones de densidad):

$$f_{z_i} = a_{i1} f_{x_1} + a_{i2} f_{x_2} + \dots + a_{ir} f_{x_r}$$

obtenemos un conjunto de vectores aleatorios, ortogonales y unitarios, que nos permiten expresar cualquier otro contrato como combinación lineal de éstos:

$$f_w = \alpha_1 f_{z_1} + \alpha_2 f_{z_2} + \dots + \alpha_r f_{z_r} \qquad W = \quad \text{nuevo contrato}$$

en donde los α_i son los coeficientes de Fourier.

B) Un estudio similar al desarrollado en las partes I y II con respecto a la reserva total de riesgo, conduce directamente a la Teoría del Riesgo Colectivo (publicada por su autor, Lundberg, en la revista de actuarios escandinavos *Skandinavisk Aktuarietidskrift).*

Esta reserva puede ofrecer en cada instante un resultado cualquiera comprendido en $[\lambda P - S, \lambda P]$ siendo S la indemnización correspondiente a una siniestralidad total, y P la prima recargada* con $(\lambda - 1)$ P (recargo de seguridad). En un instante $t = P$ (midiendo el tiempo por la prima cobrada, que suponemos fluye continuamente), la probabilidad de que tome el valor x es igual a la probabilidad de que en $(0, P]$ hayan ocurrido siniestros en total por cuantía $\lambda P - x$, ó suponiendo el valor medio de los siniestros igual a 1 que hayan ocurrido $\lambda P - x$ siniestros (tomando siniestro y reclamación en el mismo sentido, es decir, considerando sólo siniestros para el asegurador). Esta probabilidad es la que satisface la ecuación diferencial

$$f(n, P) = f(n-1, P)\, dP + f(n, P)(1 - dP)$$

en donde dP, por definición de P, es el número esperado de siniestros en ese instante, es decir, la probabilidad de ocurrencia de un siniestro, pues en un instante sólo puede ocurrir un solo siniestro.

Es fácil ver que su solución es la función de Poisson,

$$\frac{P^{\lambda P - x}}{|\underline{\lambda P - x}} e^{-P}$$

en donde $P = t$ es variable de un instante a otro y representa la prima total recibida por el asegurador en el negocio de riesgo.