9

Recargo de seguridad y recargos económicos

9.1 Introducción

Tal y como se indicó en el capítulo 7, la prima es el precio del servicio prestado por el asegurador y ha de ser suficiente para que éste pueda hacer frente a todos los costes que se derivan de la póliza, tanto las prestaciones determinadas en la misma por mortalidad y/o supervivencia del asegurado como los diversos gastos que acarrea su gestión.

Es por tanto necesario sumar a la prima pura los correspondientes recargos que permitan resarcir a la empresa de estos gastos de gestión. Aunque la estructura de estos gastos depende lógicamente de la organización propia de cada empresa, en general suelen distinguirse los denominados **gastos de gestión interna y gastos de gestión externa**.

Típicamente los gastos de gestión interna se corresponden con los sueldos y salarios, amortizaciones, gastos generales etc. El problema es la imputación de estos gastos a cada una de las pólizas. En la práctica el recargo para gastos de gestión interna se establece bien en función del capital asegurado, bien en función de las primas comerciales.

Los gastos de gestión externa son los correspondientes a la producción o adquisición y fundamentalmente son las comisiones a agentes (descontadas o periódicas) y otros gastos que, en general, podemos denominar como de mantenimiento del negocio y cobro de recibos. Habitualmente los recargos para gastos de gestión externa suelen establecerse como porcentajes de la prima comercial. Así tendremos un porcentaje de la primera prima comercial (**comisión descontada**) y un porcentaje de cada una de las primas comerciales (**comisiones periódicas** y otros gastos de adquisición).

Ahora bien, si la prima pura es la esperanza matemática de una determinada variable aleatoria (recordemos el principio de equivalencia actuarial), un mal comportamiento de ésta debido por ejemplo a una desviación desfavorable de la mortalidad puede tener como consecuencia que la empresa sea incapaz de hacer frente a sus obligaciones. Por otra parte, parece razonable la existencia de una

esperanza de beneficio en la actividad aseguradora. Surgen así el **recargo de seguridad** y el **recargo para beneficio,** si bien en seguros de vida suele existir un único recargo que engloba a los dos y que en muchas ocasiones suele establecerse de forma implícita en la prima pura.

La prima pura más el recargo de seguridad recibe el nombre de **prima recargada.**

La prima recargada más el recargo para gastos de gestión interna recibe el nombre de **prima de inventario.**

La prima de inventario más el recargo para gastos de gestión externa recibe el nombre de **prima comercial.**

9.2 Recargo de seguridad. Prima recargada

Recargo implícito. Bases de primer orden

En muchas ocasiones el recargo de seguridad se encuentra establecido implícitamente en las bases de cálculo que contienen tablas de mortalidad y tipos de interés técnico que difieren de los reales (en este caso suele hablarse de **bases técnicas de primer orden**).

En los seguros para el caso de muerte la utilización de tablas de mortalidad anticuadas, que presentan unos tantos de mortalidad superiores a los reales, implica que las primas puras únicas y periódicas sean superiores a las reales. Asimismo considerar un tipo de interés técnico inferior a la rentabilidad realmente obtenida conduce a primas superiores a las reales.

En los seguros para el caso de vida el empleo de tablas actualizadas, que normalmente se encuentran proyectadas, y tipos de interés técnico inferiores a los reales permiten establecer implícitamente el recargo de seguridad.

Si deseamos conocer el recargo de seguridad implícito como un porcentaje λ de la prima pura real, basta despejarlo en la ecuación

$$P^c = (1 + \lambda)\ P^r$$

en la que:

- P^c representa la prima cobrada calculada de acuerdo a las bases técnicas de primer orden.
- P^r representa la prima pura real, esto es, la que resultaría del empleo de las bases técnicas reales.
- $\lambda\ P^r$ es el recargo de seguridad implícto resultante.

Ciertamente a priori es imposible conocer la mortalidad real y el interés real durante el período de vigencia de una póliza.

A modo de ejemplo, consideremos un **seguro vida entera** para una cabeza de edad x de capital asegurado unitario con pago de primas vitalicias anuales y constantes.

La prima pura cobrada (es ciertamente una prima recargada) es, de acuerdo al principio de equivalencia,

$$P_x^c = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

siendo

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} \ {}_{k/}q_x$$

y

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \ {}_{k/}q_x$$

donde v , $\ddot{a}_{\overline{k+1|}}$ y las probabilidades ${}_{k/}q_x$ están calculadas respectivamente con el tipo de interés y la tabla de mortalidad correspondientes a las bases técnicas de primer orden.

Por otra parte, la prima pura real es

$$P_x^r = \frac{A_x^r}{\ddot{a}_x^r}$$

con

$$A_x^r = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v_r^{k+1} \ {}_{k/}q_x^r$$

y

$$\ddot{a}_x^r = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}^r \ {}_{k/}q_x^r$$

donde v_r, $\ddot{a}_{\overline{k+1|}}^r$ están calculados con el tipo de interés real i^r y las probabilidades ${}_{k/}q_x^r$ son las reales

Definamos a continuación la variable aleatoria "resultado real" de la póliza

$$L_r = v_r^{K_x+1} - P_x^c \ \ddot{a}_{\overline{K_x+1|}}^r \qquad K_x = 0, 1, 2, ..., \omega - x - 1 \tag{9.1}$$

siendo

$$P(L_r = v_r^{k+1} - P_x^c \ \ddot{a}_{\overline{k+1|}}^r) = \ {}_{k/}q_x^r \quad k = 0, 1, 2, ..., \omega - x - 1 \tag{9.2}$$

Ahora la esperanza de esta variable

$$E(L_r)$$

es el resultado esperado de esta poliza que no tiene que ser cero necesariamente y

$$\lambda = \frac{P_x^c}{P_x^r} - 1$$

es, en tanto por uno, el recargo de seguridad implícito en cada prima anual.

Tomando unos valores concretos, sean:

- $x = 30$.
- Bases técnicas de primer orden: tipo de interés técnico $i = 0.03$ y tabla de mortalidad GKM80.
- Interés técnico real $i^r = 0.035$, y tabla de mortalidad real GKM95.

Puede el lector comprobar que para estos datos se obtiene:

- Prima pura cobrada $P_{30}^c = 0.012100687$.
- Prima pura real $P_{30}^r = 0.009648554$.
- Recargo de seguridad $\lambda = 0.254145$.
- Resultado real esperado $E(L_r) = -0.056416305$. (recordemos que el signo negativo representa ganancias).

En la figura 9.1 representamos la funciones de cuantía de la variable aleatoria "resultado" (notemos que la altura de la gráfica en cada uno de los valores de la variable representa la probabilidad del mismo) para los casos:

a) Coincidencia de las bases técnicas empleadas con las reales (L). (línea continua).

b) Datos del ejemplo (L_r) (línea de puntos).

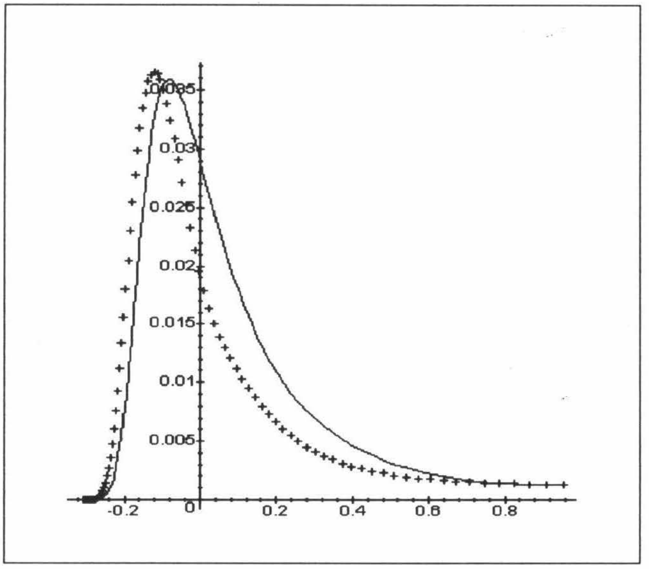

Figura 9.1

Recargo explícito. Bases de segundo orden

Aunque en la práctica es menos frecuente, cuando el cálculo de la prima se realiza con el tipo de interés y tabla de mortalidad reales (denominadas **bases técnicas de segundo orden**), el recargo de seguridad ha de figurar de forma explícita y se expresa habitualmente como un porcentaje de la prima pura. En este caso la prima recargada suele expresarse como

$$P_x^{rec} = (1+\lambda)\ P_x$$

Tomando el mismo ejemplo que para el recargo implícito, tendremos que la prima pura, de acuerdo al principio de equivalencia, es

$$P_x = P_x^r = \frac{A_x^r}{\ddot{a}_x^r}$$

El resultado de la póliza es una variable aleatoria

$$L_r = v_r^{K_x+1} - P_x^{rec}\ \ddot{a}^r_{\overline{K_x+1|}} = v_r^{K_x+1} - (1+\lambda)\ P_x\ \ddot{a}^r_{\overline{K_x+1|}} \quad K_x = 0,1,2,...,\omega - x - 1$$

siendo

$$P(L_r = v_r^{k+1} - (1+\lambda)\ P_x\ \ddot{a}^r_{\overline{k+1|}}) = \ _{k/}q_x^r \ \ k = 0,1,2,....,\omega - x - 1$$

Su esperanza matemática es

$$E(L_r) = A_x^r - P_x^r\ \ddot{a}_x^r - \lambda\ P_x^r\ \ddot{a}_x^r = -\lambda\ P_x^r\ \ddot{a}_x^r \tag{9.3}$$

Tenemos, por tanto, la relación que existe entre el recargo de seguridad y el resultado esperado de la póliza, que no es más que el valor actual actuarial de los recargos de seguridad incluídos en cada prima anual.

Asimismo

$$E(L_r) = -\lambda\ A_x^r \tag{9.4}$$

Así, fijado el resultado esperado para la póliza mediante criterios de rentabilidad y/o solvencia, las relaciones anteriores nos permiten obtener el valor de λ y, por tanto, el recargo de seguridad de cada prima.

Ciertamente la determinación del recargo de seguridad ha de hacerse más bien para toda una cartera que para una poliza particular, y teniendo en cuenta los distintos elementos de solvencia del negocio asegurador. En este punto nos remitimos al apéndice de este capítulo.

9.3 Primas de inventario y comercial

Estableceremos en este apartado, para una determinada estructura organizativa de la empresa, las primas de inventario y comercial de un seguro vida entera de capital asegurado unitario para una cabeza de edad x.

Aceptaremos la hipótesis de que los gastos de gestión interna imputables a la póliza son un porcentaje α del capital asegurado y se producen al comienzo de cada año mientras la póliza esté vigente (en este caso hasta el fallecimiento del asegurado). Supondremos asimismo que los gastos de gestión externa son un porcentaje β de la primera prima comercial, que se corresponde con la comisión descontada, y un porcentaje γ de cada prima comercial, correspondiente a las comisiones periódicas y otros gastos de adquisición.

El capital asegurado se paga al final (o a mitad) del año de fallecimiento y las primas discretas son anuales y constantes.

Prima de inventario

Establezcamos en primer lugar la **prima anual de inventario**. Emplearemos para ello el principio de equivalencia actuarial: la prima anual de inventario será aquella que haga que el valor actual actuarial de las primas iguale al valor actual actuarial de las indenmizaciones pactadas en la póliza más el valor actual actuarial de los gastos de gestión interna que genera. Esto es, en términos de esperanza matemática, en el momento de firmarse la póliza las obligaciones futuras del tomador del seguro han de ser iguales a las obligaciones futuras de la empresa de seguros.

Distinguiremos dos casos:

a) Las primas son vitalicias. En este caso la prima anual de inventario se representa mendiante P_x' y la equivalencia actuarial es

$$P_x' \, \ddot{a}_x = A_x + \alpha \, \ddot{a}_x$$

por lo que la prima anual de inventario es

$$P_x' = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \alpha$$

en esta expresión $\frac{A_x}{\ddot{a}_x} = P_x$ es la prima anual pura ~~pura~~ y $\alpha = Rggi$, el recargo para gastos de gestión interna (notemos que, en este caso, la cuantía de este recargo coincide con los gastos de gestión interna imputados a la póliza).

b) El pago de primas posee una temporalidad de n años. En este caso la equivalencia actuarial conduce a la ecuación

$${}_nP_x' \, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_x + \alpha \, \ddot{a}_x$$

por lo que la prima anual de inventario es ahora

$${}_nP_x' = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \alpha \, \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

siendo ${}_nP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ la prima anual pura y $\alpha \, \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = Rggi$ el recargo para gastos de gestión interna. Notemos que

$$\alpha \, \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} > \alpha$$

esto es, el recargo para gastos de gestión interna es superior al correspondiente recargo con primas vitalicias. La razón es simple: en el caso de primas temporales, una vez finalizado el período de pago de primas se seguirán produciendo gastos de gestión interna que ya no se podrán recuperar; por ello, en aquellos años en los que se cobran primas habrá que cobrar un recargo superior para hacer frente a esos gastos en los años en que no se cobran.

Prima comercial

Calculemos ahora la **prima anual comercial.** Considerando los gastos de gestión externa indicados y aplicando el principio de equivalencia actuarial tenemos:

a) Las primas son vitalicias. En este caso la prima anual comercial se representa mendiante P_x'' y la equivalencia actuarial es

$$P_x'' \ \ddot{a}_x = A_x + \alpha \ \ddot{a}_x + \beta \ P_x'' + \gamma \ P_x'' \ \ddot{a}_x$$

por lo que, despejando P_x'', la cuantía de la prima anual comercial constante es

$$P_x'' = \frac{A_x + \alpha \ \ddot{a}_x}{(1-\gamma) \ \ddot{a}_x - \beta}$$

y una vez conocida P_x'', podemos escribir

$$P_x'' = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \alpha + \frac{\beta \ P_x''}{\ddot{a}_x} + \gamma \ P_x''$$

lo que nos permite descomponer la prima anual comercial en prima pura $(\frac{A_x}{\ddot{a}_x})$, recargo para gastos de gestión interna $Rggi = \alpha$ y recargo para gastos de gestión externa

$$Rgge = \frac{\beta \ P_x''}{\ddot{a}_x} + \gamma \ P_x''$$

dentro del cual

$$\frac{\beta \ P_x''}{\ddot{a}_x}$$

es la denominada **cuota anual de amortización de las comisiones descontadas** que merece un comentario. La comisión descontada es abonada al agente de una sola vez a la realización del contrato, suele establecerse como un porcentaje β (normalmente elevado) de la primera prima comercial, por lo que supone para la empresa un importante gasto inicial que no recupera del asegurado al cobrar esa primera prima sino que lo hace a lo largo de varios años: cobrando al tomador en cada prima $\frac{\beta \ P_x''}{\ddot{a}_x}$, en términos medios, recuperará la comisión descontada $\beta \ P_x''$.

b) El pago de primas posee una temporalidad de n años. En este caso la equivalencia actuarial conduce a la ecuación

$${}_nP_x'' \ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_x + \alpha \ \ddot{a}_x + \beta \ {}_nP_x'' + \gamma \ {}_nP_x'' \ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

por lo que, despejando ${}_nP_x''$, la cuantía de la prima anual comercial constante es

$${}_nP_x'' = \frac{A_x + \alpha \ \ddot{a}_x}{(1-\gamma) \ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta}$$

y una vez conocida ${}_nP_x''$, podemos escribir

$${}_nP_x'' = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \alpha \ \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{\beta \ P_x''}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \gamma \ P_x''$$

expresión en la que queda descompuesta la prima comercial en prima pura más los correspondientes recargos para gastos de gestión interna y externa.

Notemos que

$$\frac{\beta\, P''_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} > \frac{\beta\, P''_x}{\ddot{a}_x}$$

la cuota anual de amortización de las comisiones descontadas es ahora superior al caso de primas vitalicias ya que con primas temporales habrá que recuperar la comisión descontada en menos tiempo.

9.4 Reserva matemática a prima de inventario y a prima comercial

Con posterioridad al momento de suscripción de la póliza, es posible calcular la diferencia entre las obligaciones futuras del asegurador y del tomador del seguro. Si entre las obligaciones futuras del asegurador se consideran los distintos gastos de gestión, y en las primas a pagar por el tomador se incluyen los correspondientes recargos para hacerles frente, la esperanza matemática de la citada diferencia será la **reserva matematica a prima de inventario** (se consideran los gastos de gestión interna y el correspondiente recargo) y la **reserva matemática a prima comercial** (se consideran los gastos de gestión interna y externa y los correspondientes recargos).

Reserva a prima de inventario

Para el seguro del apartado anterior estabezcamos en primer lugar la **reserva a prima de inventario** a los h años de vigencia del contrato. Distingamos los casos:

a) Primas vitalicias. La diferencia de valores esperados de las obligaciones del asegurador y tomador del seguro, reserva matemática a prima de inventario, es

$${}_hV'_x = A_{x+h} + \alpha\ \ddot{a}_{x+h} - P'_x\ \ddot{a}_{x+h}$$

sustituyendo

$$P'_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \alpha = P_x + \alpha$$

obtenemos

$${}_hV'_x = A_{x+h} + \alpha\ \ddot{a}_{x+h} - (P_x + \alpha)\ \ddot{a}_{x+h} = A_{x+h} - P_x\ \ddot{a}_{x+h}$$

que coincide con la reserva a prima pura (véase (8.3)).

b) Primas temporales. Ahora hemos de distinguir:

b.1) $h < n$, esto es, todavía no ha finalizado la obligación del pago de primas. La reserva a prima de inventario es

$$ {}_{h}^{n}V_x' = A_{x+h} + \alpha\ \ddot{a}_{x+h} - \ {}_nP_x'\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}} $$

sustituyendo

$$ {}_nP_x' = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x.\overline{n|}}} + \alpha\ \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = {}_nP_x + \alpha\ \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} $$

se obtiene

$$ {}_{h}^{n}V_x' = A_{x+h} + \alpha\ \ddot{a}_{x+h} - (\ {}_nP_x + \alpha\ \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}})\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}} = $$

$$ = (A_{x+h} - \ {}_nP_x\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}}) + (\alpha\ \ddot{a}_{x+h} - \alpha\ \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}}) $$

Ahora la reserva a prima de inventario se puede descomponer en suma de la reserva a prima pura

$$ {}_{h}^{n}V_x = A_{x+h} - \ {}_nP_x\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}} $$

y de la reserva para gastos de gestión interna

$$ {}_{h}^{n}V_g = \alpha\ \ddot{a}_{x+h} - \alpha\ \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}} $$

Invitamos al lector a interpretar esta diferencia.

b.2) $h \geq n$, esto es, ya ha finalizado la obligación del pago de primas. Ahora

$$ {}_{h}^{n}V_x' = A_{x+h} + \alpha\ \ddot{a}_{x+h} $$

siendo

$$ {}_{h}^{n}V_x = A_{x+h} $$

y la reserva para gastos de gestión interna

$$ {}_{h}^{n}V_g = \alpha\ \ddot{a}_{x+h} $$

Reserva a prima comercial

Tratemos la **reserva a prima comercial** a los h años de vigencia del contrato. Distingamos los casos:

a) Primas vitalicias. La diferencia entre los valores esperados de las obligaciones del asegurador y tomador del seguro, reserva matemática a prima de inventario, es comercial

$$ {}_hV_x'' = A_{x+h} + \alpha\ \ddot{a}_{x+h} + \gamma\ P_x''\ \ddot{a}_{x+h} - P_x''\ \ddot{a}_{x+h} $$

sustituyendo

$$P_x'' = P_x + \alpha + \frac{\beta\, P_x''}{\ddot{a}_x} + \gamma\, P_x''$$

y organizando adecuadamente, tenemos

$${}_hV_x'' = A_{x+h} + \alpha\, \ddot{a}_{x+h} + \gamma\, P_x''\, \ddot{a}_{x+h} - (P_x + \alpha + \frac{\beta\, P_x''}{\ddot{a}_x} + \gamma\, P_x'')\, \ddot{a}_{x+h} =$$

$$= (A_{x+h} - P_x\, \ddot{a}_{x+h}) - \frac{\beta\, P_x''}{\ddot{a}_x}\, \ddot{a}_{x+h}$$

donde

$${}_hV_x = A_{x+h} - P_x\, \ddot{a}_{x+h}$$

es la reserva a prima pura y (restando),

$$\frac{\beta\, P_x''}{\ddot{a}_x}\, \ddot{a}_{x+h}$$

es el valor de las **comisiones descontadas pendientes de amortizar.**

b) Primas temporales. Ahora hemos de distinguir.

b.1) $h < n$, esto es, todavía no ha finalizado la obligación del pago de primas

$${}_h^nV_x'' = A_{x+h} + \alpha\, \ddot{a}_{x+h} + \gamma\, P_x''\, \ddot{a}_{x+h} - {}_nP_x''\, \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}}$$

sustituyendo

$${}_nP_x'' = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} + \alpha\, \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} + \frac{\beta\, P_x''}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} + \gamma\, P_x''$$

tenemos

$${}_h^nV_x'' = A_{x+h} + \alpha\, \ddot{a}_{x+h} + \gamma\, P_x''\, \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}} - (\,{}_nP_x + \alpha\, \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} + \frac{\beta\, P_x''}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} + \gamma\, P_x'')\, \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}} =$$

$$= (A_{x+h} - \,{}_nP_x\, \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}}) + (\alpha\, \ddot{a}_{x+h} - \alpha\, \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\, \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}}) - \frac{\beta\, P_x''}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\, \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}}$$

Ahora la reserva a prima de inventario se puede descomponer en suma de la reserva a prima pura

$${}_h^nV_x = A_{x+h} - \,{}_nP_x\, \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}}$$

la reserva para gastos de gestión interna

$${}_h^nV_g = \alpha\, \ddot{a}_{x+h} - \alpha\, \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\, \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}}$$

y

$$\frac{\beta\ P_x''}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}$$

la cuantía de las comisiones descontadas pendientes de amortizar.

b.2) $h \geq n$, esto es, ya ha finalizado la obligación del pago de primas. Ahora

$${}_h^nV_x'' = A_{x+h} + \alpha\ \ddot{a}_{x+h}$$

siendo

$${}_h^nV_x = A_{x+h}$$

y la reserva para gastos de gestión interna

$${}_h^nV_g = \alpha\ \ddot{a}_{x+h}$$

Lógicamente ahora las comisiones descontadas han de estar completamente amortizadas, ya que no se van a cobrar más primas al tomador.

Observación 9 *Es habitual que, legalmente, la reserva matemática que han de hacer figurar las empresas en sus balances sea la reserva a prima de inventario. Notemos que en general*

$${}_h^nV_x' \geq {}_h^nV_x''$$

ya que en la reserva a prima de inventario no se restan las comisiones pendientes de amortizar. Para compensar, a las empresas se les suele permitir "activar las comisiones descontadas".

Asimismo es común que las legislaciones no permitan que las reservas matemáticas sean en ningún caso negativas.

9.5 Valores garantizados.

La idea general de que las reservas matemáticas se constituyen con los excesos pagados por el tomador del seguro sobre los gastos que realmente ha supuesto el riesgo y otros costes soportados por la empresa, implica que, en algunas modalidades de seguros de vida, suele reconocerse al tomador del seguro ciertos derechos denominados **valores garantizados** cuya cuantía se encuentra en relación con la de la reserva matemática.

Refirámonos brevemente a los valores garantizados: **rescate**, **reducción** y **anticipos sobre pólizas**.

Rescate

Es la cuantía que tiene derecho a percibir el tomador del seguro de acuerdo con los valores que para el mismo se encuentran establecidos en la póliza, que queda rescindida a partir de dicho momento.

El reconocimiento del derecho de rescate es habitual e incluso obligado por ley en los seguros vida entera y similares, no siendo reconocido en aquellas otras modalidades en las que puede darse la antiselección al rescatar aquellas pólizas que menos posibilidades poseen de recibir las indemnizaciones previstas. Pensemos en los seguros a capital diferido o rentas diferidas, pólizas que serían rescatadas en cuanto exista la posibilidad cierta de que el asegurado no llegue con vida a cobrar las prestaciones previstas.

Parece lógico que el valor de rescate se encuentre en relación con el de la reserva matemática y de hecho teóricamente coincide con ella aunque se han de restar ciertas cantidades debido a ciertos perjuicios que el rescate causa a la empresa aseguradora: existencia de comisiones descontadas no amortizadas, antiselección, reducción de la masa de pólizas y por ello de su estabilidad, costes de desinversión, etc.

Así, por ejemplo, si para un seguro vida entera en el que la reserva a prima de inventario h años despues de suscrita la poliza es

$$ {}_{h}^{n}V_x' = (A_{x+h} - {}_{n}P_x\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}) + (\alpha\ \ddot{a}_{x+h} - \alpha\ \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}) $$

la penalización puede consistir en suprimir la reserva para gastos de gestión interna y restar las comisiones descontadas pendientes de amortizar, con lo que el valor de rescate quedaría

$$ {}_{h}R_x = (A_{x+h} - {}_{n}P_x\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}) - \frac{\beta\ P_x''}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|} $$

que es la que se denomina **Reserva Totalmente Zillmerizada** o **Rescate Teórico**

En otras ocasiones el valor de rescate es simplemente establecido como un porcentaje de la reserva matemática.

Reducción

La reducción no implica la rescisión de la póliza sino que consiste en la trasformación en un seguro del mismo tipo liberado del pago de primas y, en general, con un capital asegurado inferior.

La cuantía del nuevo capital asegurado, denominado **capital reducido** será aquella que resulte de considerar el valor de rescate de la póliza como la prima única de inventario. Esto se debe a que al considerar el valor de rescate se supone que la empresa ya se ha resarcido al menos de las comisiones descontadas pendientes de amortizar y que al estar la póliza liberada no se van a producir gastos de gestión externa.

Así, para un seguro vida entera, el capital reducido ${}_hW_x$ se obtendría al despejar en la siguiente ecuación

$${}_hR_x = {}_hW_x \; (A_{x+h} - \alpha \; \ddot{a}_{x+h})$$

Anticipos sobre pólizas.

Consiste en la concesión por parte de la empresa al tomador del seguro de un préstamo cuya cuantía máxima es el valor del rescate de la póliza.

El tipo de interés del préstamo no tiene por qué coincidir con el tipo de interés técnico.

Cuando la cuantía del capital e intereses alcance el valor del rescate se considerará rescindida la póliza.

En caso de siniestro la cuantía del anticipo se deduce del capital asegurado.

9.6 Apéndice. Sobre la Ley de los Grandes Números y el Teorema Central del límite.

En este apéndice nos proponemos precisar brevemente algunas importantes y a menudo mal comprendidas cuestiones sobre los fundamentos estadísticos del negocio asegurador, tales como:

* la importancia de contar con un gran número de asegurados.

* la importancia de que los riesgos sean estadísticamente independientes.

* la elección del Principio de Equivalencia Actuarial como principio básico para el cálculo de primas.

Como veremos, las respuestas a estas cuestiones se basan en la Ley de los Grandes Números y su relación con la estabilidad de la empresa aseguradora. Enunciamos a continuación dicha Ley, cuya demostración se basa en la desigualdad de Chebyshev y se puede encontrar en cualquier libro de Cálculo de Probabilidades (véase, por ejemplo, DeGroot (1988), capítulo 4):

9.6.1 Ley de los Grandes Números

Sea $X_1, ..., X_N$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria X con media μ finita. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\lim_{N \to \infty} \Pr\left[\left|\bar{X} - \mu\right| < \varepsilon\right] = 1$$

siendo $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ la media muestral.

En términos intuitivos, si el número de elementos de la muestra es grande, entonces existe una alta probabilidad de que la media muestral esté cerca de la media poblacional. Recordemos, por otra parte, que una muestra aleatoria está formada por elementos independientes entre sí. En consecuencia, para poder afirmar la cercanía entre la media muestral y la poblacional se necesita que la muestra esté formada por un gran número de observaciones independientes entre sí.

En el caso particular de que la variable aleatoria sea una binomial se obtiene el siguiente resultado:

Sea f_N la frecuencia relativa de éxitos en N repeticiones de un experimento cuya probabilidad de éxito es p. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left[|f_N - p| < \varepsilon\right] = 1$$

es decir, la frecuencia relativa converge (en probabilidad) a la verdadera probabilidad.

Como veremos a continuación, ambos resultados tienen importantes implicaciones actuariales. Por ejemplo, como aplicación inmediata de este último podemos afirmar que la frecuencia relativa de asegurados de edad x que sobreviven un año más estará probablemente muy cercana al valor de la probabilidad p_x , siempre que el número de asegurados sea elevado y que se trate de riesgos estadísticamente independientes entre sí. Lo mismo podríamos afirmar respecto al resto de probabilidades básicas de muerte y supervivencia. En consecuencia, podremos tener cierta confianza en que nuestros cálculos actuariales teóricos, basados en las estimaciones de las probabilidades básicas que aparecen en las tablas de mortalidad, no nos proporcionarán valores excesivamente alejados de los que finalmente observaremos. Por otro lado, esta argumentación es considerada por algunos como una posible justificación de la interpretación determinista de las tablas de mortalidad (que, recordemos, consiste en interpretar las probabilidades como frecuencias relativas).

Consideremos a continuación la tercera cuestión planteada al principio del Apéndice, relativa al uso del Principio de Equivalencia Actuarial para el cálculo de las primas. Este no es, evidentemente, el único principio que se podría usar con tal finalidad; en efecto, podríamos alternativamente diseñar principios de tarificación basados en la Teoría de la Utilidad (véase el apendice del capítulo 7), muy razonables desde un punto de vista teórico pero difíciles de aplicar en la práctica a causa de la dificultad de cuantificar las funciones de utilidad de los asegurados; asimismo podríamos utilizar principios intuitivamente atrayentes pero carentes de justificación teórica, como por ejemplo el que calcula las primas sustituyendo la edad de muerte del asegurado, que es una variable aleatoria, por su esperanza matemática. Sin embargo, el Principio de Equivalencia Actuarial resulta justificable desde un punto de vista práctico, ya que su aplicación no resulta excesivamente complicada, y también desde un punto de vista teórico, ya que como veremos a continuación tiene relación con la Ley de los Grandes Números y con la solvencia de la empresa.

Consideremos, por simplicidad, únicamente el caso de un seguro de prima única. El Principio de Equivalencia Actuarial establece, en tal caso, que la prima única debe calcularse como la esperanza matemática de la suma de los distintos tipos de costes que genera el asegurado, de los cuales el más importante es el coste de la siniestralidad, aunque también existen costes de gestión y de producción (recuérdense los capítulos 7 y 8). En última instancia, se trata de sustituir una variable aleatoria (los costes del seguro, a los que tendrá que hacer frente la empresa) por su esperanza matemática (que es un ingreso cierto para la empresa). La Ley de los Grandes Números garantiza aparentemente que al efectuar esta sustitución de costes aleatorios por ingresos ciertos no se pondrá en peligro la solvencia de la empresa, ya que, si el número de asegurados es grande y los riesgos son independientes, el coste medio de un seguro será muy probablemente muy parecido a su esperanza matemática, que es precisamente la prima cobrada por la empresa aseguradora. Sin embargo, debemos hacer una importante precisión: aunque el coste medio esté próximo a la prima, no será, evidentemente, exactamente igual que esta, y estas pequeñas diferencias entre gastos e ingresos por póliza podrían causar, al considerar la totalidad de la cartera, una gran discrepancia entre los gastos totales y los ingresos totales de la empresa aseguradora. En terminología matemática, si llamamos $X_1, ..., X_N$ a los costes generados por las distintas pólizas, que suponemos independientes e idénticamente distribuídos, y $P = E(X)$ a la prima única obtenida aplicando el Principio de Equivalencia Actuarial, entonces si N es grande la Ley de los Grandes Números nos garantiza que

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left[\left|\bar{X} - P\right| < \varepsilon\right] = 1$$

pero esto no implica que

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left[\left|\sum_{i=1}^{N} X_i - N.P\right| < \varepsilon\right] = 1$$

es decir, no implica que los costes totales $\sum_{i=1}^{N} X_i$ estén próximos a los ingresos totales por primas $N.P$. Si los primeros son mucho mayores que los segundos, la solvencia de la empresa podría verse amenazada, a pesar de contar con un gran número de asegurados.

Para clarificar la relación entre el Principio de Equivalencia Actuarial, la Ley de los Grandes Números y la solvencia de la empresa vamos a utilizar otro famoso teorema de convergencia conocido como el Teorema Central del Límite y que establece:

9.6.2 Teorema Central del Límite

Sea $X_1, ..., X_N$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria X con media μ y varianza σ^2 , ambas finitas. Entonces, si $N \to \infty$, la función de distribución de la variable aletoria $\sum_{i=1}^{N} X_i$ tiende a la función de distribución de una normal con media $N.\mu$ y varianza $N.\sigma^2$ (obsérvese que se trata de convergencia en distribución).

Aplicando dicho resultado al problema que nos ocupa, obtenemos que, si el número de asegurados es grande, entonces los costes totales $\sum_{i=1}^{N} X_i$ tienden a distribuirse según una normal de media $N.P$ y varianza $N.\sigma^2$. Como esta última tiende a infinito cuando $N \to \infty$, obtenemos, tal y como habíamos previsto, que los costes totales de la empresa no tienen necesariamente que estar próximos a sus ingresos totales. Para solventar este problema las empresas aseguradoras suelen recargar las primas con un **recargo de seguridad**, destinando el exceso de ingresos resultante a hacer frente a las mencionadas desviaciones imprevistas entre los ingresos y gastos totales. Si la aproximación normal se ajusta bien a los costes de nuestra cartera, entonces es fácil calcular la cuantía de dicho recargo: en efecto, si los costes totales $\sum_{i=1}^{N} X_i$ tienden a distribuirse según una normal de media $N.P$ y varianza $N.\sigma^2$, entonces la variable tipificada $\frac{(\sum_{i=1}^{N} X_i)-N.P}{\sqrt{N}\sigma}$ tenderá a distribuirse como una normal de media 0 y varianza 1, por lo que llamando n_α al valor que en dicha normal (0,1) deja a su derecha una pequeña probabilidad α (usualmente 0.01 ó 0.001) obtenemos que

$$\Pr\left(\frac{(\sum_{i=1}^{N} X_i) - N.P}{\sqrt{N}\sigma} \leq n_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

es decir,

$$\Pr\left((\sum_{i=1}^{N} X_i) \leq n_\alpha \sqrt{N}\sigma + N.P\right) = 1 - \alpha$$

Por tanto, si la empresa recauda la cantidad adicional $n_\alpha \sqrt{N}\sigma$, entonces existe una alta probabilidad $1 - \alpha$ de que los costes no superen a los ingresos.

En otras palabras, para conseguir que la probabilidad de ruina o insolvencia sea igual a α es necesario recaudar la cantidad adicional $n_\alpha \sqrt{N}\sigma$, por lo que cada asegurado deberá pagar un recargo en su prima igual a $\frac{n_\alpha \sqrt{N}\sigma}{N} = \frac{n_\alpha \sigma}{\sqrt{N}}$. Pues bien, dicho recargo de seguridad tiende evidentemente a cero cuando crece el número de asegurados N.

En resumen, la tarificación según el Principio de Equivalencia Actuarial no implica necesariamente la solvencia de la empresa en presencia de un gran número de asegurados estadísticamente independientes. Para asegurarnos de que la probabilidad de ruina no excede de unos valores previamente establecidos cada uno de los asegurados deberá pagar una cantidad adicional (recargo de seguridad) sobre la prima que le corresponde según dicho principio. Pero **el recargo de seguridad se hace cada vez más pequeño según crece el número de asegurados**[*].

Estudiemos, a continuación, dos posibles aplicaciones del Teorema Central del Límite:

1.- Consideremos una cartera de pólizas de seguro temporal anual renovable formada por 1000 asegurados de 30 años, 2000 de 35 años y 2000 de 40 años. El capital asegurado es para todos ellos de $C = 10$. Asumiremos además la independencia estocástica de las vidas residuales de los asegurados.

Consideraremos como tabla de mortalidad la GKM95 por lo que

$$q_{30} = 0.00130 \quad q_{35} = 0.001445 \;\; y \;\; q_{40} = 0.001869$$

Ciertamente la siniestralidad de cada póliza es una variable aleatoria dicotómica (para simplificar no tendremos en cuenta el tipo de interés),

$$X_i = \begin{cases} C & en\ caso\ de\ fallecimiento\ del\ asegurado\ (probabilidad\ q_{x_i}) \\ 0 & si\ el\ asegurado\ sobrevive\ (probabilidad\ p_{x_i}) \end{cases}$$

Su esperanza matemática (prima pura) es

$$P_i = E(X_i) = C\ q_{x_i}$$

y su varianza es

$$Var(X_i) = C^2\ q_{x_i}\ p_{x_i}$$

La siniestralidad total de la cartera es la suma de las siniestralidades de cada una de las pólizas. Siendo su esperanza matemática y su varianza las correspondientes sumas de las esperanzas matemáticas y varianzas de cada poliza. Así

$$P = E(X) = \sum_{i=1}^{5000} E(X_i) = 1000\ 10\ 0.00130 + 2000\ 10\ 0.001445+$$

$$+2000\ 10\ 0,001869 = 79.28$$

y

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{5000} \overset{Var}{\cancel{E}}(X_i) = 1000\ (10^2\ 0,00130\ (1 - 0.00130))+$$

*El lector puede encontrar más información en Cummins, J.D. (1991). "Statistical and Financial Models of Insurance Pricing and the Insurance Firm". Journal of Risk and Insurance (261-232)

$$+2000\ (10^2\ 0,001445\ (1-0.001445)) + 2000\ (10^2\ 0.001869\ (1-0.001869)) =$$
$$= 791.51$$

siendo la desviación típica

$$DT(X) = 28.1338$$

Aceptanto que la siniestralidad de la cartera se distribuye segun una normal $N(79.28,\ 28.1338)$ y una probabilidad de ruina $\alpha = 0.02$, y representando mediante $\delta\ E(X) = \delta\ P$ el recargo de seguridad tenemos

$$P(X \geq (1+\delta)\ E(X)) = 0.02$$

de donde

$$P(\frac{X - E(X)}{DT(X)} \geq \frac{\delta\ E(X)}{DT(X)}) = 0.02$$

o sea

$$P(\zeta \geq \frac{\delta\ E(X)}{DT(X)}) = 0,02 \quad con\ \ \zeta \sim N(0,1)$$

De las tablas de la normal de parámetros 0 y 1 se obtiene $y_{0.98} = 2.05374$ por lo que de

$$\frac{\delta\ 79.28}{28,1338} = 2.05374$$

se obtiene

$$\delta = 0.7288$$

Tomando ahora una probabilidad de ruina de 0.1 ($y_{0.9} = 1.28$) se obtiene

$$\delta = 0,4547$$

Si la cartera estuviese formada por 2000 asegurados de 30 años, 4000 de 35 años y 4000 de 40 años. Puede el lector comprobar que ahora

$$E(X) = 158.56 \quad y \quad DT(X) = 39.7873$$

Ahora para $\alpha = 0.02$ tenemos

$$\delta = 0.5153$$

y para $\alpha = 0.1$

$$\delta = 0.3215$$

Notemos que δ es el recargo de seguridad en tanto por uno de la prima pura. Ciertamente disminuye al incrementarse el número de pólizas y al incrementarse la probabilidad de ruina.

El problema de obtener el recargo de seguridad cambia algo si al empresa dispone de unas reservas S para hacer frente a los excesos de siniestralidad. Ahora tenemos

$$P(X \geq S + (1+\delta)\ E(X)) = \alpha$$

de donde

$$P(\frac{X - E(X)}{DT(X)} \geq \frac{S + \delta\ E(X)}{DT(X)}) = \alpha$$

o sea

$$P(\zeta \geq \frac{S + \delta\ E(X)}{DT(X)}) = \alpha \quad con\ \ \zeta \sim N(0,1)$$

siendo

$$\delta = \frac{y_{(1-\alpha)}\ DT(X) - S}{E(X)}$$

Así, tomando $S = 50$ y $\alpha = 0.02$, para la cartera de 5000 polizas se obtiene $\delta = 0.0981$ y para la de 10000 $\delta = 0.2$. En ambos casos disminuye pero logicamente lo hace en mayor medida en la cartera de menos pólizas.

2.- Para carteras de seguros de vida tradicionales de larga duración y recargo de seguridad implícito, la aproximación normal puede también ser de utilidad. Supongamos, por ejemplo, una cartera de 1000 pólizas de seguro vida entera emitidas en este momento tal que 300 asegurados tienen 30 años; 200, 35 años; 200, 40 años y 300, 45 años. El capital asegurado es para todas ellas de 100 y las bases técnicas de calculo son la tabla de mortalidad GKM95 y un tipo de interés técnico $i = 0.03$.

Suponiendo que la tabla elegida refleja fielmente la mortalidad de los asegurados pero que la rentabilidad real obtenida es $i_r = 0.0325$, puede el lector comprobar que a partir de la distribución de probabilidad del resultado (L_r) de cada póliza (fórmulas (9.1) y (9.2)) es posible obtener:

a) Para cada póliza cuyo asegurado posee 30 años:

$$E(L_r) = -1.41799$$

$$Var(L_r) = 279.106$$

$$\delta = 0.057$$

b) Para cada póliza cuyo asegurado posee 35 años:

$$E(L_r) = -1.42932$$

$$Var(L_r) = 345.899$$

$$\delta = 0.050$$

c) Para cada póliza cuyo asegurado posee 40 años:

$$E(L_r) = -1.41302$$

$$Var(L_r) = 445.122$$

$$\delta = 0.043$$

d) Para cada póliza cuyo asegurado posee 45 años:

$$E(L_r) = -1.36637$$

$$Var(L_r) = 585.109$$

$$\delta = 0.03652$$

Aceptada la independencia, el resultado de toda la cartera tendrá

$$E(L) = 300\ (-1.41799) + 200\ (-1.42932) + 200\ (-1.41302) + 300\ (-1.36637) =$$

$$= -1400.521$$

(recordemos que un valor negativo indica beneficio) y,

$$Var(L) = 300\ 279.106 + 200\ 345.899 + 200\ 445.122 + 300\ 585.109 =$$

$$= 417469.28$$

por lo que

$$DT(L) = 646.118$$

Aceptando la aproximación normal podemos afirmar que el resultado de la cartera sigue una distribución normal $N(-1400.5216,\ 417469.28)$, cuya función de densidad representamos en la figura 9.2

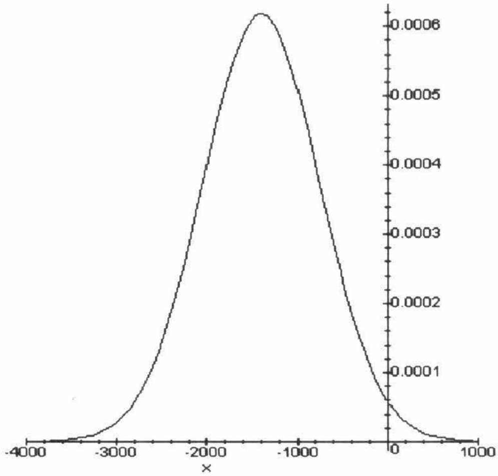

Figura 9.2

Usando las tablas de la distribución normal es posible obtener la probabilidad de un resultado positivo (probabilidad de ruina)

$$P(L > 0) = 0,01509.$$