FUNDACIÓN MAPFRE

"EL RIESGO DE LONGEVIDAD Y SU APLICACIÓN PRÁCTICA A SOLVENCIA II Modelos actuariales para su gestión"

Universidad Carlos III de Madrid

Máster en Técnicas Cuantitativas para el Sector Asegurador

PREMAAT
MUTUA DE LA ARQUITECTURA TÉCNICA

25 de marzo de 2015

MODELOS ACTUARIALES y presentación del Spanish Longevity Index (SLI)

María Durbán, Víctor Cóbreces e Irene Albarrán

Esquema

- Motivación
- Modelos actuariales más habituales
- Aplicación a la población española
- Spanish Longevity Index (SLI)
- Consideraciones finales

Motivación

- La longevidad: un reto importante para el sector asegurador
- Necesidad de utilizar modelos que introduzcan las mejoras en la mortalidad
- Sin olvidar la incertidumbre…
- ¿Población española?

Mortalidad – longevidad española

Población española

Datos: Mortality Database, 1960-2009 por género

$$\hat{\mu}_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}}$$

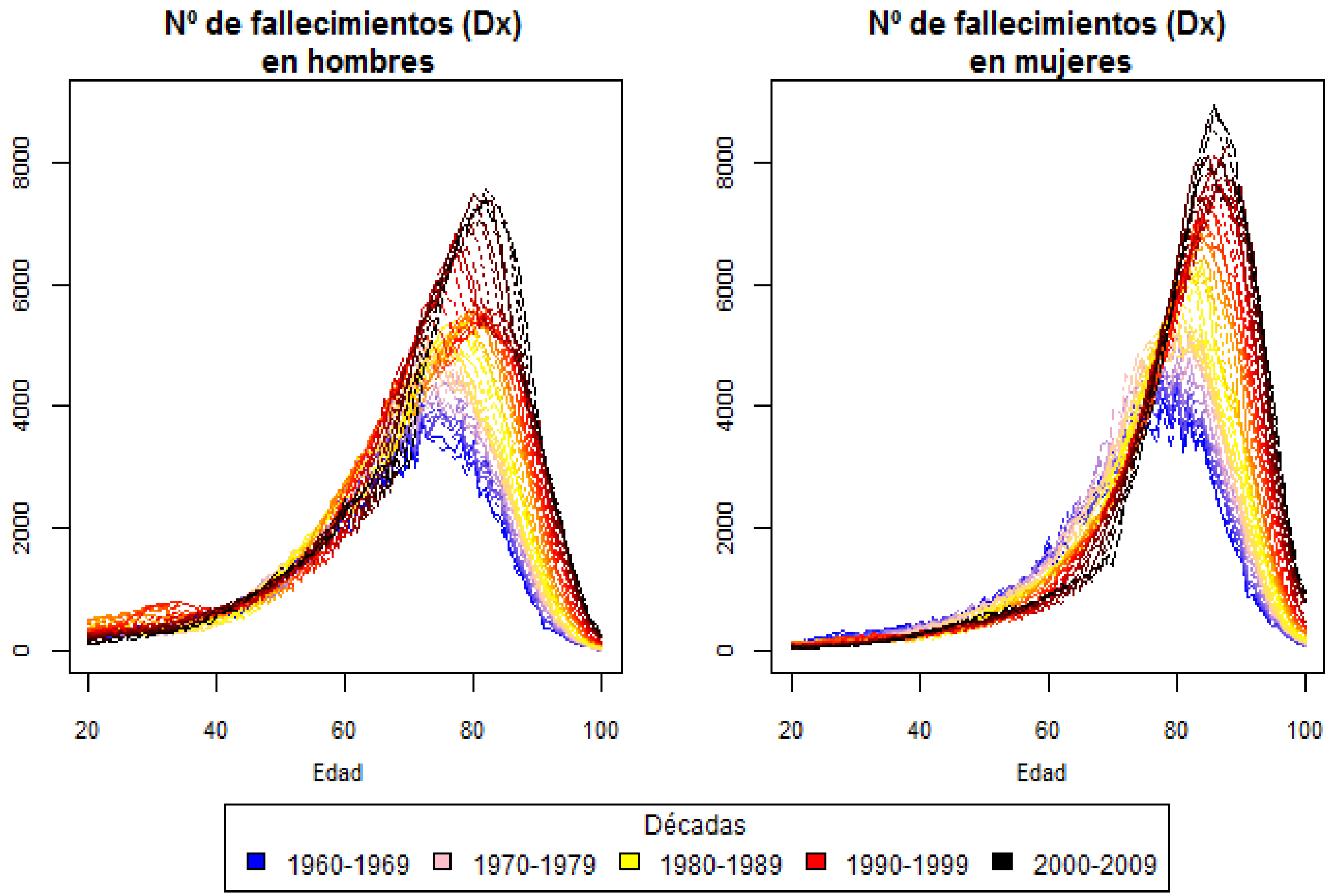
$\hat{\mu}_{x,t}$: fuerza de mortalidad

$D_{x,t}$: nº fallecidos edad (x) periodo (t)

$E_{x,t}$: nº expuestos al riesgo en cada x, t

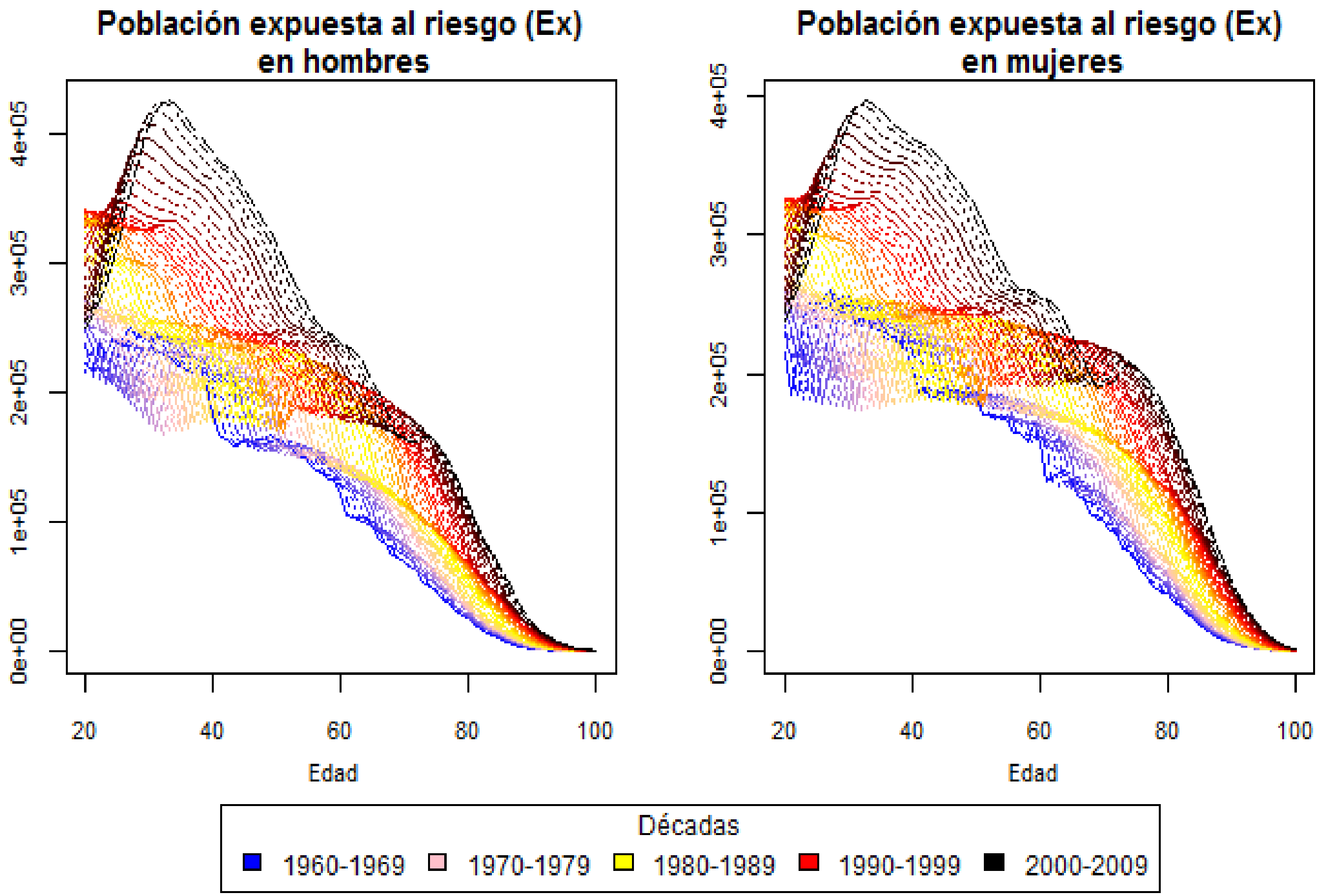
Mortalidad – longevidad española

Evolución (1960-2009) en las edades de 20 a 100 años



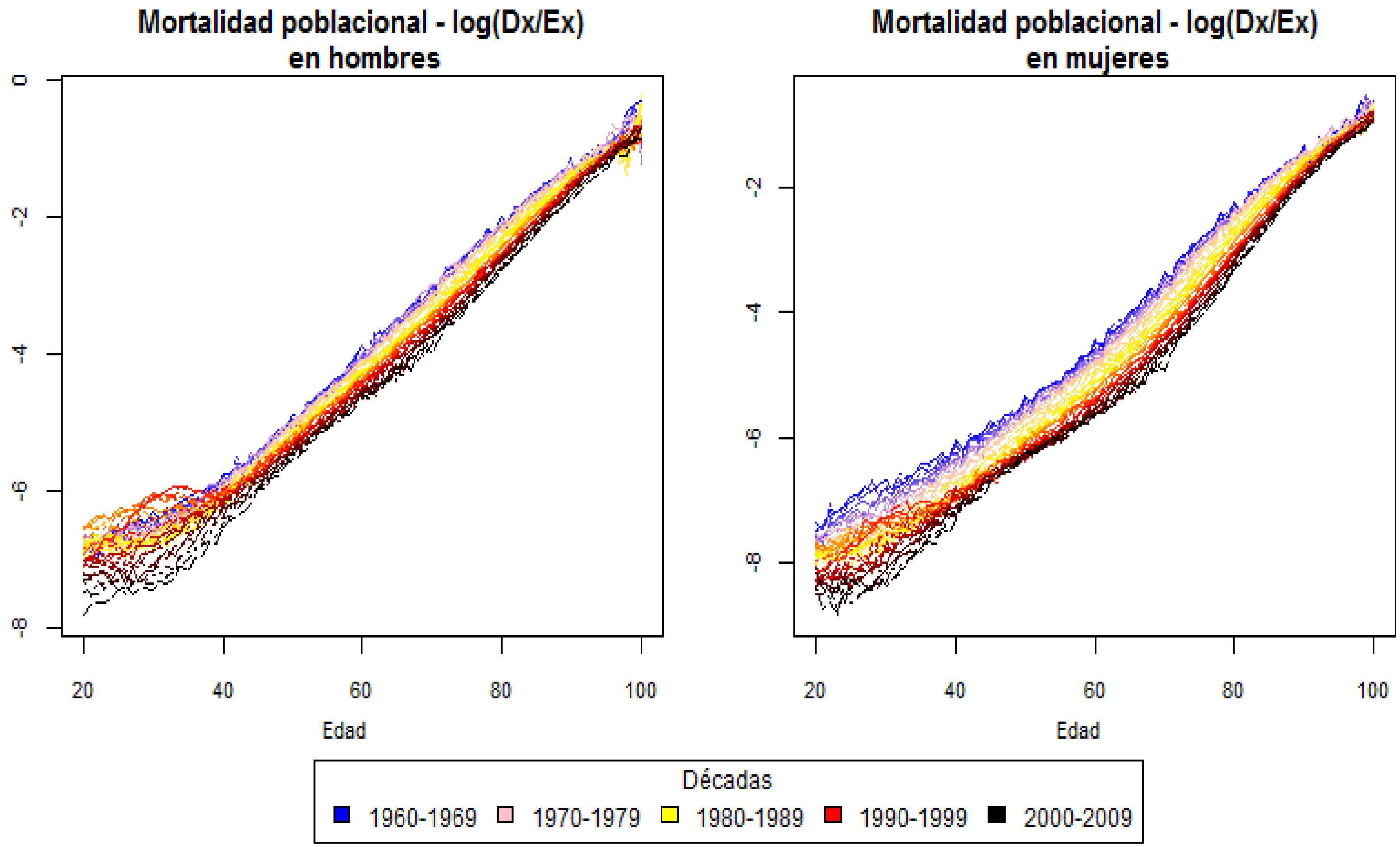
Mortalidad – longevidad española

Evolución (1960-2009) en las edades de 20 a 100 años



Mortalidad – longevidad española

Evolución (1960-2009) en las edades de 20 a 100 años



¿Qué modelo estimar?

- No hay un único modelo
- Comparar varios... lo más habitual
- Varios modelos: biomédicos, causales, de tendencia…

Algunos modelos actuariales habituales

MODELO	FÓRMULA
Lee-Carter (1992) M1	$\log(\mu_{x,t}) = \alpha_{\mathrm{x}} + \beta_{\mathrm{x}}\kappa_{\mathrm{t}}$
Renshaw y Haberman (2006)	$\log(\mu_{x,t}) = \beta_{\mathrm{x}}^{(1)} + \beta_{\mathrm{x}}^{(2)}\kappa_t^{(2)} + \beta_{\mathrm{x}}^{(3)}\gamma_t^{(3)}$
APC, Currie (2006)	$\log(\mu_{x,t}) = \beta_{\mathrm{x}}^{(1)} + \kappa_t^{(2)} + \gamma_t^{(3)}$
CBD, Cairns, Blake y Dowd (2006)	$\log(q_{x,t}) = \beta_{\mathrm{x}}^{(1)}\kappa_t^{(1)} + \beta_{\mathrm{x}}^{(2)}\kappa_t^{(2)}$
CBD con efecto cohorte	$\log(q_{x,t}) = \beta_{\mathrm{x}}^{(1)}\kappa_t^{(1)} + \beta_{\mathrm{x}}^{(2)}\kappa_t^{(2)} + \beta_{\mathrm{x}}^{(3)}\gamma_t^{(3)}$
Delwarde et al. (2007) M2	$\log(\mu_{x,t}) = \alpha_{\mathrm{x}} + \sum_i \theta_i^{\beta} B_i(x)\kappa_{\mathrm{t}}$
Currie (2013) M3	$\log(\mu_{x,t}) = \sum_i \theta_i^{\alpha} B_i(x) + \sum_i \theta_i^{\beta} B_i(x)\kappa_{\mathrm{t}}$
Currie et al.(2004,6) M4	$\log(\mu_{x,t}) = \sum_{ij} \theta_{ij} B_{ij}(x,t)$

Fuente: Cairns et al. (2009), Currie et al. (2004, 2006)

$\alpha_x, \beta_{\mathrm{x}}, \gamma_t$ corresponden a efectos de edad, periodo y cohorte
B son las bases de B-spline y θ son los pesos asociados a dichas bases

Modelos aplicados a la mortalidad española

- Comparar varios:
  - ✓ M1. Lee-Carter (1992)
  - ✓ M4. Currie et al. (2004, 2006)
    P-spline bidimensional (edad-periodo)

Modelos aplicados

M1. Lee-Carter (1992)

$$\log(\mu_{x,t}) = \alpha_{\mathrm{x}} + \beta_{\mathrm{x}}\kappa_{\mathrm{t}}$$

α_{x} : efecto edad

κ_{t} : efecto tiempo (periodo)

β_{x} : tasa de cambio de μ a lo largo del tiempo

Estimación por máxima verosimilitud: Brouhns, Denuit y Vermunt (2002)

$$\log L(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{\mathrm{x,t}} \left[\mathrm{d}_{\mathrm{x,t}}(\alpha_{\mathrm{x}} + \beta_{\mathrm{x}}\kappa_{\mathrm{t}}) - e_{x,t} \exp(\alpha_{\mathrm{x}} + \beta_{\mathrm{x}}\kappa_{\mathrm{t}}) \right]$$

Estimado κ_{t} → predicción usando un modelo ARIMA (1,2,1)

Modelos aplicados

M4. Currie, I; Durbán , M and Eilers P (2004,6)

- **Suavizado**: regresión no paramétrica
- Pares de datos $(x_i \; y_j) \quad i = 1, \ldots, n$
- Modelo de regresión $y_j = f(x_i) + \varepsilon_i \qquad \varepsilon \approx N(0, \sigma^2)$
- Usar una **base** (B-splines) para la regresión combinada con una **penalización** para controlar la suavidad del ajuste

$$\log(\mu_{x,t}) = \sum_{ij} \theta_{ij} B_{ij}(x,t)$$

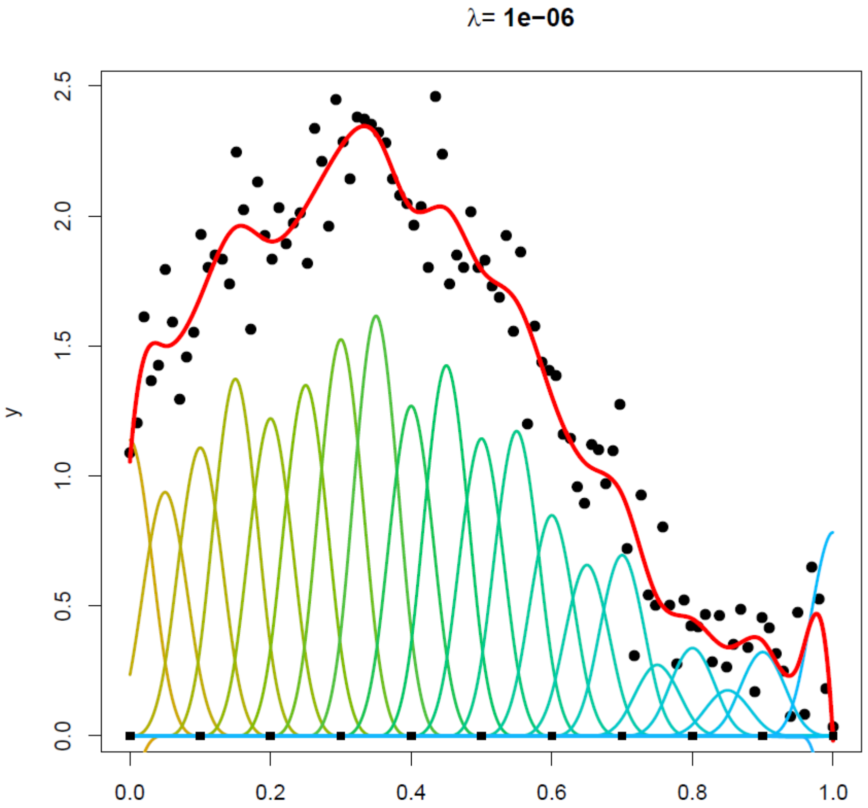
B base de la regresión (B-spline)

θ pesos asociados a dichas bases

Modelos aplicados

M4. Currie, I; Durbán , M and Eilers P (2004,6)

- **P-splines** con penalización de 2º orden



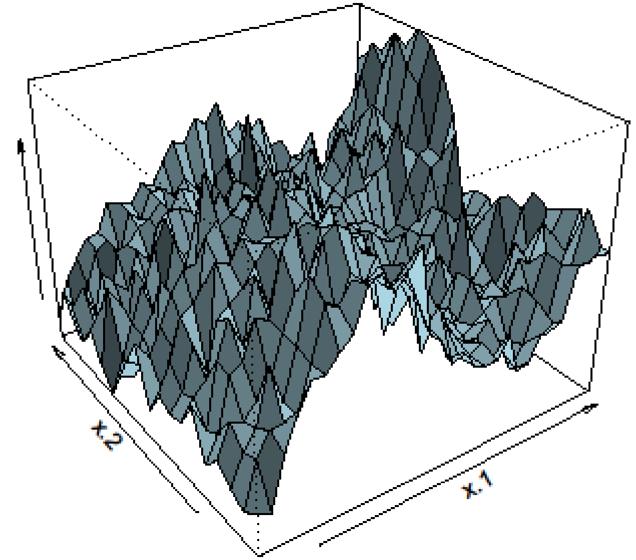
Modelos aplicados

M4. Currie, I; Durbán , M and Eilers P (2004,6)

P-splines en dos dimensiones. Estimación por **verosimilitud penalizada**

- Datos $\mathrm{y}_{\mathrm{ij}} = f\left(x_{1i} + x_{2j}\right) + \varepsilon_{ij} \quad \begin{cases} \mathrm{i} = 1,\ldots.., \mathrm{n}_1 \\ \mathrm{j} = 1,\ldots.., \mathrm{n}_2 \end{cases}$
- En forma de matriz (n_1 filas, n_2 columnas)

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n_2} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n_2} \\ . & . & & \vdots \\ . & . & \cdots & \vdots \\ . & . & & \vdots \\ y_{n_1 1} & \cdots & \cdots & y_{n_1 n_2} \end{bmatrix}$$



- Variables regresoras

$$\mathbf{x}_1 = (x_{11}, \ldots . x_{1n_1})'$$
$$\mathbf{x}_2 = (x_{21}, \ldots . x_{2n_2})'$$

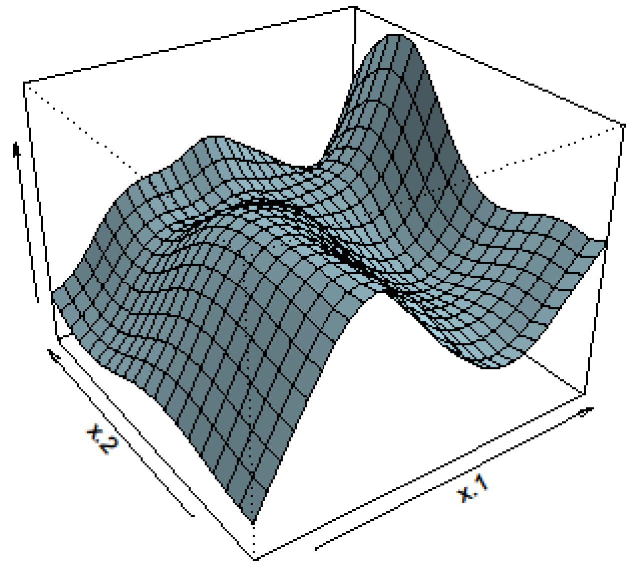
Modelos aplicados

M4. Currie, I; Durbán , M and Eilers P (2004,6)

P-splines en dos dimensiones. Estimación por **verosimilitud penalizada**

- Datos $\mathrm{y}_{\mathrm{ij}} = f\left(x_{1i} + x_{2j}\right) + \varepsilon_{ij} \quad \begin{cases} \mathrm{i} = 1,\ldots.., \mathrm{n}_1 \\ \mathrm{j} = 1,\ldots.., \mathrm{n}_2 \end{cases}$
- En forma de matriz (n_1 filas, n_2 columnas)

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n_2} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n_2} \\ . & . & & \vdots \\ . & . & \cdots & \vdots \\ . & . & & \vdots \\ y_{n_1 1} & \cdots & \cdots & y_{n_1 n_2} \end{bmatrix}$$



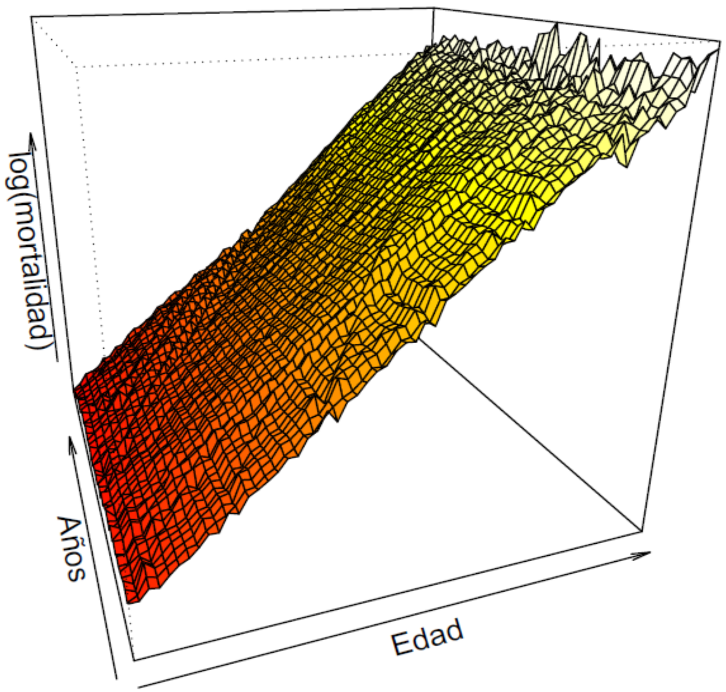
- Variables regresoras

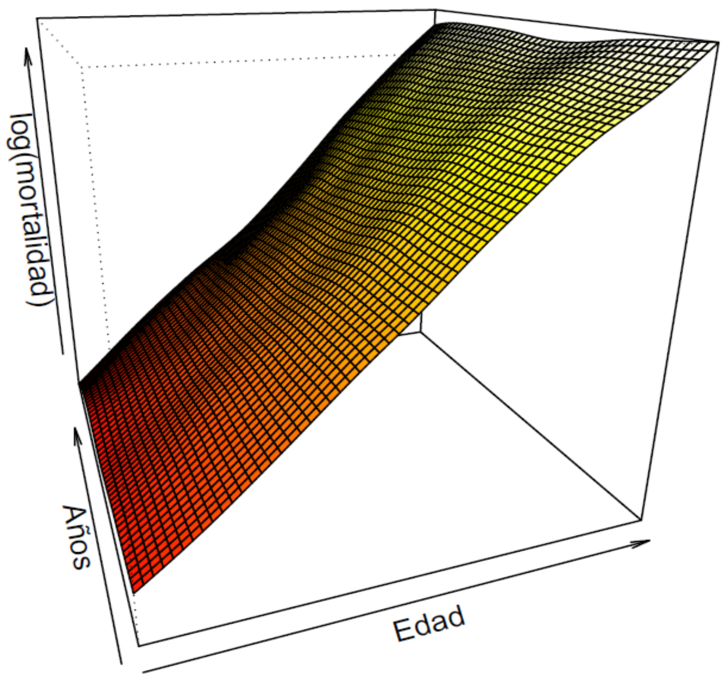
$$\mathrm{x}_1 = (x_{11}, \ldots. x_{1n_1})'$$

$$\mathrm{x}_2 = (x_{21}, \ldots. x_{2n_2})'$$

Resultados: mortalidad española

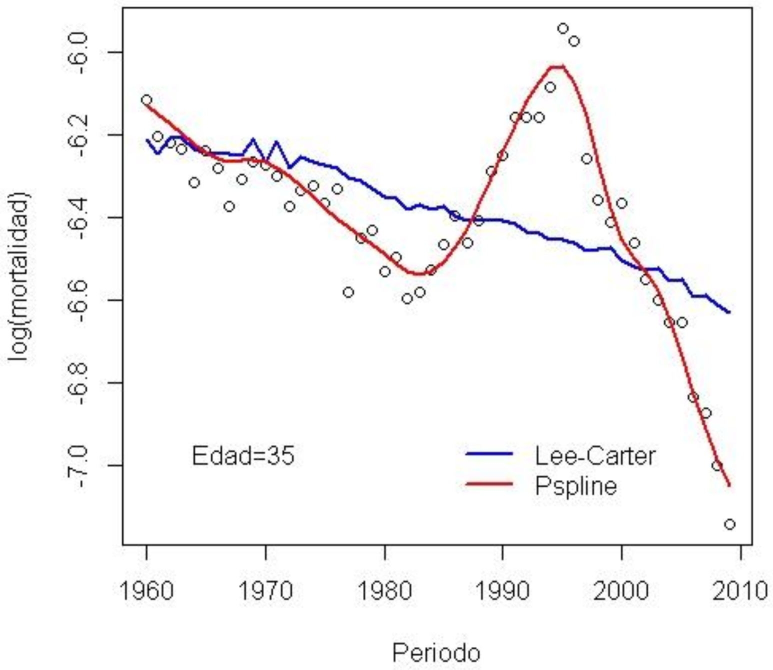
Fuerza de mortalidad observada y ajustada M4

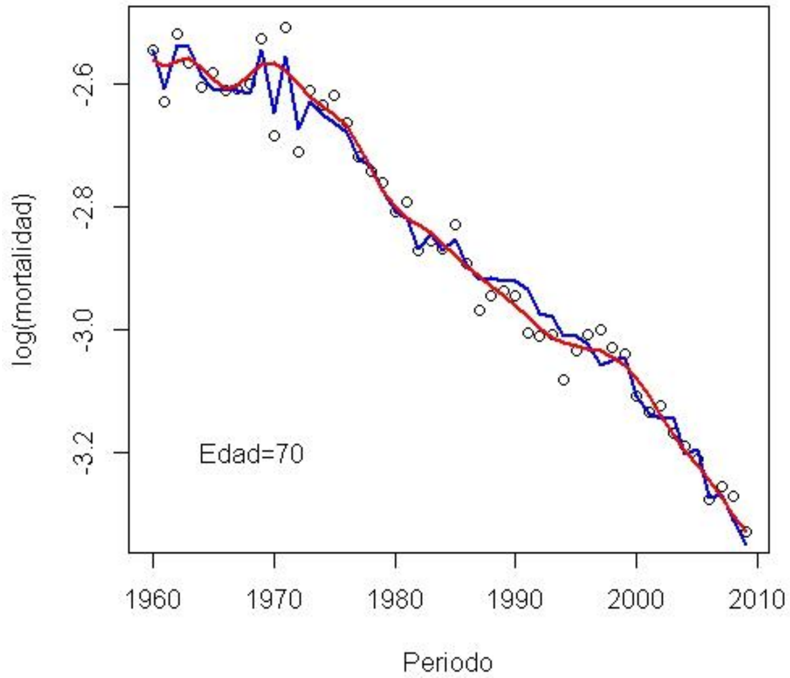




Resultados: mortalidad española

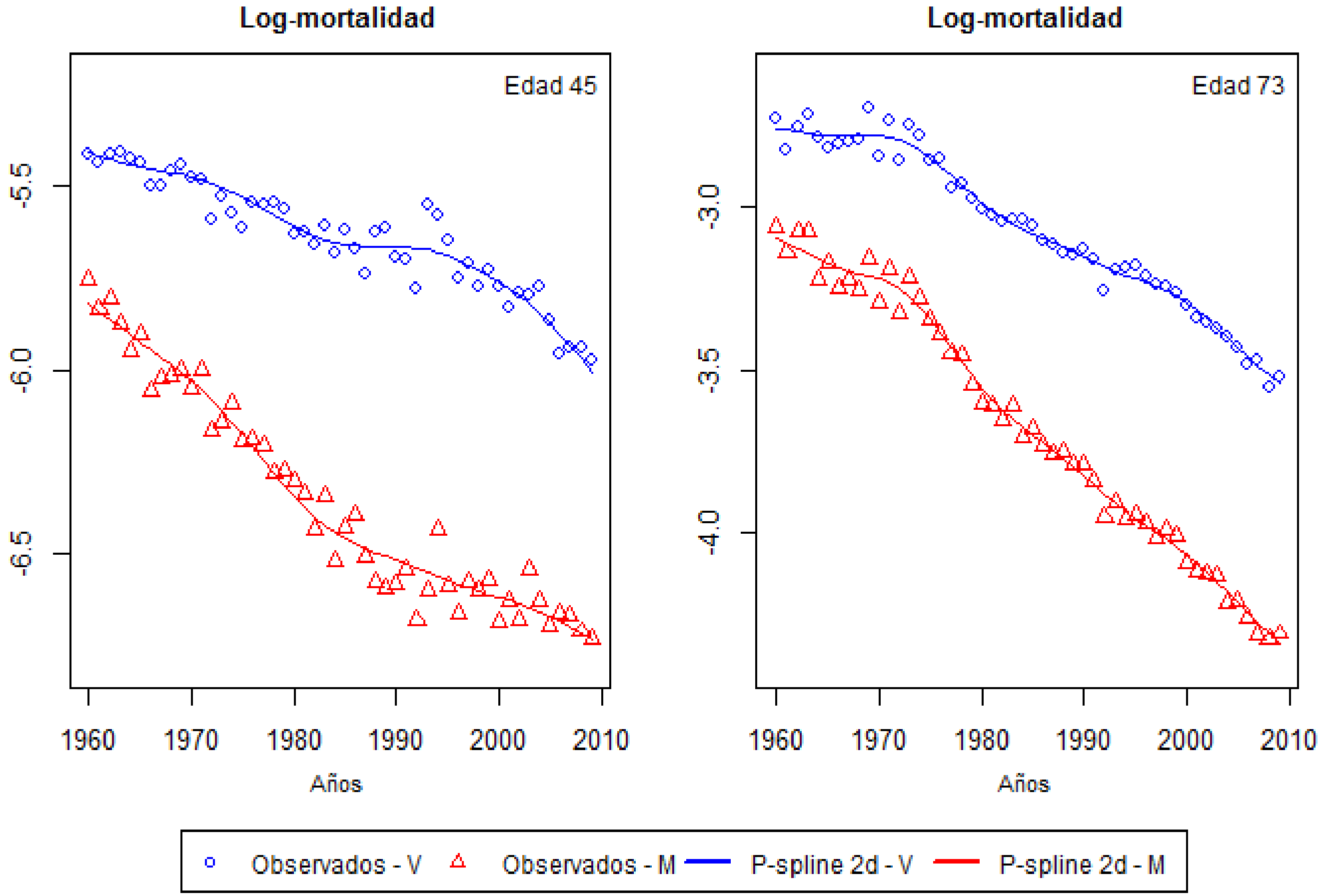
Comparación LC y M4: ajuste



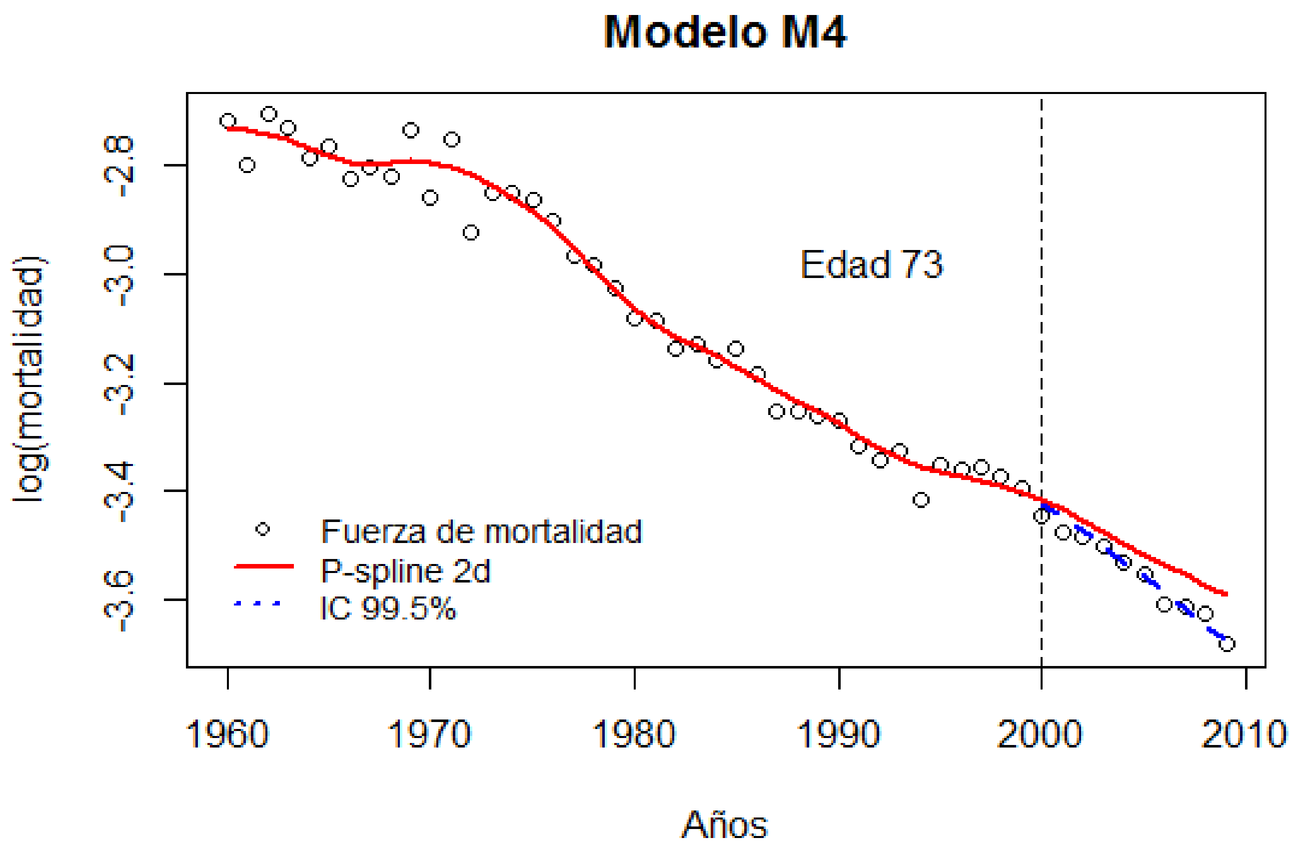


Resultados: mortalidad española

Fuerza de mortalidad observada y ajustada M4



Proyección: mortalidad española



Proyecciones: mortalidad española

Factor de mejora: una vez estimados los modelos

$$\lambda_{x,t} = 1 - \left(\frac{\hat{\mu}_{x,t}}{\hat{\mu}_{x,t-1}} \right)$$

$\lambda_{x,t}$: factor de mejora a la edad x entre periodo t-1 y t

$\hat{\mu}_{x,t}$: fuerza de mortalidad a la edad x en el periodo t

$\hat{\mu}_{x,t-1}$: fuerza de mortalidad a la edad x en el periodo t-1

Proyecciones: mortalidad española

Factor de reducción

$$FR_{x,t}^{0} = 1 + \left(\frac{\hat{\mu}_{x,t} - \hat{\mu}_{x,0}}{\hat{\mu}_{x,0}} \right)$$

$FR_{x,t}^{0}$: factor de reducción a la edad x entre 0 y t

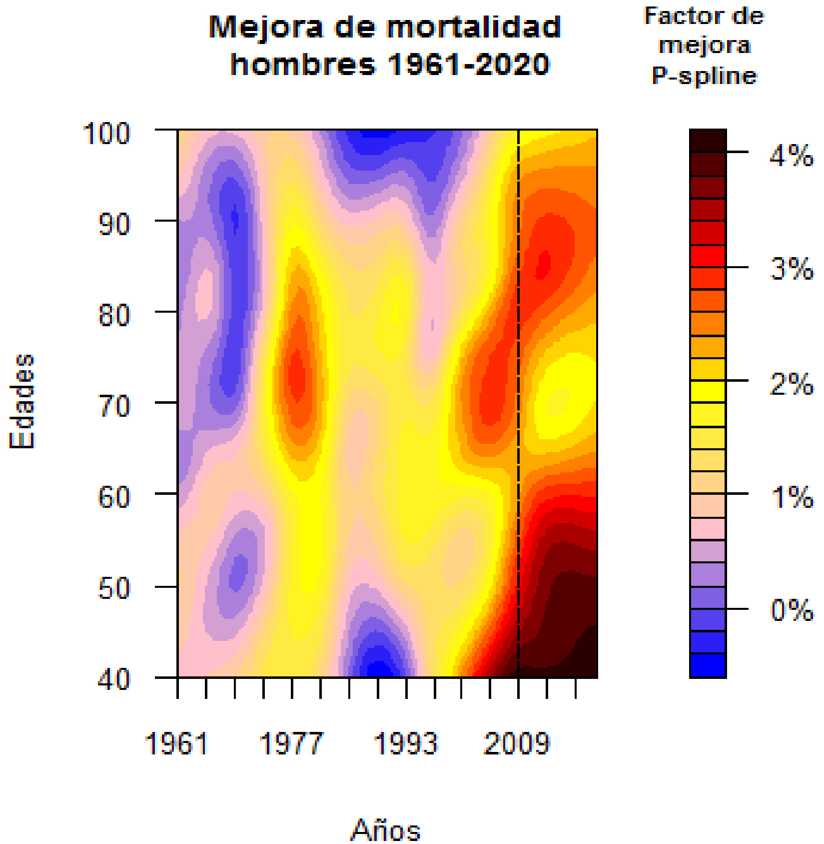
$\hat{\mu}_{x,t}$: fuerza de mortalidad a la edad x en el periodo t

$\hat{\mu}_{x,0}$: fuerza de mortalidad a la edad x en el 0 (base, referencia)

Proyecciones: mortalidad española

Factores de mejora proyectados M4: hombres

$$\lambda_{x,t} = 1 - \left(\frac{\hat{\mu}_{x,t}}{\hat{\mu}_{x,t-1}} \right)$$



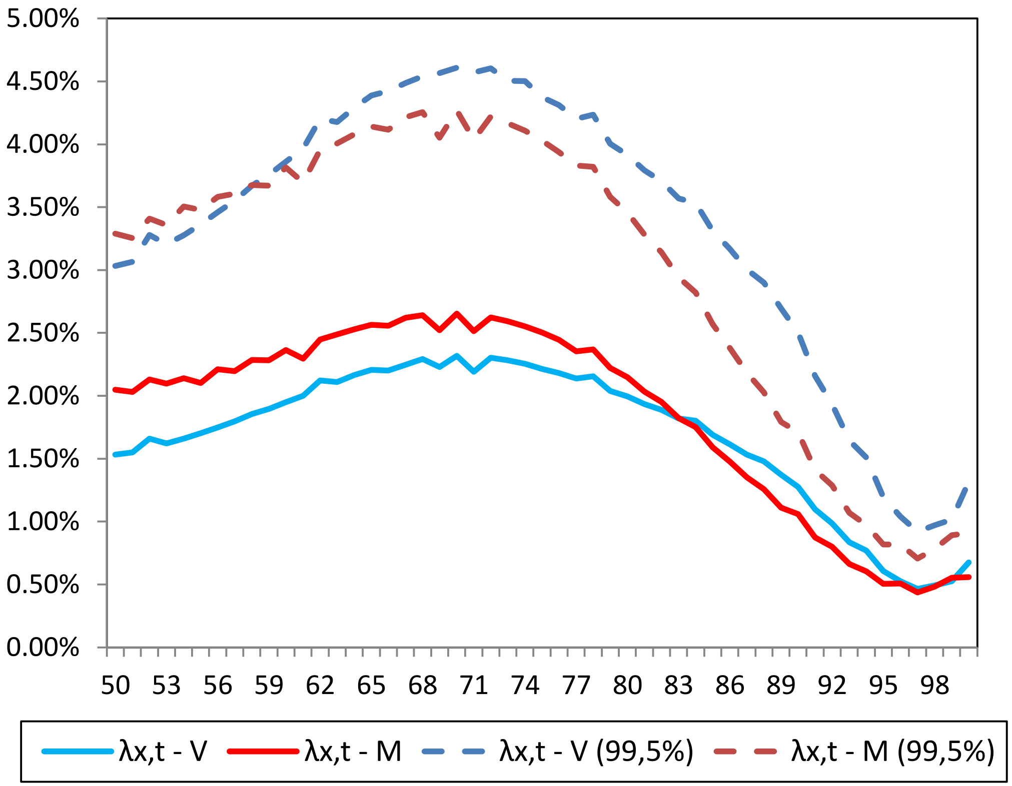
Spanish Longevity Index (SLI)

Mediana por edad. Proyección 50% y 99,5%

Test de usabilidad (LLMA)

- ✓ Trazabilidad
- ✓ Transparencia
- ✓ Objetividad
- ✓ Robustez
- ✓ Fáciles de gestionar
- ✓ Tendencia de supervivencia
- ✓ Continuidad
- ✓ Consistencia
- ✓ Sencillez
- ✓ Universalidad

SLI-50 SLI-99,5



Consideraciones finales

- Estimar **varios modelos** para minimizar el riesgo de tendencia sin olvidar la **incertidumbre**

- **Actualización periódica**: dinámica de la mortalidad. **SLI**

- Resultados con **población general española**

Bibliografía básica…

Currie, I. and Durbán, M. and Eilers, P.C.H. (2004)
Fast and compact smoothing on large multidimensional grids
Computational Statistics and Data Analysys, 4,279-298.

Eilers, P.C.H. and Currie, I. and Durbán, M. (2006)
Smoothing and Forecasting Mortality Rates
Statistical Modelling, 50,60-76.

Currie, I.D. (2013)
Smoothing constrained generalized linear models with an application to the Lee-Carter model
Statistical Modelling, 13,69-93.

Delwarde, A., Denuit, M. and Eilers, P.H.C.
Smoothing the Lee-Carter and Poisson log-bilinear models for mortality forecasting: a penalized log-likelihood approach
Statistical Modelling, 7,29-48.

Eilers, P. H. C. and Marx, B. D. (1996)
Flexible Smoothing with B-splines and Penalties
Statistical Science, 11,89-121.

Lee, R.D. and Carter, L.R. (1992)
Modeling and Forecasting U.S. Mortality
Journal of the American Statistical Association, 87:659-675.

FUNDACIÓNMAPFRE

¡¡MUCHAS GRACIAS!!

mdurban@est-econ.uc3m.es

vcj@premaat.es

irene.albarran@uc3m.es

Universidad Carlos III de Madrid

Máster en Técnicas Cuantitativas para el Sector Asegurador

PREMAAT

MUTUA DE LA ARQUITECTURA TÉCNICA