

# Otimização conjunta do capital baseado em risco e da carteira de ativos

Técnicas de otimização robusta para um modelo interno parcial de uma companhia seguradora

Davi Michel Valladão  
César da Rocha Neves  
Dimas Leão Ramos

Área de Seguro e Previdência Social

# **Otimização conjunta do capital baseado em risco e da carteira de ativos**

Técnicas de otimização robusta para um modelo interno  
parcial de uma companhia seguradora

Davi Michel Valladão

César da Rocha Neves

Dimas Leão Ramos

Fundación **MAPFRE**

A Fundación MAPFRE não se responsabiliza pelo conteúdo deste trabalho, assim como sua publicação não implica concordância ou identificação com a opinião do autor ou dos autores. Qualquer forma de reprodução, distribuição, comunicação pública ou alteração desta obra somente poderá ser feita com a autorização de seus autores, salvo exceção prevista em lei

© 2018, Fundación MAPFRE  
Paseo de Recoletos, 23  
28004 Madrid (España)

[www.fundacionmapfre.org](http://www.fundacionmapfre.org)  
ISBN: 978-84-9844-711-8  
Depósito Legal: M-38249-2018  
Produção Editorial: Edipack Gráfico

## APRESENTAÇÃO

Por meio de sua área de Seguro e Previdência Social, a Fundación MAPFRE desenvolve atividades educativas e de pesquisa, cumprindo um de seus principais objetivos: incentivar a formação e a disseminação de conhecimentos relacionados ao setor de seguros.

Esse posicionamento é materializado pela concessão de bolsas de estudo e de auxílio à pesquisa nas áreas de Seguro e Previdência Social.

Para garantir a disseminação do conteúdo desses trabalhos, são publicados os Cadernos da Fundación – principal veículo de divulgação das bolsas de estudo e de auxílio à pesquisas concedidas pela Fundación MAPFRE e que contribui para o intercâmbio de conhecimentos técnico e científico sobre temas ligados ao seguro.

A Fundación MAPFRE edita ainda livros monográficos sobre diferentes aspectos do Seguro e da Previdência Social alguns deles se transformaram em “clássicos” e são utilizados como manuais universitários.

Também elabora e publica relatórios anuais sobre os mercados de seguros da Espanha e da América Latina, rankings de grupos seguradores e relatórios sobre temas da atualidade relacionados ao mercado de seguros.

Este Caderno da Fundación é resultado da bolsa de auxílio à pesquisa concedida em 2015 pela Fundación MAPFRE ao Professor Davi Michel Valladão do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio.

Com o tema “Otimização conjunta do capital baseado em risco e da carteira de ativos”, o trabalho aqui apresentado contou com a orientação de Marcelo Christian Almeida de Albuquerque Santos, especialista Atuarial da MAPFRE BRASIL.

Todas as publicações da Fundación MAPFRE na área de Seguro e Previdência Social podem ser consultadas no site: [www.fundacionmapfre.org](http://www.fundacionmapfre.org)

**Seguro e Previdência Social**  
**Fundación MAPFRE**

**Davi Michel Valladão** é professor do Departamento de Engenharia Industrial da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Membro da Área de Concentração Finanças e Análise de Investimentos. Seus interesses de pesquisa são otimização sob incerteza e análise de risco para aplicações financeiras, em particular, Gestão de Ativos e Passivos Asset and Liability Management (ALM), Finanças Corporativas e Seleção de Portfólio. Antes de ingressar na PUC-Rio como professor, Davi foi membro do grupo Natural Resources Optimization da IBM Research – Brasil. Davi tem doutorado em Sistemas de Apoio à Decisão (2011) no Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio. Como parte de seu programa de doutorado, ele foi pesquisador visitante do departamento Operations Research and Financial Engineering (ORFE) da Universidade de Princeton. Além disso, Davi tem mestrado em Ciências Atuariais e Finanças (2008) e bacharelado em Engenharia Elétrica e Industrial (2006), também pela PUC-Rio.

**César da Rocha Neves** é especialista em previdência, seguro, risco, solvência e longevidade. Doutor em Engenharia Elétrica, área de concentração Métodos de Apoio à Decisão, da PUC-Rio. Mestre em Ciências em Engenharia de Produção pela Coppe/UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro). Pós-graduado em Finanças pela Coppead/UFRJ e em Engenharia Econômica e Financeira pela UFF. Graduado Cum Laude em Ciências Atuariais pela UFRJ. Coordenador-Geral de Monitoramento de Conduta de Mercado da Superintendência de Seguros Privados (SUSEP), Professor Adjunto do Curso de Ciências Atuariais da UERJ (Universidade do Estado do Rio de Janeiro) e Acadêmico da Academia Nacional de Seguros e Previdência (ANSP).

**Dimas Leão Ramos** é gestor quantitativo de portfólio da Visia Investimentos. Seus interesses de pesquisa são otimização convexa e otimização de portfólio. Antes de ingressar na Visia, Dimas foi pesquisador Laboratório de Laboratório de pesquisa e desenvolvimento em programação matemática (otimização) e estatística (LAMPS/PUC-Rio). Dimas tem mestrado em Engenharia de Produção com ênfase em finanças pela PUC-Rio e bacharelado em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Alagoas (UFAL).

## INDICE

I. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E MOTIVAÇÃO	
Introdução .....	9
Solvência II: modelo padrão e modelo interno .....	11
Modelos internos .....	16
Visão geral do modelo brasileiro de cálculo de capital .....	18
Asset Management .....	20
II. TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA .....	25
Conceitos de otimização robusta .....	26
Resolvendo a contraparte robusta .....	28
Definindo conjunto de incertezas .....	30
Otimização robusta de portfólio .....	32
III. OTIMIZAÇÃO ROBUSTA DO CAPITAL MÍNIMO REQUERIDO .....	37
Modelo Soyster .....	39
Modelo Bertsimas .....	41
Modelo Bertsimas com Correlação .....	44
IV. MODELAGEM DO PASSIVO .....	47
Mensuração do Passivo .....	54
V. ESTUDOS DE CASO .....	57
Análise de sensibilidade no conjunto de incerteza ( $\epsilon$ ) e conservadorismo ( $\Gamma$ ) .....	61
Análise de sensibilidade no tamanho da massa segurada .....	64
VI. CONCLUSÃO .....	67
VII. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	71

# I. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E MOTIVAÇÃO

## Introdução

Desde a década de 80, verifica-se uma evolução na forma como o risco é tratado pelas instituições financeiras em mercados internacionais. Já nos anos 2000, mais especificamente em 2004, foi publicado o acordo Basileia II, para adequação dos capitais dos bancos ao redor do mundo. No mercado de seguros, solvência é um objetivo comum aos entes envolvidos, sejam eles reguladores, supervisores, seguradoras e segurados. Os reguladores/supervisores internacionais estão cada dia mais atentos à supervisão prudencial, definindo regras para aplicação em ativos, cálculo de passivos e provisões e requisitos de capital de solvência baseado em risco.

Com objetivo de uma supervisão eficaz e coerente no mercado de seguros mundial, foi criada, em 1994, a *International Association of Insurance Supervisors* (IAIS), uma organização dos supervisores e reguladores de seguros de mais de 200 jurisdições em quase 140 países. Essa associação definiu 26 princípios básicos de seguros (*Insurance Core Principles - ICP*) a fim de padronizar a supervisão da indústria. O ICP 17, que trata especificamente da adequação do capital baseado em risco, orienta que o supervisor de seguros deve estabelecer requisitos de capital regulamentares a um nível suficiente para que, na adversidade, as obrigações das companhias para com os segurados sejam cumpridas. A IAIS estabelece que o cálculo do capital pode se dar pelo uso de fórmula padrão ou por modelo interno, parcial ou total.

Em 2009, foi publicada a regulação europeia para o mercado de seguros, Solvência II<sup>1</sup>. Trata-se de uma abordagem estruturada que identifica três pontos básicos, ou seja, três pilares para o gerenciamento de risco. Dentro do pilar 1 do Solvência II, que é o pilar quantitativo, temos a mensuração do capital de solvência, tão importante para garantir a solvência das seguradoras em um nível de risco pré-determinado. Em parti-

---

<sup>1</sup> Diretiva n.º 2009/138/CE do Parlamento Europeu e do Conselho.

cular, esse trabalho trata o primeiro pilar com foco na descrição e no desenvolvimento de técnicas matemáticas para otimização conjunto do capital de solvência e da carteira de ativos.

A fórmula padrão da Solvência II determina o capital seja maior ou igual ao valor em risco (*Value-at-Risk*) em 99,5% das possíveis realizações de perdas financeiras relativas a subscrição, mercado, crédito e operação, segundo um modelo estatístico pré-determinado. Condicionada à aprovação do regulador, as empresas de seguro e resseguro podem propor modelos matemáticos específicos (modelos internos) para cálculo do requisito de capital. Um modelo interno total considera todos os riscos envolvidos enquanto que um modelo interno parcial considera apenas uma parte deste cálculo.

O modelo europeu tornou-se um benchmark na supervisão de solvência. No Brasil, por exemplo, foi elaborado um modelo padrão para cálculo do capital baseado em riscos com módulos para cada tipo de risco e a possibilidade de utilização de modelo interno. Entretanto, até agora não existem solicitações ao supervisor brasileiro de cálculo de capital utilizando modelo interno. Como ocorre em outros países, o regime de supervisão brasileiro é considerado pela *European Insurance and Occupational Pensions Authority* (EIOPA) como equivalente ao regime de solvência europeu.

Em um modelo interno, o requisito de capital seguradora ou entidade de previdência deve depender da política alocação de ativos e passivos da mesma. Por isso, técnicas quantitativas de gestão de ativos e passivos (*Asset Liability Management* – ALM) são de extrema importância nesse contexto. Segundo a *Society of Actuaries*, ALM pode ser definido como um processo contínuo de formulação, implementação, monitoramento e revisão das estratégias relacionadas com ativos, investimentos futuros e passivos para atingir os objetivos financeiros, necessidades de caixa e requisitos de capital dado a tolerância ao risco da organização e outras restrições. Uma empresa que adota uma política de ALM robusta tem uma menor necessidade de capital de risco.

Com base nesta necessidade de solvência no mercado de seguros, este trabalho propõe o desenvolvimento teórico e aplicação prática de um modelo interno de otimização simultânea da carteira e do capital baseado em risco, com base nas melhores práticas internacionais. O objetivo principal é a construção de um modelo interno de mensuração do valor de requerimento de capital de solvência que vise ao mesmo tempo uma

alocação ótima da carteira de ativos e dos recursos dos acionistas da companhia de seguros. Portanto, por meio de otimização sob incerteza, nosso modelo procurará uma carteira ótima de ativos que minimize o capital baseado em risco.

Mais especificamente, se fizermos uma comparação com os módulos e submódulos de risco da abordagem padrão do regime Solvência II, na nossa proposta de modelo interno parcial, a mensuração do valor dos compromissos da seguradora com os segurados e assistidos engloba os riscos de sobrevivência, cancelamento e taxa de juros. E no lado dos ativos, por trabalharmos com carteiras hipotéticas de títulos públicos livres de risco, ações e variação do dólar, são abordados os riscos de taxas de juros, ações e câmbio.

Ademais, por se tratar de um modelo de alocação dinâmica, todos os fluxos de ativos e passivos serão estimados dentro do universo temporal do estudo. Para tal, estimados os fluxos de caixa, iremos determinar certas restrições e técnicas e operacionais para definição dinâmica da política de investimento da seguradora. Dessa forma, como essa política de investimentos considera as incertezas inerentes a cada ativo e passivo envolvidos, o modelo interno também fará a gestão de ativos e passivos (ALM), estando em linha com as diretrizes do Solvência II.

## **Solvência II: modelo padrão e modelo interno**

A EIOPA, em seu *Quantitative Impact Study* (QIS) 5 (EIOPA, 2010), apresenta uma visão geral da estrutura do requerimento de capital de solvência - *Solvency Capital Requirement* (SCR), bem como as fórmulas para cada módulo e submódulo do modelo padrão de cálculo de capital. A SCR é o requisito de capital que garante solvência com nível de confiança de 99,5% sobre um período de um ano. O valor do requerimento de capital deve ser calculado anualmente, e deve ser revisto caso haja uma alteração substancial das premissas utilizadas no cálculo do capital.

O SCR é a soma do SCR básico (BSR), de um valor que corresponde à capacidade de absorção de perdas das provisões técnicas e dos impostos diferidos e de um capital específico para risco operacional. Dada a natureza deste trabalho, focamos na descrição do BSR. O BSR é a combinação dos requerimentos de capital para as seis

maiores categorias de riscos, há três módulos relativos ao risco de subscrição: saúde, vida e seguros gerais (não vida), um módulo de risco de default, um de mercado e um para ativos intangíveis. Esses módulos são formados por submódulos específicos. Cada requerimento de capital desses submódulos é determinado pelo impacto de um cenário particular no valor do ativo líquido (net asset value - NAV). Portanto, o valor do requerimento de capital é o valor das perdas no patrimônio líquido das empresas de seguros e de resseguros dado um cenário de estresse predeterminado.

O valor do NAV é definido como a diferença entre ativos e provisões técnicas, sem considerar a margem de risco. Se a variação no NAV ( $\Delta NAV$ ), resultante de um cenário de choque, é positiva há uma perda de NAV que corresponde a necessidade de capital dado aquele choque. Se a choque resulta em um crescimento do NAV, a necessidade de capital para o submódulo é zero (EIOPA, 2010). Neste trabalho, para representar a variação do ativo líquido, usamos a mesma representação usada por Gatzert & Martin (2012), como se segue:

$$\Delta NAV = \max(NAV - (NAV|choque), 0) = \max((A-P) - ((A-P)|choque), 0) \quad (1)$$

onde:

$NAV$  é o ativo líquido na data da avaliação;

$A$  é o ativo na data da avaliação;

$P$  é a provisão técnica, sem considerar a margem de risco, na data da avaliação;

$A|choque$  representa o valor do ativo dado o cenário de choque na data da avaliação; e

$P|choque$  representa o valor da provisão técnica dado o cenário de choque na data da avaliação.

Para agregação dos capitais é usada técnica de correlação linear, para tal são fixadas matrizes de correlação dos módulos ou submódulos que compõem a fórmula padrão. Cabe ressaltar que a correlação linear nem sempre é uma escolha apropriada para agregar esses tipos de risco, conforme frisado por (Sandström 2011).

Nossa proposta de modelo interno parcial engloba os riscos de subscrição, mais especificamente os riscos de sobrevivência e cancelamento, por trabalharmos com planos de anuidades, e o de mercado. Assim, apresentamos de forma resumida a abordagem do regime Solvência II para esses riscos.

O módulo de risco de subscrição de vida consiste de sete submódulos de risco: mortalidade, longevidade, invalidez/morbidez, cancelamento, despesas, revisão e catástrofe. Para cálculo do SCR são determinados cenários, que consistem em um estresse instantâneo que ocorre na data de avaliação, sendo, portanto, o valor do capital igual às perdas imediatas no patrimônio líquido (*own funds*) proveniente desse estresse.

Como exemplo, demonstramos o cálculo do requerimento do capital para o risco de sobrevivência. Para esse risco, o capital deve ser o valor da variação no valor do ativo líquido seguindo uma redução permanente nas taxas de mortalidade. A fórmula para obtenção do capital baseado no risco de sobrevivência é a que se segue:

$$Life_{long} = \Delta NAV | \text{choque de longevidade} \quad (2)$$

onde  $Life_{long}$  é o valor do requerimento de capital para o risco de sobrevivência; e *choque de sobrevivência* representa uma redução permanente e instantânea de 20% nas taxas de mortalidade de cada idade em cada apólice onde o pagamento de benefício dependa do risco de sobrevivência. Esse valor também é definido pelo Regulamento Delegado (UE) 2015/35, que regulamenta a diretiva do Solvência II.

Para calibração desse choque foi examinado ganhos de longevidade (*improvements*) em taxa de mortalidade em diversos países. Em CEIOP (2010), foi testado se os choques deveriam ser distintos para diferentes durações de contratos e diferentes faixas de idade. Eles concluíram que as diferenças entre os choques para diferentes *durations* são pequenas. No entanto, para diferentes idades são maiores, mas por simplificação decidiram trabalhar com um choque único.

Por se tratar de um modelo padrão, a fixação de um percentual para todas as *durations* e todas as idades é aceitável, entretanto, não corresponde à realidade. Na nossa proposta, usaremos o artigo de (Neves, Fernandes, and Veiga 2016) para obtenção das taxas de mortalidade futuras. No citado artigo, podemos verificar, nos apêndices, que

os ganhos de longevidade são diferentes em cada faixa de idade. Ademais, quando aplicamos um modelo que prevê os ganhos de longevidade, as *durations* dos contratos têm papel fundamental no risco de sobrevivência, quanto maior a vigência maior o risco, haja visto o aumento das variâncias nos ganhos de longevidade com o aumento do tempo de previsão do modelo.

O módulo referente ao risco de mercado também é dividido em sete submódulos de diferentes riscos: taxa de juros, ações, imobiliário, spread, concentração, cambial e prêmio de iliquidez. O risco de mercado, de acordo com o relatório da EIOPA que consta os resultados do QIS 5 (EIOPA, 2011), é o módulo responsável pela maior parte do requisito de capital, em média cerca de 56% do BSCR das empresas.

No módulo de risco de mercado, há submódulos que comparam cenários de choques positivo e negativo. Por exemplo, o risco de taxa de juros, como afetam ativos e passivos, apresentam choques que aumentam ou diminuem as taxas de juros, ambos dependem da maturidade das taxas de juros. Quanto maior a maturidade, menor o valor absoluto do choque.

Em EIOPA (2011), dentro do módulo risco de mercado, podemos verificar que o risco de ações é o mais representativo, cerca de 42% do capital baseado em risco de mercado das empresas. Por essa representatividade, apresentamos o método de cálculo do capital baseado no risco de ações:

$$Mkt_{eq,i} = \max(\Delta NAV | \text{choque de ação}; 0) \quad (3)$$

onde:

$Mkt_{eq,i}$  é o valor do requerimento de capital para o risco de ações do tipo  $i$ ,  $i = 1, 2$ ; e *choque de ação* representa a queda no valor da ação do tipo  $i$ . Esses choques são definidos no Regulamento Delegado (UE) 2015/35, variam de 22% a 49% e dependem do tipo de ação e do emissor.

Para obtenção do capital de risco de ações, os dois valores de requerimento de capital são agregados por meio de uma matriz de correlação. Também é definida uma matriz

de correlação para agregação dos submódulos e obtenção do requerimento de capital de risco de mercado.

Por sua vez, para nossa carteira de anuidades, se quiséssemos obter um capital agregado para o risco de longevidade e de mercado, usando a fórmula padrão, teríamos de utilizar o percentual de correlação entre subscrição de vida e mercado, que é de 0,25, conforme Anexo IV da diretiva do Solvência II.

Existe ainda a possibilidade da utilização de parâmetros específicos na fórmula padrão, para que os mesmos reflitam mais adequadamente o verdadeiro perfil de risco assumido pela seguradora. Esses parâmetros devem ser calibrados utilizando-se dados próprios ou dados que sejam diretamente relevantes para operação. O método padrão para cálculo desses parâmetros específicos é divulgado em EIOPA(2010).

O regime Solvência II, permite que as seguradoras e resseguradoras desenvolvam modelos internos para cálculo do requerimento de capital, podendo estes serem modelos internos parciais. Os modelos internos parciais podem ser estruturados para cálculo de um ou mais módulos ou submódulos do requisito de capital. Ambos devem ser aprovados pelo supervisor de seguros responsável pela companhia ou grupo. A política de alteração desses modelos também deve ser devidamente aprovada.

As técnicas utilizadas no modelo interno devem se basear em técnicas atuárias e estatísticas adequadas, aplicáveis e relevantes e devem ser totalmente coerentes com os métodos utilizados para cálculo das provisões técnicas. O regulamento da diretiva do regime de Solvência II apresenta condições para tal, entre elas destacamos: a companhia possuir conhecimentos aprofundados de teoria econômica e atuarial e das premissas que lhe são subjacentes; os resultados do modelo interno serem estáveis relativamente a alterações nos dados de entrada que não correspondam a uma alteração relevante do perfil de risco da empresa de seguros ou de resseguros; o modelo interno considerar todas as características relevantes do perfil de risco da empresa de seguros ou de resseguros; e as técnicas serem adaptadas aos dados utilizados no modelo interno.

Todas as premissas utilizadas no modelo interno devem ser explicadas e justificadas. Há uma grande preocupação quanto aos dados utilizados no modelo, eles devem ser

precisos, completos e adequados. Para tal, devem observar as seguintes condições: não conter erros materiais; dados de diferentes períodos utilizados para a mesma estimativa devem ser consistentes; e os dados devem ser registados de forma oportuna e consistente ao longo do tempo.

Há de ser destacar a possibilidade de o modelo interno assumir uma medida de risco diferente da fórmula padrão, bem como um período temporal. No entanto, o modelo interno deve assegurar um nível de proteção equivalente. Na nossa proposta, como trabalhamos com técnicas de otimização robusta, não usaremos a medida de risco VaR na obtenção do requerimento de capital.

Para agregação dos riscos mensurados pelo modelo interno parcial e pela fórmula padrão de cálculo do requisito de capital de solvência, as empresas devem utilizar as matrizes de correlação divulgadas na diretiva. Existem também métodos de agregação constantes do regulamento da diretiva, as empresas podem usá-los caso entendam e demonstrem que o método disposto na diretiva não é adequado. Elas podem ainda usar uma técnica de integração alternativa, caso demonstrem sua adequação.

A seguir, apresentamos revisão biográfica de artigos que focam na elaboração de modelos internos para o mercado de seguros em linha com as diretrizes do Solvência II.

### **Modelos internos**

Nesta seção, destacamos artigos que tratam sobre cálculo de requerimento de capital usando modelo interno sob as diretrizes do Solvência II. Primeiramente, destacamos a proposta de [Gatzert and Martin 2012]. Os autores propõem uma interessante abordagem para cálculo de requerimento de capital por meio de um modelo interno parcial. O modelo interno aborda os riscos de ativos de uma seguro não-vida, mas especificamente de mercado e crédito. Um dos objetivos do artigo é comparar os resultados do modelo interno com os resultados da fórmula padrão do Solvência II.

O modelo utiliza simulação de Monte Carlo para obter o requerimento de capital usando, também, como medida de risco o VaR com nível de confiança de 99,5%. Os autores

assumiram uma carteira de ações e títulos (*bonds*). Os módulos/submódulos correspondentes na fórmula padrão são, para as ações, o submódulo de risco de ações dentro do módulo risco de mercado, e para os títulos, os submódulos de taxa de juros e spread e o módulo de risco de contraparte.

O modelo interno parcial para o risco de ações considerou que as ações seguem o movimento geométrico browniano. Para modelagem e avaliação dos títulos, a estrutura a termo de taxa de juros livre de risco é obtida por meio do modelo clássico CIR (Cox, Ingersoll, and Ross 1985) e a probabilidade de default, utilizada para obtenção do valor de cada título, é obtida pela abordagem de (Jarrow, Lando, and Turnbull 1997).

O valor de requerimento de capital é mensurado pela diferença entre o valor de mercado do portfólio de ativos na data de avaliação e o VaR com nível de confiança de 99,5% do valor de mercado do portfólio de ativos ao fim de um ano, trazido a valor presente por uma taxa de juros livre de risco, conforme se segue:

$$SCR_{mkt}^{IM} = MV_{S+B}(0) - VaR_{0,005} \left( e^{-\int_0^1 r(t)dt} MV_{S+B}(1) \right) \quad (4)$$

onde

$SCR_{mkt}^{IM}$  é o requerimento de capital pelo modelo interno parcial proposto;

$MV_{S+B}(t)$  é a soma do valor de mercado dos portfólios de ativos de ações e títulos na data  $t$ ; e

$r(t)$  é a taxa de juros livre de risco na data  $t$ .

Como em nossa abordagem iremos testar a sensibilidade do nosso modelo interno em relação ao tamanho da massa exposta ao risco, vale citar Jarner & Møller (2015). Eles propõem um modelo interno parcial, apenas mensurando o risco de longevidade, também dentro do contexto do regime Solvência II. O interessante dessa abordagem é que eles mensuram tanto o risco sistêmico como o risco idiossincrático, o que difere da abordagem padrão, onde não se leva em conta o tamanho da massa seguradora pela companhia na determinação dos choques.

Para mensuração do risco de longevidade, o modelo estressa três componentes: um relacionado a variabilidade do nível da população segurada na Dinamarca, que funciona como benchmark, outro relacionado a variabilidade da tendência desse benchmark, e o último que mede o risco idiossincrático, que é relacionado com a mortalidade de uma companhia específica. O valor dos componentes sistemáticos e idiossincráticos são calibrados para o nível de estresse de 99,5% para um ano de horizonte.

Nesse artigo é demonstrado, como era esperado, que quando o tamanho do portfólio (em termos de número de mortes esperado) decresce, cresce o tamanho do estresse relacionado ao componente idiossincrático.

[Kochanski and Karnarski 2011] seguindo as diretrizes do Solvência II, propõe um modelo interno parcial para um seguro de vida híbrido, bastante popular na Alemanha. Os autores mensuram o risco de mercado e de default, dada a característica do produto, bem como o risco de subscrição de seguro de vida. A estrutura a termo de taxa de juros também é modelada por um modelo CIR (Cox, Ingersoll, and Ross 1985), os ativos seguem um movimento geométrico browniano e as provisões são avaliadas por meio de simulação estocástica sob a medida neutra ao risco.

Um método de agregação dos riscos alternativo à correlação linear presente na fórmula padrão do Solvência II foi proposto por (Devineau and Loisel 2009). Nesse artigo, o valor do ativo líquido ao final do ano é calculado pelo método de simulação de Nested. E o requerimento de capital é calculado da mesma forma demonstrada a equação (4), o valor do ativo líquido em  $t = 0$  é subtraído do em VaR de 99,5% do ativo líquido em  $t = 1$  descontado por meio de uma taxa livre de risco.

Como o regime de supervisão brasileiro é considerado EIOPA como equivalente ao regime de solvência europeu, iremos na próxima seção apresentar uma visão geral da forma de cálculo do requerimento de capital no Brasil.

### **Visão geral do modelo brasileiro de cálculo de capital**

O modelo brasileiro de cálculo do requerimento de capital também tem uma abordagem baseada em risco. No modelo brasileiro, há o capital base, que é um montante

fixo dependente da região em que a seguradora pretende operar, e o capital baseado em risco. O valor de requerimento de capital é o máximo entre os dois valores citados.

O capital baseado em risco é dividido em módulos: subscrição, crédito, mercado e operacional. O risco de subscrição é subdividido em 3 partes, conforme as operações: seguros gerais, seguro de vida e previdência, e resseguro. O órgão regulador, Conselho Nacional de Seguros Privados (CNSP), fixou a metodologia padrão de cálculo do capital baseado em risco<sup>2</sup>, apresentando os métodos de cálculo, os fatores e as matrizes de correlação. (Melo and Neves 2012) descrevem os modelos teóricos utilizados para obtenção do modelo padrão brasileiro, explicando em detalhes a maior parte dos módulos de riscos envolvidos no requerimento de capital.

Resumimos, a seguir, a forma em que o modelo brasileiro aborda os riscos de mercado e subscrição de vida e previdência. O modelo padrão de risco de mercado utiliza para cálculo do capital os fluxos de caixa de ativos e passivos a preços justos segregados em vértices padrão. Os valores econômicos dos fluxos de caixa estimados pelas seguradoras são alocados nos vértices de acordo com a maturidade e o fator de risco, sendo 83 vértices no total. Os fatores de riscos são sete ao todo, sejam eles: ações, commodity, câmbio, taxa de juros prefixada e três tipos de taxa de juros pós-fixadas, em função de diferentes índices de preços garantidos.

O capital baseado em risco é calculado utilizando a seguinte fórmula:

$$CR_{mer} = \sqrt{E'FE} \quad (5)$$

onde  $E$  é o vetor de exposições líquidas e  $F$  é a matriz de fatores de riscos de mercado, que foram calculados assumindo VaR com nível de confiança de 99%.

A metodologia utilizada para obtenção da fórmula padrão para cálculo do capital de risco de subscrição de vida e previdência é baseada em modelagem estocástica e simulação de Monte Carlo, considerando os riscos envolvidos e o tipo de produto. Os dois maiores fatores de risco, taxa de juros e mortalidade, são modelados usando modelos

---

<sup>2</sup> Por meio da Resolução CNSP nº 321 de 2015 (<http://www2.susep.gov.br/bibliotecaweb/docOriginal.aspx?tipo=1&codigo=35542>).

consagrados. A estrutura a termo de taxa de juros foi projetada usando o modelo de (Ang and Piazzesi 2003) e as taxas de mortalidade foram previstas por meio do método de (Lee and Carter 1992).

Dada a metodologia disposta em (Melo and Neves 2012), usando TVaR como medida de risco, foram calculados fatores de risco para os cinco submódulos: risco de provisões de eventos ocorridos, risco de produtos com cobertura de morte e invalidez estruturados no regime de repartição, risco de produtos com cobertura de morte e invalidez estruturados no regime de capitalização, riscos da cobertura por sobrevivência e risco de despesas administrativas.

Os fatores de risco para as coberturas de sobrevivência são ainda segregados em função das características do produto, sejam elas: taxas de juros, tábuas de mortalidade e índices de preços garantidos em contrato. Para cálculo do requerimento de capital, nesses produtos de sobrevivência, multiplica-se o fator de risco específico pelo valor da provisão contratual<sup>3</sup>.

O requerimento de capital de subscrição é agregado por meio de uma matriz de correlação, considerando inclusive o capital relacionado ao risco de subscrição de seguro de danos.

Na seção seguinte, apresentamos como o passivo dado um cenário de estresse, utilizado na nossa proposta de modelo interno, será modelado.

## **Asset Management**

A expressão *Asset and Liability Management* (ALM), ou *Gestão de Ativos e Passivos* como é conhecida em português, designa a prática de gerir um negócio onde as decisões tomadas consideram ativos e passivos de forma coordenada. O ALM é uma atividade crucial para qualquer organização que recebe e investe recursos com o objetivo de cumprir seus requisitos de capital (solvência) bem como sua demanda de caixa.

---

<sup>3</sup> Valor da provisão calculado com base na taxa de juros e nas taxas de mortalidade fixadas no momento da assinatura do contrato.

Segundo a *Society of Actuaries*, ALM pode ser definido como um processo contínuo de formulação, implementação, monitoramento e revisão das estratégias relacionadas com ativos, investimentos futuros e passivos para atingir os objetivos financeiros, necessidades de caixa e requisitos de capital dado a tolerância ao risco da organização e outras restrições. O ALM pode ter aspectos significativamente diferentes de acordo com o contexto onde é desenvolvido. Uma seguradora por exemplo deve coordenar a sua carteira de produtos (passivos) com o investimento de seu caixa em ativos financeiros. Por outro lado, um fundo de pensão tem um ALM totalmente voltado para a política de investimentos.

Os modelos para gestão de ativos e passivos são uma generalização dos modelos de otimização de portfólio cuja literatura teve início (Markowitz 1959; Markowitz 1952), um modelo estático que minimiza a variância da carteira de um período garantindo um retorno esperado mínimo. Em um contexto estático, diversos trabalhos se dedicaram a aprimorar o trade-off risco-retorno apresentado por Markowitz. Medidas coerentes de risco (Artzner et al. 1999), como o *Conditional Value-at-Risk*, foram incluídas nos modelos de portfólio utilizando métodos de solução amostral (Rockafellar and Uryasev 2002). Outros trabalhos desenvolveram técnicas para obtenção de uma carteira robusta a erros de estimação (Kim, Kim, and Fabozzi 2014).

Para aplicações onde a evolução da carteira no tempo também é influente, modelos dinâmicos são os mais adequados. A literatura de alocação dinâmica de ativos começa com o trabalho de (Mossin 1968; Samuelson 1969; Merton 1971; Merton 1969), que mostram que um problema sem custo de transação é computacionalmente tratável podendo ser resolvido de maneira eficiente. Em um contexto de realocações a tempo discreto, (Constantinides 1979) trata da seleção dinâmica de portfólio com apenas dois ativos com custos de transação proporcionais. (Davis and Norman 1990; Shreve and Soner 1994) podem ser considerados extensões de (Constantinides 1979) para um contexto de tempo contínuo.

Especificamente para ALM, (Bradley and Crane 1972) e (Kallberg, White, and Ziemba 1982) publicaram um dos primeiros trabalhos descrevendo modelo de programação estocástica. Muitos outros trabalhos propõem outras simplificações do problema com o objetivo de obter uma solução em tempo computacionalmente viável (Carino and Ziemba 1998; Cariño and Ziemba 1998; Kouwenberg 2001; Hilli et al. 2007; Veiga and

Valladão 2009; Klein Haneveld, Streutker, and van der Vlerk 2010). Mais recentemente, (Carino and Ziemba 1998; Cariño and Ziemba 1998; Kouwenberg 2001; Hilli et al. 2007; Veiga and Valladão 2009; Klein Haneveld, Streutker, and van der Vlerk 2010). Mais recentemente, (Brown and Smith 2011) propõem de maneira heurística políticas de investimento e avaliam a qualidade da solução através de limites obtidos pela teoria de dualidade e relaxação da informação (Brown and Smith 2014). Com aumento de poder computacional e utilização de algoritmos amostrais de decomposição tornou-se possível a solução de problemas de programação dinâmica de larga escala (Pereira and Pinto 1991b; Alexander Shapiro 2011). Em uma aplicação ilustrativa, (Homem-De-Mello and Pagnoncelli 2016) resolvem a alocação dinâmica ótima de um fundo de pensão. Para evitar o problema da dimensionalidade (Gülpinar and Pachamanova 2013) resolve um problema de gestão de ativos e passivos utilizando técnicas de otimização robusta.

O objetivo da nossa pesquisa é o desenvolvimento de um modelo interno que simultaneamente encontre a alocação da carteira e o requerimento de capital mínimo que garanta solvência com alto nível de confiança. Técnicas de otimização robusta são mais adequadas nesse contexto dado que o requerimento de capital é calculado para fazer frente a cenários adversos dos fatores de risco. De fato, a otimização robusta garante que as restrições de solvência sejam atendidas para quaisquer valores dos fatores de risco dentro de um conjunto de incerteza previamente definido. Quanto maior este conjunto maior será o nível de confiança, i.e., menor será a probabilidade de insolvência. Trata-se de uma análise de pior caso endógena onde o algoritmo seleciona a carteira tentativa, determina o pior cenário dos fatores de risco para a carteira escolhida, verifica as restrições de solvência e seleciona a carteira solvente de maior retorno, dado o conjunto de incerteza pré-especificado para os fatores de risco. Esse conjunto será composto por incertezas provenientes do risco de subscrição e mercado para aplicações em seguros e previdência.

Como estudo de caso, apresentamos aplicações práticas em diferentes carteiras empíricas de planos de anuidades. Mais especificamente, vamos apresentar resultados em carteiras compostas por segurados com bases técnicas predefinidas<sup>4</sup>, assumindo uma idade de aposentadoria predefinida e os decrementos morte e cancelamento. A

---

<sup>4</sup> Bases técnica = tábua de mortalidade e taxa de juros garantidas no plano.

fim de destacar o efeito do risco idiossincrático no processo de cálculo do capital baseado em risco, aplicamos nosso modelo interno em massas de tamanhos distintos. Também realizaremos teste de sensibilidade considerando diferentes níveis de aversão a risco, dada a nossa abordagem diferenciada de minimização da função objetivo para o pior cenário das incertezas. Tal qual o Solvência II, no nosso modelo interno parcial, o valor do capital baseado em risco será a variação do valor do ativo líquido. Na nossa proposta, o requerimento de capital é a diferença entre o valor do ativo líquido na data de cálculo e o ativo líquido assumindo um cenário de maximização do risco.

## II. TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

Nesta seção, introduziremos conceitos de otimização robusta e recentes avanços de suas aplicações em otimização de carteiras. Problemas de otimização que ocorrem na vida real muitas vezes têm incertezas relacionadas aos seus parâmetros. Os parâmetros podem ser naturalmente estocásticos ou incertos devido a erros (por exemplo, erros de medição, erros de estimação, etc.). Anteriormente ao estabelecimento de otimização robusta, problemas de incerteza de dados foi muitas vezes modelado usando otimização estocástica. Técnicas de otimização estocástica assumem que a distribuição de probabilidade é conhecida ou precisamente estimada. A otimização estocástica é a ferramenta mais adequada em um problema com distribuição conhecida e uma modelagem computacionalmente tratável. Para mais detalhes em otimização estocástica, referimos (A Shapiro, Dentcheva, and Ruszczyński 2009; Birge and Louveaux 1997).

Por outro lado, otimização robusta não assume que as distribuições de probabilidades são conhecidas, em vez disso, assume que a incerteza dos parâmetros se encontra em um conjunto incerteza predefinido. A primeira ideia de conjunto incerteza foi apresentada por (Soyster 1973b), que sugeriu problema de otimização linear no qual o seu valor ótimo é viável em todos os possíveis cenários dentro de um conjunto convexo. No entanto, em troca de uma solução para todas possíveis realizações dos parâmetros de incerteza, este modelo produz soluções ótimas que são muito conservadoras do ponto de vista prático. Anos mais tarde, um dos principais trabalhos foi desenvolvido por (A Ben-Tal and Nemirovski 1998; Aharon Ben-Tal and Nemirovski 1999; Ghaoui and Lebret 1997; Ghaoui, Oustry, and Lebret 1998). O trabalho deles apresentou uma análise detalhada sobre estrutura de otimização robusta, tanto em otimização linear quanto em otimização convexa geral. Para resolver o problema conservadorismo, (Aharon Ben-Tal and Nemirovski 1999) introduziu um modelo menos conservador, considerando um problema de otimização linear com conjuntos de incertezas elipsoidais cuja contraparte robusta é um problema convexo, computacionalmente tratável e com solução obtida utilizando técnicas de programação cônica de segunda ordem. (Dimitris Bertsimas and Sim 2004) forneceu uma nova metodologia para controlar conserva-

dorismo do problema de otimização robusto, mantendo as vantagens da formulação linear de (Soyster 1973b). (Dimitris Bertsimas and Sim 2004) introduzem o conceito de “orçamento” da incerteza que controla o nível de conservadorismo da solução limitando o número de parâmetros incertos que podem assumir o pior caso concomitantemente.

Devido a sua praticidade, otimização portfólio robusta se tornou área pesquisa bastante dinâmica da em alocação de portfólio. Esta abordagem reconhece os possíveis erros de estimação dos retornos e volatilidade e procura uma carteira ótima entre as piores realizações das estimativas. Entre muitos estudos sobre a otimização robusta de carteiras de investimento, (Lobo and Boyd 2000) fornecem uma introdução às formulações de otimização de portfólio sob a perspectiva robusta, listando possíveis conjuntos de incerteza que são convexos e tratável para modelar os retornos dos ativos. Além disso, (Halldórsson and Tütüncü 2003) introduz uma formulação robusta para o modelo de média-variância, que a solução ótima considera o pior caso dentro do conjunto de valores para os retornos e a matriz de covariâncias. Mais recentemente, (Fernandes et al. 2016), propôs um novo modelo de carteira robusta adaptativa impulsionado por dados. Este modelo utiliza conjuntos de incertezas poliédricos impulsionado por dados para construir restrições de perda em um esquema de horizonte rolante. Para uma discussão aprofundada em tópicos relacionados à otimização robusta de carteiras veja (Frank J. Fabozzi Petter N. Kolm 2007; Kim, Kim, and Fabozzi 2013; Fabozzi, Huang, and Zhou 2009; Fernandes et al. 2016).

### **Conceitos de otimização robusta**

De maneira geral otimização robusta procura refletir troca entre a robustez da solução ótima e cada realização possível do parâmetro de incerteza. Uma vez que, a distribuição de probabilidade do parâmetro é desconhecida, a abordagem usual especifica o tamanho e a forma do conjunto em torno dos parâmetros de incerteza. Onde o tamanho do conjunto determina a probabilidade do parâmetro incerto assumir um valor no conjunto, e a forma dita a complexidade do problema de otimização (Fabozzi, Huang, and Zhou 2009).

Como exemplo, usamos um modelo de otimização sob incerteza linear, porém, as discussões que surgem a partir deste problema podem ser estendidas a outras classes

de problemas convexos. Um problema linear de otimização sob incerteza pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & f^\top x \\ \text{s. a.} \quad & Ax \leq b \\ & (A, b) \in \mathcal{U} \end{aligned} \tag{6}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  são as variáveis de decisão,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  são coeficientes incertos relacionado com o problema de otimização e  $\mathcal{U}$  é um conjunto de incerteza especificado pelo usuário. Note que este problema é equivalente a problemas de otimização linear cujos coeficientes das variáveis de decisão variam dentro determinado conjunto de incerteza.

Problemas de otimização robustos que citamos ao longo deste trabalho são modelados para com foco em problemas que possuem três principais características. Em primeiro lugar, todas as variáveis de decisão são decisões “aqui e agora”, o que significa que todas as variáveis de decisão devem ser especificadas antes da incerteza associada a seus parâmetros realizarem. O tomador de decisão assume a responsabilidade pelas consequências de suas decisões, quando e somente quando, os dados reais residem no conjunto de incerteza  $\mathcal{U}$  que foi estabelecido anteriormente. Finalmente, o tomador de decisões não admite violações das restrições quando os dados estão dentro de um dado conjunto de incerteza predefinido ( $\mathcal{U}$ ), na literatura essas restrições são conhecidas como restrições “duras” (Aharon Ben-Tal and Nemirovski 1999).

Com base no pressuposto de que o problema deve se proteger contra todas as realizações das incertezas, introduzimos o conceito de viabilidade robusta, isto é, o problema de otimização deve ser viável em todas as possíveis realizações dos parâmetros dentro de um conjunto de incertezas definido. Portanto, um vector  $x \in \mathbb{R}^n$  é considerado robusto viável desde que atenda as restrições para todos os cenários no conjunto predefinido, como se segue:

$$Ax \leq b \quad \forall (A, b) \in \mathcal{U} \tag{7}$$

A ideia de viabilidade robusta leva naturalmente a problemas de otimização orientados ao pior caso. Assim, introduzimos um conceito primordial no que se refere à metodologia de otimização robusta, a contraparte robusta de um problema. Esta reformulação do problema original é definida como um problema de otimização que busca a melhor solução viável dentro de todas as realizações do conjunto de incertezas. Desta forma, o problema (6) tem sua contraparte robusta escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \max_x \quad & f^\top x \\ \text{s. a.} \quad & Ax \leq b, \quad \forall (A, b) \in \mathcal{U} \end{aligned} \quad (8)$$

Observe também que o problema (8) não há incerteza nos parâmetros da função objetivo. Isto, no entanto, não é uma suposição restritiva. Um problema de otimização com parâmetros incertos, tanto na função objetivo quanto nas restrições pode ser reformulado para se ajustar à forma do problema (8). De fato,

$$\begin{aligned} \max_{x,t} \quad & t \\ \text{s. a.} \quad & t \leq f^\top x, \quad \forall (f, A, b) \in \mathcal{U} \\ & x \leq b, \quad \forall (f, A, b) \in \mathcal{U} \end{aligned} \quad (9)$$

Onde este último problema possui apenas incertezas em suas restrições. Efetivamente, qualquer problema com incertezas na função objetivo pode ser colocado nessa configuração com a adição de uma nova variável de decisão.

### Resolvendo a contraparte robusta

Devido à formulação de pior caso em seu conjunto de incerteza, a contraparte robusta do problema original é definida como um problema com infinitas restrições. Para fins didáticos, assuma um problema simplificado com apenas a restrição

$$(a + P\eta)^\top x \leq b, \quad \eta \in \mathcal{U}_\eta, \quad (10)$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $P \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $\eta \in \mathbb{R}^m$ . O parâmetro incerto  $\eta$  pertence a um conjunto de incertezas predefinido  $\mathcal{U}_\eta$  e uma solução viável  $x \in \mathbb{R}^n$  deve atender a desigualdade para todas as possíveis realizações de  $\eta \in \mathcal{U}_\eta$ , i.e., um número infinito de restrições. Computacionalmente intratável, o problema deve ser substituído por um problema equivalente com número finito de restrições. Esta reformulação consiste em

três etapas, que serão apresentadas de maneira ilustrativa para um conjunto poliédrico de incertezas dado por

$$\mathcal{U}_\eta = \{\eta: D\eta \leq q\}. \quad (11)$$

Etapa 1. (Formulação de pior caso): Observe que a restrição (10) é equivalente a seguinte restrição de pior caso

$$a^\top x + \max_{\eta \geq 0} \{(P^\top x)^\top \eta | D\eta \leq q\} \leq b \quad (12)$$

Etapa 2. (Dualidade): O próximo passo é obter uma restrição equivalente utilizando teoria de dualidade forte. O valor ótimo da função objetivo problema de maximização apresentado em (12) é igual ao valor ótimo da função objetivo de sua formulação dual. Por conseguinte, a restrição (12) é equivalente a

$$a^\top x + \min_{w \geq 0} \{q^\top w | D^\top w \geq -P^\top x\} \leq b. \quad (13)$$

Etapa 3. (Contraparte robusta): Note que utilizando dualidade fraca, qualquer solução dual viável  $w \geq 0$ , i.e., que satisfaça  $D^\top w \geq -P^\top x$ , garante a restrição (13) já que

$$a^\top x + \max_{\eta \geq 0} \{(P^\top x)^\top \eta | D\eta \leq q\} \leq a^\top x + q^\top w \leq b. \quad (14)$$

Logo, é suficiente que a restrição seja atendida para apenas um  $w$ . Chegamos a formulação final equivalente da contraparte robusta para este conjunto de incerteza

$$\begin{aligned} \max_{x,w} \quad & f^\top x \\ \text{s. a.} \quad & a^\top x + q^\top w \leq b \\ & D^\top w \geq -P^\top x \\ & w \geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Note a contraparte robusta (15) do problema é computacionalmente tratável já que sua função objetivo e restrições são lineares em  $x$  e em  $w$ . Este exemplo poliédrico ilustra as ideias essenciais da otimização robusta. Além disso, usando esses mesmos três passos descritos e técnicas de dualidade cônica podemos chegar a contrapartes robustas tratáveis utilizando conjuntos de incertezas elipsoidais.

## Definindo conjunto de incertezas

Uma maneira de modelar incertezas é gerar possíveis realizações para os parâmetros incertos, por exemplo, pode-se definir um intervalo de valores para futuros retornos de um grupo de ativos. No contexto de otimização robusta, uma incerteza modelada através de um conjunto de realizações plausíveis que devem ser consideradas na tomada de decisão. A contraparte robusta do problema contém um conjunto de restrições para cada parâmetro incerto e garante que as restrições originais sejam atendidas para o pior cenário dentro do conjunto de incerteza predefinido. Tipicamente, os conjuntos de incerteza são escolhidos de forma a atender duas propriedades importantes:

- Tratabilidade computacional: A restrição robusta  $a(\eta)'x \leq b, \forall \eta \in \mathcal{U}_\eta$  deve ser computacionalmente tratável;
- Garantia probabilística: O conjunto de incerteza pode ser modelado de tal modo que as restrições sejam atendidas com alta probabilidade. Se  $a(\eta)'x \leq b, \forall \eta \in \mathcal{U}_\eta$ , então  $P_\eta(a(\eta)'x \leq b) \geq \alpha$ , onde  $\alpha$  é o nível de confiança desejado.

Normalmente, os conjuntos de incerteza utilizados na prática variam de poliedros a conjuntos cônicos mais sofisticados, tendo suas origens em diferentes suposições sobre o parâmetro de incerteza. Por exemplo, em um determinado problema pode se definir um intervalo de confiança para um parâmetro de incerteza, o que levaria ao conjunto de incerteza poliédrico proposto por (Soyster 1973b). Devido ao seu formato retangular, o mesmo também é conhecido como caixa. Para um parâmetro de incerteza  $\eta \in \mathbb{R}^n$ , este conjunto de incerteza é definido como:

$$\mathcal{U}_\eta = \{\eta \in \mathbb{R}^n \mid |\eta_i - \hat{\eta}_i| \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, n\} \quad (16)$$

onde o parâmetro incerto  $\eta_i$  está a uma distância máxima  $\varepsilon_i$  de valor nominal  $\hat{\eta}_i$ . Este conjunto incerteza contém toda a gama de realizações para cada parâmetro de incerteza, com isso, garante que a cada as restrições da contraparte robusta não sejam violadas (i.e.  $\xi = 0$ ). Por outro lado, existe uma pequena probabilidade de que todos os parâmetros incertos assumam seus valores do pior caso ao mesmo tempo. O conservadorismo deste conjunto levou ao desenvolvimento de conjuntos menores que ainda garantem que as restrições se mantenham viáveis em quase todos possíveis cenários.

Quando informações adicionais sobre as distribuições dos parâmetros de incertezas estão disponíveis, tal como momentos, simetria ou unimodalidade, abre-se a possibilidade para modelagem de conjuntos menores e, conseqüentemente, menos conservadores. Por exemplo, o conjunto incerteza elipsoidal proposto por (Aharon Ben-Tal and Nemirovski 2000) permite incluir informações sobre o segundo momento da distribuição dos parâmetros. Apresentamos este conjunto em sua forma padrão:

$$\mathcal{U}_\eta = \{ \eta \in \mathbb{R}^n \mid (\eta_i - \hat{\eta}_i)^\top \Sigma_\eta^{-1} (\eta_i - \hat{\eta}_i) \leq \varepsilon \}$$

onde  $\Sigma_\eta$  normalmente é assumida como a matriz de variâncias e covariâncias do parâmetro  $\eta \in \mathbb{R}^n$ . Os autores também provaram que existe uma garantia probabilística se os parâmetros  $\eta$  forem variáveis aleatórias independentes e simetricamente distribuídas. Neste caso, a probabilidade da restrição ser violada seria no máximo  $\exp(-\varepsilon^2/2)$ .

Um segundo conjunto poliédrico foi proposto por (Dimitris Bertsimas and Sim 2004). Seguindo o pressuposto de que nem todos os parâmetros incertos iriam para o seu valor de pior caso simultaneamente, eles apresentaram um parâmetro chamado “orçamento” de incerteza,  $\Gamma$ , que controla o número de parâmetros incertos (elementos do vetor  $\eta$ ) que podem desviar do seu valor nominal. Este conjunto de incerteza é dado por

$$\mathcal{U}_\eta = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{ll} |\eta_i - \hat{\eta}_i| \leq z_i \varepsilon_i, & i = 1, \dots, n \\ 0 \leq z_i \leq 1, & i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n z_i \leq \Gamma \end{array} \right\} \quad [17]$$

onde  $\Gamma \in \mathbb{R}$  e a probabilidade de violação é limitada por  $\exp(-\Gamma^2/(2n))$  se os elementos do vetor  $\eta$  são independentes e simetricamente distribuídos. Note que quando  $\Gamma = 0$ , a restrição é equivalente à restrição no problema nominal e que quando assume o mesmo valor que o número de incertezas ( $\Gamma = n$ ), o conjunto é o mesmo proposto por (Soyster 1973b). Esta é a razão pela qual  $\Gamma$  é chamado de “orçamento” de incerteza, pois, alterando  $\Gamma \in [0, n]$ , temos a flexibilidade de ajustar a robustez do método em termos do nível de conservadorismo da solução ótima. Também é importante mencionar que este conjunto de incerteza leva a um problema de programação linear, portanto, de menor complexidade computacional do que um problema cônico com conjunto de incerteza elipsoidal.

Se técnicas de regressão forem utilizadas para estimar a incerteza dos parâmetros, conjuntos poliédricos e elipsoidais vêm naturalmente como potenciais conjuntos de incerteza. Além disso, como mencionado anteriormente, os mesmos também podem ser associados com garantias de probabilidade para cada restrição. Recentemente uma abordagem baseada na utilização de dados foi introduzida por (D Bertsimas, Gupta, and Kallus 2014). Eles propõem uma nova metodologia estatística, que utiliza testes de hipótese para construir conjuntos de incerteza aplicáveis à otimização robusta. Além disso, no mesmo artigo também é apresentado uma orientação com recomendações para profissionais e aplicações em problemas de gestão de carteiras e filas.

Para concluir esta seção, chamamos a atenção para um equívoco importante sobre a interpretação do conjunto de incerteza. Quando um conjunto de incerteza é construído para incluir o verdadeiro parâmetro com um nível de confiança de  $\alpha$ , implica uma garantia de probabilidade mais forte do que parece à primeira vista. De fato, a probabilidade máxima de violação das restrições é de  $1 - \alpha$ . Assim, através da resolução de um problema de otimização através de uma perspectiva RO a garantia probabilística é geralmente muito maior do que  $\alpha$ .

### Otimização robusta de portfólio

Adotando a média e a matriz de covariâncias como medidas retorno e risco para o portfólio, (Markowitz 1952) encontra o portfólio ótimo para o investidor que deseja ter um retorno médio superior a  $\mu_0 \in \mathbb{R}$ , resolvendo o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x^T \Sigma x \\ \text{s. a} \quad & \mu^T x \geq \mu_0 \end{aligned} \tag{18}$$

onde  $\mu \in \mathbb{R}^n$  são os retornos médios e  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz de covariâncias para  $n$  ativos. Note que quanto maior a exigência de retorno médio ( $\mu_0$ ), mais tolerante a volatilidade é o investidor. Além disso, já que a matriz de covariâncias é positiva semi-definida e a restrição do problema é linear, o problema acima se encaixa na classe dos programas quadráticos convexos.

Em aplicações práticas, retornos médios estimados são susceptíveis divergir dos retornos reais dos ativos, no entanto, pode-se definir um conjunto incerteza que contém os futuros retornos dos ativos com alta margem de garantia. Nessa estrutura, portfólios robustos são modelados para que sejam relativamente mais estáveis a variações de  $\mu$  e  $\Sigma$ . Para retornos esperados, conjuntos de incerteza descrevem uma estrutura geométrica em torno dos valores estimados de retornos futuros (Kim, Kim, and Fabozzi 2013).

Entre os diversos trabalhos sobre otimização robusta de portfólio que existem na literatura, (Lobo and Boyd 2000) apresentam uma introdução sobre o tema e lista possíveis conjuntos de incertezas que podem ser utilizados em retorno de ativos. Além disso, (Halldórsson and Tütüncü 2003) consideram um exemplo de otimização robusta para carteiras de investimento em sua investigação de problemas com ponto de sela. Neste mesmo trabalho, eles introduzem um problema de otimização baseado no modelo proposto por (Markowitz 1952), que busca o portfólio ótimo considerando o pior caso dentro do conjunto de possíveis retornos esperados, variâncias e covariâncias, i.e.,

$$\min_x \left\{ \max_{(\Sigma, \mu) \in \mathcal{U}} x^T \Sigma x - \lambda \mu^T x \right\}. \quad (19)$$

Para fins ilustrativos, vamos considerar o problema onde o conjunto de incerteza é somente referente ao retorno esperado  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x^T \Sigma x \\ \text{s. a} \quad & \min_{\mu \in \mathcal{U}_\mu} \{\mu^T x\} \geq \mu_0 \end{aligned} \quad (20)$$

A escolha mais simples de conjunto de incertezas para retornos esperados ( $\mu \in \mathbb{R}^n$ ) é a caixa

$$\mathcal{U}_\mu = \{\mu: |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \delta_i, i = 1, \dots, n\} \quad (21)$$

onde  $\delta_i$  pode estar relacionado com o nível de confiança em torno de cada retorno estimado. Por exemplo, se um retorno de um ativo for normalmente distribuído, então  $\frac{\mu_i - \hat{\mu}_i}{\sigma_i / \sqrt{N_i}}$  segue uma distribuição normal, e o intervalo de confiança de 95% pode ser

obtido assumindo  $\delta_i = 1.96 \sigma_i / \sqrt{N_i}$ , onde  $N_i$  é o tamanho da amostra utilizada na estimação e  $\sigma_i$  é a variância.

De forma detalhada ilustraremos como encontrar a contraparte robusta do problema [20]. Primeiro, escrevemos o problema de minimização que descreve a restrição de retorno esperado:

$$\begin{aligned} \min_{\mu \in \mathcal{U}_\mu} \{\mu^\top x\} &= \min_{\mu} \mu^\top x \\ \text{s. a.} \quad &|\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \delta_i, \forall i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (22)$$

O problema [22] é equivalente ao problema de programação linear

$$\begin{aligned} \min_{\mu \in \mathcal{U}_\mu} \{\mu^\top x\} &= \min_{\mu} \mu^\top x \\ \text{s. a.} \quad &\mu_i \leq \hat{\mu}_i + \delta_i, \forall i = 1, \dots, n \\ &\mu_i \geq \hat{\mu}_i - \delta_i, \forall i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (23)$$

Note que, se o valor da variável de decisão  $x_i$  for positiva, o menor valor da possível função objetivo será  $(\hat{\mu}_i - \delta_i)x_i$ . Caso não seja positivo, o menor valor de  $\mu_i x_i$  será obtido quando  $(\hat{\mu}_i + \delta_i)x_i$ . Então, o valor mínimo para cada  $\hat{\mu}_i x_i$  será

$$\min_{\mu_i \in \mathcal{U}_\mu} \{\mu_i x_i\} = \hat{\mu}_i x_i - \delta_i |x_i| = \begin{cases} (\hat{\mu}_i - \delta_i)x_i, & \text{se } x_i \geq 0 \\ (\hat{\mu}_i + \delta_i)x_i, & \text{se } x_i < 0 \end{cases} \quad (24)$$

Logo, substituindo o valor ótimo do problema de segundo nível no problema original temos o problema de nível único equivalente

$$\begin{aligned} \min_x \quad &x^\top \Sigma x \\ \text{s. a.} \quad &\hat{\mu}^\top x - \delta |x| \geq \mu_0. \end{aligned} \quad (25)$$

A partir do problema [25] podemos derivar uma explicação intuitiva para a restrição da contraparte robusta. Quando o peso de um ativo ( $x_i$ ) é negativo, o problema robusto aumenta o seu retorno médio,  $\hat{\mu}_i + \delta_i$ , por outro lado, quando se assume valores positivos o retorno esperado é reduzido,  $\hat{\mu}_i - \delta_i$ . Fabozzi et al. (2009) interpreta este fato como um ajuste ao risco por um investidor que é avesso a erros de estimativas.

Outra estrutura comum de incerteza para o de retornos médios é o conjunto elipsoidal

$$\mathcal{U}_\mu = \{\mu: (\mu - \hat{\mu})' \Sigma_\mu^{-1} (\mu - \hat{\mu}) \leq \delta^2\} \quad (26)$$

onde  $\delta^2$  é muitas vezes é escolhido como o quantil de uma distribuição qui-quadrada com  $n$  graus de liberdade e  $\Sigma_\mu$  a matriz de covariâncias dos erros de estimação dos retornos esperados. Muitas vezes, este conjunto de incerteza é apresentado na literatura como

$$\mathcal{U}_\mu = \{\|\Sigma^{-1/2}(\mu - \hat{\mu})\|_2 \leq \delta\} \quad (27)$$

onde  $\Sigma^{-1/2}$  é uma matriz triangular inferior resultante da fatorização de Cholesky da matriz  $\Sigma^{-1}$ . Mais uma vez, mostra-se que utilizando os três passos apresentados na seção 4.2, o problema pode ser reformulado sem o problema de segundo nível. Primeiro, escrevemos a expressão do pior caso dos coeficientes incertos

$$\begin{aligned} \min_\mu \quad & \mu^\top x \\ \text{s. a.} \quad & \|\Sigma^{-1/2}(\mu - \hat{\mu})\|_2 \leq \delta \end{aligned} \quad (28)$$

Esse é um problema de programação cônica de segunda ordem. Por definição de dualidade cônica o seu dual é

$$\begin{aligned} \max_{w,z} \quad & w^\top \Sigma^{-1/2} \hat{\mu} - \delta z \\ \text{s. a.} \quad & x^\top = w^\top \Sigma^{-1/2} \\ & \|w\|_2 \leq z \end{aligned} \quad (29)$$

Observe que a restrição de igualdade permite expressar  $x$  em termos de  $w$ . Consequentemente, retirando a restrição de igualdade o problema dual pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \max_z \quad & x^\top \hat{\mu} - \delta z \\ \text{s. a.} \quad & \|\Sigma^{1/2} x\|_2 \leq z \end{aligned} \quad (30)$$

Note que o valor máximo do problema (32) vai ser obtido quando a restrição for atendida com igualdade, ou seja, quando

$$z = \|\Sigma^{1/2}x\|_2 \quad (31)$$

Portando, o máximo para cada variável de decisão  $x$  será

$$x^\top \hat{\mu} - \delta \|\Sigma^{1/2}x\|_2 \quad (32)$$

Como este é um problema cônico de segunda ordem, pela teoria da dualidade forte o valor ótimo do problema dual será o mesmo do problema primal. Desse modo, problema robusto original com esse conjunto de incerteza ficará

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x^\top \Sigma x \\ \text{s. a.} \quad & x^\top \hat{\mu} - \delta \|\Sigma^{1/2}x\|_2 \geq \mu_0 \end{aligned} \quad (33)$$

(Ceria and Stubbs 2006) observam que o termo  $\delta \|\Sigma^{1/2}x\|_2$  está relacionado com os erros de estimações dos retornos, e sua inclusão na restrição tem como efeito minimizar esses erros na alocação ótima.

### III. OTIMIZAÇÃO ROBUSTA DO CAPITAL MÍNIMO REQUERIDO

O capital mínimo requerido, calculado por modelo padrão ou via modelo interno de uma seguradora ou entidade de previdência aberta, define o menor capital necessário para o cumprimento das obrigações da empresa com os segurados. Em um modelo interno, o requisito de capital deve depender da política alocação de ativos e passivos da mesma. De forma simplificada, podemos representar um modelo interno através de um modelo de otimização robusta

$$\begin{aligned}
 & \min_{CMR, \mathbf{x}} \quad CMR \\
 & s. a \quad \sum_{i=1}^N x_i = P + CMR \\
 & \quad \quad \sum_{i=1}^N (1 + r_i)x_i \geq P_1, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{U} \\
 & \quad \quad CMR \geq 0,
 \end{aligned} \tag{34}$$

com representação vetorial

$$\begin{aligned}
 & \min_{CMR, \mathbf{x}} \quad CMR \\
 & s. a \quad \mathbf{1}^T \mathbf{x} = P + CMR \\
 & \quad \quad (\mathbf{1} + \mathbf{r})^T \mathbf{x} \geq P_1, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{U} \\
 & \quad \quad CMR \geq 0,
 \end{aligned} \tag{35}$$

onde  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)^T$  e  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ .

O modelo (6) tem como objetivo encontrar o capital mínimo requerido ( $CMR$ ) e as alocações  $\mathbf{x}$  respeitando que o total de ativos correntes ( $\mathbf{1}^T \mathbf{x}$ ) seja igual ao total do passivo corrente ( $P$ ) acrescido do  $CMR$ . Além disso, é exigido que, ao final de um determinado período, o total de ativos ( $(\mathbf{1} + \mathbf{r})^T \mathbf{x}$ ) seja maior que o passivo total no mesmo período ( $P_1$ ) para todo retorno ( $\mathbf{r}$ ) dentro do conjunto de incerteza ( $\mathcal{U}$ ). Note que (6) é um problema de otimização semi-infinita, i.e., com um número finito de variá-

veis e um número infinito de restrições, já que o número de elementos  $\mathcal{U}$  não é finito. Uma reformulação equivalente seria exigir que o pior cenário para o ativo total seja maior que o passivo ao final do período, i.e.,

$$\begin{aligned}
 \min_{CMR, \mathbf{x}} \quad & CMR \\
 \text{s. a} \quad & \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = P + CMR \\
 & \min_{\mathbf{r} \in \mathcal{U}} \{(\mathbf{1} + \mathbf{r})^\top \mathbf{x}\} \geq P_1 \\
 & CMR \geq 0
 \end{aligned} \tag{36}$$

Note que, apesar do modelo (36) ter um número finito de restrições, ele se caracteriza como um problema de otimização bi-nível. De fato, o problema do primeiro nível inclui uma restrição não linear que se utiliza de um segundo problema de otimização para encontrar o pior cenário para o total de ativos.

Sob a decisão ótima  $\mathbf{x}^*$  e  $CMR^*$ , denotamos os ativos correntes por  $A_0 = \mathbf{1}^\top \mathbf{x}^*$  e o pior caso dos ativos ao final do primeiro ano  $A_1 = \min_{\mathbf{r} \in \mathcal{U}} \{(\mathbf{1} + \mathbf{r})^\top \mathbf{x}^*\}$ . De maneira similar a equação (1), podemos afirmar que, sob otimalidade,

$$CMR^* = \max\{(A_0 - P) - (A_1 - P_1), 0\}.$$

De fato, podemos dizer a partir da primeira equação que  $CMR \geq A_0 - P$ . A partir da segunda restrição temos que  $0 \geq A_1 - P_1$ . Se somarmos as duas desigualdades teremos que  $CMR^* \geq (A_0 - P) - (A_1 - P_1)$  e  $CMR^* \geq 0$ . Dada otimalidade, pelo menos uma das duas desigualdades é atingida na igualdade representando assim  $\max\{(A_0 - P) - (A_1 - P_1), 0\}$ .

Para prosseguirmos o desenvolvimento, devemos definir o conjunto de incerteza. O conjunto  $\mathcal{U}$  deve ser construído de forma a contemplar os cenários mais prováveis de retorno garantindo assim a solvência com alta probabilidade. Este modelo deve ser reformulado com o objetivo de encontrar sua contra-parte robusta: um modelo equivalente e computacionalmente tratável.

## Modelo Soyster

No modelo originalmente proposto por (Soyster 1973b), o conjunto de incertezas é definido através de intervalos para os retornos  $r_i$ , formando assim um hipercubo em  $\mathbb{R}^N$  centrado em no valor nominal  $\bar{r} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N)^T$ . Formalmente,

$$\mathcal{U} = \{r \in \mathbb{R}^N \mid |r_i - \bar{r}_i| \leq \varepsilon_i, \forall i = 1, \dots, N\}.$$

Para uma alocação  $(x)$  fixa, o problema de segundo nível pode ser reescrito como um problema de programação linear.

$$\begin{aligned} \min_r \quad & \sum_{i=1}^N (1 + r_i)x_i \\ \text{s. a} \quad & r_i \leq \bar{r}_i + \varepsilon_i, \quad \forall i = 1, \dots, N \\ & r_i \geq \bar{r}_i - \varepsilon_i, \quad \forall i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (37)$$

As desigualdades do problema (37) são uma representação linear equivalente da desigualdade não linear  $|r_i - \bar{r}_i| \leq \varepsilon_i$ . Podemos também representá-lo de maneira vetorial, i.e,

$$\begin{aligned} \min_r \quad & (\mathbf{1} + r)^T x \\ \text{s. a} \quad & r \leq \bar{r} + \varepsilon \quad : \pi \\ & r \geq \bar{r} - \varepsilon \quad : \theta \end{aligned} \quad (38)$$

Para encontrarmos a contraparte robusta de (38) precisamos escrever o problema dual. Considerando os multiplicadores de Lagrange vetoriais  $\pi, \theta \geq \mathbf{0}$ , definimos o problema dual lagrangeano

$$\min_{\pi, \theta \geq \mathbf{0}} L(\pi, \theta), \quad (39)$$

onde

$$L(\pi, \theta) = \min_r (\mathbf{1} + r)^T x + \pi^T (r - \bar{r} - \varepsilon) + \theta^T (\bar{r} - r - \varepsilon) \quad (40)$$

Rearranjando a função objetivo, temos:

$$L(\pi, \theta) = \min_r r^T (x + \pi - \theta) + \mathbf{1}^T x + \bar{r}^T (\theta - \pi) - \varepsilon(\theta + \pi)$$

Se  $(\mathbf{x} + \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}) > \mathbf{0}$ , o problema é ilimitado já que a função objetivo diminui quanto menor for o valor de  $\mathbf{r}$ . Da mesma forma, se  $(\mathbf{x} + \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}) < \mathbf{0}$ , também temos um problema ilimitado já que a função objetivo diminui quando  $\mathbf{r}$  cresce. Sendo assim, a função objetivo só assume valores reais quando  $(\mathbf{x} + \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ . Logo, temos que

$$L(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \mathbf{1}^T \mathbf{x} + \bar{\mathbf{r}}^T (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi}), & \text{se } \mathbf{x} + \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \\ -\infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Por dualidade forte, temos que (39) é igual ao valor ótimo da função objetivo original. Portanto, reescrevemos (39) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{x} + \bar{\mathbf{r}}^T (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi}) \\ \text{s. a} \quad & \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

Para fins didáticos, podemos substituir o termo  $\mathbf{1}^T \mathbf{x}$  da função objetivo por  $\mathbf{1}^T (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi})$ , já que  $\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x}$ . Logo, temos que

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}} \quad & (\mathbf{1} + \bar{\mathbf{r}})^T (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi}) \\ \text{s. a} \quad & \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

Considerando uma alocação fixa  $\mathbf{x}$  e as soluções ótimas do segundo nível, primal  $\mathbf{r}^*$  e duais  $\boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\theta}^*$ , por dualidade garantimos que

$$(\mathbf{1} + \mathbf{r}^*)^T \mathbf{x} = \mathbf{1}^T \mathbf{x} + \bar{\mathbf{r}}^T (\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\pi}^*) - \boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\theta}^* + \boldsymbol{\pi}^*) \geq \mathbf{1}^T \mathbf{x} + \bar{\mathbf{r}}^T (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi})$$

para toda solução  $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}$  tal que  $\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x}$ . Logo, para garantir que  $(\mathbf{1} + \mathbf{r}^*)^T \mathbf{x} \geq P_1$ , basta exigir que  $\mathbf{1}^T \mathbf{x} + \bar{\mathbf{r}}^T (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi})$ , e impondo que  $\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x}$  e  $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}$ . Sendo assim, o problema bi-nível pode ser reescrito como a sua contraparte robusta

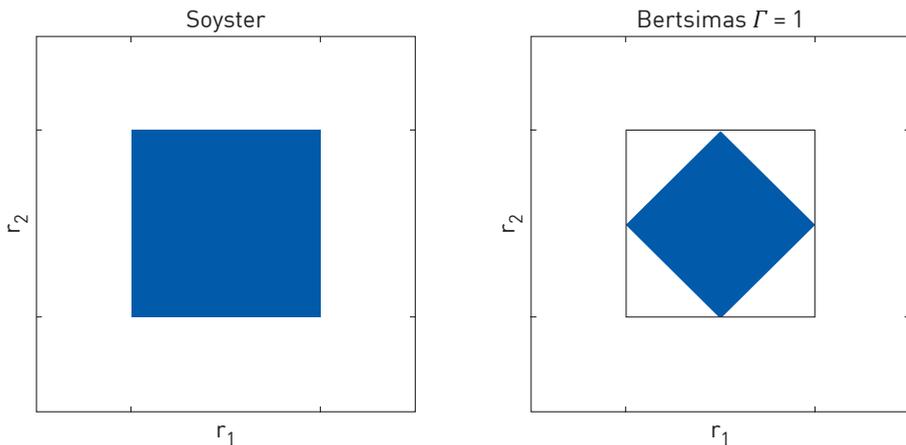
$$\begin{aligned} \min_{CMR, \mathbf{x}} \quad & CMR \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = P + CMR \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{x} + \bar{\mathbf{r}}^T (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi}) \geq P_1 \\ & \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x} \\ & CMR \geq 0 \end{aligned} \tag{41}$$

Note que a contraparte robusta é um problema de programação linear que pode ser resolvido eficientemente pelos solvers disponíveis no mercado.

## Modelo Bertsimas

A desvantagem do modelo Soyster é a obtenção de uma solução excessivamente conservadora, que considera o pior caso de todos os retornos dos ativos acontecendo ao mesmo tempo, i.e., um cenário extremamente pessimista e improvável. Proteger-se contra esse cenário de estresse pode inviabilizar a operação de uma seguradora, já que geraria um CMR muito elevado. Para flexibilizar o nível de conservadorismo, o conjunto de incerteza proposta por (Dimitris Bertsimas and Sim 2004) é um subconjunto do modelo (Soyster 1973a) Soyster 1973a. Nesse caso, o modelo só admite que no máximo  $\Gamma$  ativos assumam ao mesmo tempo o pior caso de retorno.

Na figura abaixo, temos um gráfico comparativo entre os conjuntos de incerteza de um modelo Soyster, com dois ativos, e de um modelo Bertsimas, com dois ativos e  $\Gamma = 1$ .



Formalmente, definimos então o novo conjunto de incerteza como

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} r_i \geq \bar{r}_i - z_i \varepsilon_i, \quad \forall i = 1, \dots, N \\ r_i \leq \bar{r}_i + z_i \varepsilon_i, \quad \forall i = 1, \dots, N \\ 0 \leq z_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, N \\ \sum_{i=1}^N z_i \leq \Gamma \end{array} \right. \right\}$$

ou vetorialmente, como

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \mathbf{r} \geq \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{z} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \mathbf{r} \leq \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{z} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^\top \mathbf{z} \leq \Gamma \end{array} \right. \right\},$$

onde  $E = \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon})$  é uma matriz onde  $E_{ii} = \varepsilon_i, \forall i = 1, \dots, N$  e  $E_{ij} = 0, \forall i \neq j$ .

Note que se a variável auxiliar  $z_i = 0$ , então o retorno do ativo  $i$  assume o seu valor nominal  $r_i = \bar{r}_i$ . Por outro lado, se  $z_i = 1$ , o retorno  $r_i$  poderá assumir qualquer valor dentro do intervalo  $[\bar{r}_i - z_i \varepsilon_i, \bar{r}_i + z_i \varepsilon_i]$ . Como  $\sum_{i=1}^N z_i \leq \Gamma$ , podemos controlar o nível de conservadorismo do modelo mexendo apenas no valor de  $\Gamma$ . De fato, se  $\Gamma = 0$ , o nível de conservadorismo é nulo já que os retornos assumem os seus valores nominais  $\bar{r}_i$ . No entanto, se  $\Gamma = N$  temos um nível máximo de conservadorismo onde todos onde  $r_i \in [\bar{r}_i - z_i \varepsilon_i, \bar{r}_i + z_i \varepsilon_i], \forall i = 1, \dots, N$ . Para encontrar a contraparte robusta, devemos escrever o problema de segundo nível, i.e.,  $\min_{\mathbf{r} \in \mathcal{U}} (\mathbf{1} + \mathbf{r})^\top \mathbf{x}$ , como o problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{r}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}} & (\mathbf{1} + \mathbf{r})^\top \mathbf{x} \\ \text{s. a} & \mathbf{r} \leq \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{z} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad : \boldsymbol{\pi} \\ & \mathbf{r} \geq \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{z} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad : \boldsymbol{\theta} \\ & \mathbf{1}^\top \mathbf{z} \leq \Gamma \quad : \lambda \\ & \mathbf{z} \leq \mathbf{1}. \quad : \boldsymbol{\gamma} \end{array}$$

Da mesma forma que antes, obtemos o lagrangeano

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda) = \min_{\mathbf{r}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}} & (\mathbf{1} + \mathbf{r})^\top \mathbf{x} + \boldsymbol{\pi}^\top (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{z} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon})) - \boldsymbol{\theta}^\top (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{z} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon})) \\ & + \lambda (\mathbf{1}^\top \mathbf{z} - \Gamma) + \boldsymbol{\gamma}^\top (\mathbf{z} - \mathbf{1}). \end{aligned}$$

Rearranjando os termos, temos que

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda) = \min_{\mathbf{r}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}} & \mathbf{r}^\top (\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{z}^\top (\boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{1} - \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi})) + \mathbf{1}^\top \mathbf{x} \\ & + \bar{\mathbf{r}}^\top (\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}) - \lambda \Gamma - \mathbf{1}^\top \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned}$$

Para  $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda \geq \mathbf{0}$ , é possível mostrar que o valor ótimo da função objetivo assume valores reais (diferentes de “ $-\infty$ ”) se:  $\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{1} - \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi}) \geq \mathbf{0}$ . Nesse caso,  $\mathbf{r}^\top (\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi}) = 0$  e a solução ótima  $\mathbf{z}^*$  será escolhida de forma que

$\mathbf{z}^T(\boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{1} - \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi})) = 0$ , já que estamos minimizando a função objetivo. Dito isso, para  $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda \geq \mathbf{0}$ , temos que

$$L(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda) = \begin{cases} \mathbf{1}^T \mathbf{x} + \bar{\mathbf{r}}^T(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}) - \lambda \Gamma - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\gamma}, & \text{se } \begin{cases} \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{1} - \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi}) \geq \mathbf{0} \end{cases} \\ -\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Escrevendo agora o problema dual lagrangeano

$$\max_{\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda \geq \mathbf{0}} L(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda)$$

como um problema de programação linear, temos

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda \geq \mathbf{0}} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{x} + \bar{\mathbf{r}}^T(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}) - \lambda \Gamma - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\gamma} \\ \text{s. a} \quad & \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x} \\ & \boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{1} - \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi}) \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Para fins didáticos, podemos substituir o termo  $\mathbf{1}^T \mathbf{x}$  da função objetivo por  $\mathbf{1}^T(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi})$ , já que  $\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x}$ . Logo, temos que

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda \geq \mathbf{0}} \quad & (\mathbf{1} + \bar{\mathbf{r}})^T(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}) - \lambda \Gamma - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\gamma} \\ \text{s. a} \quad & \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x} \\ & \boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{1} - \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi}) \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

É possível mostrar que para toda solução dual viável onde  $(\mathbf{1} + \bar{\mathbf{r}})^T(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}) - \lambda \Gamma - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\gamma} \geq P_1$ ,  $\min_{\mathbf{r} \in \mathcal{U}} (\mathbf{1} + \mathbf{r})^T \mathbf{x} \geq P_1$ . Utilizando teoria de dualidade temos que

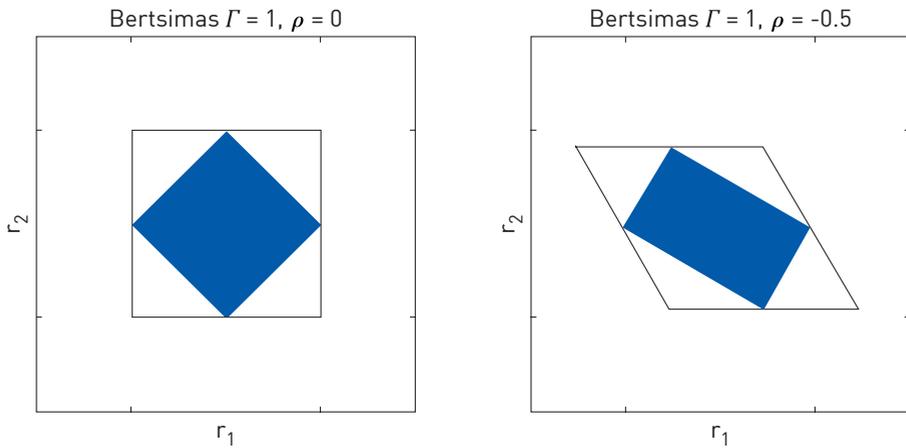
$$\min_{\mathbf{r} \in \mathcal{U}} (\mathbf{1} + \mathbf{r})^T \mathbf{x} = \max_{\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda \geq \mathbf{0}} L(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda) \geq (\mathbf{1} + \bar{\mathbf{r}})^T(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}) - \lambda \Gamma - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\gamma} \geq P_1$$

No problema original, substituímos o problema de segundo nível pela função objetivo dual e incluímos as restrições duais obtendo a contraparte robusta

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, CMR \geq \mathbf{0}} \quad & CMR \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = P + CMR \\ & (\mathbf{1} + \bar{\mathbf{r}})^T(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}) - \lambda \Gamma - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\gamma} \geq P_1 \\ & \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x} \\ & \boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{1} - \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi}) \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{42}$$

## Modelo Bertsimas com Correlação

Podemos interpretar os retornos como  $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\eta}$ , onde  $\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}] = \mathbf{0}$  e  $\eta_i \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i], \forall i = 1, \dots, N$  são independentes e simetricamente distribuídos. Para incorporar a correlação entre os ativos considerados, podemos redefinir os limites como  $\boldsymbol{\eta} \in [-\boldsymbol{\Sigma}^{0.5}\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Sigma}^{0.5}\boldsymbol{\varepsilon}]$ , onde  $\boldsymbol{\Sigma}$  é a matriz de variâncias e covariâncias de  $\mathbf{r}$ . Na figura abaixo, temos um gráfico comparativo entre os conjuntos de incerteza com os mesmos limites, porém com correlação  $\rho$  nula, e  $\rho = -0.5$ .



Conjuntos de incerteza poliédricos

Formalmente, definimos então o novo conjunto de incerteza como

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \mathbf{r} \geq \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{z} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{0.5}\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \mathbf{r} \leq \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{z} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{0.5}\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T \mathbf{z} \leq \Gamma \end{array} \right. \right\},$$

Neste caso, podemos reformular o problema do segundo nível  $\min_{\mathbf{r} \in \mathcal{U}} (\mathbf{1} + \mathbf{r})^T \mathbf{x}$ , como o problema de programação linear

$$\begin{array}{ll}
\min_{\mathbf{r}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}} & (\mathbf{1} + \mathbf{r})^\top \mathbf{x} \\
s. a & \mathbf{r} \leq \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{z} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon}) \quad : \boldsymbol{\pi} \\
& \mathbf{r} \geq \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{z} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon}) \quad : \boldsymbol{\theta} \\
& \mathbf{1}^\top \mathbf{z} \leq \Gamma \quad : \lambda \\
& \mathbf{z} \leq \mathbf{1}. \quad : \boldsymbol{\gamma}
\end{array}$$

Da mesma forma que antes, obtemos o lagrangeano

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda) &= \min_{\mathbf{r}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}} (\mathbf{1} + \mathbf{r})^\top \mathbf{x} + \boldsymbol{\pi}^\top (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{z} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon})) \\
&\quad - \boldsymbol{\theta}^\top (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{z} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon})) + \lambda (1^\top \mathbf{z} - \Gamma) + \boldsymbol{\gamma}^\top (\mathbf{z} - \mathbf{1})
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos, temos que

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda) &= \min_{\mathbf{r}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}} \mathbf{r}^\top (\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{z}^\top (\boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{1} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi})) \\
&\quad + \mathbf{1}^\top \mathbf{x} + \bar{\mathbf{r}}^\top (\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}) - \lambda \Gamma - \mathbf{1}^\top \boldsymbol{\gamma}
\end{aligned}$$

Para  $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda \geq \mathbf{0}$ , é possível mostrar que o valor ótimo da função objetivo assume valores reais (diferentes de “-∞”) se:  $\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{1} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi}) \geq \mathbf{0}$ . Nesse caso,  $\mathbf{r}^\top (\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi}) = 0$  e a solução ótima  $\mathbf{z}^*$  será escolhida de forma que  $\mathbf{z}^\top (\boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{1} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi})) = 0$ , já que estamos minimizando a função objetivo. Dito isso, para  $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda \geq \mathbf{0}$ , temos que

$$L(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda) = \begin{cases} \mathbf{1}^\top \mathbf{x} + \bar{\mathbf{r}}^\top (\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}) - \lambda \Gamma - \mathbf{1}^\top \boldsymbol{\gamma}, & \text{se } \begin{cases} \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{1} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi}) \geq \mathbf{0} \end{cases} \\ -\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Escrevendo agora o problema dual lagrangeano  $\max_{\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda \geq \mathbf{0}} L(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda)$  como um problema de programação linear, temos

$$\begin{array}{ll}
\max_{\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda \geq \mathbf{0}} & \mathbf{1}^\top \mathbf{x} + \bar{\mathbf{r}}^\top (\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}) - \lambda \Gamma - \mathbf{1}^\top \boldsymbol{\gamma} \\
s. a & \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x} \\
& \boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{1} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi}) \geq \mathbf{0}
\end{array}$$

Para fins didáticos, podemos substituir o termo  $\mathbf{1}^T \mathbf{x}$  da função objetivo por  $\mathbf{1}^T(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\pi})$ , já que  $\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\pi} = \mathbf{x}$ . Logo, temos que

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda \geq 0} \quad & (\mathbf{1} + \bar{\mathbf{r}})^T(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\pi}) - \lambda \Gamma - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\gamma} \\ \text{s. a} \quad & \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x} \\ & \boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{1} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi}) \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

É possível mostrar que para toda solução dual viável onde  $\mathbf{1}^T \mathbf{x} + \bar{\mathbf{r}}^T(\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{\theta}) - \lambda \Gamma - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\gamma} \geq P_1$ , temos que  $\min_{\mathbf{r} \in \mathcal{U}} (\mathbf{1} + \mathbf{r})^T \mathbf{x} \geq P_1$ . De fato, utilizando teoria de dualidade temos que

$$\min_{\mathbf{r} \in \mathcal{U}} (\mathbf{1} + \mathbf{r})^T \mathbf{x} = \max_{\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda \geq 0} L(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda) \geq (\mathbf{1} + \bar{\mathbf{r}})^T(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\pi}) - \lambda \Gamma - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\gamma} \geq P_1$$

No problema original, substituímos o problema de segundo nível pela função objetivo dual e incluímos as restrições duais obtendo a contraparte robusta

$$\begin{aligned} \min_x \quad & CMR \\ \text{s. a} \quad & CMR \geq 0 \\ & \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \lambda \geq 0 \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = P + CMR \\ & (\mathbf{1} + \bar{\mathbf{r}})^T(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\pi}) - \lambda \Gamma - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\gamma} \geq P_1 \\ & \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x} \\ & \boldsymbol{\gamma} + \lambda \mathbf{1} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{0.5} \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\pi}) \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{43}$$

Note que o problema [43] generaliza todos os outros apresentados. De fato, se  $\boldsymbol{\Sigma}$  for a matriz identidade, o problema [43] é equivalente ao problema [42]. Além disso, se  $\Gamma = N$  o modelo seria equivalente ao modelo [41].

## IV. MODELAGEM DO PASSIVO

No modelo interno parcial proposto, obtemos o valor do capital baseado em risco utilizando a mesma equação disposto em Gatzert & Martin (2012) e apresentada na equação (1) do capítulo I:

$$\begin{aligned}\Delta NAV(t) &= \max(NAV(t) - (NAV|choque), 0) \\ &= \max\left((A(t) - P_{me}(t)) - (A|choque(t) - P|choque(t)), 0\right)\end{aligned}\tag{44}$$

onde:

NAV é o ativo líquido na data da avaliação, i.e., a diferença entre ativos e provisões técnicas, sem considerar a margem de risco;

A(t) é o ativo na data da avaliação;

P<sub>me</sub>(t) é a provisão técnica na data da avaliação, i.e., a melhor estimativa dos compromissos futuros da seguradora;

A|choque(t) é o valor do ativo dado o cenário de choque na data da avaliação; e

P|choque(t) é o valor da provisão técnica dado o cenário de choque na data da avaliação.

Assim, temos que mensurar a melhor estimativa das obrigações da seguradora com os segurados e assistidos na data da avaliação e essas obrigações sob uma situação de estresse. Essa última, para termos uma base comparativa como o regime Solvência II, calculamos assumindo um VaR de 99,5% de nível de confiança, que, neste trabalho, configura o cenário de choque do passivo sob os riscos de mercado e subscrição.

Para obtenção dos valores de passivo, trabalhamos com simulação de Monte Carlo, modelando as incertezas que compõem o fluxo de passivo, sejam elas, taxa de juros,

taxas de mortalidade e taxa de cancelamento. Além disso, a simulação de Monte Carlo é necessária para avaliação do risco idiossincrático no processo de cálculo do capital baseado em risco, que é realizada aplicando o nosso modelo interno em massas de tamanhos distintos.

Os produtos avaliados neste trabalho são planos de contribuição definida, onde a seguradora garante a taxa de juros durante o período de diferimento e um fator de cálculo de anuidade, ambos definidos no contrato, para transformação do montante acumulado na provisão técnica em renda mensal na data de aposentadoria. A taxa de juros e a tábua de mortalidade, que compõem o fator de cálculo da anuidade, bem como o índice de preços que reajustam anualmente os valores do plano, são fixados na data de assinatura do contrato, com base na regulamentação do Conselho Nacional de Seguros Privados. A comercialização desse tipo de produto era bastante comum até o início dos anos 2000, quando, então, os planos unit-linked<sup>5</sup> foram desenvolvidos. Neste trabalho, assumimos que os produtos não têm participação nos lucros (excedentes financeiros) para os segurados. A modelagem de passivo toma como base o modelo proposto por Neves & Melo (2016) para mensuração das provisões técnicas de planos de anuidades brasileiros. Conforme esses autores, no Brasil, em função da regulamentação vigente, companhias devem mensurar dois tipos de provisões: provisão contratual e provisão econômica. A primeira é calculada com base na taxa de juros e taxas de mortalidade fixadas no contrato e a última corresponde a melhor estimativa dos compromissos futuros da companhia, onde, sob a avaliação de solvência, as hipóteses sobre as taxas de juros, mortalidade e cancelamento têm que ser estimadas utilizando informações atuais e previsões realistas.

Neves & Melo (2016) utilizaram uma abordagem estocástica em tempo contínuo, considerando os conceitos da IAIS e do regime Solvência II para mensuração da melhor estimativa dos compromissos futuros de uma seguradora. Os autores afirmam que o mercado brasileiro de anuidade é incompleto e que as seguradoras não podem aplicar estratégias ótimas de hedge para replicar perfeitamente os fluxos de caixa futuros. Ademais, o modelo considera que o comportamento do segurado no mercado brasileiro não é ótimo, como demonstrado Neves et al. (2014). Devido às características dos

---

<sup>5</sup> PGBL (Plano Gerador de Benefícios Livre) e VGBL (Vida Gerador de Benefícios Livre), em especial.

planos e do mercado, a melhor estimativa da provisão econômica, no artigo, é obtida por meio de expectativa condicional usando medida de probabilidade real.

Nos contratos avaliados, em caso de cancelamento durante o período de diferimento, o valor do resgate é exatamente o valor da provisão contratual, o mesmo ocorre em caso de morte do segurado naquele período. Assim, usando o Teorema de Cantelli [Cantelli, 1914 e Milbrodt & Stracke, 1997], as taxas de cancelamento e de mortalidade devem ser aplicadas na fórmula de cálculo da provisão econômica.

Para entendermos o modelo de mensuração do passivo, temos que entender as transições possíveis entre estágios para segurados e assistidos do plano de previdência estudado. A Figura 1 apresenta os estágios e transições durante o período de diferimento e a Figura 2 durante a fase de pagamento de renda. Há três possíveis estágios durante o período de diferimento: (1) segurado, (2) morto e (3) cancelado, e apenas dois durante o período de pagamento da renda: (1) assistido e (2) morto.

Figura 1: Estados para os plano de anuidade durante o período de diferimento, onde  $\mu^{(12)}$  é a força de mortalidade e  $\mu^{(13)}$  é a força de cancelamento.

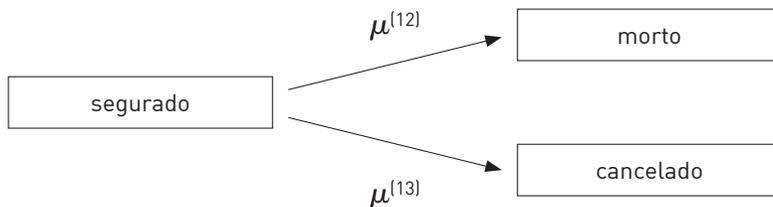
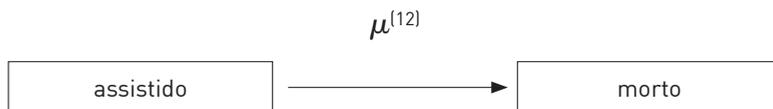


Figura 2: Estados para os plano de anuidade durante o período de concessão a renda, onde  $\mu^{(12)}$  é a força de mortalidade.



Para obtenção da expressão de cálculo para melhor estimativa da provisão econômica, tem-se que apresentar a fórmula de cálculo da provisão contratual, haja vista ser o valor do benefício a ser recebido pelo segurado em caso de resgate ou pelo beneficiário em caso de morte durante o período de diferimento. A provisão contratual, para uma anuidade vitalícia, é denotada por Neves & Melo (2016) da seguinte forma:

$$\begin{cases} P_c(t) = \int_{|t,n)} \exp\left(-\int_t^s r^* du\right) (-dp^1(s)) + \int_n^\infty \exp\left(-\int_t^s r^* du - \int_t^s \mu_{x+u}^{*(12)} du\right) db^1(s) & \text{if } t < n; \\ P_c(t) = \int_n^\infty \exp\left(-\int_t^s r^* du - \int_t^s \mu_{x+u}^{*(12)} du\right) db^1(s) & \text{if } t \geq n; \end{cases}$$

onde

$P_c(t)$  é a provisão contratual no tempo  $t$ , sendo mensurável e determinista;

$t$  é a data de avaliação;

$x$  é a idade do segurado na data de avaliação;

$x + n$  é a idade de aposentadoria;

$n$  é o período de diferimento;

$r^*$  é o valor da taxa de juros fixado em contrato;

$\mu_{x+u}^{*(12)}$  é a força de mortalidade fixada em contrato para uma pessoa de idade  $x + u$ ;

$dp^1(s)$  é o valor do prêmio pago no tempo  $s$ , sendo  $dp^1(s) = 0 \forall s \geq n$ ; e

$db^1(s)$  é o valor da renda paga no tempo  $s$ , sendo  $db^1(s) = 0 \forall s < n$ .

A provisão econômica, que corresponde a melhor estimativa dos compromissos futuros da seguradora, é obtida como se segue, considerando que as taxas de juros, mortalidade e cancelamento são previstas com base em informações atuais e previsões realistas, assumindo que o comportamento do segurado não é ótimo e usando a medida de probabilidade real sob o espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$  :

$$P_{me}(t) = E \left( \left[ \int_{[t,n)} \exp \left( - \int_t^s r_u du - \int_t^s (\mu_{x+u}^{(12)} + \mu_{x+u}^{(13)}) du \right) (-dp^1(s) + \mu_{x+s}^{(12)} P_c(s) ds + \mu_{x+s}^{(13)} P_c(s) ds \right] + \left[ \int_n^\infty \exp \left( - \int_t^s r_u du - \int_t^s (\mu_{x+u}^{(12)} + \mu_{x+u}^{(13)}) du \right) db^1(s) \right] | F_t \right)$$

onde

$P_{me}(t)$  é a melhor estimativa do valor da provisão econômica no tempo  $t$ ;

$P_c(t)$  é a provisão contratual no tempo  $t$ , sendo mensurável e determinista;

$t$  é a data de avaliação;

$x$  é a idade do segurado na data de avaliação;

$x + n$  é a idade de aposentadoria;

$n$  é o período de diferimento;

$r_u$  é a taxa de juros real no momento no tempo  $u$ ;

$\mu_{x+u}^{(12)}$  é a força de mortalidade na idade  $x + u$ ;

$\mu_{x+u}^{(13)}$  é a força de cancelamento na idade  $x + u$ , sendo  $\mu_{x+u}^{(13)} = 0 \forall u \geq n$ ; e

$r_u, \mu_{x+u}^{(12)}, \mu_{x+u}^{(13)}$  são estocásticas e previstas sob a medida de probabilidade real .

No modelo proposto, precisamos calcular o passivo em uma situação de estresse, na data de avaliação, que alimentará nosso modelo de otimização robusta. Para isso, calculamos o *Value-at-risk (VaR)*, com nível de confiança de 99,5%, dos compromissos futuros da seguradora:

$$\begin{aligned}
P|choque(t) = VaR_{0,005} & \left( \left[ \int_{[t,n]} \exp \left( - \int_t^s r_u du - \int_t^s (\mu_{x+u}^{(12)} + \mu_{x+u}^{(13)}) du \right) \left( -dp^1(s) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \mu_{x+s}^{(12)} P_c(s) ds + \mu_{x+s}^{(13)} P_c(s) ds \right) \right] \right. \\
& \left. + \left[ \int_n^\infty \exp \left( - \int_t^s r_u du - \int_t^s (\mu_{x+u}^{(12)} + \mu_{x+u}^{(13)}) du \right) db^1(s) \right] |F_t \right)
\end{aligned}$$

Para previsão das taxas de juros, que é utilizada no cálculo da melhor estimativa do valor da provisão econômica e do valor da provisão técnica dado o cenário de choque, assumimos que a taxa de juros de curto prazo livre de risco evolui de acordo como o modelo clássico CIR (Cox et al., 1985). Esse modelo afim de um fator segue a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dr_t = \kappa(\mu_r - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_t \quad (45)$$

onde

$r_t$  é a taxa de juros de curto prazo livre de risco no tempo  $t$ ;

$\kappa$  é a velocidade de ajustamento;

$\mu_r$  é a locação central ou taxa de juros de longo prazo;

$\sigma_r$  é a volatilidade;

$\mu_r$ ,  $\sigma_r$  e  $\kappa$  são constantes, com  $\kappa\mu_r \geq 0$  e  $\sigma_r^2 > 0$ ;

$2\kappa\mu_r \geq \sigma_r^2$ , para as taxas não serem negativas; e

$dW_t$  é o movimento P-Browniano.

Para estimar os parâmetros do modelo CIR (eq. (5)), aplicamos o método dos momentos generalizados na forma apresentada por Chan et al. (1992). A base de dados utilizada é composta pelas taxas de curto prazo de seis meses para curva de cupom de

IPCA, de setembro de 2003 a dezembro de 2015, obtida na forma do apresentado em Franklin et al. (2012). Em seguida, por meio de simulação de Monte Carlo, prevemos as taxas de juros de curto prazo livre de risco para períodos futuros que são inputs das equações (3) e (4).

Para previsão das taxas de mortalidade, vamos assumir que probabilidades de morte no ano de avaliação são aquelas encontradas na tábua de mortalidade BR-EMS 2010 – cobertura de sobrevivência (Oliveira et al., 2012), que foi construída a partir da experiência do mercado segurador brasileiro. Para previsão dos ganhos futuros de longevidade, e, por conseguinte, das taxas de mortalidade para os anos seguintes, usamos o modelo estrutural multivariado proposto por Neves et al. (2016). Nesse artigo, os autores estimam o ganho de longevidade a partir de 2010, haja vista que utilizam dados de mortalidade da população brasileira até 2009.

Para as taxas de mortalidade utilizadas nas equações (3) e (4), multiplica-se os fatores de ganhos de longevidade encontrados no citado artigo pelas taxas centrais de mortalidade provenientes da tábua de mortalidade BR-EMS 2010 – cobertura de sobrevivência, para calcular as probabilidades de morte do ano de 2016 em diante. Assumimos, ainda, que as taxas de mortalidade são independentes do risco financeiro e das taxas de cancelamento.

Para previsão das taxas de cancelamento, aplicaremos o modelo de Neves et al. (2014). Nesse artigo, os autores modelam as taxas de cancelamento de planos de anuidade brasileiros usando um modelo estocástico multiestágio que prevê as taxas de cancelamento por meio de simulação de Monte Carlo após a execução dos seguintes processos: modelos lineares generalizados (GLM), ARMA-GARCH e cópulas multivariadas. Como requerido no regime Solvência II, o modelo assume que as taxas de cancelamento não são independentes do mercado financeiro, pois a taxa de juros é uma variável explicativa no passo GLM. Além disso, o modelo considera que as taxas de cancelamento são afetadas por crises financeiras. Isso se dá pela utilização dos resíduos das taxas de retorno do índice de mercado de ações brasileiro (Ibovespa) como uma das distribuições marginais utilizadas na modelagem de dependência através de cópulas multivariadas.

Para previsão das taxas de cancelamento futuras, usadas como insumo nas equações (3) e (4), a base de dados utilizada consiste nas taxas de cancelamento mensais de planos de anuidades de uma relevante seguradora brasileira, de janeiro de 2006 até dezembro de 2011, as taxas de juros de curto prazo observadas e o Ibovespa até dezembro de 2015. Como trabalhamos com taxas de cancelamento anual, transformamos as taxas de cancelamento mensais em anuais.

### Mensuração do Passivo

Para obtenção dos valores de provisão necessárias, utilizamos o pacote estatístico R. Para obtenção do valor da provisão contratual, haja vista que as taxas de juros e de mortalidade são determinísticas, assumindo o método prospectivo e uma anuidade vitalícia simples, utilizamos a seguinte expressão:

$$P_c(t) = b(1+i)^{-n} \left( \sum_{u=1}^{\infty} (1+i)^{-u} {}_u p_{x+n} \right) - pr \sum_{s=1}^n (1+i)^{-s} \quad (46)$$

onde

$P_c(t)$  é a provisão contratual no tempo  $t$ ;

$t$  é a data de avaliação;

$x$  é a idade do segurado na data de avaliação;

$x + n$  é a idade de aposentadoria;

$n$  é o período de diferimento;

$i$  é o valor da taxa de juros fixado em contrato;

${}_u p_{x+n}$  é a probabilidade de um pessoa de idade  $x + n$  chegar vivo à idade  $x + n + u$ , obtida com base na tábua de mortalidade fixada no contrato;

$pr$  é o valor do prêmio pago; e

$b$  é o valor da renda.

Para obtenção da provisão econômica usamos simulação da Monte Carlo, dada a estocasticidade presente das taxas de mortalidade, taxa de juros e taxas de juros, usadas na mensuração da provisão econômica (eq.(3)) e do passivo em uma situação de estresse (eq.(4)).

Para simulação, devemos, anteriormente, fixar os parâmetros de cada segurado a ser simulado, idade de entrada no plano, idade atual, idade de aposentadoria e renda anual pretendida, bem como as taxas de juros e taxas de mortalidade fixados no contrato. O algoritmo usado na simulação para cada segurado é sintetizado a seguir:

1. entre com as características do plano e do segurado  $k$ , onde  $k \in [1, \dots, \text{tamanho da massa}]$ : renda anual ( $b$ ), tábua de mortalidade e taxa de juros garantida no contrato, idade de entrada no plano ( $x-d$ ), idade atual ( $x$ ) e idade de aposentadoria ( $x+n$ ).
2. calcule o valor do prêmio necessário para atingir a renda  $b$  na data de aposentadoria, dado os parâmetros técnicos contratados:

$$pr = \frac{b(1+i)^{-(n+d)} \left( \sum_{u=1}^{\infty} (1+i)^{-u} {}_u p_{x+n} \right)}{\sum_{s=1}^{n+d} (1+i)^{-s}}$$

onde  ${}_u p_{x+n}$  é obtido com base na tábua de mortalidade fixada no contrato e  $i$  é a taxa de juros contratual.

3. simule  $y$  vezes para  $k$ , como se segue:

$$\text{- início: } t = 0 \text{ e } \text{despesa}_t = 0$$

- (a) gere um valor aleatório para a taxa de mortalidade para idade  $x+t$  no tempo  $t$  ( $m_{x+t,t}$ ), utilizando o modelo de previsão de taxa de mortalidade;
- (b) obtenha por aproximação a probabilidade de morte:  $q_{x+t,t} = \frac{m_{x+t,t}}{1 + m_{x+t,t}/2}$ .
- (c) gere um valor aleatório para a probabilidade de cancelamento para idade  $x+t$  no tempo  $t$  ( $w_{x+t,t}$ ), utilizando o modelo de previsão de taxa de cancelamento, após a data de aposentadoria fixada assume-se  $w_{x+t,t} = 0$ ;

(d) obtenha, por aproximação, a probabilidade de morte e de cancelamento considerando os dois decrementos:

$$q'_{x+t,t} = q_{x+t,t}(1 - 0,5w_{x+t,t}); \text{ e } w'_{x+t,t} = w_{x+t,t}(1 - 0,5q_{x+t,t})$$

(e) gere um valor aleatório para expectativa do preço ( $C(t)$ ), na data da avaliação, de uma unidade de um título zero cupom livre de risco, com data de vencimento em  $t + 1$ , obtida com bases no modelo CIR. Esse valor é obtido usando as expressões matemáticas dadas em Cox et al. (1985) e as taxas de juros de curto prazo simuladas.

(f) calcule a provisão contratual em  $t + 1$  ( $P_c(t)$ ) utilizando a eq.(6), após a data de aposentadoria considere  $P_c(t) = 0$

(g) gere duas variáveis aleatórias uniformes  $[0, 1]$  independentes,  $unif_1$  e  $unif_2$ ;

- se  $unif_1 > q'_{x+t,t}$  e  $unif_2 > w'_{x+t,t}$  então:

- $despesa_t = despesa_t + C(t)(renda-pr)$

- faça  $t = t + 1$  e volte para (a).

- caso contrário:

- faça  $despesa_t = despesa_t + C(t)P_c(t)$ ; e

- termine a simulação  $i$  e vá para simulação  $i + 1$  em um total de  $y$  simulações para cada segurado  $k$ .

4. inicie a simulação do próximo segurado  $k + 1$ .

Cada simulação gera  $y$  valores presentes de fluxo de caixa para cada segurado  $k$ , a soma desses  $k$  valores produz a distribuição de tamanho  $y$  do valor presente das despesas futuras da companhia. Assumimos que o valor esperado dessa distribuição é a melhor estimativa do valor da provisão econômica na data da avaliação ( $P_{me}(t)$ ) e que seu VaR de 99,5% corresponde ao passivo em uma situação de estresse ( $P|choque(t)$ ).

## V. ESTUDOS DE CASO

O objetivo principal do trabalho é propor um modelo teórico e apresentar uma aplicação prática para elaboração de um modelo interno de mensuração do valor de requerimento de capital de solvência que vise ao mesmo tempo uma alocação ótima da carteira de ativos e dos recursos dos acionistas da companhia de seguros. Portanto, por meio de otimização sob incerteza, nosso modelo procura uma carteira ótima de ativos que minimize o capital baseado em risco.

Neste capítulo são apresentados estudos de casos onde o modelo teórico proposto é aplicado a massas de segurados de tamanhos distintos. Dessa forma, o perfil da massa escolhida e as características do plano de previdência são fundamentais para os resultados obtidas. Em função disso, escolhemos segurados com perfil bem comum à população que compra planos de previdência privada e bases técnicas usuais.

As massas hipotéticas de segurados escolhidas são formadas por homens de 40 anos, na data base do estudo (janeiro de 2016), e que entraram no plano de previdência de contribuição definida, já descrito no capítulo IV, aos 25 anos, e, considerando 35 anos de contribuição, aposentar-se-ão aos 60 anos de idade. Trabalhamos com massas de três tamanhos distintos: 100, 1.000 e 10.000 segurados.

O plano de previdência hipotético garante uma taxa de juros real de 6% ao ano e obtém o fator de cálculo de anuidade por meio da tábua Annuity 2000 Mortality Table (AT 2000) para o sexo masculino e utilizando a mesma taxa de juros real. Escolhemos essa taxa de juros por ser o limite máximo permitido pelo Conselho Nacional de Seguros Privados, órgão regulador de seguros e previdência no Brasil, e porque quando aplicamos o modelo CIR (ver capítulo IV), a taxa de juros de longo prazo obtida foi de 6,1% a.a.. Quanto à escolha da tábua de mortalidade, a AT 2000 é, atualmente, uma das mais usadas pelas seguradoras brasileiras em seus produtos de anuidade.

Adotamos também, no nosso estudo de caso, uma renda vitalícia de R\$ 50.000,00, que implica em uma necessidade, dadas as características das massas e das bases técnicas, de contribuição anual de R\$ 5.169,84.

Na primeira parte deste capítulo, apresentamos apenas os resultados referente ao risco de subscrição (risco de passivo). Com as bases técnicas dos planos, utilizando as equações do capítulo IV, calculamos a provisão contratual -  $P_c(t)$ , que é insumo para o cálculo da melhor estimativa dos compromissos futuros da seguradora -  $P_{me}(t)$ . Realizadas as previsões de taxas de cancelamento, taxas de mortalidade e taxas de juros, nos termos já descritos no capítulo IV, e aplicando, respectivamente, as equações (3) e (4) do capítulo IV, obtemos  $P_{me}(t)$  e o valor da provisão técnica dado o cenário de choque (provisão econômica) -  $P|choque(t)$ , calculada assumindo um VaR com nível de confiança de 99,5%. Esses valores de provisão compõem o cálculo do capital baseado em risco do nosso modelo interno parcial. Vale a pena ressaltar que  $P|choque(t)-P_{me}(t)$  é o valor do capital baseado em risco de subscrição, caso modelássemos apenas esse risco. Na Tabela 1, podemos verificar os valores dessas provisões:

**Tabela 1. Provisões obtidas para as massas estudadas**

Tamanho da massa de segurados	$P_c(t)$	$P_{me}(t)$	$P choque(t)$
100	R\$ 12.033.310,00	R\$ 12.251.154,00	R\$ 12.445.000,70
1.000	R\$ 120.333.100,00	R\$ 122.517.950,00	R\$ 124.024.533,00
10.000	R\$ 1.203.331.000,00	R\$ 1.255.193.333,00	R\$ 1,229,435.985,00

Na Tabela 2, obteremos, apenas para efeito de análise do risco idiossincrático, obtemos os valores do capital baseado em risco de subscrição e comparamos tais valores com o valor da provisão econômica.

**Tabela 2. Valor do capital baseado em risco de subscrição e a relação entre ele e a provisão econômica**

Tamanho da massa de segurados	Capital baseado em risco de subscrição - $CBRS(t)$	$\frac{CBRS(t)}{P_{me}(t)}$
100	R\$ 203.846,70	1,66%
1.000	R\$ 1.506.603,00	1,23%
10.000	R\$ 4.242.652,00	0,35%

Com a análise da Tabela 2, fica claro que, relativamente, quando menor o tamanho da massa maior é o risco de subscrição, obtido considerando os riscos de sobrevivência, dos ativos e assistidos, após a data de aposentadoria, cancelamento dos ativos e de taxa de juros. Com aumento da massa, elimina-se grande parte do risco idiossincrático, restando apenas os demais riscos.

Apresentado separadamente os resultados do risco de passivo para os casos em estudo, passamos a analisar os resultados do modelo de otimização robusta, onde obtemos o valor de requerimento de capital de solvência visando ao mesmo tempo uma alocação ótima da carteira de ativos. Para compatibilizar o modelo estocástico do passivo com o modelo de otimização robusta, precisamos de uma estimativa conservadora do passivo ao final de 1 ano. Para isso, podemos calcular o valor futuro do  $P|choque(t)$ , i.e., o passivo  $P_1$  definido no modelo de otimização será calculado como  $P_1 = (1 + r_{meta\_atuarial}) \cdot P|choque(t)$ , onde a taxa de desconto  $r_{meta\_atuarial}$  é uma taxa fixa e igual a 6% acima da inflação, denotada aqui neste trabalho como  $\pi$ .

Neste estudo de caso, temos como objetivo determinar a alocação estratégica dos ativos divididos em 7 classes cujos retornos são modelados pela variação percentual de índices representativos. As classes consideradas são as seguintes:

- Renda fixa pós-fixada
- Renda fixa pré-fixada com maturidade menor que 1 ano
- Renda fixa pré-fixada com maturidade maior ou igual a 1 ano
- Renda fixa indexada à inflação (IPCA) com maturidade menor que 5 anos
- Renda fixa indexada à inflação (IPCA) com maturidade maior ou igual a 5 anos
- Ações
- Dólar

Considerando então o conjunto de ativos descritos acima, modelamos os respectivos retornos nominais entre os instantes de tempo  $t$  e  $t - 1$ , i.e.,  $r_{it}^{Nominal}$ ,  $\forall i = 1, \dots, 7$ , da seguinte forma para  $i$  igual a:

- CDI (Certificado de Depósito Interbancário) considerado como taxa livre de risco.
- Variação percentual do índice IRF-M 1 (Índice de Renda Fixa do Mercado para títulos com tempo para o vencimento menor que 1 ano).
- Variação percentual do índice IRF-M 1+ (Índice de Renda Fixa do Mercado para títulos com tempo para o vencimento maior ou igual a 1 ano).
- Variação percentual do índice IMA-B 5 (Índice de Mercado Ambima para títulos indexados a inflação com tempo para o vencimento menor que 5 anos).
- Variação percentual do índice IMA-B 5+ (Índice de Mercado Ambima para títulos indexados a inflação com tempo para o vencimento menor que 5 anos).
- Variação percentual do índice Ibovespa (Índice de ações da B3 – antiga BM&F Bovespa).
- Variação percentual da cotação do dólar em real.

Para que os retornos dos ativos fiquem comparáveis à meta atuarial de 6%, modelamos o retorno real acima da variação do IGP-M. Dessa forma definimos

$$r_{it} = \frac{1 + r_{it}^{Nominal}}{1 + \pi} - 1, \quad \forall i = 1, \dots, 7; t = 1, \dots, T.$$

Como um exemplo ilustrativo da usabilidade deste tipo de modelo, estimamos uma log-normal multivariada para o vetor de retornos reais (acima da inflação),  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)^T$ , e assumimos esta distribuição como o verdadeiro processo gerador de dados. Nessa estimação utilizamos 120 retornos mensais anualizados e estimamos a distribuição multivariada  $\ln(\mathbf{1} + \mathbf{r}) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  onde  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$  serão aqui considerados conhecidos.

Em análises pós-otimização, realizamos simulações estocásticas com  $S = 10.000$  cenários representando a distribuição multivariada  $\ln(\mathbf{1} + \mathbf{r})$  e calculamos a frequência relativa onde a restrição de solvência é violada. Em outras palavras, criamos uma variável indicadora  $I(s)$  para cada cenário  $s \in \{1, \dots, S\}$ , definida por

$$I_{\Gamma, \varepsilon}(s) = \begin{cases} 1, & \hat{p}_{\Gamma, \varepsilon} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S I_{\Gamma, \varepsilon}(s) \cdot \sum_{i=1}^N (1 + r_i(s)) x_i^*(\Gamma, \varepsilon) < P_1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $r_i(s)$  é o retorno do ativo  $i$  para o cenário simulado  $s$  e  $x_i^*(\Gamma, \varepsilon)$  é a alocação estratégica ótima para o ativo  $i$  em função de  $\Gamma$  e  $\varepsilon$ . Desta forma a probabilidade de insolvência pode ser empiricamente estimada como

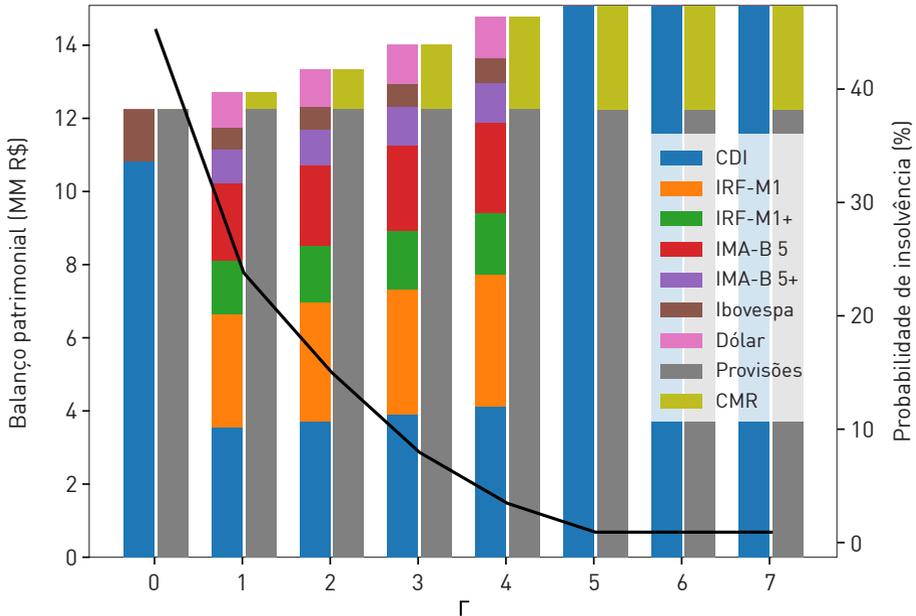
Nas subseções seguintes, fazemos duas análises de sensibilidade do modelo. A primeira análise será feita para a massa de 100 segurados com o objetivo de analisar o impacto dos parâmetros que regem o conjunto de incerteza ( $\varepsilon$ ) e o nível de conservadorismo ( $\Gamma$ ) sob a alocação ótima da carteira, CMR e probabilidade de insolvência. A segunda análise, assumimos o conjunto de incerteza definido para  $\varepsilon = 1$ , e testamos o modelo para as diferentes massas de segurados (100, 1000 e 10000 participantes). Nesta segunda análise, temos o objetivo de analisar como o CMR e a probabilidade de insolvência são influenciados pelo tamanho da sociedade seguradora.

### **Análise de sensibilidade no conjunto de incerteza ( $\varepsilon$ ) e conservadorismo ( $\Gamma$ )**

Nesta seção, foi realizada uma análise de sensibilidade dos resultados (alocação e CMR) em função dos parâmetros  $\varepsilon$  e  $\Gamma$ . O parâmetro  $\varepsilon$  pode ser interpretado como o número de desvios padrões que um determinado retorno pode desviar de seu valor nominal, i.e., o seu valor esperado. Por simplicidade, consideramos somente um tamanho de massa de 100 segurados. Na Figura 1 apresentamos um gráfico com duas escalas no eixo vertical onde o eixo horizontal são valores de  $\Gamma$ . Na escala da esquerda, apresentamos em milhões de reais os gráficos de barra representando os valores de ativos e passivos. Para cada valor de  $\Gamma$ , a barra da esquerda representa o total de ativos distribuídos entre as 7 classes consideradas e a barra da direita representa o

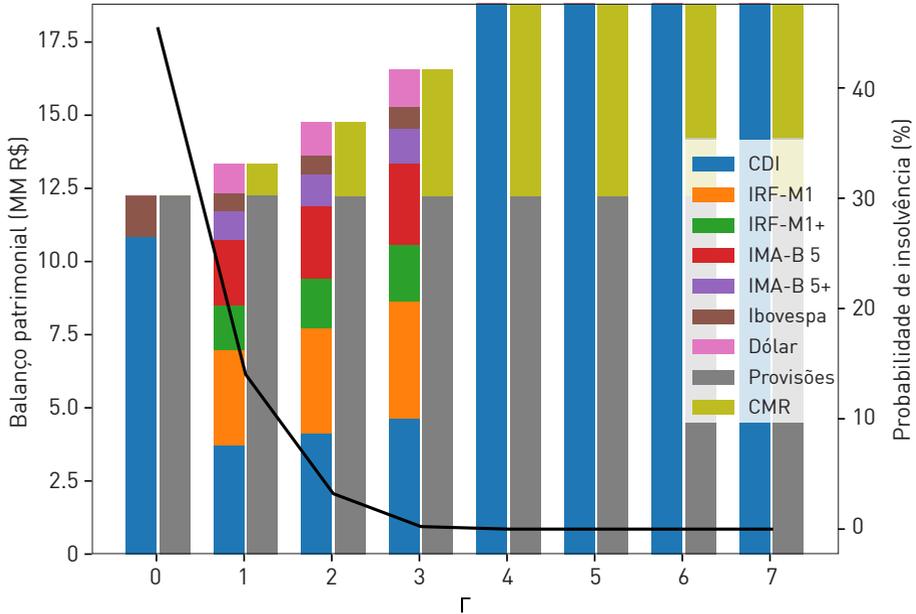
passivo dividido em provisões técnicas e capital mínimo requerido ( $CMR_{r,\varepsilon}^*$ ). Na escala da direita apresentamos a probabilidade de violação da restrição de solvência, i.e., a probabilidade de insolvência estimada via simulação.

Figura 1. Balanço patrimonial e probabilidade de insolvência para  $\varepsilon = 1$



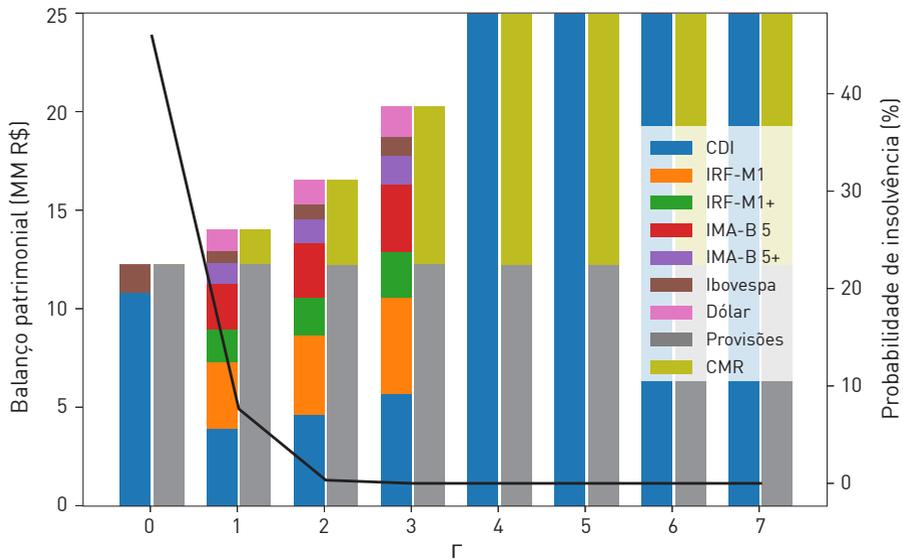
Note que a probabilidade de insolvência decai rapidamente com o aumento de  $\Gamma$ . De fato, a alocação obtida com o modelo de otimização robusta é mais conservadora com o aumento de  $\Gamma$ . Um  $\Gamma$  alto significa que o conjunto de incerteza considerado na decisão permite que até  $\Gamma$  ativos atinjam ao mesmo tempo o pior retorno possível. Note que com isso o valor de  $CMR_{r,\varepsilon}^*$  é crescente com  $\Gamma$ . Para  $\Gamma \geq 5$ , por exemplo, a decisão é tão conservadora que é exigido um CMR maior e uma alocação de 100% no CDI (ativo sem risco considerado). Nas Figuras Figura 2 e Figura 3, uma análise similar pode ser feita para  $\varepsilon \in \{2,3\}$ .

Figura 2. Balanço patrimonial e probabilidade de insolvência para  $\varepsilon = 2$



Podemos concluir que para um  $\varepsilon$  fixo, o nível de conservadorismo  $\Gamma$  é suficiente para determinar a carteira ótima, o CMR e a probabilidade de insolvência. Observamos também que quanto maior o  $\varepsilon$ , número de desvio-padrão em torno da média que um retorno pode assumir, maior será o CMR e maior será a sensibilidade do modelo ao parâmetro  $\Gamma$ . Por exemplo, para  $\varepsilon = 1$  e  $\Gamma = 4$  obtemos uma carteira diversificada com ativos com risco incluídos. Já para  $\varepsilon = 2$  e  $\Gamma = 4$ , a alocação é de 100% no ativo livre de risco. Note também que o perfil da carteira de ativos arriscados se mantém constante para diferentes  $\Gamma$ 's, aumentando somente percentual alocado no ativo livre de risco.

Figura 3. Balanço patrimonial e probabilidade de insolvência para  $\varepsilon = 3$



### Análise de sensibilidade no tamanho da massa segurada

Para um  $\varepsilon = 1$ , calculamos o CMR e a alocação estratégica nas 7 classes de ativos para diferentes valores de orçamento de incerteza  $\Gamma \in \{0, \dots, 7\}$ . Definimos o capital mínimo requerido como  $CMR_{\Gamma, \varepsilon}^* = \sum_{i=1}^N x_i^*(\Gamma, \varepsilon)$ . Na Tabela 3, reportamos o  $CMR_{\Gamma, \varepsilon}^*$ . Podemos observar que o CMR aumenta com o número de segurados e com o nível de conservadorismo  $\Gamma$ . De fato,  $\Gamma$  é uma forma de parametrizar o nível de conservadorismo do decisor, onde  $\Gamma = 0$  é o menos conservador e  $\Gamma = N$  é o mais conservador.

Tabela 3. Capital mínimo requerido

$\Gamma$	100 segurados	1.000 segurados	10.000 segurados
0	R\$0,00	R\$0,00	R\$0,00
1	R\$453.292,70	R\$4.165.610,30	R\$0,00
2	R\$1.078.101,55	R\$10.291.507,80	R\$61.504.473,32
3	R\$1.764.166,18	R\$17.152.513,00	R\$129.284.913,30
4	R\$2.523.737,72	R\$24.748.625,90	R\$204.596.513,28
5	R\$2.842.267,73	R\$27.811.574,65	R\$235.976.346,60
6	R\$2.842.267,73	R\$27.811.574,65	R\$235.976.346,60
7	R\$2.842.267,73	R\$27.811.574,65	R\$235.976.346,60

Para melhor compreensão deste resultado, reportamos na Tabela 4 a razão entre  $CMR_{\Gamma,\varepsilon}^*$  e a melhor estimativa do passivo  $P_{me}$ . Podemos observar que o CMR diminui, em termos percentuais, quando o número de segurados aumenta.

**Tabela 4. Capital mínimo requerido percentual**

$\Gamma$	100 segurados	1.000 segurados	10.000 segurados
0	0,0%	0,0%	0,0%
1	3,7%	3,4%	0,0%
2	8,8%	8,4%	4,9%
3	14,4%	14,0%	10,3%
4	20,6%	20,2%	16,3%
5	23,2%	22,7%	18,8%
6	23,2%	22,7%	18,8%
7	23,2%	22,7%	18,8%

Na Tabela 5 reportamos a probabilidade de insolvência estimada via simulação. Note que para  $\Gamma \geq 1$ , a probabilidade de insolvência levantada por simulação não depende do número de segurados. Isso acontece, pois, o modelo de otimização robusta identifica um menor risco para o caso com mais segurados e por consequência dimensiona um CMR adequado.

**Tabela 5. Probabilidade de insolvência**

$\Gamma$	100 segurados	1000 segurados	10000 segurados
0	45,5%	44,9%	44,3%
1	23,4%	23,4%	23,4%
2	14,7%	14,7%	14,7%
3	7,9%	7,9%	7,9%
4	3,4%	3,4%	3,4%
5	0,8%	0,8%	0,8%
6	0,8%	0,8%	0,8%
7	0,8%	0,8%	0,8%

Note que se utilizarmos um nível de aversão a risco similar ao utilizado no capital de subscrição (99,5% de confiança) escolheríamos  $\Gamma \geq 5$  já que a probabilidade de insolvência é de 0,8%. Para  $\Gamma \geq 5$ , a alocação ótima é de 100% no ativo sem risco (CDI), uma consequência direta das altas taxas de juros nominais do mercado brasileiro.

Esse resultado demonstra a alta usabilidade deste método pelas empresas do mercado segurador. Com um único parâmetro  $I$ , uma seguradora consegue determinar qual o menor capital baseado em risco que garante a sua solvência com determinado nível de confiança, independente do tamanho de sua massa segurada. Esse resultado é obtido devida uma otimização conjunta do CMR e da carteira de ativos levando em suas correlações e um valor conservador para o passivo. Além de um controle único de risco, esse modelo é de fácil implementação cuja resolução pode ser feita de forma eficiente por qualquer *solver* (comercial ou gratuito) de programação linear. Devido a sua tratabilidade computacional e parcimônia em sua parametrização, o modelo proposto pode ser largamente utilizado pelo mercado incluindo pequenas, médias e grandes sociedades seguradoras.

## VI. CONCLUSÃO

Neste livro, propomos uma nova metodologia de cálculo do capital mínimo requerido (CMR) como modelo interno parcial e apresentamos uma aplicação realista sociedades seguradoras. Por meio de otimização robusta, o modelo proposto procura uma carteira ótima de ativos que minimize o capital baseado em risco e garanta (com alta probabilidade) a solvência da seguradora. Desta forma, temos a cootimização da carteira e do capital da companhia de seguros.

No capítulo I, contextualizamos a evolução da análise e supervisão de solvência no mercado internacional de seguros e previdência. Esclarecemos, ainda, que se compararmos nosso modelo com os módulos e submódulos de risco da abordagem padrão do regime Solvência II, na nossa proposta de modelo interno parcial, a mensuração dos passivos engloba os riscos de sobrevivência, cancelamento e taxa de juros. E no lado dos ativos, por trabalharmos com carteiras hipotéticas de títulos públicos, ações e variação do dólar, são abordados os riscos de taxas de juros, ações e câmbio. Ainda no Capítulo I, descrevemos sucintamente o modelo padrão do Solvência II, bem como as regras para elaboração do modelo interno. Além de apresentar artigos referenciais sobre modelo interno no mercado de seguros e previdência e uma visão geral do modelo brasileiro padrão para cálculo do capital baseado em risco.

No capítulo II, apresentamos um *background* teórico sobre otimização robusta, a principal componente de inovação deste trabalho. Em particular, apresentamos conceitos básicos de otimização robusta aplicada a alocação de ativos utilizando os principais conjuntos de incerteza da literatura. Mostramos passo-a-passo o desenvolvimento dos modelos denominada contraparte robusta, que são tratáveis computacionalmente utilizando *solvers* comerciais.

No capítulo III, apresentamos o modelo interno de cálculo de capital baseado em risco utilizando otimização robusta. De fato, definimos um modelo que minimiza o CMR escolhendo a carteira de ativos que garante solvência mesmo sob o pior caso (dentro de um conjunto de incerteza) de retorno dos ativos e para um valor conservador de

passivo. Desenvolvemos a contraparte robusta para os principais conjuntos de incertezas poliedrais e convexo, resultando em um modelo de programação linear computacionalmente tratável e de rápida solução. Para o conjunto de incerteza mais geral, consideramos retornos correlacionados e um parâmetro, conhecido com orçamento da incerteza, que controla o nível de conservadorismo do modelo. O orçamento da incerteza está diretamente ligado à ao CMR e a probabilidade de insolvência induzida pelo modelo. De fato, quanto mais conservador maior o CMR e menor a probabilidade de insolvência.

No capítulo IV, apresentamos a modelagem do passivo atuarial. Mensuramos a melhor estimativa das obrigações da seguradora com os segurados e assistidos na data da avaliação e essas obrigações sob uma situação de estresse. Calculamos assumindo um VaR de 99,5% de nível de confiança semelhante ao modelo Solvência II, configurando o cenário de choque do passivo sob os riscos de mercado e subscrição. Neste livro, aplicamos o modelo a planos de previdência de contribuição definida, onde a seguradora garante a taxa de juros durante o período de diferimento e um fator de cálculo de anuidade, ambos definidos no contrato, para transformação do montante acumulado na provisão técnica em renda mensal na data de aposentadoria. Na mensuração do passivo, utilizamos simulação de Monte Carlo, e descrevemos, além do modelo atuarial utilizado, o algoritmo de simulação.

No capítulo V, apresentados estudos de casos onde o modelo proposto é aplicado a massas de segurados de tamanhos distintos. Como o perfil da massa escolhida e as características do plano de previdência são fundamentais para os resultados obtidos, escolhemos segurados com perfil bem comum à população que compra planos de previdência privada e bases técnicas usuais.

Na primeira parte do capítulo V, calculamos para diferentes massas a provisão contratual, melhor estimativa dos compromissos futuros da seguradora, e o valor da provisão técnica dado o cenário de choque (provisão econômica), calculada assumindo um VaR com nível de confiança de 99,5%. Esses valores de provisão compõem o cálculo do capital baseado em risco do nosso modelo interno parcial. Assim, obtemos o valor do capital baseado em risco de subscrição, caso modelássemos apenas esse risco. Após análise, concluímos que quando menor o tamanho da massa maior é o risco de subscrição, obtido considerando os riscos de sobrevivência, dos ativos e assistidos, após a

data de aposentadoria, cancelamento dos ativos e de taxa de juros. Com aumento da massa, elimina-se grande parte do risco idiossincrático, restando apenas os demais riscos.

Na segunda parte do capítulo V, aplicamos o modelo de otimização robusta às diferentes massas de segurados obtendo os valores de CMR e probabilidade de insolvência para cada nível de conservadorismo. Como esperado, o CMR de massas menores é maior devido a maior provisão econômica do passivo. No entanto, a probabilidade de insolvência pode ser determinada unicamente pelo nível de conservadorismo. Esse importante resultado demonstra a generalidade e potencial aplicabilidade prática do modelo proposto: independente do tamanho da seguradora a probabilidade de insolvência pode ser controlada por um parâmetro único, que induz ao CMR adequado ao tamanho da massa e ao nível de conservadorismo do segurador. Por esse resultado, acreditamos que o modelo proposto neste trabalho pode ser replicado na prática por sociedades seguradoras para obtenção de seu modelo interno parcial de risco de subscrição e de mercado, haja vista os excelentes resultados apresentados. Ademais, dado a não existência de um rico referencial teórico para modelagem interna de risco de sociedades seguradoras, o modelo proposto cria bases metodológicas para o desenvolvimento de potenciais trabalhos científicos.

## VII. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ang, Andrew, and Monika Piazzesi. 2003. "A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables." *Journal of Monetary Economics* 50 (4): 745–87. doi:10.1016/S0304-3932(03)00032-1.
- Artzner, Philippe, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. 1999. "Coherent Measures of Risk." *Mathematical Finance* 9 (3): 203–28.
- Ben-Tal, A, and A Nemirovski. 1998. "Robust Convex Optimization." *Mathematics of Operations Research* 23 (4): 769–805.
- Ben-Tal, Aharon, and Arkadi Nemirovski. 1999. "Robust Solutions of Uncertain Linear Programs." *Operations Research Letters* 25 (1): 1–13. doi:10.1016/S0167-6377(99)00016-4.
- . 2000. "Robust Solutions of Linear Programming Problems Contaminated with Uncertain Data." *Mathematical Programming* 88 (3): 411–24.
- Bertsimas, D, V Gupta, and N Kallus. 2014. "Data-Driven Robust Optimization." *ArXiv E-Prints*.
- Bertsimas, Dimitris, and Melvyn Sim. 2004. "The Price of Robustness." *Operations Research* 52 (1). INFORMS: 35–53. doi:10.1287/opre.1030.0065.
- Birge, John, and Francois Louveaux. 1997. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer-Verlag.
- Bradley, Stephen P, and Dwight B Crane. 1972. "A Dynamic Model for Bond Portfolio Management." *Management Science* 19 (2): 139–51. doi:10.1287/mnsc.19.2.139.
- Brown, David B., and James E. Smith. 2014. "Information Relaxations, Duality, and Convex Stochastic Dynamic Programs." <http://dx.doi.org/10.1287/opre.2014.1322>. INFORMS .
- Brown, David B, and James E Smith. 2011. "Dynamic Portfolio Optimization with Transaction Costs: Heuristics and Dual Bounds." *Management Science* 57 (10). INFORMS: 1752–70.

Cantelli, F.P., 1914. Genesi e costruzione delle tavole di mutualit`a. Bolletino di Notizie sul Credito e sulla Previdenza, Nr. 3/4.

Carino, David R, and William T Ziemba. 1998. "Formulation of the {Russell-Yasuda} Kasai Financial Planning Model." *Operations Research* 46 (4): 433–49.

Cariño, David R, and William T Ziemba. 1998. "Formulation of the {Russell-Yasuda} Kasai Financial Planning Model." *Operations Research* 46 (4): 433–49. doi:10.1287/opre.46.4.433.

CEIOP - Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors. 2010. "QIS5 Calibration Paper". [http://ec.europa.eu/internal\\_market/insurance/docs/solvency/qis5/ceiops-calibration-paper\\_en.pdf](http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/qis5/ceiops-calibration-paper_en.pdf)

Ceria, Sebastián, and Robert A Stubbs. 2006. "Incorporating Estimation Errors into Portfolio Selection: Robust Portfolio Construction." *Journal of Asset Management* 7 (2). Palgrave Macmillan UK: 109–27.

Constantinides, George M. 1979. "Multiperiod Consumption and Investment Behavior with Convex Transactions Costs." *Management Science* 25 (11). INFORMS: 1127–37.

Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross. 1985. "A Theory of the Term Structure of Interest Rates." *Econometrica* 53 (2): 385. doi:10.2307/1911242.

Davis, Mark H A, and Andrew R Norman. 1990. "Portfolio Selection with Transaction Costs." *Mathematics of Operations Research* 15 (4). INFORMS: 676–713.

Devineau, Laurent, and Stéphane Loisel. 2009. "Risk Aggregation in Solvency II: How to Converge the Approaches of the Internal Models and Those of the Standard Formula?" *Bulletin Français d'Actuariat* 9 (18): 107–45.

EIOPA - European Insurance and Occupational Pensions Authority. 2010. "QIS 5, Quantitative Impact Study."

EIOPA - European Insurance and Occupational Pensions Authority. 2011. "EIOPA Report on the fifth Quantitative Impact Study (QIS5) for Solvency II".

Fabozzi, Frank J, Dashan Huang, and Guofu Zhou. 2009. "Robust Portfolios: Contributions from Operations Research and Finance." *Annals of Operations Research* 176 (1): 191–220.

- Fernandes, Betina, Alexandre Street, Davi Valladão, and Cristiano Fernandes. 2016. "An Adaptive Robust Portfolio Optimization Model with Loss Constraints Based on Data-Driven Polyhedral Uncertainty Sets." *European Journal of Operational Research* 255 (3): 961–70. doi:10.1016/j.ejor.2016.05.038.
- Frank J. Fabozzi Petter N. Kolm, Dessimlava Pachamanova Sergio M Focardi. 2007. *Robust Portfolio Optimization and Management*. 1sted. John Wiley.
- Franklin Jr, S. L., Duarte, T. B., Neves, César., and Melo, E. F. 2012. "A estrutura a termo de taxas de juros no Brasil: modelos, estimação e testes". *Economia Aplicada*, 16(2), 255-290.
- Gatzert, Nadine, and Michael Martin. 2012. "Quantifying Credit and Market Risk under Solvency II: Standard Approach versus Internal Model." *Insurance: Mathematics and Economics* 51 (3): 649–66. doi:10.1016/j.insmatheco.2012.09.002.
- Ghaoui, Laurent El, and Hervé Lebret. 1997. "Robust Solutions to Least-Squares Problems with Uncertain Data." *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 18 (4): 1035–64.
- Ghaoui, Laurent El, Francois Oustry, and Hervé Lebret. 1998. "Robust Solutions to Uncertain Semidefinite Programs." *SIAM Journal on Optimization* 9 (1): 33–52.
- Gülpinar, Nalan, and Dessimlava Pachamanova. 2013. "A Robust Optimization Approach to Asset-Liability Management under Time-Varying Investment Opportunities." *Journal of Banking & Finance* 37 (6): 2031–41. doi:10.1016/j.jbankfin.2013.01.025.
- Halldórsson, B V, and R H Tütüncü. 2003. "An Interior-Point Method for a Class of Saddle-Point Problems." *Journal of Optimization Theory and Applications* 116 (3): 559–90.
- Hilli, Petri, Matti Koivu, Teemu Pennanen, and Antero Ranne. 2007. "A Stochastic Programming Model for Asset Liability Management of a Finnish Pension Company." *Annals of Operations Research* 152 (1): 115–39. doi:10.1007/s10479-006-0135-3.
- Homem-De-Mello, Tito, and Bernardo K. Pagnoncelli. 2016. "Risk Aversion in Multistage Stochastic Programming: A Modeling and Algorithmic Perspective." *European Journal of Operational Research* 249 (1): 188–99. doi:10.1016/j.ejor.2015.05.048.

- Jarrow, Robert A., David Lando, and Stuart M. Turnbull. 1997. "A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads." *Review of Financial Studies* 10 (2). Oxford University Press: 481–523. doi:10.1093/rfs/10.2.481.
- Kallberg, J G, R W White, and W T Ziemba. 1982. "Short Term Financial Planning under Uncertainty." *Management Science* 28 (6): 670–82.
- Kim, Jang Ho, Woo Chang Kim, and Frank J Fabozzi. 2013. "Recent Developments in Robust Portfolios with a Worst-Case Approach." *Journal of Optimization Theory and Applications* 161 (1): 103–21.
- Kim, Jang Ho, Woo Chang Kim, and Frank J. Fabozzi. 2014. "Recent Developments in Robust Portfolios with a Worst-Case Approach." *Journal of Optimization Theory and Applications* 161 (1): 103–21. doi:10.1007/s10957-013-0329-1.
- Klein Haneveld, Willem, Matthijs Streutker, and Maarten van der Vlerk. 2010. "An {ALM} Model for Pension Funds Using Integrated Chance Constraints." *Annals of Operations Research* 177 (1): 47–62. doi:10.1007/s10479-009-0594-4.
- Kochanski, Michael, and Bertel Karnarski. 2011. "Solvency Capital Requirement for Hybrid Products." *European Actuarial Journal* 1 (2). Springer-Verlag: 173–98. doi:10.1007/s13385-011-0040-2.
- Kouwenberg, Roy. 2001. "Scenario Generation and Stochastic Programming Models for Asset Liability Management." *European Journal of Operational Research* 134 (2): 279–92. doi:10.1016/S0377-2217(00)00261-7.
- Lee, Ronald D., and Lawrence R. Carter. 1992. "Modeling and Forecasting U.S. Mortality." *Journal of the American Statistical Association* 87 (419). Taylor & Francis Group : 659–71. doi:10.1080/01621459.1992.10475265.
- Lobo, M S, and S Boyd. 2000. "The Worst-Case Risk of a Portfolio." *Technical Report, Stanford University*.
- Markowitz, Harry. 1952. "Portfolio Selection." *The Journal of Finance* 7 (1): 77–91.
- . 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. 1sted. John Wiley & Sons, New-York. <http://cowles.econ.yale.edu/P/cm/m16/index.htm>.

- Melo, E., and Cesar Neves. 2012. "Solvência No Mercado de Seguros E Previdência: Coletânea de Estudos." Rio de Janeiro.
- Merton, Robert C. 1969. "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case." *The Review of Economics and Statistics*. JSTOR, 247–57.
- . 1971. "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model." *Journal of Economic Theory* 3 (4). Academic Press: 373–413.
- Milbrodt, H., Stracke, A. 1997. "Markov models and Thiele's integral equations for the prospective reserve". *Insurance: Mathematics and Economics* 19, 187-235.
- Mossin, Jan. 1968. "Optimal Multiperiod Portfolio Policies." *The Journal of Business* 41 (2). JSTOR: 215–29.
- Neves, César, Cristiano Fernandes and Eduardo Melo (2014). "Forecasting Surrender Rates Using Elliptical Copulas and Financial Variables". *North American Actuarial Journal*, 18(2), 343-362.
- Neves, César, Cristiano Fernandes, and Álvaro Veiga. 2016. "Forecasting Longevity Gains for a Population with Short Time Series Using a Structural SUTSE Model: An Application to Brazilian Annuity Plans." *North American Actuarial Journal* 20 (1). Routledge: 37–56. doi: 10.1080/10920277.2015.1061442.
- Neves, César , and Eduardo Melo (2016). "Evaluating the Technical Provisions for Traditional Brazilian Annuity Plans: Continuous-Time Stochastic Approach Based on Solvency Principles". *North American Actuarial Journal*, 20(4), 420-436.
- Oliveira, M., R. Frischtak, M. Ramires, K. Beltrão, S. Pinheiro. 2012. "Brazilian mortality and survivorship: life tables, insurance market experience – 2010". 1st edition, *Fundação Escola Nacional de Seguros – Funenseg*, Rio de Janeiro, Brazil.
- Pereira, M. V. F., and L. M. V. G. Pinto. 1991a. "Multi-Stage Stochastic Optimization Applied to Energy Planning." *Mathematical Programming* 52 (1–3). Springer-Verlag: 359–75. doi:10.1007/BF01582895.
- Pereira, M V F, and L M V G Pinto. 1991b. "Multi-Stage Stochastic Optimization Applied to Energy Planning." *Mathematical Programming* 52 (1). Springer Berlin / Heidelberg: 359–75.

- Rockafellar, R, and S Uryasev. 2002. "Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions." *Journal of Banking and Finance* 26 (7): 1443–71. doi:10.1016/S0378-4266(02)00271-6.
- Samuelson, Paul A. 1969. "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming." *The Review of Economics and Statistics*. JSTOR, 239–46.
- Sandström, A. 2011. *Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers: Theory and Practice*. CRC Press.
- Shapiro, A, D Dentcheva, and A Ruszczyński. 2009. *Lectures on Stochastic Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Shapiro, Alexander. 2011. "Analysis of Stochastic Dual Dynamic Programming Method." *European Journal of Operational Research* 209 (1): 63–72. doi:10.1016/j.ejor.2010.08.007.
- Shreve, Steven E, and H Mete Soner. 1994. "Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs." *The Annals of Applied Probability*. JSTOR, 609–92.
- Soyster, A. L. 1973a. "Technical Note—Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming." *Operations Research* 21 (5). INFORMS : 1154–57. doi:10.1287/opre.21.5.1154.
- Soyster, A L. 1973b. "Technical Note—Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming." *Operations Research* 21 (5): 1154–57.
- Veiga, Álvaro, and Davi M. Valladão. 2009. "Optimum Allocation and Risk Measure in an Asset Liability Management Model for a Pension Fund Via Multistage Stochastic Programming and Bootstrap." In *Fourth Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance*. Maresias.

## COLEÇÃO “CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN”

Para qualquer informação sobre as nossas publicações consulte:  
[www.fundacionmapfre.org](http://www.fundacionmapfre.org)

- 228. Otimização conjunta do capital baseado em risco e da carateira de ativos.
- 227. Fundamentos de primas y reservas de fianzas y seguros de caución.  
Enfoque de Solvencia II. 2018
- 226. Determinantes de la performance de los fondos de pensiones. 2018
- 225. Estudio sobre el employer branding del sector Seguros en España. 2018
- 224. El impacto de Solvencia II en los grupos de entidades aseguradoras. 2018
- 223. Contributions to Risk Analysis: RISK 2018
- 222. Individual Cancer Mortality Prediction. 2017
- 221. Defensa jurídica y dolo del asegurado en el seguro de responsabilidad civil. 2017
- 220. El proceso precontractual en el contrato de seguro: nuevo marco jurídico. 2017
- 219. Teoría de cópulas. Introducción y aplicaciones a Solvencia II. 2017
- 218. Cualificación profesional del actuario. Estudio internacional comparado. 2016
- 217. El seguro de responsabilidad civil derivada de la navegación de buques. 2016
- 216. El impacto de las últimas reformas en materia de jubilación: envejecimiento activo, sostenibilidad financiera y planes de pensiones. 2016
- 215. Previsión complementaria empresarial: estudio comparado internacional 2016
- 214. Normas sobre protección de los derechos de los consumidores en el contrato de seguro en Chile. 2016

213. *Gamificación*: un modelo de fomento y gestión de comportamientos deseados en las relaciones entre individuos y organizaciones. 2015
212. Modelo de gestión integral para el sector atunero. 2015
211. Opções embutidas em planos *unit-linked*s brasileiros: avaliação sob a medida de probabilidade real. 2015
210. El enfoque de Solvencia II para las pensiones ocupacionales españolas. 2015
209. El seguro privado de obras de arte. 2015
208. Definición y medición de la cultura aseguradora. Aplicación al caso español. 2015
207. Tipos de interés para valorar las provisiones técnicas de seguros. 2015
206. Teledetección aplicada a la elaboración de mapas de peligrosidad de granizo en tiempo real y mapas de daños en cultivos e infraestructuras. 2015
205. Current Topics on Risk Analysis: ICRA6 and Risk 2015 Conference. 2015
204. Determinantes do Premio de Default de (Res)seguradores. 2014
203. Generación de escenarios económicos para la medición de riesgos de mercado en Solvencia II a través de modelos de series temporales. 2014
202. Valoración de los inmuebles del patrimonio histórico y los riesgos sísmicos en el contrato de seguro: el caso de Lorca. 2014
201. Inteligencia computacional en la gestión del riesgo asegurador: operadores de agregación OWA en proceso de tarificación. 2014
200. El componente transfronterizo de las relaciones aseguradoras. 2014
199. El seguro basado en el uso (Usage Based Insurance). 2014
198. El seguro de decesos en la normativa aseguradora. Su encaje en Solvencia II. 2014
197. El seguro de responsabilidad civil en el arbitraje. 2014

196. La reputación corporativa en empresas aseguradoras: análisis y evaluación de factores explicativos. 2014
195. La acción directa del perjudicado en el ordenamiento jurídico comunitario. 2013
194. Investigaciones en Seguros y Gestión del Riesgo: RIESGO 2013
193. Viability of Patent Insurance in Spain. 2013
192. Viabilidad del seguro de patentes en España. 2013
191. Determinación de zonas homogéneas de riesgo para los rendimientos de distintos cultivos de la región pampeana en Argentina. 2013
190. Género y promoción en los sectores financiero y asegurador. 2013
189. An Introduction to Reinsurance. 2013
188. El control interno y la responsabilidad penal en la mediación de seguros privados. 2013
187. Una introducción al gobierno corporativo en la industria aseguradora en América Latina. 2013
186. Mortalidad de jóvenes en accidentes de tráfico. 2012
185. Las reclamaciones derivadas de accidentes de circulación por carretera transfronterizos. 2012
184. Efecto disuasorio del tipo de contrato sobre el fraude. 2012
183. Claves del Seguro Español: una aproximación a la Historia del Seguro en España. 2012
182. La responsabilidad civil del asegurador de asistencia sanitaria. 2012
181. Colaboración en el contrato de Reaseguro. 2012
180. Origen, situación actual y futuro del seguro de Protección Jurídica. 2012

179. Experiencias de microseguros en Colombia, Perú y Brasil. Modelo socio agente. 2012
178. El agente de seguros y su Responsabilidad Civil. 2012
177. Riesgo operacional en el marco de Solvencia II. 2012
176. Un siglo de seguros marítimos barceloneses en el comercio con América. (1770-1870). 2012
175. El seguro de Caucción. 2012
174. La contabilidad de los corredores de seguros y los planes y fondos de pensiones. 2012
173. El seguro de Vida en América Latina. 2011
172. Gerencia de riesgos sostenibles y Responsabilidad Social Empresarial en la entidad aseguradora. 2011
171. Investigaciones en Seguros y Gestión del Riesgo. RIESGO 2011
170. Introdução ao Resseguro. 2011
169. La salud y su aseguramiento en Argentina, Chile, Colombia y España. 2011
168. Diferencias de sexo en conductas de riesgo y tasa de mortalidad diferencial entre hombres y mujeres. 2011
167. Movilización y rescate de los compromisos por pensiones garantizados mediante contrato de seguros. 2011
166. Embedded Value aplicado al ramo No Vida. 2011
165. Las sociedades cautivas de Reaseguro. 2011
164. Daños del amianto: litigación, aseguramiento de riesgos y fondos de compensación. 2011
163. El riesgo de tipo de interés: experiencia española y Solvencia II. 2011
162. I Congreso sobre las Nuevas Tecnologías y sus repercusiones en el Seguro: Internet, Biotecnología y Nanotecnología. 2011

161. La incertidumbre bioactuarial en el riesgo de la longevidad. Reflexiones bioéticas. 2011
160. Actividad aseguradora y defensa de la competencia. La exención antitrust del sector asegurador. 2011
159. Estudio empírico sobre la tributación de los seguros de vida. 2010
158. Métodos estocásticos de estimación de las provisiones técnicas en el marco de Solvencia II. 2010
157. Introducción al Reaseguro. 2010
156. Encuentro Internacional sobre la Historia del Seguro. 2010
155. Los sistemas de salud en Latinoamérica y el papel del seguro privado. 2010
154. El Seguro de Crédito en Chile. 2010
153. El análisis financiero dinámico como herramienta para el desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II. 2010
152. Características sociodemográficas de las personas con doble cobertura sanitaria. Un estudio empírico. 2010
151. Solidaridad impropia y seguro de Responsabilidad Civil. 2010
150. La prevención del blanqueo de capitales en las entidades aseguradoras, las gestoras y los corredores de seguros 2010
149. Fondos de aseguramiento agropecuario y rural: la experiencia mexicana en el mutualismo agropecuario y sus organizaciones superiores. 2010
148. Avaliação das Provisões de Sinistro sob o Enfoque das Novas Regras de Solvência do Brasil. 2010
147. El principio de igualdad sexual en el Seguro de Salud: análisis actuarial de su impacto y alcance. 2010
146. Investigaciones históricas sobre el Seguro español. 2010

145. Perspectivas y análisis económico de la futura reforma del sistema español de valoración del daño corporal. 2009
144. Contabilidad y Análisis de Cuentas Anuales de Entidades Aseguradoras (Plan contable 24 de julio de 2008). 2009
143. Mudanças Climáticas e Análise de Risco da Indústria de Petróleo no Litoral Brasileiro. 2009
142. Bases técnicas dinámicas del Seguro de Dependencia en España. Una aproximación en campo discreto. 2009
141. Transferencia Alternativa de Riesgos en el Seguro de Vida: Titulización de Riesgos Aseguradores. 2009
140. Riesgo de negocio ante asegurados con múltiples contratos. 2009
139. Optimización económica del Reaseguro cedido: modelos de decisión. 2009
138. Inversiones en el Seguro de Vida en la actualidad y perspectivas de futuro. 2009
137. El Seguro de Vida en España. Factores que influyen en su progreso. 2009
136. Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos. RIESGO 2009.
135. Análisis e interpretación de la gestión del fondo de maniobra en entidades aseguradoras de incendio y lucro cesante en grandes riesgos industriales. 2009
134. Gestión integral de Riesgos Corporativos como fuente de ventaja competitiva: cultura positiva del riesgo y reorganización estructural. 2009
133. La designación de la pareja de hecho como beneficiaria en los seguros de vida. 2009
132. Aproximación a la Responsabilidad Social de la empresa: reflexiones y propuesta de un modelo. 2009
131. La cobertura pública en el seguro de crédito a la exportación en España: cuestiones prácticas-jurídicas. 2009

130. La mediación en seguros privados: análisis de un complejo proceso de cambio legislativo. 2009
129. Temas relevantes del Derecho de Seguros contemporáneo. 2009
128. Cuestiones sobre la cláusula cut through. Transferencia y reconstrucción. 2008
127. La responsabilidad derivada de la utilización de organismos genéticamente modificados y la redistribución del riesgo a través del seguro. 2008
126. Ponencias de las Jornadas Internacionales sobre Catástrofes Naturales. 2008
125. La seguridad jurídica de las tecnologías de la información en el sector asegurador. 2008
124. Predicción de tablas de mortalidad dinámicas mediante un procedimiento bootstrap. 2008
123. Las compañías aseguradoras en los procesos penal y contencioso-administrativo. 2008
122. Factores de riesgo y cálculo de primas mediante técnicas de aprendizaje. 2008
121. La solicitud de seguro en la Ley 50/1980, de 8 de octubre, de Contrato de Seguro. 2008
120. Propuestas para un sistema de cobertura de enfermedades catastróficas en Argentina. 2008
119. Análisis del riesgo en seguros en el marco de Solvencia II: Técnicas estadísticas avanzadas Monte Carlo y Bootstrapping. 2008
118. Los planes de pensiones y los planes de previsión asegurados: su inclusión en el caudal hereditario. 2007
117. Evolução de resultados técnicos e financeiros no mercado segurador iberoamericano. 2007
116. Análisis de la Ley 26/2006 de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2007

115. Sistemas de cofinanciación de la dependencia: seguro privado frente a hipoteca inversa. 2007
114. El sector asegurador ante el cambio climático: riesgos y oportunidades. 2007
113. Responsabilidade social empresarial no mercado de seguros brasileiro influências culturais e implicações relacionais. 2007
112. Contabilidad y análisis de cuentas anuales de entidades aseguradoras. 2007
111. Fundamentos actuariales de primas y reservas de fianzas. 2007
110. El Fair Value de las provisiones técnicas de los seguros de Vida. 2007
109. El Seguro como instrumento de gestión de los M.E.R. (Materiales Especificados de Riesgo). 2006
108. Mercados de absorción de riesgos. 2006
107. La exteriorización de los compromisos por pensiones en la negociación colectiva. 2006
106. La utilización de datos médicos y genéticos en el ámbito de las compañías aseguradoras. 2006
105. Los seguros contra incendios forestales y su aplicación en Galicia. 2006
104. Fiscalidad del seguro en América Latina. 2006
103. Las NIC y su relación con el Plan Contable de Entidades Aseguradoras. 2006
102. Naturaleza jurídica del Seguro de Asistencia en Viaje. 2006
101. El Seguro de Automóviles en Iberoamérica. 2006
100. El nuevo perfil productivo y los seguros agropecuarios en Argentina. 2006
99. Modelos alternativos de transferencia y financiación de riesgos "ART": situación actual y perspectivas futuras. 2005

98. Disciplina de mercado en la industria de seguros en América Latina. 2005
97. Aplicación de métodos de inteligencia artificial para el análisis de la solvencia en entidades aseguradoras. 2005
96. El Sistema ABC-ABM: su aplicación en las entidades aseguradoras. 2005
95. Papel del docente universitario: ¿enseñar o ayudar a aprender? 2005
94. La renovación del Pacto de Toledo y la reforma del sistema de pensiones: ¿es suficiente el pacto político? 2005
92. Medición de la esperanza de vida residual según niveles de dependencia en España y costes de cuidados de larga duración. 2005
91. Problemática de la reforma de la Ley de Contrato de Seguro. 2005
90. Centros de atención telefónica del sector asegurador. 2005
89. Mercados aseguradores en el área mediterránea y cooperación para su desarrollo. 2005
88. Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación. 2004
87. Dependencia en el modelo individual, aplicación al riesgo de crédito. 2004
86. El margen de solvencia de las entidades aseguradoras en Iberoamérica. 2004
85. La matriz valor-fidelidad en el análisis de los asegurados en el ramo del automóvil. 2004
84. Estudio de la estructura de una cartera de pólizas y de la eficacia de un Bonus-Malus. 2004
83. La teoría del valor extremo: fundamentos y aplicación al seguro, ramo de responsabilidad civil autos. 2004
81. El Seguro de Dependencia: una visión general. 2004

80. Los planes y fondos de pensiones en el contexto europeo: la necesidad de una armonización. 2004
79. La actividad de las compañías aseguradoras de vida en el marco de la gestión integral de activos y pasivos. 2003
78. Nuevas perspectivas de la educación universitaria a distancia. 2003
77. El coste de los riesgos en la empresa española: 2001.
76. La incorporación de los sistemas privados de pensiones en las pequeñas y medianas empresas. 2003
75. Incidencia de la nueva Ley de Enjuiciamiento Civil en los procesos de responsabilidad civil derivada del uso de vehículos a motor. 2002
74. Estructuras de propiedad, organización y canales de distribución de las empresas aseguradoras en el mercado español. 2002
73. Financiación del capital-riesgo mediante el seguro. 2002
72. Análisis del proceso de exteriorización de los compromisos por pensiones. 2002
71. Gestión de activos y pasivos en la cartera de un fondo de pensiones. 2002
70. El cuadro de mando integral para las entidades aseguradoras. 2002
69. Provisiones para prestaciones a la luz del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados; métodos estadísticos de cálculo. 2002
68. Los seguros de crédito y de caución en Iberoamérica. 2001
67. Gestión directiva en la internacionalización de la empresa. 2001
65. Ética empresarial y globalización. 2001
64. Fundamentos técnicos de la regulación del margen de solvencia. 2001
63. Análisis de la repercusión fiscal del seguro de vida y los planes de pensiones. Instrumentos de previsión social individual y empresarial. 2001

62. Seguridad Social: temas generales y régimen de clases pasivas del Estado. 2001
61. Sistemas Bonus-Malus generalizados con inclusión de los costes de los siniestros. 2001
60. Análisis técnico y económico del conjunto de las empresas aseguradoras de la Unión Europea. 2001
59. Estudio sobre el euro y el seguro. 2000
58. Problemática contable de las operaciones de reaseguro. 2000
56. Análisis económico y estadístico de los factores determinantes de la demanda de los seguros privados en España. 2000
54. El corredor de reaseguros y su legislación específica en América y Europa. 2000
53. Habilidades directivas: estudio de sesgo de género en instrumentos de evaluación. 2000
52. La estructura financiera de las entidades de seguros, S.A. 2000
51. Seguridades y riesgos del joven en los grupos de edad. 2000
50. Mixturas de distribuciones: aplicación a las variables más relevantes que modelan la siniestralidad en la empresa aseguradora. 1999
49. Solvencia y estabilidad financiera en la empresa de seguros: metodología y evaluación empírica mediante análisis multivariante. 1999
48. Matemática Actuarial no vida con MapleV. 1999
47. El fraude en el Seguro de Automóvil: cómo detectarlo. 1999
46. Evolución y predicción de las tablas de mortalidad dinámicas para la población española. 1999
45. Los Impuestos en una economía global. 1999
42. La Responsabilidad Civil por contaminación del entorno y su aseguramiento. 1998

41. De Maastricht a Amsterdam: un paso más en la integración europea. 1998
39. Perspectiva histórica de los documentos estadístico-contables del órgano de control: aspectos jurídicos, formalización y explotación. 1997
38. Legislación y estadísticas del mercado de seguros en la comunidad iberoamericana. 1997
37. La responsabilidad civil por accidente de circulación. Puntual comparación de los derechos francés y español. 1997
36. Cláusulas limitativas de los derechos de los asegurados y cláusulas delimitadoras del riesgo cubierto: las cláusulas de limitación temporal de la cobertura en el Seguro de Responsabilidad Civil. 1997
35. El control de riesgos en fraudes informáticos. 1997
34. El coste de los riesgos en la empresa española: 1995
33. La función del derecho en la economía. 1997
32. Decisiones racionales en reaseguro. 1996
31. Tipos estratégicos, orientación al mercado y resultados económicos: análisis empírico del sector asegurador español. 1996
30. El tiempo del directivo. 1996
29. Ruina y Seguro de Responsabilidad Civil Decenal. 1996
28. La naturaleza jurídica del Seguro de Responsabilidad Civil. 1995
27. La calidad total como factor para elevar la cuota de mercado en empresas de seguros. 1995
26. El coste de los riesgos en la empresa española: 1993
25. El reaseguro financiero. 1995
24. El seguro: expresión de solidaridad desde la perspectiva del derecho. 1995

23. Análisis de la demanda del seguro sanitario privado. 1993
22. Rentabilidad y productividad de entidades aseguradoras. 1994
21. La nueva regulación de las provisiones técnicas en la Directiva de Cuentas de la C.E.E. 1994
20. El Reaseguro en los procesos de integración económica. 1994
19. Una teoría de la educación. 1994
18. El Seguro de Crédito a la exportación en los países de la OCDE (evaluación de los resultados de los aseguradores públicos). 1994
16. La legislación española de seguros y su adaptación a la normativa comunitaria. 1993
15. El coste de los riesgos en la empresa española: 1991
14. El Reaseguro de exceso de pérdidas 1993
12. Los seguros de salud y la sanidad privada. 1993
10. Desarrollo directivo: una inversión estratégica. 1992
9. Técnicas de trabajo intelectual. 1992
8. La implantación de un sistema de controlling estratégico en la empresa. 1992
7. Los seguros de responsabilidad civil y su obligatoriedad de aseguramiento. 1992
6. Elementos de dirección estratégica de la empresa. 1992
5. La distribución comercial del seguro: sus estrategias y riesgos. 1991
4. Los seguros en una Europa cambiante: 1990-95. 1991
2. Resultados de la encuesta sobre la formación superior para los profesionales de entidades aseguradoras (A.P.S.). 1991
1. Filosofía empresarial: selección de artículos y ejemplos prácticos. 1991

## LIVROS

La Responsabilidad Civil en el ámbito de los ciberriesgos. 2017

Longevidad y envejecimiento en el tercer milenio. 2017

El Ahorro en perspectiva histórica. 2016

Lo bueno, si breve... Microrrelatos de Seguros. 2016

The risk of longevity and its practical application to Solvency II. 2015

Historia de FIDES –Federación Interamericana de Empresas de Seguros. 2015

El riesgo de longevidad y su aplicación práctica a Solvencia II. 2014

Historia del Seguro en España. 2014

Actas del III Congreso Internacional de Nuevas Tecnologías: sus repercusiones en el seguro: internet, biotecnología y nanotecnología: 12 y 13 de noviembre de 2012, Santiago de Chile. 2013

Emergencia y reconstrucción: el antes y después del terremoto y tsunami del 27F en Chile. 2012

Riesgo sistémico y actividad aseguradora. 2012

La historia del seguro en Chile (1810-2010). 2012

Modelo de proyección de carteras de seguros para el ramo de decesos. 2011

Desarrollo comercial del seguro colectivo de dependencia en España. 2010

La mediación de seguros en España: análisis de la Ley 26/2006, de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2010

Museo del Seguro. Catálogo. 2010

Diccionario MAPFRE de Seguros. 2008

Teoría de la credibilidad: desarrollo y aplicaciones en primas de seguros y riesgos operacionales. 2008

El seguro de caución: una aproximación práctica. 2007

El seguro de pensiones. 2007

Las cargas del acreedor en el seguro de responsabilidad civil. 2006

Diccionario bilingüe de expresiones y términos de seguros: inglés-español, español-inglés. 2006

El seguro de riesgos catastróficos: reaseguro tradicional y transferencia alternativa de riesgos. 2005

La liquidación administrativa de entidades aseguradoras. 2005

## **INFORMES E RANKINGS**

Desde 1994 são publicados anualmente estudos que apresentam uma panorâmica concreta dos mercados seguradores europeus, da Espanha e Iberoamérica e que podem ser consultados em formato eletrônico em castellano ou em inglês pela página web: [www.fundacionmapfre.org](http://www.fundacionmapfre.org)

Mercado español de seguros

Mercado asegurador latinoamericano

Ranking de grupos aseguradores europeos

Ranking de grupos aseguradores iberoamericanos

Panorama económico y sectorial 2018

Regímenes de regulación de solvencia 2018

Elementos para el expansión del seguro en América Latina. 2017

Sistemas de Pensiones. 2017

Los millennials y el seguro en España. 2016

Tendencias de crecimiento de los mercados aseguradores de América Latina para 2016

Estudio social sobre la jubilación: expectativas y experiencias. 2015

La percepción social del seguro en España. 2014

Informe de predicción de la actividad aseguradora en España. 2014

La internacionalización de la empresa española: riesgos y oportunidades. 2014

El seguro en la sociedad y la economía españolas. 2013

Papel del seguro en el desarrollo sostenible. ICEA, 2013

Emprender en momentos de crisis: riesgos y factores de éxito. 2012

La percepción social del seguro en España. 2012



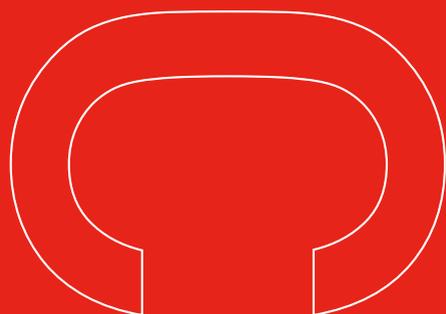
Você pode baixar a versão digital  
no **Centro de Documentação**

[www.fundacionmapfre.org/documentacion](http://www.fundacionmapfre.org/documentacion)



**FM** Fundación **MAPFRE**

Fundación **MAPFRE**



228

Paseo de Recoletos, 23  
28004 Madrid (España)  
[www.fundacionmapfre.org](http://www.fundacionmapfre.org)

P.V.P.: 20€

978-84-9844-711-8



9 788498 447118