

Instituto de Ciencias del Seguro

**INVESTIGACIONES  
EN SEGUROS  
Y GESTIÓN DEL RIESGO:  
RIESGO 2011**

José Manuel Fera  
Enrique J. Jiménez  
Montserrat Guillén  
Editores

PONENCIAS DEL IV CONGRESO “RIESGO 2011”  
PAPERS OF THE 4<sup>TH</sup> WORKSHOP “RISK 2011”

20 y 21 de octubre  
Sevilla (España)

**FUNDACIÓN MAPFRE**

© FUNDACIÓN MAPFRE

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin el permiso escrito del autor o de FUNDACIÓN MAPFRE

FUNDACIÓN MAPFRE no se hace responsable del contenido de esta obra, ni el hecho de publicarla implica conformidad o identificación con la opinión del autor o autores.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin el permiso escrito del autor o del editor.

© 2011, FUNDACIÓN MAPFRE  
Paseo de Recoletos 23  
28004 Madrid (España)

[www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro)  
[publicaciones.ics@mapfre.com](mailto:publicaciones.ics@mapfre.com)

ISBN: 978-84-9844-263-2  
Depósito Legal: SE-7165-2011  
Printed by Publidisa

## PRESENTACIÓN

Desde 1975, FUNDACIÓN MAPFRE desarrolla actividades de interés general para la sociedad en distintos ámbitos profesionales y culturales, así como acciones destinadas a la mejora de las condiciones económicas y sociales de las personas y sectores menos favorecidos de la sociedad. En este marco, el Instituto de Ciencias del Seguro de FUNDACIÓN MAPFRE promueve y desarrolla actividades educativas y de investigación en los campos del seguro y de la gerencia de riesgos.

En el área educativa, su actuación abarca la formación académica de postgrado y especialización, desarrollada en colaboración con la Universidad Pontificia de Salamanca, así como cursos y seminarios para profesionales, impartidos en España e Iberoamérica. Estas tareas se extienden hacia otros ámbitos geográficos mediante la colaboración con instituciones españolas e internacionales, así como a través de un programa de formación a través de Internet.

El Instituto promueve ayudas a la investigación en las áreas científicas del riesgo y del seguro y mantiene un Centro de Documentación especializado en seguros y gerencia de riesgos, que da soporte a sus actividades.

Asimismo, el Instituto promueve y elabora informes periódicos y publica libros sobre el seguro y la gerencia de riesgos, con objeto de contribuir a un mejor conocimiento de dichas materias. En algunos casos estas obras sirven como referencia para quienes se inician en el estudio o la práctica del seguro, y en otros, como fuentes de información para profundizar en materias específicas.

Dentro de estas actividades se encuadra la publicación de este libro que recoge los textos presentados en la IV Reunión de Investigación en Seguros y Gestión del Riesgo 2011, celebrada en Sevilla el 20 y 21 de octubre.

Desde hace unos años, Internet es el medio por el que se desarrollan mayoritariamente nuestras actividades, ofreciendo a los usuarios de todo el mundo la posibilidad de acceder a las mismas de una manera rápida y eficaz mediante soportes Web de última generación a través de [www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro)

## **RIESGO 2011**

### **COMITÉ CIENTÍFICO**

Edward Altman, *Stern School of Business, New York University*

Mercedes Ayuso, *Universidad de Barcelona*

David Camino, *Universidad Carlos III*

Clara Cardone-Riportella, *Universidad Carlos III*

Santiago Carrillo, *Risklab*

Marcelo Cruz, *Stern School of Business, New York University*

José Manuel Fera, *Universidad Pablo de Olavide*

Emilio Gómez-Déniz, *Universidad de Las Palmas de Gran Canaria*

Antonio Díaz, *Universidad Castilla-La Mancha*

Santiago Forte, *ESADE Business School*

Flor M<sup>a</sup> Guerrero, *Universidad Pablo de Olavide*

Monserrat Guillén, *Universidad de Barcelona*

Antonio J. Heras, *Universidad Complutense*

Enrique Jiménez, *Universidad Pablo de Olavide*

Antonio Partal, *Universidad de Jaén*

José María Sarabia, *Universidad de Cantabria*

Ola Sholarin, *Westminster Business School of London*

Francisco Vázquez-Polo, *Universidad de Las Palmas de Gran Canaria*

Juan Vilar, *Universidade da Coruña*

# ÍNDICE

PRÓLOGO .....	1
José Manuel Fera, Enrique J. Jiménez y Montserrat Guillén	
I. METODOLOGÍA.....	3
Ponencia 1. Antonio José Sáez Castillo, Faustino Prieto Mendoza y José María Sarabia Alegría <i>Modelización estadística mediante distribuciones PPS de pérdidas por daños debidas a riesgos extremos en función de algún regresor categórico.....</i>	5
Ponencia 2. Antoni Ferri Vidal <i>Sensibilidad del SCR del riesgo de suscripción no vida del mercado español. Aproximación estándar versus modelo interno .....</i>	17
Ponencia 3. Eduardo Trigo Martínez, Rafael Moreno Ruiz, J. Iñaki De La Peña Esteban e Iván Iturricastillo Plazaola <i>Principios de asignación de capital en el ámbito de las entidades bancarias...</i>	31
Ponencia 4. Victoriano José García García, Emilio Gómez Déniz and Francisco José Vázquez Polo <i>A Generalization of the Lognormal Distribution and its Applications.....</i>	45
Ponencia 5. Lluís Bermúdez and Dimitris Karlis <i>Actuarial Implications when Modelling Bivariate Claim Counts.....</i>	59
Ponencia 6. Hong Mao, Krzysztof M. Ostaszewski and Youyu Zhang <i>Dynamic Models for Valuation of Wrongful Death Compensation .....</i>	73
Ponencia 7. Emilio Gómez Déniz, José María Pérez Sánchez, Francisco José Vázquez Polo and Agustín Hernández Bastida <i>A Flexible Negative Binomial Mixture Distribution with Applications in Actuarial Statistics .....</i>	83

II. SEGUROS.....	91
Ponencia 8. Montserrat Hernández-Solís, Cristina Lozano-Colomer y José Luis Vilar-Zanón <i>Tarificación en seguros de vida con la medida de riesgo esperanza distorsionada</i> .....	93
Ponencia 9. Mercedes Ayuso Gutiérrez, Montserrat Guillén Estany y Ana María Pérez-Marín <i>Cálculo de escenarios de caída de cartera considerando contagio entre las cancelaciones en seguros generales</i> .....	109
Ponencia 10. Miguel Santolino Prieto <i>Análisis de endogeneidad en el cálculo de las indemnizaciones por lesiones derivadas de accidentes de tráfico</i> .....	123
Ponencia 11. Irene Albarrán Lozano, Pablo Alonso González and David Camino Blasco <i>Insurance Regulation and Business Profiles: Organizational Form and Solvency Risk</i> .....	137
Ponencia 12. Zuleyka Díaz Martínez, Eva María del Pozo García and María Jesús Segovia Vargas <i>Selection of Risk Factors in Automobile Insurance by Decision Lists</i> .....	153
Ponencia 13. Manuela Alcañiz Zanón y Dídac Planas-Paz <i>Víctimas sobre dos ruedas: ¿afectó en Barcelona la relajación de los requisitos para conducir motocicletas ligeras?</i> .....	169
Ponencia 14. Ignacio Moreno Gabaldón, Francisco José Vázquez Hernández y Richard Watt <i>Experimentación en seguros: aplicación al estudio del fraude</i> .....	181
Ponencia 15. Arelly Ornelas Vargas <i>Análisis y tarificación en seguros de Salud grupo</i> .....	197
Ponencia 16. José María Pérez Sánchez, Miguel Ángel Negrín Hernández, Catalina García García y Emilio Gómez Déniz <i>Análisis bayesiano aplicado a la detección de variables en seguros de automóviles</i> .....	211

Ponencia 17. M <sup>a</sup> Carmen Melgar Hiraldo y José Antonio Ordaz Sanz <i>Una aproximación al papel del grado de cobertura en la siniestralidad declarada y no declarada en el seguro de automóviles a través de los modelos inflados de ceros</i> .....	221
<b>III. GESTIÓN DEL RIESGO</b> .....	<b>237</b>
Ponencia 18. José Luis Miralles Quirós and Julio Daza Izquierdo <i>Extreme Values and Volatility Forecasting. The Parkinson Range Estimator as an Alternative to the Carr Model</i> .....	239
Ponencia 19. Susana Álvarez Díez, Juan Samuel Baixauli Soler and María Belda Ruiz <i>ESO Risk-Taking Effects: A Sensitivity Analysis of Delta and Vega</i> .....	253
Ponencia 20. Carlos Bousoño Calzón, Antonio Heras Martínez and Piedad Tolmos Rodríguez-Piñero <i>The Estimation of the Term Structure of Interest Rates under the Compressive Sampling Approach: Some Initial Considerations</i> .....	277
Ponencia 21. Eva Boj del Val, Josep Fortiana Gregori, Anna Esteve Gómez, M <sup>a</sup> Mercè Claramunt Bielsa y Teresa Costa Cor <i>Aplicación de un modelo de regresión logística basado en distancias en el problema de Credit Scoring</i> .....	293
Ponencia 22. Antonio Jesús Blanco Oliver, Ana Isabel Irimia Diéguez and María Dolores Oliver Alfonso <i>Credit Scoring Model for Small Firms in the UK Using Logistic Regression</i> .....	307
Ponencia 23. Ana-Maria Săndică and Alexie Ciprian Alupoai <i>Credit Risk Management and Macroeconomic Conditions</i> .....	323
Ponencia 24. Pilar Gómez Fernández-Aguado y Antonio Partal Ureña <i>Modelo de primas ajustadas al riesgo en los sistemas de garantía de depósitos europeos: implicaciones para la banca española</i> .....	345
<b>IV. PROTECCIÓN SOCIAL Y DEPENDENCIA</b> .....	<b>363</b>
Ponencia 25. Ramón Alemany Leira y Catalina Bolancé Losilla <i>Esperanza de vida y coste de los cuidados de larga duración en la población española</i> .....	365
Ponencia 26. M <sup>a</sup> Manuela Segovia González, Ana M <sup>a</sup> Martín Caraballo, Patricia Herranz Peinado y Flor M <sup>a</sup> Guerrero Casas <i>La dependencia como riesgo asegurable con datos de la edad 2008</i> .....	379

Ponencia 27. José Enrique Devesa Carpio, Mar Devesa Carpio, Inmaculada Domínguez Fabián, Borja Encinas Goenechea, Robert Meneu Gaya y Amparo Nagore García <i>La sostenibilidad del sistema de protección del desempleo español en el período 1981-2008</i> .....	395
Ponencia 28. Mara Madaleno and Carlos Pinho <i>About CO<sub>2</sub> Allowances Hedging and Utility Gains</i> .....	417
Colección “Cuadernos de la Fundación” Instituto de Ciencias del Seguro.....	449



## PRÓLOGO

La crisis financiera en la que nos encontramos inmersos ha cuestionado las prácticas de gestión del riesgo llevadas a cabo por determinadas entidades. Conscientes de este escenario, organismos reguladores, supervisores nacionales y las propias instituciones implicadas, no han tardado en plantear una revisión urgente del contexto normativo, tanto en el sector bancario como en el asegurador. En este sentido, las nuevas propuestas de Basilea III y Solvencia II, respectivamente, marcan las pautas a seguir en la gestión y cobertura eficiente del riesgo, salvaguardando la estabilidad del sistema financiero.

Paralelamente, el ámbito académico —no ajeno a la realidad socioeconómica— ha contribuido, a través de sus investigaciones, al perfeccionamiento de los modelos cuantitativos de medición, gestión y cobertura del riesgo. Prueba de ello, es la presente publicación, la cual recopila las principales aportaciones científicas presentadas y discutidas en el *4th Workshop on Risk Management and Insurance Research (RISK 2011)*, celebrado en la Universidad Pablo de Olavide de Sevilla, los días 20 y 21 de octubre. RISK 2011 recoge el testigo de las anteriores reuniones celebradas en Barcelona (2005), Cantabria (2007) y Madrid (2009). Este foro de discusión se ha convertido en un referente científico para investigadores y profesionales de las Ciencias Actuariales y Financieras, como pone de manifiesto el gran número de ponencias recibidas.

Concretamente, los trabajos han sido agrupados en cuatro grandes bloques: Metodología, Seguros y Reaseguros, Gestión de Riesgos y Protección Social y Dependencia. La clasificación realizada pretende dar continuidad a la seguida en anteriores ediciones, si bien, algunas aportaciones, por su temática, pudieran haberse incluido en otra categoría.

Quisiéramos agradecer al Instituto de Ciencias del Seguro de la Fundación Mapfre y, en particular, a su Directora General Dña. Mercedes Sanz, así como a Dña. Ana Sojo, y el resto de miembros del departamento de Publicaciones de dicha institución, por su esmerada labor en la edición de este libro.

Por último, dedicamos una mención especial a los miembros el Comité Científico —compuesto por investigadores de reconocido prestigio internacional— quienes

han realizado una ardua labor de revisión y selección de los trabajos, en aras de garantizar la calidad y el rigor científico de RISK 2011 y, por ende, de este *Cuaderno de la Fundación*.

José Manuel Fera  
Enrique Jiménez  
Montserrat Guillén

## **I. METODOLOGÍA**

## Ponencia 1

# MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA MEDIANTE DISTRIBUCIONES PPS DE PÉRDIDAS POR DAÑOS DEBIDAS A RIESGOS EXTREMOS EN FUNCIÓN DE ALGÚN REGRESOR CATEGÓRICO

Antonio José Sáez Castillo, Faustino Prieto Mendoza  
y José María Sarabia Alegría

### RESUMEN

La distribución Pareto estable positiva (que representaremos mediante PPS) se ha mostrado como un modelo estadístico altamente competitivo frente a otras distribuciones para el ajuste de datos de pérdidas. El presente trabajo aborda la posibilidad de incorporar en dichos ajustes PPS la información que puedan proporcionar regresores conocidos sobre los datos. Se plantea y estudia un modelo estadístico con la PPS, incorporando regresores categóricos sobre uno de los parámetros de forma de la distribución. Se presentan dos aplicaciones en el ámbito de los seguros, que ponen de manifiesto la versatilidad del modelo. En la primera aplicación se analizan datos de pérdidas debidas a daños por huracanes en relación con la categoría del huracán. En la segunda de las aplicaciones se estudian datos de pérdidas mensuales por daños, debidos a inundaciones, dependientes de una componente estacional determinada por el mes. Tras el correspondiente análisis estadístico, se concluye que el modelo propuesto se ajusta satisfactoriamente en las dos situaciones.

**Palabras clave:** Distribución Pareto estable positiva, pérdidas por daño, estadístico AIC de Akaike.

### 1. INTRODUCCIÓN

La distribución Pareto estable positiva (que representaremos mediante PPS) se ha mostrado como un modelo adecuado para el ajuste de datos de pérdidas por riesgos extremos. La posibilidad de incluir regresores en estos ajustes facilitaría, por un lado, una mayor precisión en las estimaciones y, por otro, la posibilidad de detectar variables que afecten significativamente a los daños.

En este trabajo se muestran dos aplicaciones en este contexto. En la primera aplicación se consideran datos relativos a las pérdidas por daños debidas a huraca-

nes en USA entre 1900 y 1995 (Pielke y Landsea, 1998), y se estudia en qué medida afecta a los mismos la categoría del huracán. En la segunda de las aplicaciones se consideran datos mensuales de cuantías pagadas por daños ocasionados por inundación y cubiertos por el Consorcio de Compensación de Seguros entre los años 2003 y 2009, incluyendo en el análisis una componente estacional que captura el efecto mensual.

En las dos situaciones se confirma gráfica y analíticamente el comportamiento PPS de los datos en estudio. Por otro lado, se observa que la heterogeneidad de los datos en relación a los regresores parece afectar principalmente al parámetro de forma  $\lambda$  de dicha distribución, lo que motiva la inclusión de los regresores en este parámetro. Los resultados confirman que la heterogeneidad dada por los regresores en ambos escenarios es significativa, y de este modo disponemos de una especificación correcta del modelo.

Los contenidos del trabajo son los siguientes. La sección 2 presenta la distribución PPS y su aplicación en el contexto de pérdidas por daños. La sección 3 plantea el modelo con regresores categóricos así como su estimación. En la sección 4 se presentan las aplicaciones empíricas con datos de pérdidas por huracanes e inundaciones. Los resultados de las estimaciones se presentan en la sección 5. Las conclusiones del trabajo se recogen en la sección 6.

## 2. LA DISTRIBUCIÓN PPS

La distribución PPS viene definida en términos de la función de distribución  $F(x) = \Pr(X \leq x)$ , como

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\lambda \left[\log\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]^{\nu}\right\}, \quad x \geq \sigma \quad (1)$$

y  $F(x) = 0$  si  $x < \sigma$ , donde  $\lambda, \sigma, \nu > 0$ . Una variable aleatoria con función de distribución (1) la representaremos mediante  $X \approx \text{PPS}(\lambda, \sigma, \nu)$ , siendo  $\lambda$  y  $\nu$  parámetros de forma y  $\sigma$  parámetro de escala. La clase (1) incluye dos importantes casos particulares: (a) La ley de Zipf ( $\lambda = \nu = 1$ ) y (b) la distribución clásica Pareto ( $\nu = 1$ ), de modo que  $\text{PPS}(\lambda, \sigma, 1) \equiv \text{Pa}(\lambda, \sigma)$ . Modelos flexibles se obtienen cuando  $\nu > 1$ .

La distribución PPS ha sido utilizada para modelizar datos relativos al tamaño de ciudades (Sarabia y Prieto, 2009), donde se trata de ajustar todo el rango de la muestra. Dicha distribución es bastante flexible en el ajuste de datos y admite situaciones de cero y unimodalidad. Este último aspecto la convierte en buena candidata para el ajuste de datos de pérdidas. Diversos modelos de distribuciones de pérdidas pueden encontrarse en Klugman *et al.* (2004), Sarabia *et al.* (2006), Boland (2007) y Gómez-Déniz y Sarabia (2008).

En este contexto, la distribución PPS ha sido utilizada por Guillén *et al.* (2011) para modelizar datos de pequeñas, moderadas y grandes pérdidas sin necesidad de

fijar un umbral para el comportamiento de la cola. Estos autores concluyen que la distribución PPS da lugar a mejores ajustes que las distribuciones de pérdidas comúnmente utilizadas, en el caso de pérdidas moderadas y grandes. La metodología empleada evita el problema de elegir el umbral, y es fácil de implementar en análisis cuantitativo de riesgos.

### 3. DESCRIPCIÓN Y AJUSTE DEL MODELO

Sea  $X$  la variable relativa a las pérdidas por daños ocasionados por algún riesgo extremo, y sea  $u$  el vector de covariables que se conocen en relación a dichos datos. El modelo viene dado por:

$$\log(-\log(1 - F(x|u))) = \log(\lambda_u) + v \log\left(\frac{x}{\sigma}\right) = u\beta + v \log\left(\log\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)$$

lo que implica una relación lineal entre  $\log(-\log(1 - F(x|u)))$  y  $\log(\log(\frac{x}{\sigma}))$  dados los parámetros del modelo. Por lo tanto, una validación gráfica del modelo pasaría por representar  $y_i = \log(-\log(1 - F_n(x_i|u)))$ , donde  $F_n(x_i|u)$  es la función de distribución empírica basada en los datos disponibles de la submuestra de datos con valor  $u$  de las covariables, frente a  $z_i = \log(\log(\frac{x_i}{\sigma}))$ , comprobando su linealidad, dado que podemos expresarlo como

$$y_i = u_i'\beta + vz_i \quad (2)$$

Nótese que esta representación gráfica sólo es útil desde el punto de vista de la confirmación de la precisión del modelo, cuando se tiene un número razonable de valores  $\{(z_i, y_i|u)\}$  en la muestra con los mismos valores de los regresores,  $u$ , lo que ocurre únicamente con covariables categóricas.

Con respecto al ajuste del modelo, un primer método de estimación consiste en ajustar el modelo de regresión lineal múltiple asociado a la ecuación (2), obteniendo estimaciones de  $\beta$  y  $v$ , considerando como valor de  $\sigma$  el dato mínimo multiplicado por 0.5. Estas estimaciones, a su vez, pueden considerarse como valores iniciales del método de máxima verosimilitud, implementable mediante la optimización directa de la función de log-verosimilitud:

$$\log L(\beta, v, \sigma) = \sum_i u_i'\beta + n \log v + (v-1) \sum_i \log(z_i) - \sum_i e^{u_i'\beta} z_i^v - \sum_i \log(x_i)$$

Dicha optimización ha sido realizada mediante las funciones *nlm* y *optim* de R (R Development Core Team 2010).

## 4. APLICACIÓN EMPÍRICA A DATOS DE PÉRDIDAS POR HURACANES E INUNDACIONES

### 4.1. Datos y Metodología

En el presente trabajo se han considerado dos conjuntos de datos relativos a pérdidas por eventos extraordinarios. El primer conjunto de datos se refiere a datos normalizados de daños debidos a huracanes en USA entre los años 1900-1995, publicados por Pielke y Landsea en 1998, expresados en billones de dolares US\$ constantes del año 1995. Los datos se presentan junto con el año y la magnitud de cada uno de dichos huracanes. El segundo conjunto de datos se refieren a datos normalizados de cuantías pagadas mensualmente por el Consorcio de Compensación de Seguros en España por siniestros debido a inundaciones entre los años 2003-2009. Los datos han sido publicados por dicho organismo en octubre de 2010, expresados en euros actualizados a 31/12/2009, destacando que la inundación ha sido en dicho periodo la causa de siniestralidad de mayor peso para dicha entidad con un 74,5% de la siniestralidad total.

**Cuadro 1**

Datos de huracanes. Datos normalizados de daños debidos a huracanes en USA entre 1900 y 1995, en función de la categoría del huracán, expresados en billones de dolares USA constantes del año 1995.

Año	Categoría	Daños	Año	Categoría	Daños	Año	Categoría	Daños
20	4	72303	72	1	10705	49	3	5838
92	4	33094	55	1	10232	19	4	5368
0	4	26619	89	4	9380	83	3	4056
15	4	22602	54	3	9066	70	3	3338
44	3	16864	47	4	8308	64	2	3108
38	3	16629	61	4	7069	95	3	3000
28	4	13795	54	4	7039	64	2	2435
65	3	12434	44	3	6536	85	1	2399
60	4	12048	45	3	6313	57	4	2396
69	5	10965	79	3	6293	5	3	2266

Fuente: Pielke y Landsea (1998)

## Cuadro 2

Datos de inundaciones. Distribución de la cuantía pagada, por mes y año, correspondientes a daños por inundaciones; los importes están expresados en euros actualizados a 31/12/2009.

	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
ENERO	2.641.284	1.508.756	3.450.030	1.918.098	412.834	17.113.689	101.589.576
FEBRERO	3.722.874	1.255.096	333.395	1.029.780	608.670	6.323.464	90.753.131
MARZO	22.914.190	583.993	3.311.562	3.480.937	16.363.068	513.551	117.979.969
ABRIL	4.670.308	298.488	2.323.463	8.254.956	2.315.269	132.319	33.746.746
MAYO	7.660.358	1.194.080	1.361.406	28.781.276	9.535.640	1.430.012	90.433.445
JUNIO	2.143.464	1.015.509	4.886.804	375.617	62.345.073	1.318.020	307.507.001
JULIO	2.717.444	334.082	12.949.142	165.310	4.203.315	644.899	113.240.255
AGOSTO	1.605.329	4.855.209	3.036.265	6.893.603	774.835	11.625.988	138.602.242
SEPTIEMBRE	52.351.634	17.532.425	62.414.130	57.950.318	58.041.683	66.710.003	675.387.123
OCTUBRE	2.700.490	55.779.575	19.686.233	99.879.365	56.812.693	5.446.261	607.798.821
NOVIEMBRE	1.111.035	5.051.616	42.275.161	12.724.090	3.419.428	2.303.676	614.367.580
DICIEMBRE	3.537.923	1.158.958	1.992.233	10.348.179	15.367.328	21.491.651	240.162.179
TOTAL	107.776.333	90.567.784	158.019.823	231.801.531	230.199.836	135.053.534	3.131.568.069

Fuente: Consorcio de Compensación de Seguros.

En ambos casos se trata de regresores categóricos, por lo que se han introducido mediante variables *dummy* dicotómicas, considerando alguna categoría de referencia. En el caso de los daños por huracanes, dicha categoría ha sido la tres, siendo necesarias 4 nuevas variables *dummy*,  $cat_1$ ,  $cat_2$ ,  $cat_4$  y  $cat_5$ , para la codificación de las 5 categorías de huracán: así, la categoría 3 viene codificada como  $cat_1 = cat_2 = cat_4 = cat_5 = 0$ , y la categoría 5, por ejemplo, como  $cat_1 = cat_2 = cat_4 = 0$ ,  $cat_5 = 1$ ; en la aplicación a los daños por inundación hemos optado por considerar enero como mes de referencia e introducir 11 variables dicotómicas para el resto de meses.

En primer lugar, con el objetivo de comprobar el comportamiento PPS de ambos conjuntos de datos, se han ajustado y comparado seis modelos: la distribución clásica de Pareto, la distribución Lognormal triparamétrica, la distribución Burr Tipo II (también conocida como distribución Singh-Maddala), la distribución Dagum, la distribución Pareto Generalizada y, finalmente, la distribución Pareto Positiva Estable (PPS). Dicha comparación se ha llevado a cabo utilizando el Criterio de Información de Akaike, el cual viene dado por la expresión  $AIC = 2d - 2\log L$ , donde  $d$  es el número de parámetros de cada uno de dichos modelos y donde  $\log L$  es la log-verosimilitud de dicho modelo estimado donde es máximo verosímil. Finalmente, para confirmar dicho comportamiento PPS se han realizado los gráficos log-log y doble log-log correspondientes.



Un vez confirmada la pertenencia a la familia PPS del conjunto de datos de interés, se han introducido los regresores “categoría de huracán” y “mes” en cada modelo respectivamente, tal como se ha descrito en el apartado anterior, de cara a modelizar la heterogeneidad asociada a dichas covariables.

**Cuadro 3**  
Funciones de distribución y densidad consideradas como modelos

Distribución	$F(x)$	$f(x)$
Pareto Clásica	$1 - \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\alpha}, x \geq \sigma > 0$	$\frac{\alpha\sigma^\alpha}{x^{\alpha+1}}, x \geq \sigma > 0$
Lognormal Triparamétrica	$\Phi\left(\frac{\log(x-\gamma)-\mu}{\sigma}\right), x > \gamma$	$\frac{1}{\sigma(x-\gamma)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x-\gamma)-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, x > \gamma$
Dagum	$\left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^a\right]^{-p}, x > 0$	$\frac{apbx^{ap-1}}{b^{ap}[1 + (x/b)^a]^{1+p}}, x > 0$
Burr Tipo II	$1 - \left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^a\right]^{-q}, x > 0$	$\frac{aqx^{a-1}}{b^a[1 + (x/b)^a]^{1+q}}, x > 0$
Pareto generalizada	$\begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{kx}{\sigma}\right)^{1/k}, & k \neq 0, \\ 1 - \exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right), & k = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} \sigma^{-1} \left(1 - \frac{kx}{\sigma}\right)^{1/k-1}, & k \neq 0, \\ \sigma^{-1} \exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right), & k = 0. \end{cases}$
PPS	$1 - \exp\{-\lambda[\log(x/\sigma)]^\nu\}, x \geq \sigma > 0$	$\frac{\lambda\nu[\log(x/\sigma)]^{\nu-1}}{x} \exp\{-\lambda[\log(x/\sigma)]^\nu\}, x \geq \sigma > 0$

## 5. RESULTADOS

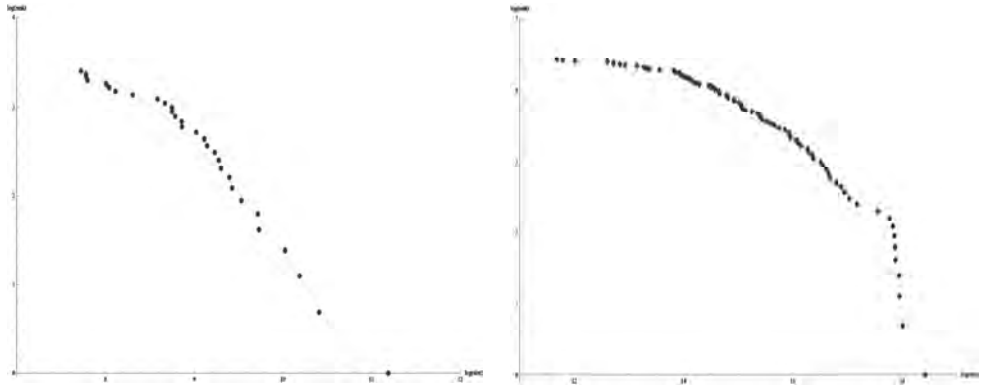
El Cuadro 4 muestra los AIC correspondientes al ajuste de los datos de pérdidas, ignorando por el momento la covariable, mediante las distribuciones Pareto, Log-normal trip., Burr Tipo II, Dagum, Pareto Generalizada y PPS. Se comprueba que los ajustes más precisos vienen dados por las distribuciones log-normal y PPS. La Figura 1 muestra los gráficos log-log mientras que las Figuras 2 (arriba) y 3 (a la izquierda) muestran los gráficos doble log-log, que en ambos casos denotan un comportamiento adecuado al perfil PPS.

**Cuadro 4**  
AIC correspondientes a los ajustes sin covariables de los datos  
mediante las seis distribuciones propuestas

	AIC					
	Pareto	Log-normal trip.	Burr Tipo II	Dagum	Pareto Gen.	PPS
Huracanes	619.9	615.9	618.9	618.7	626.0	616.2
Inundaciones	2942.1	2879.1	2883.9	2883.6	2881.9	2878.8

**Figura 1**

Gráficos log-log correspondientes a los ajustes mediante distribuciones PPS de los datos sobre daños por huracanes (izquierda) y sobre daños por inundaciones (derecha). Datos observados (puntos) y distribución PPS (línea sólida).



#### 4.2. Datos sobre huracanes en función de la categoría

El Cuadro 5 muestra los detalles del ajuste del modelo. Hemos tomado la categoría 3 como categoría de referencia por ser el valor central y porque la Figura 2 muestra la recta correspondiente a dicha categoría también aproximadamente en el centro de la gráfica. Observamos diferencias significativas entre las categorías 2 y 3 y 4 y 3. Obsérvese que a pesar de tener un único dato de huracanes de categoría 5, el ajuste conjunto del modelo especifica un ajuste condicional para huracanes de categoría 5 dado por una  $PPS(\lambda = e^{0.95-0.51}, \sigma = 1719.61, \nu = 2.37)$ .

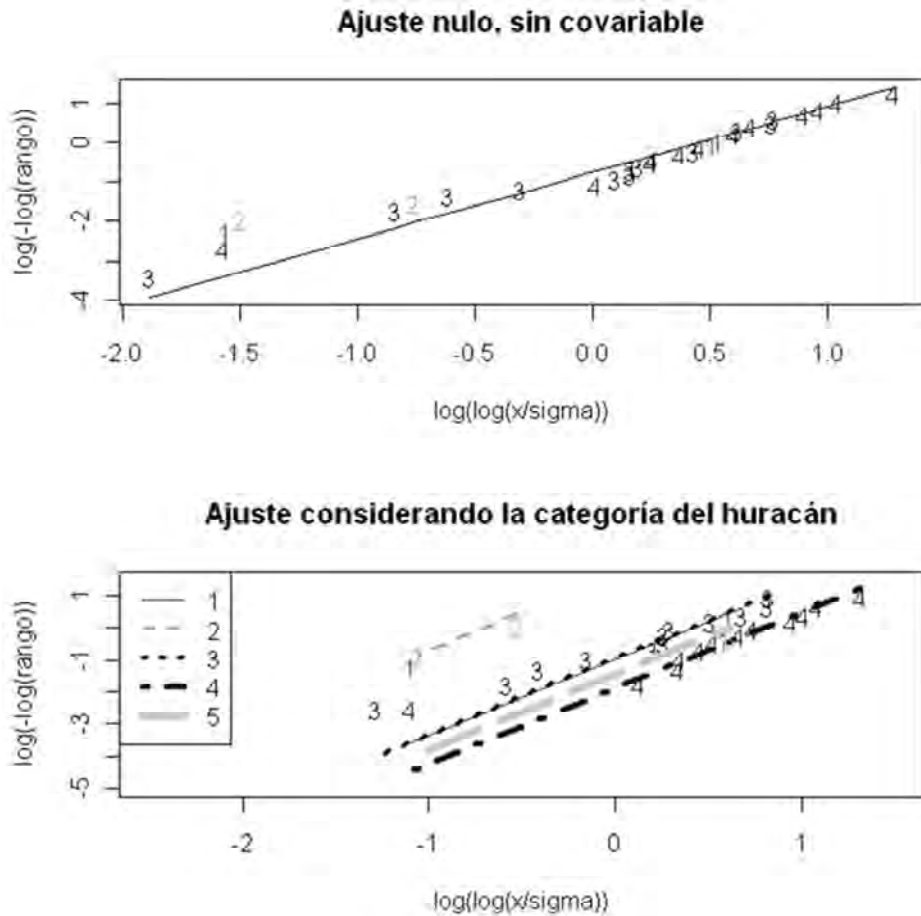
**Cuadro 5**

Parámetros estimados y errores estándar, mediante los ajustes de la distribución PPS, con la covariable categoría (arriba) y sin ella (abajo), de los datos de daños por huracanes. En los parámetros relativos a las covariables aparece también el valor  $z$  y el  $p$ -valor asociado

Parámetros	Estimaciones	Errores estándar	$z$	$p$
$PPS(\lambda = e^{\mu\beta}, \sigma, \nu)$ , AIC = 616,2				
$\beta_0$	-0.95	0.94	-1.02	0.31
Categ. 1	-0.05	0.65	-0.08	0.93
Categ. 2	2.64	0.90	2.95	0.00
Categ. 4	-0.93	0.45	-2.08	0.04
Categ. 5	-0.51	1.04	-0.49	0.62
$\nu$	2.37	0.80		
$\sigma$	1719.61	554.46		
$PPS(\lambda = e^{\beta_0}, \sigma, \nu)$ , AIC = 612,5				
$\beta_0$	-0.76	0.64	1.18	0.24
$\nu$	1.68	0.57		
$\sigma$	1946.75	499.33		

En la Figura 2, de cara a valorar la bondad de los ajustes condicionales, debe tenerse en cuenta lo reducido del número de datos, sobre todo en algunas categorías, lo que puede afectar fuertemente a las variaciones de las funciones de distribución empíricas condicionales con respecto a sus homólogas poblacionales. En cualquier caso, este gráfico pone de manifiesto la heterogeneidad existente en los datos en relación con la categoría del huracán.

Finalmente, señalar que el test de razón de verosimilitudes (TRV) confirma la mejoría significativa del modelo *PPS* con la covariable categoría frente al modelo simple sin ella ( $p$ -valor = 0.02).



**Figura 2**

Gráficos doble log-log del ajuste de los datos de daños por huracanes del modelo sin la covariable (arriba) y con la covariable (abajo)

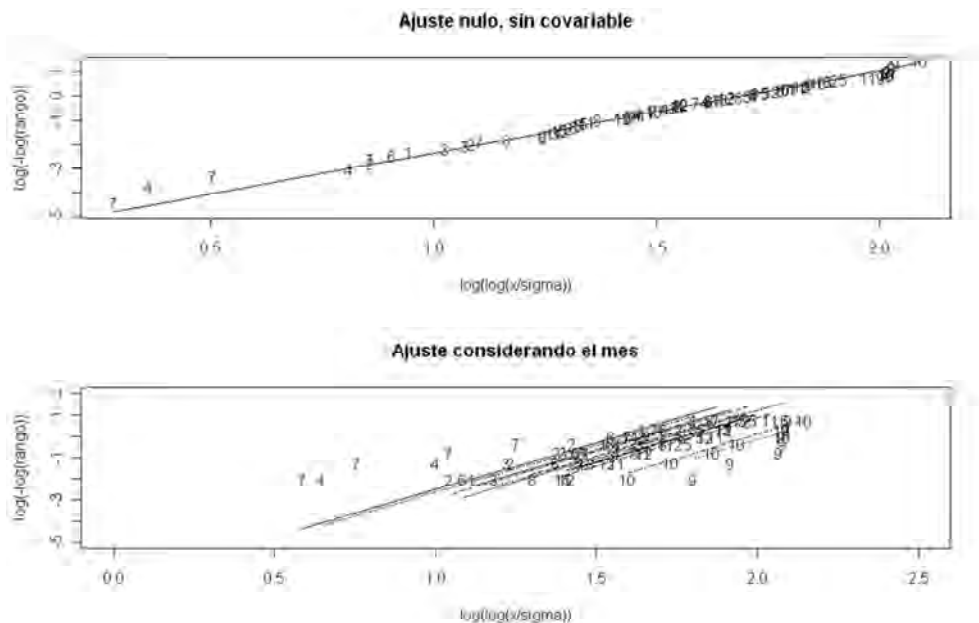
### 4.3. Datos sobre inundaciones en función del mes

Los detalles del ajuste se muestran en el Cuadro 6. En esta ocasión no hay un valor de referencia claro, por lo que hemos optado por mantener el primero de ellos, el mes de enero, como referencia. El TRV de nuevo confirma la significación del modelo con la covariable frente al modelo simple sin ella ( $p$ -valor = 0.001). En cuanto a los valores estimados de los parámetros, aparecen diferencias significativas en los parámetros de forma del mes de enero frente a los meses de septiembre y octubre. En las Figuras 3 y 4, donde aparecen los ajustes condicionales de cada mes, se observa de hecho que dichos meses presentan diferencias relevantes frente al resto de meses, diferencias que quedan ocultas en el ajuste conjunto. También resulta llamativo lo que ocurre en el mes de julio, y quizá también el de septiembre, donde parece que la hipótesis de un parámetro  $\nu$  común a todos los meses es menos realista. Como conclusión, los resultados, desde el punto de vista gráfico y analítico, confirman la presencia de una componente estacional significativa en la naturaleza de los datos.

**Cuadro 6**

Parámetros estimados y errores estándar, mediante los ajustes de la distribución PPS, con y sin la covariable mes, de los datos de daños por inundaciones. En las covariables aparece también el valor  $z$  y el  $p$ -valor asociado.

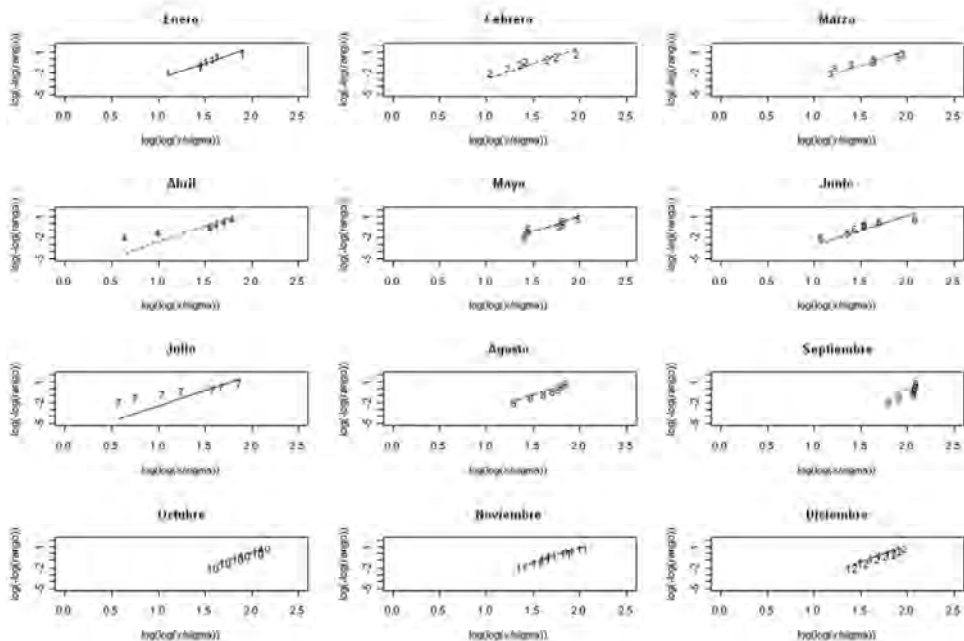
Parámetros	Estimaciones	Errores estándar	$z$	$p$
PPS( $\lambda = e^{\mu\beta}, \sigma, \nu$ ), AIC = 2870,02				
$\beta_0$	-7.29	2.28	-3.20	0.00
Febrero	-0.10	0.54	-0.18	0.86
Marzo	-0.32	0.54	-0.59	0.56
Abril	0.21	0.54	0.39	0.70
Mayo	-0.56	0.54	-1.03	0.30
Junio	-0.41	0.54	-0.75	0.45
Julio	0.34	0.54	0.63	0.53
Agosto	-0.29	0.54	-0.53	0.59
Septiembre	-1.74	0.55	-3.14	0.00
Octubre	-1.50	0.55	-2.71	0.01
Noviembre	-0.76	0.54	-1.39	0.16
Diciembre	-0.60	0.54	-1.12	0.26
$\nu$	4.44	1.82		
$\sigma$	19615.01	13612.24		
PPS( $\lambda = e^{\beta_0}, \sigma, \nu$ ), AIC = 2878,80				
$\beta_0$	-5.78	1.87	-3.09	0.00
$\nu$	3.42	0.74		
$\sigma$	31477.95	22160.59		



**Figura 3**  
Gráficos doble log-log del ajuste de los datos de daños por inundaciones del modelo sin la covariable (arriba) y con la covariable (abajo)

## 5. CONCLUSIONES

La distribución Pareto estable positiva es un modelo estadístico altamente competitivo frente a otras distribuciones para el ajuste de datos de pérdidas. En el presente trabajo se ha propuesto un nuevo modelo que incorpora la información proporcionada por regresores categóricos conocidos sobre los datos. Esta situación es muy habitual en la práctica actuarial. Se han propuesto dos aplicaciones en el ámbito de los seguros que ponen de manifiesto la versatilidad del modelo. El primer conjunto de datos se refiere a pérdidas debidas a daños por huracanes, y son analizados en relación con la categoría del huracán. El segundo conjunto de datos se refieren a pérdidas mensuales por daños debidos a inundaciones. Dichos datos vienen afectados por una componente estacional determinada por el mes. La adecuación del modelo a los datos ha resultado muy satisfactoria. Se han proporcionado instrumentos analíticos y gráficos que reflejan con claridad el efecto de los diferentes niveles de la variable categórica sobre las pérdidas, que es un aspecto crucial para el trabajo del actuario de seguros.



**Figura 3**  
Gráficos doble log-log del ajuste de los datos de daños por inundaciones del modelo, separando por meses.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Ministerio de Ciencia e Innovación (Proyecto ECO2010-15455, JMS y FP), por la financiación parcial de este trabajo.

## BIBLIOGRAFÍA

Boland, P.J. (2007). *Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science*. Boca Raton: Chapman and Hall CRC.

Consortio de Compensación de Seguros (2010). *Estadística. Riesgos extraordinarios*. Serie 1971-2009. Madrid, octubre de 2010.

Development Core Team (2010). *A language and environment for statistical computing*. Vienna: Foundation for Statistical Computing.

Gómez-Déniz, E., Sarabia, J.M. (2008). *Teoría de la Credibilidad: Desarrollo y Aplicaciones en Primas de Seguros y Riesgos Operacionales*. Madrid: Fundación MAPFRE.

Guillén, M., Prieto, F., Sarabia, J.M. (2011). *Modelling losses and locating the tail with the Pareto Positive Stable distribution*, Submitted.

Klugman, S.A., Panjer, H.H., Willmot, G.E. (2004). *Loss Models. From Data to Decisions*. New York: John Wiley.

Pielke, Jr., R. A. y Landsea C.W. (1998). *Normalized Hurricane Damages in the United States: 1925-1995. Weather and Forecasting*, vol. 13, 621-631.

Sarabia, J.M., Gómez-Déniz, E., Vázquez, F. (2006). *Estadística Actuarial. Teoría y Aplicaciones*. Madrid: Pearson-Prentice Hall.

Sarabia, J.M., Prieto, F. (2009). "The Pareto-positive stable distribution: a new descriptive model for city size data". *Physica A*, vol. 388, 4179-4191.

Sarabia, J.M., Prieto, F., Gómez-Déniz, E. (2009). "Análisis de riesgos con la distribución Pareto estable positiva". *Cuadernos de la Fundación*, 136, 191-205. Madrid: Fundación MAPFRE.

## Ponencia 2

# **SENSIBILIDAD DEL SCR DEL RIESGO DE SUSCRIPCIÓN NO VIDA DEL MERCADO ESPAÑOL. APROXIMACIÓN ESTÁNDAR *VERSUS* MODELO INTERNO**

Antoni Ferri Vidal

### **1. INTRODUCCIÓN**

El objetivo del regulador europeo es conseguir una visión global del perfil de riesgo de cada compañía aseguradora que opere en el mercado europeo. Con esta finalidad, a través de la regulación, son utilizadas un conjunto de técnicas cuantitativas para estimar el valor económico del riesgo agregado asumido por la entidad. Además, son tenidas en cuenta la existencia de distintas líneas de negocio lo que conduce a la necesidad del estudio de las posibles estructuras de dependencia entre éstas.

El objetivo de este trabajo es analizar la influencia sobre el requerimiento de capital de solvencia (SCR) de las hipótesis realizadas sobre la matriz de correlación entre líneas de negocio, y más generalmente, sobre la estructura de dependencia subyacente.

En este trabajo nos centramos en el SCR correspondiente al riesgo de suscripción del negocio de no-vida, en el que la Directiva impone, para el Modelo Estándar, que se considere como mínimo un nivel de detalle en los cálculos correspondiente a las líneas de negocio.

El SCR para el riesgo de suscripción no-vida basado en el Modelo Estándar de Solvencia II viene determinado, principalmente, por unos parámetros que establece EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*) denominados desviación estándar de las primas, desviación estándar de las reservas y matriz de correlación entre líneas de negocio.

Existen en la literatura algunos trabajos relacionados con la estimación del SCR. Pfeifer and Straussburger (2008) centran su análisis en la fórmula de agregación global de los SCR correspondientes a distintos riesgos cuando estos son considerados incorrelados pero dependientes. Los autores concluyen que la fórmula de agregación propuesta en Solvencia II infraestima el verdadero SCR bajo algunas estructuras de dependencia.



Sandström (2007) muestra el efecto de la consideración del coeficiente de asimetría en la estimación del SCR. Mediante ejemplos muestra las diferencias entre las distribuciones Normal Power calibrada y no calibrada. Asumiendo diversas medidas de riesgo encuentra que bajo la hipótesis de normalidad el SCR es también infraestimado.

La contribución de este trabajo se centra en la comparación de los resultados de la estimación del SCR bajo la aproximación del Modelo Estándar y de un Modelo Interno asumiendo distintas hipótesis sobre la estructura de dependencia, y el posterior análisis de sensibilidad del SCR a la matriz de correlación entre líneas de negocio.

Mediante la técnica de regresión lineal simple y la utilización de cópulas, se realiza la estimación del SCR bajo diversos escenarios de matriz de correlaciones. Se concluye que el SCR basado en el Modelo Estándar sobreestima el capital obtenido mediante el Modelo Interno propuesto en casi la totalidad de los casos considerados.

## 2.METODOLOGÍA

Para la estimación del capital de solvencia se consideran dos aproximaciones. En primer lugar, se utiliza la implementación de la fórmula estándar para el submódulo de riesgo de insuficiencia de primas y reservas como parte del riesgo de suscripción del negocio no-vida sugerida en el quinto Estudio de Impacto Cuantitativo (QIS-5). Los parámetros utilizados en esta aproximación, desviación estándar de las primas, desviación estándar de las reservas y matriz de correlación entre líneas de negocio, son los propuestos en QIS-5 como *proxy*.

Los datos utilizados como *input* del modelo son las estimaciones de los volúmenes de primas y reservas correspondientes al inicio del ejercicio considerado.

En segundo lugar, con la finalidad de obtener un capital comparable al obtenido mediante la aproximación estándar, se construye un Modelo Interno. Este modelo se basa en la agregación de la predicción del resultado neto de suscripción por línea de negocio. La predicción de las variables implicadas en el cálculo del resultado neto se realiza a través de la técnica de regresión lineal simple. Cada predicción del resultado por línea de negocio es agregada para determinar el capital de solvencia. El SCR con horizonte temporal anual es estimado como la diferencia entre el *valor en riesgo* obtenido con un nivel de significación del 99,5% y el valor esperado de una simulación de predicciones de resultados netos por línea de negocio.

A continuación, presentamos brevemente el Modelo Estándar presentado en el QIS-5 y el Modelo Interno utilizado.

## 2.1. El Modelo Estándar<sup>1</sup>

El SCR para el submódulo de primas y reservas bajo el Modelo Estándar se obtiene a través del producto de dos términos denominados *medida de volumen*,  $V$ ; y una aproximación del *valor en riesgo* obtenido con un nivel de significación del 99,5% denominada  $\rho(\sigma)$ , asumiendo que la variable aleatoria subyacente sigue una distribución log-normal. El SCR bajo el Modelo Estándar se obtiene a través de:

$$SCR = \rho(\sigma) \cdot V \quad (1)$$

La medida de volumen  $V$ , se obtiene mediante la suma de las medidas de volumen desagregadas por líneas de negocio  $V_i$ ,  $i = \{LoB_1, \dots, LoB_n\}$ . La medida de volumen por línea de negocio  $V_i$  es el resultado de la suma de dos términos. El primer término  $V_{pr}^i$ , es el máximo entre el volumen de primas a recaudar estimado para el ejercicio en vigor, o el devengado, y el del ejercicio anterior. El segundo término  $V_{res}^i$ , es la mejor estimación de los siniestros *IBNR (Incurred But Not Reported)*. Todos volúmenes, además de ser considerados por línea de negocio, también son considerados por zonas geográficas,  $j = \{1, \dots, m\}$ , con la finalidad de construir un coeficiente de diversificación geográfica que sea tenido en cuenta en el cómputo de la medida de volumen total,  $V$ :

$$V = \sum_{i=LoB_1}^{LoB_n} V_i = \sum_{LoB_1}^{LoB_n} \left( \max \left\{ \sum_{j=1}^m P_{t,i,j}^{written}, \sum_{j=1}^m P_{t-1,i,j}^{written}, \sum_{j=1}^m P_{t,i,j}^{earned} \right\} + \sum_{j=1}^m BE_{t,i,j} \right) \cdot \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot W_i \right) \quad (2)$$

donde  $W_i$  es un coeficiente de diversificación geográfica determinado como

$$W_i = \frac{\sum_{j=1}^m \left( \max \left\{ \sum_{j=1}^m P_{t,i,j}^{written}, \sum_{j=1}^m P_{t-1,i,j}^{written}, \sum_{j=1}^m P_{t,i,j}^{earned} \right\} + \sum_{j=1}^m BE_{t,i,j} \right)^2}{\left( \sum_{j=1}^m \max \left\{ \sum_{j=1}^m P_{t,i,j}^{written}, \sum_{j=1}^m P_{t-1,i,j}^{written}, \sum_{j=1}^m P_{t,i,j}^{earned} \right\} + \sum_{j=1}^m BE_{t,i,j} \right)^2} \quad (3)$$

Para obtener  $\rho(\sigma)$ , en primer lugar necesitamos definir el parámetro subyacente  $\sigma$ , denominado *desviación estándar combinada*. El término *combinada* proviene de la forma en que el parámetro es estimado.  $\sigma$  se corresponde con la media ponderada de los parámetros desviación estándar por línea de negocio  $\sigma_i$ ,  $i = \{LoB_1, \dots, LoB_n\}$ , donde las ponderaciones son los volúmenes relativos a cada

<sup>1</sup> Para un mayor detalle de la fórmula estándar, consultar las especificaciones técnicas de QIS-5.

línea de negocio,  $V_i$ . De este modo, para estimar  $\sigma$  necesitamos primero estimar las desviaciones estándar por línea de negocio.

La forma en que las  $\sigma_i$  son obtenidas es similar a la utilizada para estimar  $\sigma$ , es decir, se ponderan la desviación estándar de las primas ( $\sigma_{pr}^i$ ) y de las reservas ( $\sigma_{res}^i$ ) por línea de negocio, donde las ponderaciones son los volúmenes relativos de primas  $V_{pr}^i$  y reservas  $V_{res}^i$  por línea de negocio:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{(\sigma_{pr}^i \cdot V_{pr}^i)^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \sigma_{pr}^i \cdot \sigma_{res}^i \cdot V_{pr}^i \cdot V_{res}^i + (\sigma_{res}^i \cdot V_{res}^i)^2}}{V_{pr}^i + V_{res}^i} \quad (4)$$

y

$$\sigma = \frac{1}{V} \cdot \sqrt{\sum_{k,l} \rho_{kl} \cdot \sigma_k \cdot \sigma_l \cdot V_k \cdot V_l} \quad (5)$$

donde,  $V_{pr}^i = \max \left\{ \sum_{j=1}^m P_{t,i,j}^{written}, \sum_{j=1}^m P_{t-1,i,j}^{written}, \sum_{j=1}^m P_{t,i,j}^{earned} \right\}$  es la medida de volumen de las primas correspondiente a la  $i$ -ésima línea de negocio y  $j$ -ésima zona geográfica;  $\sigma_i$  indica la desviación estándar de la  $i$ -ésima línea de negocio,  $i = \{LoB_1, \dots, LoB_n\}$ ;  $\sigma_{pr}^i$  es la desviación estándar de las primas correspondientes a la  $i$ -ésima línea de negocio. Del mismo modo,  $\sigma_{res}^i$  denota la desviación estándar de las reservas correspondiente a la  $i$ -ésima línea de negocio,  $V_{res}^i = \sum_{j=1}^m BE_{t,i,j}$  es la medida de volumen de las reservas correspondiente a la  $i$ -ésima línea de negocio y  $\alpha$  es el coeficiente de correlación entre las primas y las reservas. Así,  $\sigma$  es la desviación estándar combinada y  $\rho_{kl}$  es el coeficiente de correlación entre la  $k$ -ésima y  $l$ -ésima línea de negocio.

Una vez determinada  $\sigma$ , QIS-5 sugiere una fórmula analítica cerrada para la aproximación del *valor en riesgo* al 99,5% de una distribución log-normal:

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp\left(z_{0,995} \cdot \sqrt{\log(\sigma^2 + 1)}\right)}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)}} - 1 \quad (6)$$

donde  $z_{0,995}$  es el percentil 99,5 de la distribución normal estándar.

## 2.1. El Modelo Interno

La propuesta de Modelo Interno utilizada en este trabajo está basada en la simulación de una muestra aleatoria multivariante, donde cada función marginal representa la distribución de la variable aleatoria  $\tilde{R}_{T+1}^i$ , que es la predicción del resultado neto de suscripción de la  $i$ -ésima línea de negocio  $i=\{LoB_1, \dots, LoB_n\}$ . Para aproximar el resultado neto para el siguiente periodo se utiliza una regresión lineal simple de las cuatro componentes consideradas aquí para el cálculo del resultado neto, es decir, las primas netas, la siniestralidad neta, los gastos de explotación netos y otros gastos. No se consideran ingresos ni gastos procedentes de inversiones dado que se considera que están más relacionados con el riesgo de mercado que con el riesgo de suscripción. Además, se considera que estas cuatro componentes son estadísticamente independientes. Se estima el SCR como la diferencia entre el *valor en riesgo* obtenido con un 99,5% y el valor esperado de la variable aleatoria  $\tilde{R}_{T+1}^i$ . Para clarificar el modelo propuesto, a continuación se introduce la notación utilizada.

Sea  $Y_t^{i,s}$  el conjunto de datos históricos en el instante  $t$ ,  $t=\{0, \dots, T\}$  correspondiente a la  $i$ -ésima línea de negocio y a la  $s$ -ésima componente  $s=\{\text{primas netas; siniestralidad neta; gastos de explotación; otros gastos}\}$ .

La tendencia para el periodo  $[0;T]$  viene dada por,

$$\tilde{Y}_t^{i,s} = \beta_0^{i,s} + \beta_1^{i,s} \cdot t + \varepsilon_t^{i,s} \quad (7)$$

donde  $\varepsilon_t^{i,s}$  denota una perturbación aleatoria en la que, por hipótesis, asumimos que  $E[\varepsilon_t^{i,s}] = 0$  y que  $V[\varepsilon_t^{i,s}]$  es constante a lo largo del tiempo.

Extrapolando (7) podemos ver con facilidad que el valor esperado de la variable aleatoria  $\tilde{Y}_t^{i,s}$  puede ser obtenido a partir del modelo de estimación. A través de *Mínimos Cuadrados Ordinarios* (MCO) se obtienen los parámetros estimados de la recta de regresión, por lo que  $\hat{Y}_{T+1}^{i,s} = \hat{\beta}_0^{i,s} + \hat{\beta}_1^{i,s} \cdot (T+1) + \varepsilon_{T+1}^{i,s}$ , donde  $\hat{\beta}_0^{i,s}$  y  $\hat{\beta}_1^{i,s}$  son los parámetros estimados mediante MCO. El valor esperado de  $\tilde{Y}_{T+1}^{i,s}$  puede ser estimado con  $\hat{Y}_{T+1}^{i,s}$  y su varianza a través de  $V[\hat{Y}_{T+1}^{i,s}] = V[\varepsilon_{T+1}^{i,s}]$ .

Ahora estamos en disposición de definir el primer y segundo momento de la variable aleatoria considerada en el modelo multivariante  $\tilde{R}_{T+1}^i$ , dado que queda definida como la suma de cuatro componentes independientes. De esta forma,

$$E[\tilde{R}_{T+1}^i] = \sum_{\forall s} E[\tilde{Y}_{T+1}^{i,s}] \quad (8)$$

y

$$V[\tilde{R}_{T+1}^i] = \sum_{\forall s} V[\tilde{Y}_{T+1}^{i,s}] \quad (9)$$

El valor esperado y la varianza de  $\tilde{R}_{T+1}^i$  pueden ser estimados de una manera trivial para cada línea de negocio dados los datos iniciales observados y el modelo (7), si bien la para la determinación de la distribución subyacente de  $\tilde{R}_{T+1}^i$  se necesitarían realizar hipótesis adicionales.

El problema de la distribución multivariada surge cuando tratamos de agregar el resultado neto de diversas líneas de negocio. Para ello consideramos dos familias de distribuciones.

Para este estudio, se han utilizado dos familias de cópulas pertenecientes a las distribuciones elípticas, la cópula Gaussiana y la  $t$ -Student cópula, y se consideran dos familias de marginales, Gaussianas y  $t$ -Student. De este modo se analizan cuatro distribuciones, la cópula Gaussiana con marginales Gaussianas, la cópula Gaussiana con marginales  $t$ -Student, la  $t$ -Student cópula con marginales Gaussianas y la  $t$ -Student cópula con marginales  $t$ -Student. El parámetro de dependencia en ambos tipos de cópula es la matriz de correlación lineal entre las variables aleatorias representadas por las marginales. En el caso que tratamos, las marginales se corresponden con la variable aleatoria  $\tilde{R}_{T+1}^i$ , el resultado neto de suscripción estimado correspondiente a la  $i$ -ésima línea de negocio, de modo que el parámetro de dependencia de las cópulas consideradas debe ser la correlación lineal entre líneas de negocio.

Sea  $Z$  el vector  $n$ -dimensional cuyas componentes se corresponden con las variables aleatorias  $\tilde{R}_{T+1}^i$ . Pueden ser ajustadas marginales Gaussianas a cada componente de  $Z$  dados  $E[\tilde{R}_{T+1}^i]$  y  $V[\tilde{R}_{T+1}^i]$ , tal que su cópula Gaussiana sea:

$$C_P^{Ga}(Z) = C\left(F_{\tilde{R}_{T+1}^1}^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_{\tilde{R}_{T+1}^d}^{\leftarrow}(u_d)\right) \quad (10)$$

Con  $P$  una matriz de correlación de dimensión  $n \times n$ , distribuciones unidimensionales Gaussianas,  $F_{\tilde{R}_{T+1}^i}^{\leftarrow}$  con valor esperado  $E[\tilde{R}_{T+1}^i]$  y varianza  $V[\tilde{R}_{T+1}^i]$ , y función inversa generalizada Gaussiana  $F_{\tilde{R}_{T+1}^i}^{\leftarrow}$ .

La  $t$ -Student cópula tiene un parámetro más, los grados de libertad. El objetivo es ajustar una distribución tal que su comportamiento en las colas sea más *pesado*

que en el caso Gaussiano multivariante, por lo que es necesario asumir una distribución  $t$ -Student multivariante con pocos grados de libertad. A mayor número de grados de libertad más cercano será el comportamiento de la distribución  $t$ -Student multivariante a la distribución Gaussiana multivariante. Dado que la variable aleatoria considerada  $\tilde{R}_{T+1}^i$  no está centrada en cero, encontramos algunas dificultades computacionales realizando las simulaciones. No fue posible trabajar directamente con una distribución  $t$ -Student multivariante tal que el valor esperado de las marginales y su varianza sean  $E[\tilde{R}_{T+1}^i]$  y  $V[\tilde{R}_{T+1}^i]$ , respectivamente y un número pre-determinado de grados de libertad  $\nu$ , de modo que basamos nuestro modelo en una  $t$ -Student cópula con marginales centradas en cero y varianza dada por  $\frac{\nu}{\nu-2}$  y posteriormente se reescaló adecuadamente la muestra aleatoria para obtener el valor esperado y varianza deseados en las marginales.

Sea  $Q$  el vector aleatorio  $n$ -dimensional cuyas componentes son variables aleatorias unidimensionales  $t$ -Student con  $\nu$  grados de libertad, valor esperado nulo y varianza igual a  $\frac{\nu}{\nu-2}$ . Dada la matriz de correlación lineal  $P$ , la  $t$ -Student cópula viene determinada por,

$$C_{\nu,P}^t(Q) = t_{\nu}^n(t_{\nu}^{-}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-}(u_n)). \quad (11)$$

donde  $t_{\nu}(u)$  es la distribución  $t$ -Student univariada centrada en cero con  $\nu$  grados de libertad y  $t_{\nu}^{-}(u)$  es su función inversa generalizada.

Una vez ha sido simulada una muestra aleatoria a partir de la  $t$ -Student cópula mencionada en el párrafo anterior, reescalamos mediante una transformación lineal los valores para obtener la localización y dispersión originales, al tiempo que mantenemos la correlación lineal.

Los dos casos adicionales considerados en este análisis, es decir, la cópula Gaussiana con marginales  $t$ -Student y la  $t$ -Student cópula con marginales Gaussianas han sido simuladas del mismo modo.

### 3. APLICACIÓN: EL SCR TEÓRICO CORRESPONDIENTE AL MERCADO ESPAÑOL BAJO MODELO ESTÁNDAR Y MODELO INTERNO

Partiendo de una serie histórica perteneciente al mercado español no-vida correspondiente al periodo 2000-2009 se ha computado el SCR que correspondería al año 2010 para la totalidad del mercado español. El objetivo final de este trabajo es comparar los resultados que se derivan de ambas *proxys*, el Modelo Estándar y un Modelo Interno, y posteriormente realizar un análisis de sensibilidad del SCR a

cambios tanto en la estructura de dependencia como en la matriz de correlaciones entre líneas de negocio.

Los datos han sido obtenidos a partir de los archivos que publica la *Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones* en su página web<sup>2</sup>. Se ha utilizado información agregada contenida en la cuenta técnica de pérdidas y ganancias del negocio no-vida. Dado que la información viene publicada acorde a la legislación española, es decir en veintiún ramos, se ha reclasificado por líneas de negocio atendiendo la recomendación que UNESPA realizó a las entidades participantes en QIS-5 a tal efecto. Finalmente, han sido consideradas las doce líneas de negocio propuestas en QIS-5.

La Tabla 1 muestra los *inputs* necesarios para el Modelo Estándar. En primer lugar, se muestran las medidas de volumen en miles de millones de euros. La líneas de negocio I a IX son netas de reaseguro mientras que las líneas de negocio X a XII se corresponden con volúmenes de reaseguro aceptado, que por hipótesis asumimos de tipo no proporcional. Además asumimos también que los *best estimate* son calculados como se requiere en QIS-5. Por último, asumimos que los volúmenes suscritos y devengados de primas son igual y que los coeficientes de diversificación geográfica son uno en todas las líneas de negocio; también que, todos los contratos existentes son a prima única, por lo que el valor actual de las primas futuras derivadas de contratos existentes es nulo. En segundo lugar, la Tabla 1 muestra los valores que se ofrecen en QIS-5 para las desviaciones estándar de las primas y las reservas por línea de negocio, y los valores de  $\sigma_i$  que son obtenidos de acuerdo con (4) y  $\alpha=0,5$ .

**Tabla 1**  
Inputs del Modelo Estándar.

	LoB	$P_i^{2009, written}$	$P_i^{2010, written}$	$BE_i^{2010} (*)$	(%) $\sigma_{pr}^i$	(%) $\sigma_{res}^i$	(%) $\sigma_i$
I	Motor vehicle liability	5,78	5,15	5,22	10	9,5	8,5
II	Other motor	4,81	4,54	1,00	7	10	6,8
III	Marine, Aviation, Transport	0,42	0,30	0,59	17	14	13,2
IV	Fire	6,87	5,86	2,65	10	11	9,1
V	3rd, party liability	1,21	1,05	4,33	15	11	10,6
VI	Credit, Suretyship	0,49	0,41	0,90	21,5	19	17,3
VII	Legal expenses	0,16	0,16	0,12	6,5	9	6,3
VIII	Assistance	0,67	0,61	0,06	5	11	5
IX	Miscellaneous	1,89	1,90	0,21	13	15	12,51
X	N,P, Property	1,85	0,41	0,00	17,5	20	16
XI	N,P, Casualty	0,07	0,03	0,00	17	20	15,9
XII	N,P, MAT	0,23	0,10	0,00	16	20	16,2

Fuente: DGSFP / (\*) *Best Estimate*.

<sup>2</sup> <http://www.dgsfp.meh.es>

Para el Modelo Interno se ha considerado la serie temporal correspondiente a 2000-2009 de la cuenta de pérdidas y ganancias del mercado español asegurador no-vida, Los datos han sido corregidos por inflación para obtener unidades constantes de 2009.

El resultado neto de suscripción por línea de negocio es el resultado de considerar las primas netas, la siniestralidad neta, gastos de explotación netos y otros gastos.

Deben ser distinguidas las líneas de negocio I a IX de las líneas X a XII. Mientras que las primas netas y la siniestralidad neta son magnitudes procedentes del seguro directo en las líneas I a IX, las líneas X a XII incluyen las primas procedentes del reaseguro aceptado y la variación en la provisión por primas no consumidas y riesgos en curso, en el caso de las primas, y la siniestralidad procedente del reaseguro aceptado más la variación de la provisión por siniestros pendientes, en el caso de la siniestralidad. Mientras que los gastos se refieren a gastos de explotación en las líneas I a IX, en las líneas X a XII se refieren a comisiones del reaseguro aceptado. Adicionalmente, se consideran otro tipo de gastos provenientes de acuerdos entre compañías, depreciación de activos, etcétera en las líneas I a IX, mientras que no se consideran estos gastos en las líneas X a XII.

En la Tabla 2 se resumen los *inputs* requeridos en el Modelo Interno. Las predicciones están expresadas en miles de millones de euros para 2010 por línea de negocio y para cada componente considerada en el cálculo del resultado neto de suscripción. En segundo lugar, a pesar de que se utiliza la desviación estándar del error de predicción en el Modelo Interno, se muestra el coeficiente de variación por línea de negocio con la finalidad de hacer más comprensibles las comparaciones con el Modelo Estándar.

**Tabla 2**  
*Inputs* del Modelo Interno.

	LoB	$\hat{Y}_{2010}^{i.pr}$	$\hat{Y}_{2010}^{i.cl}$	$\hat{Y}_{2010}^{i.ex}$	$\hat{Y}_{2010}^{i.o.ex}$	(%) $CV_{pr}^i$	(%) $CV_{cl}^i$	(%) $CV_{ex}^i$	(%) $CV_{o.ex}^i$
I	Motor vehicle liability	6,82	5,13	1,26	-0,01	10	6	9	53
II	Other motor	5,41	3,86	0,92	0,03	6	2	4	21
III	Marine, Aviation, Transport	0,48	0,32	0,12	0,008	6	11	8	18
IV	Fire	7,63	4,71	2,10	0,12	3	3	4	10
V	3rd, party liability	1,63	0,90	0,33	0,02	14	21	9	18
VI	Credit, Suretyship	0,55	1,03	0,37	0,02	3	71	39	55
VII	Legal expenses	0,19	0,09	0,04	0,0009	9	9	7	42
VIII	Assistance	0,74	0,53	0,13	0,01	6	8	6	8
IX	Miscellaneous	1,96	0,77	0,69	0,04	1	2	4	11
X	N,P, Property	1,84	0,69	0,34	0	5	41	32	0
XI	N,P, Casualty	0,07	0,03	0,02	0	8	12	6	0
XII	N,P, MAT	0,23	0,46	0,39	0	8	1,38	1,75	0

Fuente: DGSFP / (\*)  $\sqrt{\left(\sum_{i=1}^T (Y_t^{i,s} - \hat{Y}_t^{i,s})^2 / T - 1\right)} / \left(\sum_{i=1}^T Y_t^{i,s} / T\right) = Desv(\varepsilon_t^{i,s}) / E[\hat{Y}_t^{i,s}]$



Con la información mostrada en la Tabla 2, puede ser obtenido el valor esperado y la desviación estándar de cada componente aleatoria considerada y posteriormente la predicción del resultado neto para el ejercicio 2010 por línea de negocio

$$\hat{R}_{2010}^i$$

La Tabla 3 muestra los diferentes resultados obtenidos con el Modelo Estándar y con el Modelo Interno para un nivel de confianza del 99,5%. En el Modelo Estándar han sido utilizados los parámetros presentados en la Tabla 1 y la matriz de correlación entre líneas de negocio presentada en QIS-5. Con la finalidad de obtener el rango de capitales razonables estos han sido calculados asumiendo independencia y comonotonía entre líneas de negocio. No han sido consideradas correlaciones negativas entre líneas de negocio debido a que su justificación resulta difícil. Junto a los capitales obtenidos mediante cópulas aparece entre paréntesis el nivel de confianza que sería asumido en la cópula correspondiente para obtener el mismo capital obtenido mediante el Modelo Estándar.

**Tabla 3**  
SCR. Modelo Estándar *versus* Modelo Interno.

d.f.	Modelo Estándar	Cópula Gaussiana		t-Student cópula	
		Marginales Gaussianas	Marginales t-Student	Marginales Gaussianas	Marginales t-Student
<b>Matriz de correlación: Independencia</b>					
4	4,15	4,15 (99,50)	4,72 (99,16)	4,62 (99,13)	5,28 (99,11)
10	-	-	4,31 (99,37)	4,39 (99,30)	4,56 (99,19)
35	-	-	4,17 (99,46)	4,22 (99,43)	4,25 (99,41)
<b>Matriz de correlación: QIS-5</b>					
4	7,18	6,74 (99,70)	7,65 (99,32)	7,30 (99,44)	8,53 (99,10)
10	-	-	7,06 (99,54)	7,03 (99,55)	7,38 (99,40)
35	-	-	6,84 (99,66)	6,83 (99,66)	6,94 (99,61)
<b>Matriz de correlación: Comonotonía</b>					
4	11,63	10,22 (99,83)	12,93 (99,28)	10,25 (99,83)	12,92 (99,27)
10	-	-	11,22 (99,58)	10,25 (99,83)	11,28 (99,57)
35	-	-	10,47 (99,77)	10,22 (99,83)	10,49 (99,77)

Fuente: Elaboración propia.

Los SCR estimados con el Modelo Estándar infraestiman aquellos obtenidos con el Modelo Interno bajo la hipótesis de independencia entre líneas de negocio. En el resto de casos el SCR obtenido con el Modelo Estándar sobreestima los obtenidos con el Modelo Interno excepto en los casos extremos relacionados con la t-Student cópula con marginales t-Student y cuatro grados de libertad.

La hipótesis de independencia ofrece siempre los valores de SCR más bajos, tanto en el Modelo Estándar como con el Modelo Interno, como se esperaba.

Del mismo modo, la hipótesis de comonotonía siempre devuelve los SCR más altos en cada uno de los modelos. En el Modelo Estándar la hipótesis de comonotonía casi triplica el SCR obtenido bajo hipótesis de independencia. En el Modelo Interno se han considerado cuatro alternativas para la estimación del SCR basadas en cópulas. Todas las cópulas relacionadas con la distribución *t*-Student han sido consideradas con cuatro, diez y treinta y cinco grados de libertad.

Para todos los casos considerados en este trabajo, los SCR obtenidos con marginales *t*-Student producen mayores valores que los obtenidos con marginales Gaussianas. En particular, el valor más pequeño de SCR es obtenido con la cópula Gaussiana con marginales Gaussianas, seguido del obtenido con la *t*-Student cópula con marginales Gaussianas. Se evidencia que la elección de marginales influencia claramente en las estimaciones del SCR, así como el efecto de la consideración de distribuciones con colas pesadas, incluso en el caso de la cópula Gaussiana.

A medida que se considera un mayor número de grados de libertad en las distribuciones marginales *t*-Student, el SCR obtenido con las cópulas relacionadas con dichas marginales decrece y converge a los resultados obtenidos con la cópula Gaussiana con marginales Gaussianas. Este comportamiento relacionado con los grados de libertad era esperado y se observa bajo todas las hipótesis de correlación.

Observando los niveles de confianza que serían asumidos en cada una de las cópulas se aprecia que en aquellas cópulas donde el capital obtenido es mayor que el del Modelo Estándar, el nivel de confianza que se asumiría para obtener el capital del Modelo Estándar es inferior al 99,5%, y viceversa, siendo la diferencia máxima, 99.83%, en el caso de la cópula Gaussiana con marginales Gaussianas bajo la hipótesis de comonotonía .

#### 4. DISCUSIÓN

Este trabajo contribuye al mejor entendimiento de la metodología relacionada con la estimación de los requerimientos de capital de solvencia. En primer lugar, mediante datos pertenecientes al mercado español asegurador no-vida, hemos obtenido una estimación del SCR correspondiente al riesgo de suscripción no-vida mediante el Modelo Estándar. Este capital debe ser entendido como si el mercado operase como una única compañía, Ferri *et al.* (2011), y puede ser utilizado por los agentes de mercado, regulador y compañías, como un *benchmark*. Tal y como comentan los autores, el Modelo Estándar para el submódulo de insuficiencia de primas y reservas es un sistema demasiado rígido cuando se utilizan exclusivamente los parámetros de QIS-5, dependiendo excesivamente de las medidas de

volumen. Del mismo modo también critican que el Modelo Estándar para el sub-modulo de insuficiencia de primas y reservas no tiene en cuenta el recargo de seguridad de las primas, lo que puede conducir a conclusiones erróneas cuando se comparan dos compañías con el mismo volumen de primas y distintos recargos de seguridad.

En segundo lugar, se ha construido un Modelo Interno con la finalidad de obtener el SCR y compararlo con el obtenido a partir del Modelo Estándar. La primera diferencia entre el Modelo Estándar y el Modelo Interno es la consideración de la variable aleatoria subyacente. Mientras que el Modelo Estándar considera una mixtura de las desviaciones de las primas y de las reservas por línea de negocio, el Modelo Interno considera como variable aleatoria la predicción del resultado neto de suscripción por línea de negocio. Consideramos que esta variable refleja mejor el significado de insuficiencia de primas y reservas, es decir, indica la insuficiencia de recursos para hacer frente a la siniestralidad y lo traslada a los resultados de la cuenta de pérdidas y ganancias. Este hecho también justifica la elección de las cópulas utilizadas en el Modelo Interno, es decir, la utilización de cópulas definidas en los números reales. La segunda diferencia entre el Modelo Estándar y el Modelo Interno es la forma en que se obtienen los capitales. En el Modelo Estándar, el SCR es estimado a partir de la experiencia, es decir de datos pasados, mientras que en el Modelo Interno que planteamos, es necesaria la predicción de la variable aleatoria considerada. Creemos que dada la definición de Solvencia II, el SCR debe estar basado en la evolución futura de la variable aleatoria en vez de en el comportamiento pasado.

Nuestra última conclusión se deriva de la comparación de los resultados obtenidos a través de ambos modelos. Se observa que los resultados obtenidos con el modelo Estándar sobreestiman los obtenidos con el Modelo Interno en casi todos los casos considerados, excepto en el caso de independencia entre líneas de negocio.

Bajo la hipótesis de comonotonicidad entre líneas de negocio y de la matriz de correlaciones propuesta en QIS-5, excepto en el caso de las cópulas relacionadas con la distribución *t*-Student con cuatro grados de libertad, el Modelo Estándar produce resultados mayores de SCR que los obtenidos mediante el Modelo Interno.

Comparando los resultados obtenidos a partir de las cuatro hipótesis sobre la estructura de dependencia que son presentadas en este trabajo, se establece una ordenación de menor a mayor de los SCR que se generan. Se observa que tras la elección de la cópula, un punto clave es la elección del comportamiento marginal de las líneas de negocio. El capital más bajo se obtiene con aquellas cópulas con marginales Gaussianas.

Si bien los capitales obtenidos mediante algunas de las cópulas consideradas son menores a los del Modelo Estándar, los niveles de confianza que se asumirían para obtener el capital del Modelo Estándar son mayores al que se considera para

Solvencia II (99,5%) lo que implica que la probabilidad de que las pérdidas superen el umbral de los requerimientos de capital disminuye considerablemente con el Modelo Interno considerado, dado el horizonte temporal establecido.

Los procedimientos para la estimación de los requerimientos de capital de solvencia deben ser mejorados. Desde nuestro punto de vista, son necesarios datos más desagregados y series temporales mucho más largas, lo que mejoraría considerablemente la precisión de los resultados de las estimaciones. Cuando se utilizan cópulas, un aspecto clave es la elección y estimación de las distribuciones marginales, con la finalidad de obtener unas estimaciones razonables. Además, la estimación de las correlaciones es otro punto clave, tanto en el Modelo Estándar como en el Modelo Interno, por lo que una base de datos apropiada es necesaria para obtener unas estimaciones consistentes. En nuestra opinión, es necesario realizar más análisis dinámicos para mejorar la comprensión del Modelo Estándar, por lo que creemos que las comparativas y los análisis de sensibilidad son de gran utilidad, por ejemplo, para el análisis del impacto sobre el SCR de otros parámetros y utilizando volúmenes de primas puras en lugar de volúmenes de primas suscritas.

## **BIBLIOGRAFÍA**

Ferri, A., Bermúdez, L. y Alcañiz, M. (2011). *Sensibilidad a las correlaciones entre líneas de negocio del SCR del módulo de suscripción no vida basado en la fórmula estándar*. (enviado).

Pfeifer, D. y Straussburger, D. (2008). "Stability problems with the SCR aggregation formula". *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 61-67.

Sandström, A. (2007). "Calibration for skewness". *Scandinavian Actuarial Journal*, 2, 126-134.

## Ponencia 3

# PRINCIPIOS DE ASIGNACIÓN DE CAPITAL EN EL ÁMBITO DE LAS ENTIDADES BANCARIAS

Eduardo Trigo Martínez, Rafael Moreno Ruiz,  
J. Iñaki de la Peña Esteban e Iván Iturricastillo Plazaola

### RESUMEN

La diversificación de los riesgos financieros conlleva beneficios en términos de reducción del riesgo total al que están expuestas las entidades bancarias. Las entidades deben considerar dichos beneficios por las implicaciones que tienen en la gestión de los riesgos financieros, para lo cual emplean un principio de asignación de capital, compuesto por una medida de riesgo y un criterio de asignación de capital.

En el presente trabajo se exponen los principales criterios de asignación y los axiomas o propiedades que deben cumplir para ser coherentes. Finalmente, se exponen los principales principios de asignación empleados en el ámbito bancario.

**Palabras clave:** Gestión de riesgos financieros, asignación de capital, medidas de riesgo, axiomas de coherencia.

### 1. PRINCIPIOS DE ASIGNACIÓN: CONCEPTO Y ELEMENTOS

La diversificación de los riesgos financieros conlleva beneficios en términos de reducción del riesgo total al que están expuestas las entidades bancarias en el desarrollo de su actividad, pues es un principio ampliamente aceptado en el ámbito financiero que el riesgo financiero total que asume una entidad en una cartera de activos financieros es menor que el que asumiría si dichos activos se considerasen individualmente.

Las entidades bancarias necesitan determinar los riesgos financieros a los que quedan expuestas al invertir en un activo financiero considerando los beneficios que la diversificación conlleva para ellas, con independencia de cual sea su magnitud. Ello se debe a las implicaciones que dichos beneficios tienen en la gestión de los riesgos financieros.

Con esta finalidad, las entidades bancarias emplean un principio de asignación de capital —en adelante, simplemente, principio de asignación—, el cual está compuesto por dos elementos:

1. Una medida del riesgo financiero asociado a una cartera de activos financieros —en adelante, por brevedad, medida de riesgo de la cartera—, que determina la exposición al riesgo que la cartera conlleva para la entidad bancaria, sintetizando en un único valor toda la información relacionada con dicho riesgo.
2. Un criterio de asignación de capital —o simplemente criterio de asignación—, que distribuye el beneficio de la diversificación del riesgo financiero de la cartera entre cada uno de los activos financieros que la componen, de forma que sea económicamente racional, y que considere las características tanto del activo financiero como de la cartera.

Desde el punto de vista económico, un criterio de asignación no es otra cosa que un método que permite descomponer la medida de riesgo de la cartera, la cual considera los beneficios que la diversificación del riesgo financiero supone para la entidad, en la medida del riesgo financiero asociado a cada uno de los activos financieros que la componen, todo ello teniendo en cuenta dicho beneficio.

Desde el punto de vista matemático, un criterio de asignación —representado por  $\Phi$ — es una función que le asigna al producto de la variable aleatoria unidimensional “medida de riesgo de la cartera” —representada por  $\rho$ — y la variable aleatoria  $n$ -dimensional “medida del riesgo financiero de cada uno de los activos financieros que componen la cartera —representada por  $\mathbf{x}$ —, un vector  $n$ -dimensional de números reales “medida del riesgo financiero de cada uno de los activos financieros que componen la cartera considerando el beneficio que la diversificación del riesgo conlleva para la entidad bancaria” —representado por  $\mathbf{K}$ —, lo que puede expresarse de la forma siguiente:

$$\Phi(\rho, X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow \begin{pmatrix} \Phi_1(\rho, X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \Phi_2(\rho, X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \dots \\ \Phi_n(\rho, X_1, X_2, \dots, X_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \dots \\ K_n \end{pmatrix}$$

La medida de riesgo de la cartera puede ser cualquiera de las medidas del riesgo financiero inesperado o de la total que, con frecuencia, se emplean en el ámbito financiero, especialmente, la varianza, la desviación típica, el valor en riesgo, el déficit esperado o una medida espectral<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Al respecto véase, por ejemplo, Szegö (2004).

Lógicamente, la combinación de distintas medidas de riesgo de la cartera con distintos criterios de asignación da lugar a diversos principios de asignación de capital, algunos de los cuales se exponen más abajo.

Con independencia de cuáles sean las medidas y los criterios utilizados por la entidad bancaria, el resultado de los principios de asignación son las contribuciones al riesgo de los activos financieros, las cuales, atendiendo a las dimensiones del riesgo que miden, pueden clasificarse en las siguientes:

1. **Absoluta** (representada por  $K_j$ ). Es la exposición al riesgo que un activo financiero que forma parte de la cartera supone para la entidad bancaria considerando el beneficio que la diversificación de dicho riesgo tiene para la misma.
2. **Marginal** (representada por  $k_j$ ). Es la exposición al riesgo que cada unidad —ya sea física o monetaria— de un activo financiero que forma parte de la cartera supone para la entidad bancaria considerando el beneficio que la diversificación de dicho riesgo tiene para la misma.
3. **Incremental**. Es la exposición al riesgo que cada unidad —ya sea física o monetaria— de un activo financiero que todavía no forma parte de la cartera supondría para la entidad bancaria considerando el beneficio que su inclusión en la cartera tendría en términos de diversificación.

## 2. CRITERIOS DE ASIGNACIÓN

### 2.1. Tipología

#### ***Criterios proporcionales***

Se caracterizan porque la contribución al riesgo de un activo financiero es el cociente entre la medida del riesgo financiero asociado al activo financiero —en adelante, por brevedad, medida de riesgo del activo— y la medida de riesgo de cada uno de los activos que componen la cartera:

$$\Phi_j(\rho, X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{\rho(X_j)}{\sum_{j=1}^n \rho(X_j)}$$

El principal inconveniente de estos criterios es que no consideran los beneficios que la diversificación del riesgo tiene en la cartera.

#### ***Criterios marginales***

Se caracterizan porque la contribución al riesgo de un activo financiero se determina por medio de la variación que la consideración o no del activo produce en la medida de riesgo de la cartera.

El criterio marginal más simple es el propuesto por diversos autores, entre los que destacan Gupton, Finger y Bhatia (1997). En dicho criterio, la contribución al riesgo de un activo financiero se determina por medio de la diferencia entre dos medidas de riesgo de la cartera, una que considera el activo y otra que no:

$$\Phi_i(\rho, X_1, X_2, \dots, X_n) = \rho(X_C) - \rho(X_C - X_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

La principal ventaja de este criterio es su facilidad conceptual.

El principal inconveniente es que consume una gran cantidad de tiempo y de recursos, ya que requiere determinar la medida de riesgo de la cartera sin considerar el activo para cada uno de los activos financieros que componen la cartera. Además no cumple, con carácter general, el axioma de agregación lineal —el cual se expone en el epígrafe 2.2—, tal y como se demuestra en Tasche (2000, 2008).

### ***Criterios basados en la teoría de juegos***

La teoría de juegos estudia los juegos cooperativos, cuyos principales elementos podrían ser un conjunto de jugadores y una función de coste.

El objetivo de los jugadores sería minimizar el coste en el que incurren al participar en el juego, para lo cual deben decidir si forman parte o no de las distintas coaliciones que pueden formarse en el mismo.

En dichos juegos se asume frecuentemente que la función de coste es subaditiva, de forma que cuanto mayor es el tamaño de las coaliciones menor es el coste que la función le asigna a los jugadores.

Una de las principales cuestiones que resuelve la teoría de los juegos cooperativos es la determinación del valor del juego, que no es otra cosa que la asignación del coste total del juego a los distintos jugadores que forman parte del mismo.

Aunque pueden obtenerse numerosos valores del juego, éstos deben cumplir una serie de propiedades para que sean económicamente racionales, una de las cuales es que dicho valor debe formar parte del centro del juego, que es el conjunto de coaliciones en las que el coste asignado tanto a las coaliciones como a los jugadores que las componen es menor que el incurrirían todos ellos si fuesen considerados individualmente. Si no se cumple dicha propiedad, las coaliciones y los individuos tienen incentivos para abandonar el juego.

En los criterios de asignación basados en la teoría de los juegos cooperativos se establece una analogía entre los juegos cooperativos y los principios de asignación, de forma que en estos últimos los activos financieros son los jugadores, la medida de riesgo es la función de coste y el valor del juego es el vector de contribuciones al riesgo.



La aplicación de la teoría de los juegos cooperativos a los criterios de asignación fue propuesta inicialmente en el trabajo de Denault (2001). Asimismo, los principales criterios de asignación de este tipo se basan en los valores de Shapley y de Aumann-Shapley.

### ***Criterios basados en el teorema de Euler***

Se caracterizan porque las contribuciones marginales al riesgo se definen como la derivada de la medida de riesgo de la cartera respecto de los pesos que tienen los activos financieros que la componen, y por emplear dicho teorema para descomponer la medida de riesgo de la cartera en las contribuciones al riesgo de cada activo financiero.

La extrapolación del concepto de derivada a la medición de los riesgos financieros permite definir la contribución marginal de un activo financiero como la derivada de la medida de riesgo de la cartera respecto del peso que dicho activo tiene en la misma. Dicha definición fue propuesta inicialmente por Litterman (1996) y demostrada en los trabajos siguientes:

1. Tasche (2000) demuestra que, para una medida de riesgo de la cartera parcialmente diferenciable respecto al peso que tienen los activos financieros en la cartera y con derivadas continuas, la única definición de contribución marginal que es compatible con la rentabilidad ajustada al riesgo es la derivada de la medida de riesgo de la cartera respecto al peso de dichos activos.
2. Denault (2001) demuestra que, en el contexto de los juegos cooperativos con jugadores fraccionados, y para funciones de coste homogéneas de primer grado, el precio de Aumann-Shapley —valor de Aumann-Shapley por cada unidad de medida de referencia— es la derivada de la función respecto al grado de presencia de los jugadores en la coalición, lo que, en el contexto de la medición de los riesgos financieros, no es otra cosa que la derivada de la medida de riesgo de la cartera respecto al peso de los activos financieros que la componen.
3. Kalkbrener (2005) demuestra que si un criterio de asignación cumple los axiomas de agregación lineal, diversificación y continuidad —todos ellos se exponen brevemente más abajo—, entonces la contribución marginal viene dada por la derivada de la medida de riesgo de la cartera respecto al peso de los activos financieros que la componen.

En cualquier caso, dichos trabajos obtienen la misma definición de contribuciones marginales, la cual relaciona la medida de riesgo de la cartera —representada por  $\rho(X_c)$ —, las contribuciones absolutas —representadas por  $K_i$ — y las marginales —representadas por  $k_i$ — por medio del teorema de Euler<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Según dicho teorema, una función es homogénea de grado  $r$ -ésimo si cumple la igualdad siguiente:

$$f(h \cdot X) = h^r \cdot f(x), \quad h > 0.$$

En el caso de que la medida de riesgo de la cartera sea una función homogénea de primer grado, dicha definición da lugar al criterio de asignación de Euler, el cual viene dado por la expresión siguiente:

$$\rho(X_C) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \frac{d\rho(X_C)}{dw_i} \quad (1)$$

siendo  $w_i$  el peso del activo financiero  $i$ -ésimo en la cartera.

Como puede observarse en la expresión (1), la contribución marginal del activo financiero  $i$ -ésimo viene dada por el cociente  $d\rho(X_C)/dw_i$ , y la *contribución absoluta por el producto*  $w_i \cdot k_i$ , siendo  $k_i$  dicho cociente.

En el criterio de asignación basado en el teorema de Euler cabe destacar los tres aspectos siguientes:

1. Las contribuciones al riesgo más importantes en la gestión de los riesgos financieros son las marginales, ya que permiten obtener las absolutas, tal y como se ha expuesto más arriba, y las incrementales, tal y como demuestra Hallebach (1999).
2. La suma de las contribuciones absolutas es la medida de riesgo de la cartera, cumpliéndose el axioma de agregación lineal y la propiedad de asignación completa.
3. Su utilización requiere determinar la derivada de la medida de riesgo de la cartera respecto del peso de los activos financieros que la componen.

## 2.2. Axiomas de coherencia

De forma similar a las medidas de riesgo<sup>3</sup>, los criterios de asignación deben cumplir una serie de axiomas o de propiedades para que proporcionen contribuciones al riesgo económicamente racionales, de forma que los criterios que los cumplen reciben la denominación de coherentes.

No obstante, al contrario que en las medidas de riesgo, las propuestas que se han realizado en la literatura especializada sobre los axiomas o propiedades que debe cumplir un criterio de asignación para ser coherente son varias, sin que exista un consenso sobre cuál es la más adecuada. Dichas propuestas se exponen a continuación.

Tasche (2000) propone que las contribuciones al riesgo que debe proporcionar un criterio de asignación coherente han de ser compatibles con la evaluación ajusta-

---

El teorema de Euler sobre funciones homogéneas establece que una función es homogénea de grado  $r$ -ésimo si, y sólo si, se cumple la siguiente igualdad:

$$r \cdot f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{df(x)}{dx_i}$$

<sup>3</sup> Respecto a los axiomas de coherencia de una medida de riesgo, véase Artzner, *et al.* (1999).

da al riesgo, de forma que proporcionen información correcta sobre los activos financieros, permitiendo de esa forma su adecuada gestión. Posteriormente, este autor completa su propuesta en Tasche (2008) donde plantea que dicho criterio debe proporcionar contribuciones al riesgo que cumplan las propiedades de asignación completa —similar al axioma de agregación lineal— y compatibilidad con el criterio de rentabilidad sobre el capital ajustado al riesgo.

Por su parte, Denault (2001) propone que un criterio de asignación coherente debe proporcionar contribuciones al riesgo que cumplan tres propiedades:

1. No infravaloración (*no undercut* en lengua inglesa).

Sea una subcartera —representada por  $X_S$ — dentro de una cartera de activos financieros —representada por  $X_C$ —, el criterio cumple esta propiedad si la suma de las contribuciones al riesgo de cada uno de los activos que la componen es menor o igual que la medida de riesgo de la subcartera.

$$\sum_{X_i \in X_S} K_i \leq \rho \left( \sum_{X_i \in X_S} X_i \right), \forall X_S \subseteq X_C$$

2. Simetría.

Sean dos subcarteras  $X_h$  y  $X_j$  que presentan el mismo grado de exposición a un riesgo financiero, el criterio de asignación es simétrico si proporciona las mismas contribuciones al riesgo para las dos subcarteras.

$$K_h = K_j, X_h, X_j \subseteq X_C$$

3. Asignación sin riesgo.

Sea un activo financiero libre de riesgo —representado por  $X_n$ — y su peso en una cartera —representado por  $\alpha$ —, el criterio cumple esta propiedad si su contribución al riesgo es de menos  $\alpha^4$ :

$$K_n = \rho(\alpha) = -\alpha \tag{2}$$

Por último, Kalkbrener (2005) demuestra que la contribución al riesgo que proporciona un criterio de asignación coherente depende solamente de las características del activo financiero y de la cartera<sup>5</sup>. Asimismo, este autor propone que un criterio de asignación coherente debe cumplir tres axiomas:

<sup>4</sup> En aras de la sencillez en la expresión (2) no se ha considerado la rentabilidad de  $X_n$ .

<sup>5</sup> Dicha demostración simplifica la determinación de las contribuciones al riesgo, las cuales vienen dadas por una función que depende de las medidas de riesgo del activo financiero  $i$ -ésimo y de la cartera:

$$\Phi_i(\rho, X_1, X_2, \dots, X_n) = \Lambda(X_i, X_C), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

siendo  $\Lambda(x, y)$  una función que representa el criterio de asignación del activo financiero  $x$  de la cartera  $y$ .

### 1. Agregación lineal.

La medida de riesgo de una cartera debe ser igual a la suma de las contribuciones al riesgo de cada uno de los activos que la componen:

$$\rho(X_C) = \Lambda(X_C, X_C) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \Lambda(X_i, X_C) \quad (3)$$

### 2. Diversificación.

La contribución al riesgo de un activo financiero no puede ser mayor que su medida de riesgo:

$$\Lambda(X_i, X_C) \leq \Lambda(X_i, X_i) = \rho(X_i)$$

### 3. Continuidad.

El efecto que tiene una pequeña variación de la cartera —representada por  $\varepsilon$ — en las contribuciones al riesgo tiende a nulo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Lambda(X_i, X_C + \varepsilon X_i) = \Lambda(X_i, X_C)$$

La coherencia de los criterios de asignación está estrechamente vinculada con la de las medidas de riesgo. Así, Kalkbrenner (2005) demuestra que si la medida de riesgo cumple los axiomas de homogeneidad de primer grado y subaditividad, el criterio de asignación cumple los de agregación lineal y diversificación, mientras que Buch y Dorfleitner (2008) demuestran que si la medida de riesgo cumple, además, el axioma de invariancia ante traslaciones el criterio cumple las propiedades de asignación completa, no infravaloración y asignación sin riesgo.

## 3. PRINCIPALES PRINCIPIOS DE ASIGNACIÓN EN EL ÁMBITO DE LAS ENTIDADES BANCARIAS

### 3.1. Principios de asignación basados en la covarianza

Los principios de asignación basados en la covarianza emplean esta medida de correlación para determinar la contribución al riesgo inesperado, la cual se obtiene descomponiendo la contribución al riesgo en sus componentes, el esperado —representado por  $k_i^{EL}$ — y el inesperado (representado por  $k_i^{UL}$ ):

$$k_i = k_i^{EL} + k_i^{UL}$$

Al igual que la contribución al riesgo, la medida de riesgo de una cartera puede descomponerse en su parte esperada –representada por  $\rho_{EL}(X_C)$ – e inesperada (representada por  $\rho_{UL}(X_C)$ ):

$$\rho(X_C) = \rho_{EL}(X_C) + \rho_{UL}(X_C)$$

Si la medida de riesgo de la cartera es el valor en riesgo  $\alpha$ -ésimo, este puede obtenerse o aproximarse por medio de la expresión siguiente:

$$\rho(X_C) = E(X_C) + c_\alpha \cdot \sigma_{X_C}$$

Siendo  $c_\alpha$  el multiplicador de capital, el cual se obtiene por diversos métodos.

La contribución al riesgo esperado puede obtenerse empleando la propiedad aditiva de la esperanza matemática de una variable aleatoria que es, a su vez, suma de una serie de variables aleatorias:

$$\rho_{EL}(X_C) = E(X_C) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot E(X_i) \quad (4)$$

Como puede observarse, la contribución al riesgo esperado es, precisamente, la esperanza matemática del riesgo financiero del activo  $i$ -ésimo:

$$k_i^{EL} = E(X_i)$$

Por su parte, la contribución al riesgo inesperado puede obtenerse, a partir de la desviación típica del riesgo financiero de la cartera, aplicando la propiedad de linealidad de la covarianza:

$$\rho_{UL}(X_C) = c_\alpha \cdot \sigma_{X_C} = c_\alpha \cdot \frac{\text{cov}(X_C, X_C)}{\sigma_{X_C}} = c_\alpha \cdot \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot \text{cov}(X_i, X_C)}{\sigma_{X_C}} \quad (5)$$

Como puede observarse, la contribución al riesgo inesperado es:

$$k_i^{UL} = c_\alpha \cdot \frac{\text{cov}(X_i, X_C)}{\sigma_{X_C}} = c_\alpha \cdot \frac{\sigma_{X_i} \cdot \sigma_{X_C} \cdot \rho_{X_i, X_C}}{\sigma_{X_C}} = c_\alpha \cdot \sigma_{X_i} \cdot \rho_{X_i, X_C}$$

Esta última expresión muestra los componentes de la contribución al riesgo inesperado, los cuales son el multiplicador de capital, que depende de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria empleada para representar el riesgo de la cartera, el riesgo inesperado del activo financiero  $i$ -ésimo, medido por medio de su

desviación típica —representada por  $\sigma_{x_i}$ —, y la estructura de dependencia entre dicho activo y la cartera, medida mediante el coeficiente de correlación entre el riesgo del activo financiero y el de la cartera (representado por  $\rho_{x_i, X_C}$ ).

En el supuesto de que el multiplicador de capital sea la unidad ( $c_\alpha=1$ ), se obtiene un modelo similar al modelo media-varianza tan empleado en la gestión del riesgo de variación en el precio de las acciones.

En los principios de asignación basados en la covarianza, la medida de riesgo de la cartera es homogénea, invariante ante translaciones y subaditiva, pero con carácter general (para  $c_\alpha > 0$ ) no es monótona. Kalkbrener, Lotter y Overbeck (2004), y Kalkbrener (2005) señalan que esto afecta al principio de asignación, el cual puede proporcionar unas contribuciones al riesgo mayores que la medida de riesgo del activo financiero, lo cual carece de toda lógica.

### 3.2. Principios de asignación basados en el teorema de Euler

En los principios de asignación basados en el teorema de Euler, el criterio de asignación se basa en la primera derivada de la medida de riesgo de la cartera respecto del peso que tienen los activos financieros en la misma, por lo que su utilización requiere, en primer lugar, determinar esta derivada para cada una de las medidas de riesgo que pueden utilizarse en el principio de asignación.

Los trabajos en los que se trata esta cuestión son numerosos y difieren, principalmente, en la medida de riesgo y en la distribución de probabilidad empleada para representar el riesgo.

En el contexto del riesgo de mercado, los principales trabajos en los que se determina dicha derivada son los siguientes:

1. Garman (1996) obtiene la primera derivada del valor en riesgo  $\alpha$ -ésimo de la cartera respecto del peso de los activos financieros, asumiendo la hipótesis de una distribución de probabilidad normal, con el fin de obtener la contribución marginal al riesgo. Posteriormente, Garman (1997) obtiene la contribución absoluta al riesgo.
2. Gouriéroux, Laurent y Scaillet (2000) obtienen la primera y la segunda derivadas del valor en riesgo  $\alpha$ -ésimo de la cartera respecto al peso de los activos financieros, asumiendo dos hipótesis sobre la distribución de probabilidad: una en la que la distribución es normal, y otra en la que la distribución es general y se caracteriza por tener una distribución de probabilidad condicionada continua que tiene densidad positiva y admite momentos de segundo orden.

En cuanto al riesgo de crédito, los principales trabajos en los que se determinan las derivadas de la medida de riesgo de la cartera respecto del peso de los activos financieros son los siguientes:

1. Asumiendo la hipótesis de que en la cartera existe al menos un activo financiero en el que la variable aleatoria que representa el riesgo tiene una función de densidad condicionada al resto de los activos que componen la cartera, Tasche (2000) obtiene las derivadas de:

a) El valor en riesgo  $\alpha$ -ésimo de la cartera (representado por  $VaR_\alpha(X_C)$ ):

$$b) \frac{dVaR_\alpha(X_C)}{dw_i} = E[X_i / X_C = VaR_\alpha(X_C)]$$

c) Déficit esperado  $\alpha$ -ésimo de la cartera (representado por  $ES_\alpha(X_C)$ ):

$$d) \frac{dES_\alpha(X_C)}{dw_i} = E[X_i / X_C \geq VaR_\alpha(X_C)]$$

2. Overbeck (2004), y Overbeck y Sokolova (2008) obtienen la derivada de una medida de riesgo espectral coherente —representada por  $M_\phi(X_C)$ — respecto al peso de los activos financieros, empleando el criterio de asignación coherente propuesto por Kalkbrener (2005) y la densidad del escenario máximo asociado a dicha medida —representado por  $g_\phi(X_C)$ —, siendo su expresión la siguiente:

$$3. \frac{dM_\phi(X_C)}{dw_i} = E[X_i \cdot g_\phi(X_C)]$$

#### 4. CONCLUSIONES

Los principios de asignación que las entidades bancarias pueden emplear para considerar los beneficios que obtienen de la diversificación de los riesgos financieros dependen de la medida de riesgo de la cartera y de los criterios de asignación siendo, por tanto, diversos. No obstante, para que sean realmente útiles y dichas entidades puedan utilizarlos sin inconvenientes en la gestión de los riesgos financieros, los principios de asignación deben proporcionar contribuciones al riesgo económicamente racionales (deben ser coherentes).

En el presente trabajo se han expuesto los principales criterios de asignación y los axiomas que deben cumplir para ser coherentes. Además, se han expuesto los principales criterios de asignación utilizados en el ámbito bancario.

## BIBLIOGRAFÍA

Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, D. (1999). "Heath. Coherent measures of risk". *Mathematical Finance*, vol. 9, no. 3, 203-228.

Buch, A. y Dorfleitner, G. (2008). "Coherent risk measures, coherent capital allocations and the gradient allocation principle". *Insurance: Mathematics & Economics*, no. 42, 235-242.

Denault, M. (2001). "Coherent Allocation of Risk Capital". *Journal of Risk*, vol. 4 no.1, fall.

Fischer, T. (2003). "Capital Allocation by Coherent Risk Measures Based on One-Sided Moments". *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 32, no. 1, 135-146.

Garman, M. (1996). "Improving on VaR". *Risk*, vol. 9, no. 5, may, 61-63.

Garman, M. (1997). "Taking VaR to Pieces". *Risk*, 10, october, 70-71.

Gourieroux, C., Laurent, J. P. y Scaillet, O. (2000). "Sensitivity analysis of Values at Risk". *Journal of Empirical Finance*, no. 7, 225-245.

Gupton, G.M., Finger, C.C. y Bhatia, M. (1997). *CreditMetrics* —Technical Document. [Web]. Nueva York: J. P. Morgan. (<http://www.ma.hw.ac.uk/~mcneil/F79CR/CMTD1.pdf> [Accessed: May 10, 2011])

Hallerbach, W.G. (1999). *Decomposing Portfolio Value-at-Risk*. [Web]. Rotterdam: Erasmus University Rotterdam, 1999. (<http://www.tinbergen.nl/discussionpapers/99034.pdf> [Accessed: May 10, 2011])

Kalkbrener, M. (2005). "An axiomatic approach to capital allocation". *Mathematical Finance*, vol. 15, no. 3, 425-437.

Kalkbrener, M., Lotter, H. y Overbeck, L. (2004). "Sensible and Efficient Capital Allocation for Credit Portfolios". *Risk*, 2004, January, S19-S24.

Litterman, R. (1996). "Hot Spots and Hedges". *Journal of Portfolio Management*, Special Issue, 52-75.

Overbeck, L. (2004). "Spectral Capital Allocation". En: Dev, A. (2004). *Economic Capital. A Practitioner Guide*. Londres: Risk Books.

Overbeck, L. y Sokolova, M. (2008). "Risk Measurement with Spectral Capital Allocation". En Härdle, W., Hautsch, N. y Overbeck, L. (2008). *Applied Quantitative Finance*. Berlin: Springer, 2008.



Tasche, D. (2000). *Conditional Expectation as Quantile Derivative*. [Web]. Munich: Technische Universität München, 2000. (<http://www-m4.ma.tum.de/pers/tasche/quant.pdf> [Accessed: May 10, 2011].)

Tasche, D. (2000). *Risk contributions and performance measurement*. [Web]. Munich: Technische Universität München, 2000. (<http://www-m4.ma.tum.de/pers/tasche/riskcon.pdf> [Accessed: May 10, 2011]).

Tasche, D. (2002). "Expected shortfall and beyond". *Journal of Banking and Finance*, no. 26, 1519-1533.

Tasche, D. (2008). *Euler Allocation: Theory and Practice*. [Web]. Munich: Technische Universität München, 2008. ([http://www.greta.it/credit/credit2007/thursday/1\\_Tasche.pdf](http://www.greta.it/credit/credit2007/thursday/1_Tasche.pdf) [Accessed: May 10, 2011].)

Urban, M., Dittrich, J. Klüppelberg, C. y Stölting, R. (2004). *Allocation of Risk Capital to Insurance Portfolios*. [Web]. Munich: Technische Universität München, (<http://www-m4.ma.tum.de/Papers/Klueppelberg/all030908.ps> [Accessed: May 10, 2011])

Szegö, G. (2004). *Risk measures for the 21st century*. Chichester: Wiley.

## Ponencia 4

### A GENERALIZATION OF THE LOG-NORMAL DISTRIBUTION AND ITS APPLICATIONS

Victoriano José García García, Emilio Gómez Déniz  
and Francisco José Vázquez Polo

#### ABSTRACT

A new class of heavy-tailed distribution functions, containing the lognormal distribution as a particular case, is introduced. The density and distribution functions of this new class are given by a closed expression which allows us to easily compute probabilities, quantiles, moments and related measurements. Finally, some applications are shown as examples.

**Key Words:** Heavy-Tailed, Insurance, Lognormal Distribution, Loss, Subexponential Distribution.

#### 1. INTRODUCTION: A GENERALIZATION OF THE LOGNORMAL DISTRIBUTION

Let  $X_0$  be a random variable with Gaussian density

$$\phi_{\theta}(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x_0 - \mu)^2}{\sigma^2} \right],$$

where  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ , with  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $\sigma > 0$  and let  $\Phi_{\theta}(x_0) = P(X_0 \leq x_0)$ ,  $\bar{\Phi}_{\theta}(x_0) = P(X_0 > x_0)$ . On the other hand, a random variable  $X$  with density

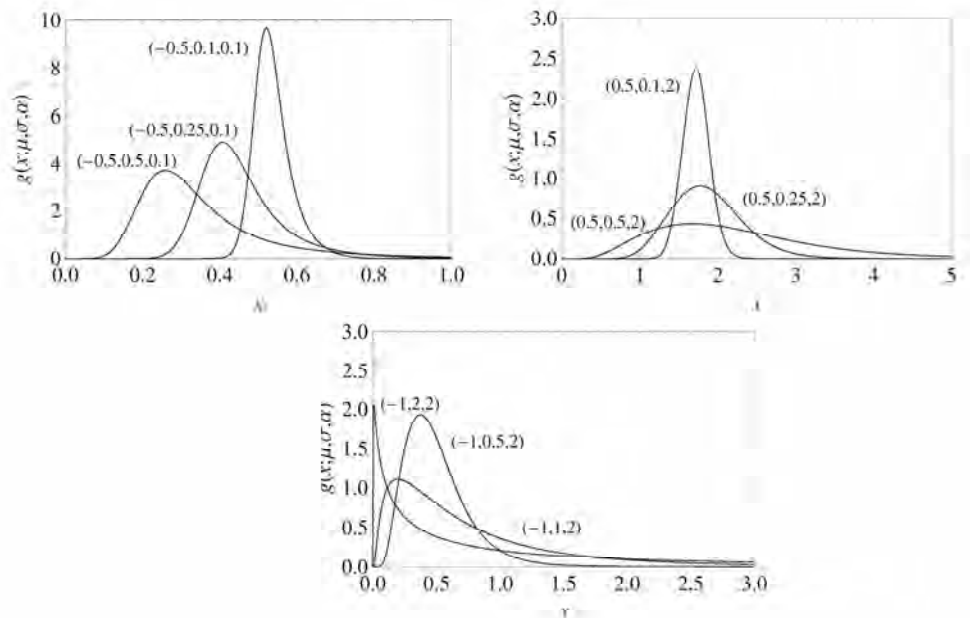
$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(\log x - \mu)^2}{\sigma^2} \right],$$

is said to be a lognormal distributed random variable, denoted by  $X \sim LN(\mu, \sigma)$ . Moreover, let  $F_{\theta}(x) = P(X \leq x)$ ,  $\bar{F}_{\theta}(x) = P(X > x)$ . Marshall and Olkin (1997) proposed a method for generalizing distributions (or densities) by adding a parameter  $\alpha > 0$ , which is given by

$$g_{\theta, \alpha}(x) = \frac{\alpha \phi_{\theta}(\log x)}{x [1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(\log x)]^2}. \quad (1)$$

Henceforth, when a positive and continuous random variable  $X$  follows the pdf (1) we use  $X \sim GLN(\mu, \sigma, \alpha)$  to denote the generalized lognormal distribution.

Figure 1 shows the pdf of the GLN distribution proposed in this paper for different parameter values. It can be seen that the new model is very versatile and that the value of  $\alpha$  has a substantial effect on the tail-probabilities of the pdf.



**Figure 1**  
Some examples of pdf(1) for different parameter values  $(\mu, \sigma, \alpha)$ .

The rest of the paper is organized as follows. Section 2 shows some basic properties and relationships between the moments and the parameters of the GLN distribution. In Section 3 estimation methods are considered and finally, in Section 4 an example is developed in depth. Some conclusions are drawn in Section 5.

## 2. SOME BASIC PROPERTIES OF THE GLN DISTRIBUTION

**Proposition 1** *Let  $Y \sim GLN(\mu, \sigma, \alpha)$ , then the  $k$ -th moment around the origin of the random variable  $Y$  is given by*

$$\begin{aligned}\mu_k = \mathbb{E}(Y^k) &= \int_0^1 \frac{\alpha \exp[k \Phi_{\theta}^{-1}(h)]}{(\bar{\alpha}h + \alpha)^2} dh \\ &= \alpha \exp(k\mu) \int_0^1 \frac{\exp[k\sigma\sqrt{2}\operatorname{erf}^{-1}(2h-1)]}{(\bar{\alpha}h + \alpha)^2} dh, \quad (2)\end{aligned}$$

where  $\operatorname{erf}(\cdot)$  is the error function.

**Proof.** By definition,

$$\mu_k = \int_0^{\infty} x^k g_{\theta, \alpha}(x) dx.$$

Let us consider  $\log x = t$  and then obtain

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(kt) \alpha \phi_{\theta}(t) dt}{[\Phi_{\theta}(t) + \alpha \bar{\Phi}_{\theta}(t)]^2}.$$

We term  $\Phi(t; \mu, \sigma) = h$ , and thus  $\phi_{\theta}(t) dt = dh$  and  $t = \Phi_{\theta}^{-1}(h)$ . Then,

$$\mu_k = \int_0^1 \frac{\alpha \exp[k \Phi_{\theta}^{-1}(h)]}{(\bar{\alpha}h + \alpha)^2} dh$$

Finally, it is only necessary to consider the well-known relationship

$$\Phi_{\theta}^{-1}(h) = \mu + \sigma\sqrt{2}\operatorname{erf}^{-1}(2h-1),$$

and the proof is completed. ■

**Table 1**  
Moments for GLN (0,1,  $\alpha$ ) distributions.

$\alpha$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	Var	$Sk$
0.1	0.4766	00.9673	9.3901	0.7401	12.9140
0.2	0.6945	1.81272	18.6479	1.3303	10.1278
0.3	0.8662	2.6036	27.8079	1.8532	8.8554
0.4	1.0125	3.3564	36.8851	2.3310	8.0824
0.5	1.1420	4.0795	45.8893	2.7751	7.5472
0.6	1.2592	4.7781	54.8276	3.1924	7.1476
0.7	1.3966	5.4560	63.7055	3.5876	6.8339
0.8	1.4668	6.1158	72.5274	3.9641	6.5789
0.9	1.5604	6.7596	81.2969	4.3245	6.3661
1	1.6487	7.3890	90.0171	4.6707	6.1848
10	4.9431	45.1616	779.502	20.7270	3.7233
20	6.5852	73.7568	1444.70	30.3908	3.3349
30	7.7178	97.1450	2955.61	37.5798	3.1505
40	8.6045	117.5260	2630.04	43.4881	3.0350
50	9.3422	135.8610	3177.03	48.5843	2.9530
60	9.9785	152.6790	3702.12	53.1089	2.8904
70	10.5408	168.3120	4209.03	57.2042	2.8404
80	11.0462	182.9820	4700.42	60.9628	2.7990
90	11.5066	196.8510	5178.32	64.4484	2.7640

Expression (2) is useful for evaluating  $\mu_k$ . Table 1 contains values for  $\mu_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) in a  $GLN(0, 1, \alpha)$  distribution for several values of  $\alpha$ . The variance and the skewness coefficient  $Sk$  given by

$$Sk = \frac{E(Y - EY)^3}{Var(Y)^{3/2}},$$

are also included in Table 1.

**Proposition 2** *In the  $GLN(\mu, \sigma, \alpha)$  family, the following relationship holds for every  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\alpha > 0$ :*

$$\mu_1(\mu, \sigma, \alpha) = \exp(\mu) \mu_1(0, \sigma, \alpha), \quad (3)$$

$$\mu_k(\mu, \sigma, \alpha) = \exp(k\mu) \mu_k(0, \sigma, \alpha), \quad (4)$$

$$\bar{\mu}_k(0, \sigma, \alpha) = \mu_1(0, k\sigma, \alpha), \quad (5)$$

$$\mu_k(\mu, \sigma, \alpha) = \exp(k\mu) \mu_1(0, k\sigma, \alpha), \quad (6)$$

$$Var(\mu, \sigma, \alpha) = \exp(2\mu) Var(0, \sigma, \alpha), \quad (7)$$

$$Sk(\mu, \sigma, \alpha) = Sk(0, \sigma, \alpha), \quad (8)$$

where  $Var(\mu, \sigma, \alpha)$ , and  $Sk(\mu, \sigma, \alpha)$ , are the variance and skewness coefficient of the  $GN(\mu, \sigma, \alpha)$  distribution, respectively.

**Proof.** Omitted by the space limitation. ■

It is then proven that the skewness of a  $GLN$  distribution does not depend on the value of the parameter  $\mu$ . Furthermore, observe that the survival function derived from (1) is given by

$$\bar{G}_{\theta, \alpha}(x) = \frac{\bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(\log x)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(\log x)}$$

Thus, it is simple to derive the quantile  $\gamma(x_{\gamma})$ , which is given by

$$x_{\gamma} = \exp \left[ \bar{\Phi}_{\theta}^{-1} \left( \frac{\alpha \gamma}{1 - \bar{\alpha} \gamma} \right) \right], \quad (9)$$

where  $\bar{\Phi}_{\theta}^{-1}(\cdot)$  is the quantile function of the normal distribution function  $\bar{\Phi}_{\theta}(x)$ . In particular, the median,  $P(Y \leq M) = 0.5$ , is given by

$$M = \exp \left[ \bar{\Phi}_{\theta}^{-1} \left( \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right) \right]. \quad (10)$$

Observe now the behaviour of (10) at the limit values of  $\alpha$ . When  $\alpha \rightarrow \infty$ , then  $M \rightarrow \infty$ ; and when  $\alpha \rightarrow 0$ , then  $M \rightarrow 0$ . Thus, it is shown that there are no limit distributions, and the right or left tail probabilities increase for  $\alpha > 1$  and  $0 < \alpha < 1$ , respectively.

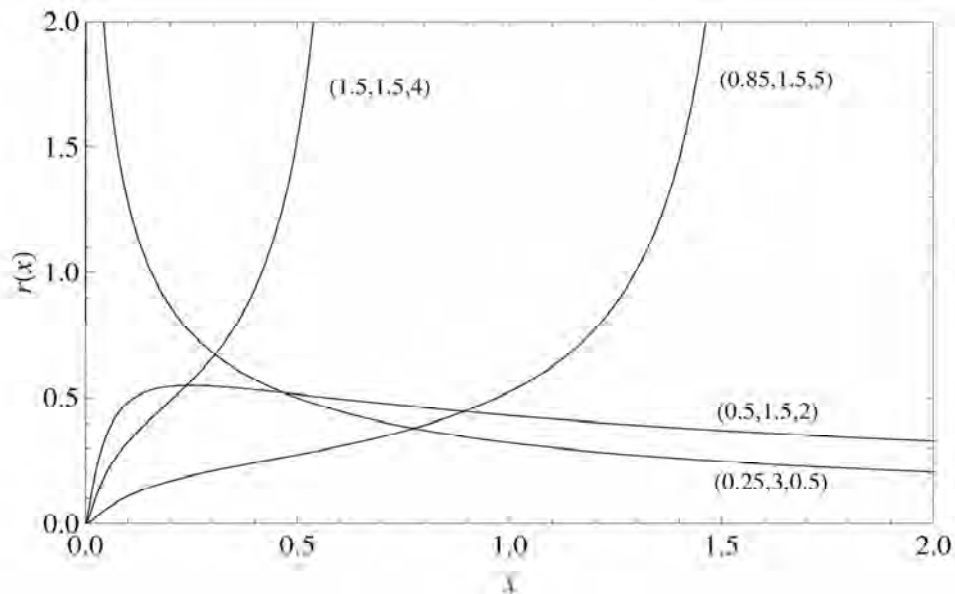
On the other hand, the hazard rate function,  $r_{\theta, \alpha}(x)$ , and the hazard function,  $R_{\theta, \alpha}(x)$ , of the generalized lognormal distribution proposed in this paper are given by

$$r_{\theta, \alpha}(x) = \frac{1}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(\log x)} \frac{\phi_{\theta}(\log x)}{x \bar{\Phi}_{\theta}(\log x)}, \quad (11)$$

$$R_{\theta, \alpha}(x) = -\log \bar{G}(x) = \log \left( \frac{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(\log x)}{\alpha \bar{\Phi}_{\theta}(\log x)} \right), \quad (12)$$

respectively.

Figure 2 shows the plot of the hazard rate function for different choices of parameters  $\mu$ ,  $\sigma$  and  $\alpha$ . As can be seen, the distribution can present a monotonically increasing failure rate (IFR), a monotonically decreasing failure rate (DFR) or one that is locally but not globally monotone, depending on the parameter values. This fact is particularly interesting in life insurance, where the hazard rate generally changes the monotone in the domain of  $x$ .



**Figure 2**

Hazard rate function of the generalized lognormal distribution for different values of  $(\mu, \sigma, \alpha)$

The following result connects the hazard rate function of the generalized lognormal distribution and the classical lognormal distribution in terms of the parameter  $\alpha$ .

**Proposition 3** *Let  $Y \sim GLN(\mu, \sigma, \alpha)$  and  $X \sim LN(\mu, \sigma)$ . Let  $r_Y(x)$  and  $r_X(x)$  be their respective hazard rate functions. Then,*

1.  $r_X(x) < r_Y(x)$  for all  $x$  if and only if  $0 < \alpha < 1$ .
2.  $r_X(x) > r_Y(x)$  for all  $x$  if and only if  $\alpha > 1$ .

**Proof.** The proof is straightforward. ■

### 3. ESTIMATION

Assume that  $Y$  is a random variable with distribution function  $GLN(\mu, \sigma, \alpha)$  and that the values of the parameter set  $(\mu, \sigma, \alpha)$  are to be estimated from a sample  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ . Then, from the  $GLN$  density (1), the log-likelihood is given by

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{y}; \mu, \sigma, \alpha) &= n \log \alpha + \sum_{i=1}^n \log \phi_{\theta}(\log y_i) \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \log [1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(\log y_i)]. \end{aligned}$$

By using this expression and with the help of appropriate software, it is possible to obtain ML-estimates. The approximate values of the parameters, obtained from Corollary 1, can be used as initial approximations for the solution of the likelihood equations derived below for the scoring method (see Klugman et al., 2008). This avoids the need to use second-order derivatives, by applying the Newton-Raphson method.

Let us denote  $u_i = \log y_i$ . The normal equations to be solved are the following:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \mu} \phi_{\theta}(u_i)}{\phi_{\theta}(u_i)} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \mu} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \sigma} \phi_{\theta}(u_i)}{\phi_{\theta}(u_i)} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \sigma} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\Phi}_{\theta}(u_i)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} = 0, \quad (15)$$

where

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \phi_{\theta}(u_i) &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{(u_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left( \frac{u_i - \mu}{\sigma^2} \right) \exp \left[ -\frac{(u_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \\ &\quad - \left( \frac{u_i - \mu}{\sigma^2} \right) \phi_{\theta}(u_i), \end{aligned}$$



On the other hand, since  $\bar{\Phi}_{\theta}(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$ ,  $\frac{d}{dz} \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2)$ , we have

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \mu} [\bar{\Phi}_{\theta}(u_i)] &= -\frac{\bar{\alpha}}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \operatorname{erf} \left( \frac{u_i - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\bar{\alpha}}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \right) \exp \left[ -\frac{(u_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \\ &= \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\left( \frac{u_i - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \bar{\alpha} \phi_{\theta}(u_i). \end{aligned}$$

Accordingly, it is obtained that

$$\frac{\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \mu} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} = \frac{\bar{\alpha} \phi_{\theta}(u_i)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)}$$

Therefore

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{u_i - \mu}{\sigma^2} \right) + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\alpha} \phi_{\theta}(u_i)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} = 0.$$

That is,

$$\frac{n\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n u_i + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\alpha} \phi_{\theta}(u_i)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} = 0.$$

To compute (14) observe that

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \phi_{\theta}(u_i) &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{(u_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \right\} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp \left[ -\frac{(u_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{(u_i - \mu)^2}{\sigma^3} \exp \left[ -\frac{(u_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \\ &= -\frac{\phi_{\theta}(u_i)}{\sigma} + \frac{(u_i - \mu)^2}{\sigma^3} \phi_{\theta}(u_i). \end{aligned}$$

Therefore,

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{1}{\sigma} + \frac{(u_i - \mu)^2}{\sigma^3} \right] + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \sigma} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} = 0.$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \sigma} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i) &= -\frac{\bar{\alpha}}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{u_i - \mu}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right] \\
&= \frac{\bar{\alpha}}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{(\log y_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \left( \frac{u_i - \mu}{\sigma^2 \sqrt{2}} \right) \\
&= \bar{\alpha} \frac{u_i - \mu}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left( -\frac{(u_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) = \bar{\alpha} \frac{u_i - \mu}{\sigma} \phi_{\theta}(u_i),
\end{aligned}$$

which is reduced to the equation

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} &= \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{1}{\sigma} + \frac{(u_i - \mu)^2}{\sigma^3} \right] + \frac{2\bar{\alpha}}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{(u_i - \mu) \phi_{\theta}(u_i)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} \\
&\quad - \frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (u_i - \mu)^2 + \frac{2\bar{\alpha}}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{(u_i - \mu) \phi_{\theta}(u_i)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} \\
&\quad - \frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n u_i - \frac{n\mu}{\sigma^3} + \frac{2\bar{\alpha}}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{u_i \phi_{\theta}(u_i)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} \\
&\quad - \frac{2\bar{\alpha}\mu}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{\phi_{\theta}(u_i)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} = 0.
\end{aligned}$$

For parameter estimation purposes, the Fisher information matrix is required. Let  $I(\theta)$  denote the Fisher information matrix with entries  $I_{ij}(\theta) = E \left( \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)$ , for  $i, j = 1, 2, 3$  and  $\theta = (\mu, \sigma, \alpha)$ . After some tedious algebra, the second-order derivatives of the log-likelihood function are found to be

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2} &= -\frac{n}{\sigma^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\alpha}^2 \exp \left( -\frac{(u_i - \mu)^2}{\sigma^2} \right)}{2\pi\sigma^2 (1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i))^2} + \frac{2\bar{\alpha}}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{\phi_{\theta}(u_i)(u_i - \mu)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)}, \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu \partial \sigma} &= \frac{2n}{\sigma^3} (\mu - \bar{u}) - \frac{2\bar{\alpha}}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{\phi_{\theta}(u_i)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} + \frac{\bar{\alpha}^2}{\pi\sigma^3} \sum_{i=1}^n \frac{\exp \left( -\frac{(u_i - \mu)^2}{\sigma^2} \right) (u_i - \mu)}{(1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i))^2} \\
&\quad + \frac{2\bar{\alpha}}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{\theta}(u_i)(u_i - \mu)^2}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu \partial \alpha} &= 2 \left( \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\alpha} \Phi_{\theta}(u_i) \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)}{(1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i))^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{\theta}(u_i)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} \right) \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2} &= -\frac{4\bar{\alpha}}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{\theta}(u_i)(u_i - \mu)}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} + \frac{\bar{\alpha}^2}{\pi \sigma^4} \sum_{i=1}^n \frac{\exp\left(-\frac{(u_i - \mu)^2}{\sigma^2}\right) (u_i - \mu)^2}{(1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i))^2} \\
&\quad + \frac{2\bar{\alpha}}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\Phi}_{\theta}(u_i)(u_i - \mu)^3}{1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i)} + 2\pi \sum_{i=1}^n \phi_{\theta}^2(u_i) \\
&\quad - \frac{6\pi}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \phi_{\theta}^2(u_i)(u_i - \mu)^2 \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma \partial \alpha} &= -\frac{2}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{\theta}(u_i)(u_i - \mu)}{(1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i))^2} \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} &= -\frac{n}{\alpha^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\Phi}_{\theta}^2(u_i)}{(1 - \bar{\alpha} \bar{\Phi}_{\theta}(u_i))^2}.
\end{aligned}$$

Numerical computations allow us to obtain expectations of these derivatives and the inversion of the information matrix evaluated at the maximum likelihood estimates.

#### 4. APLICATION

For illustrative purposes, we use a dataset containing 392 claims in a dental group (basic coverage), obtained from Klugman (1986).

The maximum-likelihood estimates and the maximized log-likelihood values obtained using the Burr, Weibull and standard lognormal distributions are shown in Table 2, where it can be seen that the GLN distribution provides the best fit to the data.

Suppose that one is interested in obtain the limited expected value

$$E(X; u) = E(\min(X, u)) = \int_0^u f(t)dt + u(1 - F(u)),$$

**TABLA 2**  
Summary of the example

Distribution	Parameters	Standard Error	$\tilde{L}_{\max}$
Burr	$c = 8.217$	$> 100$	-3301.01
	$k = 0.022$	$> 100$	
Weibull	$\theta = 0.002$	0,000	-2811.56
	$\beta = 1.004$	0.003	
Lognormal	$\mu = 5.505$	0.047	-2768.19
	$\sigma = 0.962$	0.033	
GLN	$\mu = 5.874$	0.240	-2766.85
	$\sigma = 0.972$	0.038	
	$\alpha = 0.509$	0.215	

from which the value of the function at point  $u$  is equal to the expectation of the distribution truncated at this point. Therefore, it represents the expected amount per claim retained by the insured party on a policy with a fixed deductible amount of  $u$ . The empirical and fitted limited expected values are shown in Table 3

As can be seen, there is little difference between the fit of the standard lognormal and the GLN distributions, but the latter seems to provide a better fit in the middle part of the data set. This is confirmed in the plot of the ogive shown in Figure 3.

## 5. CONCLUSIONS

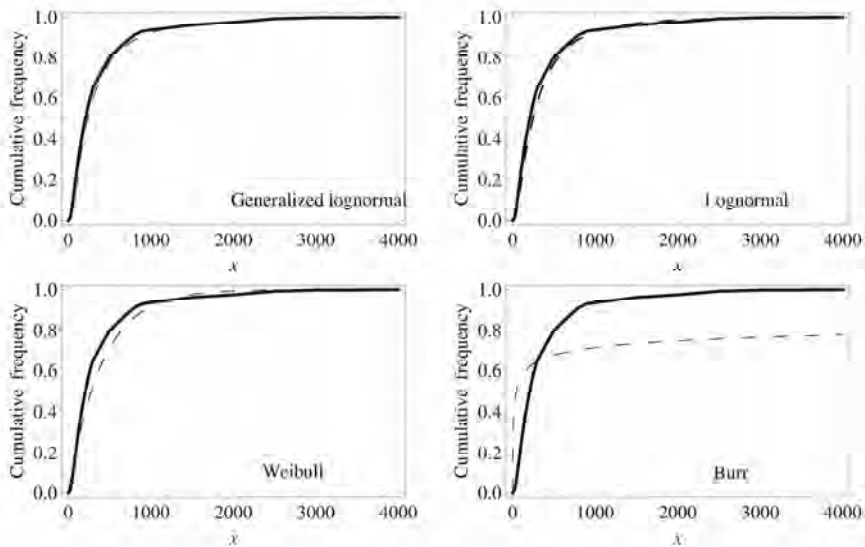
This paper defines a new model, the generalized lognormal distribution (GLN), which generalizes the standard lognormal distribution. Some mathematical properties are derived and plots of the pdf and hazard functions are presented to show the flexibility of the new distribution. Estimation by maximum likelihood is discussed. Finally, the new distribution is fitted to dental data, in the insurance context, which illustrates the flexibility and the potential value of this new distribution, in relation to the standard lognormal, Weibull and Burr distributions.

## ACKNOWLEDGMENTS

Research partially funded by ECO2009-14152 (MICINN, Spain).

**Table 3**  
Limited expected values for the different models considered

$i$	$c_i$	Empirical	Burr	Weibull	Lognormal	GLN
1	25	25	16.79	24.24	24.94	24.96
2	50	48	29.79	47.05	49.28	49.43
3	75	71	41.61	68.48	72.34	72.67
4	100	91	52.71	88.62	93.81	94.25
5	150	126	73.54	125.34	131.80	132.10
6	200	153	93.13	157.56	163.76	163.50
7	250	177	111.83	186.40	190.66	189.16
8	300	196	129.56	211.66	213.39	211.54
9	400	226	164.39	253.65	249.29	246.09
10	500	250	197.38	286.35	275.93	271.92
11	600	267	229.18	311.82	296.16	291.83
12	700	281	260.02	331.65	311.85	307.58
13	800	292	290.07	347.08	342.22	320.27
14	900	300	319.45	359.09	334.13	330.67
15	1000	306	348.23	368.43	342.17	339.30
16	1250	321	418.05	383.70	356.61	355.43
17	1500	332	485.36	391.84	365.90	366.41
18	2000	349	614.26	398.50	376.55	379.92
19	2500	357	737.37	400.39	382.02	387.50
20	3000	360	856.06	400.93	385.09	392.10
21	4000	361	1083.37	401.13	388.11	397.04



**Figure 3**  
Empirical ogive (gross) and fitted for the examples considered.

## REFERENCES

- Arnold, B. C. Discussion of Jones, M. C. Families of distributions arising from distributions of order statistics. *Test*, 2004, 13, 23–25.
- Azzalini, A. A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, 1985, 12, 171–178.
- Beirlant, J., Matthys, G. and Dierckx, G. Heavy-tailed distributions and rating. *Astin Bulletin*, 2001, 31, 1, 37–58.
- Blishke, W. and Murthy, D. *Reliability: Modeling, Prediction, and Optimization*. Wiley, 2000.
- Chen, G. Generalized log-normal distributions with reliability application. *Computational Statistics and Data Analysis*, 1995, 19, 309–319.
- David, H.A. *Order Statistics*, 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1981.
- García, V., Gómez-Déniz, E. and Vázquez-Polo, F.J. A new skew generalization of the Normal distribution: properties and applications. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2010, 54, 2021–2034.
- Gómez-Déniz, E. Another generalization of the geometric distribution. *Test*, 2010, 19, 399–415.
- Gupta, R. C., Gupta, P. L. and Gupta, R. D. Modeling failure time data by Lehmann alternatives. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 1998, 27, 887–904.
- Gupta, R. D. and Kundu, D. Generalized Exponential Distributions. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 1999, 41, 2, 173–188.
- Hogg, R.V. and Klugman, S.A. *Loss Distributions*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. 1984.
- Jones, M. C. Families of distributions arising from distributions of order statistics (with discussion). *Test*, 2004, 13, 1–43.

- Klugman, S.A. Loss distributions. In *Actuarial Mathematics. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. American Mathematical Society*, pp. 31-55, 1986.
- Klugman, S.A., Panjer, H.H. and Willmot, G.E. *Loss models: from data to decisions*, New York: Wiley, 2008.
- Lehmann, E. L. The power of rank test. *Annals of Mathematical Statistics*, 1959, 24, 23-43.
- Lemonte, A.J. and Cordeiro, G.M. The exponentiated generalized inverse Gaussian distribution. *Statistics & Probability Letters*, 2011, 81, 4, 504-517.
- Marshall, A.W. and Olkin, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, 1997, 84, 3, 641-652.
- Martín, J. and Pérez, C.J. Bayesian analysis of a generalized lognormal distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2009, 53, 1377-1387.
- Nichols, M.D. and Padgett, A. A Bootstrap control chart for Weibull percentiles. *Quality and Reliability Engineering International*, 2006, 22, 141-151.
- Prendergast, J., O'Driscoll, E. and Mullen, E. Investigation into the correct statistical distribution for oxide breakdown over oxide thickness range. *Microelectronics Reliability*, 2005, 45, 5-6, 973-977.
- Rolski, T., Schmidli, H. Schmidt, V. and Teugel, J. *Stochastic processes for insurance and finance*. John Wiley & Sons, 1999.
- Sarabia, J.M. and Castillo, E. About a class of max-stable families with applications to income distributions. *Metron*, 2005, LXIII, 3, 505-527.

## Ponencia 5

# ACTUARIAL IMPLICATIONS WHEN MODELLING BIVARIATE CLAIM COUNTS

Lluís Bermúdez and Dimitris Karlis

### ABSTRACT

When actuaries face the problem of pricing an insurance contract that contains different types of coverage, such as a motor insurance or a homeowner's insurance policy, they usually assume that types of claim are independent. However, this assumption may not be realistic: several studies have shown that there is a positive correlation between types of claim. Here we introduce different bivariate regression models in order to relax the independence assumption, including models that account for the unobserved heterogeneity, i.e. overdispersion and excess of zeros, usually observed in real insurance data sets. Finally, these models are applied to an automobile insurance claims database with two different types of claim. We analyse the consequences for pure and loaded premiums when the independence assumption is relaxed by using different bivariate regression models.

### 1. INTRODUCTION AND MOTIVATION

Pricing is specially complicated in the branch of automobile insurance because of highly heterogeneous portfolios. One way to handle this problem of heterogeneity in a portfolio —referred to as tariff segmentation or *a priori* ratemaking— consists of segmenting the portfolio in homogenous classes so that all insured parties belonging to a particular class pay the same premium.

*A priori* ratemaking based on generalized linear models is the most widely accepted method. The most commonly used generalized linear model for modelling claims counts is the Poisson regression model and its generalizations. A thorough review of ratemaking systems for automobile insurance, including the most recent developments, can be found in Denuit *et al.* (2007).

Although it is possible to use the total number of claims as the response variable of the regression model, the nature of automobile insurance policies (covering different risks) is such that the response variable is the number of claims for each type



of guarantee. Therefore, a premium is obtained for each class of guarantee as a function of different factors. Then, assuming independence between types of claim, the total premium is obtained from the sum of the expected number of claims of each guarantee. However, the question remains as to whether the independence assumption is realistic. When this assumption is relaxed, it is interesting to see how the tariff system might be affected. In this paper, two different types of guarantee are assumed: third-party liability automobile insurance and the rest of guarantees.

In a recent paper, Bermúdez (2009) described bivariate Poisson (BP) regression models for ratemaking in car insurance. The central idea was that the existing dependence between the two different types of claims must be taken into account in order to achieve better ratemaking. In particular, BP regression models were presented as an instrument that can account for the underlying connection between two types of claims arising from the same policy (i.e. third-party liability claims and the rest of automobile insurance claims). The conclusion was that even when there are small correlations between the counts, major differences in ratemaking may appear. It was shown that using a BP model leads to a ratemaking that has larger variances and hence, larger loadings in premiums than those obtained under the independence assumption.

However, another question comes up here. How to deal with the unobserved heterogeneity usually observed in such a data set when using a bivariate regression models. In the context of automobile insurance, the problem of unobserved heterogeneity is caused by the differences in driving behaviour among policyholders that cannot be observed or measured by the actuary. The main consequence of unobserved heterogeneity is overdispersion, i.e. data exhibiting variance larger than mean, which it invalidates the use of a simple Poisson distribution. The presence of excess of zeros in most insurance data sets can be also seen as a consequence of unobserved heterogeneity.

In the actuarial literature and for the univariate case, to account for overdispersion some generalizations of the Poisson model have been considered. The most common way to account for overdispersion is by introducing a random effect into the model. The negative binomial regression model or the Poisson-Inverse Gaussian regression model are examples of such a called mixed Poisson models. These models have their zero inflated versions to account for the excess of zeros usually observed in automobile data sets. Indeed, zero inflated models can be considered as a finite mixture of a zero point mass and a mixed Poisson distribution. A natural idea to account for overdispersion is to consider Poisson mixtures, and particularly, finite mixture of Poisson regressions. The idea is that the data consist of subpopulations for which the regression structure is different.

The aim of this paper is to show different bivariate claim counts models to account for such a features of the data, i.e. overdispersion and excess of zeros. These models are applied to an automobile insurance claims data set with two different types of claim in order to analyse the consequences for pure and loaded premiums when the independence assumption is relaxed.

The remaining of the paper proceeds as follows. Next section describes the bivariate claim counts models. In Section 3 the data set from a Spanish insurance company is described. Section 4 is devoted to summarize the obtained results. Finally, concluding remarks can be found in Section 5.

## 2. MODELLING BIVARIATE CLAIM COUNTS

Let  $Y_1$  and  $Y_2$  be the number of claims for third-party liability and for the rest of guarantees respectively. The usual methodology to obtain the *a priori* premium under the assumption of independence between types of claims can be described as follows. First, the model assumed is  $Y_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$  and  $Y_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$  independently, and  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  depend on a number of rating factors associated with the characteristics of the car, the driver and the use of the car. Second, with  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  estimated for each policyholder and following the net premium principle, the total net premium<sup>1</sup> ( $\pi$ ) is obtained as  $\pi = E[Y] = E[Y_1] + E[Y_2] = \lambda_1 + \lambda_2$ .

However, an amount inflates the net premium to ensure that the insurer will not, on average, lose money. Many well-known premium principles can be applied for this purpose. Here the variance premium principle is used. This principle builds on the net premium by including a risk loading that is proportional to the variance of the risk. Under the above assumptions, the variance is equal to the expected value, and the total loaded premium ( $\pi^*$ ) is equal to  $\pi^* = E[Y] + \alpha V[Y] = (1 + \alpha)(E[Y_1] + E[Y_2])$ .

In bivariate Poisson regression models, the independence assumption is relaxed. The model can be defined as follows.

### 2.1. The bivariate Poisson distribution

Consider random variables  $X_k$ ,  $k=1,2,3$  which follow independent Poisson distributions with parameters  $\lambda_k > 0$ , respectively. Then the random variables  $Y_1 = X_1 + X_3$  and  $Y_2 = X_2 + X_3$  follow jointly a bivariate Poisson distribution,  $BP(y_1, y_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , with joint probability function given by

$$P_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \frac{\lambda_1^{y_1}}{y_1!} \frac{\lambda_2^{y_2}}{y_2!} \sum_{s=0}^{\min(y_1, y_2)} \binom{y_1}{s} \binom{y_2}{s} s! \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2} \right)^s. \quad (1)$$

The above bivariate distribution allows for dependence between the two random variables. Marginally each random variable follows a Poisson distribution with

---

<sup>1</sup>Assuming the amount of the expected claim equals one monetary unit.

$E(Y_1)=\lambda_1+\lambda_3$  and  $E(Y_2)=\lambda_2+\lambda_3$ . Moreover,  $Cov(Y_1,Y_2)=\lambda_3$ , and hence  $\lambda_3$  is a measure of dependence between the two random variables. If  $\lambda_3=0$  then the two variables are independent and the bivariate Poisson distribution reduces to the product of two independent Poisson distributions (referred to as the double Poisson distribution). For a comprehensive treatment of the bivariate Poisson distribution and its multivariate extensions the reader can refer to Kocherlakota and Kocherlakota (1992) and Johnson et al. (1997).

For greater flexibility we may assume a bivariate Poisson regression model where each of the parameters of the BP are related to some covariates through a log link function, i.e. by assuming

$$\log \lambda_{ki} = \beta_k^T x_{ki}, \quad k=1,2,3, \quad i=1,\dots,n$$

where  $x_{ki}$  is a vector of covariates for the  $i$ -th observation related to the  $k$ -th parameter and  $\beta_k$  is the associated vector of regression coefficients. In the case of the explanatory variables, two aspects should be stressed. First, different covariates can be used to model each parameter. Second, covariates can be introduced to model  $\lambda_3$  in order to know more about the influence of the covariates on each pair of variables. R package *bivpois* can be used to fit this model based on an EM algorithm (Karlis and Ntzoufras, 2005).

In this model and since the marginal distributions are Poisson, we assume that the marginal means and variances are the same. Therefore, there is need to consider extensions to allow for overdispersion and to account for the excess of zeros.

In Bermúdez (2009) a first extension of the BP model was considered by introducing zero inflated bivariate Poisson (ZIBP) models, namely to inflate the (0,0) cell of no claims at all, to account for the excess of zeros present to the data and, consequently, allowing for overdispersion.

In Bermúdez and Karlis (2011), instead of bivariate Poisson models, a different approach was considered by using models with some overdispersed marginal distribution, i.e. finite mixture of bivariate Poisson regressions (FMBP). This model have some interesting features. First, it allows for overdispersion. Second, the zero inflated model is an special case. And finally allows for a neat interpretation based on the typical clustering usage of finite mixture models.

## 2.2. Zero inflated bivariate Poisson models

Taking the bivariate Poisson model (BP) defined above as the starting point, the zero inflated bivariate Poisson model (ZIBP) is specified by the probability function:

$$f_{ZIBP}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} (1-\rho)f_{BP}(Y_1, Y_2|\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \rho f_D(Y_1|\theta) & Y_1=Y_2=0 \\ (1-\rho)f_{BP}(Y_1, Y_2|\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) & \text{other case,} \end{cases}$$

where  $f_{BP}(Y_1, Y_2|\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  is the joint probability function given in (1), and  $f_D(Y_1|\theta)$  is the degenerate probability function at zero.

In contrast to the BP model, the marginal distributions in the ZIBP model are over-dispersed and the marginal mean and variance for  $Y_1$  are:

$$\begin{aligned} E_{ZIBP}[Y_1] &= (1-\rho)(\lambda_1 + \lambda_3) \\ V_{ZIBP}[Y_1] &= (1-\rho)\{(\lambda_1 + \lambda_3) + \rho(\lambda_1 + \lambda_3)^2\}, \end{aligned}$$

while the covariance is given by:

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{ZIBP}[Y_1, Y_2] &= (1-\rho)\{\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)\} \\ &\quad - \{(1-\rho)^2(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)\}. \end{aligned}$$

R package *bivpois* can also be used to fit this model.

### 2.3. Finite mixture of bivariate Poisson models

A natural way to allow for overdispersion is to consider mixtures of a simpler model. Such approaches while applicable in the bivariate setting, they are not so widely used mainly because of the fact that there is no unique way to do so, and hence matters of easiness and interpretation are more important.

For instance, we may start by a  $BP(a_k\lambda_1, a_k\lambda_2, a_k\lambda_3)$  distribution where  $a_k$  follows jointly some distribution. We may assume  $\lambda_3=0$  which makes calculation much easier and assumes that all the correlation comes from  $a_k$ . If  $\lambda_3 > 0$  then the correlation is twofold, due to  $\lambda_3$  (called intrinsic correlation) and due to  $a_k$ , and so complicates the interpretation of the parameters. To put it in a random effect format the above model is equivalent to assume

$$Y_{1i}, Y_{2i} \sim BP(\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_{3i})$$

$$\log \lambda_{ki} = \beta_k^T x_{ki} + u_{ki}, \quad k=1,2,3, \quad i=1, \dots, n$$

$$u_{1i}, u_{2i}, u_{3i} \sim G(\cdot)$$

where  $G(\cdot)$  is a trivariate distribution and hence the random effects are different for each parameter but related. For identifiability reasons one must assume that the expectation for each random effect is 1. The specification of the random effects distribution  $G(\cdot)$  can be a continuous or a discrete or a finite distribution.

Bermúdez and Karlis (2011) consider the latter case by assuming that the joint distribution for the random effects is a finite distribution, i.e. the case when we have positive probability to only a finite number of points. Such an assumption gives rise to finite mixture models, finite mixture of multivariate Poisson distributions have been described in Karlis and Meligkotsidou (2007). The model, summarized bellow, extends the finite mixture Poisson regression model of Wang et al. (1998) in two dimensions.

Let the  $\theta=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$  denotes the vector of parameters. We define as a  $m$ -finite mixture of bivariate Poisson distributions the distribution with joint probability function

$$P(y_1,y_2)=\sum_{j=1}^m p_j BP(y_1,y_2;\theta_j)$$

where  $p_j>0$ ,  $j=1,\dots,m$  are the mixing proportions and it holds that  $\sum_{j=1}^m p_j=1$  and  $\theta_j$  are the component specific vectors of parameters, namely  $\theta_j=(\lambda_{1j},\lambda_{2j},\lambda_{3j})$ . In the sequel the first subscript will denote the parameter and the second the component, while if we need a subscript to indicate the observation we will use a third one.

Under this mixture model, the marginal expectations are given by

$$E(Y_k)=\sum_{j=1}^m p_j(\lambda_{kj}+\lambda_{3j}), \quad k=1,2,$$

and the variance covariance matrix of  $Y=(Y_1,Y_2)^T$  is given by  $Var(Y)=AD(\theta)A^T$ , where

$$D(\theta)=\begin{bmatrix} Var(\lambda_1)+E(\lambda_1) & Cov(\lambda_1,\lambda_2) & Cov(\lambda_1,\lambda_3) \\ Cov(\lambda_1,\lambda_2) & Var(\lambda_2)+E(\lambda_2) & Cov(\lambda_2,\lambda_3) \\ Cov(\lambda_1,\lambda_3) & Cov(\lambda_2,\lambda_3) & Var(\lambda_3)+E(\lambda_3) \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

which results in

$$Cov(Y_1,Y_2)=Cov(\lambda_1,\lambda_2)+Cov(\lambda_2,\lambda_3)+Cov(\lambda_1,\lambda_3)+Var(\lambda_3)+E(\lambda_3).$$

The above model has some very interesting properties. First even if  $\lambda_3 = 0$ , i.e. within each component the two variables are uncorrelated, the  $Y$ 's are correlated due to the correlation induced by the finite distribution of the  $\lambda$ 's. Second, the correlation between  $Y_1$  and  $Y_2$  can be negative, while  $Y_1$  and  $Y_2$  are overdispersed if  $m > 1$ . Note also that the marginal distributions are finite Poisson mixtures. Finally, mixed bivariate Poisson distributions give always equal or greater probability to the (0,0) cell from the corresponding bivariate Poisson with the same marginal means. Furthermore, zero inflated bivariate Poisson models can be seen as a special case of this model, when the first component has  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  and hence all the probability mass is given in the (0,0) cell. This also implies why zero inflated models are overdispersed and they can induce different correlation structure.

In order to include covariates and thus allow for greater flexibility we assume that each parameter is associated to a vector of regressors. Namely our model takes the form

$$Y_i = (Y_{1i}, Y_{2i}) \sim \sum_{j=1}^m p_j BP(y_1, y_2; \lambda_{1ji}, \lambda_{2ji}, \lambda_{3ji}), \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, m,$$

$$\log(\lambda_{kji}) = \beta_{kj}^T x_{kji}, \quad k=1, 2, 3, \quad j=1, \dots, m,$$

where  $x_{kji}$  is a vector of covariates for the  $i$ -th observations associated with the  $k$ -th parameter of the  $j$ -th component of the mixture and  $\beta_{kj}$  is the set of regression coefficients. It is clear that the covariates can be different for different parameters.

The model assumes that for each variable we have  $m$  distinct Poisson regression models that relate the variable of interest with different covariates, hence we assume that the population has several distinct subpopulations with different behavior. The added feature is that now we model two variables together and hence we are able to take into account their correlation. Moreover starting from a bivariate Poisson model, within each group we may assume different correlation structure. A natural extension of the model is to use covariates also in the mixing proportions, i.e. the vector of probabilities  $(p_1, \dots, p_m)$ . In Bermúdez and Karlis (2011) an EM algorithm is provided to allow for relatively simple ML estimation of the models.

### 3. THE DATA SET

The original sample comprised a ten percent sample of the automobile portfolio of a major insurance company operating in Spain in 1996. Only cars categorized as being for private use were considered. The data contains information from 80,994 policyholders. The sample is not representative of the actual portfolio as it was drawn from a larger panel of policyholders who had been customers of the compa-

ny for at least seven years; however, it will be helpful for illustrative purposes. Twelve exogenous variables, described in Table 1, were considered plus the yearly number of accidents recorded for both types of claim. For each policy, the initial information at the beginning of the period and the total number of claims from policyholders at fault were reported within this yearly period.

For this study, all customers had held a policy with the company for at least three years. Therefore, variable *V7* was rejected and variable *V8* retained its definition and its baseline was now established as a customer who had been with the company for fewer than five years.

The meaning of those variables referring to the policyholders' coverage should also be clarified. The classification here responds to the most common types of automobile insurance policies available on the Spanish market. The simplest policy only includes third-party liability (claimed and counted as  $Y_1$  type) and a set of basic guarantees such as emergency roadside assistance, legal assistance or insurance covering medical costs (claimed and counted as  $Y_2$  type). This simplest policy does not include comprehensive coverage or collision coverage (claimed and counted as  $Y_2$  type). This simplest type of policies makes up the baseline group, while variable *V10* denotes policies which, apart from the guarantees contained in the simplest policies, also include comprehensive coverage (except fire), and variable *V11* denotes policies which also include fire and collision coverage.

**Table 1**  
Explanatory variables used in the models

Variable	Definition
V1	equals 1 for women and 0 for men
V2	equals 1 when driving in urban area, 0 otherwise
V3	equals 1 when zone is medium risk (Madrid and Catalonia)
V4	equals 1 when zone is high risk (Northern Spain)
V5	equals 1 if the driving license is between 4 and 14 years old
V6	equals 1 if the driving license is 15 or more years old
V7	equals 1 if the client is in the company between 3 and 5 years
V8	equals 1 if the client is in the company for more than 5 years
V9	equals 1 if the insured is 30 years old or younger
V10	equals 1 if includes comprehensive coverage (except fire)
V11	equals 1 if includes comprehensive and collision coverages
V12	equals 1 if horsepower is greater than or equal to 5500cc

## 4. RESULTS

Table 2 presents the results from fitting various models in the data. We have fitted models of added complexity, starting from a simple independent Poisson regression model (DP). One can see that the 2-finite mixture of bivariate Poisson regressions are by far the best models, specially the one with covariates in the mixing proportion, which it has the best AIC.

**Table 2**  
Information criteria for selecting the best model for the data

Model	Log-Lik	Parameters	AIC
Double Poisson (DP)	-48,882.95	24	97,813.90
Bivariate Poisson (BP)	-48,135.98	25	96,321.96
BP with regressors on $\lambda_3$ (BP2)	-47,873.37	26	95,798.74
Zero inflated BP (ZIBP)	-45,435.00	26	90,922.00
ZIBP with regressors on $\lambda_3$ (ZIBP2)	-45,414.80	27	90,883.60
2-finite mixture BP (FMBP)	-44,927.01	51	89,956.02
FMBP with regressors on $P$ (FMBP2)	-44,842.22	53	89,737.44

For comparison purposes and focusing on the models accounting for the unobserved heterogeneity, Tables 3 and 4 show the results from fitting the zero inflated bivariate Poisson with  $V10$  as regressor on  $\lambda_3$  (ZIBP2) and the 2-finite mixture bivariate Poisson model with covariates ( $V10$  and  $V11$ ) in the mixing proportion (FMBP2), respectively. The standard errors and the corresponding p-values in Table 3 are obtained by bootstrapping while the p-values in Table 4 refers to the likelihood ratio test (LRT) statistic.



**Table 3**Results from fitting the ZIBP2 model (with regressors on  $\lambda_3$ )

	$Y_1$			$Y_2$		
	Coeff.	St. Err.	p-value	Coeff.	St. Err.	p-value
Intercept	<b>-1.055</b>	0.130	<0.01	<b>-3.269</b>	0.125	<0.01
V1	0.001	0.047	0.981	0.031	0.035	0.367
V2	-0.063	0.037	0.088	<b>0.052</b>	0.025	0.037
V3	-0.024	0.044	0.582	<b>0.118</b>	0.031	<0.01
V4	<b>0.203</b>	0.041	<0.01	<b>-0.114</b>	0.037	<0.01
V5	<b>-0.249</b>	0.114	0.029	<b>0.227</b>	0.091	0.012
V6	<b>-0.362</b>	0.126	<0.01	0.044	0.092	0.630
V8	<b>0.135</b>	0.045	<0.01	<b>0.191</b>	0.034	<0.01
V9	0.105	0.075	0.162	0.053	0.045	0.239
V10	<b>-0.255</b>	0.068	<0.01	<b>2.855</b>	0.061	<0.01
V11	0.046	0.036	0.205	<b>2.050</b>	0.062	<0.01
V12	0.045	0.041	0.275	<b>0.180</b>	0.043	<0.01
<b>Correlation (<math>\lambda_3</math>)</b>						
Intercept	<b>-4.879</b>	0.140	<0.01			
V10	<b>1.962</b>	0.191	<0.01			
$\rho$	<b>0.710</b>	0.006	<0.01			

**Table 4**Results from fitting the FMBP2 model (with regressors on  $\rho$ )

	1st component ( $j=1$ )				2nd component ( $j=2$ )			
	$Y_1$		$Y_2$		$Y_1$		$Y_2$	
	Coeff.	p-value	Coeff.	p-value	Coeff.	p-value	Coeff.	p-value
Inter.	<b>0.071</b>	<0.01	<b>-1.611</b>	<0.01	<b>-3.118</b>	<0.01	<b>-6.014</b>	<0.01
V1	-0.061	0.115	0.032	0.218	0.127	0.059	0.037	0.258
V2	-0.037	0.162	0.008	0.308	-0.076	0.123	<b>0.179</b>	<0.01
V3	<b>-0.090</b>	0.027	<b>0.106</b>	<0.01	<b>0.197</b>	<0.01	<b>0.242</b>	<0.01
V4	<b>0.129</b>	<0.01	-0.043	0.166	<b>0.284</b>	<0.01	<b>-0.371</b>	<0.01
V5	-0.132	0.142	0.153	0.111	<b>-0.346</b>	0.016	<b>0.452</b>	<0.01
V6	-0.216	0.052	0.027	0.313	<b>-0.524</b>	<0.01	0.137	0.215
V8	<b>0.101</b>	0.022	<b>0.135</b>	<0.01	<b>0.190</b>	0.013	<b>0.326</b>	<0.01
V9	0.078	0.145	0.035	0.262	<b>0.193</b>	0.048	<b>0.171</b>	0.024
V10	<b>-0.707</b>	<0.01	<b>1.622</b>	<0.01	<b>-2.676</b>	<0.01	<b>2.953</b>	<0.01
V11	<b>-0.361</b>	<0.01	<b>1.069</b>	<0.01	<b>-0.285</b>	<0.01	<b>2.412</b>	<0.01
V12	0.036	0.224	<b>0.102</b>	0.028	0.079	0.145	<b>0.397</b>	<0.01
<b>Mixing proportion (<math>\rho</math>)</b>								
Inter.	<b>-2.460</b>	<0.01						
V10	<b>1.447</b>	<0.01						
V11	<b>0.680</b>	<0.01						

Focusing on the ZIBP model, and concerning claims for third-party liability, driving experience ( $V5$  and  $V6$ ) reduced the expected number of claims, while driving in northern Spain ( $V4$ ) and drivers with fewer than 5 years in the company ( $V8$ ) caused the expected number of claims to increase for this type of claim. As regards the type of coverage, when including comprehensive coverage except fire ( $V10$ ) was the expected number of claims lowered. On the other hand, for the rest of claims variable, most of the parameters were significant and some differences with the third-party liability claims were found. First, parameters related to the type of coverage ( $V10$  and  $V11$ ) were always significant and their presence increased the expected number of claims markedly. Second, the car's horsepower was also significant here: greater power increased the probability of having a claim. Finally, driving in an urban area ( $V2$ ) became significant and increased the expected number of claims. As regards the driving zone and driving experience, the sign of the coefficient changed for  $V4$  and  $V5$  variables with respect to third-party liability claims. Finally, in order to model the covariance term ( $\lambda_3$ ), the covariates were introduced in the bivariate Poisson model with the result that only the parameter for  $V10$  was significant. As expected, when the policy included comprehensive coverage ( $V10$ ), the correlation between  $Y_1$  and  $Y_2$  is increased.

The existence of "true" zeros assumed by zero inflated models may be a too strong assumption in some cases. However, the FMBP model does not make this somewhat strict assumption and allows mixing with respect to both zeros and positives. This interpretation is more flexible and it holds better in our case. The group separation is characterized by low mean with low variance for the first component (policyholders considered as a "good" drivers) and high mean with high variance for the second one (policyholders considered as a "bad" drivers). Assuming the existence of two type of policyholders described separately by each component of the mixture we improve a lot the modelling of the data set: better AIC and greater number of parameters to be considered significant, specially for the second component. Most of parameters show the same behavior for both "good" and "bad" drivers. However, we find three parameters that they are only significant for the second component, so they can be used to define the "bad" drivers, basically parameters related to driver's age and the driving experience. Young drivers ( $V9$ ) caused the expected number of claims to increase for any type of claim. Driving experience ( $V5$ ) reduces the expected number of third liability claims, but increases the expected number for the rest of claims. On the other hand,  $V10$  and  $V11$  are highly significant for the mixing proportion, implying that "good" drivers take out more guarantees in their policies than "bad" drivers.

Finally, an analysis of the impact of using these models in *a priori* ratemaking was conducted at the same time as the differences between the models proposed in Section 2 were analysed through the mean (*a priori* pure premium) and the variance (necessary for *a priori* loaded premium) of the number of claims per year for some profiles of the insured parties. Five different, yet representative, profiles were selected from the portfolio (Table 5). The first can be classified as the best profile since it presents the lowest mean score. The second was chosen from among the

profiles considered as good drivers, with a lower mean value than that of the average for the portfolio (0.1833). A profile with a mean lying very close to this average was chosen for the third profile. Finally, a profile considered as being a bad driver (with a mean above the average) and the worst driver profile were selected.

Table 6 shows the results for the five profiles and the seven models considered. There are two differences in ratemaking when using bivariate models as opposed to the independent Poisson model. First, bivariate models produce higher means for good risks and lower means for bad risks while maintaining average risks almost equal. Second, bivariate models increase variances in most cases, meaning overdispersion. This is especially noticeable for zero-inflated models and 2-finite mixtures models.

**Table 5**  
Five different policyholders to be compared

Profile	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12
Best	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
Good	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
Average	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
Bad	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
Worst	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1

**Table 6**  
Comparison of *a priori* ratemaking

Model	Best		Good		Average		Bad		Worst	
	Mean	Var	Mean	Var	Mean	Var	Mean	Var	Mean	Var
<b>DP</b>	0.0793	0.0793	0.1070	0.1070	0.1866	0.1866	0.2860	0.2860	0.6969	0.6969
<b>BP</b>	0.0955	0.1191	0.1207	0.1444	0.1849	0.2086	0.2440	0.2677	0.6725	0.6962
<b>BP2</b>	0.0873	0.1027	0.1131	0.1285	0.1804	0.1958	0.2824	0.3726	0.6920	0.7821
<b>ZIBP</b>	0.0834	0.1057	0.1046	0.1369	0.1905	0.2861	0.2816	0.4845	0.5500	1.3103
<b>ZIBP2</b>	0.0826	0.1037	0.1055	0.1371	0.1898	0.2822	0.2771	0.4963	0.5562	1.3440
<b>FMBP</b>	0.0934	0.1407	0.0922	0.1360	0.2271	0.3718	0.3191	0.6902	0.5541	1.0710
<b>FMBP2</b>	0.0908	0.1514	0.0919	0.1430	0.2270	0.3787	0.3531	0.7482	0.5382	1.0184

## 5. CONCLUSIONS

The interpretation of a number of bivariate models is illustrated in the context of automobile insurance claims using a large data set. The conclusion is that even when there are small correlations between the counts, major differences in rate-making may appear. In general, when considering the mean (a priori pure premium) of the number of claims per year, the expected number of claims given by the bivariate models does not differ much from the independent Poisson model; but when the variance (used for the a priori loaded premium) is considered, larger variances are obtained with ZIBP and FMBP models and hence larger loadings in premiums must be included.

From this conclusion, one can understand that the loaded premiums obtained with ZIBP and FMBP models would be larger than those obtained with the independence assumption. However, this is not true for all policyholders, since in some cases the reduction in mean caused by accounting for the excess of zeros is larger than the increase in variance caused by accounting for the overdispersion.

Recall that ZIBP and FMBP models are considered in order to better model the unobserved heterogeneity. ZIBP models are proposed to account for the excess of (0,0) occurrences by considering a finite mixture of a zero point mass and a bivariate Poisson distribution and hence they account also for overdispersion since the marginal distributions are no longer Poisson. On the other hand, FMBP models account for the unobserved heterogeneity by choosing a finite number of subpopulations. In this case, we have assumed the existence of two type of policyholders described separately by each component of the mixture. At the same time, FMBP models embraces the ZIBP regression models as a special case.

We conclude that the 2-finite mixture of bivariate Poisson regression with covariates to the mixing proportion is the best model for describing the data set. First, this model presents the best AIC among the models fitted to this data set. Second, the two-component mixture model used here allows mixing with respect to both zeros and positives counts and so the policyholders are divided into “good” drivers and “bad” drivers subpopulations. Finally, the model allows for a net interpretation of each component separately.

## REFERENCES

- Bermúdez, L. (2009). “A priori ratemaking using bivariate Poisson regression models”. *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 44, No. 1, 135-141.
- Bermúdez, L. and Karlis, D. (2011). *Finite mixture of bivariate Poisson regression models with an application to insurance ratemaking*. Submitted.

Denuit, M.; Maréchal, X.; Pitrebois, S.; Walhin, J.F. (2007). *Actuarial modelling of claim counts*. London: John Wiley & Sons.

Johnson, N.; Kotz, S.; Balakrishnan, N.(1997). *Discrete multivariate distributions*. New York: Wiley.

Karlis, D. and Ntzoufras, I. (2005). "Bivariate Poisson and diagonal inflated bivariate Poisson regression models" in *R. Journal of Statistical Software*, vol. 14, No. 10, 1-36.

Karlis, D and Meligkotsidou, L.(2007). "Finite multivariate Poisson mixtures with applications". *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 137, 1942-1960.

Kocherlakota, S. and Kocherlakota, K.(1992). *Bivariate discrete distributions*. New York: Marcel Dekker.

Wang, P.; Cockburn, I.M.; Puterman, M.L. (1998). "Analysis of patent data: a mixed poisson regression model approach". *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 16, 27-36.

## Ponencia 6

### DYNAMIC MODELS FOR VALUATION OF WRONGFUL DEATH COMPENSATION

Hong Mao, Krzysztof M. Ostaszewski and Youyu Zhang

#### ABSTRACT

Litigation, expert witness work, and resolution in wrongful death cases, require estimation of the amount of loss. That loss results from loss of income that the deceased would have earned had he/she remained alive. The crucial modeling problem is the uncertainty of the future income, and the change of it resulting from death or injury. In this work, we apply the theory of stochastic processes to this problem. We consider the case of a single payment, and a series of level payments, corresponding to common methods of payments of awards in loss litigation. We establish the discounting procedure for the value of future salary, and apply stochastic simulation to determine loss in case of wrongful death. We consider discounting with a single interest rate, and discounting when interest rates are modeled with a stochastic process. We also show that the models can be extended to injury as well as other liability cases.

**Key Words:** Wrongful death, actuarial valuation.

#### 1. INTRODUCTION

Litigation of wrongful death and injury results in an important problem of determining the loss amount to be compensated. The loss considered usually refers to income loss of affected wrongful death or injury persons minus his (or her) consumption. Because the income loss of affected persons is dynamic, that is to say, the income changes over time, we must consider the dynamic change of interest rate and salary income comprehensively. In this article, we determine the loss compensated by quantity analysis and establishing dynamic model of income loss of wrongful death. It should be noticed that it is an important work to analyze the changing pattern of salary rate with time and forecast the income loss that should be compensated. There are several articles that have studied this aspect. Carriere and Shand (1998) proposed parameter estimation of salary function, Mincer (1974) proposed log wage equation and Hosek (1982) investigated income

modeled as an auto-correlated times series,  $Y(t)=a+bY(t-1)+e_t$ , where  $Y(t)$  is the income,  $a$  and  $b$  are constants and  $e_t$  is random error at time  $t$ . He pointed out that there existed some limitation for autocorrelation model, because many economic time series are non-stationary. The results he analysis related change of the series data of wage rates with years supported the assumption of random walk model. Similar research was discussed by Horvitz (1986). He investigated the geometric Brownian described by the following model  $Y(t)=Y(0)e^{\left(\frac{a-1}{2}b^2\right)t+bz(t)}$ , where  $z(t)\sim N(0,t)$ . Another important issue is how to determine the discount value of income except for forecasting the change pattern of wage income with the time. In this article, we establish dynamic compensation models of wrongful death based on the assuming that discount rate is a constant and a stochastic process respectively. We also assume that the increase rate of wage is a stochastic process and there exists correlation between the discount rate and the increase rate of wage. The models established including the forms of a lump-sum payment and level payment. The calculating methods can be easily extended to the case of wrongful injury.

## 2. MODELS OF LUMP SUM PAYMENT

### 2.1. Assuming that the interest rate is constant

Assume that a person died at age  $x$ . The compensation paid to his legitimate successor should be equal to the present value of his cumulative income from the date of his death to the date of his retirement that includes premium for retirement annuity minus his consumption. Here we neglect the additional payment for pain and suffering to survivors. We also consider the probability that the person dies from some other cause. Assume that the increase rate of wage can be written as the following form (Pennacchi, 1999)

$$\frac{dW_t}{W_t} = \mu_{W_t} dt + \sigma_{W_t} dz_{W_t} \quad (1)$$

where  $\mu_{W_t}$  is the average wage rate,  $\sigma_{W_t}$  is the standard deviation if wage rate and  $z_{W_t}$  is a standard Wiener process. Then we have

$$W_t = W_0 + \int_0^t \mu_{W_s} W_s ds + \int_0^t \sigma_{W_s} W_s dz_{W_s} \quad (2)$$

where  $W_0$  is the level of the wage of affected person when wrongful death event occurs. When  $\mu_{W_t} = \mu_W$  and  $\sigma_{W_t} = \sigma_W$  are constant the stochastic differential equation (1) has the unique solution based on Ito's Lemma

$$W_t = W_0 e^{\left(\mu_W - \frac{1}{2}\sigma_W^2\right)t + \sigma_W z_{w_t}} \quad (3)$$

Assume that the random variable  $T_x$  expresses the future lifetime of a person aged  $x$ . Let  ${}_t p_{x+t}$  express the probability that a person aged  $x$  survives  $t$  years. The values of  ${}_t p_{x+t}$  can be found from the life tables. We also assume that  $T_x$  is a random variable that is independent of the wage and the interest rate. Assume that the age of retirement is  $m$  and the risk free interest rate is  $r$ , then the discount factor calculated by continuous interest rate can be expressed as  $e^{-rt}$ . To simplify analysis, assume that the consumption for a person is a fraction  $h$  of that person's wage. Let  $P_1$  be the present value of compensation for wrongful death with a single payment, then

$$\begin{aligned} P_1 &= E\left(\sum_{t=0}^{m-x} W_t(1-h) {}_t p_{x+t} e^{-rt}\right) = \\ &= E\left(\sum_{t=0}^{m-x} W_0(1-h) e^{\left(\mu_W - \frac{1}{2}\sigma_W^2\right)t + \sigma_W z_{w_t}} {}_t p_{x+t} e^{-rt}\right) = \\ &= \sum_{t=0}^{m-x} W_0(1-h) e^{\mu_W t} {}_t p_{x+t} e^{-rt}, \end{aligned} \quad (4)$$

$E$  denotes the expected value. Let

$$\sum_{t=0}^{m-x} e^{\mu_W t} {}_t p_{x+t} e^{-rt} = k_1, \quad (5)$$

where  $k_1$  is called as the *factor of the compensation* for the wrongful death with a single payment. By combining equation (5) with (4), we obtain the following equation:

$$P_1 = W_0(1-h)k_1 \quad (6)$$

## 2.2. Assuming that the interest rate is a stochastic process

As the cumulative calculating term of the compensation for wrongful death is very long, it is very important to consider the undetermined characteristic of the interest rate. It will affect the discount value of the compensation. Now we assume that the real interest rate can be expressed as the following stochastic differential equation:

$$dr = \beta(\mu_r - r)dt + \sigma_r dz_r \quad (7)$$

(see Babbel and Merrill, 1996), where  $dz_r$  is a standard Wiener process,  $\sigma_r$  is the standard deviation of interest rate,  $\mu_r$  is the equilibrium interest rate of long term,



and  $\beta$  is the speed at which the real interest rate recovers to the equilibrium long term interest rate. The factor of stochastic discount calculating with continuous

interest rate can be expressed as  $e^{-\int_0^t r_u du}$ . Assume that the increase rate of the wage satisfies with equation (3), the instant correlation coefficient between the wage and the interest rate is  $\rho_{rW}$  and other assumptions are same as in section 1. Then the present value of the compensation for wrongful death is

$$P_2 = E \left( \sum_{t=0}^{m-x} W_t (1-h)_t p_{x+t} e^{-\int_0^t r_u du} \right). \quad (8)$$

Vasicek (1977) indicates that if the interest rate  $r(t)$  follows the stochastic process given by equation (7), the discount factor is

$$e^{-\int_0^t r_u du} = A(t) e^{-B(t)r}, \text{ where } B(t) = \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}, A(t) = \exp \left[ (B(t)-t) \left( \mu_r - \frac{1}{2} \frac{\sigma_r^2}{\beta^2} \right) - \frac{\sigma_r^2 B(t)}{4\beta} \right], \quad (9)$$

Therefore,

$$P_2 = E \left( \sum_{t=0}^{m-x} W_t (1-h)_t p_{x+t} A(t) e^{-B(t)r} \right) \quad (10)$$

By combining equation (3) with equation (10), we obtain

$$P_2 = E \left( \sum_{t=0}^{m-x} W_0 (1-h) e^{(\mu_W - \frac{1}{2} \sigma_W^2)t + \sigma_W Z_{Wt}} p_{x+t} A(t) e^{-B(t)r} \right) \quad (11)$$

Let

$$E \left( \sum_{t=0}^{m-x} e^{(\mu_W - \frac{1}{2} \sigma_W^2)t + \sigma_W Z_{Wt}} p_x A(t) e^{-B(t)r} \right) = k_2 \quad (12)$$

where  $k_2$  is referred to as the *factor of compensation for wrongful death* when the interest rate is a stochastic process. By combining equation (12) with equation (13), we obtain

$$P_2 = W_0 (1-h) k_2 \quad (13)$$

We obtain a solution of (13) with the help of Monte Carlo simulation.

### 3. MODELS OF COMPENSATION FOR WRONGFUL DEATH WITH LEVEL PAYMENTS IN $N$ YEARS

Compensations for economic damages are often paid in a form of an annuity, to mimic the way in which income being replaces is earned. We will now offer such a model of a series of payments of damages for wrongful death. Assume that payments begin at age  $x$ , and  ${}_t p_x$  expresses the probability that the obligator aged  $x$  survives  $t$  years, and the value of periodical payment paid at the beginning of each year is  $AP$ .

#### 3.1. Assuming that the interest rate is constant

The sum of present value that one dollar is paid at the beginning of each year within  $n$  years equals

$$1 + \sum_{t=1}^{n-1} {}_t p_x e^{-rt} \quad (14)$$

Based on the principles of actuarial science, the value paid at the beginning of each year by the obligator should be equal to the value paid at the form of a lump sum divided by the sum of present value that one dollar is paid at the beginning of each year within  $n$  years. That is

$$AP_1 = \frac{E\left(\sum_{t=0}^{m-x} W_0 (1-h) e^{\left(\mu_w - \frac{1}{2}\sigma_w^2\right)t + \sigma_w z_{wt}} {}_t p_x e^{-rt}\right)}{1 + \sum_{t=1}^{n-1} {}_t p_x e^{-rt}} = \frac{\sum_{t=0}^{m-x} W_0 (1-h) e^{\mu_w t} {}_t p_x e^{-rt}}{1 + \sum_{t=1}^{n-1} {}_t p_x e^{-rt}} \quad (15)$$

Let

$$\frac{\sum_{t=0}^{m-x} e^{\mu_w t} {}_t p_x e^{-rt}}{1 + \sum_{t=1}^{n-1} {}_t p_x e^{-rt}} = k_3 \quad (16)$$

where  $k_3$  is called as the *factor of compensation for the wrongful death* when the interest rate is a constant. By combining equation (15) and equation (16), we obtain

$$AP_1 = W_0 (1-h) k_3 \quad (17)$$

### 3.2. Assuming that the interest rate is a stochastic process

The sum of present value of one dollar paid at the beginning of each year within  $n$  years equals

$$1 + \sum_{t=1}^{n-1} E \left( {}_t p_x e^{-\int_0^t r_u du} \right) = 1 + \sum_{t=1}^{n-1} E \left( {}_t p_x A(t) e^{-B(t)r} \right) \quad (18)$$

Divided by equation (18), the equation (11) becomes :

$$AP_2 = \frac{E \left( \sum_{t=0}^{m-x} W_0 (1-h) e^{\left( \mu_W - \frac{1}{2} \sigma_W^2 \right) t + \sigma_W z_{Wt}} {}_t p_x A(t) e^{-B(t)r} \right)}{1 + \sum_{t=1}^{n-1} E \left( {}_t p_x A(t) e^{-B(t)r} \right)} \quad (19)$$

Let

$$\frac{E \left( \sum_{t=0}^{m-x} e^{\left( \mu_W - \frac{1}{2} \sigma_W^2 \right) t + \sigma_W z_{Wt}} {}_t p_x A(t) e^{-B(t)r} \right)}{1 + \sum_{t=1}^{n-1} E \left( {}_t p_x A(t) e^{-B(t)r} \right)} = k_4 \quad (20)$$

where  $k_4$  is called the *factor of compensation for the wrongful death* when the interest rate is a stochastic process. By combining equation (19) with equation (20), we obtain

$$AP_2 = W_0 (1-h) k_4. \quad (21)$$

### 4. CALCULATION OF COMPENSATION FOR WRONGFUL DEATH

Assume  $\beta=0.1$ ,  $\sigma_r=0.015$ ,  $\sigma_W=0.01$ ,  $\mu_r=0.035$ ,  $\mu_W=0.01$ ,  $\rho_{rW}=0.2$ ,  $x = 50$ ,  $m = 60$ . When the interest rate is a constant,  $r = 0.035$ . When the interest rate is a stochastic process, the initial level of the interest rate  $r_0 = 0.03$ . The probability that the persons aged  $x$  and  $y$  survive  $t$  years can be found from life tables. Table 1 and Figure 1 lists the values of the factors of the compensation for the wrongful death  $k_1, k_2, k_3$ , and  $k_4$  calculated with the help of Monte Carlo simulation and equations of (5), (12), (16) and (20), where the death age  $x=45 \sim 55$ . Letting the initial wage level when the affected person dies  $W_0$  multiplied by  $(1-h)$  and by the

factors of the compensation for the wrongful death  $k_1, k_2, k_3$ , and  $k_4$  respectively, we can get the values of the compensation for the wrongful death  $P_1, P_2, AP_1$  and  $AP_2$ , where the meanings of  $k_1, k_2, k_3$ , and  $k_4$  are illustrated in Table 2. Figure 2 is the description of the simulation of stochastic processes when calculating the factors of the compensation for wrongful death. Similarly, we can obtain the values of the compensation for the wrongful death when the parameters take other values.

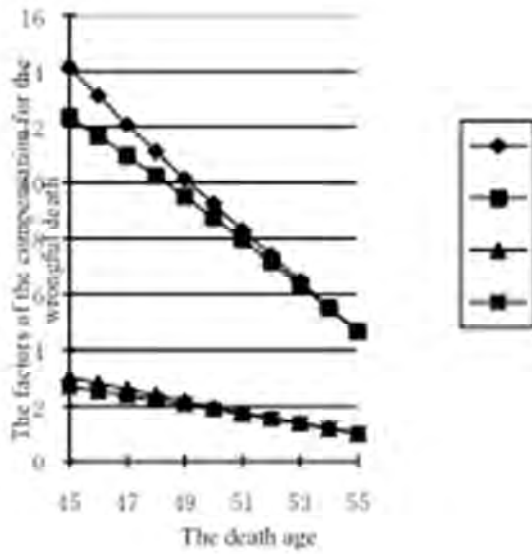
**TABLE 1**  
The values of  $k_1, k_2, k_3$ , and  $k_4$  for different  $x$  values

$x$	45	46	47	48	49	50
$k_1$	14.1515	13.1225	12.0709	11.1060	10.1367	9.2254
$k_2$	12.3589	11.6621	10.9577	10.2355	9.4948	8.7353
$k_3$	3.0120	2.7925	2.5690	2.3628	2.1577	1.9631
$k_4$	2.6583	2.5117	2.3600	2.2044	2.0449	1.8813
$x$	51	52	53	54	55	
$k_1$	8.2970	7.3888	6.4928	5.5927	4.6842	
$k_2$	7.9581	7.1589	6.3406	5.5018	4.6413	
$k_3$	1.7660	1.5729	1.3815	1.1900	0.9971	
$k_4$	1.7139	1.5418	1.3656	1.1849	0.9996	

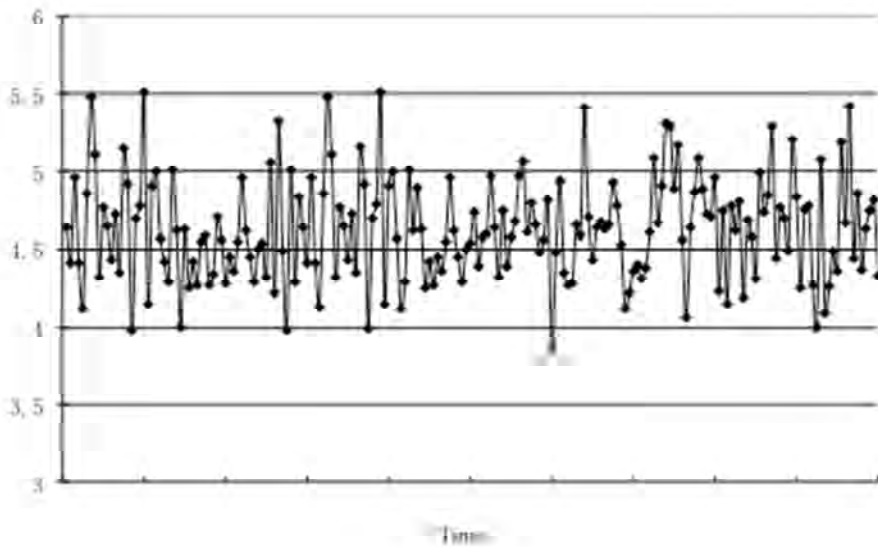
Source: Authors' calculation

**TABLE 2**  
FACTORS OF COMPENSATION FOR WRONGFUL DEATH  
UNDER DIFFERENT ASSUMPTIONS

	Way of payment	
	A lump sum payment	Level payment over $n$ years
Constant interest rate	$k_1$	$k_3$
Stochastic interest rates	$k_2$	$k_4$



**Figure 1**  
 Values of  $k_1, k_2, k_3$ , and  $k_4$  for different  $X$  values  
 (Source: Authors' calculations)



**Figure 2**  
 Stochastic simulation of the Factor  $k_2$   
 (Source: Authors' calculations)

## 5. CONCLUSIONS

In this article, we apply the stochastic processes theory to establish stochastic models of the compensation for the wrongful death with a lump sum payment and level annuity payments. We also calculate the factors of the compensation for wrongful death  $k_1, k_2, k_3$ , and  $k_4$  under various assumptions. Multiplying the factors of the compensation for the wrongful death by the difference between the initial level of the wage and consumption of the dead person, we can get the values of the compensation for the wrongful death. The modeling and calculating process discussed above can be applied to the calculation of compensation for the injury case.

## REFERENCES

- Babbel, D.F. and Merrill, C.B. (1996). *Interest-Sensitive Contingent Claim Valuation*, Society of Actuaries.
- Carriere, J.F. and Shand, K.J. (1998). "New Salary Functions for Pension Valuations", *North American Actuarial Journal*, Vol. 2, n° 2, pp. 18-26.
- Hosek, W.R. (1982). "Problems in the Use of Historical Data in Estimating Economic Loss in Wrongful Death and Injury Cases", *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 49, n° 2, pp. 300-318.
- Horvitz, S.A. (1986). "Implications of Projecting Future Losses of Earning Capacity with Deterministic Models", *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 53, n° 3, pp. 530-551.
- Mincer, J.S. (1974). *Experience and Earnings*, National Bureau of Economic Research, New York.
- Pennacchi, G.G. (1999). "The Valuation of Guarantees on Pension Fund Returns", *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 66, n° 2, pp. 219-237.
- Vasicek, O.A. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, pp. 177-188.

## Ponencia 7

# A FLEXIBLE NEGATIVE BINOMIAL MIXTURE DISTRIBUTION WITH APPLICATIONS IN ACTUARIAL STATISTICS

Emilio Gómez Déniz, José María Pérez Sánchez,  
Francisco José Vázquez Polo and Agustín Hernández Bastida

### ABSTRACT

In this paper an alternative to the varieties of claim count distributions in actuarial science is presented. We propose a new compound negative binomial distribution by mixing the  $p$  negative binomial parameter with the confluent hypergeometric distribution with bounded support appearing in Gordy (1998) and Nadarajah (2005). Expected frequencies were calculated for automobile insurance claims data and the distribution proposed was found to provide a very satisfactory fit.

**Key Words:** Automobile, Claim, Confluent Hypergeometric Distribution, Mixture, Negative Binomial Distribution.

### 1. INTRODUCTION

In this paper an alternative to the varieties of claim count distributions in actuarial science is presented. We propose a new compound negative binomial distribution by mixing the  $0 < p < 1$  negative binomial parameter supposing that it is distributed according to a confluent hypergeometric distribution. We obtain a distribution which can be an alternative to the standard binomial negative and others mixtures. In this sense, previous works in automobile insurance setting have used the binomial negative distribution as a mixture of a Poisson and a gamma distributions (see Klugmann *et. al.*; 1998 and Lemaire; 1979, among others). When the parameter  $p$  is assumed to be unknown, the Beta and Pareto distributions are suitable for computing the compound distribution (Alanko and Duffy (1996), Chatfield and Goodhardt (1970), Gómez and Vázquez-Polo (2003) and Shengwang et al. (1999)). The last two papers paid special attention in the choice of the parameter  $p$  in a Negative Binomial-Pareto mixture.

The distribution we proposed here has thick tails and is unimodal. These properties are very important for fitting automobile claim data in which it is very common that

the number of zeros exceeds any other quantity. Another desirable property is to obtain recursive expression for the new distribution. This is also an important characteristic in many insurance problems. In this way, we obtain a recursive formula for the marginal distribution of the binomial negative-confluent hypergeometric mixture.

The aim of this paper is to investigate some properties of the Negative Binomial-Confluent hypergeometric distribution and its applications in insurance context. In Section 2 we present the distributions. Section 3 is concerned with mixture of the confluent hypergeometric distribution with the binomial negative distribution. Section 4 provides an application of this new distribution in a particular insurance problem. The paper finishes with conclusions and further researches connected with this work.

## 2. PRELIMINARIES

A random variable  $X$  follows a negative binomial distribution with an unknown parameter  $p$  if admits the following probability mass function:

$$\Pr(X=x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x, \quad x=0,1,\dots,N, \quad 0 < p < 1, r > 0. \quad (1)$$

It will be denoted as  $X \rightarrow NB(r,p)$ , where  $r > 0$ . The first three moments about zero and the factorial moments of a negative binomial distribution (see Balakrishnan and Nevzorov, 2003 and Gómez-Déniz et al., 2008) are respectively given by:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{r(1-p)}{p}, \\ E(X^2) &= \frac{r(1-p)[1+r(1-p)]}{p^2}, \\ E(X^3) &= \frac{r(1-p)}{p^3} [1+(3r+1)(1-p)+r^2(1-p)^2], \\ \mu_{[k]}(X) &= E[X(X-1)\dots(X-k+1)] = \frac{\Gamma(r+k)(1-p)^k}{\Gamma(r)p^k}, \quad k=1,2,\dots, \end{aligned} \quad (2)$$

where

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

is the gamma function ( $s > 0$ ).



In order to do the paper self-contained we present the Confluent hypergeometric distribution and some useful properties. Further details can be analyzed in Gordy (1998) and Nadarajah (2005). The Confluent hypergeometric distribution (CH) is a generalization of the Beta distribution and has the following pdf

$$f(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1} \exp(-\gamma x)}{B(a,b) {}_1F_1(a; a+b; -\gamma)}, \quad (3)$$

where  $0 < x < 1$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $-\infty < \gamma < \infty$  and  $B(a,b)$  denotes the beta function given by

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

and  ${}_1F_1(m,n,z)$  is the confluent hypergeometric function, also called Kummer's function, given by

$${}_1F_1(m,n,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k z^k}{(n)_k k!},$$

where

$$(\alpha)_j = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+j-1) = \Gamma(\alpha+j)/\Gamma(\alpha), \quad j \geq 1,$$

$$(\alpha)_0 = 1,$$

is the Pochhammer's symbol (see Andrews et al. 1999, and Johnson et al. 2005). Furthermore, if  $\gamma=0$ , then (3) reduces to the standard beta pdf.

The first three moments about zero and the variance are respectively given by:

$$E(X) = \frac{a}{a+b} \frac{{}_1F_1(a+1; a+b+1; -\gamma)}{{}_1F_1(a; a+b; -\gamma)},$$

$$E(X^2) = \frac{a(a+1)}{(a+b+1)(a+b)} \frac{{}_1F_1(a+2; a+b+2; -\gamma)}{{}_1F_1(a; a+b; -\gamma)},$$

$$E(X^3) = \frac{a(a+1)(a+2)}{(a+b+2)(a+b+1)(a+b)} \frac{{}_1F_1(a+3; a+b+3; -\gamma)}{{}_1F_1(a; a+b; -\gamma)},$$

$$\text{Var}(X) = \frac{a(a+1)}{(a+b+1)(a+b)} \frac{{}_1F_1(a+2; a+b+2; -\gamma)}{{}_1F_1(a; a+b; -\gamma)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} \left[ \frac{{}_1F_1(a+1; a+b+1; -\gamma)}{{}_1F_1(a; a+b; -\gamma)} \right]^2$$

**Definition 1.** We say that a random variable  $X$  has a negative binomial-confluent hypergeometric distribution if admits the stochastic representation: ~

$$\begin{aligned} X|p &\sim NB(r, p), \\ p &\sim CH(a, b, \gamma), \end{aligned} \quad (4)$$

with  $r > 0$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$  and  $-\infty < \gamma < \infty$ .

The distribution of the  $NBCH$  is characterized by four parameters:  $r, a, b$  and  $\gamma$ .

### 3. THE NEW DISCRETE DISTRIBUTION

We assume that likelihood function is distributed according to (1) expression and that the unknown parameter,  $p$ , follows a prior distribution as defined in (3).

**Proposition 1.** The unconditional distribution of  $X$  under (4) specification is given by:

$$\Pr(X=x) = \binom{r+x-1}{x} \frac{B(a+r, b+x) {}_1F_1(a+r, a+b+r+x, -\gamma)}{B(a, b) {}_1F_1(a, a+b, -\gamma)}. \quad (5)$$

*Proof.* If  $X|p \sim NB(r, p)$  and  $p \sim CH(a, b, \gamma)$ , the pdf of  $X$  can be obtained by using

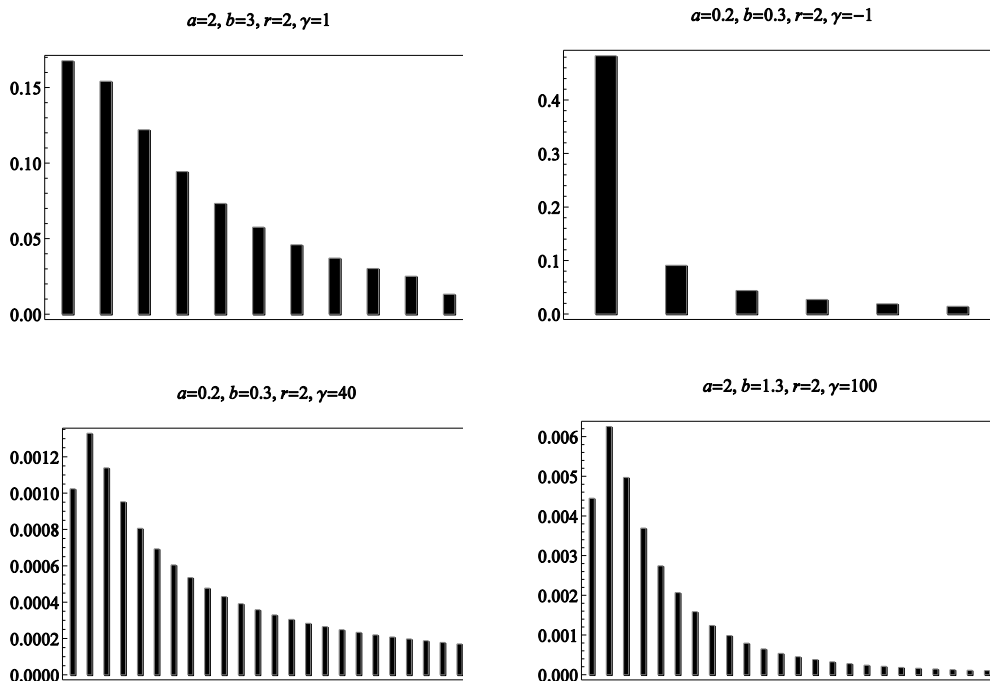
$$\Pr(X=x) = \int_0^1 \Pr(X=x|p) f(p, a, b, \gamma) dp,$$

where  $f(p, a, b, \gamma)$  is the pdf of a confluent hypergeometric distribution defined in (3).

A particular case of interest occurs when  $\gamma=1$  in (5). In this case, (1) is the geometric discrete distribution, and the marginal distribution is obtained by the following expression:

$$\Pr(X=x) = \frac{a\Gamma(a+b)\Gamma(b+x) {}_1F_1(a+1, a+b+x+1, -\gamma)}{\Gamma(b)\Gamma(a+b+x+1) {}_1F_1(a, a+b+x, -\gamma)}. \quad (6)$$

In addition, the probabilities for different values of  $x$  were calculated and graphs were plotted for various values of the parameters of the distribution. These are shown in Figure 1.



**Figure 1**

Some examples of probability mass functions of the new discrete distribution for different values of the parameters.

In the latter Figure we see that the new distribution is very versatile and that the values of the parameters have a substantial effect on the respective probabilities and, of course, on the values of the mean, mode and variance.

**Proposition 2.**

1. The factorial moment of order  $k$  is given by

$$\mu_k(X) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)} \cdot \frac{B(a-k, b+k)}{B(a, b)} \cdot \frac{{}_1F_1(a-k, a+b, -\gamma)}{{}_1F_1(a, a+b, -\gamma)}. \quad (7)$$

2. The mean, second order moment and variance are given by

$$E[X] = \frac{rb}{a-1} \cdot \frac{{}_1F_1(a-1, a+b, -\gamma)}{{}_1F_1(a, a+b, -\gamma)}, \quad (8)$$

$$E[X^2] = \frac{rb[(a-2){}_1F_1(a-1, a+b, -\gamma) + (r+1)(b+1){}_1F_1(a-2, a+b, -\gamma)]}{(a-2)(a-1){}_1F_1(a, a+b, -\gamma)},$$

$$\text{Var}[X] = \frac{rb[(a-2) {}_1F_1(a-1, a+b, -\gamma) + (r+1)(b+1) {}_1F_1(a-2, a+b, -\gamma)]}{(a-2)(a-1) {}_1F_1(a, a+b, -\gamma)} - \left( \frac{rb {}_1F_1(a-1, a+b, -\gamma)}{a-1 {}_1F_1(a, a+b, -\gamma)} \right)^2. \quad (9)$$

*Proof.* The factorial moment of order  $k$  is obtained by considering

$$E[\mu_k(X)] = E_p E[\mu_k(X|p)],$$

and taking into account expression (2). The mean, second order moment and variance are obtained directly from (7).

### 3.1. Compound negative binomial-confluent hypergeometric distribution

Let  $N$  be the number of claims in a portfolio of policies in a time period. Let  $X_i$ ,  $i=1,2,\dots$  be the amount of the  $i$ -th claim. Thus, the aggregate claims generated by the portfolio are  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ . Usually, it is supposed:

1. The random variables  $X_1, X_2, \dots$  are independent and identically distributed with cumulative function  $F(x)$  and pdf  $f(x)$ .
2. The random variables  $N, X_1, X_2, \dots$  are mutually independent.

If we choose NBCH model for  $N$ , the cdf of the distribution of aggregate claims is

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(x) \Pr(N=k);$$

where  $F^{*k}$  is the  $k$ -fold convolution of  $F$  and  $\Pr(X=x)$  is given in (5). A recursive formula for the probability mass function of an NBCH distribution is given by next proposition.

**Proposition 3.** *The pmf of an NBCH distribution can be evaluated by the recursive formula:*

$$p_x(r) = \frac{r+x-1}{x} \left[ p_{x-1}(r) - \frac{r}{r+x-1} p_{x-1}(r+1) \right], \quad x=1,2,\dots \quad (10)$$

*Proof.* The proof is straightforward taking into account that for the negative binomial distribution, we have the following recursion:

$$\frac{p_x}{p_{x-1}} = \frac{r+x-1}{x} (1-p)^x, \quad x=1,2,\dots$$

#### 4. NUMERICAL ILLUSTRATION

Data for numerical illustration are taken from Willmot (1987) and are drawn from automobile claim data per policy in one portfolio from Zaire in 1974. Data set is presented in table 1, in which we can observe the observed and expected values of the empirical distribution. We have estimated the four parameters of the negative binomial-confluent hypergeometric distribution by using maximum likelihood method. The table includes the maximum likelihood estimators, the  $\chi^2$  statistic, the  $p$ -value and the log-likelihood function value. These data present overdispersion and there is a high proportion of zero values. Willmot (1987) used the negative binomial and Poisson-inverse Gaussian distributions to fit these data. By comparing our results with those obtained by Willmot (1987), it can be concluded that BNCH distribution provides a more appropriated fitting for these data set. The negative binomial distribution fits with a  $\chi^2$  statistic equal to 1.17. In our case, the  $\chi^2$  statistic is 0.75.

**Table 1**  
Fit of automobile claim data

Count	Observed	Fitted
0	3719	3719.02
1	232	231.78
2	38	37.87
3	7	8.24
4	3	2.13
5	1	0.62
Total	4000	4000
Parameters:	$\hat{r}=5.27, \hat{a}=13.45, \hat{b}=0.28, \hat{\gamma}=-5.02$	
$\chi^2$	0.75	
d.f.	1	
$p$ -value	0.378	
$L_{\max}$	-1183.40	

#### 5. CONCLUDING REMARKS

In this paper new probability count distribution in its univariate version has been introduced by mixing a binomial negative distribution with the confluent hypergeometric distribution. A closed-form expression for the unconditional distribution is possible to obtain. We have studied several properties of this new distribution and observed that it can be useful to model automobile claim data which often present unimodality and overdispersion.

## REFERENCES

- Alanko, T. and Duffy, J.C. (1996). *Compound binomial distribution for modelling consumption data*. *The Statistician*, 45, 3, 269-286.
- Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R. (1999). *Special Functions (Encyclopedia of Mathematics and its Applications)*. Cambridge University Press.
- Balakrishnan, N. and Nevzorov, V. (2003). *A Primer on Statistical Distributions*. John Wiley and Sons, New York.
- Chatfield, C. and Goodhardt, G.J. (1970). "The Beta-Binomial Model for consumer Purchasing Behaviour". *Applied Statistics*, 19, 240-250.
- Gómez, E. and Vázquez, F. (2003). "Robustness in Bayesian Model for Bonus-Malus Systems". In *Intelligent and Other Computation Techniques in Insurance. Theory and Applications*. World Scientific.
- Gómez-Déniz, E.; Sarabia, J.M. and Calderín-Ojeda, E. (2008). "Univariate and multivariate versions of the negative binomial-inverse Gaussian distributions with applications". *Insurance: Mathematics and Economics*, 42, 39-49.
- Gordy, M.B. (1998). *A generalization of generalized beta distributions*, *Finance and Economics Discussion Series 1998-18*, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.).
- Gupta, A. and Nadarajah, S. (2006). "Beta Bessel Distributions". *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Article ID 16156, pp. 1-14.
- Johnson, N.L., Kemp, A.W., and Kotz, S. (2005). *Univariate Discrete Distributions*. Third Edition. John Wiley, New York.
- Klugman, S.; Panjer, H. and Willmot, G. (1998). *Loss Models. From Data to Decisions*. Wiley Inter Science.
- Lemaire, J. (1979). "How to define a bonus-malus system with an exponential utility function". *Astin Bulletin*, 10, 274-282.
- Nadarajah, S. (2005). "Exponential Beta Distributions". *Computers and Mathematics with Applications*, 49, 1029-1035.
- Shengwang, M; Wei, Y. and Whitmore, G.A. (1999). "Accounting for individual overdispersion in a Bonus-Malus system". *Astin Bulletin*, 29, 2, 327-337.
- Willmot, G.E. (1987). "The Poisson-inverse Gaussian distribution as an alternative to negative binomial". *Scandinavian Actuarial Journal*, 113-127.

## **II. SEGUROS**

## Ponencia 8

# TARIFICACIÓN EN SEGUROS DE VIDA CON LA MEDIDA DE RIESGO ESPERANZA DISTORSIONADA

Montserrat Hernández-Solís, Cristina Lozano-Colomer  
y José Luis Vilar-Zanón

### RESUMEN

En este artículo se propone un principio de cálculo de primas, para seguros de vida, basado en una medida de riesgo coherente, esperanza distorsionada con la función de distorsión de Wang (1995) en forma de potencia. Hasta la fecha, este principio se utiliza en los seguros del ramo general (no vida), de modo que la novedad de esta presentación es su aplicación al ramo de vida.

Se considera la modalidad de seguro de vida con cobertura de fallecimiento, el seguro vida entera, y a la modalidad de seguro de vida con cobertura de supervivencia, el seguro de rentas vitalicio.

**Palabras clave:** Recargo implícito, función de distorsión, medida de riesgo coherente, seguro de vida, seguro de rentas.

### 1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo, se demuestra que el método de tarificación basado en la esperanza distorsionada, en forma de potencia, es consistente con la práctica de añadir un margen de seguridad a las probabilidades de fallecimiento. De esta forma se justifica, a partir de un principio de cálculo de primas, basado en una medida de riesgo coherente, una práctica habitual en la tarificación en el ramo de vida.

La prima basada en la esperanza matemática presenta riesgo de insolvencia, aunque se base en buenas estimaciones, derivado de las fluctuaciones de la siniestralidad. Para protegerse de este riesgo las compañías fijan un recargo técnico o de seguridad que proporcione estabilidad a la empresa aseguradora. Este recargo puede ser explícito o venir recogido de forma implícita en las bases de cálculo, mediante correcciones o modificaciones en las tablas de mortalidad.



Como se indica en Moreno Ruiz y otros (2005), en los seguros de vida, el recargo de seguridad no suele formularse de forma explícita, pero existe de forma implícita:

- En los seguros para caso de muerte, cuando las probabilidades de fallecimiento estimadas con la tabla de mortalidad empleada son mayores que las reales del grupo humano considerado.
- En los seguros de supervivencia, cuando las probabilidades de supervivencia estimadas con las tablas de mortalidad son superiores a las reales. Esto ocurre cuando en la práctica se toma tablas de mortalidad desfasadas.

En los seguros de vida, con cobertura de fallecimiento, una experiencia de siniestralidad adversa significa que los asegurados fallecen antes de lo esperado, así cuando se calculan las primas, es una práctica común añadir un margen de seguridad, en forma de porcentaje, a las probabilidades de fallecimiento  $q_x$ . Esto se puede interpretar como un incremento del tanto instantáneo con un múltiplo. (En el caso de los seguros de supervivencia se tomaría una disminución del tanto instantáneo.)

En este trabajo se obtiene una prima recargada a partir de la medida de riesgo esperanza distorsionada, con la función de distorsión de Wang, en su forma de potencia. De forma que, el recargo se recoge de forma implícita, a partir de la modificación de la función de supervivencia con la función de distorsión “transformada proporcional del tanto instantáneo” dada (4).

Se demuestra que, en este caso, la modificación se refleja en el hecho que el tanto instantáneo de mortalidad es multiplicado por un factor  $r$ , que puede tener la interpretación de aversión al riesgo del partícipe (Yiu-Kuen Tse., 2009).

## 2. MEDIDA DE RIESGO BASADA EN LA FUNCIÓN DE DISTORSIÓN DE WANG

Antes de introducir una prima basada en una medida de riesgo vamos a dar una definición formal de ella, así como de las propiedades que debe de cumplir una medida de riesgo para ser coherente (Artzner, P. (1999)).

**Definición 1.** Dada una pérdida, representada por una variable aleatoria  $X$  no negativa, una medida de riesgo notada por  $\Pi(X)$ , es un funcional  $\Pi: X \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{R}$  es el conjunto de los números reales, es decir a cada variable aleatoria se le asocia un número real.

(Artzner, P. (1999)) sugiere cuatro propiedades para que una medida de riesgo se considere coherente. Las propiedades son las siguientes:

- I. Invariante las traslaciones. Para toda variable aleatoria  $X$  y toda constante no negativa  $b$ ,  $\Pi(X+b) = \Pi(X) + b$ .
- II. Subaditividad. Para todo par de variables aleatorias  $X$  e  $Y$ ,  $\Pi(X+Y) \leq \Pi(X) + \Pi(Y)$ .

III. Homogeneidad positiva. Para toda variable aleatoria  $X$  y toda constante no negativa  $a$ ,  $\Pi(aX) = a\Pi(X)$

IV. Monotoneidad. Para todo par de variables aleatorias  $X$  e  $Y$ , tal que  $P_r(X \leq Y) = 1$  entonces  $\Pi(X) \leq \Pi(Y)$

Los principios de cálculo de primas son ejemplos de posibles medidas de riesgo y aunque existe un consenso sobre la obtención de la prima neta existen muchas formas de añadir el recargo para obtener una prima que refleje el riesgo soportado por el asegurador.

Dado un riesgo, representado por la variable aleatoria pérdida  $X \geq 0$ , con función de distribución y función de supervivencia

$$\begin{aligned} F(x) &= P_r(X \leq x) \\ S(x) &= 1 - F(x) \end{aligned} \tag{1}$$

La prima neta basada en la medida de riesgo esperanza matemática y su expresión en función de la función de supervivencia es:

$$E[X] = \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} S(x) dx$$

Se trata ahora, de definir una prima recargada más ajustada al riesgo basada en la denominada función de distorsión:

**Definición 2:** Dada una función no decreciente (Wang 1995)

$$g: [0,1] \rightarrow [0,1] \text{ con } g(0)=0 \text{ y } g(1)=1$$

Llamada función de distorsión, se define la prima de riesgo ajustada a la medida de riesgo esperanza distorsionada, como:

$$E_g[X] = \int_0^{\infty} g(S(x)) dx \tag{2}$$

Para el riesgo  $X$  con función de supervivencia  $S(x)$ .

Supuesto que las funciones  $g(\cdot)$  y  $S(x)$  son derivables la función de distorsión tiene las siguientes propiedades (Wang 1996):

1. La función  $g(S(x))$  es una función no creciente con respecto a  $x$ .
2. La función  $g(S(x))$  está comprendida entre 0 y 1 cuando  $x \in [0, +\infty]$ .

3. Si  $g(\cdot)$  y  $S(x)$  son funciones continuas se puede considerar  $g(S(x))$  como la función de supervivencia de otra variable aleatoria que se denomina  $Y$ , con función de densidad

$$f_Y(x) = -\frac{dg(S(x))}{dx} = -g'(S(x))S'(x) = g'(S(x))f(x)$$

Y se tiene que  $g'(S(x))$  es una función de ponderación de la función de densidad  $f(x)$ . Además si  $g(\cdot)$  es una función cóncava (convexa) se tiene que:

$$\frac{dg'[S(x)]}{dx} = g''[S(x)]S'(x) \geq 0 \quad (\leq 0)$$

Por tanto la función de distorsión permite definir una nueva variable aleatoria  $Y$ , ya que la función  $g(S(x))$  tiene las propiedades de una función de supervivencia, con un mayor o menor peso en la cola, según la función  $g$  sea cóncava o convexa.

### 3. MEDIDA DE RIESGO: TRANSFORMADA PROPORCIONAL DEL TANTO INSTANTÁNEO

En lo que sigue, se considera un caso particular de función de distorsión (Yiu-Kuen Tse (2009)), que consiste en una función potencial de la función de supervivencia. Este tipo de función es muy aplicada en los seguros no vida por verificar las propiedades de una medida de riesgo coherente. Además se verifica que tomando una función potencial de la función de supervivencia, el tanto instantáneo o fuerza de mortalidad se multiplica por una constante, siendo esta una característica que, según veremos más adelante, tiene una interesante interpretación en seguros de vida.

**Definición 3:** Se denomina transformada proporcional del tanto instantáneo a toda medida de Wang cuya función de distorsión tenga la siguiente forma:

$$g(u) = u^{1/\rho} \quad \text{con } \rho > 0 \tag{3}$$

En este caso se define una nueva variable aleatoria  $Y$ , a partir del riesgo original  $X$ , con función de supervivencia y prima ajustada al riesgo dadas por:

$$S_Y(x) = [S(x)]^{1/\rho} \quad \rho > 0$$

$$\Pi_\rho[X] = E[Y] = \int_0^{+\infty} [S(x)]^{1/\rho} dx \tag{4}$$

De la definición 3 se deducen las siguientes consecuencias:

1.  $E[Y]$  es una función creciente con respecto a  $\rho$ . A mayor  $\rho$  mayor prima ajustada al riesgo. Por ello como se indica en (Yiu-Kuen Tse (2009))  $\rho$  tiene la consideración de un parámetro de aversión al riesgo.

2. Los tantos instantáneos de las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  son proporcionales.

En seguros no vida (Wang (1995)), dada la variable aleatoria no negativa  $X$  con función de distribución  $F(x)$  y función de supervivencia  $S(x)$ , se define el tanto instantáneo como

$$S(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \mu_x(u) du \right\}$$

$$\mu_x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t < X \leq t+h | X > t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h(1-F(t))} = \frac{F'(t)}{(1-F(t))} = - \frac{d \log S(t)}{dt} = - \frac{S'(t)}{S(t)}$$

Dado que:

$$S_Y(t) = (S(t))^{1/\rho} = \left[ \exp \left\{ - \int_0^t \mu_x(u) du \right\} \right]^{1/\rho} = \exp \left\{ - \int_0^t \frac{1}{\rho} \mu_x(u) du \right\}$$

se verifica que

$$\mu_Y(t) = \frac{1}{\rho} \mu_x(t) \quad \rho > 0 \quad \text{y} \quad t \geq 0 \quad (5)$$

Los tantos de las variables  $X$  e  $Y$  son proporcionales, y la nueva variable aleatoria  $Y$  se denomina transformada proporcional del tanto instantáneo de la variable  $X$ , con parámetro  $\rho$  (Wang (1996)).

En general esta transformada solo necesita de  $\rho > 0$ , pero en el contexto de los seguros generales se considera  $\rho \geq 1$ , para dar más peso a la cola de la distribución del riesgo.

Dado que

$$S_Y(x) = [S(x)]^{1/\rho} \quad \text{con} \quad \rho \geq 1$$

La función de supervivencia de la variable  $Y$  decrece más lentamente que la de la variable  $X$ , dando mayor densidad de probabilidad a los valores más grandes de la variable  $Y$ , por tanto, la prima ajustada al riesgo o prima recargada verifica  $\Pi_\rho(Y) = E[Y] \geq E[X]$ , siendo la diferencia el recargo de seguridad.

Como se indica en (Wang (1995)) la prima ajustada al riesgo refleja por un lado lo arriesgado de la pérdida original y por otro, la graduación de la aversión al riesgo del decisor a través de los valores del parámetro  $\rho$ .

Se demuestra en (Wang (1996)) para  $\rho \geq 1$ , que la medida de riesgo esperanza distorsionada, con la función transformada proporcional del tanto instantáneo, constituye una medida de riesgo coherente, siendo necesaria la condición de  $\rho \geq 1$ , únicamente para propiedad de subaditividad, el resto de las propiedades solo necesitan de  $\rho > 0$ .

#### 4. CÁLCULO DE LA PRIMA ÚNICA PARA LA MODALIDAD DE SEGURO CON COBERTURA DE FALLECIMIENTO VIDA ENTERA

El seguro vida entera (Bowers *et al.* (1997)), es un seguro con cobertura de fallecimiento, por el cual la aseguradora se compromete a abonar la prestación garantizada en la póliza, a los beneficiarios de la misma, cualquiera que sea el momento de fallecimiento del asegurado. Se trata de un seguro con una prestación cierta, pero vencimiento aleatorio, ya que se conoce la cuantía del capital pero no se sabe cuándo acaecerá el fallecimiento.

Se considera un seguro vida entera, en tiempo continuo, con capital asegurado unitario, para una cabeza de edad  $x$ . En este caso, el riesgo está representado por la variable aleatoria  $T(x)$ , vida residual o tiempo de vida desde la contratación de la póliza hasta el fallecimiento del asegurado, siendo la edad de contratación la edad actuarial  $x$ .

Se tienen en cuenta los siguientes supuestos:

1. Se paga una unidad monetaria en el momento del fallecimiento.
2. El tipo de interés técnico es  $i$ .
3. Dada la variable aleatoria continua, edad de fallecimiento  $X$ , para un recién nacido, con función de supervivencia  $S(x)$ , la variable aleatoria  $T(x)$  tiene una función de distribución denominada  $G_x(t)$  y una función de supervivencia  $S_x(t)$  cuyas expresiones en función de  $S(x)$  vienen dadas por:

$$G_x(t) = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)} \quad (6)$$

$$S_x(t) = 1 - G_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

Aplicando el principio de equivalencia actuarial para obtener la prima pura única se obtiene la expresión (Bowers *et al.* (1997)):

$$P = \int_0^{+\infty} v^t dG_x(t) \quad (7)$$

siendo  $v = \frac{1}{1+i}$  el factor de actualización.

Para adaptar este principio de equivalencia actuarial al cálculo de primas basado en la función de distorsión, se expresa esta integral en función de  $S_x(t)$ .

$$P = \int_0^{+\infty} v^t dG_x(t) = - \int_0^{+\infty} v^t dS_x(t) \quad (8)$$

Haciendo el cambio de variable:

$$v^t = z \text{ se obtiene } P = \int_0^1 z dS_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right)$$

Integrando por partes, se obtiene una expresión para la prima pura en función de  $S_x(t)$

$$P = 1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right) dz \quad (9)$$

En (9) se ha conseguido una expresión para la prima pura que depende de una función de supervivencia, similar a la obtenida en los seguros no vida dada en la expresión (4)

Ahora se plantea, la función de distorsión “transformada proporcional del tanto instantáneo” dada por (3) para obtener la prima recargada  $P_r$ :

$$P_r = 1 - \int_0^1 \left[ S_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right) \right]^\rho dz = 1 - \int_0^1 \left[ S_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right) \right]^r dz \quad (10)$$

con  $r = \frac{1}{\rho} \geq 1$  para que  $P_r \geq P \Rightarrow \rho \leq 1$

Para que la prima recargada sea mayor que la prima pura, el exponente  $r = \frac{1}{\rho}$  debe

ser mayor 1, Esto significa que para cada valor de  $t = \frac{\ln z}{\ln v}$ , la función de supervivencia distorsionada es menor que la inicial, dando esto lugar, a que se considere que el asegurado tiene un riesgo de fallecer superior. De esta forma, al considerarse una siniestralidad superior a la esperada, se obtiene una prima recargada.

#### 4.1. Consecuencia

La prima recargada obtenida en (10) coincide con la prima pura de otra variable aleatoria, con el mismo modelo de ley de supervivencia pero, con tanto instantá-

neo de mortalidad proporcional al tanto instantáneo de la variable  $X$ , con factor de proporcionalidad  $r$ .

En efecto, si en la expresión (10), se integra por partes:

$$u = \left[ S_x \left( \frac{\ln z}{\ln v} \right) \right]^r \quad du = r \frac{1}{z \log v} S'_x \left( \frac{\ln z}{\ln v} \right) \left[ S_x \left( \frac{\ln z}{\ln v} \right) \right]^{r-1} dz$$

$$dv = dz \quad v = z$$

$$P_r = 1 - \int_0^1 \left[ S_x \left( \frac{\ln z}{\ln v} \right) \right]^r dz = 1 - \left[ z \left[ S_x \left( \frac{\ln z}{\ln v} \right) \right]^r \right]_0^1 + \int_0^1 z r \frac{1}{z \log v} S'_x \left( \frac{\ln z}{\ln v} \right) \left[ S_x \left( \frac{\ln z}{\ln v} \right) \right]^{r-1} dz =$$

$$= 1 - \int_0^1 z d \left[ S_x \left( \frac{\ln z}{\ln v} \right) \right]^r$$

Haciendo el cambio de variable  $z = v^t$ , la prima recargada tiene la forma:

$$P_r = 1 - \int_0^{\infty} v^t d[S_x(t)]^r = 1 - \int_0^{\infty} v^t d[S_x(t)]^{1/\rho} \quad (11)$$

Comparando esta expresión con (9) se advierte que correspondería a la prima pura única de un seguro de la misma modalidad pero para una nueva variable aleatoria, que llamaremos  $Y$ , con una función de supervivencia  $S_Y(t) = [S_x(t)]^r = [S_x(t)]^{1/\rho}$ .

La expresión del tanto instantáneo de la variable  $Y$  es, en este caso:

$$\mu_Y(t) = -\frac{S'_Y(t)}{S_Y(t)} = -\frac{-r S'_X(t) (S_X(t))^{r-1}}{(S_X(t))^r} = -r \frac{S'_X(t)}{S_X(t)} = r \mu_X(t) = \frac{1}{\rho} \mu_X(t) \quad (12)$$

siendo  $\mu_X(t)$  el tanto instantáneo de la variable original  $X$ .

Por tanto se puede concluir que, para cualquier ley de supervivencia, la prima recargada, obtenida a partir de la medida de riesgo esperanza distorsionada, coincide con la prima pura obtenida para el mismo tipo de ley de supervivencia que la original, pero con un tanto proporcional, con factor de proporcionalidad  $r = \frac{1}{\rho} \geq 1$ .

Por tanto el nuevo tanto instantáneo es mayor, lo que supone una experiencia de siniestralidad adversa para el asegurador, ya que el asegurado fallece antes con mayor probabilidad.

En (Wang (1996)) se demuestra que la esperanza distorsionada cumple las propiedades de una medida de riesgo coherente, pero para que se cumpla la propiedad de subaditividad es necesario que  $\rho \geq 1$ .

En la prima definida en (10) se tiene el caso  $\rho \leq 1$ , pero se demuestra en el Apéndice 1, el teorema siguiente:

**Teorema 1:** Para todo par de variables aleatorias  $U$  y  $V$  no negativas, se verifica la propiedad de subaditividad:

$$\Pi_{\rho}(U+V) \leq \Pi_{\rho}(U) + \Pi_{\rho}(V)$$

Siendo

$$\Pi_{\rho}(U) = 1 - \int_0^1 [S_U(z)]^{\frac{1}{\rho}} dz \quad \rho \leq 1 \quad \text{con } z = v^t \text{ y } v = \frac{1}{1+i}$$

Por tanto, este principio de cálculo de primas constituye una medida de riesgo coherente.

#### 4.2. Aplicación a la Primera Ley de Makeham

Las funciones de supervivencia en este caso son:

$$\begin{aligned} S(x) &= S^x g^{C^x - 1} \quad x > 0 \quad C > 1 \text{ y } g, S < 1 \\ S_x(t) &= S^t g^{C^x(C^t - 1)} \end{aligned} \quad (13)$$

El tanto instantáneo tiene la forma, en este caso,

$$\mu_x = -\ln S - C^x \ln C \ln g$$

La prima pura

$$P = 1 - \int_0^1 S_x \left( \frac{\ln z}{\ln v} \right) dz = 1 - \int_0^1 S^{\frac{\ln z}{\ln v}} g^{C^x(C^{\frac{\ln z}{\ln v}} - 1)} dz = \frac{g^{C^x} \ln S + C^{x+1} \ln g + \ln v (g^{C^x} - 1)}{g^{C^x} (\ln S + C^{x+1} \ln g + \ln v)} \quad (14)$$

La prima recargada

$$\begin{aligned} P_r &= 1 - \int_0^1 S_x \left( \frac{\ln z}{\ln v} \right)^r dz = 1 - \int_0^1 S^{\frac{\ln z}{\ln v}} [g^{C^x(C^{\frac{\ln z}{\ln v}} - 1)}]^r dz = \\ &= \frac{g^{r C^x} \ln S^r + C^{x+1} \ln g^r + \ln v (g^{r C^x} - 1)}{g^{r C^x} (\ln S^r + C^{x+1} \ln g^r + \ln v)} \end{aligned} \quad (15)$$



Con el cambio de variable  $t = \frac{\ln z}{\ln v}$

Comparando (14) con (15) se ve que la prima recargada coincide con la prima pura de otra primera ley de Makenham con parámetros  $S^r$ ,  $g^r$  y  $C$

Ahora el tanto instantáneo de mortalidad:

$$\mu_y = -\ln S^r - C^x \ln C \ln g^r = r(-\ln S - C^x \ln C \ln g) = r\mu_x$$

Como cabía esperar los tantos son proporcionales.

## 5. CÁLCULO DE LA PRIMA ÚNICA PARA LA MODALIDAD DE SEGURO DE VIDA CON COBERTURA DE SUPERVIVENCIA (SEGURO DE RENTAS VITALICIO)

Un seguro de vida en tiempo continuo (Bowers *et al.* (1997)), con prestación garantizada para el caso de supervivencia del asegurado se caracteriza por los pagos periódicos que realiza la compañía aseguradora a éste, siempre y cuando se encuentre vivo, a partir de una edad actuarial  $x$  y hasta su fallecimiento. Para tener derecho a estas cuantías, el asegurado ha de abonar a la compañía el importe de las primas, bien periódicas o una prima única. En este caso la variable aleatoria es la variable vida residual o tiempo que queda por vivir a partir de la edad  $x$ ,  $T(x)$ .

Se consideran los siguientes supuestos:

1. Se paga una renta de una unidad monetaria por periodo mientras el asegurado esté vivo.
2. El tipo de interés técnico es  $i$ .
3. Dada la variable aleatoria continua edad de fallecimiento del recién nacido  $X$ , con función de supervivencia  $S(x)$ , la variable aleatoria  $T(x)$ , vida residual o tiempo que queda por vivir a partir de la edad  $x$ , tiene una función de distribución que se denomina  $G_x(t)$  y una función de supervivencia  $S_x(t)$  cuyas expresiones en función de  $S(x)$  vienen dadas por las expresiones (6).

Aplicando el principio de equivalencia actuarial para obtener la prima pura única se obtiene la expresión (Bowers *et al.* (1997)):

$$P = \int_0^{+\infty} v^t {}_tP_x dt \quad \text{siendo} \quad v = \frac{1}{1+i} < 1 \text{ el factor de actualización}$$

La probabilidad de supervivencia  ${}_tP_x = S_x(t)$

En este caso, la prima pura única a pagar por el asegurado está dada por:

$$P = \int_0^{+\infty} v^t S_x(t) dt = -\frac{1}{\ln v} \int_0^1 S_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right) dz \quad \text{con el cambio de variable } v^t = z \quad (16)$$

La prima recargada utilizando la función de distorsión “transformada proporcional de la función riesgo” dada por (3) tiene la forma:

$$P_r = -\frac{1}{\ln v} \int_0^1 S_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right)^\rho dz = -\frac{1}{\ln v} \int_0^1 S_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right)^r dz \quad \text{con } r = \frac{1}{\rho} \leq 1 \text{ para que } P_r \geq P \Rightarrow \rho \geq 1 \quad (17)$$

Ahora para que la prima recargada sea mayor o igual que la prima pura el exponente  $r$  tiene que ser menor o igual que 1, por tanto  $\rho \geq 1$ .

Además, en este caso, al ser  $\rho \geq 1$  esta esperanza distorsionada cumple las propiedades de una medida de riesgo coherente. (Wang (1996)).

Para cada valor de  $t$ ,  $t = \frac{\ln z}{\ln v}$ , dado en (17) la función de supervivencia distorsionada es mayor que la inicial, esto significa que se considera que el asegurado tiene un riesgo de fallecer inferior, de esta forma, en un seguro de rentas la siniestralidad aumenta si el asegurado vive más tiempo que el esperado. Así la función de distorsión da más peso a la cola de la variable tiempo residual, obteniéndose a partir de ella una prima recargada.

### 5.1. Consecuencia

La prima recargada obtenida en (17) coincide con la prima pura de otra variable aleatoria, con el mismo modelo de ley de supervivencia pero, con tanto instantáneo de mortalidad proporcional al tanto instantáneo de la variable  $X$ , con factor de proporcionalidad  $r$ .

En efecto si en la expresión (17) se hace el cambio de variable  $z = v^t$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} z=0 & \quad t=\infty \\ z=1 & \quad t=0 \\ dz &= v^t \ln v dt \\ P_r &= -\frac{1}{\ln v} \int_0^1 (S_x(t))^r v^t \ln v dt = \int_0^\infty v^t (S_x(t))^r dt \end{aligned}$$

Si llamamos  $S_y(t) = (S_x(t))^r$

El tanto instantáneo de la nueva variable es proporcional al de la variable original.

$$\mu_Y = -\frac{S'_Y(t)}{S_Y(t)} = -\frac{r S_X(t)^{r-1} S'_X(t)}{S_X(t)^r} = -r \frac{S'_X(t)}{S_X(t)} = r \mu_X$$

## 5.2. Aplicación a la Primera Ley de Makeham

Si se considera la función de supervivencia dada por (13) la prima pura única para un seguro de rentas de cuantía unitaria es:

$$P = -\frac{1}{\ln v} \int_0^1 S_X \left( \frac{\ln z}{\ln v} \right) dz = -\frac{1}{\ln v} \int_0^1 S^{\frac{\ln z}{\ln v}} g^{C^x (C^{\frac{\ln z}{\ln v}} - 1)} dz = \frac{-1}{g^{C^x} (\ln S + C^{x+1} \ln g + \ln v)} \quad (18)$$

La prima recargada:

$$P_r = -\frac{1}{\ln v} \int_0^1 \left( S_X \left( \frac{\ln z}{\ln v} \right) \right)^r dz = -\frac{1}{\ln v} \int_0^1 \left( S^{\frac{\ln z}{\ln v}} g^{C^x (C^{\frac{\ln z}{\ln v}} - 1)} \right)^r dz = \frac{-1}{g^{r C^x} (\ln S^r + C^{x+1} \ln g^r + \ln v)} \quad (19)$$

Si comparamos (18) y (19) se deduce que la prima recargada coincide con la prima pura de otra variable duración de vida que sigue una Ley de Makeham con parámetros  $S^r$ ,  $g^r$  y  $C$ .

Así el tanto instantáneo de mortalidad es proporcional al correspondiente de la variable original  $X$ .

## 6. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Se ha obtenido un principio de cálculo de primas para seguros de vida, en base a la medida de riesgo coherente esperanza distorsionada con la función de distorsión de Wang en forma de potencia. Este resultado permite justificar la práctica habitual, en los seguros de vida, de manipular el tanto de mortalidad con el fin de obtener una prima recargada, con recargo implícito.

Se han logrado dos expresiones de la prima recargada mediante el empleo de la función de distorsión en forma de potencia, una para un seguro vida entera (10) y otra para un seguro de rentas (17). Se han obtenido los siguientes resultados:

1. La prima recargada para cualquier ley de supervivencia, para los dos tipos de seguros, es la misma a la que se obtendría a partir de otra variable aleatoria, que sigue la misma ley de supervivencia, modificándose, únicamente, el valor de los parámetros.

2. El efecto que produce sobre esta ley de mortalidad la función de distorsión es que la nueva ley tiene el tanto instantáneo de mortalidad proporcional al de la ley original, siendo, el factor de proporcionalidad, el exponente de la función de distorsión transformada proporcional.
3. En los seguros modalidad de seguro de vida con cobertura de supervivencia (Seguro de rentas vitalicio), ya estaba demostrado (Wang, S. (1995) que para  $\rho \geq 1$  la esperanza distorsionada es una medida de riesgo coherente.
4. En el caso de los seguros modalidad vida entera, se demuestra en el apéndice que aunque  $\rho \leq 1$ , también constituye una medida de riesgo coherente.

### APENDICE. Demostración de la propiedad de subaditividad de la prima para el seguro vida entera dada en (10)

La demostración utiliza el método de inducción completa de la misma forma que la demostración del artículo (Wang, S. (1995) realizada para el caso  $\rho \geq 1$ . Se va a realizar la demostración para el caso  $\rho \leq 1$

**Teorema 1.** Para todo par de variables aleatorias  $U$  y  $V$  no negativas, se verifica la propiedad de subaditividad:

$$\Pi_{\rho}(U+V) \leq \Pi_{\rho}(U) + \Pi_{\rho}(V) \quad (20)$$

siendo

$$\Pi_{\rho}(U) = 1 - \int_0^1 [S_U(z)]^{\frac{1}{\rho}} dz \quad \rho \leq 1 \quad \text{con } z = v^t \quad \text{y } v = \frac{1}{1+i}$$

**Lema 1.** Si  $0 < a < b$  y  $\rho \leq 1$  entonces  $\forall x \geq 0$  se verifica

$$[-(x+b)^{\frac{1}{\rho}}] - [-(x+a)^{\frac{1}{\rho}}] \leq (-b^{\frac{1}{\rho}}) - (-a^{\frac{1}{\rho}})$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$g(x) = [-(b+x)^{\frac{1}{\rho}}] - [-(a+x)^{\frac{1}{\rho}}]$$

$$g'(x) = \frac{1}{\rho} [(a+x)^{\frac{1}{\rho}-1} - (b+x)^{\frac{1}{\rho}-1}] < 0 \quad \text{dado que } \frac{1}{\rho} - 1 > 0 \quad \text{y } a+x < b+x$$

Así  $g(x)$  es una función decreciente, por tanto, tomará su valor máximo en  $x = 0$ .

$$[-(b+x)^{\frac{1}{\rho}}] - [-(a+x)^{\frac{1}{\rho}}] < (-b^{\frac{1}{\rho}}) - (-a^{\frac{1}{\rho}})$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1. Probamos el resultado para una variable  $V$  arbitraria y  $U$  una variable discreta que toma los valores  $U \in \{0, 1, \dots, n\}$  por la propiedad de invariancia a la traslación y la invariancia a los cambios de escala también se verificará para la variable  $U \in \{kh, \dots, (n+k)h\}$  con  $h > 0$ . De forma que toda variable aleatoria se podrá aproximar por una variable discreta con un  $h$  suficientemente pequeño.

*Método de Inducción completa para la expresión (20)*

- Para  $n = 0$  entonces  $U = 0$  por tanto es trivial.
- Supuesto que se verifica para el valor  $n$  se va a demostrar para  $n + 1$ , para  $(U, V)$  con  $U \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ .

Sean  $(U^*, V^*)$  distribuidas como  $(U, V|U > 0)$ .

Dado que  $U^* \in \{1, \dots, n+1\}$  la hipótesis de inducción completa establece que se verifica:

$$\Pi_\rho(U^* + V^*) \leq \Pi_\rho(U^*) + \Pi_\rho(V^*)$$

Sea  $\omega_0 = \Pr(U=0)$  y  $S_{V|0}(t) = \Pr(V > t | U=0)$  se tiene por tanto que para  $t > 0$

$$\Pr(U > t) = \Pr(U^* > t | U > 0) \Pr(U > 0)$$

es decir,

$$\begin{aligned} S_U(t) &= (1 - \omega_0) S_{U^*}(t) \\ S_V(t) &= \Pr(V > t) = \Pr(V > t | U=0) \Pr(U=0) + \Pr(V > t | U > 0) \Pr(U > 0) = \\ &= S_{V|0}(t) \omega_0 + S_{V^*}(t) (1 - \omega_0) \end{aligned}$$

También se tiene:

$$\begin{aligned} S_{U+V}(t) &= \Pr(U+V > t) = \\ &= \Pr(U+V > t | U=0) \Pr(U=0) + \Pr(U+V > t | U > 0) \Pr(U > 0) = \\ &= \omega_0 S_{V|0} + (1 - \omega_0) S_{U^*+V^*}(t) \end{aligned}$$

Esto lleva de acuerdo con el Lema 1 a:

$$\begin{aligned} -S_{U+V}(t)^{1/\rho} - (-S_U(t)^{1/\rho}) - (-S_V(t)^{1/\rho}) &= -[\omega_0 S_{V|0} + (1 - \omega_0) S_{U^*+V^*}(t)]^{1/\rho} - \\ &= -[(1 - \omega_0) S_{U^*}(t)]^{1/\rho} - [(-S_{V|0}(t) \omega_0 + S_{V^*}(t) (1 - \omega_0))]^{1/\rho} \leq \\ &\leq (1 - \omega_0)^{1/\rho} [-S_{U^*+V^*}(t)^{1/\rho} - (-S_{U^*}(t)^{1/\rho}) - (-S_{V^*}(t)^{1/\rho})] \leq \\ &\leq [-S_{U^*+V^*}(t)^{1/\rho} - (-S_{U^*}(t)^{1/\rho}) - (-S_{V^*}(t)^{1/\rho})] \end{aligned}$$

Integrando a ambos lados de la desigualdad y sumando 1 a cada integral se tiene:

$$\begin{aligned}
 & 1 - \int_0^{\infty} S_{U+V}(t)^{1/\rho} dt - [1 - \int_0^{\infty} S_U(t)^{1/\rho} dt + 1 - \int_0^{\infty} S_V(t)^{1/\rho} dt] \leq \\
 & \leq 1 - \int_0^{\infty} S_{U^*+V^*}(t)^{1/\rho} dt - [1 - \int_0^{\infty} S_{U^*}(t)^{1/\rho} dt + 1 - \int_0^{\infty} S_{V^*}(t)^{1/\rho} dt]
 \end{aligned}$$

Utilizando el supuesto de inducción por el cual,  $U^*$  y  $V^*$  verifican la Subaditividad, se deduce que  $U$  y  $V$  también la verifican.

## AGRADECIMIENTOS

Esta investigación está financiada por el proyecto ECO2010-22065-C03-01 (MICIN).

## BIBLIOGRAFÍA

Artzner, P. (1999). "Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance". *North American Actuarial Journal*, 3 (2).

Bowers, N.L. *et al.* (1997). *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries.

Moreno Ruiz *et al.* (2005). *Matemática de los seguros de vida*. Pirámide.

Rotar, V. (2006). *Actuarial Models*. Chapman and Hall.

Wang, S. (1995). "Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms". *Insurance Mathematics and Economic*. (17).

Wang, S. (1996). "Premium calculation by transforming the layer premium density". *Astin Bulletin*. (26).

Wang, S; Young, V. Panjer, H. (1997). "Axiomatic characterization of insurance prices". *Insurance Mathematics and Economics*. (21).

Yiu-Kuen Tse. (2009). *Nonlife Actuarial Models. Theory, methods and evaluation*. Cambridge University Press.

## Ponencia 9

# CÁLCULO DE ESCENARIOS DE CAÍDA DE CARTERA CONSIDERANDO CONTAGIO ENTRE LAS CANCELACIONES EN SEGUROS GENERALES

Mercedes Ayuso Gutiérrez, Montserrat Guillén Estany  
y Ana María Pérez-Marín

### RESUMEN

El objetivo de este artículo es presentar una aplicación empírica de la metodología desarrollada por las autoras para calcular escenarios de caída de cartera, en el ramo de seguros generales. Frente al uso del modelo estándar propuesto por Solvencia II, en el trabajo se tiene en cuenta el efecto contagio que puede existir en las decisiones de cancelación de pólizas, presentando asimismo resultados para el supuesto de independencia. Los resultados obtenidos a partir de una base de datos real sobre cancelaciones de pólizas ponen de manifiesto que ignorar el efecto contagio en la elaboración de escenarios de caída de cartera puede tener un importante impacto en las estimaciones realizadas.

### 1. INTRODUCCIÓN

No cabe duda que el posicionamiento de la compañía aseguradora en el mercado constituye un elemento de riesgo para la entidad. Este riesgo se refleja en la caída de cartera que la compañía registra en cada ejercicio, así como en la constante salida y entrada de asegurados que inevitablemente acaba alterando la composición y la calidad de la cartera. En el marco del proyecto Solvencia II se impone a las compañías aseguradoras mejorar la cuantificación y el control de sus riesgos. El riesgo de negocio (Nakada *et al.*, 1999, Dhaene *et al.*, 2006) es el originado por las fluctuaciones en el volumen de negocio y márgenes ocasionados por este entorno competitivo. Así pues, su cuantificación y control es necesario por parte de las compañías, si bien entraña importantes dificultades.

El punto de partida en el proceso de valoración del riesgo de caída de cartera lo proporciona la pérdida de asegurados registrada por la entidad en una anualidad, y la elaboración de escenarios extremos o aproximaciones de la caída extrema al alza (escenario pesimista) y a la baja (escenario optimista). El modelo estándar

para el cálculo de los requerimientos de solvencia se basa en parte en reducir directamente en un 20% el coeficiente registrado e incrementarlo un 50% para la elaboración de escenarios optimistas y pesimistas, respectivamente. En la elaboración de estos escenarios no se da explícitamente ninguna indicación sobre el grado de contagio o correlación que existe entre las decisiones de cancelación de contratos. En este trabajo cuantificamos dicha correlación y a partir de ella elaboramos escenarios fundamentados en la teoría estadística.

Utilizando una base de datos sobre cancelaciones proporcionada por una aseguradora se calculan los correspondientes coeficientes de caída bajo el escenario optimista y pesimista. A partir de ahí se comparan los resultados que proporciona el modelo estándar con el propuesto por las autoras, considerando tanto la hipótesis de independencia entre las decisiones de cancelación, como la de correlación positiva entre las mismas. Los resultados revelan la existencia de contagio entre las decisiones de cancelación que no debe ser ignorado en la elaboración de escenarios de caída de cartera, dado que tiene un importante impacto en los resultados.

La relevancia del tema abordado está fuera de discusión. Recientemente, Pieschacon (2010) ha analizado la intensidad y consecuencias de la caída de cartera para el ramo de vida, constatando su presencia, que se acentúa más si cabe en las condiciones económicas actuales. No obstante, en la literatura actuarial encontramos pocas referencias sobre la fidelidad de los asegurados, y la elaboración de escenarios de caída de cartera, si bien en los últimos años la investigación en este ámbito se ha intensificado.

En la década de los ochenta se realizan los primeros trabajos en los que se estudia la retención y fidelidad de los asegurados. Entre ellos podemos citar el artículo de Crosby y Stephens (1987) en el que se estudian los efectos del marketing relacional en la satisfacción, retención y los precios del seguro de vida. Con anterioridad, sólo podemos citar algunas contribuciones relativas a la demanda de productos aseguradores, que no estaban contextualizadas en el ámbito propiamente comercial (Hammond *et al.*, 1967; Duker, 1969).

En la década de los noventa, a medida que se intensificaba la competencia entre las compañías aseguradoras, aparecen aportaciones en las que los investigadores encuentran ciertos factores que inducen a los asegurados a cambiar de entidad. El objetivo es intentar aumentar su fidelidad a través del diseño de estrategias de retención (véase Schlesinger y Schulenburg (1993) en el contexto del seguro del automóvil). Al mismo tiempo, surgen estudios sobre la calidad del servicio ofrecido por las compañías y la satisfacción de los asegurados (Wells y Stafford, 1995). Stafford *et al.* (1998) identifican los determinantes de la calidad del servicio percibida y de la satisfacción del asegurado en la reclamación de siniestros en el seguro del automóvil. Por lo que respecta a la aplicación de estrategias de fidelización en compañías aseguradoras destaca el trabajo de Cooley (2002), quien realiza un análisis en el ámbito de los seguros de salud basado en técnicas de segmentación dirigidas a aumentar la retención de los asegurados.



Recientemente, diferentes estudios han abordado el problema de la cancelación de pólizas de seguros. En concreto, Guillén *et al.* (2006) constataron la importancia de la multidimensionalidad de la relación entre el asegurador y el asegurado que posee más de una póliza en la misma compañía. Estos mismos autores analizan posteriormente los factores que inciden en la probabilidad de cancelación de pólizas por parte de asegurados con varios contratos en la misma compañía (Brockett *et al.*, 2008). Entre sus principales conclusiones cabe señalar como la antigüedad, la ocurrencia de siniestros, y el tipo de productos contratados, entre otros aspectos, inciden en el riesgo de que el cliente cancele todas sus pólizas. Su análisis comprende asimismo el estudio del tiempo que permanecen como clientes de la compañía los individuos que realizan una primera cancelación de alguno de los productos contratados, para lo cual se aplican técnicas de análisis de supervivencia. A partir de aquí, es posible establecer unas recomendaciones generales para controlar y gestionar el riesgo de negocio en el sector asegurador, tal y como se recoge en Guillén *et al.* (2008).

La revisión de los trabajos existentes en la literatura especializada permite constatar que existe un interés y una necesidad de profundizar en el estudio del comportamiento del asegurado, y en la elaboración de escenarios de caída de cartera como instrumento de gestión del riesgo. Además, la trascendencia del tema abordado va más allá de su contribución a garantizar la estabilidad y solvencia de la compañía a lo largo del tiempo, pues permite anticipar las pérdidas que podría ocasionarle a la entidad una eventual disminución de cuota de mercado, además de facilitar la planificación de actuaciones específicas que permitan proteger a la compañía frente al riesgo de negocio.

La estructura del artículo es la siguiente. En la sección 2 se introduce la notación para el cálculo de los porcentajes de caída de cartera, y se presenta la metodología para la elaboración de escenarios a partir de la obtención del grado de contagio entre las cancelaciones. En la sección 3 se presentan y discuten los resultados de la aplicación empírica. Finalmente, en la sección 4 se presentan las conclusiones y recomendaciones más relevantes.

## **2. ELABORACIÓN DE ESCENARIOS OPTIMISTAS Y PESIMISTAS PARA EL COEFICIENTE DE CAÍDA DE CARTERA A PARTIR DE LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE CONTAGIO EN LAS CANCELACIONES**

Nuestra propuesta para elaborar escenarios de caída de cartera parte de realizar una segmentación de la cartera por tipo de producto y antigüedad de la póliza, teniendo en cuenta los resultados obtenidos por Brockett *et al.* (2008) que demuestran que la probabilidad de cancelación de una póliza depende, entre otros, de ambos factores. Desde este punto de vista, consideramos en qué período (año, semestre,...) de vigencia se encuentra la póliza al inicio del estudio, por ejemplo, a 1 de enero de un determinado año. Al final del período, es decir, a 31 de diciembre de ese año, si realizamos el estudio por anualidades, se contabilizan las pólizas que se han cancelado. De ese modo, en el año, el porcentaje de caída se obten-

drá mediante el cociente entre el número de pólizas canceladas y las vigentes al inicio. Repitiendo esta operación para sucesivos ejercicios recogeremos la experiencia registrada a través de los correspondientes porcentajes de caída.

Suponemos que el coeficiente de caída de cartera esperado para el período siguiente es el promedio de los porcentajes de caída obtenidos en los períodos precedentes. Dado un determinado tipo de contrato (cada producto puede analizarse separadamente) y segmento de antigüedad (pólizas recientes frente a las más antiguas), diremos que  $L_t$  es una variable aleatoria que corresponde al porcentaje de caída de cartera experimentado en el período  $t$ . La variable aleatoria  $L_t$  corresponde al cociente entre el número de cancelaciones observadas durante ese periodo y el total de pólizas vigentes al inicio del mismo. En este sentido  $L_t$  corresponde a un promedio, ya que el total de cancelaciones puede expresarse como la suma de variables dicotómicas que llamaremos  $Y_{it}$ , que toman el valor 1 si la póliza  $i$ -ésima se cancela en el año  $t$  y 0 en caso contrario, dividido por el total de pólizas. Si llamamos  $n_t$  al número total de pólizas vigentes al inicio del período, entonces podemos escribir,

$$L_t = \frac{\sum_{i=1}^{n_t} Y_{it}}{n_t}$$

El coeficiente de caída que se empleará para el cálculo de la mejor estimación (*Best Estimate* o *BE*), que denotaremos por  $L$ , es el promedio (ponderado si se desea) de los porcentajes de caída de los últimos  $T$  períodos,

$$L = \sum_{t=1}^T \omega_t L_t \quad (1)$$

donde  $L_t$  es el porcentaje de caída definido anteriormente y  $\omega_t$  la ponderación correspondiente al período  $t$ . De este modo,  $E[L] = \omega' p_L$  y  $V[L] = \omega' \Sigma_L \omega$ , donde  $\omega$  es el vector de ponderaciones. El vector  $p_L$  contiene en cada componente la esperanza de  $L_t$  que se supone constante, y la matriz de varianzas y covarianzas del vector  $(L_1, L_2, \dots, L_T)$  es  $\Sigma_L$ . A partir de la expresión (1), y dado que la matriz de varianzas y covarianzas es definida positiva, podemos descomponerla como el producto de tres matrices,  $\Sigma_L = \Delta_L R_L \Delta_L$  donde  $\Delta_L$  es una matriz diagonal que contiene la desviación estándar del vector  $(L_1, L_2, \dots, L_T)$  y  $R_L$  es la matriz de correlaciones lineales simples. Para considerar máxima correlación entre períodos, supondremos que la matriz de correlaciones tiene todos los elementos igual a uno, es decir  $R_L = \mathbf{1}, \mathbf{1}$ , siendo  $\mathbf{1}$  un vector unitario  $T$ -dimensional.

El procedimiento para el cálculo del coeficiente de caída  $L$  en un escenario a la baja (optimista) para un nivel de confianza de  $(100-\alpha)\%$  ( $\alpha$  expresado en tanto por ciento) viene dado por

$$\omega' \hat{L} - t_{(100-\alpha)\%} \sqrt{\omega' \hat{\Sigma}_L \omega / 2} \quad (2)$$

y en un escenario al alza (pesimista)

$$\omega' \hat{L} + t_{(100-\alpha)\%} \sqrt{\omega' \hat{\Sigma}_L \omega} / 2 \quad (3)$$

donde  $t_{(100-\alpha)\%}$  es el valor correspondiente al nivel de confianza de  $100-\alpha$ , obtenido mediante la inversa de una distribución  $t$ -Student con  $T-1$  grados de libertad en el punto  $(100-\alpha)\%$ , y  $\hat{L}$  y  $\hat{\Sigma}_L$  una estimación de  $L$  y de la matriz de varianzas y covarianzas, respectivamente. La división por 2 es necesaria para la adecuada parametrización de la distribución  $t$ -Student (ver Hossack *et al.*, 1999 y McNeil *et al.*, 2005).

Si suponemos que la esperanza y varianza de las variables dicotómicas  $Y_{it}$  son constantes y estables en el tiempo,  $E[Y_{it}] = p$  y  $V[Y_{it}] = p(1-p)$ , expresiones que se derivan de las propiedades básicas de una distribución de Bernoulli. El porcentaje de caída en el periodo  $t$  en notación vectorial se expresa como  $L_t = (\mathbf{1}' Y_t) / n_t$ , siendo  $\mathbf{1}$  un vector de  $n_t$  unos e  $Y_t$  el vector de  $n_t$  variables dicotómicas. Entonces,

$$E[L_t] = \frac{\mathbf{1}' E[Y_t]}{n_t} = \frac{n_t p}{n_t} = p$$

y

$$V[L_t] = \frac{\mathbf{1}' \Sigma \mathbf{1}}{n_t^2},$$

donde  $\Sigma$  es la matriz de varianzas y covarianzas del vector  $Y_t$  de  $n_t$  variables dicotómicas. Como no se supone independencia entre las variables dicotómicas, esta matriz no es necesariamente diagonal. Si las variables  $Y_{it}$  están correlacionadas, y por lo tanto son dependientes, entonces dada la presencia de homoscedasticidad, escribiremos  $\Sigma = p(1-p)R$ , siendo  $R$  una matriz de correlaciones con unos en la diagonal y cuyos elementos fuera de la diagonal supondremos constantes e iguales a  $r$ , a fin de admitir equi-correlación entre todos los contratos. Denominaremos a  $r$  coeficiente de contagio.

La propuesta metodológica para estimar  $r$  es la siguiente. En primer lugar, hallamos la expresión analítica de  $\mathbf{1}' \Sigma \mathbf{1}$ . Dada la forma de  $R$  obtenemos que  $\mathbf{1}' \Sigma \mathbf{1} = p(1-p) \mathbf{1}' R \mathbf{1} = p(1-p)(1+r(n_t-1))n_t$ . Sustituyendo obtenemos,

$$V[L_t] = \frac{\mathbf{1}' \Sigma \mathbf{1}}{n_t^2} = \frac{p(1-p)(1+r(n_t-1))}{n_t}.$$

Si empleamos el estimador de momentos para la  $V[L_t]$  y consideramos que la caída de cartera tiene volatilidad constante en el período histórico considerado,

entonces diremos que  $\hat{V}[\hat{L}_t]=\hat{V}[\hat{L}]=\sum_{t=1}^T(\hat{L}_t-\hat{L})^2\omega_t$  y considerando  $n_t$  constante, por ejemplo usando

$$\hat{n}=\sum_{t=1}^T\omega_t n_t \quad (4)$$

podemos estimar  $r$  como

$$\hat{r}=\left(\hat{n}\frac{\sum_{t=1}^T(\hat{L}_t-\hat{L})^2\omega_t}{\hat{L}(1-\hat{L})}-1\right)/(\hat{n}-1) \quad (5)$$

La estimación  $\hat{r}$  es una estimación del grado de correlación entre cancelaciones, que se introduce en el cómputo del escenario extremo.

La matriz de desviaciones  $\Delta_L$  puede estimarse como una matriz diagonal cuyos elementos son iguales a  $\sqrt{\hat{V}(\hat{L})}$ . Es decir,  $\hat{\Delta}_L=\sqrt{\hat{V}(\hat{L})}\mathbf{I}$ , siendo  $\mathbf{I}$  la matriz identidad de dimensión  $T$ .

De este modo, se puede utilizar el coeficiente de caída en los escenarios pesimista y optimista con un nivel de confianza del  $(100-\alpha)\%$ , definido en (2) y (3) respectivamente, sin más que sustituir  $\hat{\Sigma}_L$  por  $\hat{\Delta}_L R_L \hat{\Delta}_L$ . La aproximación presentada equivale a suponer máxima correlación entre períodos y un posible contagio entre las cancelaciones de pólizas, a la vez que un supuesto de propensión a la caída constante en el período considerado, o volatilidad constante.

### 3. APLICACIÓN A UN SEGMENTO DE PÓLIZAS DE SEGUROS GENERALES

A continuación mostramos los resultados obtenidos al aplicar la metodología propuesta a una base de datos de cancelaciones correspondiente a una muestra de pólizas de una compañía aseguradora. En concreto, hemos considerado todas las pólizas correspondientes a tres tipos de productos del ramo no vida: seguro del automóvil, diversos (que comprende hogar, decesos y accidentes), y seguro de salud.

El período de estudio va desde el 31 de diciembre de 2005 al 31 de diciembre de 2007. Realizamos un seguimiento semestral de la caída de cartera (por tanto, consideramos cuatro periodos semestrales).<sup>1</sup> La muestra analizada consta de 300,386 pólizas en vigor al inicio del estudio. Hacemos una segmentación de las mismas en función de su tipo (automóvil, diversos o salud), y su antigüedad al

<sup>1</sup> El análisis se podría hacer por caídas anuales pero ello requeriría un seguimiento histórico más amplio del que no se dispone para elaborar este apartado.

inicio de cada uno de los semestres analizados (diferenciando si la póliza se encuentra en el primer año de antigüedad, segundo año o tres o más). En este estudio otorgamos igual ponderación a los distintos períodos analizados, por lo que los coeficientes de ponderación utilizados son  $\omega_t = 0.25$ ,  $t = 1, \dots, 4$ .

En la Tabla 1 mostramos los resultados correspondientes a los porcentajes de caída semestrales. En primer lugar la tabla recoge, para cada año de antigüedad de la póliza, el valor del número promedio de pólizas  $\hat{n}$  correspondiente a la expresión (4). A continuación se muestran para cada tipo de producto considerando los porcentajes de caída para cada semestre. Finalmente, a modo de resumen, se muestran los resultados generales para el total de pólizas analizadas.

**Tabla 1**  
Porcentajes de caída semestrales  $\hat{L}_t$

Producto	Semestre	Antigüedad		
		1er año	2do año	3er + años
Diversos		$\hat{n} = 21,410.25$	$\hat{n} = 19,522.75$	$\hat{n} = 123,869$
	1	8.35%	8.68%	5.92%
	2	8.42%	7.63%	5.24%
	3	7.96%	8.48%	5.64%
	4	8.93%	8.69%	5.37%
Autos		$\hat{n} = 31,334.5$	$\hat{n} = 27,242$	$\hat{n} = 169,329.5$
	1	12.51%	12.06%	5.85%
	2	14.79%	13.07%	6.31%
	3	13.41%	12.56%	6.74%
	4	13.48%	12.86%	6.24%
Salud		$\hat{n} = 2,349.5$	$\hat{n} = 1,991.5$	$\hat{n} = 9,186.5$
	1	18.75%	26.87%	31.07%
	2	13.46%	18.60%	10.56%
	3	12.49%	12.15%	9.45%
	4	13.38%	9.27%	7.84%
General		$\hat{n} = 55,094.25$	$\hat{n} = 48,756.25$	$\hat{n} = 302,385$
	1	11.22%	11.49%	6.81%
	2	12.28%	11.13%	6.00%
	3	11.13%	10.91%	6.36%
	4	11.69%	10.97%	5.92%

El mayor volumen de pólizas corresponde a las que están en su tercer año de antigüedad o más, siendo éstas además las que presentan en general unos porcentajes de cancelación inferiores. Este resultado confirma el obtenido en otros estudios (Brockett *et al.*, 2008). Observamos además como los porcentajes de caída semestrales dentro de cada segmento analizado son bastante estables, excepto para el caso de seguros de salud en el que el primer semestre registra un porcentaje de cancelaciones considerablemente superior al resto. Para las pólizas de diversos observamos que, dentro del primer semestre, se cancelan un 8.35% de los contratos que están en su primer año de vigencia, un 8.68% de los que están en su segundo año, y un 5.92% de los que están en el tercer año o más de vigencia. Para el resto de semestres analizados estos porcentajes se mantienen bastante estables. Las pólizas del automóvil registran porcentajes de cancelación superiores a los de diversos, siendo para el primer semestre del 12.51% al considerar el primer año de vigencia, 12.06% para el segundo y 5.85% para las pólizas que están en su tercer o más año de vigencia. Los porcentajes de cancelación para el resto de semestres son ligeramente superiores. Los resultados muestran claramente como las pólizas de salud son las que registran los mayores porcentajes de cancelación, en especial durante el primer semestre analizado, siendo del 18.75% para pólizas en su primer año de vigencia, 26.87% para el segundo y 31.07% para tres o más años de antigüedad. Estos porcentajes se reducen en los semestres siguientes, para los que volvemos a observar como las pólizas con más años de vigencia son las que registran menores porcentajes de cancelación. Los resultados generales muestran porcentajes promedios de cancelación que se sitúan en torno al 11.5% para pólizas en su primer año de vigencia, 11.0% para las que se encuentran en su segundo año y finalmente 6.0% para las que tienen tres o más años de antigüedad.

- **Coeficientes de caída promedio y resultados para el modelo estándar**

En la Tabla 2 mostramos los resultados correspondientes a los coeficientes de caída promedio y los obtenidos para el modelo estándar por tipo de póliza y para el total de la muestra. Los coeficientes correspondientes al modelo estándar propuesto en el marco de la directiva de Solvencia II se obtienen disminuyendo el coeficiente promedio de caída en un 20% para el escenario optimista y aumentándolo en un 50% para el pesimista. Constatamos nuevamente que las pólizas de salud son las que registran mayores porcentajes de cancelación, seguidas de las del automóvil y las de diversos.

**Tabla 2**

Coefficientes de caída promedio  $\hat{L}$  y bajo el modelo estándar:  
escenario optimista (bajista)  $\hat{L}_{-20\%}$  y pesimista (alcista)  $\hat{L}_{+50\%}$

Antigüedad Producto	$\hat{L}$			$\hat{L}_{-20\%}$			$\hat{L}_{+50\%}$		
	1 <sup>er</sup> año	2 <sup>o</sup> año	3 <sup>er</sup> + años	1 <sup>er</sup> año	2 <sup>o</sup> año	3 <sup>er</sup> + años	1 <sup>er</sup> año	2 <sup>o</sup> año	3 <sup>er</sup> + años
Diversos	8.41%	8.37%	5.54%	6.73%	6.70%	4.43%	12.62%	12.56%	8.31%
Autos	13.55%	12.64%	6.29%	10.84%	10.11%	5.03%	20.33%	18.96%	9.44%
Salud	14.52%	16.72%	14.73%	11.62%	13.38%	11.78%	21.78%	25.08%	22.10%
General	11.58%	11.13%	6.27%	9.26%	8.90%	5.02%	17.37%	16.70%	9.41%

- **Coefficientes de caída en base a la metodología propuesta**

En la Tabla 3 se muestran los resultados para los coeficientes de caída calculados en base a la metodología propuesta en la sección anterior, asumiendo en este caso la hipótesis de ausencia de correlación lineal, es decir,  $r = 0$  o ausencia de contagio en las decisiones de cancelación. Por otro lado, en la Tabla 4 se recogen los resultados asumiendo la hipótesis de que existe contagio, presentando el valor de  $r$  que viene dado por la expresión (5), y que se muestra multiplicado por 1000. Los coeficientes se han calculado a partir de las expresiones (2) y (3) para los escenarios optimista y pesimista, respectivamente y corresponden por tanto al límite inferior y superior de un intervalo de confianza para el coeficiente de caída. El valor de  $\alpha$  considerado en este caso es el 0.5%, por lo que los intervalos están contruidos a un nivel de confianza del 99.5%.

Observamos en primer lugar como para el escenario optimista los porcentajes correspondientes al modelo estándar resultan, por lo general, inferiores a los obtenidos cuando la correlación es nula, y más parecidos a los obtenidos asumiendo que existe contagio, excepto para el caso de los seguros de salud. En este último caso hemos de destacar que se registran niveles de contagio muy elevados, lo cual significa que las decisiones de cancelación se encuentran muy correlacionadas. Ello da lugar a unos intervalos de confianza muy amplios, que en el escenario optimista computacionalmente originan coeficientes por debajo de cero.

Para el escenario pesimista, observamos como el modelo estándar proporciona coeficientes superiores a los obtenidos bajo hipótesis de independencia. También resultan superiores a los correspondientes en caso de asumir que existe contagio excepto para los seguros de salud, dado que no recogen la elevada dependencia entre las decisiones de cancelación de estos asegurados. Concluimos por tanto que, en el escenario pesimista, el modelo estándar resulta demasiado conservador dando lugar a unos coeficientes excesivamente elevados, lo cual es debido a su propia construcción, basado simplemente en incrementar en un 50% el coeficiente de caída obtenido, y sin tener en cuenta en ningún momento su varianza. En cualquier caso, ni el modelo es-

táandar, ni el basado en la hipótesis de independencia, explicitan el elevado grado de correlación existente entre las decisiones de cancelación de los tomadores de pólizas de salud, para los que el escenario pesimista debería contemplar coeficientes muy superiores a los registrados por estos dos modelos. Por otra parte, el modelo que asume independencia da lugar a coeficientes inferiores a los registrados en caso de suponer que existe contagio, lo cual significa que subestima el riesgo.

**Tabla 3**  
Coeficientes de caída bajo hipótesis de independencia  
para el escenario optimista  $\hat{L}_{99,5\%,indep}^{op}$  y pesimista  $\hat{L}_{99,5\%,indep}^{ps}$

Antigüedad Producto*	$\hat{L}_{99,5\%,indep}^{op} (r = 0)$			$\hat{L}_{99,5\%,indep}^{ps} (r = 0)$		
	1er año	2º año	3er + años	1er año	2º año	3er + años
Diversos	7.63% (-9.36%)	7.55% (-9.78%)	5.27% (-4.84%)	9.20% (+9.36%)	9.19% (+9.78%)	5.81% (+4.84%)
Autos	12.74% (-5.95%)	11.80% (-6.59%)	6.04% (-3.87%)	14.35% (+5.95%)	13.47% (+6.59%)	6.53% (+3.87%)
Salud	11.54% (-20.57%)	13.37% (-20.06%)	13.31% (-9.66%)	17.51% (+20.57%)	20.08% (+20.06%)	16.15% (+9.66%)
General	11.01% (-4.89%)	10.54% (-5.29%)	6.09% (-2.90%)	12.15% (+4.89%)	11.71% (+5.29%)	6.46% (+2.90%)

\* Se muestra entre paréntesis en cada celda el porcentaje de variación respecto al coeficiente de caída promedio presentado en las tres primeras columnas de la Tabla 2.

**Tabla 4**  
Coeficientes de caída considerando contagio para el  
escenario optimista  $\hat{L}_{99,5\%,contagio}^{op}$  y pesimista  $\hat{L}_{99,5\%,contagio}^{ps}$

Antigüedad Producto*	Contagio $r^*1000$			$\hat{L}_{99,5\%,contagio}^{op}$			$\hat{L}_{99,5\%,contagio}^{ps}$		
	1er año	2º año	3er + años	1er año	2º año	3er + años	1er año	2º año	3er + años
Diversos	0.11	0.19	0.12	6.98% (-17.00%)	6.58% (-21.38%)	4.46% (-19.54%)	9.84% (+17.00%)	10.16% (+21.38%)	6.63% (+19.54%)
Autos	0.54	0.09	0.17	10.18% (-24.87%)	11.06% (-12.44%)	4.97% (-20.94%)	16.92% (+24.87%)	14.21% (+12.44%)	7.60% (+20.94%)
Salud	4.50	32.33	71.50	4.36% (-69.96%)	-10.38% (-162.08%)	-22.06% (-249.74%)	24.68% (+69.96%)	43.83% (+162.08%)	51.51% (+249.74%)
General	0.19	0.03	0.21	9.69% (-16.28%)	10.20% (-8.28%)	4.82% (-23.13%)	13.46% (+16.28%)	12.05% (+8.28%)	7.72% (+23.13%)

\* Se muestra entre paréntesis en cada celda el porcentaje de variación respecto al coeficiente de caída promedio  $\hat{L}$  presentado en las tres primeras columnas de la Tabla 2.



Por último, en la Tabla 5 se muestran los resultados generales para los coeficientes correspondientes al escenario optimista y pesimista para diferentes valores de  $\alpha$  y en caso de asumir que existe contagio. De esta forma, la compañía aseguradora dispondría de las estimaciones correspondientes a ambos escenarios en función de distintos niveles de confianza y para el conjunto de su cartera, por lo que aporta una valiosa información de cara a cuantificar adecuadamente su riesgo de negocio. De nuevo, entre paréntesis se presenta el porcentaje de variación respecto al coeficiente de caída promedio  $\hat{L}$  presentado en las tres primeras columnas de la Tabla 2.

**Tabla 5**

Coeficientes de caída considerando contagio para el escenario optimista  $\hat{L}_{(100-\alpha)\%,contagio}^{op}$  y pesimista  $\hat{L}_{(100-\alpha)\%,contagio}^{ps}$  para distintos valores de  $\alpha$ . Resultados generales

Antigüedad $\alpha$	$\hat{L}_{(100-\alpha)\%,contagio}^{op}$			$\hat{L}_{(100-\alpha)\%,contagio}^{ps}$		
	1 <sup>er</sup> año	2 <sup>o</sup> año	3 <sup>er</sup> + años	1 <sup>er</sup> año	2 <sup>o</sup> año	3 <sup>er</sup> + años
0.1%	8.28% (-28.48%)	9.52% (-14.47%)	3.74% (-40.44%)	14.88% (+28.48%)	12.74% (+14.47%)	8.81% (+40.44%)
0.25%	9.17% (-20.78%)	9.95% (-10.56%)	4.42% (-29.51%)	13.98% (+20.78%)	12.30% (+10.56%)	8.12% (+29.51%)
0.5%	9.69% (-16.28%)	10.20% (-8.28%)	4.82% (-23.13%)	13.46% (+16.28%)	12.05% (+8.28%)	7.72% (+23.13%)
0.75%	9.95% (-14.07%)	10.33% (-7.15%)	5.02% (-19.98%)	13.21% (+14.07%)	11.92% (+7.15%)	7.53% (+19.98%)
1%	10.11% (-12.66%)	10.41% (-6.43%)	5.15% (-17.98%)	13.04% (+12.66%)	11.84% (+6.43%)	7.40% (+17.98%)
1.5%	10.32% (-10.86%)	10.51% (-5.52%)	5.31% (-15.43%)	12.84% (+10.86%)	11.74% (+5.52%)	7.24% (+15.43%)
2%	10.45% (-9.71%)	10.58% (-4.93%)	5.41% (-13.79%)	12.70% (+9.71%)	11.67% (+4.93%)	7.14% (+13.79%)
2.5%	10.55% (-8.87%)	10.62% (-4.51%)	5.48% (-12.60%)	12.61% (+8.87%)	11.63% (+4.51%)	7.06% (+12.60%)

En resumen, nuestros resultados nos permiten concluir que cuánto mayor sea el grado de contagio mayor error cometeremos en la elaboración de escenarios para el coeficiente de caída asumiendo independencia. Hemos constatado la existencia de contagio entre las decisiones de cancelación, y que éste tiene un importante impacto en los resultados. Por otra parte, el modelo estándar resulta en la mayoría de los casos demasiado conservador, dando lugar a porcentajes de caída bajo el escenario pesimista excesivamente altos. Bajo el modelo que proponemos, el escenario pesi-

mista estresado sería en la mayoría de casos inferior al 50% requerido por la fórmula estándar. Por todo ello, la dependencia existente entre las decisiones de cancelación de los asegurados no debería ser ignorada dado que la compañía cuantificaría erróneamente su verdadera exposición al riesgo de negocio.

#### **4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES FINALES**

En este artículo se aplica una metodología desarrollada por las autoras para el cálculo de escenarios de caída de cartera en el ramo de seguros generales, en el contexto de Solvencia II. Esta metodología considera el impacto que tiene en los resultados el contagio en las decisiones de cancelación de los asegurados por lo que los escenarios formulados resultan más realistas y precisos que los obtenidos utilizando el modelo estándar. En el trabajo se realiza un análisis empírico y se concluye que ignorar este contagio y asumir independencia en las decisiones de cancelación introduce un error en las estimaciones nada despreciable, y con negativas consecuencias para la compañía aseguradora, dado que subestimaría su exposición al riesgo de negocio. La recomendación es realizar este tipo de análisis para distintos tipos de contratos y duración de los mismos, dado que son dos factores que inciden en la probabilidad de cancelación de pólizas. Con ello se consigue una mayor estabilidad en los grupos analizados, y por lo tanto un escenario pesimista estresado inferior al 50% requerido por la fórmula estándar propuesta por la regulación de solvencia.

Este trabajo puede extenderse a fin de mejorar las estimaciones aquí obtenidas con la introducción de otras covariables para valorar qué impacto tendrían en la elaboración de escenarios extremos, o con la utilización de duraciones exactas en la medición del periodo de vigencia de las pólizas. Consideramos en cualquier caso que este trabajo aporta las líneas generales de actuación que pueden guiar a las aseguradoras en la correcta elaboración de escenarios de caída de cartera, y por tanto de medición de su exposición al riesgo de negocio, en el marco de Solvencia II.

#### **AGRADECIMIENTOS**

Las autoras agradecen las ayudas recibidas del Ministerio de Ciencia e Innovación/FEDER (ECO2008-01223 y ECO2010-21787).

#### **BIBLIOGRAFÍA**

Brockett, P.L., Golden, L., Guillén, M., Nielsen, J.P., Parner, J. y Pérez-Marín, A.M. (2008). "Survival analysis of household insurance policies: how much time do you have to stop total customer defection?". *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 75, Nº 3, 713-737.

Cooley, S. (2002). "Loyalty strategy development using applied member-cohort segmentation". *Journal of Consumer Marketing*, Vol. 19, Nº 7, 550-563.

Crosby, L.A. y Stephens, N. (1987). "Effects of relationship marketing on satisfaction, retention, and prices in the life insurance industry". *Journal of Marketing Research*, Vol. 24, Nº 4, 404-411.

Dhaene, J., Vanduffel, S., Goovaerts, M.J., Kaas, R., Tang, Q. y Vyncke, D. (2006). *Risk measures and comonotonicity: a review. Stochastic Models*, Vol. 22, 573-606.

Duker, J.M.(1969). "Expenditures for life insurance among working-wife families". *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 36, Nº 5, 525-533.

Guillén, M., Nielsen, J.P. y Pérez-Marín, A.M. (2006). "La gestión aseguradora bajo el enfoque del multicontrato". *Revista Española de Seguros*, Vol. 127, 529-539.

Guillén, M., Nielsen, J.P. y Pérez-Marín, A.M. (2008). "The need of monitoring customer loyalty and business risk in the European insurance industry". *Geneva Papers on Risk and Insurance – Issues and Practice*, Vol. 33, 207-218.

Hammond, J.D., Houston, D.B. y Melander, E.R. (1967). "Determinants of household life insurance premium expenditures: an empirical investigation". *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 34, Nº 3, 397-408.

Hossack, J.B., Pollard, J.H. y Zehnwirth, B. (1999). *Introductory statistics with applications in general insurance*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999.

McNeil, A.J., Frey, R. y Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management*. New Jersey: Princeton University Press.

Nakada, P., Shah, H., Koyluoglu, H.U. y Collignon, O. (1999). "P&C RAROC: a catalyst for improved capital management in the property and casualty insurance industry". *The Journal of Risk Finance*, Vol. 1, Nº 1, 1-18.

Pieschacón Jr., C.A. (2010). "La caída de cartera en vida y sus consecuencias". *Actualidad Aseguradora*, Vol. 10-11, [4] p.

Schlesinger, H. y Schulenburg, J.M. (1993). "Customer information and decisions to switch insurers". *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 60, Nº 4, 591-615.

Stafford, M.R., Stafford, T.F. y Wells, B.P. (1998). "Determinants of service quality and satisfaction in the auto casualty claims process". *Journal of Services Marketing*, 1998, Vol. 12, Nº 6, 426-40.

Wells, B. P. y Stafford, M.R. (1995). "Service quality in the insurance industry. Customer perception versus regulatory perceptions". *Journal of Insurance Regulation*, Vol. 13, Nº 4, 462-477.

## Ponencia 10

# ANÁLISIS DE ENDOGENEIDAD EN EL CÁLCULO DE LAS INDEMNIZACIONES POR LESIONES DERIVADAS DE ACCIDENTES DE TRÁFICO

Miguel Santolino Prieto

### RESUMEN

El objetivo de este trabajo es analizar los factores que inciden en el cálculo de las indemnizaciones derivadas de accidentes de circulación teniendo en cuenta el mecanismo mediante el cual han sido fijadas, negociación versus juicio. En el trabajo se aplica un modelo *switching* para modelizar conjuntamente la vía de resolución del conflicto y la indemnización fijada para compensar los daños sufridos por la víctima. Los resultados obtenidos, utilizando una base de datos del mercado asegurador español, ponen de manifiesto la existencia de correlación entre el mecanismo seleccionado para fijar la indemnización y la cantidad finalmente satisfecha, por lo que el uso de la metodología propuesta está totalmente justificado.

### 1. INTRODUCCIÓN

Cuando ocurre un accidente de tráfico, las personas que sufren lesiones y no son responsables del mismo deben ser indemnizadas por el daño corporal sufrido. La indemnización por daños corporales depende de múltiples factores. La cuantía indemnizatoria se determina principalmente en base a la gravedad de las lesiones, el perjuicio económico que haya sufrido la víctima a consecuencia del accidente, y si tiene parte de responsabilidad en el acaecimiento del accidente. Un factor que no se deriva propiamente del accidente pero que puede influir en el monto de la indemnización es el proceso seguido por las partes para la cuantificación de los daños sufridos.

El objetivo de este trabajo es comparar los factores que influyen en la cuantía indemnizatoria en aquellos casos que han sido liquidados mediante un acuerdo amistoso entre las partes (negociación), y los factores que inciden en la indemnización cuando la cuantía se ha establecido mediante sentencia judicial. Puesto que puede existir correlación entre el mecanismo elegido por las partes para la resolución del conflicto y la indemnización otorgada a la víctima por el daño corpo-

ral sufrido, hemos seleccionado un *switching regression model* para llevar a cabo el análisis explicativo.

El modelo de regresión *switching* es adecuado cuando existe selección muestral en los datos. En nuestro caso, la selección muestral ocurre si los casos que son liquidados mediante negociación y los casos que son liquidados mediante juicio no son aleatorios, sino que presentan características diferentes. Cuando existe endogeneidad la aplicación de modelos de regresión que no tienen en cuenta el efecto de la selección conduce a estimadores que no cumplen propiedades estadísticas deseadas. El modelo de regresión *switching* se estructura en dos ecuaciones de regresión que describen el comportamiento de las indemnizaciones ante cada uno de los procesos de resolución, y una función criterio que determina cuál de las vías de resolución ha sido elegida.

La estructura del trabajo es la siguiente. En el apartado 2 presentamos las principales consideraciones sobre la metodología *switching* utilizada en la modelización. En el apartado 3 analizamos los estadísticos descriptivos básicos de la base de datos utilizada en la aplicación, en la que se dispone de información suficiente sobre las indemnizaciones satisfechas a una muestra de víctimas de accidentes de tráfico y la vía seguida en la fijación de las mismas. En el apartado 4 se analizan los principales resultados obtenidos sobre los factores estadísticamente significativos en la modelización de las cuantías indemnizatorias teniendo en cuenta la influencia que puede tener el alcance de acuerdo por negociación, o la necesidad de acudir a juicio. Finalmente, en el apartado 5 se presentan las principales conclusiones derivadas del trabajo.

## 2. EL MODELO DE REGRESSION SWITCHING

El modelo de regresión con *switching* endógeno permite dependencia entre el mecanismo de resolución que la víctima selecciona para fijar la indemnización por los daños corporales sufridos y la indemnización finalmente recibida. Esta modelización es adecuada cuando no existe aleatoriedad en el mecanismo de resolución de conflictos utilizado para la fijación de las indemnizaciones, es decir, cuando se produce una autoselección de los individuos. De este modo, los individuos que deciden alcanzar un acuerdo con la compañía aseguradora en la fijación de la indemnización son sistemáticamente diferentes de aquellos que van a juicio. La consecuencia más importante de este proceso es que los factores que influyen en la selección del mecanismo de resolución pueden influir también en la cuantía indemnizatoria finalmente satisfecha.

Una definición completa del modelo de regresión *switching* puede encontrarse en Maddala (1983). En la especificación de este modelo se define una función criterio y dos ecuaciones de regresión, de la siguiente forma:

- $I_i = 1$  (el siniestro  $i$  se liquida por decisión judicial) si  $z_i \gamma > u_i$

$I_i=0$  (el siniestro  $i$  se liquida mediante negociación) si  $z_i \gamma \leq u_i$

$$\begin{aligned} y_{1i} &= x_{1i}\beta_1 + u_{1i} & \text{si } I_i &= 1 \\ y_{0i} &= x_{0i}\beta_0 + u_{0i} & \text{si } I_i &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $I_i$  es una variable dicotómica que toma valor 1 si el siniestro  $i$  ha sido liquidado mediante sentencia judicial (la indemnización a la víctima se ha fijado en un proceso judicial) y 0 cuando la indemnización se ha fijado de forma amistosa entre las partes. Por otra parte,  $y_{1i}$  y  $y_{0i}$  son las variables dependientes que recogen la compensación otorgada a la víctima  $i$  cuando la indemnización ha sido establecida mediante sentencia judicial y cuando se ha acordado de forma amistosa, respectivamente. Los vectores de parámetros a estimar son  $\gamma$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_0$ . Finalmente,  $z_i$  es el vector de características que influyen en la selección del procedimiento de resolución del conflicto, y  $x_{1i}$  y  $x_{0i}$  son los vectores de características relacionadas con las cuantías indemnizatorias satisfechas en cada uno de los procedimientos de resolución.

La estructura planteada permite considerar diferentes regresores en cada uno de los procesos de resolución. En este trabajo, para simplificar, incluimos las mismas variables en las dos ecuaciones especificadas, de forma que  $x_{1i} = x_{0i} = x_i$ . En cuanto a los términos de error aleatorios,  $u_i$ ,  $\varepsilon_{1i}$  y  $\varepsilon_{0i}$  asumimos que siguen una distribución normal trivariante, con vector de medias igual a cero y matriz de covarianzas igual a

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{1u} & \sigma_{0u} \\ \sigma_{1u} & \sigma_1^2 & - \\ \sigma_{0u} & - & \sigma_0^2 \end{pmatrix}$$

donde  $\sigma_u^2$  es la varianza del término de error en la función criterio, que podemos fijar igual a 1 (Maddala, 1983). Del mismo modo,  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_0^2$  son las varianzas de los términos de error de las ecuaciones de regresión. Por último,  $\sigma_{1u}$  y  $\sigma_{0u}$  son las covarianzas entre  $u_i$  y  $u_{1i}$  y entre  $u_i$  y  $u_{0i}$ , respectivamente. La función de verosimilitud se define como,

$$L(\beta_0, \beta_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_{0u}, \sigma_{1u}) = \prod \left[ \int_{-\infty}^{z_i \gamma} g(y_i - x_i \beta_1, u_i) du_i \right]^{I_i} \left[ \int_{z_i \gamma}^{\infty} f(y_i - x_i \beta_0, u_i) du_i \right]^{1-I_i}$$

donde  $g$  y  $f$  son las funciones de densidad normal bivalentes de  $(u_i, u_{1i})$  y  $(u_i, u_{0i})$ , respectivamente. Los coeficientes de correlación entre  $u_i$  y  $\varepsilon_{1i}$ , y  $u_i$  y  $\varepsilon_{0i}$ , serán respectivamente  $\rho_1 = \sigma_{1u} / \sigma_1$  y  $\rho_0 = \sigma_{0u} / \sigma_0$ . Los resultados obtenidos para estos coeficientes nos permitirán pronunciarnos sobre la existencia o no de endogeneidad en los datos.

Alternativamente a la maximización de la función de verosimilitud, los coeficientes de los parámetros pueden ser estimados mediante un método de estimación en dos etapas, de forma similar al aplicado en el modelo Heckit (Lee, 1976; Ordaz, 2011). Cabe recordar que la distribución de  $u_{1i}$  condicionada a  $u_i$  es normal con media  $\sigma_{1u}u_i$  y varianza  $\sigma_1^2 - \sigma_{1u}^2$ . Entonces, podemos definir las ecuaciones en (1) de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} y_{1i} &= x_{1i}\beta_1 - \sigma_{1u}W_{1i} + \varepsilon_{1i} & \text{si } I_i &= 1 \\ y_{0i} &= x_{0i}\beta_0 + \sigma_{0u}W_{0i} + \varepsilon_{0i} & \text{si } I_i &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $W_{1i}$  y  $W_{0i}$  se definen como  $W_{1i} = \phi(z_i\gamma) / \varphi(z_i\gamma)$  y  $W_{0i} = \phi(z_i\gamma) / [1 - \varphi(z_i\gamma)]$ , siendo  $\phi$  la función de densidad y  $\varphi$  la función de distribución de la Normal estándar. Los valores esperados de los residuos  $u_{1i}$  y  $u_{0i}$  son, respectivamente,  $E(u_{1i} | u_i \leq z_i\gamma) = -\sigma_{1u}W_{1i}$  y  $E(u_{0i} | u_i > z_i\gamma) = \sigma_{0u}W_{0i}$ .

En la primera etapa, estimamos los coeficientes  $\gamma$  mediante la maximización de la función de verosimilitud de un modelo probit. Posteriormente, sustituimos  $W_{1i}$  y  $W_{0i}$  por  $\hat{W}_{1i}$  y  $\hat{W}_{0i}$  en la ecuación (2) y estimamos por mínimos cuadrados ordinarios  $\beta_0, \beta_1, \sigma_{0u}, \sigma_{1u}$ . El estimador de las varianzas  $\sigma_0^2$  y  $\sigma_1^2$  puede obtenerse mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} [\hat{u}_{1i}^2 + \hat{\sigma}_{1u}^2(z_i\hat{\gamma})\hat{W}_{1i}] \\ \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} [\hat{u}_{0i}^2 + \hat{\sigma}_{0u}^2(z_i\hat{\gamma})\hat{W}_{0i}] \end{aligned}$$

donde  $N_1$  y  $N_0$  indican el número de observaciones de la muestra que satisfacen las condiciones  $I = 1$  e  $I = 0$ , respectivamente.

### 3. ANÁLISIS EMPÍRICO: LOS DATOS

La base de datos utilizada en el presente análisis ha sido proporcionada por una de las principales compañías aseguradoras del mercado español. La muestra recoge información de 24.938 víctimas de accidentes de tráfico. Todas estas víctimas sufrieron lesiones corporales y fueron indemnizadas durante el año 2007. En España existe un sistema de responsabilidad civil, por lo que los conductores responsables del accidente de tráfico no tienen derecho a indemnización por las lesiones sufridas, salvo que tengan contratada una cobertura adicional. Desde este punto de vista no han sido incluidos en el análisis. Tampoco se ha incluido información sobre las víctimas fallecidas a consecuencia del accidente.

El cálculo de la indemnización por daños corporales derivados de accidentes de tráfico se realiza en base al Sistema para la Valoración de los Daños y Perjuicios Causados a las Personas en Accidentes de Circulación, conocido popularmente como baremo de indemnizaciones. Este baremo, vigente desde 1995, es de obligada aplicación para la cuantificación de la indemnización a otorgar a una víctima de tráfico por el perjuicio (económico y no económico) sufrido. Una información detallada sobre el funcionamiento del baremo puede encontrarse en Bermúdez *et al.* (2009). Países de nuestro entorno, como Francia, Bélgica, Italia o Portugal, también aplican sistemas tabulares para la valoración de la indemnización por accidentes de tráfico. Estos sistemas buscan, entre otros propósitos, reducir la litigiosidad (Rogers, 2001; EU, 2009).

El objetivo de este trabajo es analizar las diferencias entre los factores que influyen en la indemnización final cuando ésta es fijada por los tribunales, y la obtenida cuando las partes llegan a un acuerdo amistoso. De las 24.938 víctimas que conforman la base de datos, 23.816 obtuvieron la indemnización mediante un acuerdo amistoso con la compañía aseguradora, y 1.122 fueron a juicio. La indemnización media para los casos liquidados mediante acuerdo amistoso es de 10.302,12 Euros, con una desviación estándar de 22.168,91 Euros. Para los casos liquidados por vía judicial la indemnización media asciende a 18.385,54 Euros, con una desviación estándar de 27.657,83 Euros.

Los principales estadísticos descriptivos de las variables utilizadas se muestran en la Tabla 1. La información incluida ha sido recogida por la compañía aseguradora durante el tiempo que el siniestro ha permanecido abierto. Fundamentalmente cabe diferenciar entre factores generales y factores directamente relacionados con las lesiones sufridas. Entre los factores generales incluimos los atributos de la víctima, como la edad y el sexo. Diferentes trabajos señalan que la gravedad del accidente está positivamente relacionada con la edad de las víctimas (Boucher y Santolino, 2010; O'Donnell y Connor, 1996). Otros estudios sugieren que las víctimas más jóvenes y las más mayores son las que sufren mayores lesiones (Kockelman y Kweon, 2002; Huang *et al.*, 2008). Es por ello que en la modelización hemos decidido incluir como regresor la edad de la víctima al cuadrado. En cuanto al género, hay estudios que señalan que las mujeres sufren lesiones más graves en los accidentes de tráfico (Ayuso y Santolino, 2007; Boucher y Santolino, 2010; Rifaat y Tay, 2009; Evans, 2001; Kockelman y Kweon, 2002). Sin embargo, otros estudios sugieren que son los hombres los que padecen lesiones más serias (Tay y Rifaat, 2007; Valent *et al.*, 2002). El resto de factores generales hacen referencia al tipo de víctima (conductor, pasajero, peatón o ciclista) y a la edad del conductor responsable del accidente. Diversos artículos han demostrado que la posición de la víctima en el vehículo y la edad del conductor explican la gravedad del accidente (Newgard, 2008; Boucher y Santolino, 2010; Doerpinghaus *et al.*, 2008).

En relación a las variables que recogen información sobre las lesiones padecidas por la víctima cabe señalar que esta información se basa en los informes médicos periciales que realiza la compañía durante el tiempo que el individuo se está recuperando de sus lesiones. Se pueden diferenciar tres grupos de variables: las



que hacen referencia al tipo de lesión, las que hacen referencia a su gravedad, y las que recogen la evolución de los daños. Por lo que se refiere al tipo de lesión, el baremo médico describe más de 400 secuelas. Con el objetivo de reducir este dato a un número limitado de categorías, hemos clasificado las secuelas en base a su naturaleza y localización, teniendo en cuenta la matriz de diagnóstico Barell (Barell *et al.*, 2002). En concreto, siete variables hacen referencia a la naturaleza de la lesión y seis a la parte del cuerpo lesionada. Estos factores no son mutuamente excluyentes puesto que la víctima puede sufrir más de una secuela.

**Tabla 1**  
Descripción de las variables y estadísticos básicos

Variable	Etiqueta	Descripción	Media	Desv. Estd.
<i>Variables dependientes</i>				
I	<i>Mecan. de Resolución</i>	1 si la indemnización se otorga mediante sentencia judicial; 0 si la indemnización es acordada entre las partes.	0,045	0,207
$y_0$	<i>Indem. negociada</i>	Indemnización acordada entre las partes (en logaritmos neperianos).	8,666	0,759
$y_1$	<i>Indem. en sentencia</i>	Indemnización determinada en sentencia judicial (en logaritmos neperianos).	9,145	0,891
<i>Regresores generales</i>				
$x_1$	<i>Género</i>	1 si la víctima es un hombre; 0 si es una mujer.	0,221	0,415
$x_2$	<i>Edad víctima</i>	Edad de la víctima (dividido entre 100)	0,378	0,168
$x_3$	<i>Edad víctima al cuadrado</i>	Edad de la víctima al cuadrado (dividido entre 10.000).	0,171	0,150
$x_4$	<i>Edad conductor culpable</i>	Edad del conductor culpable del siniestro (dividido entre 100).	0,405	0,146
$x_5$	<i>Edad conductor culpable al cuadrado</i>	Edad del conductor culpable del siniestro al cuadrado (dividido entre 10.000).	0,185	0,131
$x_6$	<i>Conductor</i>	1 si la víctima es el conductor; 0 el resto.	0,505	0,500
$x_7$	<i>Pasajero en vehículo no culpable</i>	1 si la víctima es pasajero del vehículo no causante del accidente; 0 el resto.	0,219	0,413
$x_8$	<i>Pasajero en vehículo culpable</i>	1 si la víctima es pasajero del vehículo causante del accidente; 0 el resto.	0,154	0,361
$x_9$	<i>Peatón/Ciclista</i>	1 si la víctima es un peatón o ciclista; 0 el resto.	0,122	0,328
<i>Regresores relacionados con las lesiones</i>				
$x_{10}$	<i>Días en Hospital</i>	Número de días de baja en hospital.	0,002	0,010
$x_{11}$	<i>Días de baja incapacitado</i>	Número de días de baja laboralmente incapacitado.	0,076	0,076

**Tabla 1**  
Descripción de las variables y estadísticos básicos (Cont.)

<b>Variable</b>	<b>Etiqueta</b>	<b>Descripción</b>	<b>Media</b>	<b>Desv. Estd.</b>
X <sub>12</sub>	<i>Días de baja no incapacitado</i>	Número de días de baja no incapacitado laboralmente.	0,027	0,039
X <sub>13</sub>	<i>Puntos secuelas</i>	Puntuación por secuelas.	0,042	0,073
X <sub>14</sub>	<i>Perjuicio estético</i>	1 si la víctima sufrió perjuicio estético; 0 el resto.	0,222	0,415
X <sub>15</sub>	<i>Variación días en hospital</i>	1 si el número de días de baja en hospital fijado en el último informe pericial de la compañía es menor al número establecido en el primer informe pericial; 0 el resto.	0,024	0,153
X <sub>16</sub>	<i>Variación días de baja impeditivos</i>	1 si el número de días de baja incapacitado fijado en el último informe pericial de la compañía es menor al número establecido en el primer informe pericial; 0 el resto.	0,352	0,478
X <sub>17</sub>	<i>Variación días de baja no impeditivos</i>	1 si el número de días de baja no incapacitado laboralmente fijado en el último informe pericial de la compañía es menor al número establecido en el primer informe pericial; 0 el resto.	0,280	0,449
X <sub>18</sub>	<i>Variación puntos por secuelas</i>	1 si los puntos por secuelas fijados en el último informe pericial de la compañía son menores al número establecido en el primer informe pericial; 0 el resto.	0,253	0,435
X <sub>19</sub>	<i>Cabeza</i>	1 si la lesión se localiza en la cabeza; 0 el resto.	0,131	0,337
X <sub>20</sub>	<i>Torso superior</i>	1 si la lesión se localiza en el torso superior (tórax/dorso); 0 el resto.	0,243	0,429
X <sub>21</sub>	<i>Torso inferior</i>	1 si la lesión se localiza en el torso inferior (abdomen/lumbar); 0 el resto.	0,188	0,391
X <sub>22</sub>	<i>Extremidades superiores</i>	1 si la lesión se localiza en las extremidades superiores; 0 el resto.	0,260	0,439
X <sub>23</sub>	<i>Extremidades inferiores</i>	1 si la lesión se localiza en las extremidades inferiores; 0 el resto.	0,247	0,431
X <sub>24</sub>	<i>Regiones múltiples</i>	1 si contusiones múltiples en diferentes partes; 0 el resto.	0,054	0,227
X <sub>25</sub>	<i>Superficial</i>	1 si lesión superficial (heridas/contusiones); 0 el resto.	0,569	0,495
X <sub>26</sub>	<i>Fractura</i>	1 si fractura; 0 el resto.	0,179	0,383
X <sub>27</sub>	<i>Inconsciencia</i>	1 si pérdida de consciencia después del accidente; 0 el resto.	0,024	0,154
X <sub>28</sub>	<i>Esguince / torcedura</i>	1 si esguince/torcedura; 0 el resto.	0,724	0,447
X <sub>29</sub>	<i>Músculo</i>	1 si lesión muscular diferente de esguince/torcedura; 0 el resto.	0,026	0,160
X <sub>30</sub>	<i>Abrasión</i>	1 si abrasión/quemaduras; 0 el resto.	0,064	0,245
X <sub>31</sub>	<i>Lesión interna</i>	1 si lesión interna (nervios, arterias, etc.); 0 el resto.	0,014	0,119

Cinco variables recogen información relativa a la gravedad de las lesiones. De éstas, tres hacen referencia al tiempo que ha necesitado la víctima para recuperarse de los daños sufridos, diferenciando entre días de recuperación en un hospital, días de recuperación incapacitado para realizar su trabajo habitual (pero fuera del hospital), y días de recuperación no incapacitado laboralmente. La cuarta variable nos indica la puntuación por secuelas permanentes que ha obtenido la víctima. Por último, una variable dicotómica nos señala si la víctima ha sufrido perjuicio estético. La gravedad de las lesiones permanentes se mide en una escala entre 0 y 100, a la que se le pueden añadir hasta 50 puntos adicionales si la víctima ha sufrido perjuicio estético (Ayuso y Santolino, 2007; Bermúdez *et al.*, 2009).

Finalmente, las cuatro variables restantes consideradas en la modelización son variables dicotómicas que recogen información relativa a la evolución de las lesiones. En concreto, hacen referencia a si la valoración realizada en el primer informe pericial de la compañía otorgaba una gravedad mayor en cuanto al tiempo de recuperación de las lesiones y la puntuación de las secuelas que la observada en el último informe pericial.

#### 4. RESULTADOS

Los resultados obtenidos en la estimación del modelo aparecen en las Tablas 2 y 3. En concreto, los resultados obtenidos para la función criterio aparecen en la Tabla 2, mientras que los obtenidos para las ecuaciones que recogen los logaritmos de las indemnizaciones satisfechas vía negociación y vía juicio aparecen en la Tabla 3, respectivamente. Los parámetros han sido estimados por máxima verosimilitud mediante el procedimiento QLIM implementado en SAS. Los regresores con coeficientes no significativos en las tres ecuaciones que conforman el modelo switching han sido excluidos del modelo, como es el caso del sexo de la víctima ( $x_1$ ) y el hecho de padecer una lesión superficial ( $x_{25}$ ).

En primer lugar cabe señalar que el contraste de ratio de verosimilitud mostrado en la Tabla 2 rechaza la hipótesis de independencia conjunta de las tres ecuaciones (LR test = 25.02 y  $p$ -valor = 0.000). Este resulta nos indica que existe endogeneidad en nuestros datos y, de este modo, justifica la aplicación de un modelo de regresión *switching* para la modelización del coste esperado de indemnización según el proceso de resolución seguido. Es decir, aquellos factores no observados que influyen en la selección del mecanismo de resolución del conflicto, también influyen en el monto de la indemnización que la víctima recibe y, por tanto, no se pueden modelizar los dos procesos como procesos independientes. En la Tabla 3 se muestra que los dos coeficientes de correlación muestran coeficientes significativos.

**Tabla 2**

Parámetros estimados y errores estándar de la función criterio de selección del mecanismo de resolución

Variable	Etiqueta	Coef.	Estim.	Error Est.
	Constante		-1,455	0.135 <sup>***</sup>
x <sub>2</sub>	Edad víctima	$\gamma_2$	0,647	0.432
x <sub>3</sub>	Edad víctima al cuadrado	$\gamma_3$	-0,820	0.493 <sup>*</sup>
x <sub>4</sub>	Edad conductor culpable	$\gamma_4$	-1,158	0.500 <sup>**</sup>
x <sub>5</sub>	Edad conductor culpable al cuadrado	$\gamma_5$	1,209	0.556 <sup>**</sup>
x <sub>7</sub>	Pasajero en vehículo no culpable(*)	$\gamma_7$	-0,087	0.036 <sup>**</sup>
x <sub>8</sub>	Pasajero en vehículo culpable(*)	$\gamma_8$	-0,447	0.051 <sup>***</sup>
x <sub>9</sub>	Peatón/Ciclista(*)	$\gamma_9$	-0,235	0.053 <sup>***</sup>
x <sub>11</sub>	Días de baja incapacitado	$\gamma_{11}$	1,032	0.218 <sup>***</sup>
x <sub>13</sub>	Puntos secuelas	$\gamma_{16}$	1,094	0.205 <sup>***</sup>
x <sub>14</sub>	Perjuicio estético	$\gamma_{17}$	-0,152	0.043 <sup>***</sup>
x <sub>15</sub>	Variación días en hospital	$\gamma_{13}$	0,321	0.053 <sup>***</sup>
x <sub>17</sub>	Variación días de baja no impeditivos	$\gamma_{15}$	-0,125	0.033 <sup>***</sup>
x <sub>19</sub>	Cabeza	$\gamma_{19}$	0,183	0.041 <sup>***</sup>
x <sub>20</sub>	Torso superior	$\gamma_{20}$	-0,121	0.035 <sup>***</sup>
x <sub>28</sub>	Esguince / torcedura	$\gamma_{28}$	-0,104	0.037 <sup>***</sup>
x <sub>29</sub>	Músculo	$\gamma_{29}$	-0,239	0.065 <sup>***</sup>

N = 24.938. H<sub>0</sub>:  $\rho_0 = \rho_1 = 0$ ; LR test = 25,02 (p-valor = 0,000).

(\*) Categoría base es el conductor, x<sub>6</sub>.

\*\*\* Nivel de significación del 1%; \*\* Nivel de significación del 5%; \* Nivel de significación del 10%.

En cuanto a los regresores que explican la elección del mecanismo de resolución, señalar que a mayor edad de la víctima menor probabilidad de que el siniestro se liquide por sentencia judicial. En cambio, a mayor edad del conductor más probable es ir a juicio. Otros resultados destacables son que el conductor del vehículo contrario es el que tiene mayor probabilidad de ir a juicio en comparación al resto de víctimas o que a mayor gravedad de las lesiones (días de baja incapacitado y puntuación por secuelas) más probable es que el siniestro se liquide por vía judicial. En cambio, cuando la compañía aseguradora reconoce que el accidente le generó un perjuicio estético a la víctima aumentan las opciones de llegar a un acuerdo amistoso entre las partes.

Cuando comparamos las dos ecuaciones de indemnización (Tabla 3), se observa que el número de coeficientes significativos es mucho mayor en la ecuación que modeliza la indemnización obtenida vía negociación. Entre otros resultados, destacar que la edad de la víctima se comporta de forma similar, siendo las víctimas con edades intermedias las que tienen asociado una mayor indemnización económica. En cuanto a la edad del conductor, ésta parece mostrar una mayor capacidad explicativa en la indemnización obtenida mediante resolución judicial.

**Tabla 3**  
Parámetros estimados y errores estándar de las ecuaciones de indemnización

Variable	Etiqueta	Indemnización negociada			Indemnización por vía judicial		
		Coef.	Estim.	Error Est.	Coef.	Estim.	Error Est.
	Constante	$\beta_{0,0}$	7,771	0,023***	$\beta_{1,0}$	9,054	0,190***
x <sub>2</sub>	Edad víctima	$\beta_{0,2}$	0,581	0,070***	$\beta_{1,2}$	0,805	0,487*
x <sub>3</sub>	Edad víctima al cuadrado	$\beta_{0,3}$	-0,704	0,079***	$\beta_{1,3}$	-0,958	0,562*
x <sub>4</sub>	Edad conductor culpable	$\beta_{0,4}$	0,137	0,086	$\beta_{1,4}$	1,063	0,539**
x <sub>5</sub>	Edad conductor culpable al cuadrado	$\beta_{0,5}$	-0,157	0,096'	$\beta_{1,5}$	-1,181	0,597**
x <sub>7</sub>	Pasajero en vehículo no culpable(*)	$\beta_{0,7}$	-0,014	0,006**	$\beta_{1,7}$	0,064	0,040
x <sub>8</sub>	Pasajero en vehículo culpable(*)	$\beta_{0,8}$	-0,021	0,007***	$\beta_{1,8}$	0,374	0,064***
x <sub>9</sub>	Peatón/Ciclista(*)	$\beta_{0,9}$	0,040	0,009***	$\beta_{1,9}$	0,135	0,063**
x <sub>10</sub>	Días en Hospital	$\beta_{0,10}$	1,334	0,299***	$\beta_{1,10}$	-0,284	0,962
x <sub>11</sub>	Días de baja incapacitado	$\beta_{0,11}$	5,610	0,044***	$\beta_{1,11}$	4,248	0,236***
x <sub>12</sub>	Días de baja no incapacitado	$\beta_{0,12}$	3,202	0,064***	$\beta_{1,12}$	2,426	0,343***
x <sub>13</sub>	Puntos secuelas	$\beta_{0,13}$	3,840	0,052***	$\beta_{1,13}$	3,686	0,253***
x <sub>14</sub>	Perjuicio estético	$\beta_{0,14}$	0,031	0,007***	$\beta_{1,14}$	0,202	0,049***
x <sub>15</sub>	Variación días en hospital	$\beta_{0,15}$	0,117	0,016***	$\beta_{1,15}$	-0,174	0,078**
x <sub>16</sub>	Variación días de baja impeditivos	$\beta_{0,16}$	-0,032	0,005***	$\beta_{1,16}$	0,038	0,032
x <sub>17</sub>	Variación días de baja no impeditivos	$\beta_{0,17}$	-0,036	0,005***	$\beta_{1,17}$	0,065	0,039'
x <sub>18</sub>	Variación puntos por secuelas	$\beta_{0,18}$	0,016	0,006***	$\beta_{1,18}$	0,027	0,035
x <sub>19</sub>	Cabeza	$\beta_{0,19}$	0,045	0,008***	$\beta_{1,19}$	-0,088	0,048'
x <sub>20</sub>	Torso superior	$\beta_{0,20}$	0,018	0,006***	$\beta_{1,20}$	0,101	0,041**
x <sub>21</sub>	Torso inferior	$\beta_{0,21}$	0,063	0,006***	$\beta_{1,21}$	0,068	0,038'
x <sub>22</sub>	Extremidades superiores	$\beta_{0,22}$	0,032	0,006***	$\beta_{1,22}$	0,003	0,034
x <sub>23</sub>	Extremidades inferiores	$\beta_{0,23}$	0,023	0,006***	$\beta_{1,23}$	0,035	0,037
x <sub>24</sub>	Regiones múltiples	$\beta_{0,24}$	-0,041	0,011***	$\beta_{1,24}$	-0,090	0,072
x <sub>26</sub>	Fractura	$\beta_{0,26}$	0,155	0,008***	$\beta_{1,26}$	0,057	0,043
x <sub>27</sub>	Inconsciencia	$\beta_{0,27}$	0,014	0,017	$\beta_{1,27}$	0,186	0,086**
x <sub>28</sub>	Esguince / torcedura	$\beta_{0,28}$	0,067	0,007***	$\beta_{1,28}$	0,101	0,041**
x <sub>29</sub>	Músculo	$\beta_{0,29}$	0,080	0,010***	$\beta_{1,29}$	0,177	0,078**
x <sub>30</sub>	Abrasión	$\beta_{0,30}$	-0,092	0,015***	$\beta_{1,30}$	0,018	0,098
x <sub>31</sub>	Lesión interna	$\beta_{0,31}$	0,069	0,021***	$\beta_{1,31}$	-0,181	0,120
		$\sigma_0$	0,363	0,002***	$\sigma_1$	0,716	0,048***
		$\rho_0$	-0,137	0,054**	$\rho_1$	0,826	0,035***

N = 24.938; Log-likelihood= -14.756; AIC= 29.671; Schwarz criterion= 30.313.

(\*) Categoría base es el conductor, x<sub>6</sub>.

\*\*\* Nivel de significación del 1% ; \*\* Nivel de significación del 5%; \* Nivel de significación del 10%.

Un resultado muy interesante lo obtenemos cuando analizamos la variable que recoge si la víctima era pasajero del vehículo culpable. En concreto, en la ecuación de negociación muestra un coeficiente con signo negativo y en la ecuación de juicio, en cambio, tiene signo positivo. Recordar que mostraba un signo negativo en la función criterio. Por tanto, en comparación al conductor del vehículo contrario, los ocupantes del vehículo responsable del accidente, tienen menos propensión de ir a juicio y en las resoluciones negociadas obtienen una menor indemnización. En cambio, si van a juicio, tienen asociada una indemnización más alta que el conductor no culpable por lesiones. Este resultado se debe enmarcar en el hecho que el ocupante habitualmente tendrá lazos afectivos (amigo, familiar, etc.) con el conductor culpable, por lo que es menos probable que lo denuncié judicialmente, aceptando una menor indemnización en la negociación.

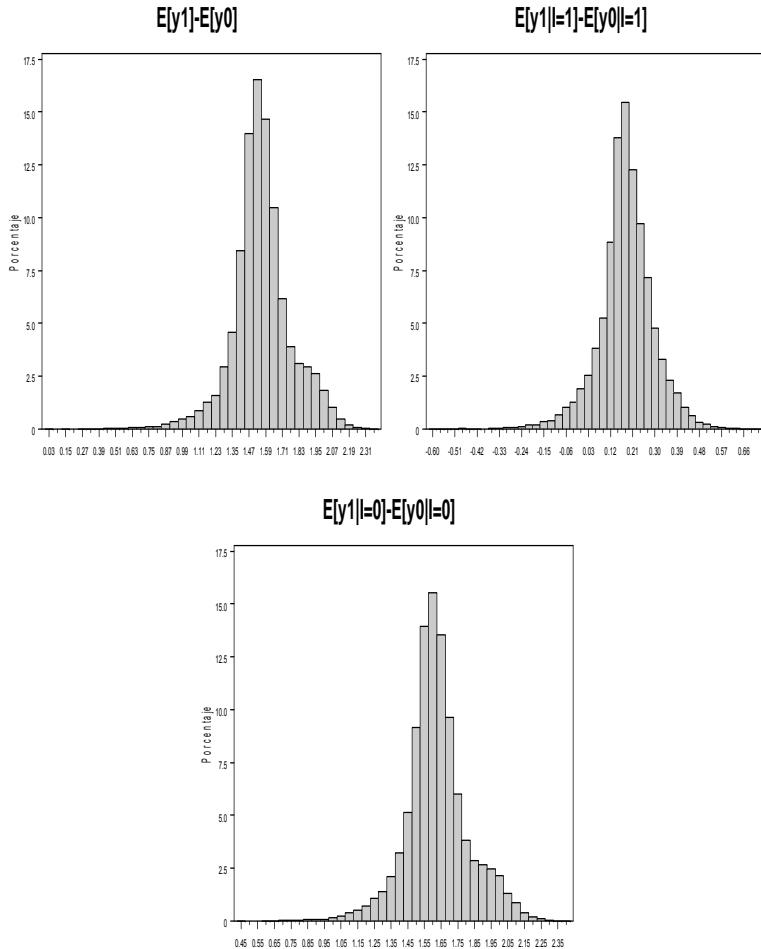
En relación al resto de resultados, como cabía esperar a mayor gravedad de las lesiones (tanto temporales como permanentes) mayor indemnización esperada en ambos procesos. Las variables que recogen la evolución de las lesiones muestran un comportamiento desigual, teniendo un mayor poder explicativo sobre la indemnización acordada amistosamente que sobre la otorgada por vía judicial.

Además, el efecto sobre la indemnización dependerá del tipo de daño considerado, como lo muestra el signo de los coeficientes. Así, aumenta la indemnización esperada cuando en el primer informe pericial se consideró un mayor número de días hospitalarios y puntuación por secuelas en comparación al último informe médico. En cambio, disminuye la indemnización en el caso que se considerará un mayor número de días improductivos y no improductivos en el primer informe. Finalmente, señalar que los factores que recogen la naturaleza y localización de la lesión afectan principalmente sobre la indemnización acordada entre las partes. Por el contrario, presentan una menor capacidad explicativa sobre la indemnización otorgada por vía judicial.

Para finalizar se muestran tres histogramas que comparan las indemnizaciones estimadas bajo uno y otro mecanismo de resolución (Figura 1). En el primer histograma se comparan las indemnizaciones estimadas considerando los individuos aleatoriamente (sin condicionar). En los dos siguientes histogramas se recogen las diferencias en las indemnizaciones estimadas condicionando a que los individuos eligieron uno u otro mecanismo de resolución. Como se observa, esta diferencia toma casi siempre valores positivos (excepto un pequeño porcentaje de casos en el segundo gráfico). Este resultado nos indica que, independientemente de las características observadas y no observadas de los siniestros, la indemnización esperada es (casi siempre) mayor si el siniestro es liquidado mediante sentencia judicial que mediante negociación.

**Figura 1**

Diferencia en la indemnización esperada (no condicionada y condicionada) en los dos mecanismos de resolución de conflictos



## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo demostramos que la elección del mecanismo de resolución del conflicto (negociación o juicio) no es independiente de la indemnización recibida por la víctima por las lesiones. Este resultado es de gran relevancia cuando se pretende tener en cuenta el proceso seguido para la liquidación del siniestro en la modelización del coste de indemnización de las víctimas. La existencia de endogeneidad supone que sean inadecuadas metodologías alternativas como, por ejemplo, modelizar la indemnización de la víctima mediante una regresión e incluir

el mecanismo de resolución seguido como una variable explicativa (y, por tanto, independiente). Del mismo modo, debido a la falta de aleatoriedad, la elección de la vía de resolución y la indemnización obtenida tampoco pueden considerarse como dos procesos independientes y modelizarse separadamente. En el trabajo mostramos que el modelo de regresión *switching* endógeno supera estas limitaciones presentándose como un método adecuado para modelizar conjuntamente ambos procesos.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece la ayuda recibida del Ministerio de Educación y Ciencia/FEDER (ECO2008-01223).

## BIBLIOGRAFÍA

Ayuso, M.; Santolino, M. (2007). "Predicting automobile claims bodily injury severity with sequential ordered logit models", *Insurance: Mathematics & Economics*, 41, 71-83.

Barell, V.; Aharonson, L.; Fingerhut, L.A; Mackenzie, E.J.; Ziv, A.; Boyko, V.; Abargel, A.; Avitzour, M.; Heruti, R. (2002). "An introduction to the Barell body region by nature of injury diagnosis matrix", *Injury Prevention*, 8, 91-96.

Bermúdez, L.; Ayuso, M.; Santolino, M. (2009). "Perspectivas y análisis económico de la futura reforma del sistema español de valoración del daño corporal". Madrid: FUNDACIÓN MAPFRE, *Cuadernos de la Fundación*, Nº 145.

Boucher, J.-P.; Santolino, M. (2010). "Discrete distributions when modelling the disability severity score of motor victims", *Accident Analysis and Prevention*, 42, 6, 2041-2049.

Doerpinghaus, H.; Schmit, J.; Yeh, J. (2008). "Age and gender effects on auto liability insurance payouts", *Journal of Risk and Insurance*, 75, 3, 527-550.

EU. (2009). "Compensation of victims of cross-border road traffic accidents in the EU: comparison of national practices, analysis of problems and evaluation of options for improving the position of cross-border victims", European Union.

Evans, L. (2001). "Female compared with male fatality risk from similar physical impacts" *The Journal of Trauma, Injury, Infection, and Critical Care*, 50, 281-288.

Kockelman, K.M.; Kweon, Y.-J. (2002). "Driver injury severity: an application of ordered probit models", *Accident Analysis and Prevention*, 34, 313-321.



Lee, L.F. (1976). *Estimation of Limited Dependent Variable Models by Two-Stage Methods*, PhD Dissertation, University of Rochester.

Maddala, G.S. (1983). *Limited-dependent and qualitative variables in econometrics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Newgard, C.D. (2008). "Defining the "older" crash victim: The relationship between age and serious injury in motor vehicle crashes", *Accident Analysis and Prevention*, 40, 4, 1498-1505.

O'Donnell, C.J.; Connor, D.H. (1996). "Predicting the severity of motor vehicle accident injuries using models of ordered multiple choice", *Accident Analysis and Prevention*, 28, 739-753.

Ordaz, J.A. (2011). "Aplicación de un modelo Heckit en el análisis de la siniestralidad y su coste directo en el seguro de automóviles". En: Ayuso, M. (ed.) *Métodos Cuantitativos en Economía del Seguro del Automóvil*, 15-34.

Rifaat, S.; Tay, R. (2009). Effects of street patterns on injury risks in two-vehicle crashes. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 2102, 61–67.

Rogers, W.V.H. (ed.). (2001). *Damages for non-pecuniary loss in a comparative perspective*, Springer, New York.

Tay, R.; Rifaat, S. (2007). "Factors contributing to the severity of intersection crashes", *Journal of Advanced Transportation*, 41, 245-265.

Valent, F.; Schiava, F.; Savonitto, C.; Gallo, T.; Brusaferrò, S.; Barbone, F. (2002). "Risk factors for fatal road traffic accidents in Udine, Italy", *Accident Analysis and Prevention*, 34, 71-84.

## Ponencia 11

### **INSURANCE REGULATION AND BUSINESS PROFILES: ORGANIZATIONAL FORM AND SOLVENCY RISK**

Irene Albarrán Lozano, Pablo Alonso González  
and David Camino Blasco

#### **ABSTRACT**

The purpose of this study is to examine empirically the solvency risk of Spanish insurance companies from the returns, assets and liabilities, reported in their balance sheets and how this risk might depend of their organizational form, size or business line. By focusing on the ratios and determinants of balance-sheet structure of different kinds of insurance companies -stock and mutual- the study could offer some important insights into the relationship between the organizational form of insurance companies and their financial structure, risk and profitability, which could be pursued further in future research.

This work therefore falls within the process of reform of the European solvency norms for insurers. After reviewing the basics of the reform and the current state of the legislation, we analyse whether it is appropriate to apply a general model to the entire insurance sector, or if it will be better to use a different approach, according with other characteristics such as legal nature, lines of business or their membership of financial conglomerates. For this purpose, we have used several statistical methods to evaluate the public financial information available for insurance companies, such as balance sheet items, income statements and solvency margins, to assess whether significant differences among insurance companies, in financial structure risk and return, do really exist and why.

We use financial statements as an approximation to the issue, as no public information is available on market prices of each and every item related to assets and liabilities of Spanish insurance companies, as required by Solvency II. Instead, we are going to use different ratios resulting from accounting data. The main hypothesis of this research is that Spanish institutions have different risk profiles, according with their institutional form and therefore we do not consider that applying the general model being developed by CEIOPS, to be the best approach. To test the hypothesis, multivariate techniques are going to be used in grouping and sorting with testing analysis.

The preliminary findings are that in order to limit their risk patterns, mutual would be expected to form in those lines of insurance where the scope of managerial

discretion is limited and stock companies in those lines where managerial discretion is more important.

## 1. INTRODUCTION

One of the main reasons to reform the European solvency system is to relate company's equity capital with market risk. However, in this paper we propose that the Solvency II methodology is not accurate enough, to evaluate the amount of resources needed, as it uses the same or similar rules for all insurance companies, whatever their investment profiles, portfolio choice or organizational form. In this way, it is important to recognize that probably no other industry has such a diverse set of corporate ownership structures as insurance. The industry, offers researchers a unique environment within which to examine specific types of organizational firm on business behavior as companies, usually, adopt one of two major types of ownership structure -the stock or the mutual form. Shareholders own stock companies, whereas mutual companies have no equity capital and are nominally owned by their customers, the policyholders (Cummins and Weiss, 1991).

Few researchers believed several years ago, that the organizational form was an important determinant of firm financial structure, risk and performance. In the last two decades, there has been nevertheless a considerable interest in the issue of why some financial firms separate the role of customer and residual claimant, while others do not (Doherty 1991, Fama and Jensen 1983, Hansmann 1985, La mm-Tennant and Starks 1993, Mayers and Smith 1981, 1986, 1988, 1992; O'Hara 1981, Smith and Stutzer 1990).

The costly contracting literature suggest, nevertheless, that business activity choices, such as the selection of investment and financing strategies, seek to optimize the efficiency of internal contracting between owners (stockholders), managers and customers (policyholders) in the firm, and the capital structure and investment strategies of stock and mutual insurers, therefore, might differ: Since mutual policyholders own both the debt and the equity of the mutual, increasing the value of the equity simply decreases the value of the policyholder stake, then, the mutual form is better suited to control the owner-policyholder incentive conflict (Smith and Stutzer, 1995). Differing abilities of stock and mutual to efficiently control these incentive conflicts have significant implications for the comparative advantage of the two ownership structures in various insurance activities. The nature of residual claimant of the equity holder payoffs gives stock companies a relatively preference for risky investments. As a result, stock companies might have a greater preference for riskier asset portfolios.

The purpose of this study will be to examine empirically the solvency risk of Spanish insurance companies from the assets and liabilities, reported in their balance sheets and how this risk might depend of their organizational form, size or business line. By focusing on the ratios and determinants of balance-sheet structure of dif-

ferent kinds of insurance companies -stock and mutual- the study could offer some important insights into the relationship between the organizational form of insurance companies and their financial structure, risk and profitability, which could be pursued further in future research.

Data on the proportionate and absolute values of balance sheet items of insurance companies were extracted from a data base of the 275 insurance companies, registered in Spain in 2008, including both, life and non-life, joint stock and mutual insurance companies.

## 2. THE SOLVENCY NORMS AND THEIR REFORM

The insurance business is based on risk-taking by companies in exchange for certain incomes (primes) from the agents who transferred them these risks. Like any business, chasing profitability is the reason of its existence. However, we must recognize that in addition to generating surpluses, insurers need to ensure compliance with its commitments. It is therefore absolutely necessary to have institutions strong enough to be able to face all possible contingencies that might arise from their activity. For this reason, it is essential to analyze a key aspect such as their solvency. Although profitability and financial stability could look like two very different and antagonistic qualities, it is essential to have the second one before getting the first. Therefore, the regulatory authorities have permanently sought to count with adequate indicators and standards that enable them to check the strength of the companies.

In the European Union the issue of solvency is not new. In fact, the first regulations on the subject date from 1973 y 1979<sup>1</sup>, which requires the creation of a capital cushion capable of absorbing the results of an expected change. Solvency rules were conceived as a common minimum requirements for the entire EU, leaving full freedom for Member Nations to establish more stringent criteria if they chose do to so. All regulation relative to Solvency was recently amended. It is what has been called Solvency I. The changes have focused on the following aspects:

- Publication of two directives, one for life and another for non-life, by amending the solvency margin requirements<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> For non-life insurance, First Council Directive 73/239/EEC of 24 July 1973 on the coordination of laws, regulations and administrative provisions relating to the taking-up and pursuit of the business of direct insurance other than life assurance. For life insurance, First Council Directive 79/267/EEC of 5 March 1979 on the coordination of laws, regulations and administrative provisions relating to the taking up and pursuit of the business of direct life assurance

<sup>2</sup> They are, Directive 2002/13/EC of the European Parliament and of the Council of 5 March 2002 amending Council Directive 73/239/EEC as regards the solvency margin requirements for non-life insurance undertakings, and Directive 2002/83/EC of the European Parliament and of the Council of 5 November 2002 concerning life assurance.

- Emergence of a directive regulating the insurance business within financial conglomerates, which is added to the 1998 directive on insurance groups<sup>3</sup>.
- Publication of the directive on reinsurance<sup>4</sup>.
- Directives that set requirements for the reorganization and bankruptcy of insurance<sup>5</sup>.

Since the beginning of this century, the European Commission has been working in the reform of the level of the fixing system of the capital in the insurance companies. The objectives pursued are:

1. Protection of policyholders.
2. Establishment of a more commensurate capital requirements with the risks incurred.
3. Establishment of principles, not rules.

This reform process did start in 2003, when the Commission prepared an explanatory<sup>6</sup> note on the design of the future system of calculating the solvency capital. The system is intended to apply to the insurance area the principles of Basel II in the banking field. Therefore, and as in such scheme, the system is built around three pillars. Other key aspects of Solvency II are:

1. Solvency margins structured around two main capital figures<sup>7</sup>:
  - a) One, that we could call economic capital, which would be the amount associated with the risk-bearing. This is what is called the Solvency Capital Requirement, SCR.
  - b) Another one, that we could call legal capital, which would be the minimum required amount. It is what is called the Minimum Capital Requirement, MCR.

---

<sup>3</sup> Directive 98/78/EC of the European Parliament and of the Council of 27 October 1998 on the supplementary supervision of insurance undertakings in an insurance group.

<sup>4</sup> Directive 2005/68/EC of the European Parliament and of the Council of 16 November 2005 on reinsurance and amending Council Directives 73/239/EEC, 92/49/EEC as well as Directives 98/78/EC and 2002/83/EC.

<sup>5</sup> Directive 2001/24/EC of the European Parliament and of the Council of 4 April 2001 on the reorganisation and winding up of credit institutions.

<sup>6</sup> European Commission, Directive on the Internal Market (2003): "Concepción de un futuro sistema de control cautelar en la UE. Recomendaciones de los servicios de la Comisión". MARKT/2509/03. Brussels, March 3, 2003.

<sup>7</sup> Swiss Re (2006): *Solvency II: an integrated risk approach for European insurers*. Sigma nº 4/2006.

2. Incorporation of international developments to promote a major convergence with organizations as such as the IAIS, IAA and the IASB<sup>8</sup>, related to the establishment of relative procedure such as the level of the suitable capital.

The backbone of the new system is in the change of criterion at the moment of calculating the quantity of the capital of solvency, because its role changes from establishing the solvency capital as a function of the risk of subscription - primes - to making it depend on the level of risk supported in all and each one of the spheres in which the insurance activity takes turn.

Ideally, the solvency capital requirement should be:

- a) to reduce the risk that an insurer is unable to meet payment of claims;
- b) to reduce the losses suffered by policyholders in the event that the company goes bankrupt;
- c) to provide regulators an alert system that would allow them to intervene if the capital was below certain levels;
- d) to promote confidence in the stability of the insurance industry.

This process of change has finished with the pass of Directive 2009/138/CE (Solvency II Directive). The whole scheme will be completed in the future with the design of a mechanism for measuring the solvency of the undertakings. This tool it is foreseen will be able to assess the level of resources in each company, according to the amount risk undertaken. In order to achieve this target, CEIOPS has implemented four empirical studies, called QIS (Quantitative Impact Studies) and we expect a fifth one by 2010. The use of this analytical tool provides a huge advantage: easiness of use. Whatever the company or its risk policy, in order to meet its level of capital required according to the risks the company have assumed, it will be enough to simply apply the general model. However, it has one big drawback: because the model is calibrated from data proceeding from the sector as a whole, it will adequately represent the average behaviour of the industry and if the risk policy set up a profile different than the industry average, the model will calculate an overall amount of capital that have little or mostly nothing to do with the reality of that company.

In short, it seems clear that if from the sector analysis we could deduce that there are different realities within it, then it could be affirmed that the use of a general model for assessing the company's solvency would not give the desired results with the new regulations and that, in short, it would be much better the creation of internal modelling that captured the individuality of each company.

---

<sup>8</sup> These are the acronyms of the *International Association of Insurance Supervisors*, *International Actuarial Association* and the *International Accounting Standard Board*.

### 3. TARGET AND DATA FOR THE ANALYSIS

As noted, the overall accuracy of the model would be further strengthened by the existence of behaviours not too different amongst other insurance companies. This work focuses in the area of Spanish insurers during 2008 —most recent information available by February 2010— and such work seeks to find out whether these companies present the same risk profile, in which affirmative case it would be proven to be correct the use of the global modelling.

It is true that for the Solvency II calculations the whole balance is valued at market prices, both profit and loss. But to do it this way it would be needed not only to know the kind of investment each company has made and who are its policyholders but also aspects such as duration and profitability of their investments, or the probability distribution of claims, associated costs and the expected time for settlement among others. Definitely, it would be necessary project towards the future the predictable cash flows, and proceed to update them later.

However, publicly information available does not provide such data but only accounting-P&L issues, technical and non-technical accounts, solvency margin and coverage of technical reserves. Therefore, we have proceeded to analyze the behaviour of firms and their risk position based on ratios. As noted above, for the analysis we used the most recent public information supplied by the Directorate General of Insurance and Pension Funds, an agency under the Ministry of Finance, concerning all operating entities in Spain in 2008. They were 296 insurers. However, we have only analyzed information from entities that have complete information on all the selected ratios, reducing the sample to 275 entities. The number of companies classified according to their legal form is shown in Table 1

**Table 1**  
Number of insurance companies according to their institutional form, 2008

<b>Organizational form</b>	<b>Number of companies</b>	<b>Percentage</b>
Joint Stock Companies (SA)		
Direct insurance	192	69.9
Foreign Branches	2	0.7
Total	194	70.6
Mutual		
Fix premium mutual	33	12.0
Social welfare entities (EPS)	46	16.7
Total	79	28.7
Reinsurers 2		0.7
<i>Total</i>	<i>275</i>	<i>100.0</i>

Source: DGSFP

The ratios that were used are related to the assets, liabilities and income. Specifically, the variables listed and the names with which they will appear in the analysis are shown in Table 2:

**Table 2**  
**Ratios**

Block	Ratio	Numerator	Denominator
Assets	R1	Return on financial investment	Financial Assets
	R2	Total return before taxes (ROA)	Total assets
	R3	Total investments	Total assets
Liabilities & Solvency	R4	Technical provisions	Total liabilities
	R5	Capital and reserves	Total liabilities
	R6	Total assets	Total debt
Insurance P&L acc.	R7	Total gross indemnities (TGI)	Premium (Gross)
	R8	TGI + Gross expenses	Premium (Gross)
	R9	Net return (life/ non life)	Premium (Gross)
	R10	Net return in Direct Insurance (DI)	Premium (Gross) in DI
Financial income	R11	Total return after taxes (ROE)	Equity
	R12	Premium (Gross)	Total Revenues (Gross)

Source: Own elaboration.

Some of these ratios are general to any company (for example, R2 is ROA or R11 is ROE), while others are specific to the insurance business, such as R8 (combined ratio). In addition to the selected ratios, there are considered indicative of the size variables such as the volume of total assets and number of employees.

#### 4. METHODOLOGY AND RESULTS

The study has two distinct parts. In the first, the main objective is to investigate into the underlying relationships between the ratios to try to identify a set of variables that explicitly allows different behaviours between parsed entities. To do this, we used factor analysis from which we have reached a number of significant axes that would explain much of the variability of the sample. From these resulting axes or factors we started to proceed with the second phase. In it, the initial ratios have been replaced by those factors achieving a reduction of dimension. With these data we have classified the sample into statistically homogeneous groups by cluster analysis.

The first phase of factor analysis is the confirmation of the existence of interrelationships between the ratios used. In fact, the matrix of correlations among them



has plenty of such relationships, most of them being statistically significant. Both the determinant of this matrix ( $8.33 \cdot 10^{-7}$ ) and the KMO statistic (0.734) have values that suggest the opportunity to use a factor analysis. The values of the matrix above that exceed the unit are four, obtaining, with all of them, explanation for the 82% of the total variance, as stated in Table 3.

**Table 3**  
Total Variance explained

Components	Total Variance explained		
	Total	% of Variance	Cumulated %
1	4.646 38.71	7	38.717
2	2.347 19.55	6	58.273
3	1.525 12.70	9	70.983
4	1.252	10.435	81.418

Source: own elaboration

Because the obtained array of components did not make clear the saturation of the ratios by the factors, we decided to proceed to its rotation by using the method Varimax, obtaining the matrix of rotated components set out in Table 4:

**Table 4**  
Matrix of rotated components

	1	2	3	4
R1	-0.089	0.325 0.329	0.393	
R2	0.400	0.853	-0.127	-0.193
R3	-0.087	0.073 0.016	0.802	
R4	-0.907	-0.034	0.115	0.223
R5	0.974	0.072	-0.113	-0.116
R6	0.974	0.073	-0.113	-0.116
R7	-0.135	-0.092	0.883	0.089
R8	-0.089	-0.200 0.892	-0.041	
R9	0.476	0.538	-0.408	-0.365
R10	0.226	0.806 -0.108	0.351	
R11	-0.312 0.891	-0.069	-0.105	
R12	0.321	0.169	-0.097	-0.769

Source: own elaboration

It is important to notice that the factor 1 produces the saturation of ratios 4, 5 and 6, which are those concerning the financial structure and solvency of companies. On the other side, factor 2 produces saturation on ratios 2, 9, 10 and 11 which are those associated with measures of overall performance. Factor 3 saturated ratios 7 and 8 which are those related to technical results. Finally, factor 4 saturates the remaining ratios, i.e., 1, 3 and 12, which are those reflecting the incidence of financial activity. Consequently, the information related to the ratios can be replaced by these new four variables which are not observed, but are latent in the analyzed structure and formed from the interactions among them. With them, we make the second part of the study, which is the use of cluster analysis to obtain groups split statistically differentiated. We would like to stress that the factors obtained are normalized variables.

Using the new variables, we have made two types of cluster methods: hierarchical analysis techniques and, once selected the number of possible groups to take into consideration, techniques of non-hierarchical (or k means) analysis. For the hierarchical method it was used as a measure of distance the Euclidean squared:

$$d_{ij}^2 = \sum_{k=1}^p (X_{ik} - X_{jk})^2$$

Where:  $d_{ij}^2$  represents the distance between company  $i$  and  $j$ ,

$X_{ik}$  is the value of variable  $X_k$  to  $i$  company,

$X_{jk}$  is the value of variable  $X_k$  to  $j$  company.

After testing with different methods of possible grouping (nearest and farther neighbour, relationship between-groups and intra-group, medium and method of Ward grouping), the clustering method chosen was the Ward method, who hierarchically groups elements to minimize a given objective function, which in this case is the internal variation of the group obtained. Once analyzed and taking it as a starting point, several tests were conducted based on the same technique with non-hierarchical clustering using algorithm average k for a number of groups going from 4 to 13. The choice of the number of groups was made using a  $F$  test to obtain a variability reduction by comparing the sum of squares within each group with (SCDG) with  $G$  groups with the existing one if there were  $G+1$  groups. The expression of the test is:

$$F = \frac{SCDG(G) - SCDG(G+1)}{SCDG(G+1)/(n-G-1)}$$

being  $SCDG(G) = \sum_{g=1}^G \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_g} (x_{ijg} - \bar{x}_{jg})^2$ ,  $g$  makes reference to the group,  $j$  refer to the variable—in our case  $j$  goes from 1 to 4—and  $i$  makes reference to element  $i$  with-

in each group. We have followed Hartigan's rule (1975)<sup>9</sup> according to which, another Group has to be introduced if  $F$  is bigger than 10. The test results can be found in Table 5.

**Table 5**  
Number of groups selected

	<b>K- average algorithm groups (G)</b>										
	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	
<b>Factor 1</b>	0.481	0.374	0.425	0.313	0.301	0.370	0.285	<b>0.219</b>	0.250	0.230	
<b>Factor 2</b>	0.486	0.508	0.420	0.446	0.385	0.345	0.300	<b>0.300</b>	0.326	0.320	
<b>Factor 3</b>	0.545	0.496	0.394	0.361	0.339	0.288	0.299	<b>0.273</b>	0.264	0.274	
<b>Factor 4</b>	0.781	0.445	0.444	0.450	0.429	0.401	0.363	<b>0.369</b>	0.298	0.289	
<b>TOTAL</b>	2.293	1.823	1.684	1.571	1.454	1.404	1.248	<b>1.161</b>	1.137	1.114	
<b>n - G - 1</b>	271	270	269	268	267	266	265	<b>264</b>	263	262	
<b>F</b>	70.82	8	23.288	20.367	22.519	10.512	34.249	<b>20.854</b>	6.618	6.472	
<b>SELECTED</b>		NO	NO	NO	NO	NO	NO		<b>YES</b>	NO	NO

Source: Own elaboration.

Therefore the number of selected groups is 11.

After obtaining and selecting the number of groups or risk profiles, ANOVA analysis is used to study the significant differences between all the variables that have been involved in its formation. For this, the null hypothesis of equality was contrasted among all averages of each of the groups, as follows:

$$H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_{11} = \bar{x}$$

$$H_1: \exists \bar{x}_i / \bar{x}_i \neq \bar{x} \quad i=1,2,\dots,11$$

As can be seen in Table 6, all the variables for the formation of groups turn out to be statistically significant to 5 %, which means the existence of groups that reflect different situations

<sup>9</sup> Hartigan, J.A. (1975): *Clustering Algorithms*. New York. Wiley.

**Table 6**  
ANOVA

	Group		Error		F	Sig.
	Quadratic mean	gl	Quadratic mean	gl		
Factor 1	21.629	10	.219 264		98.933	.000
Factor 2	19.470	10	.300 264		64.814	.000
Factor 3	20.191	10	.273 264		73.939	.000
Factor 4	17.655	10	.369 264		47.832	.000

gl = freedom degrees and Sig. =  $p$ -value  
Source: Own elaboration.

The number of entities for every group as well as the branches of activity in which it operates and his association form are gathered in Table 7:

**Table 7**  
Number of companies in each group, business line and institutional form

	Non life	Life	Both	J.S. Co	Mutual	EPS	Total
Group 1	20 0		2	16 4		2	0
Group 2	18 1		5	18 2		4	0
Group 3	1 15		9	12 1 12		0	
Group 4	4 16		14	27 2		5	0
Group 5	18 4		12	31 3		0	0
Group 6	15 1		4	12 5		3	0
Group 7	28 0		6	25 6		1	2
Group 8	2 15		8	14 3		8	0
Group 9	22 1		1	22 2		0	0
Group 10	10	3	1	9 2 3 0			
Group 11	10	5	4	8 3 8 0			
<b>Total</b>	<b>148</b>	<b>61</b>	<b>66</b>	<b>194</b>	<b>33</b>	<b>46</b>	<b>2</b>

Source: Authors.

**Table 8**  
Group characteristics

	<b>Factor 1: Solvency</b>	<b>Factor 2: Loss ratio</b>	<b>Factor 3: Financial Activity</b>	<b>Factor 4: Performance</b>
<b>Group 1</b>	High Low	Low	High	Low
<b>Group 2</b>	Neutral Very low	Very low	Low	Low
<b>Group 3</b>	Very low	Low	Very low	High
<b>Group 4</b>	Low High	High	Very high	High
<b>Group 5</b>	Low High	Low	Low	Neutral
<b>Group 6</b>	Very high	High	High	High
<b>Group 7</b>	Neutral Neutral	Low	Neutral	Very low
<b>Group 8</b>	Low Low	Low	High	High
<b>Group 9</b>	High High	Low	Neutral	Low
<b>Group 10</b>	Very high	Very low	High	High
<b>Group 11</b>	Very high	Neutral	Very low	Very high

Source: Own elaboration.

Provided that the factors are normalized, the characteristics of each one from the groups it is possible to classify them in table 8, where they have categorized depending on the average value of the factor in each of the groups (if the average is lower than -1, he is catalogued like "Very low", if it is between -1 and -0,5, "Low", if it is between -0,5 and 0,5 is labelled like "Neutral", if it is between 0,5 and 1, as "High", and from 1 as "Very high").

In short, the analysis shows that, considering the variables included in the analysis, different risk profiles do exist among the analyzed insurance companies.

## 5. CONCLUSIONS AND FINAL REMARKS

Taking in consideration data in the 11 groups, it is not possible to conclude that all of them should have an equal risk profile. In this way, there is a predominance of the life business in Groups 3, 4 and 8. All of them have the common characteristic of high financial activity. Not surprisingly, among these groups are the subsidiaries of the big financial groups. There is a predominance of non-life business in the remaining groups. They present heterogeneous characteristics, though they take as a common denominator the scanty importance of financial activity, except in group 5.

In general terms, the worst averages among insurance companies appear in Group 2 and 3, whereas the best results are obtained in Group 6, in which the business that predominates of non-life, especially civil responsibility, fire, deceases and

transport insurance. A good behaviour, though worse than that of the previous group is given in Groups 4 and 10 formed by companies that are mainly in medical assistance.

In short, the information provided seems to show a heterogeneous reality in the insurance Spanish sector, it does not seem to be suitable trying to apply the same model of risk measurement for all of them. It is necessary to remember that the aim behind Solvency II, is trying to obtain the capital level that all and every company should have vis-à-vis risk. This aim seems difficult to attain if the different organizational forms and business lines, are ignored and we apply a single standard model, which tries to measure different realities with the same rule.

## REFERENCES

Adams, M. (1995). "Balance Sheet Structure and the Managerial-Discretion Hypothesis: An Exploratory Empirical Study of New Zealand Life Insurance Companies"; *Accounting and Finance* (May). 21-45.

Comisión Europea, DG Mercado Interior (2003). "Concepción de un futuro sistema de control cautelar en la UE". *Recomendaciones de los servicios de la Comisión. MARKT/2509/03*. Bruselas, 3 de marzo de 2003.

CEA (2005). Solvency Assessment Models Compared, essential groundwork for the Solvency II.

CEIOPS (2006). CfA 23. 42. Summary of comments on CEIOPS-CP-06/05 Draft Answers to the European Commission on the third wave of Calls for Advice in the framework of the Solvency II project. CEIOPS-SEC-20/06. 8 May 2006.

CEIOPS (2006): Consultation Paper 20. Draft Advice to the European Commission in the Framework of the Solvency II project on Pillar I issues – further advice.

CEIOPS-CP-09/06. 10 November 2006.

CEIOPS (2006). Quantitative Impact Study 2. Technical Specifications.

CEIOPS (2007). Quantitative Impact Study 3. Technical Specifications.

CEIOPS (2008). Quantitative Impact Study 4. Technical Specifications.

Cummins, J.D. and Weiss, M.A., (1991). "The Structure, Conduct, and Regulation of the property-liability Insurance Industry". *Paper presented at the Federal Bank of Boston Conference on Insurance*.

Datta, P. and Doherty, N.A. (1990). The Effects of Organizational Form on Capital Structure: The Case of Stock and Mutual Property-Liability Insurance Firms; in H.

Lonberger (e d.), *Risk, Information and Insurance*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, Mass.

DGSFP (2009). Seguros y Fondos de Pensiones. *Informe 2008*. Ministerio de Economía y Hacienda.

Dhaliwal, D.S. Salomon, G.L. and Smith, E.D. (1982). "The Effects of Owner versus Management Control on the Choice of Accounting Methods"; *Journal of Accounting and Economics*; 40 (January). 41-53.

Doherty, N.A. and Dionne, G. (1993). "Insurance with Undiversifiable Risk: Contract Structure and Organizational Form of Insurance Firms"; *Journal of Risk and Uncertainty*, 6. 187-203.

Directive 98/78/EC of the European Parliament and of the Council of 27 October 1998 on the supplementary supervision of insurance undertakings in an insurance group.

Directive 2001/24/EC of the European Parliament and of the Council of 4 April 2001 on the reorganization and winding up of credit institutions.

Directive 2002/13/EC of the European Parliament and of the Council of 5 March 2002 amending Council Directive 73/239/EEC as regards the solvency margin requirements for non-life insurance undertakings.

Directive 2002/83/EC of the European Parliament and of the Council of 5 November 2002 concerning life assurance.

Directive 2005/68/EC of the European Parliament and of the Council of 16 November 2005 on reinsurance and amending Council Directives 73/239/EEC, 92/49/EEC as well as Directives 98/78/EC and 2002/83/EC.

Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II).

Doherty, N. A. and Dionne, G. (1993). "Insurance with Undiversifiable Risk: Contract Structure and Organizational Form of Insurance Firms"; *Journal of Risk and Uncertainty*, 6. 187-203.

First Council Directive 73/239/EEC of 24 July 1973 on the coordination of laws, regulations and administrative provisions relating to the taking-up and pursuit of the business of direct insurance other than life assurance.

First Council Directive 79/267/EEC of 5 March 1979 on the coordination of laws, regulations and administrative provisions relating to the taking up and pursuit of the business of direct life assurance.

Hartigan, J.A. (1975). *Clustering Algorithms*. New York. Wiley.

Lamm-Tennant, J. and Starks, L.T. (1993). "Stock versus Mutual Ownership Structures: The Risk Implications"; *Journal of Business*; 66 (1). 29-46.

Lee, S.-J.; Mayers, D. and Smith, C.W., Jr. (1997). "Guaranty funds and risk-taking Evidence from the insurance industry"; *Journal of Financial Economics*; 44. 3-24.

Ligon, J.A. and Thistle, P.D. (1996). *Consumer Heterogeneity, Default Risk and the Organizational Form of Insurance Companies*; unpublished manuscript prepared for presentation at the 1996 of the American Risk and Insurance Association (ARIA).

Mayers, D. and Smith, C.W. (1981). "Contractual Provisions, Organizational Structure and Conflict Control in Insurance Markets". *Journal of Business*, 54 (July). 400-434.

Mayers, D. and Smith, C.W. (1982). *Towards a Positive Theory of Insurance*; Monograph Series in Economics and Finance, Solomon Brothers Center for the Study Financial Institutions, Graduate School of Business, New York University Press, New York.

Mayers, D. and Smith, C. W. Jr. (1986). "Ownership Structure and Control"; *Journal of Financial Economics*; 16. 73-98.

Mayers, D. and Smith, C. W., Jr. (1990). "On the Corporate Demand for Insurance: Evidence from the Reinsurance Market". *Journal of Business*; 63 (1). 19-39.

Mayers, D. and Smith, C. W., Jr. (1992). "Executive Compensation in the Life Insurance Industry". *Journal of Business*; 65 (1). 51-74.

Mayers, D.; Shivdasani, A. and Smith, C.W., Jr. (1997). "Board Composition and Corporate Control: Evidence from the Insurance Industry"; *Journal of Business*; 70 (1). 33-61.

Smith, B.D. and Stutzer, M. (1995). "A Theory of Mutual Formation and Moral Hazard with Evidence from the History of the Insurance Industry". *The Review of Financial Studies*; 8(2). 545-577.

Swiss Re (2006). Solvency II: An integrated risk approach for European insurers. Sigma n° 4/2006.



## Ponencia 12

### SELECTION OF RISK FACTORS IN AUTOMOBILE INSURANCE BY DECISION LISTS

Zuleyka Díaz Martínez, Eva María del Pozo García  
and María Jesús Segovia Vargas

#### ABSTRACT

This paper tries to further investigate the factors behind the decision of an insurance company to classify automobile policies into tariff classes. By using a large sample of automobile policyholders for 2005 and applying an Artificial Intelligence method (decision list induction), it is intended to analyze the role of a set of variables in order to select the most explicative ones to design the tariff classes. It is also carried out a comparative study of the performance of this technique and the Rough Set methodology. Results obtained are quite good, showing the suitability of the method

**Key Words:** artificial intelligence, decision lists, rough sets, risk factors, automobile insurance.

#### 1. INTRODUCTION

It is well known that insurance companies aim to classify the insured policies into homogeneous tariff classes, assigning the same premium to all the policies belonging to the same class. The classification of the policies into the classes is based in the selection of the so-called *risk factors*, which are characteristics or features of the policies that help the companies to predict their claim amounts in a given period of time (usually one year). In automobile insurance, these are observable variables concerning the driver, the vehicle and the traffic, like age, driving license date, kind of vehicle, circulation zone, etc., that are correlated with the claim rates, and therefore can be useful in order to predict the future claims.

It is obviously very important for the insurance company to select an adequate set of risk factors in order to correctly predict the future claim rates and to charge fair premiums to the drivers. The usual approach to select the risk factors is based in statistical multivariate techniques, with mediocre results. Although they are widely

used, the usual statistical techniques still leave a great deal of heterogeneity within the tariff classes, so more research should still be done in order to improve this important issue of premium calculation. There is a lot of scientific literature dealing with the subject of the risk classification of policyholders [4].

One of the aims of this paper is involved with this issue of improving the selection of risk factors in automobile insurance. During the last years, there have been just a few researches related to alternative procedures for risk factor selection based on a different kind of techniques coming from the Artificial Intelligence field (Neural Networks, Genetic Algorithms, Support Vector Machines (SVM), etc.) [2]. These techniques have been successfully employed for solving problems in many other different fields, mainly in engineering but also in economics and business. In fact, these techniques have been previously employed for the prediction of insolvency in insurance sector [11,12,14]. The encouraging results obtained show that the application of these artificial intelligence methods can actually improve the accuracy of the claim predictions. However, the black-box character of these methods makes them difficult to interpret, and hence the obtained results cannot be clearly analysed and related to the variables for discussion.

We think that other techniques framed in the Machine Learning —the Artificial Intelligence area that develops algorithms which are able "to learn" a model from a set of examples— such as the ones tested in this paper (decision list induction and Rough Set theory) are more useful for analysis, because the models they provide can be easily understood and interpreted by human analysts. In prior research these techniques have been successfully applied to the problem of the prediction of insolvency in insurance sector [5,13], and the goal of this paper is to prove their suitability in the problem of selection of risk factors in automobile insurance.

These methods have mainly five positive features. First, they are useful to analyse information systems representing knowledge gained by experience; second, we can use qualitative and quantitative variables and it is not necessary that the variables employed satisfy any assumption as those required by the statistical techniques; third, through this analysis the elimination of the redundant variables is got, so we can focus on minimal subsets of variables to evaluate the policyholders and, therefore, the cost of the decision making process and time employed by the decision maker are reduced; fourth, the analysis process results in a model consisted of a set of easily understandable decision rules so usually it is not necessary the interpretation of an expert and finally, fifth, these rules are based on the experience and they are well supported by a set of real examples so this allows the argumentation of the decisions we make.

The rest of the paper is structured as follows: Section 2 describes the data and input variables. In section 3 we explain the main concepts of the proposed technique. Section 4 presents the obtained results and the comparison with the Rough Set methodology and, finally, section 5 closes the paper with some concluding remarks.

## 2. SELECTION OF DATA AND VARIABLES

As for the *data*, we have used a real sample of 9673 Spanish automobile policies. All data are from 2005. The *risk factors* (variables) employed by the company are 14 and they are both qualitative and quantitative variables. The variables are:

**Table 1**  
Variables definition

Variable	Program output codification	Definition
Kind of vehicle	tipo	This variable takes six values such as car, van, all-terrain vehicle, etc.
Use	uso	Use to which the vehicle is devoted. It takes twenty values: particular, taxi, renting, agrarian use, etc.
HP	cv	Power.
Private	privado	We consider if it is a private or public vehicle.
Tare	tara	Tare.
Seats	plazas	Number of seats of the vehicle.
Ambit	ambit	Circulation area of the vehicle. This variable takes seven values: international, national, interurban, urban, etc.
Years of the vehicle	antvehi	The age of the vehicle.
Drivers age	edad	The age of the driver.
Driving license	carnet	Number of years of the driving license.
Sex	sexo	Male or female.
Region	provin	Autonomous regions and some big Spanish cities such as Valencia, Barcelona and Seville. It takes twenty values.
Diesel	diesel	Diesel or gasoline.
Bonus-malus	B.xxx	Bonus levels assigned to the drivers that have not had an accident.

## 3. DECISION LIST INDUCTION: PART ALGORITHM

As we have previously mentioned, Machine Learning algorithms are a set of techniques that automatically build models describing the structure at the heart of a set of data, that is, they induce a model or output from a given set of observations or input. Such models have two important applications. First, if they accurately represent the structure underlying the data, they can be used to predict properties of

future data points. Second, if they summarize the essential information in human-readable form, people can use them to analyze the domain from which the data originates [6].

These two applications are not mutually exclusive. To be useful for analysis, a model must be an accurate representation of the domain, and that makes it useful for prediction as well. However, the reverse is not necessarily true: some models are designed exclusively for prediction and do not lend themselves naturally to analysis, as it happens in the case of the popular Artificial Neural Networks or the more recent Support Vector Machines. In many applications this “black box” approach is a serious drawback because users cannot determine how a prediction is derived and match this information with their knowledge of the domain.

Two of the most fruitful and widely used approaches in Machine Learning are the Decision Trees and the Classification Rules, that in spite of their differences of formal character keep a narrow relationship that makes they can be considered as different variants of a common methodology. Decision trees and rules are potentially powerful predictors that embody an explicit representation of all the knowledge that has been induced from the dataset. Moreover, compared to other sophisticated models, they can be generated very quickly. Given a decision tree or a set of rules, a user can determine manually how a particular prediction is derived, and which attributes are relevant in the derivation. This makes them extremely useful tools when both prediction and explanation are important.

In this paper we will use in fact one of these techniques, a learning algorithm for decision lists called PART, which is based on the well-known C4.5 decision tree learner.

Decision trees are a way of representing the underlying regularity in the data like a set of exhaustive and mutually exclusive conditions which are organized in an arborescent hierarchical structure which is composed by internal and external nodes connected by branches. An internal node contains a test, it is a unit which evaluates a decision function to determine which node will be visited next. In contrast, an external node, which is frequently called leaf or terminal node, doesn't have any son and it is associated with a label or a value which characterizes to the data that are propagated to it.

In general, a decision tree is used in the following way: to derive a prediction, an instance is filtered down the tree, starting from the root node, until it reaches a leaf—in this paper, an instance will be a country described by a set of macroeconomic and financial variables—. At each node one of the instance's attributes is tested, and the instance is propagated to the branch that corresponds to the outcome of the test. The prediction is the class label that is attached to the leaf.

As for the way of generating a tree, standard learning algorithms for decision trees generate a tree structure by splitting the training data into smaller and smaller subsets in a recursive top-down fashion. Starting with all the training data at the root

node, at each node they choose a split and divide the training data into subsets accordingly. They proceeded recursively by partitioning each of the subsets further. Splitting continues until all subsets are “pure”, or until their purity cannot be increased any further. A subset is pure if it contains instances of only one class. The aim is to achieve this using as few splits as possible so that the resulting decision tree is small and the number of instances supporting each subset is large. To this end, various split selection criteria have been designed, and at each node, the learning algorithm selects the split that corresponds to the best value for the splitting criterion.

Some of the most outstanding split selection criteria are the Gini index, which is employed in the CART system —Classification and Regression Trees [3]—, and the “information gain” or the “gain ratio”, which are used by C4.5. They all provide ways of measuring the purity of a split. C4.5 is the decision tree program most popular and widely used in practice to date [10]. To carry out the partitions, C4.5 is based on the entropy of a random variable (which is a measure of the randomness or uncertainty of the variable) and the mutual information between different variables (which indicates the reduction in the uncertainty of one of the variables that is produced when the value of the other one or the other ones is known). C4.5 works with both continuous and discrete attributes and incorporates several additional features that turn it into a very powerful and flexible technique, such as, for example, its method for handling with missing values. Very briefly, such a method is the following one: once a splitting attribute has been chosen, training cases with unknown values of this attribute cannot be associated with a particular outcome of the test, so a weighting scheme is used to allow recursive application of the decision tree formation procedure on each of the daughter nodes. Instances for which the relevant attribute value is missing are notionally split into pieces, one piece for each branch, in the same proportion as the known instances go down the various branches, so the number of cases that are propagated to the nodes and leaves of the tree could be a fractional value. A similar approach is taken when the decision tree is used to classify a new case. If a decision node is encountered at which the relevant attribute value is unknown, so that the outcome of the test cannot be determined, the system explores all possible outcomes and combines the resulting classifications arithmetically. Since there can now be multiple paths from the root of a tree or subtree to the leaves, a “classification” is a class distribution rather than a single class. When the total class distribution for the case has been established in this way, the class with the highest probability is assigned as the predicted class.

A common problem for most of machine learning techniques is that models they generate can be quite adapted to the training dataset. Consequently, the model developed will be very specific and if we want to classify new objects, the model will not provide good results, especially if the training set has noise. In this last case, the model would be influenced by errors (noise) which would lead to a lack of generalization. This problem is known as *overfitting*.

The usual way of limiting this problem in the context of decision trees and sets of rules consists of deleting some conditions of the tree branches or of the rules. In the case of decision trees, this procedure can be considered as a *pruning* process.

C4.5 incorporates a *post-pruning* method for an original fitted tree. It consists of simplifying the tree by discarding one subtree (or more) and replacing it with a leaf or with its most frequently used branch, provided this replacement lead to a lower predicted error rate. Obviously the probability of error in a node of the tree cannot be determined exactly, and the error rate on the training set from which the tree was built does not provide a suitable estimate. To estimate the error rate, C4.5 works in the following way: suppose that there is a leaf that covers  $N$  objects and misclassifies  $E$  of them. This could be considered as a binomial distribution in which the experiment is repeated  $N$  times obtaining  $E$  errors. From this issue, the probability of error  $p_e$  is estimated, and it will be taken as the aforementioned predicted error rate. So it is necessary to estimate a confidence interval for the error probability of the binomial distribution. The upper limit of this interval will be  $P_e$  (note that this is a pessimistic estimate).

Then, in the case of a leaf that covers  $N$  objects, the number of predicted errors will be  $N \times p_e$ . Similarly, the number of predicted errors associated with a subtree will be just the sum of the predicted errors of its branches, and the number of predicted errors associated with a branch will be the sum of the predicted errors of its leaves. Therefore, a subtree will be replaced by a leaf or a branch, that is, the subtree will be pruned, when the number of predicted errors for the last ones is lower than that for the subtree.

On the other hand, though the decision trees represent the knowledge in a very simple way, their intelligibility decrease as their size increase. Even though the pruned trees are more compact than the originals, when the problem is very complex the tree is very large and consequently difficult to understand since each node has a specific context established by the outcomes of tests at antecedent nodes. Collections of *if-then* rules are simpler and easier to understand than decision trees and that is why classification rules are a very popular alternative to decision trees.

The decision tree induction algorithms are based on a *divide-and-conquer* approach to the problem of learning from a set of instances: they work top-down (and that is why this approach is often called *Top-Down Induction of Decision Trees* or TDIDT), seeking at each stage an attribute to split on that best separates the classes, and then recursively processing the subproblems that result from the split. This strategy generates a decision tree, which can be converted into a set of rules in a trivial way: one rule is generated for each leaf. The antecedent of the rule includes a condition for every node on the path from the root to that leaf, and the consequent of the rule is the class assigned by the leaf. However, in general rules that are read directly off a decision tree are far more complex than necessary, because the antecedents of individual rules may contain irrelevant conditions which

could be deleted without affecting its accuracy. So if it is to produce effective rules, the conversion is not trivial.

An alternative approach to construct rules is to take each class in turn and seek a way of covering all instances in it, at the same time excluding instances not in the class. This is called a *covering* approach because at each stage you identify a rule that “covers” some of the instances. The partitions of a decision tree take all classes into account, trying to maximize the purity of the split, whereas these rule-generating methods concentrate on one class at a time, disregarding what happens to the other classes. These techniques are based on a *separate-and-conquer* strategy, because they identify a rule that covers instances in the class (and excludes ones not in the class), separate out the covered instances because they are already taken care of by the rule, and continue the process on those that are left.

Covering algorithms operate by adding tests to the rule that is under construction, always striving to create a rule with maximum accuracy. In contrast, divide-and-conquer algorithms operate by adding tests to the tree that is under construction, always striving to maximize the separation between the classes.

The conditions in a decision tree which has been generated by a divide-and-conquer algorithm are exhaustive and mutually exclusive, independently they are represented like a tree or like a set of rules, whereas with rule sets generated by separate-and-conquer algorithms several rules could be applicable to the same instance. Moreover, an example may receive multiple classifications, that is, it may be accepted by rules that apply to different classes. This can be solved by imposing an ordering on the rules (obtaining decision lists) or by weighting and adding the diverse predictions.

Decision lists can be considered like extended IF – THEN rules in the way:

*if... then ... ; else:*

*if... then ... ; else:*

*if... then ... ; else:*

The ordered structure of decision lists prevents that rule sets for different classes can “overlap” in instance space, a problem which the inefficiency of some rule induction algorithms is usually attributed to [1]. With a decision list, during classification the rules are evaluated sequentially and an instance is classified using the first rule that fires. The addition of a default rule (usually the class with the most training examples) at the end serves to ensure that any instance receives a classification. Ordering the rules in this way assures that one and only one rule applies to any given instance.

PART, a rule-learning algorithm based on partial decision trees which was developed by [7], represents a hybrid alternative approach to decision list induction be-

cause it combines the divide-and-conquer strategy for decision tree learning with the separate-and-conquer one for rule learning. It adopts the separate-and-conquer strategy in that it builds a rule, removes the instances it covers, and continues creating rules recursively for the remaining instances until none are left. However, it differs from the standard approach in the way that each rule is created. In essence, to make a single rule, a pruned decision tree is built for the current set of instances, the leaf with the largest coverage is made into a rule, and the tree is discarded.

The prospect of repeatedly building decision trees only to discard most of them is not as bizarre as it first seems. Using a pruned tree to obtain a rule instead of building it incrementally by adding conjunctions one at a time avoids a tendency to overprune that is a characteristic problem of the basic separate-and-conquer rule learner. Using the separate-and-conquer methodology in conjunction with decision trees adds flexibility and speed. It is indeed wasteful to build a full decision tree just to obtain a single rule, but the process can be accelerated significantly without sacrificing the mentioned advantages in the way implemented in PART: the key idea is to build a partial decision tree instead of a fully explored one. A partial decision tree is an ordinary decision tree that contains branches to undefined subtrees. To generate such a tree, the construction and pruning operations are integrated in order to find a “stable” subtree that can be simplified no further. Once this subtree has been found, tree-building ceases and a single rule is read off.

The process is as follows: first a test is chosen and the instance set is divided into subsets accordingly. The choice is made in the same way as C4.5. Then the subsets are expanded in increasing order of their entropy, starting with the smallest. The reason for this is that the later subsets will most likely not end up being expanded, and a subset with low entropy is more likely to result in a small subtree and therefore produce a more general rule. This proceeds recursively until a subset is expanded into a leaf, and then continues further by backtracking. But as soon as an internal node appears which has all its children expanded into leaves, the algorithm checks whether that node is better replaced by a single leaf. This is just the “subtree replacement” operation of decision tree pruning, and PART makes the decision in exactly the same way as C4.5. If replacement is performed, the algorithm backtracks in the standard way, exploring siblings of the newly replaced node. However, if during backtracking a node is encountered all of whose children are not leaves—and this will happen as soon as a potential subtree replacement is not performed—then the remaining subsets are left unexplored and the corresponding subtrees are left undefined. Due to the recursive structure of the algorithm, this event automatically terminates tree generation [7].

Once a partial tree has been built, a single rule is extracted from it. Each leaf corresponds to a possible rule, and PART aims at the most general rule by choosing the leaf that covers the greatest number of instances. If the dataset contains missing values, PART deals with them in the same way as C4.5.



According to the experiments performed by the authors of PART, it produces very quickly rule sets more accurate than other fast rule induction methods. However, its main advantage over other schemes is not performance but simplicity, and this is achieved by combining the top-down decision tree induction method with separate-and-conquer rule learning. These are the reasons for we use this algorithm in our paper.

## 4. EMPIRICAL RESULTS

The database contains data from 9673 automobile policies for 2005 described by the 14 variables explained in section 2. These policies have been assigned to a decision class (accident or not). If we developed a model and we test it with the same sample, the results obtained could be conditioned. So in order to test the predictive accuracy of the obtained models (decision rules), we have randomly split the set of original data to form the training set and the holdout sample to validate these models, i.e., the test set. The training set makes up 75% of total policies and the test set is made up of the rest of the policies.

### 4.1. PART algorithm

The algorithm has been performed using the data mining package *WEKA* from the University of Waikato [8].

We have obtained a decision list that consists of 27 rules (**PART model**, see Appendix). Each rule in the decision list consists of one or more conditions that must all be satisfied if the rule is to be applicable, the class predicted by the rule and a number  $n/m$ . The value of  $n$  is the number of cases in the sample that are mapped to this rule, and  $m$  is the number of them that are classified incorrectly by the rule, expressed as a decimal number because of the way the algorithm uses fractional instances to handle missing values. There is also a default class, here “yes” (accident), which is used when an object does not match any of the sequential rules. Beneath the decision list structure the number of rules is printed.

As we have previously mentioned, to predict the performance of the decision list on new data, we need to assess its error rate on a dataset that played no part in the formation of the list, so the evaluation on test set has been carried out. In this case, 70.43% of the test instances are classified correctly, a quite satisfactory result.

### 4.2. Rough Set

Following the same philosophy we have developed a model using another decision rule algorithm based on Rough Set Methodology.

Very briefly, the Rough Set approach works by discovering dependencies between attributes in an information table, and reducing the set of attributes by removing those that are not essential to characterize knowledge. A *reduct* is defined as the minimal subset of attributes which provides the same quality of classification as the set of all attributes. A reduced information table may provide decision rules of the form "if conditions then decisions". These rules specify what decisions (actions) should be undertaken when some conditions are satisfied, and can be used to assign new objects to a decision class by matching the condition part of one of the decision rule to the description of the object. We have performed the Rough Set analysis using the Rough Set system *RSES* developed by Institute of Mathematics, Warsaw, Poland (see <http://logic.mimuw.edu.pl/~rses/>). For a more detailed description of the Rough Set theory, see [9].

The training information table was entered into an input file in *RSES2*. The first result obtained from RS analysis of the information table was that there was only one reduct. This reduct contains all the variables except for PRIVATE. Therefore this variable can be eliminated as it is not necessary to the problem we are considering.

After removing this variable, we introduced the new data (that is, the test sample) in the model in order to validate it. In this case, 61% of the test instances are classified correctly. This result is significantly worse than the one obtained by PART algorithm. This fact confirms the superior predictive capabilities of PART.

## 5. CONCLUSIONS

In this paper we have applied a data analysis methodology from the field of Machine Learning, PART algorithm, on a real sample of automobile policies for 2005 year with the purpose of analyzing the role of a set of variables in explaining the accident rate in automobile insurance. In order to assess the efficiency of this method, we have compared it with Rough Set theory, obtaining quite better results in the case of PART.

Besides that our empirical results show that this technique offers a good predictive accuracy, it is a non-parametric, or distribution free, method, so it does not require the pre-specification of a functional form, or the adoption of restrictive assumptions about the characteristics of statistical distributions of the variables and errors of the model. Moreover, the decision model provided by the method is easily understandable. This representation of the results makes it easier for human interpretation than other non-parametric techniques like Neural Networks or Support Vector Machines.

As shown by the experiments carried out, we can conclude that this machine-learning approach is a competitive alternative to existing prediction models (statistical or artificial intelligence models) for this problem and has great potential capacities that undoubtedly make it attractive for application to the field of business classification.

## REFERENCES

Berzal Galiano, F. (2002). ART: un método alternativo para la construcción de árboles de decisión. Ph. D. Dissertation, Universidad de Granada, Spain.

Bousoño, C.; Heras, A.; Tolmos, P. (2008). *Factores de Riesgo y Cálculo de Primas mediante Técnicas de Aprendizaje*. Madrid: Editorial MAPFRE.

Breiman, L.; Friedman, J.H.; Olshen, R.A.; Stone, C.J. (1984). *Classification and Regression Trees*. Belmont, California: Wadsworth International Group.

Denuit, M.; Maréchal, X.; Pitrebois, S.; Walhin, J.-F. (2007). *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*. Chichester, UK: John Wiley & Sons.

Díaz Martínez, Z.; Segovia Vargas, M.J.; Fernández Menéndez, J.; Del Pozo García, E.M. (2005). "Machine Learning and Statistical Techniques. An Application to the Prediction of Insolvency in Spanish Non-life Insurance Companies". *The International Journal of Digital Accounting Research*, vol. 5, nº 9, 1-45.

Frank, E. (2000). *Pruning Decision Trees and Lists*. Ph. D. Dissertation, University of Waikato, New Zealand.

Frank, E.; Witten, I.H. (1998). *Generating Accurate Rule Sets Without Global Optimization*, in J. SHAVLIK (ed.): Proceedings of the Fifteenth International Conference on Machine Learning, Madison, Wisconsin. San Francisco: Morgan Kaufmann, 144-151.

Hall, M.; Frank, E.; Holmes, G.; Pfahringer, B.; Reutemann, P.; Witten, I.H. (2009). "The WEKA Data Mining Software: An Update". *SIGKDD Explorations*, vol. 11, nº1, 10-18.

Pawlak, Z. (1991). *Rough Sets. Theoretical Aspects of Reasoning about Data*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Quinlan, J.R. (1993). *C4.5: Programs for Machine Learning*. San Mateo, California: Morgan Kaufmann.

Salcedo-Sanz, S.; Fernández-Villacañas, J.L.; Segovia-Vargas, M.J.; Bousoño-Calzón, C. (2005) "Genetic programming for the prediction of insolvency in non-life insurance companies". *Computers and Operations Research*, vol. 32, nº 4, 749-765.

Salcedo-Sanz, S.; Prado-Cumplido, M.; Segovia-Vargas, M.J.; Pérez-Cruz, F.; Bousoño-Calzón, C. (2004). "Feature selection methods involving Support Vector Machines for prediction of insolvency in non-life insurance companies". *Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management*, 12, 261-281.

Sanchis, A.; Segovia, M.J.; Gil, J.A.; Heras, A.; Vilar, J.L. (2007). "Rough Sets and the Role of Monetary Policy in Financial Stability (Macroeconomic Problem) and the Prediction of Insolvency in the Insurance Sector (Microeconomic Problem)". *European Journal of Operational Research*, 181, 1554-1573.

Segovia-Vargas, M.J.; Salcedo-Sanz, S.; Bousoño-Calzón, C. (2004). "Prediction of Insolvency in non-life insurance companies using support vector machines and genetic algorithms". *Fuzzy Economic Review*, vol. IX, nº 1, 79-94.

## APPENDIX

### PART model

=== Run information ===

Scheme: weka.classifiers.rules.PART -M 40 -C 0.25 -Q 1

Relation: R\_data\_frame

Instances: 7255

Attributes: 15

- tipo
- uso
- privado
- cv
- tara
- plazas
- ambit
- antvehi
- edad
- carnet
- sexo
- provin
- diesel
- B.xxx
- siniestro

Test mode: user supplied test set: 2418 instances

=== Classifier model (full training set) ===

PART decision list

-----

uso = uso.1 AND

plazas <= 3: yes (397.0/107.0)

privado = yes AND

antvehi <= 21 AND  
provin = BARCELONA: yes (358.45/101.27)

privado = yes AND  
antvehi > 21: no (120.0/13.0)

privado = yes AND  
tipo = tipo.14: yes (101.0/38.0)

privado = yes AND  
tipo = tipo.16 AND  
ambit = ambito.9 AND  
sexo = hombre AND  
tara > 1640 AND  
carnet > 23: yes (87.89/28.0)

privado = yes AND  
carnet > 24 AND  
B.xxx = B.109: no (1223.77/400.2)

privado = yes AND  
ambit = ambito.8 AND  
B.xxx = B.110: yes (116.23/45.17)

privado = yes AND  
ambit = ambito.8 AND  
B.xxx = B.111: yes (98.43/31.14)

privado = yes AND  
ambit = ambito.8 AND  
B.xxx = B.116: yes (98.38/3.14)

privado = yes AND  
ambit = ambito.8 AND  
B.xxx = B.109 AND  
antvehi > 10: no (84.55/24.17)

privado = yes AND  
ambit = ambito.9 AND  
B.xxx = B.116 AND  
carnet <= 13: no (459.13/112.71)

privado = yes AND  
carnet > 3 AND  
ambit = ambito.9 AND  
B.xxx = B.110 AND  
carnet > 7 AND

tipo = tipo.9: no (457.48/147.16)

privado = yes AND  
carnet > 3 AND  
ambit = ambito.9 AND  
B.xxx = B.109 AND  
edad > 25 AND  
tipo = tipo.9 AND  
carnet > 14: no (455.71/219.1)

privado = yes AND  
carnet > 3 AND  
ambit = ambito.9 AND  
B.xxx = B.109: yes (571.9/220.67)

privado = yes AND  
carnet > 3 AND  
ambit = ambito.9 AND  
B.xxx = B.111: no (401.0/156.79)

privado = yes AND  
carnet > 3 AND  
ambit = ambito.9 AND  
B.xxx = B.112: no (369.21/133.77)

privado = yes AND  
carnet <= 3: yes (346.56/72.85)

privado = yes AND  
ambit = ambito.9 AND  
B.xxx = B.114: no (299.19/116.63)

privado = yes AND  
ambit = ambito.8: yes (294.66/95.18)

privado = yes AND  
B.xxx = B.113: no (252.63/92.15)

privado = no: yes (72.0/3.0)

B.xxx = B.110 AND  
tipo = tipo.9: yes (47.89/15.46)

B.xxx = B.116 AND  
tipo = tipo.9 AND  
antvehi <= 3: yes (133.95/52.41)

B.xxx = B.116 AND  
tipo = tipo.9 AND  
diesel = yes: no (79.91/37.01)

B.xxx = B.116 AND  
tipo = tipo.9 AND  
antvehi <= 11: yes (49.0/20.43)

B.xxx = B.116 AND  
tipo = tipo.9: no (47.53/16.93)

: yes (231.55/83.8)

Number of Rules: 27

Time taken to build model: 1.88 seconds

=== Evaluation on test set ===  
=== Summary ===

Correctly Classified Instances	1703	70.4301 %
Incorrectly Classified Instances	715	29.5699 %
Kappa statistic	0.4084	
Mean absolute error	0.4191	
Root mean squared error	0.4541	
Relative absolute error	83.8602 %	
Root relative squared error	90.8307 %	
Total Number of Instances	2418	

=== Detailed Accuracy By Class ===

TP Rate	FP Rate	Precision	Recall	F-Measure	Class
0.709	0.301	0.71	0.709	0.71	no
0.699	0.291	0.698	0.699	0.699	yes

=== Confusion Matrix ===

```
  a   b  <-- classified as
874 358 | a = no
357 829 | b = yes.
```

## Ponencia 13

# VÍCTIMAS SOBRE DOS RUEDAS: ¿AFECTÓ EN BARCELONA LA RELAJACIÓN DE LOS REQUISITOS PARA CONDUCIR MOTOCICLETAS LIGERAS?

Manuela Alcañiz Zanón y Dídac Planas-Paz

### 1. INTRODUCCIÓN

Todos los núcleos urbanos, así como las vías interurbanas, son a diario protagonistas de numerosos incidentes relacionados con el tráfico. Evidentemente, la ciudad de Barcelona y sus zonas limítrofes, con el nivel de desarrollo alcanzado, no quedan al margen de esta situación. En particular, los accidentes de tráfico constituyen una preocupación de primer orden para los responsables de la movilidad y para la sociedad en general, por los elevados costes personales y económicos que comportan.

De este modo, las autoridades de tráfico se encargan de diseñar y de poner en práctica distintas políticas de movilidad, que de forma más o menos acusada acaban teniendo una repercusión sobre los accidentes de circulación, aunque su objetivo inicial fuera el de reducir las infracciones a las normas de tráfico, la mejora de la movilidad o incluso la reducción de la contaminación ambiental en los entornos de las grandes ciudades. Algunas de estas medidas causan restricciones a los conductores, por lo que despiertan oposición en algunos sectores, que demandan que se contraste su eficacia real para lograr los objetivos propuestos.

Por otro lado, desde el punto de vista asegurador, la cuantificación y previsión de los daños derivados de los accidentes de tráfico reviste vital importancia para llevar a cabo una correcta tarificación, que haga posible la solvencia de las entidades y la correcta reparación e indemnización de los daños tanto materiales como personales que se derivan. En ese sentido, el análisis estadístico de las series de accidentes y víctimas se hace imprescindible. El conocimiento de la tendencia de las series y del impacto de los cambios normativos permite visualizar con mayor precisión los riesgos asociados a la conducción de determinados tipos de vehículo. Ello hace posible una mayor equidad en la determinación de las primas a pagar por el asegurado, de modo que este cubra efectivamente sus riesgos.

Así, en este trabajo se lleva a cabo una contribución al conocimiento de la realidad de los accidentes, para uno de los medios de transporte que más costes ocasiona a las aseguradoras: los vehículos de dos ruedas. En particular, se analiza la serie



de motoristas víctimas de accidentes de tráfico, desde el año 2000 hasta el 2009, en la comarca que rodea la ciudad de Barcelona, conocida como Barcelonès. Como objetivo destacado figura también el análisis del impacto sobre la siniestralidad de la relajación de los requisitos para conducir motocicletas ligeras que se produjo tras la entrada en vigor en el año 2004 del R.D. 1598/2004.

Hay que notar que en la comarca del Barcelonès está muy extendido el uso de vehículos de dos ruedas, que se ve favorecido por una climatología propicia y por la congestión que suele producirse en los accesos y en muchos puntos de la red vial. Las autoridades metropolitanas muestran periódicamente su preocupación por la elevada presencia de siniestros en los que se hallan implicadas motocicletas, ya que, a causa de la vulnerabilidad del conductor y eventuales pasajeros, suelen revestir mayor gravedad en términos de daños personales.

Según datos consolidados de la Dirección General de Tráfico (Ministerio del Interior, Gobierno de España), en el año 2009 hubo en España 127.680 víctimas de accidentes de tráfico, de las cuales un 27,81% fueron conductores o pasajeros de vehículos de dos ruedas (bicicletas, ciclomotores o motocicletas), mientras que la composición del parque de vehículos español tiene un porcentaje de este tipo de vehículos del 15,12%. Además, de los 2.714 muertos que hubo entre los accidentes registrados en carretera y zona urbana, un 23,95% se desplazaban en vehículos de dos ruedas. Estas elevadas proporciones justifican un análisis de la siniestralidad centrado en este tipo de vehículos. Adicionalmente, estudios previos (Mayou *et al.*, 2003) avalan que la gravedad de las heridas y, por tanto, el gasto en recursos sanitarios, es superior para peatones y usuarios de vehículos de dos ruedas accidentados, que para las víctimas de accidentes con otro tipo de vehículos implicados.

La elección de la región geográfica en la que realizar el análisis responde a un interés por valorar la situación en la ciudad de Barcelona y sus proximidades. La comarca del Barcelonès incluye, a parte de la capital catalana, cuatro municipios: L'Hospitalet de Llobregat, Sant Adrià de Besòs, Santa Coloma de Gramenet y Badalona. Se trata de una extensión urbana continua de 145,8 km<sup>2</sup> de superficie, con una población en 2010 de 2.251.029 habitantes (casi un 30% de la población de Catalunya), según datos del Padrón Municipal de Habitantes.

En referencia al parque de automóviles, el Barcelonès tiene una cuarta parte del total de vehículos del conjunto de la comunidad autónoma, cifra que aumenta hasta el 38% si nos referimos a motocicletas y ciclomotores.

Barcelona, como foco económico de la región, aglutina un 71,94% de la población de la comarca (el 21,56% del total autonómico) y, en referencia al número de vehículos de dos ruedas, supone aproximadamente el 85% del total comarcal.

En un trabajo precedente, Alcañiz (2011) analiza un problema similar, pero extendido a todo el Ámbito Metropolitano de Barcelona, región en la que viven casi cinco millones de habitantes. Sin embargo, Barcelona ciudad y sus alrededores presentan unas características propias y diferenciadas, que es interesante examinar

con más profundidad. Por un lado, por motivos principalmente de tipo laboral, se producen a diario miles de desplazamientos internos entre los diferentes municipios del Barcelonès y, en menor proporción, hacia otros núcleos cercanos. Además, los cinco municipios de la comarca tienen similares características en cuanto a los patrones de movilidad de sus habitantes, en los que los vehículos de dos ruedas tienen un papel destacado.

Por otro lado, a diferencia de lo que sucede en el Ámbito Metropolitano, en el que en el año 2009 un 10,98% de las víctimas consideradas se produjeron en accidentes en carretera, en el Barcelonès el territorio es casi en su totalidad urbano, con un reducido 1% de víctimas en vías interurbanas en el mismo período.

## 2. POLÍTICAS DE MOVILIDAD

Como ya se ha comentado brevemente, en la última década, tanto desde el ámbito estatal como desde el autonómico, se han llevado a cabo diversas políticas de movilidad, cuya repercusión sobre los accidentes de tráfico de motocicletas y ciclomotores merece ser analizada. En particular, las tres políticas más destacadas son: el R.D. 1598/2004, que permite conducir motocicletas de hasta 125 cc a los conductores con permiso B de tres años de antigüedad; la Ley 17/2005, que entró en vigor el 1 de julio de 2006, por la que se regula el permiso de conducción por puntos; y el Decreto 152/2007, de 10 de julio, de la Generalitat de Catalunya, que define el Plan de Actuación para la Mejora de la Calidad del Aire, y que establece en uno de sus puntos la limitación de la velocidad a 80 km/h en las principales vías de acceso a la ciudad de Barcelona (vigente desde el 1 de enero de 2008<sup>1</sup>), que fue abolida parcialmente entre febrero y marzo de 2011, tras la entrada en el gobierno de Catalunya de nuevos responsables políticos.

Dichas políticas de movilidad persiguen distintos objetivos, entre los que pueden citarse la mayor disciplina vial, la penalización de los infractores, la reducción de la contaminación ambiental, y la descongestión del tráfico en las ciudades. Sin embargo, con frecuencia, políticas que no se relacionan de modo directo con la lesividad pueden tener profunda influencia sobre el riesgo de sufrir accidentes. En este trabajo, se valora a partir de datos empíricos si las medidas analizadas tienen efectivamente alguna resonancia en el número de motoristas heridos o muertos en accidentes de tráfico.

De las tres medidas mencionadas, la que ha sido puesta más en entredicho desde su entrada en vigor es el R.D. 1598/2004, al que se ha atribuido en distintos medios un aumento significativo de la siniestralidad en vehículos de dos ruedas a nivel estatal. Así, en este trabajo se estudia cuál ha sido la evolución del número de motoristas víctimas de accidentes de tráfico, independientemente de cuál sea la gravedad de sus heridas, prestando atención a la entrada en vigor del R.D.

---

<sup>1</sup> Véase el citado Decreto 152/2007, Artículo 4, para el detalle de las vías afectadas por esta medida.

1598/2004. Se trata de ver si la adopción de esta política de movilidad ha supuesto una modificación significativa en la tendencia de las series de víctimas de accidentes de vehículos de dos ruedas. Los datos disponibles proceden del *Servei Català del Trànsit* (dependiente de la Generalitat de Catalunya) y se hallan desagregados a nivel mensual, lo que permite valorar a corto y medio plazo el impacto de la ley citada sobre el número y la gravedad de los accidentes, eliminando la estacionalidad existente.

La evaluación de políticas regulatorias españolas y campañas especiales en materia de tráfico ha sido objeto de numerosos estudios, muchos de ellos centrados en aspectos como el uso del casco o del cinturón de seguridad, el control del consumo de alcohol o los límites de velocidad (Ferrando *et al.*, 2000; Villalbí *et al.*, 2006). Un análisis detallado de la relación existente entre las diferentes infracciones de tráfico cometidas por los individuos que han sufrido un accidente y la gravedad de las lesiones padecidas puede encontrarse en Ayuso *et al.* (2010).

También la medida que se estudia aquí ha sido objeto de atención, si bien en entornos distintos al del presente trabajo. Seguí-Gómez *et al.* (2007) analizan para España el efecto de esta ley, y concluyen que en el momento en que se aprobó no se tuvo en cuenta de forma adecuada que tendría una repercusión significativa sobre el riesgo de sufrir accidentes. Por su parte, Pérez *et al.* (2009) estudian la misma cuestión, ciñéndose a la ciudad de Barcelona, sin considerar el resto de su comarca, y llegan a la conclusión de que el riesgo de lesiones entre los usuarios de motocicletas ligeras (de menos de 125 cc) aumentó a raíz de la nueva normativa. Apuntan también que un efecto similar, aunque menos acusado, se observó entre los conductores de motocicletas pesadas; en cambio, no hubo alteraciones significativas en la gravedad de los accidentes de ciclomotores. Por su parte, Albalade *et al.* (2010) muestran que en la ciudad de Barcelona esta ley no implicó un aumento de la gravedad de los accidentes, si bien ocasionó un incremento en el número de colisiones con vehículos de dos ruedas implicados. Finalmente, Puerto *et al.* (2009 y 2011) analizan la siniestralidad de los vehículos de dos ruedas en las ciudades de Barcelona y Madrid, respectivamente. En ambos casos, concluyen que la tasa de riesgo de los conductores que se acogieron a la nueva ley supera significativamente la de los conductores con licencias específicas para la conducción de vehículos de dos ruedas.

En el presente estudio se analiza la existencia de un cambio de tendencia en el comportamiento de la serie de víctimas en accidentes de vehículos de dos ruedas coincidente con la aplicación del R.D. 1598/2004 sin restringir el análisis a la ciudad de Barcelona, sino ampliándolo a la comarca del Barcelonès, zona que forma un continuo urbano con pautas de movilidad homogéneas.

### **3. PATRÓN DE LAS SERIES DE SINIESTRALIDAD Y GRAVEDAD**

Los datos disponibles de accidentes de circulación de vehículos de dos ruedas del *Servei Català del Trànsit* (SCT) permiten conocer la evolución mensual desde el

año 2000 hasta el 2009 de las series de accidentes, de víctimas, y de víctimas desglosadas según la gravedad (heridos leves, graves y muertos).

Un análisis estadístico preliminar lleva a observar que existe fuerte estacionalidad dentro del año y que las series de accidentes, de víctimas totales y de heridos leves están muy correlacionadas entre sí. En particular, se observa que el número de víctimas tiene un patrón de comportamiento muy similar al del número de heridos leves. En promedio, el número de víctimas mensuales de cualquier gravedad es un 4,04% más elevado que el número de heridos leves. Así, los heridos leves constituyen la parte más importante del número total de víctimas. El coeficiente de correlación lineal entre ambas series es de 0,993, de modo que la predicción de una serie a partir de la otra tendrá una alta fiabilidad.

Por otro lado, el número mensual de víctimas por accidente es en promedio de 1,23, siendo la correlación entre el número de accidentes y el número de víctimas de 0,987. Así, aunque de cara a estudiar el comportamiento temporal de la siniestralidad nuestro análisis se ciñe a la serie de víctimas totales, los resultados son válidos para las series que recogen el número total de accidentes.

El volumen de vehículos de dos ruedas que circulan por las carreteras y por zona urbana depende en gran medida del momento del año en que se recoge la observación, pues una climatología desfavorable resulta un inconveniente importante para conducir con comodidad y seguridad un vehículo de dos ruedas. Otros factores, como períodos vacacionales, también modifican de forma significativa el uso que se hace de cualquier vehículo y, en particular, de motocicletas y ciclomotores. Por este motivo, las series tanto de accidentes como de víctimas para vehículos de dos ruedas presentan patrones estacionales muy marcados, con incrementos notables en los meses de junio y julio, y caídas en agosto y en los meses de invierno (Alcañiz *et al.*, 2008). Es preciso eliminar estas variaciones dentro del año si se desea apreciar mejor la tendencia general de las magnitudes.

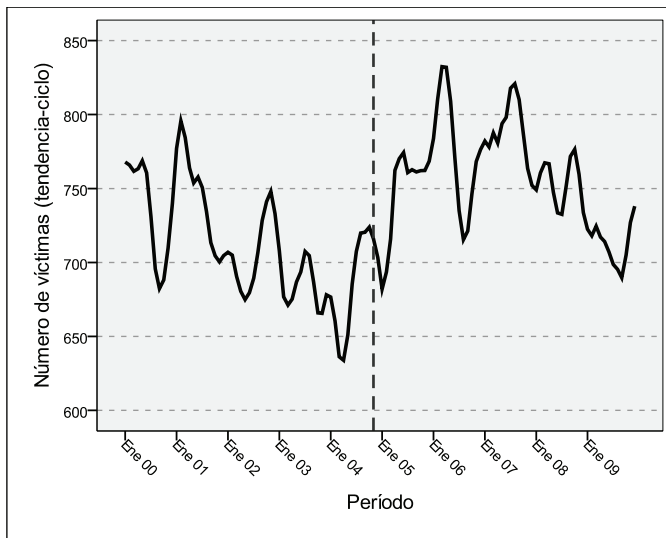
El análisis de las series temporales que se lleva a cabo en este trabajo es de tipo clásico, ya que las series de interés se ajustan bien a este tratamiento. Suponiendo un modelo multiplicativo, es decir, asumiendo que las desviaciones de la serie en torno a su media no son constantes, es sencillo extraer los coeficientes de variación estacional, y construir la serie de víctimas libre ya de estacionalidad. Esta serie retiene la componente de tendencia-ciclo, que permite ver cuál es la evolución real de la magnitud. A partir de este momento, la serie objeto de estudio será en todo momento la serie desestacionalizada.

#### **4. LA TENDENCIA DE LA SERIE DE VÍCTIMAS: FACTORES INFLUYENTES**

El gráfico 1 muestra la componente tendencia-ciclo de la serie de víctimas totales. Se ha marcado como línea de referencia el momento en que entra en vigor la política de movilidad que se estudia en este trabajo (mes de noviembre de 2004). El

gráfico permite apreciar un decrecimiento hasta el primer trimestre del año 2004, momento en que empieza una escalada, que retrocede de modo coyuntural en julio de 2006, coincidiendo con la implantación del permiso de conducir por puntos. Posteriormente, a partir del tercer trimestre de 2007, la serie muestra un decrecimiento que parece revertirse a lo largo del año 2009, si bien este efecto debería ser contrastado cuando se disponga de datos más recientes.

**Gráfico 1**  
Componente tendencia-ciclo de la serie de víctimas



*Fuente:* Elaboración propia a partir de datos del SCT.

Hay que señalar que en los años 2003, 2004 y 2005 se produjo un fuerte incremento de las matriculaciones de motocicletas a nivel nacional y, en particular, en la provincia de Barcelona. Según datos de la Dirección General de Tráfico, el número de matriculaciones en esta provincia se incrementó un 28,5% en el 2003 respecto al año anterior, un 40,7% en el 2004, y un 59,0% en el 2005. En el 2006, el crecimiento fue ya mucho más discreto (16,0%), estacionándose prácticamente en 2007 (-1,8%) y entrando en clara recesión en 2008 (-19,5%) y 2009 (-28,6%).

Este elevado número de motocicletas nuevas matriculadas en la provincia de Barcelona tiene un efecto en las series de víctimas, especialmente en las que recogen la gravedad, que se entrelaza con el impacto de las políticas de movilidad estudiadas. Según Paulozzi (2005), en EE.UU., el aumento de las ventas de motocicletas que se produjo entre los años 2000 y 2003 se asoció con un incremento en la siniestralidad, no solo a causa de la inexperiencia de los conductores noveles, sino también por el uso más frecuente que se realiza de las motocicletas nuevas.

No se ha considerado oportuno en este trabajo llevar a cabo el estudio de la siniestralidad en relación al parque de vehículos de dos ruedas, como se ha hecho en trabajos anteriores (Alcañiz *et al.*, 2008). Para las motocicletas el número de víctimas en valor absoluto es una cifra que causa fuerte preocupación social y elevados costes, al margen de que en parte sus variaciones sean debidas a una mayor o menor presencia de vehículos de dos ruedas en la red vial.

Hay que señalar que tras la entrada en vigor del R.D. 1598/2004, surgieron duras críticas que alegaban que esta nueva medida era la causa del aumento de la siniestralidad que se registró, al permitir que conductores sin experiencia en vehículos de dos ruedas pudieran llevar motos ligeras. Ciertamente, si bien no existe evidencia a partir de datos españoles, numerosos estudios (Mullin *et al.*, 2000; Hedlund *et al.*, 2006) muestran que el aumento en la edad y en la experiencia son factores reductores del riesgo de sufrir heridas producto de accidentes de motocicletas. McCartt *et al.* (2009) llevan a cabo una revisión de la literatura referente a la influencia de la edad y la antigüedad del permiso de conducir sobre la probabilidad de sufrir accidentes y concluyen que el segundo factor es incluso más significativo que el primero, si bien ambos actúan con independencia. Adicionalmente, Puerto *et al.* (2009) calculan una tasa de riesgo de siniestralidad para los conductores con baja experiencia y nula formación que duplica la asociada a conductores con la formación adecuada (en el caso de la ciudad de Barcelona y en referencia a la misma política que aquí se analiza).

Sin embargo, no hay que despreciar el hecho de que el R.D. 1598/2004 motivó la venta de un gran número de motocicletas nuevas de baja cilindrada. Aún así, el aumento en las matriculaciones de motocicletas no se produjo solamente para motos de hasta 125 cc, sino que también fue muy notable para cilindradas superiores a 500 cc. Entre 2003 y 2004, las matriculaciones de motos de gran cilindrada se incrementaron en un 56%, siendo este porcentaje del 24% entre 2004 y 2005.

Así pues, el aumento que se produce en la serie de víctimas totales, debe atribuirse no solo a la falta de experiencia de los nuevos conductores de motos de baja cilindrada con permiso B, sino también al desorbitado incremento del parque automovilístico de motocicletas de cualquier cilindrada: las matriculaciones de motocicletas a nivel nacional experimentaron un crecimiento del 248% entre 2003 y 2007, porcentaje que se reduce a un nada despreciable 155% en la provincia de Barcelona.

No hemos hecho referencia hasta este momento a los ciclomotores, que también se incluyen entre los vehículos de dos ruedas cuyos accidentes se analizan en este trabajo. En España, las matriculaciones de ciclomotores han sufrido un retroceso en los últimos años. Por dar un dato comparable con el porcentaje que se acaba de mostrar para motocicletas, los ciclomotores experimentaron un descenso de matriculaciones del 21% entre 2003 y 2007. En la provincia de Barcelona, sin embargo, el descenso fue solo del 10% durante ese período.

Si se consideran de forma agregada las matriculaciones de motocicletas más ciclomotores, el incremento entre 2003 y 2007 fue del 74% en la provincia de Barcelona.

A continuación, se acomete el objetivo principal de este trabajo: ver si la política de movilidad considerada ha tenido influencia sobre la siniestralidad de vehículos de dos ruedas en la comarca del Barcelonès.

## **5. IMPACTO DE LA RELAJACIÓN DE LOS REQUISITOS PARA CONDUCIR MOTOCICLETAS LIGERAS**

Un modo de estudiar si un acontecimiento o un cambio normativo tienen efecto sobre la evolución de una serie temporal es contrastar si existe un cambio estructural en la serie que coincida en el tiempo con dicho evento.

En este trabajo, se trata de ver si la serie de víctimas sufre un cambio significativo en su tendencia asociado al momento en que entró en vigor el R.D. 1589/2004.

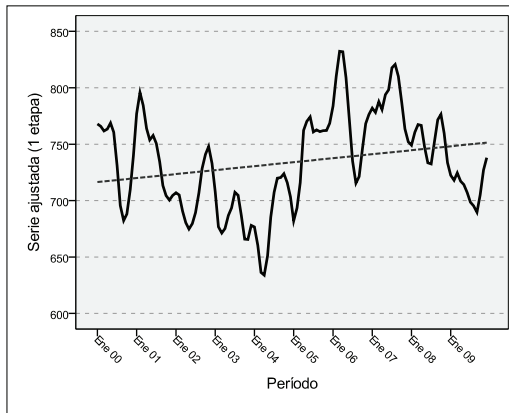
Uno de los contrastes estadísticos más utilizados para detectar cambios estructurales en series temporales es el test de Chow (ver una exposición general de este contraste en Greene, 2008). El objetivo es comparar el error que se genera en la modelización lineal de la serie suponiendo que existe una sola estructura, con los que se obtienen si se considera que la serie responde a distintos esquemas en diferentes períodos. Si se demuestra que el primer error supera de modo significativo a la suma de los segundos, el contraste permite indicar que ha existido cambio estructural. Dicho de otro modo, si existe cambio estructural en uno o más momentos, el hecho de permitir que los parámetros del modelo de regresión lineal varíen según el período analizado produce mejoras sustanciales en el ajuste del modelo lineal.

Es preciso aclarar que la existencia de un cambio estructural en un momento dado no implica necesariamente que éste sea debido a la implementación de las acciones cuya influencia se desea estudiar. Esta metodología no permite extraer conclusiones en términos de causalidad, sino únicamente contrastar una coincidencia en el tiempo entre el cambio que se observa en la tendencia de la serie y el acontecimiento de interés, en este caso la entrada en vigor de la normativa R.D. 1589/2004.

A continuación, se analizará desde este punto de vista la serie de víctimas de accidentes en vehículos de dos ruedas. Las tablas 1 y 2 recogen los principales resultados:

**Tabla 1**

Ajuste lineal sin cambio estructural de la serie desestacionalizada de víctimas

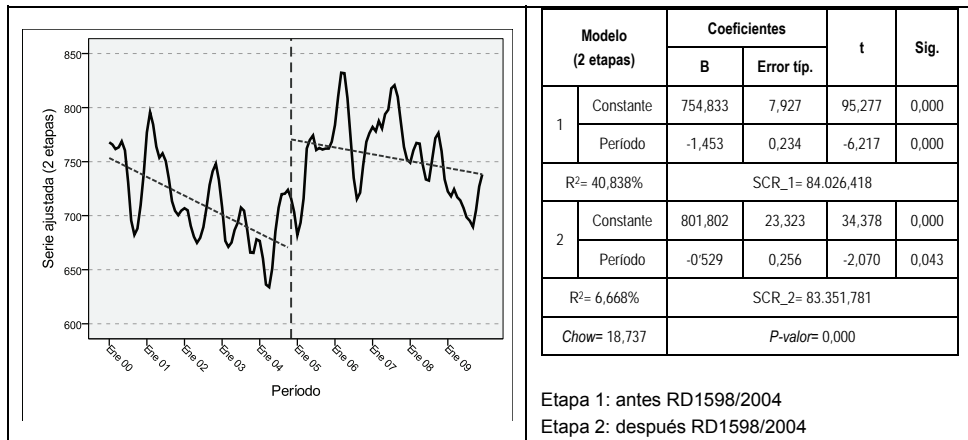


Modelo (1 etapa)		Coeficientes		T	Sig.
		B	Error tip.		
1	Constante	716,163	7,733	92,612	0,000
	Periodo	0,293	0,111	2,646	0,009
R <sup>2</sup> = 5,599%		SCR= 221.452,642			

Fuente: Elaboración propia a partir de datos del SCT.

**Tabla 2**

Ajuste y contraste de Chow suponiendo un cambio estructural de la serie desestacionalizada de víctimas



Modelo (2 etapas)		Coeficientes		t	Sig.
		B	Error tip.		
1	Constante	754,833	7,927	95,277	0,000
	Periodo	-1,453	0,234	-6,217	0,000
R <sup>2</sup> = 40,838%		SCR_1= 84.026,418			
2	Constante	801,802	23,323	34,378	0,000
	Periodo	-0,529	0,256	-2,070	0,043
R <sup>2</sup> = 6,668%		SCR_2= 83.351,781			
Chow= 18,737		P-valor= 0,000			

Etapa 1: antes RD1598/2004

Etapa 2: después RD1598/2004

Fuente: Elaboración propia a partir de datos del SCT.

A la vista de la representación gráfica de la serie recogida en la tabla 1, puede plantearse la hipótesis de que ésta sufre al menos un cambio estructural a lo largo del período analizado. En la tabla 2 se contrasta si dicho cambio puede asociarse en el tiempo con la entrada en vigor del R.D. 1598/2004, el 28 de octubre de 2004.

El contraste de Chow es significativo, de modo que se acepta la hipótesis de que la evolución de la siniestralidad en lo referente a víctimas totales sufrió un cambio



estructural a finales del año 2004 (en el mes de noviembre). Como queda recogido en los coeficientes estimados de los modelos, la tendencia decreciente que se sostenía desde el año 2000 se interrumpe y la serie se transforma en un proceso que decrece menos rápidamente y se sitúa, además, en un nivel medio superior al que se venía registrando. Cabe destacar que la pendiente de este nuevo proceso es  $-0,53$ , siendo el coeficiente no significativo a un nivel de confianza del 1%. A este nivel de confianza, pues, no se descarta que la pendiente de la recta en el período de aplicación del R.D. 1589/2004 sea nula.

Parece claro, a la vista de los gráficos y resultados anteriores, que la política de movilidad que permite conducir motocicletas de hasta 125 cc a conductores con permiso B de tres o más años de antigüedad tuvo un fuerte impacto sobre el cambio de tendencia de la serie estudiada.

Sin embargo, la observación de la trayectoria de la serie permite plantear la cuestión de si los otros dos cambios normativos comentados en la introducción (la implementación del permiso de conducir por puntos y la limitación de la velocidad a 80 km/h en las principales vías de acceso a Barcelona) supusieron también alguna modificación en la tendencia. En este sentido, la introducción del carnet por puntos parece producir un efecto meramente transitorio, mientras que la poca influencia que tiene la reducción de los límites de velocidad a 80 km/h en la comarca del Barcelonès hace pensar que el decrecimiento que apunta la serie entre 2008 y 2009 está causado por motivos ajenos a dicha política de movilidad.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha constatado que la evolución del número de víctimas de accidentes de tráfico con vehículos de dos ruedas implicados en el Barcelonès sufrió un cambio estructural a finales del año 2004, coincidiendo con la entrada en vigor del Decreto que permite conducir motocicletas de hasta 125 cc a conductores con permiso B de al menos tres años de antigüedad. La tendencia decreciente que se venía observando desde el año 2000 se interrumpe, y la serie se transforma en un proceso fuertemente modificado, que se sitúa, además, a un nivel medio superior al que se venía registrando.

Este tipo de resultado confirma que políticas que persiguen objetivos diversos a la reducción de la siniestralidad pueden tener fuerte impacto indirecto sobre ésta, tanto porque modifican, como es el caso, los requisitos para conducir ciertos tipos de vehículo, como porque incentivan cambios de modo de transporte. Si la conducción del nuevo vehículo elegido, la motocicleta en el caso que nos ocupa, requiere de cierta destreza añadida y es a la vez un vehículo que ofrece poca protección a sus usuarios en caso de accidente, el escenario termina deparando un incremento en la siniestralidad.

Obviamente, ello debe ser tenido en cuenta por las entidades aseguradoras de cara a tarificar correctamente las pólizas de motocicletas de menos de 125 cc.

## BIBLIOGRAFÍA

Albalate, D.; Fernández-Villadangos, L. (2010). "Motorcycle injury severity in Barcelona: The role of vehicle type and congestion", *Traffic Injury Prevention*, vol. 11, nº 6, 623-631.

Alcañiz, M. (2011). Políticas de movilidad y accidentes de dos ruedas. El caso del ámbito metropolitano de Barcelona. En Ayuso, M. (ed.). *Métodos cuantitativos en economía del seguro del automóvil*. Barcelona.

Alcañiz, M.; Ayuso, M.; Guillén, M. (2008). *Accidentes de circulación con víctimas en los que están implicadas motocicletas*. Dirección General de Tráfico.

Ayuso, M.; Guillén, M.; Alcañiz, M. (2010). "The impact of traffic violations on the estimated cost of traffic accidents with victims", *Accident Analysis and Prevention*, vol. 42, nº 2, 709-717.

Boletín Oficial del Estado, nº 173, de 19 de julio de 2004. Real Decreto 1598/2004, de 2 de julio.

Boletín Oficial del Estado, nº 172, de 20 de julio de 2005. Ley 17/2005, de 19 de julio.

Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya, núm. 4924, de 12 de julio de 2007. Decreto 152/2007 de 10 de julio.

Dirección General de Tráfico. *Anuario Estadístico General 2009*.

Dirección General de Tráfico. *Anuario Estadístico de Accidentes 2009*.

Ferrando, J.; Plasencia, A.; Orós, M.; Borrell, C.; Krauss, F.J. (2000). "Impact of a helmet law on two wheel motor vehicle crash mortality in a southern European urban area", *Injury Prevention*, vol. 6, 184-188.

Greene, W.H. (2008). *Econometric Analysis*. New Jersey, USA: Prentice Hall.

Hedlund, J.; Shults, R.A.; Compton, R. (2006). "Graduated driver licensing and teenage driver research in 2006 [review]", *Journal of Safety Research*, vol. 37, 107-121.

Mayou, R.; Bryant, B. (2003). "Consequences of road traffic accidents for different types of road user", *Injury*, vol. 34, 197-202.

McCartt, A.T.; Mayhew, D.R.; Braitman, K.A.; Ferguson, S.A.; Simpson, H.M. (2009). "Effects of Age and Experience on Young Driver Crashes: Review of Recent Literature", *Traffic Injury Prevention*, vol. 1, nº 3, 209-219.

Mullin, B.; Jackson, R.; Langley, J.; Norton, R.(2000). "Increasing age and experience: are both protective against motorcycle injury? A case-control study", *Injury Prevention*, vol. 6, 32-35.

Paulozzi, L.J. (2005). "The role of sales of new motorcycles in a recent increase in motorcycle mortality rates", *Journal of Safety Research*, vol. 36, 361-364.

Puerto, L.; Ballbé, A. (2011). *Accidentalidad de las motocicletas en zona urbana: Madrid 2004-2009*. Fundació RACC.

Puerto, L.; Ballbé, A.; Albalade, D. *et al.* (2009). *Accidentalidad de las motocicletas en zona urbana: Barcelona 2002-2007*. Fundació RACC.

Pérez, K.; Marí-Dell'Olmo, M.; Borrell, C. *et al.* (2009). "Road injuries and relaxed licensing requirements for driving light motorcycles in Spain: a time-series analysis", *Bulletin of the World Health Organization*, vol. 87, 497-504.

Seguí-Gómez, M.; López-Valdés, F.J. (2007). "Recognizing the importance of injury in other policy forums: the case of motorcycle licensing policy in Spain", *Injury Prevention*, vol. 13, 429-430.

Villalbí, J.R. ; Pérez, K. (2006). "Evaluación de políticas regulatorias: prevención de las lesiones por accidentes de tráfico", *Gaceta Sanitaria*, vol. 20 (Supl. 1), 79-87.

## Ponencia 14

# EXPERIMENTACIÓN EN SEGUROS: APLICACIÓN AL ESTUDIO DEL FRAUDE

Ignacio Moreno Gabaldón, Francisco José Vázquez Hernández  
y Richard Watt

### 1. INTRODUCCIÓN

Hasta hace poco tiempo, la Economía se consideraba una ciencia no experimental que tenía que apoyarse en la observación del mundo real más que en experimentos de laboratorio, método por otro lado frecuente en las ciencias físicas y naturales. Esta percepción ha cambiado en las últimas décadas, en las que se han abierto nuevas metodologías de investigación experimentando en el entorno controlado de un laboratorio. Las enseñanzas extraídas de lo que ya se conoce como *economía experimental* son útiles tanto para los investigadores como para los responsables de la política económica y pueden aplicarse a una gran diversidad de problemas, como por ejemplo al estudio del comportamiento de los mercados o a la economía de los recursos naturales.

Siguiendo a Vernon Smith (quien recibió el Premio Nobel de Economía en 2002 por sus aportes en este campo), la economía experimental aplica métodos de laboratorio para estudiar las interacciones de los seres humanos en los contextos sociales gobernados por reglas explícitas o implícitas. Las reglas explícitas suelen estar definidas por secuencias controladas por el experimentador y por la información sobre los eventos que ocurren en juegos entre  $n$  ( $>1$ ) personas con pagos (*payoffs*) definidos, aunque también pueden venir dadas por el escenario considerado (por ejemplo, definidas por una subasta o por otra institución de mercado). Las reglas implícitas son normas, tradiciones y hábitos que las personas traen consigo al laboratorio como parte de su herencia evolutiva cultural y biológica; normalmente estas reglas no son controladas por el experimentador.

Los resultados experimentales (el orden final de la distribución de recursos que es observado y replicable) se entienden como la consecuencia de la toma de decisiones individuales, determinadas por el ambiente económico (compuesto por las preferencias de los agentes, así como por sus conocimientos, habilidades, distribución inicial de recursos, y restricciones) y por las reglas de interacción (proporcionadas generalmente por una institución determinada). Quizás la enseñanza más importante de la economía experimental es que las instituciones importan porque las reglas

importan, y las reglas importan porque los incentivos importan. Pero algunas veces los incentivos a los que responden las personas no son aquellos que uno esperaría de acuerdo a los supuestos típicos de la teoría económica. Estas “contradicciones” proporcionan importantes pistas sobre las reglas implícitas y pueden motivar nuevas hipótesis teóricas para la experimentación en el laboratorio. De esta forma, la importancia de la economía experimental dentro del conjunto de la ciencia económica claramente radica en que su uso permite la contrastación de supuestos y teorías mediante un estudio directo de las decisiones que toman los individuos.

Aunque la metodología experimental está ya hoy en día plenamente aceptada e integrada en la Economía y, en general, en las Ciencias Sociales, constituyendo además un fecundo campo de investigación, en el área de Seguros su utilización es poco frecuente. Sin embargo, en ciertos problemas, como por ejemplo en el estudio del fraude, la experimentación controlada en un laboratorio puede ofrecer ventajas significativas respecto a la investigación con datos empíricos. En particular, dado que la experimentación permite hacer una simulación con un grado de realismo bastante aceptable, debe permitir observar de un modo preciso y claro el fraude real que efectivamente cometen los individuos, algo imposible de verificar y cuantificar con exactitud mediante el análisis de los datos reales de los que disponen las compañías aseguradoras (relativos al fraude detectado). Por ello, en este trabajo nos planteamos abordar el estudio del fraude en el mercado de seguros aplicando una metodología experimental.

No cabe duda de que el fraude en el mercado de seguros constituye un problema de gran importancia tanto para la industria aseguradora como para los propios asegurados, que ven encarecidas las primas por el comportamiento ilícito de los defraudadores. Ningún ramo del sector asegurador escapa: seguros de automóvil, de hogar, de salud, de vida, marítimos, etc., en todos ellos es posible encontrar comportamientos oportunistas.

El fraude en los seguros es consecuencia del problema de información asimétrica que existe entre el asegurado y el asegurador. Cuando un asegurado hace una reclamación a la compañía aseguradora, éste sabe lo que ha ocurrido, pero la compañía no. Esta circunstancia otorga al asegurado una ventaja sobre la compañía aseguradora que puede materializarse en forma de fraude. Adicionalmente, el problema se ve agravado, tal y como muestran distintos estudios, por el hecho de que el fraude a las compañías de seguros no está mal visto por un sector importante de la sociedad, que no considera este fenómeno como moralmente ilícito, o al menos piensa que es algo “aceptable” (Tennyson, 2002).

Por tanto, las compañías aseguradoras se enfrentan al problema de distinguir aquellas reclamaciones fraudulentas de las que no lo son, utilizando para ello distintos instrumentos de inspección de las reclamaciones, lo que ocasiona un coste para las empresas y, en consecuencia, repercute en las primas de todos los asegurados. Frente a esta opción, algunos trabajos recientes sugieren la posibilidad de que los contratos de seguro de tipo bonus-malus, y más concretamente, los sistemas de tarificación con cambios en las primas en función de la cuantía de las

reclamaciones efectuadas con anterioridad, pueden tener un efecto desincentivador del fraude (véase Moreno, Vázquez y Watt, 2006, en donde se presenta un esquema teórico que permite eliminar el fraude en su totalidad sin recurrir al uso de inspecciones).

En este trabajo se pretende estudiar el efecto que distintos tipos de contratos de seguros tienen sobre la actitud hacia el fraude de los asegurados, y en particular, si los contratos basados en una tarifa bonus-malus podrían tener un efecto disuasorio del fraude sobre los individuos sin necesidad de recurrir a la amenaza de una inspección por parte de la empresa aseguradora. No existen estudios empíricos que aborden el tipo de conexión existente entre el formato de contratos bonus-malus y el problema del fraude en el mercado de seguros, por lo que, con el fin de contrastar esta hipótesis se recurre al uso de la economía experimental.

Desde el punto de vista de esta investigación, la utilidad de la economía experimental en el estudio de la honradez de los individuos cuando se enfrentan a situaciones de aseguramiento bajo distintos tipos de contratos es clara y, de hecho, ya hay trabajos que han utilizado esta metodología para analizar si los contratos de franquicia predisponen a los individuos a cometer fraude (Miyazaki, 2008). También se ha utilizado la economía experimental para analizar la percepción ética que tienen los individuos del fraude (Dean, 2004).

## **2. DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO**

La investigación experimental se programó en Z-Tree (Zurich Toolbox for Ready-made Economic Experiments), que es el software estándar en el área de Economía Experimental, y se llevó a cabo el día 21 de diciembre de 2010 en el Laboratorio de Empresa y Economía Experimental (LEXBE) de la Universidad Pablo de Olavide de Sevilla. En total, participaron 154 sujetos (79 hombres y 75 mujeres), en su mayoría estudiantes de la Universidad Pablo de Olavide y de la Universidad de Sevilla, que se distribuyeron en 8 sesiones (4 de mañana y 4 de tarde), con una duración aproximada de 45 minutos cada una de ellas.

Los participantes se enfrentaron a distintas situaciones de riesgo, teniendo la posibilidad de tomar con anterioridad decisiones sobre aseguramiento; una vez producidas las pérdidas, se daba completa libertad para decidir la cantidad que se reclamaba a la compañía aseguradora (el proceso además garantizaba el anonimato). Liberadas (en la medida de lo posible) de connotaciones morales (o al menos sin vinculación con el escenario propuesto), estas decisiones sólo podían depender de los efectos que producían. Así, en un primer escenario, la cuantía de las reclamaciones afectaba a las primas que se pagaban en los períodos siguientes, simulando de esta forma un entorno de aseguramiento de tipo bonus-malus (Formato Bonus-Malus, FBM); en el segundo escenario la prima era fija, pero a cambio se efectuaban, con cierta probabilidad, inspecciones de las reclamaciones efectuadas (Formato de Prima Fija, FPF). Con este planteamiento, el objetivo resi-

de en la comparación entre las cuantías de las reclamaciones en ambos escenarios, tratando de identificar aquellas situaciones con una mayor capacidad de generar declaraciones fraudulentas.

Ambos formatos (FBM y FPF) están divididos en dos fases, la Fase I, destinada a determinar la asignación monetaria inicial y la Fase II, que comprende los escenarios de aseguramiento.

La Fase I, común a ambos formatos, tiene dos finalidades; en primer lugar, una parte de la asignación inicial monetaria con la que van a contar los individuos para el desarrollo del experimento se hace depender de su esfuerzo y habilidad; en segundo lugar, la prueba sirve de experiencia a los individuos para determinar cuáles pueden ser sus posibles pérdidas en los escenarios de pérdidas asegurables. Esta Fase I comprende cuatro pruebas, cada una de las cuales consiste en que cada individuo debe copiar correctamente, contra-reloj, una secuencia de caracteres. El tiempo empleado en teclear cada una de las secuencias determina la asignación monetaria inicial con la que el individuo comenzará la Fase II. Las pruebas consisten en escribir, utilizando el teclado de un ordenador, cuatro secuencias de 20 caracteres individuales. Las secuencias de caracteres difieren en términos de dificultad y en todos los casos se trata de caracteres que son visibles en el teclado español. Las secuencias más sencillas incluyen solo letras (mayúsculas y minúsculas) y números, las más difíciles contienen grupos de símbolos tales como &, @, 7, etc. El tiempo total del que disponen los individuos para copiar cada una de las secuencias es de 40 segundos por secuencia. Los individuos inician cada una de las cuatro sesiones con un total de 14 euros. Si en una sesión el participante es capaz de copiar correctamente la secuencia de caracteres en los 10 primeros segundos, gana 14 euros; sin embargo, a partir de esos 10 primeros segundos, deja de ganar 10 céntimos de euro por cada segundo adicional empleado, hasta tener una ganancia final de 11 euros si no es capaz de teclear la secuencia en menos de 40 segundos.

Al cabo de las cuatro sesiones iniciales, la asignación inicial de cada individuo podrá oscilar entre los 56 euros, para el más rápido con un tiempo por sesión de entre 0 y 10 segundos, y los 44 euros, para el más lento con un tiempo por sesión mayor o igual a 40 segundos.

En la Fase II los sujetos observan, en cuatro pantallas consecutivas, 4 grupos de nuevos caracteres que deben copiar contra el reloj. El procedimiento es el mismo que en la Fase I, con la salvedad de que ahora, por cada segundo que se tarde de más sobre los 10 iniciales, cada individuo pierde 50 céntimos de euro. Las pérdidas posibles en cada una de estas cuatro etapas oscilan entre los 0 y los 15 euros. Por tanto, un individuo que tarde 10 o menos segundos en teclear cada una de las cuatro secuencias de caracteres de la Fase II, acabará perdiendo 0 euros sobre la asignación inicial obtenida en la Fase I. En la situación opuesta, un individuo que tarde 40 segundos en completar cada una de las cuatro secuencias de la Fase II (que representa el máximo tiempo posible invertido), acabará perdiendo

$0,50 \times 30 = 15$  euros por sesión y un total de  $4 \times 15 = 60$  euros al cabo de las cuatro sesiones.

Para cubrir las posibles cuatro pérdidas, a los participantes se les da la opción (no obligatoria) de contratar un seguro. El seguro puede ser de dos tipos, un contrato con cobertura completa, que cubre por la totalidad de las pérdidas, y un seguro con una franquicia de 5 euros (nótese que una pérdida de 5 euros supone que el individuo ha tardado 15 segundos en escribir la secuencia de caracteres). Las primas se pagan al comienzo de cada etapa, antes de escribir la correspondiente secuencia de caracteres. En el FBM, las dos primeras reclamaciones (relativas a las dos primeras secuencias escritas) afectan al valor de la siguiente prima; por el contrario, las dos últimas reclamaciones no afectan a las primas posteriores (prima fija), pero tienen una probabilidad  $p_i$  de ser inspeccionadas. En el FPF, ninguna reclamación afecta a la prima siguiente y todas ellas tienen probabilidad  $p_i$  de ser inspeccionadas.

**Figura 1**  
Descripción de los dos formatos

**FBM**

<i>Etapa 1</i>	<i>Etapa 2</i>	<i>Etapa 3</i>	<i>Etapa 4</i>
Bonus-malus	Bonus-malus	Prima fija (inspección)	Prima fija (inspección)

**FPF**

<i>Etapa 1</i>	<i>Etapa 2</i>	<i>Etapa 3</i>	<i>Etapa 4</i>
Prima fija (inspección)	Prima fija (inspección)	Prima fija (inspección)	Prima fija (inspección)

Una vez que un participante ha escrito una secuencia de caracteres, lo que le ocasiona una pérdida monetaria, si tiene contratado un seguro, decide libremente la cantidad que reclama a la compañía aseguradora. Si está en una etapa con bonus-malus, la cantidad reclamada incrementa la prima de la siguiente etapa. Si está en una etapa con prima fija, el resultado de una lotería determina si se inspecciona o no; en caso de inspección, la compañía sólo hace frente a la pérdida real sufrida e impone una multa sobre la cantidad reclamada de más. Hay 8 parámetros fundamentales en el desarrollo de la Fase II del experimento:



1. El incremento proporcional en la prima que se sufre tras declarar una pérdida en la primera etapa en el FBM:  $\lambda_1=0,3$ .
2. El incremento proporcional en la prima que se sufre tras declarar una pérdida en la segunda etapa en el FBM:  $\lambda_2=0,45$ .
3. La probabilidad de inspección en las dos últimas etapas del FBM y en las 4 etapas del FPF:  $p_j=0,5$ .
4. La penalización proporcional que se aplica en las dos últimas etapas del FBM y en las 4 etapas del FPF en el caso de que una inspección sea llevada a cabo y se descubra fraude:  $\gamma=0,8$ .
5. La prima inicial en la primera etapa del FBM por el contrato con cobertura completa:  $p_{1,c}^1=3$ .
6. La prima inicial en la primera etapa del FBM por el contrato con franquicia:  $p_{1,f}^1=0,25$ .
7. La prima que se paga en todas las etapas del FPF por el contrato con cobertura completa:  $p_c^2=6,375$ .
8. La prima que se paga en todas las etapas del FPF por el contrato con franquicia:  $p_f^2=1,375$ .

Las razones de elegir estos valores son las siguientes: primeramente, la probabilidad de inspección se fija en 0,5 por sencillez en la comprensión y en la realización del experimento, puesto que esta lotería puede ser llevada a cabo mediante el lanzamiento de una moneda; el resto de parámetros han sido determinados con el fin de que exista incentivo a asegurarse, que exista incentivo a cometer fraude, y que el incentivo a defraudar sea igual en los distintos contratos y escenarios de pérdidas (los cálculos se hicieron para un individuo “promedio”, con un tiempo medio de 25 segundos de tecleo, y bajo el supuesto de neutralidad al riesgo estricta).

Con el objeto de que todos los participantes tuviesen la opción de defraudar, se diseñaron tres tipos de secuencias de caracteres, con las que debían enfrentarse los participantes en la Fase II de aseguramiento y que dependían del tiempo que hubieran tardado en completar las cuatro secuencias iniciales, correspondientes a la etapa de asignación monetaria inicial: (a) fáciles, para aquellos individuos que en promedio hubieran tardado 35 o más segundos en completar cada una de las cuatro fases iniciales; (b) medias, para individuos con tiempos medios de tecleo entre 25 y 35 segundos; y (c) difíciles, para tiempos de tecleo inferiores a 25 segundos.

En un experimento que pretende analizar un posible comportamiento deshonesto de los individuos, como es el fraude, y de cara a que estos tomen sus decisiones libremente, se debe simular una situación tan real como sea posible y ello implica que los sujetos en ningún momento deben tener la percepción de que pueden ser observados por otra persona, como por otra parte sucedería en la realidad. Este problema se soluciona garantizando el pleno anonimato de los participantes del siguiente modo. Dado que los puestos del laboratorio de experimentos están numerados, cada individuo dispone de una tarjeta plastificada que se ha situado previamente sobre la mesa con el número del puesto en el que se va a sentar. En otra sala contigua al laboratorio, la operadora de la sala maneja un servidor en el que quedan grabadas todas las decisiones que los individuos han introducido en su monitor con el número del puesto correspondiente. Al terminar la sesión, el servidor saca un listado en el que únicamente figuran el número de cada puesto y la ganancia que le corresponde. El individuo pasa a una sala contigua al laboratorio y se identifica con su tarjeta; en ese momento se le abona la cantidad correspondiente, sin que en ningún momento se pueda relacionar su nombre con las decisiones que ha tomado en el transcurso del experimento.

El diseño del FBM merece una última aclaración. El objetivo principal del experimento reside en la comparación entre el comportamiento fraudulento en los contratos con tarificación de tipo bonus-malus, y los contratos con prima fija pero con posibles inspecciones, lo que exige de una serie de supuestos simplificadores de la realidad. El primero de ellos se refiere precisamente al diseño del tipo de contrato bonus-malus, que realmente es un contrato de aprendizaje en el que solo hay malus, o incrementos de la prima ante la cuantía de los siniestros declarados previamente. El segundo supuesto implica que, de las cuatro etapas consideradas en el FBM, las dos primeras son las que comprenden el contrato con aprendizaje, mientras que en las dos últimas, el contrato es de prima fija con inspecciones como herramienta disuasoria del fraude. Esto se debe, por un lado, a que es absolutamente necesario que en la última etapa haya inspección, pues de otro modo, lo racional sería defraudar en ese periodo por la máxima cuantía posible, habida cuenta de que el contrato se acaba en ese periodo y por tanto ya no hay posibilidad de penalización mediante el incremento de la prima; por otro lado, el considerar dos etapas finales con prima fija permite suavizar los incrementos en las primas (los malus de las dos primeras etapas) derivados de las reclamaciones efectuadas.

### **3. RESULTADOS DEL EXPERIMENTO**

Del total de 154 individuos que participaron en el experimento, 99 individuos lo hicieron en el FBM, mientras que los 55 restantes formaron el grupo de participantes en el FPF. De los 99 individuos que participaron en el FBM, 48 eran mujeres, lo que representa un 48,5%, mientras que en el FPF, de los 55 participantes 27 fueron mujeres, lo que representa un 49,09% del total; por tanto, las proporciones de hombres y de mujeres estuvieron bastante equilibradas en ambos formatos.

Dado que el experimento busca el análisis del comportamiento de los individuos en relación al fraude cuando se enfrentan a distintos tipos de contratos, es claro que deben cumplirse dos premisas para que el experimento pueda tener éxito: en primer lugar los individuos deben asegurarse y, en segundo lugar, los individuos deben tener la posibilidad de defraudar. Respecto del primer objetivo, cabe destacar que en el FBM se aseguraron 98 de los 99 participantes, mientras que en el FPF se aseguraron los 55 individuos que participaron. De los individuos que decidieron asegurarse en el FBM, 62, un 63,27% del total, escogieron el contrato con cobertura completa, mientras que en el FPF lo eligieron 35 personas, un 63,64% del total. Es interesante destacar la similitud de ambos datos, prácticamente iguales para ambos formatos, lo que muestra que en ambos grupos existió la misma preferencia por el contrato de cobertura completa respecto del de franquicia, siendo la preferencia por el contrato de cobertura completa sensiblemente superior a la mostrada por el contrato de franquicia.

**Tabla 1**  
Estadística descriptiva FBM

Nº de participantes: 99.					
Nº de participantes asegurados: 98 (98,99% del total) [48 mujeres (48,5%)]					
Tipo de seguro					
Cobertura Completa: 62 (63,27%)					
Franquicia: 36 (36,73%)					
Nº de observaciones (4 × 99): 392					
Nº de participantes asegurados que tuvieron la oportunidad de defraudar: 98 (100%)					
Nº de participantes que nunca defraudaron: 22 (22,45%);					
Mujer: 12 (54,55%); Hombre: 10 (45,45%)					
	<b>Media</b>	<b>DT</b>	<b>Mediana</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>
Pérdida sufrida (euros)	35,05	9,09	34,00	9,00	54,50
Reclamación (euros)	40,75	10,15	41,50	15,00	60,00
Posibilidad de fraude (euros)	24,74	8,76	26,00	5,50	40,00
Fraude posible / (60 ó 40) (%)	48,95%	20,66%	47,50%	9,17%	100,00%
Fraude (euros)	7,15	6,68	5,25	0,00	27,00
Fraude / Posibilidad de fraude (%)	28,94%	26,41%	24,12%	0,00%	100,00%
Nº veces con posibilidad fraude	3,51	0,75	4,00	1,00	4,00
Nº veces con posibilidad fraude / 4	87,76%	18,74%	100,00%	25,00%	100,00%
Nº veces defrauda	1,88	1,39	2,00	0,00	4,00
Nº veces defrauda / Nº vpf (%)	51,02%	36,22%	50,00%	0,00%	100,00%
Infrarreclamaciones	38	2,42%	del total de reclamaciones		

El segundo objetivo también se cumplió satisfactoriamente: de los 98 asegurados en el FBM, todos ellos (100%) tuvieron la posibilidad de defraudar en al menos una ocasión a lo largo de las 4 etapas, mientras que en el FPF tuvieron la oportunidad 53 de los 55 participantes (96,36%). Sin embargo, en el FBM, 22 individuos nunca lo hicieron (un 22,45% del total de individuos asegurados con posibilidad de defraudar), de los que 12 (un 54,55%) fueron mujeres; en el FPF fueron 8 los que, teniendo la ocasión, decidieron no defraudar (el 15,09%), 4 mujeres (el 50%) y 4 hombres. No parece por tanto revelarse una significativa mayor predisposición a defraudar en función del sexo del participante.

**Tabla 2**  
Estadística descriptiva FPF

Nº de participantes: 55					
Nº de participantes asegurados: 55 (100% del total) [27 mujeres (49,09%)]					
Tipo de seguro:					
Cobertura Completa: 35 (63,64%)					
Franquicia: 20 (36,36%)					
Nº de observaciones (4 × 55): 220					
Nº de participantes asegurados que tuvieron la oportunidad de defraudar: 53 (96,36%)					
Nº de participantes que nunca defraudaron: 8 (15,09%);					
Mujer: 4 (50%); Hombre: 4 (50%)					
	<b>Media</b>	<b>DT</b>	<b>Mediana</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>
Pérdida sufrida (euros)	38,45	10,89	39,50	20,00	60,00
Reclamación (euros)	46,98	9,74	48,00	27,00	60,00
Posibilidad de fraude (euros)	21,38	10,64	20,50	0,00	39,00
Fraude posible / (60 ó 40) (%)	43,13%	25,59%	40,00%	0,00%	97,50%
Fraude (euros)	9,34	8,09	8,50	0,00	31,50
Fraude / Posibilidad de fraude (%)	45,29%	32,79%	44,44%	0,00%	100,00%
Nº veces con posibilidad fraude	3,16	1,01	3,00	0,00	4,00
Nº veces con posibilidad fraude / 4	79,1%	25,4%	75,0%	0,0%	100,0%
Nº veces defrauda	2,30	1,31	3,00	0,00	4,00
Nº veces defrauda / Nº vpf (%)	69,65%	35,96%	75,00%	0,00%	100,00%
Pérdida sufrida (euros)	38,45	10,89	39,50	20,00	60,00
Infrarreclamaciones	8	0,91%	del total de reclamaciones		

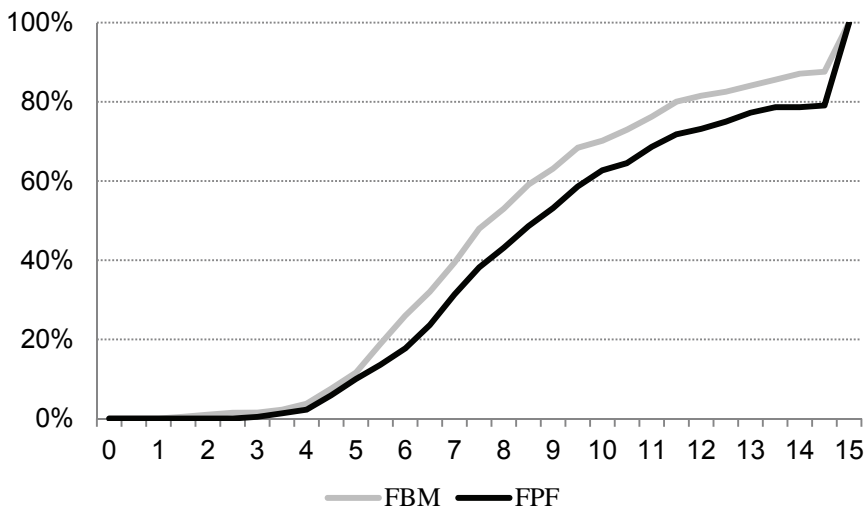
Un dato interesante: en el FBM un 2,42% de las reclamaciones fue por una cantidad inferior a la verdadera pérdida sufrida, mientras que en el FPF la cifra es sólo

del 0,91%. Sin duda esta diferencia se debe al fenómeno del “hambre de bonus” (véanse Philipson, 1960 y Lemaire, 1977), por el que algunos individuos deciden no declarar una pérdida bajo el contrato bonus-malus, si con ello piensan que el incremento subsiguiente en la prima les supondrá una pérdida neta negativa. En cualquier caso, la incidencia de este fenómeno en el experimento fue muy poco significativa.

La Figura 2 viene a corroborar, más si cabe, lo expuesto anteriormente respecto al éxito del diseño del experimento, pues en cada etapa, para el FBM más del 80% de las observaciones, relativas a la cuantía del siniestro por cada etapa, fueron inferiores a los 12 euros, mientras que en el FPF algo más del 70% de los siniestros se situaron por debajo de los 12 euros, lo que significa que un número muy significativo de siniestros estuvo por debajo de los 15 euros en ambos formatos, con la consiguiente posibilidad de defraudar.

Adicionalmente, en la misma figura se aprecia una dominancia estocástica de la distribución de pérdidas bajo FPF respecto al FBM. Según este gráfico, en cada etapa, las pérdidas fueron superiores en el FPF a las sufridas en el FBM, lo que denota una mayor posibilidad de defraudar en cada etapa bajo el FBM que bajo el FPF.

**Figura 2**  
Frecuencia relativa acumulada de la cuantía del siniestro

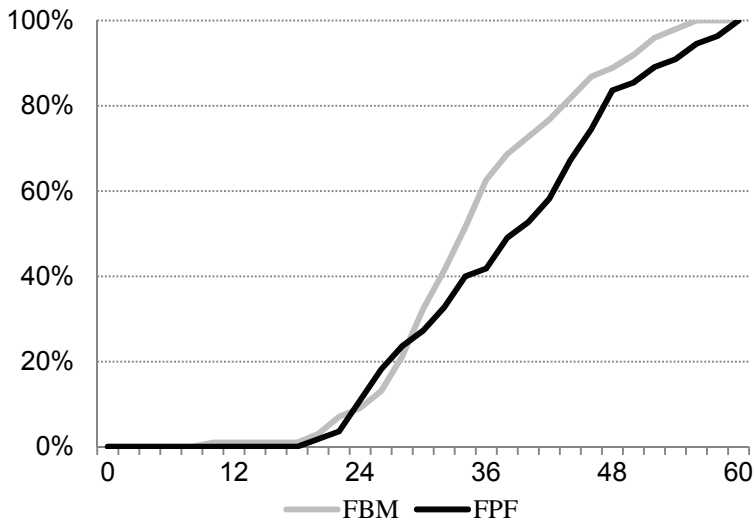


En cuanto a las pérdidas totales sufridas por cada individuo al cabo de las 4 etapas, en la Figura 3, que compara las frecuencias relativas acumuladas de las pérdidas totales (suma de todas las pérdidas sufridas en las 4 etapas) para ambos formatos, se aprecia con bastante claridad que la gráfica del FBM se sitúa en prác-

ticamente todos los puntos por encima de la correspondiente al FPF, mostrando de nuevo una dominancia estocástica de la distribución de pérdidas totales del FPF respecto del FBM.

También se observa que, para el FBM, más del 80% de las pérdidas totales estuvieron por debajo de los 44 euros, lo que permitió un fraude total de 16 euros para más del 80% de los individuos, mientras que para el FPF, aunque algo más modestos, los datos son también bastante buenos, dado que más de un 74% de los individuos sufrió una pérdida total por debajo de 46 euros, lo que les daba un margen para defraudar en términos globales de 14 euros, hasta los 60 que suponía la pérdida total máxima posible<sup>1</sup>.

**Figura 3**  
Comparación de las frecuencias relativas acumuladas de las pérdidas totales

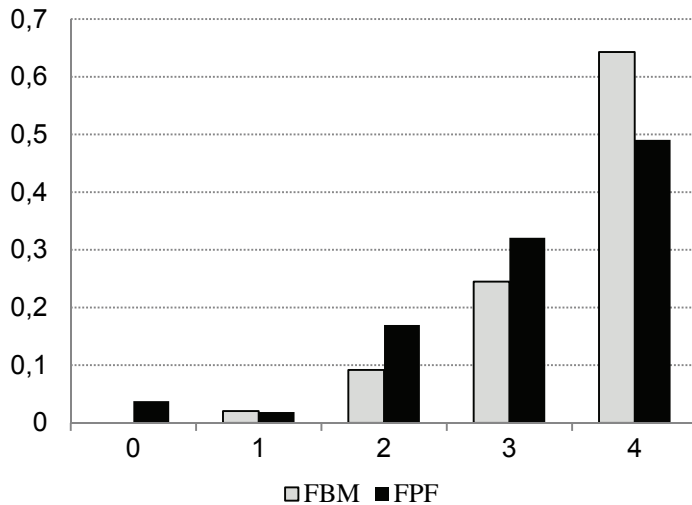


En cualquier caso, a tenor de estos datos, parece claro que la posibilidad de fraude resultó mayor para el FBM que para el FPF. Siguiendo con la línea anterior, la Figura 4 muestra el porcentaje de veces que fue posible cometer fraude de entre las cuatro etapas consideradas.

<sup>1</sup> Nótese que la cuantía máxima de fraude por sesión es de 15 euros para los individuos asegurados con cobertura completa, y de 10 euros para los seguros con franquicia de 5 euros. Por tanto, la cuantía máxima de fraude total es de 60 euros para cobertura completa y de 40 euros para seguros con franquicia.

**Figura 4**

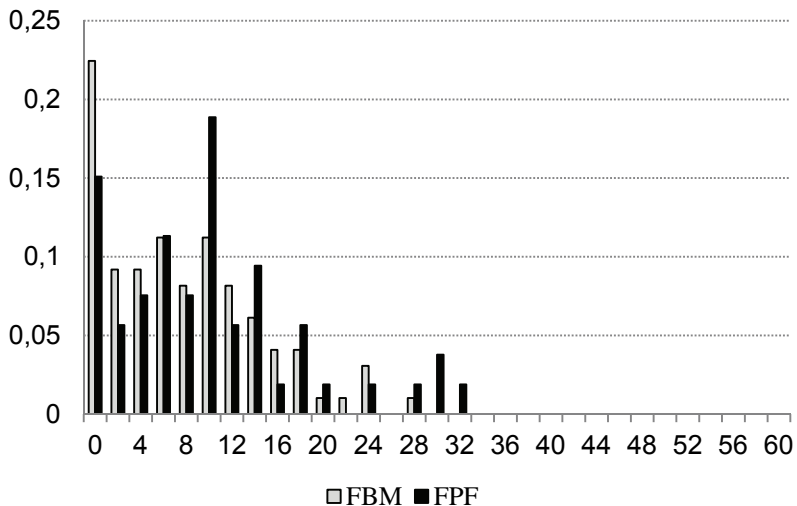
Frecuencia relativa del número de etapas con posibilidad de fraude



En promedio, en el FBM los individuos tuvieron la posibilidad de defraudar en un 87,76% de las veces, mientras que en FPF la cifra se reduce al 79,1%. Este hecho es completamente casual y debido sólo a una mayor rapidez de escritura de los individuos en el FPF.

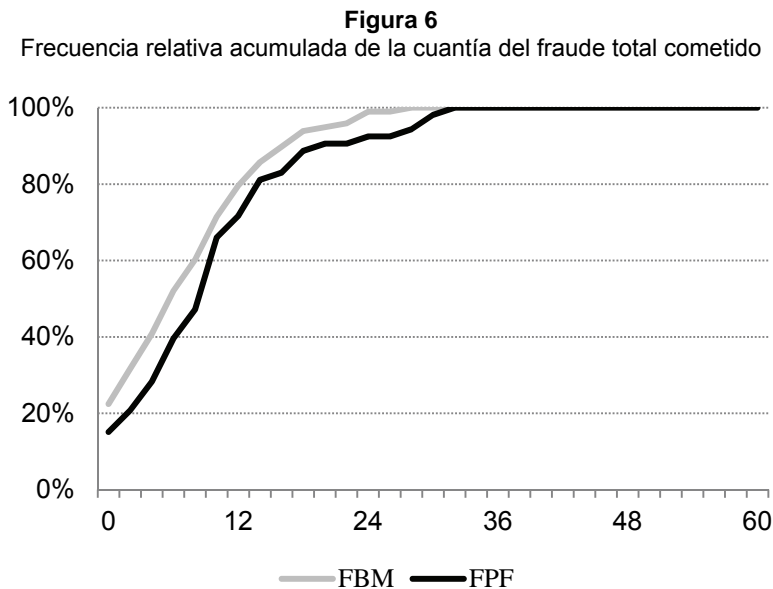
**Figura 5**

Frecuencia relativa de la cuantía del fraude total cometido



Después de haber analizado la posibilidad de fraude en sus dos vertientes (cuantía y número de ocasiones) en ambos formatos, resta por analizar cómo fue realmente el fraude en el que incurrieron los individuos en el FBM y en el FPF para poder determinar si efectivamente uno de los dos formatos provoca en los individuos una menor tendencia al fraude. En la Figura 5 se muestran los histogramas de la cuantía del fraude total cometido en los formatos FBM y FPF respectivamente.

Se observa que lo más frecuente en el FBM es no cometer fraude (la moda de la distribución refleja una cuantía de 0 euros), presentando un substancial mayor número de ocurrencias que cualquier otro intervalo del histograma. No ocurre lo mismo en el FPF; en este formato, aunque la moda también se encuentra en 0 euros, se tiene en el intervalo (8,10] un mayor número de casos. Además, parece advertirse una tendencia mayor hacia el fraude en el FPF (con aparente mayor valor del fraude medio).

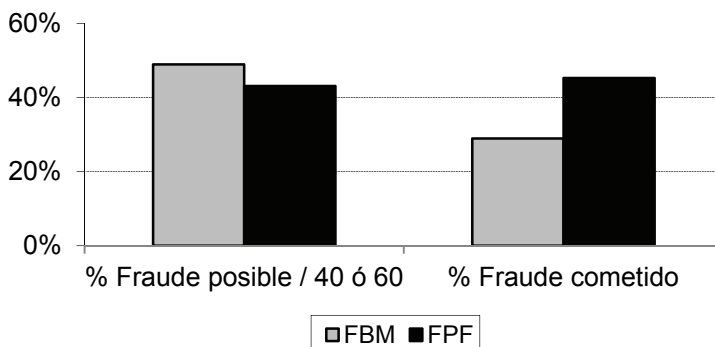


Estas sospechas iniciales parecen corroborarse de manera más fehaciente al observar la Figura 6, puesto que la gráfica con la frecuencia relativa acumulada en el FBM está siempre por encima de la correspondiente al FPF, lo que quiere decir que, fijada cualquier cuantía máxima de fraude, el porcentaje de individuos en FBM es superior al correspondiente en FPF, por lo que el fraude superior a esa cuantía tiene un mayor predominio en FPF que en FBM. Dicho de otro modo, fijado un porcentaje de individuos (medido en el eje vertical), siempre hay más fraude acumulado (medido en el eje horizontal) en la curva FPF que en la curva FBM.



**Figura 7**

Promedios de la cuantía del fraude posible y de fraude cometido



Considerando que la posibilidad de cometer fraude fue también, en términos generales, superior bajo el FBM que bajo el FPF (48,95% en FBM frente al 43,13% en FPF sobre 60 ó 40 euros respectivamente), los datos son, si cabe aún más demoledores a favor de que el fraude cometido bajo el FPF fue superior al registrado bajo el FBM, puesto que, bajo el FBM los individuos defraudaron menos aun cuando su posibilidad de defraudar era mayor de la que disponían bajo el FPF.

**Tabla 3**

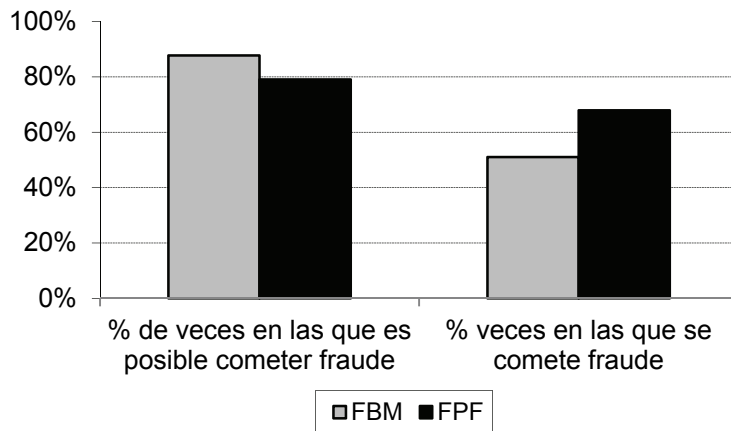
Promedio de la cuantía del fraude cometido respecto del fraude posible

Grupos	Posibilidad de fraude sobre 40 ó 60	Fraude cometido sobre posibilidad de fraude
FBM	48,95%	28,94%
FPF	43,13%	45,29%

Los resultados obtenidos son muy reveladores, de hecho, por término medio, un individuo bajo el FBM defraudó 28,94 céntimos de euro por cada euro disponible para defraudar, mientras que, bajo el FPF, en promedio defraudó poco más de 45,29 céntimos, lo que representa nada más y nada menos que un 56,50% más. El análisis de varianza de los datos rechaza la hipótesis nula de igualdad de medias para ambos formatos (nivel de significación del 5%), con lo que se puede concluir que efectivamente, el FBM tuvo un claro efecto desincentivador del fraude respecto del FPF, corroborando la hipótesis de partida planteada al comienzo de esta investigación.

**Figura 8**

Promedios de casos de fraude posible y de fraude cometido



Resultados similares arroja el estudio del número de casos en los que se defraudó frente al número de casos posibles. En promedio, los individuos en el FBM defraudaron en un 51,02% de las ocasiones en las que tuvieron oportunidad, mientras que bajo el FPF el resultado es de un 69,65% del total de ocasiones posibles, en definitiva, un 36,52% más. Dicho de otro modo, por cada 10 veces con posibilidad de fraude, bajo el FBM un individuo habría defraudado en prácticamente 5 ocasiones, mientras que bajo el FPF lo habría hecho en 7.

Adicionalmente, conviene recordar que las posibilidades de defraudar fueron mayores bajo el FBM que bajo el FPF, de modo que, aun pudiendo defraudar en un mayor número de ocasiones, los individuos bajo el FBM lo aprovecharon menos que aquellos bajo el FPF. Estos datos son corroborados por el análisis estadístico de varianza, donde se rechaza la hipótesis nula de igualdad de medias para ambos casos con un nivel de significación del 5%. Si antes quedó patente que bajo el FBM se defraudó en una menor cuantía que bajo el FPF, ahora los datos reafirman que también se defraudó en un menor número de ocasiones.

**Tabla 4**

Promedio del número de veces en las que se cometió fraude respecto del número posible

Grupos	Veces en las que es posible cometer fraude	Veces en las que se comete fraude
FBM	87,76%	51,02%
FPF	79,09%	67,91%

En resumen, y a modo de conclusión final, presentamos las siguientes reflexiones sobre los resultados obtenidos. En primer lugar, conviene no olvidar que la única diferencia entre los formatos de los experimentos FBM y FPF ha estado en las dos primeras secuencias: en el FBM las reclamaciones afectaban a las primas posteriores (simulando un escenario con contratos del tipo bonus-malus), mientras que en el FPF no había variación en el valor de las primas, pero a c se introducía la posibilidad de que las reclamaciones efectuadas fueran inspeccionadas. Por ello, las diferencias en cuanto a las decisiones tomadas sólo pueden ser explicadas con base en esta diferencia en el formato de contrato.

En este sentido, los resultados obtenidos muestran de manera nítida una mayor propensión a presentar reclamaciones fraudulentas en el FPF que en el FBM, tanto en el número de casos como en las cuantías de las reclamaciones, siendo esta diferencia aceptada con significación estadística. No parece haber lugar a duda alguna: el escenario FBM tiene un claro efecto desincentivador del fraude.

## **BIBLIOGRAFÍA**

Dean, D. H. (2004). "Perceptions of the Ethicality of Consumer Insurance Claim Fraud". *Journal of Business Ethics*, 54, 67-79.

Lemaire, J. (1977). "La Soif du Bonus". *ASTIN Bulletin*, 9, 181-190.

Miyazaki, A.D. (2008). "Perceived Ethicality of Insurance Claim Fraud: Do Higher Deductibles Lead to Lower Ethical Standards?". *Journal of Business Ethics*, 87, 589-598.

Moreno, I., Vázquez, F. J. & Watt, R., (2006). "Can Bonus-Malus Alleviate Insurance Fraud?". *Journal of Risk and Insurance*, 73, 123-151.

Philipson, C. (1960). "The Swedish System of Bonus". *ASTIN Bulletin*, 1, 134-141.

Smith, V.L. (1994). "Economics in the Laboratory". *Journal of Economic Perspectives*, 8, 113-131.

Tennyson, S. (2002). "Economic Institutions and Individual Ethics: A Study of Consumer Attitudes Toward Insurance Fraud". *Journal of Economic Behavior and Organization*, 32 (2), 247-265.

## Ponencia 15

# ANÁLISIS Y TARIFICACIÓN EN SEGUROS DE SALUD GRUPO

Arely Ornelas Vargas

### 1. INTRODUCCIÓN

Una de las fases principales de la tarificación es la selección de los factores de riesgo, pues hace falta separar a los asegurados de tal manera que se encuentren características que se correlacionen con la siniestralidad y que además expliquen un gran porcentaje de la varianza de los montos reclamados.

En este artículo se pretenderá estimar las primas de riesgo, tal que, las primas obtenidas representen la mejor predicción del monto de los siniestros que ocurrirán en la cartera o portafolio, es decir, primas acordes a los tipos de riesgo que se estén suscribiendo con la finalidad de incrementar la rentabilidad de la cartera cobrando primas suficientes, esto es, tarifas cuyas primas netas permitan hacer frente a pagos de siniestros, así como a las obligaciones derivadas de la operación del seguro, tales como las comisiones de agentes y gastos de administración.

En primer lugar se presenta de manera general el método de *Mínimo bias*. En segundo lugar se presenta el análisis realizado aplicando el método descrito a datos reales de una aseguradora y además se muestra la aplicación para datos públicos concernientes a las aseguradoras que ofrecen productos en el ramo de Salud en México.

A partir de los valores estimados de la severidad se procede al cálculo de la prima pura para cada clase identificada.

### 2. MÍNIMO BIAS

Para poder hacer la tarificación en primer lugar se debe modelar el comportamiento de la severidad de las reclamaciones por cada grupo de interés. Los datos relevantes para poder ajustar un modelo son los pares  $(c_i, y_i)$ , donde  $c_i$  y  $y_i$  denotan el monto medio de las reclamaciones y el recuento de las reclamaciones de la  $i$ -ésima categoría de pólizas, con  $i=1,2,\dots,n$ , por lo cual el monto total de las reclamaciones es igual al producto del recuento de las reclamaciones  $y_i$  y el monto medio de las reclamaciones  $c_i$ , esto es  $y_i \times c_i$ .

Varios métodos han sido estudiados y aplicados por investigadores para la clasificación de riesgos. La mayoría de estos métodos se puede escribir como un modelo de regresión, donde las variables explicativas son los factores de riesgo o factores "rating". Dentro de estos métodos se encuentran el método de Mínimo Bias y el método de Máxima Verosimilitud. La relación que se estudiará enseguida es la de la Severidad de las reclamaciones:  $Y = \frac{\text{Monto Reclamado}}{\text{Número de reclamaciones}}$ .

La variable respuesta y los pesos para el modelo de regresión son el monto medio de las reclamaciones  $c_i$  y el recuento de las reclamaciones  $y_i$ , respectivamente. Denotemos por  $\mathbf{c}$  el vector de monto medio de las reclamaciones,  $\mathbf{y}$  el vector del número de reclamaciones,  $\mathbf{X}$  la matriz de variables explicativas donde la  $i$ -ésima columna es equivalente al vector  $\mathbf{x}_i^T$  y  $\boldsymbol{\beta}$  es el vector de parámetros de dimensión  $p$ . Así,  $x_{ij}$  es el  $ij$ -ésimo elemento de la matriz  $\mathbf{X}$  con valores 0 o 1. En la tabla 1 muestra la estructura deseada de los datos.

**Tabla 1**  
Datos de ejemplo

	$c_i$	$y_i$	$x_{i1}$	$x_{i2}$	$x_{i3}$	$x_{i4}$	$x_{i5}$	$x_{ij}$
1	$c_1$	$y_1$	1	0	0	0	0	1
2	$c_2$	$y_2$	1	0	0	1	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$c_n$	$y_n$	1	0	1	1	0	1

También se define a  $f$  como el vector del monto medio de las reclamaciones ajustadas, como una función de  $\mathbf{X}$  y  $\boldsymbol{\beta}$ . La función  $f$  a utilizar es la correspondiente al modelo multiplicativo (Log-lineal) entonces el valor ajustado para el  $i$ -ésimo categoría de pólizas será:

$$f_i = \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}), \quad (1)$$

El objetivo de la clasificación del riesgo es aproximar el monto medio *observado* de las reclamaciones  $c_i$ , por el monto medio *ajustado* de las reclamaciones  $f_i$  y que estas aproximaciones sean lo más cercanas como sea posible.

## 2.1. Método Mínimo Bias

Bailey y Simon [1] introdujeron el método de Mínimo Bias y propusieron una lista de cuatro criterios para una aceptable clasificación de tarifas:

- Deben reproducir la experiencia de manera general y en cada caso particular, es decir, deben ser balanceadas.
- Deben reflejar la credibilidad relativa de diferentes grupos de pólizas.
- No deben alejarse demasiado de los datos brutos.
- Deben producir una tarifa para cada grupo lo más cercanas posibles a la experiencia real, de tal forma que las diferencias se puedan considerar aleatorias.

Ellos en ese mismo trabajo proponen una manera de probar el primer criterio, calculando para cada experiencia y para el total

$$\frac{\sum_i y_i f_i}{\sum_i y_i c_i} \quad (4)$$

entonces se dice que un conjunto de tarifas es balanceado, es decir, sin sesgo o insesgada, si la ecuación (4) es igual a 1, y de manera automática se tiene que si para cada grupo es insesgada entonces será insesgada para el conjunto de todos los grupos.

De esta idea, Bailey [1] derivó el modelo de Mínimo Bias o Mínimo sesgo mediante el ajuste de la diferencia entre las tarifas observadas y las ajustadas, asumiendo que esta diferencia debería ser igual a cero.

En el caso del modelo de regresión de la severidad de las reclamaciones se puede definir la ecuación de cero sesgo para cada  $j$  ( $j$  parámetros), mediante las diferencias entre los valores ajustados y observados del monto medio de las reclamaciones, considerando además que estas diferencias tienen pesos  $w_i$ ,

$$\sum_i w_i (c_i - f_i) = 0, \quad j=1, \dots, p, \quad w_i = y_i x_{ij}, \quad (5)$$

Para el cuarto criterio, Bailey y Simon [1] sugieren un estadístico basado en la  $\chi^2$ , aunque también este estadístico es adecuado para el segundo y tercer criterio:

$$\hat{\chi}^2 = K \sum_i \frac{y_i}{f_i} (c_i - f_i)^2 \quad (6)$$

Ahora bien, al minimizar  $\hat{\chi}^2$  se obtiene otro modelo de insesgades. Notemos que para cada  $j$ , se tiene que al derivar  $\hat{\chi}^2$  con respecto a  $\beta_j$ ,

$$i \frac{\partial \hat{\chi}^2}{\partial \beta_j} = -K \sum_i \frac{y_i (c_i + f_i)}{f_i^2} (c_i - f_i) \times \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j}$$

donde

$$w_i = \frac{y_i(c_i + f_i)}{f_i^2}$$

Como se ha supuesto el modelo multiplicativo, la primera derivada queda:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \beta_j} = f_i x_{ij} \quad (8)$$

También se puede realizar el ajuste suponiendo una distribución y estimando por máxima verosimilitud. La tabla 2 muestra los pesos asociados a los diferentes ajustes.

**Tabla 2**  
Pesos para el Modelo Multiplicativo

Modelos	$w_i$ donde $\sum w_i(c_i - f_i) = 0$		
Cero bias	$y_i x_{ij}$	Densidad Poisson	$\frac{y_i}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j}$
Mínimo $\chi^2$	$\frac{y_i(c_i + f_i)}{f_i^2} \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j}$	Densidad Exponencial	$\frac{1}{f_i^2} \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j}$
Densidad Normal	$y_i^2 \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j}$	Densidad Gamma	$\frac{y_i}{f_i^2} \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j}$
	$w_i$ donde $\sum w_i(\log c_i - f_i) = 0$		
Densidad Log-Normal	$y_i \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j}$		

En el modelo de regresión la forma de encontrar los parámetros  $\beta_j$ , es minimizando la expresión:

$$\sum_i w_i (c_i - f_i)^2,$$

o bien igualando a cero,

$$\sum_i w_i (c_i - f_i) \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j} = 0 \quad j=1,2,\dots,p.$$

Usando aproximaciones por series de Taylor podemos aproximar el vector  $\beta$  en la primera iteración

$$\beta_{(1)} = (\mathbf{Z}_{(0)}^t \mathbf{W}_{(0)} \mathbf{Z}_{(0)})^{-1} \mathbf{Z}_{(0)}^t \mathbf{W}_{(0)} (\mathbf{c} - \mathbf{s}_{(0)})$$

donde  $\beta_{(0)}$  es un valor inicial del vector  $\beta$ ,  $\mathbf{Z}_{(0)}$  es la matriz de  $n \times p$  con entradas iguales a la primera derivada del valor ajustado evaluada en  $\beta_{(0)}$ :

$$z_{ij(0)} = \left. \frac{\partial f_i(\beta)}{\partial \beta_j} \right|_{\beta = \beta_{(0)}},$$

$W_{(0)}$  es la matriz de pesos diagonal de tamaño  $n \times n$  evaluada en  $\beta_{(0)}$ , y  $\mathbf{s}_{(0)}$  es el vector on renglon  $i$ -ésimo dado por

$$s_i = f_i(\beta_{(0)}) - \sum_{j=1}^p \beta_{j(0)} z_{ij(0)}.$$

En la primera iteración, el vector con los valores iniciales  $\beta_{(0)}$  es necesario para poder calcular  $\beta_{(1)}$ . El proceso de iteración se repite hasta que la solución converge, este método da una convergencia muy rápida.

Para el modelo multiplicativo, el valor del  $ij$ -ésimo elemento de la matriz  $\mathbf{Z}_{(0)}$  está dado por

$$z_{ij(0)} = \left. \frac{\partial f_i(\beta)}{\partial \beta_j} \right|_{\beta = \beta_{(0)}} = f_i(\beta_{(0)}) x_{ij},$$

con lo que la matriz  $\mathbf{Z}_{(0)}$  puede ser reescrita como

$$\mathbf{Z}_{(0)} = \mathbf{F}_{(0)} \mathbf{X},$$

donde  $\mathbf{F}_{(0)}$  es la matriz diagonal de  $n \times n$  cuyo  $i$ -ésimo elemento es  $f_i(\beta_{(0)})$ . Consecuentemente, el vector  $\mathbf{s}_{(0)}$  se puede reescribir como

$$\mathbf{s}_{(0)} = \mathbf{f}(\beta_{(0)}) - \mathbf{F}_{(0)} \mathbf{X} \beta_{(0)}$$

Se puede hacer una rutina para cada uno de los pesos  $w_i$  de la tabla 2.



### **3. APLICACIÓN AL SEGURO DE GASTOS MÉDICOS MAYORES**

#### **3.1. El Seguro de GMM en México**

El Seguro Gastos Médicos Mayores (GMM) está diseñado para cubrir los gastos médicos originados por un accidente y/o enfermedad cubierto en la póliza, una vez que el monto rebasa la franquicia. Se enfoca a restaurar y rehabilitar la salud del asegurado, por lo que se puede decir que es curativo pues la cobertura comienza una vez que se ha visitado al médico.

Los seguros de Salud y Gastos Médicos Mayores se pueden contratar de manera Individual (Brinda protección al individuo y/o familia contratante) y en Grupo o Colectivo (Brinda protección, a los empleados de los sectores empresariales más diversos, así como a los miembros de asociaciones y agrupaciones legalmente establecidas).

Al hacer la suscripción del riesgo se debe ser cuidadoso en seleccionar subgrupos de asegurados con las mismas características y así poder cuantificar de una mejor forma el riesgo que una compañía aseguradora asume. Para cumplir con lo anterior es primordial identificar y seleccionar los factores de riesgo más relevantes, es decir las características de los asegurados que definan aumentos o disminuciones en la siniestralidad y que conjuntamente expliquen un gran porcentaje de la varianza de los costos reclamados.

Para los Seguros de Salud los factores que primero saltan a la vista son la edad y el sexo, pues intuitivamente se espera que durante los primeros años de vida las reclamaciones de siniestros sean altas para después tener un descenso en la niñez y adolescencia, para volver a crecer hacia la edad adulta seguido de un segundo descenso en la vejez.

#### **3.2. Descripción de los datos**

La base de datos para realizar este trabajo contiene información real de reclamaciones realizadas entre los años 2006, 2007 y 2008 para seguros de Grupo únicamente. Aunque la base está conformada con todos los siniestros sucedidos se han quitado aquellos cuya causa sea parto y cesárea, así como aquellos que tengan que ver con padecimientos que para cubrirlos hace falta pagar una sobre prima, pues la idea es crear una tarifa base y a partir de esta ir incrementado el costo con las coberturas adicionales contratadas.

Para el análisis sólo se tomaron en cuenta el número y monto de siniestros pagados por la aseguradora, es decir, no contempla la cantidad de dinero pagada por concepto de franquicia y coaseguro que son a cargo del asegurado. La manipulación de la base de datos se hizo con el software Visual FoxPro 6.0 y con Excel 2003. Para los análisis estadísticos se usó R versión 2.10.1.

La edad media de los asegurados es 29 años, la composición por sexo es de hombres (49.95%) y mujeres (50.05%). La severidad es de 25,301 pesos, de un total de 20,336 reclamaciones, y un monto total pagado de 514,529,148 pesos.

Los siniestros que gastan menos dinero son los que tienen más reclamaciones, tan sólo con los montos menores a 12,700 pesos ya se alcanza el 52.3% de frecuencia acumulada, aunque el monto reclamado en total no es alto comparado con los montos grandes que tienen pocas reclamaciones pero que suceden. Por lo que a una póliza de seguros se puede ver afectada tanto por la frecuencia como por la severidad de las reclamaciones.

En el mercado asegurador, normalmente, se presentan las tarifas de los seguros de gastos médicos por quinquenios, en la tabla 3 se presentan el número de siniestros y montos reclamados por edad.

**Tabla 3**  
Descripción de Siniestros por Edad

	<b>Total</b>	<b>%</b>	<b>Suma</b>	<b>%</b>	<b>Monto Medio</b>
<b>[0,5)</b>	2,609	13	56,108,421	11	21,505.72
<b>[5,10)</b>	1,236	6	18,389,158	4	14,877.96
<b>[10,15)</b>	931	5	16,125,581	3	17,320.71
<b>[15,20)</b>	906	4	19,590,565	4	21,623.14
<b>[20,25)</b>	1,338	7	29,723,664	6	22,215.00
<b>[25,30)</b>	2,515	12	52,222,050	10	20,764.23
<b>[30,35)</b>	3,170	16	71,572,411	14	22,578.05
<b>[35,40)</b>	2,608	13	67,458,180	13	25,865.87
<b>[40,45)</b>	1,807	9	53,882,450	10	29,818.73
<b>[45,50)</b>	1,316	6	47,354,082	9	35,983.34
<b>[50,55)</b>	827	4	34,207,985	7	41,363.95
<b>[55,60)</b>	526	3	19,645,445	4	37,348.75
<b>[60,65)</b>	300	1	14,290,074	3	47,633.58
<b>[65,70)</b>	127	1	7,885,484	2	62,090.43
<b>[70,90]</b>	120	1	6,073,598	1	50,613.32
<b>Total</b>	20,336	100	514,529,148	100	

### 3.3. Aplicación con Mínimo Bias y Máxima Verosimilitud

Los factores que interesan de sobremanera son el sexo y la edad categorizada en quinquenios con estos se deben hacer variables indicadoras para cada uno de los

niveles de las variables, siempre teniendo en cuenta que el último nivel de la categoría no hace falta ponerlo pues se puede derivar de los demás niveles. El total de clases resulta de multiplicar 2 (Sexo) por 15 (Edad en quinquenios) que es igual a 30, no existen categoría.

Para Sexo sólo se ha creado la variable Género que vale uno si el asegurado es mujer y cero si es hombre. Para la variable edad que tiene 15 niveles se crearon 14 variables indicadoras, siendo la categoría de mayores de 69 años la que se puede obtener poniendo en cero las demás variables indicadoras correspondientes a los niveles de edad. Resultando que la matriz  $X$  tiene dimensión 30 (clases)  $\times$  16 (número de  $\beta$ 's a estimar más el intersección).

Para cada clase se ha calculado el costo medio de siniestro pagado  $C_i$ , como resultado de dividir la suma total pagada en cada clase entre el número de reclamaciones  $y_i$ .

### 3.3.1. Estimando las $\beta$ 's

En la tabla 4 se presenta los exponenciales de  $\beta$ 's estimadas, el test de  $\chi^2$  que obtiene el mínimo valor para el ajuste del Mínimo  $\chi^2$ , seguido por el ajuste de Cero bias o Poisson. Y de los métodos por Máxima Verosimilitud el mínimo del test de  $\chi^2$  se tiene para la distribución Gamma. Pero el valor mínimo de la diferencia absoluta es para el ajuste Normal seguida por la Gamma. Además cabe notar que los parámetros de regresión estimados no son tan diferentes entre distribuciones, a excepción del ajuste log-normal, la mayor diferencia se da en el término de intercepción estimado. El peor ajuste lo hace la distribución Exponencial, tomando el máximo valor para ambos test realizados.

**Tabla 4**  
Exponencial de Betas Estimadas

	Mínimo Bias		Máxima Verosimilitud				Otros	
	Cero Bias	Mín $\chi^2$	Normal	Expon.	Gamma	Log-Normal	Mín. Cuadros	$\chi^2$ Modif.
<b>Intercepto</b>	53.069	56.2887	0.8185	55.1924	51.7971	0.7900	55.0011	46.5711
<b>edad0</b>	0.4198	0.3960	0.4311	0.4198	0.4265	0.9271	0.4086	0.4773
<b>edad5</b>	0.2905	0.2746	0.2963	0.2932	0.2955	0.8928	0.2822	0.3289
<b>edad10</b>	0.3384	0.3190	0.3486	0.3369	0.3436	0.9070	0.3298	0.3852
<b>edad15</b>	0.4243	0.3999	0.4378	0.4198	0.4299	0.9278	0.4149	0.4830
<b>edad20</b>	0.4395	0.4144	0.4490	0.4361	0.4439	0.9308	0.4315	0.4997
<b>edad25</b>	0.4118	0.3882	0.4233	0.4065	0.4165	0.9249	0.4032	0.4684
<b>edad30</b>	0.4470	0.4216	0.4600	0.4415	0.4525	0.9326	0.4372	0.5081
<b>edad35</b>	0.5110	0.4823	0.5263	0.5054	0.5178	0.9451	0.4989	0.5801
<b>edad40</b>	0.5886	0.5547	0.6038	0.5830	0.5952	0.9581	0.5768	0.6698
<b>edad45</b>	0.7100	0.6695	0.7302	0.7033	0.7192	0.9757	0.6937	0.8073
<b>edad50</b>	0.8168	0.7819	0.8295	0.8112	0.8216	0.9865	0.8083	0.9006
<b>edad55</b>	0.7322	0.6968	0.7661	0.7101	0.7389	0.9771	0.7211	0.8166
<b>edad60</b>	0.9345	0.8820	0.9680	0.9191	0.9455	1.0009	0.9159	1.0608
<b>edad65</b>	1.2193	1.1505	1.2521	1.2145	1.2373	1.0260	1.1882	1.3847
<b>Género</b>	0.9159	0.9166	0.9448	0.8639	0.9376	0.9934	0.8885	0.9178
$\chi^2$	<b>2,921.4</b>	<b>2,888.15</b>	3,097.01	<b>3,387.44</b>	<b>3,014.45</b>	1.03	<b>3,027.86</b>	3,220.13
<b>Dif. Abs.</b>	0.0530	0.0529	<b>0.0478</b>	<b>0.0673</b>	<b>0.0494</b>	0.0204	0.0580	0.0525

### 3.3.2. Valores Ajustados para la Severidad

Para calcular los valores ajustados de monto promedio pagado basta realizar el producto de los parámetros estimados para las características deseadas, sin olvidar la intercepción, y multiplicar el resultado por mil. Por ejemplo si se quiere estimar el costo de siniestro estimado para una mujer de 50 años con el método de Máxima verosimilitud bajo la Normal, se ha de multiplicar:

$$50.8185 \times 0.8294 \times 0.9448 = 39.8266 \times 1000 = 39,827$$

Y si fuera hombre de 50 años:

$$50.8185 \times 0.8294 = 42.1516 \times 1000 = 42,152$$

Entonces el monto de siniestro medio esperado para una mujer de 50 años es de 39,827 pesos y para un hombre de la misma edad un siniestro medio esperado de 42,152 pesos.

En prácticamente todos los casos, los ajustes para costos medios más altos es donde más diferencia existe entre la severidad ajustada y la observada. Finalmente teniendo los valores esperados de severidad se puede calcular la Prima Pura.

### 3.3.3. Cálculo de la Prima Pura

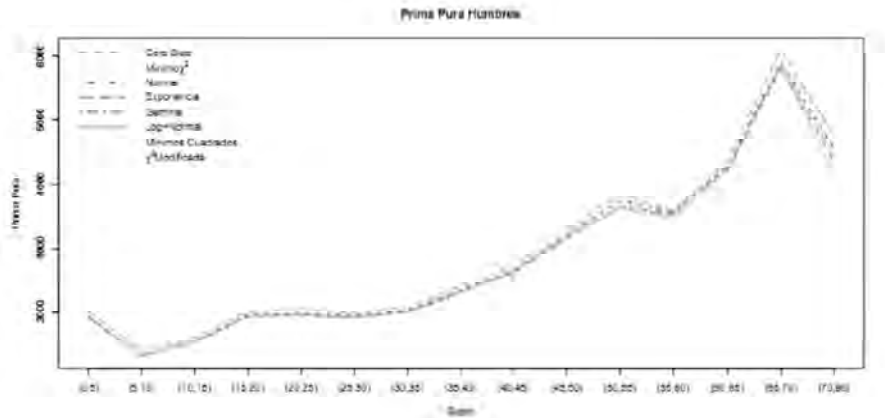
La prima pura se puede calcular como el producto de la frecuencia de las reclamaciones por la severidad de la reclamación. Para calcular la frecuencia de las reclamaciones hace falta tener el número de asegurados en vigor y además conocer el tiempo en el que estuvieron expuestos, separados por cada clase (edad × sexo) (en 2008 se tenían 218,734 asegurados) así dividiendo el número de reclamaciones entre la distribución de asegurados en vigor se tiene la frecuencia de las reclamaciones.

Para todas las primas calculadas se cumple que estas son mayores para las mujeres, pero por muy poco, por lo que las tarifas son bastante cercanas. Las menores diferencias entre prima pura para hombres y mujeres se da con el ajuste exponencial y el de mínimos cuadrados, donde en promedio el incremento en la prima para mujeres es de menos del 3%, en cambio para los demás ajustes este va del 6% al 9%.

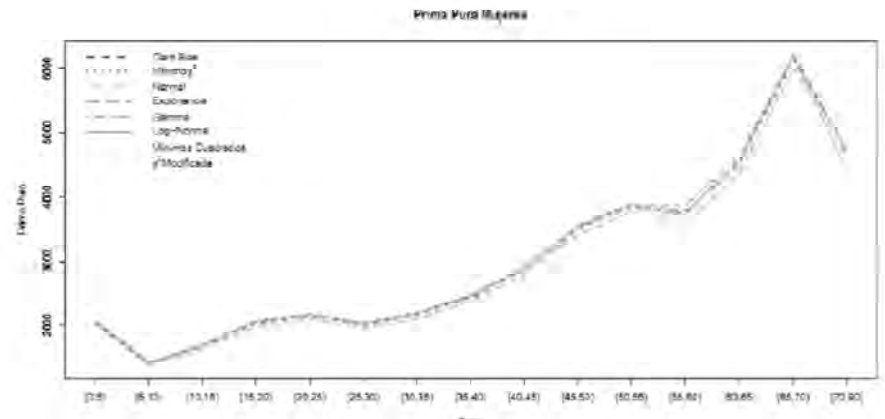
Para ambos sexos se tiene que para la edad de 0 a 5 el costo es mayor que en el periodo de la adolescencia y juventud, creciendo para la edad adulta y bajando finalmente para los asegurados de edad mayor 70, lo que se puede explicar por el hecho de que en teoría ya no deben existir asegurados de esta edad y aunque se hagan excepciones de inclusión estas son pocas y por lo tanto hay poca número de reclamaciones de siniestros.

En las figuras 1 y 2, las primas ajustadas por todos los métodos separados por hombres y mujeres. La prima pura resultado del ajuste con la exponencial para los hombres va por arriba de las demás en cambio para las mujeres ocurre lo contrario. Para los hombres las diferencias más grandes ocurren para la edad [50,55), [65,70) y [70,90]. Para las mujeres las diferencias más grandes ocurren a partir de la edad [55,60).

**Figura 1**  
Comparativo de Prima Pura Ajustada: Hombres



**Figura 2**  
Comparativo de Prima Pura Ajustada: Mujeres



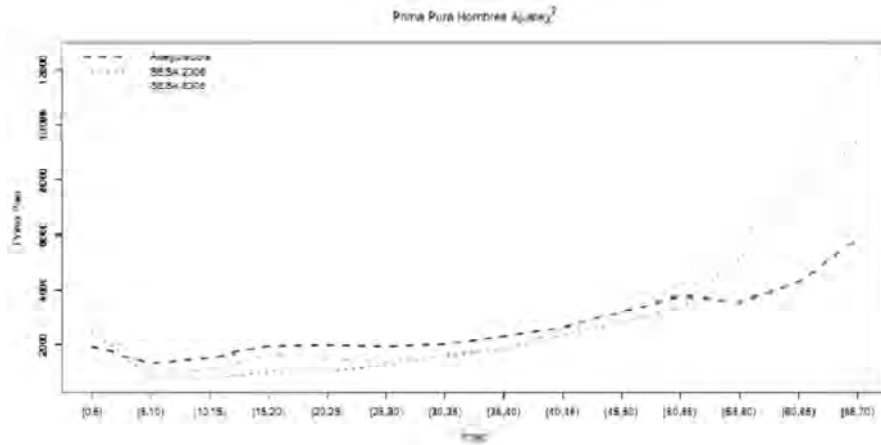
### 3.3.4. Comparando Primas Puras Ajustadas

En esta sección se hace un comparativo de las primas puras obtenidas con los datos de la aseguradora y las obtenidas por las SESA's (Sistema Estadístico del Sector Asegurador: estadísticas anuales de todas las aseguradoras). Las mayores diferencias se dan a partir de la edad 55, donde las SESA's estiman primas mas grandes. Para los hombres con los datos de la aseguradora sólo se estiman primas puras mas grandes a las SESA's para las edades entre 5 y 44 años. Para las mujeres con los datos de la aseguradora sólo se estiman primas puras mas gran-

des a las SESA's para las edades entre 0 y 24 años, de ahí en adelante para todas las edades las primas estimadas por las SESA's son mayores.

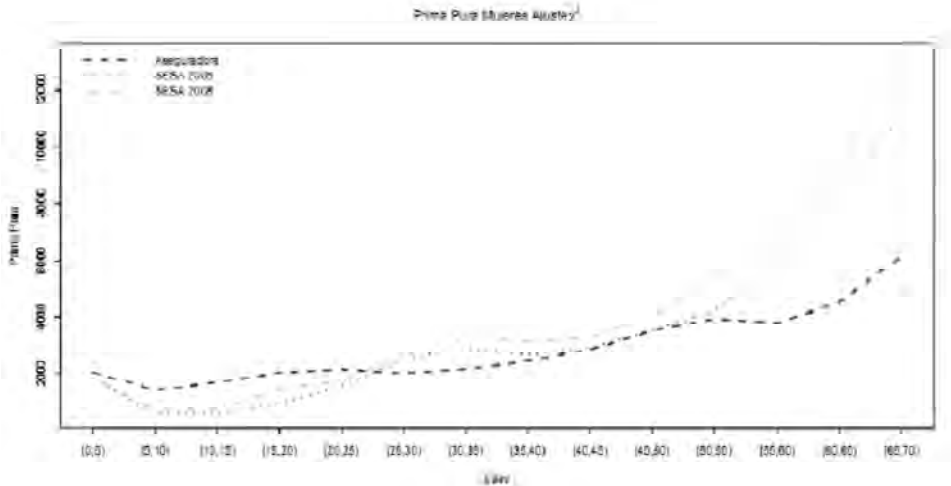
**Figura 3**

Comparativo de Prima Pura Ajustada en tres poblaciones: Hombres



**Figura 4**

Comparativo de Prima Pura Ajustada en tres poblaciones: Mujeres



#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado diferentes maneras de estimar el costo promedio de siniestros pagados, en general se han comparado los resultados obtenidos por el método con Mínimo Bias, con el método de Máxima Verosimilitud suponiendo diferentes distribuciones de la severidad de siniestros.

Estos métodos se pueden aplicar tanto para modelos multiplicativos, aditivos e inversos o cualquier polinomio, en este caso sólo se tomaron los modelos multiplicativos por ser el método que ofrece los costos mas “justos”.

Los ajustes se realizaron suponiendo que no todos los asegurados tienen la misma probabilidad de reportar siniestros por lo que se seleccionaron características clave para poder segmentar a la población y asignar costos iguales para riesgos iguales. Lo siguiente es realizar una buena manipulación de la base de datos para llegar a tener los datos en la forma correcta.

Una vez realizada la modelación a la primera conclusión que se llega es que llevar la teoría a la práctica resulta casi inmediata realizando la programación necesaria. Pues se puede pasar de un modelo a otro sólo cambiando la matriz de pesos. Aquí se notó que los parámetros estimados por el modelo de Cero bias son iguales a los estimados por el método de Máxima Verosimilitud suponiendo una distribución Poisson. Y la misma igualdad se da con el método de marginales totales suponiendo de nueva cuenta que los arribos de siniestros se dan como una Poisson.

Teóricamente estos son los hechos más trascendentes. En la práctica se nota que usando el test de la  $\chi^2$  en todos los casos el mejor ajuste fue el dado por la Mínima  $\chi^2$ . Para el test de la Diferencia absoluta no se pudo encontrar alguna coincidencia.

Los costos estimados por los diferentes ajustes no difieren de sobremanera entre ellos por lo que si se desconoce la distribución de la que provienen los siniestros siempre se puede recurrir a otro ajuste que no requiera conocer dicha distribución, todo lo que se requiere es hacer una elección de la matriz de pesos.

En cuanto a las primas puras se nota que si hace falta realizar una correcta clasificación del riesgo, siendo las mujeres las que mayor gasto originan y por lo tanto las primas puras son mayores.

Comparando las tres bases de datos analizadas se nota que en el global de las compañías se tienen con mayor frecuencia asegurados con edad mayor a la edad límite de aceptación, lo que provoca que para estos casos las primas calculadas sean mayores a las estimadas con los datos de la aseguradora.

A destacar la facilidad con la que se pueden ampliar la metodología usada a tener no dos factores de riesgo si no más, pues es cuestión de reorganizar los datos y hacer ajustes en la programación.



El siguiente paso es calcular la prima de tarifa contemplando los gastos y la utilidad esperada por la compañía además de la inflación en salud que generalmente es mayor que la inflación global.

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Montserrat Guillén del Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola de la Universitat de Barcelona, RFA-IREA, por su apoyo y ayuda recibidos en la realización de este proyecto.

## BIBLIOGRAFÍA

Bailey, R. A. (1963). "Insurance Rates with Minimum Bias". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. 50, nº 93, 4-11.

Bailey, R.A. y Simon, L.J. (1960). "Two Studies in Automobile Insurance Ratemaking". *ASTIN Bulletin*. vol. 1, nº 4, 192-217.

Beard, R.E.; Pentikäinen, T. y Pesonen, E. (1984). *Risk Theory*. London: Chapman and Hall.

Brown, R.L. (1988). "Minimum Bias with Generalized Linear Models". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. 75, nº 143, 187-217.

Feldblum, S. y Brosius, J.E. (2003). "The Minimum Bias Procedure: A Practitioner's Guide" *Actuarial Society*, vol. 90, No. 172, 196-273.

Ismail, N. y Jemain, A.A. (2009). *Comparison of Minimum Bias and Maximum Likelihood Methods for Claim Severity*. *Casualty Actuarial Society E-Forum*, 2009, 243-275.

Jung, J. (1968). "On automobile Insurance Ratemaking". *ASTIN Bulletin*, vol. 5, nº 1, 41-48.

Mildenhall, S.J. (1999). "A Systematic Relationship between Minimum Bias and Generalized Linear Models". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. 86, nº 164, 393-487.

## Ponencia 16

### ANÁLISIS BAYESIANO APLICADO A LA DETECCIÓN DE VARIABLES EN SEGUROS DE AUTOMOVILES

José María Pérez Sánchez, Miguel Ángel Negrín Hernández,  
Catalina García García y Emilio Gómez Déniz

#### RESUMEN

Este artículo examina los factores más relevantes que explican una reclamación mediante la especificación de un modelo logit sobre una base de datos de dos mil pólizas correspondientes a reclamaciones del seguro del automóvil de una importante compañía española de seguros. En primer lugar, se utiliza un modelo logit general para ajustar los datos de las reclamaciones y, posteriormente, se proponen modelos de estimación logit bayesianos simétricos y asimétricos para la estimación de los parámetros del modelo. Los resultados señalan la importancia de tener en cuenta la asimetría de las reclamaciones. Se ofrece una comparación entre los ajustes de todos los modelos.

**Palabras Clave:** Seguro automóvil, modelo logit, inferencia bayesiana, link simétrico, link asimétrico.

#### 1. INTRODUCCIÓN

Si todos los factores relativos al riesgo de reclamación pudieran ser identificados, la determinación de la prima sería más precisa y las clases definidas serían más homogéneas. Los objetivos de este trabajo incluyen la estimación de un modelo que ajuste los datos de reclamaciones y así identificar qué variables son las más importantes en la determinación de la probabilidad de que un asegurado tenga o no una reclamación. En el caso del seguro del automóvil, pueden usarse distintas variables de clasificación como por ejemplo: edad, sexo, lugar de residencia del conductor, clase y uso del vehículo, entre otras. Estas variables son conocidas como variables de tarificación a priori.

Estudios previos basados en técnicas de regresión bayesiana para respuesta dicotómica han sido presentados en distintos campos de aplicación (Albert y Chib, 1993; Albert y Chib, 1995; Holmes y Held, 2006; McCulloch *et al.*, 1999 y O'Hagan

*et al.*, 1990; entre otros). Chen *et al.* (1999) también aplican una estimación Bayesiana de los parámetros desde un punto de vista asimétrico, proponiendo una modelización que recoja la posibilidad de asimetría en la información. Otros autores han analizado el número de reclamaciones mediante la detección de las variables más importantes, como por ejemplo Lee *et al.* (2002), Richaudeau (1999) y Ordaz y Melgar (2010). Este último artículo incluye una base de datos española para la aplicación de un modelo probit.

La estructura de este artículo es como sigue: la Sección 2 describe la base de datos de reclamaciones del seguro del automóvil usadas en este trabajo. Se presenta el modelo en la Sección 3. La Sección 4 analiza los resultados obtenidos y, finalmente, las conclusiones y las futuras líneas de investigación vienen dadas en la última sección.

## **2. DESCRIPCION DE LA MUESTRA**

La base de datos contiene información de 2.000 pólizas del seguro de automóvil obligatorio de una importante compañía aseguradora de España vigentes durante el año 2009. Las variables con las que se han realizado el estudio son ciertas características relativas al asegurado, al vehículo y a la póliza. Concretamente, sobre el asegurado se trabaja con las variables edad, sexo, estado civil y número de años con carnet. La variable edad tomará el valor 1 si el asegurado es menor de 30 años y el valor 0 en caso contrario. La variable sexo, tomara el valor 1 para las mujeres y 0 para los hombres. La variable estado civil tomará el valor 1 para los no casados y 0 para los casados. En cuanto a la variable antigüedad de la licencia, se ha dividido en dos variables: “poca antigüedad” para los que tienen la licencia entre 4 y 14 años y “mucho antigüedad” para los que tienen la licencia desde hace 15 años o más.

En cuanto al vehículo, las variables analizadas son el uso de garaje, el tipo de vehículo, la antigüedad del vehículo, el área de residencia y uso del vehículo. La variable uso de garaje toma el valor 1 en caso de que se posea garaje y 0 en caso contrario. La variable tipo de vehículo tomara el valor 1 si no se trata de un coche y 0 en caso de tratarse de un coche. La antigüedad tomara el valor 1 si tiene 10 años o más, y cero en caso contrario. En cuanto al área de residencia, distinguimos entre áreas de “riesgo alto” que se refieren a las zonas de Madrid y Cataluña, y áreas de “riesgo medio” que incluyen las áreas del norte de España. Por último, el uso del vehículo se concreta en el número de kilómetros recorridos, de manera que la variable toma el valor 1 si el coche tiene más de 10.000 kilómetros recorridos.

Por último, en relación a la póliza se conoce la antigüedad en la compañía, de manera que se han creado dos variables denominadas “clientes recientes” para aquellas pólizas que tienen una antigüedad entre tres y cinco años y otra variable denominada “clientes antiguos” para las que tienen más de cinco años de antigüedad.

En total, se están considerando trece variables explicativas más la variable binaria que toma el valor 0 si el asegurado no hizo ningún tipo de reclamación y 1 en otro caso. En la Tabla 1 se ha resumido la información de cada una de estas variables para la realización del análisis empírico.

En la Tabla 2, se observa que la variable dependiente, número de reclamaciones, tiene 1859 valores en cero frente a los 141 valores en 1, por lo que se concluye que el número de siniestros ha sido solo del 7,05%. En cuanto a las variables referidas al asegurado, se observa que el 88,5% tiene una edad superior a 30 años, el 71% son hombres, el 63,8% no están casados y el 73,2% tiene el carnet desde hace más de 15 años. En lo referente al vehículo, el 64% tiene una antigüedad inferior a 10 años, el 88,85% usa garaje, el 83,2% no se trata de un coche, el 47,6% ha recorrido 10.000 km o más, el 20,2% se sitúa en un área con riesgo medio y el 18,2% con riesgo alto. Por último, el 35,7% de las pólizas tiene una antigüedad entre tres y cinco años y solo el 3,45% tiene una antigüedad superior a cinco años.

**Tabla 1**  
Variables explicativas

<b>Variable</b>	<b>Definición</b>
Edad	Igual a 1 si el asegurador es menor a 30 años.
Sexo	Igual a 1 para mujeres y 0 para hombres.
Estado civil	Igual a 1 para no casados y 0 para casados.
Antigüedad vehículo	Igual a 1 si el vehículo tiene 10 años o más.
Garaje	Igual a 1 si el vehículo no usa garaje, 0 en caso contrario.
Tipo de vehículo	Igual a 1 si el vehículo no es un coche, 0 en otro caso.
Riesgo medio	Igual a 1 cuando la zona es de riesgo medio (Madrid y Cataluña).
Riesgo alto	Igual a 1 cuando la zona es de riesgo alto (Norte de España).
Poca antigüedad	Igual a 1 si la licencia tiene una antigüedad entre 4 y 14 años.
Mucha antigüedad	Igual a 1 si la licencia tiene una antigüedad de 15 años o más.
Km	Igual a 1 si el coche tiene 10.000 kilómetros o más, 0 en caso contrario.
Cliente reciente	Igual a 1 si el cliente tiene una antigüedad en la compañía entre 3 y 5 años.
Cliente antiguo	Igual a 1 si el cliente tiene una antigüedad en la compañía de más de 5 años.

**Tabla 2**  
Resumen descriptivo de las variables

Variable	(1)	(0)
Y	141 (7,05%)	1859 (92,59%)
Edad	230 (11,5%)	1770 (88,5%)
Sexo	580 (29%)	1420 (71%)
Estado civil	1276 (63,8%)	559 (27,95%)
Antigüedad vehículo	720 (36%)	1280 (64%)
Garaje	1777 (88,85%)	223 (11,15%)
Tipo de vehículo	336 (16,8%)	1664 (83,2%)
Riesgo medio	404 (20,2%)	1596 (79,8%)
Riesgo alto	364 (18,2%)	1636 (81,8%)
Poca antigüedad	490 (24,5%)	1510 (75,5%)
Mucha antigüedad	1464 (73,2%)	536 (26,8%)
Km	952 (47,6%)	1048 (52,4%)
Cliente reciente	714 (35,7%)	1286 (64,3%)
Cliente antiguo	69 (3,45%)	1931 (96,55%)

### 3. ESPECIFICACIÓN DE LOS MODELOS DE AJUSTE DE RECLAMACIONES

Se proponen dos alternativas de modelos de elección discreta para ajustar la probabilidad de realización de una reclamación. Consideraremos, en primer lugar, modelos logit de estimación clásica (o frecuentista) y bayesiana y, posteriormente, se asume un logit asimétrico desde el punto de vista bayesiano.

#### 3.1. Estimación frecuentista de modelos logit

Sea  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$  un vector  $n \times 1$  de una variable dependiente dicotómica y  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})'$  el vector  $k \times 1$  de covariables para la póliza  $i$ . Un modelo de regresión logit trata el problema de estimar la probabilidad de pertenecer o no a un grupo de estudio incluido en  $y_i$ . En este trabajo, si  $y_i = 1$ , el asegurado  $i$  hace una reclamación, por lo que  $y_i = 0$  en caso de que no presente reclamación. Se asume que  $y_i = 1$  con probabilidad  $p_i$  y  $y_i = 0$  con probabilidad  $1 - p_i$ . El modelo de regresión viene dado por  $p_i = F(x_i' \beta)$ , donde  $F$  es la inversa de la función acumulada logística (función link),  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)'$  es un vector  $k \times 1$  de los coeficientes de regresión que representan el efecto de cada factor de riesgo  $x_i$  en el modelo. Por tanto, la función de verosimilitud viene dada por:

$$l(y|x, \beta) = \prod_{i=1}^n [F(x'_i\beta)]^{y_i} [1 - F(x'_i\beta)]^{1-y_i}, \quad (1)$$

donde  $F(s) = \frac{1}{1+e^{-s}}$  es una función simétrica con respecto a 0. Los coeficientes de regresión son estimados frecuentemente mediante evaluación numérica de la función de verosimilitud. De esta manera, el modelo estima la probabilidad de realización de una reclamación por cada asegurado. El siguiente paso es considerar un punto de corte en esta probabilidad para determinar si un asegurado presenta una reclamación o no.

### 3.2. Estimación Bayesiana de modelos logit

Desde este punto de vista, los coeficientes de regresión son considerados variables aleatorias. Se proponen dos alternativas de estimación bayesiana del modelo logit: el uso de una función link simétrica y el uso de una función de link asimétrica. En ambos casos, se supone una distribución a priori normal no informativa y centrada para los coeficientes  $\beta$ , facilitando así la comparación con la estimación frecuentista. Stukel (1988) verifica que el uso de un modelo logit asimétrico puede producir mejores ajustes que el modelo con link simétrico. Esta metodología ha sido aplicada en otros contextos (véase Basu y Mukhopadhyay, 2000; Bazán *et al.*, 2006; Bermúdez *et al.*, 2008 y Chen *et al.*, 2004; entre otros) pero no ha tenido aplicación en el campo de reclamaciones de seguros. El uso de una función link asimétrica se recomienda para datos de respuesta binaria cuando una respuesta es mucho más frecuente que la otra. Como se observa en la Tabla 2, en el caso de la variable dependiente la respuesta 0 es mucho más frecuente que la respuesta 1.

Desde el punto de vista asimétrico, se realiza una aproximación basada en el “aumento” de datos tal y como realizaron Albert y Chib (1993). Siguiendo a Chen *et al.* (1999), es fácil mostrar que el link logit asimétrico es equivalente a considerar:

$$y_i = \begin{cases} 1, & w_i \geq 0; \\ 0, & w_i < 0, \end{cases} \quad (2)$$

donde  $w_i = x'_i\beta + \delta z_i + \varepsilon_i$ ,  $z_i \sim G$ ,  $\varepsilon_i \sim F$ . Se asume que  $z_i$  y  $\varepsilon_i$  son independientes y  $F$  es la función de distribución acumulada logística. Además,  $G$  es la función de distribución acumulada de la distribución estandarizada normal truncada dada por

$$g(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z > 0. \quad (3)$$

En este modelo,  $\delta \in (-\infty, \infty)$  es el parámetro de asimetría por lo que la asimetría del modelo de regresión viene dada por  $\delta z_i$ . Si  $\delta > 0$ , la probabilidad  $p_i$  se aproxima a 1 más rápidamente de lo que lo hace a 0. Lo contrario ocurre cuando  $\delta < 0$ .

## 4. RESULTADOS

En primer lugar, se ha comparado la estimación bayesiana no informativa de un modelo logit con la estimación frecuentista del modelo logit con el objeto de verificar que ambos modelos ofrecen resultados similares en términos de la estimación de parámetros. Posteriormente, se han comparado estos resultados con la estimación bayesiana asimétrica del modelo logit y se comprueba que esta estimación recoge el evidente efecto de asimetría que existe en los datos.

### 4.1. Estimación frecuentista y bayesiana estándar de un modelo de regresión logística

Los resultados de estimación del modelo estándar logit desde el punto de vista frecuentista vienen dados en la Tabla 3.

**Tabla 3**  
Resultados de la estimación frecuentista del modelo logit

Variable	Coefficientes	sd	p-valor
Constante	-1.887	0.709	0,007 <sup>a</sup>
Edad	-0.109	0.35	0.753
Sexo	0.202	0.207	0.329
Estado civil	0.1	0.23	0.662
Antigüedad vehículo	-0.528	0.214	0.013 <sup>b</sup>
Garaje	-0.645	0.248	0.009 <sup>a</sup>
Tipo de vehículo	-0.058	0.258	0.82
Riesgo medio	-0.207	0.26	0.426
Riesgo alto	0.027	0.249	0.912
Poca antigüedad	0.016	0.638	0.979
Mucha antigüedad	-0.363	0.669	0.587
Km	0.016	0.194	0.931
Cliente reciente	0.339	0.203	0.094 <sup>b</sup>
Cliente antiguo	0.216	0.595	0.661

Variable dependiente: Reclamaciones: N = 1711; Chi-Square = 21.523 (0.063)

<sup>a</sup> Indica 1% de nivel de significación

<sup>b</sup> Indica 10% de nivel de significación

Como puede observarse en la Tabla 3, la constante y la variable Garaje son significativas al 1%, mientras que la antigüedad del vehículo y el hecho de que el cliente tenga una póliza en esta empresa de más (o menos) de entre 3 y 5 años también son variables estadísticamente significativas al 10%. El test Chi Cuadrado muestra la significatividad global del modelo. Como era de esperar, tanto la antigüedad del vehículo como el hecho de tener un garaje se relacionan negativamente con una alta probabilidad de realizar una reclamación. Además, cuando el asegurado ha estado pocos años en la compañía, la probabilidad de realizar una reclamación incrementa.

La estimación bayesiana estándar del modelo de regresión logit se muestra en la Tabla 4.

**Tabla 4**  
Estimación bayesiana estándar del modelo logit

Variable	Coefficientes	sd	MC error	IC (95%)
Constante	-1.641	0.612	0,024	(-2.928, -0.479)
Edad	-0.16	0.328	0,005	(-0.828, 0.49)
Sexo	0.1731	0.196	0,002	(-0.214, 0.173)
Estado civil	0.108	0.231	0,003	(-0.338, 0.569)
Antigüedad vehículo	-0.68	0.208	0,001	(-1.094, -0.282)
Garaje	-0.628	0.236	0,003	(-1.08, -0.153)
Tipo de vehículo	-0.089	0.243	0,001	(-0.084, 0.372)
Riesgo medio	-0.114	0.236	0,001	(-0.591, 0.337)
Riesgo alto	0.07	0.235	0,001	(-0.397, 0.525)
Poca antigüedad	-0.334	0.54	0,019	(-1.329, 0.786)
Mucha antigüedad	-0.612	0.571	0,02	(-1.67, 0.573)
Km	0.155	0.182	0,001	(-0.202, 0.512)
Cliente reciente	0.302	0.191	0,001	(-0.072, 0.677)
Cliente antiguo	0.055	0.512	0,002	(-1.035, 0.976)

Variable dependiente: Reclamaciones: N=2000

En la Tabla 4, podemos observar, como era de esperar ya que la información a priori es no informativa, que las estimaciones de los parámetros son similares a las obtenidas en el modelo clásico estándar. Además, la constante, las variables antigüedad del vehículo y la variable Garaje son las únicas variables estadísticamente relevantes en este modelo bayesiano no informativo.



## 4.2. Estimación asimétrica bayesiana de un modelo de regresión logística

En la Tabla 5, se resumen los resultados de la estimación bayesiana no informativa en la que se incluye una covariable que mide la posible asimetría del modelo.

**Tabla 5**  
Estimación bayesiana asimétrica del modelo logit

Variable	Coefficientes	sd	MC error	IC (95%)
Constante	-58.22	7.763	0.513	(-73.11, -43,82)
Edad	-1.103	4.258	0.144	(-8.867, 7.342)
Sexo	2.796	2.873	0.098	(-2.797, 8.467)
Estado civil	0.905	3.432	0.169	(-5.861, 7.675)
Antigüedad vehículo	-7.534	1.811	0.038	(-9.903, -3.311)
Garaje	-7.065	2.205	0.092	(-9.888, -1.859)
Tipo de vehículo	-1.042	3.52	0.090	(-7.835, 5.917)
Riesgo medio	-1.882	3.395	0.094	(-8.473, 4.913)
Riesgo alto	0.658	3.476	0.103	(-6.31, 7.385)
Poca antigüedad	-0.659	4.69	0.245	(-8.748, 8.828)
Mucha antigüedad	-3.994	4.417	0.254	(-9.738, 6.58)
Km	2.657	2.819	0.104	(-2.962, 8.133)
Cliente reciente	4.416	2.622	0.086	(-0.831, 9.248)
Cliente antiguo	0.92	5.097	0.081	(-8.89, 9.35)
$\delta$	36.15	3.012	0.193	(29.96, 39.88)

Variable dependiente: Reclamaciones: N=2000

Como puede observarse en la Tabla 5, la constante, la antigüedad del vehículo y el hecho de tener o no un garaje son las variables estadísticamente relevantes a la hora de estimar la probabilidad de reclamar de un determinado asegurado. Resultados similares a los obtenidos hasta ahora. Sin embargo, observamos también cómo la variable  $\delta$ , que mide la asimetría de los datos es estadísticamente relevante, indicando que es necesario tener en consideración un logit asimétrico. Además, podemos observar como los coeficientes estimados varían considerablemente respecto a las estimaciones de los dos modelos anteriores, aunque los signos siguen siendo los mismos. Este hecho se acentúa aún más en la estimación de la constante, por lo que observamos que en los dos primeros modelos, la constante estimada recoge parte del efecto asimetría que ha salido a la luz en el tercer modelo.

## 5. CONCLUSIONES Y LINEAS ABIERTAS

En este trabajo, hemos obtenido las estimaciones de modelos de regresión logit clásico, logit bayesiano estándar no informativo y logit bayesiano asimétrico no informativo utilizando una base de datos de una compañía de seguros española, relativa al año 2009.

Como principales conclusiones destacar, en primer lugar, los resultados similares de los modelos logit clásico y bayesiano estándar no informativo. Ambos coinciden en que la antigüedad del vehículo y el hecho de disponer de un garaje son variables relevantes a la hora de estimar la probabilidad de realizar una reclamación. En segundo lugar, hemos estimado un modelo que tiene en cuenta la clara asimetría existente, concluyendo que es necesario incorporar dicha asimetría en el modelo, la variable que recoge la asimetría es estadísticamente relevante en la estimación de la probabilidad de reclamar.

Obviamente, y debido a estos resultados, una posible línea de trabajo será la predicción de la probabilidad de reclamar de un asegurado en el siguiente período teniendo en cuenta la asimetría en la información y así mejorar la calidad de dicha predicción.

## BIBLIOGRAFÍA

Albert, J.H., y Chib, S. (1993). "Bayesian Analysis of Binary and Polychotomous Response Data". *Journal of the American Statistical Association*, vol. 88, nº 422, 669-679.

Albert, J.H., Chib, S. (1995). "Bayesian residual analysis for binary response regression models". *Biometrika*, vol. 82, 747-769.

Basu, S. y Mukhopadhyay, S. (2000). "Binary response regression with normal scale mixture links". In D. K. Dey, S. K. Ghosh, and B. K. Mallick, (eds.). *Generalized Linear Models: A Bayesian Perspective*. New York: Marcel Dekker

Bazán, J.L., Branco, M.D. y Bolfarinez, H. (2006). "A Skew Item Response Model". *Bayesian Analysis*, vol. 1, nº 4, 861-892.

Bermúdez, L.L., Pérez, J.M., Ayuso, M., Gómez, E. y Vázquez, F.J. (2008). "A Bayesian dichotomous model with asymmetric link for fraud in insurance". *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 42, 779-786.

Chen, M.-H., Dey, D.K., y Shao, Q.M. (1999). "A New Skewed Link Model for Dichotomous Quantal Response Data". *Journal of the American Statistical Association*, vol. 94, 1172-1186.

Chen, W.-S., Bakshi, B.R., Goel, P.K. y Ungarala, S. (2004). "Bayesian estimation of unconstrained nonlinear dynamic systems via sequential Monte Carlo sampling", *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 43, nº 14, 4012-4025.

Holmes, L. y Held, L. (2006). "Bayesian auxiliary variables models for binary and multinomial regression", *Bayesian Analysis*, vol. 1, nº 1, 145-168.

Lee A.H., Stevenson, M.R., Wang, K. y Yau, K.K.W. (2002). "Modeling Young Driver Motor Vehicle Crashes: Data with Extra Zeros". *Accident Analysis and Prevention*, nº 34, 515-521.

McCulloch, R., Polson, N. y Rossi, P. (1999). "A Bayesian analysis of the multinomial probit model with fully identified parameters", *Journal of Econometrics*, vol. 99, nº 1, 173-193.

O'Hagan, A., Woodward, E.G. y Moodaley, L.C. (1990). "Practical Bayesian analysis of a simple logistic regression: Predicting corneal transplants", *Statistics in Medicine*, vol. 9, nº 9, 1091-1101.

Ordaz, J.A. y Melgar, M.C. (2010). "Covariate-based pricing of automobile insurance". *Insurance Markets and Companies: Analyses and Actuarial Computations*, vol. 1, nº 2, 92-99.

Richaudeau, D. (1999). "Automobile Insurance Contracts and Risk of Accident: An Empirical Test Using French Individual Data". *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, nº 24, 97-114.

Stukel, T. (1988). "Generalized logistic model", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 83, 426-431.

## Ponencia 17

# UNA APROXIMACIÓN AL PAPEL DEL GRADO DE COBERTURA EN LA SINIESTRALIDAD DECLARADA Y NO DECLARADA EN EL SEGURO DE AUTOMÓVILES A TRAVÉS DE LOS MODELOS INFLADOS DE CEROS

María del Carmen Melgar Hiraldo y José Antonio Ordaz Sanz

### 1. INTRODUCCIÓN

En el sector del seguro en general y, en el ramo del automóvil en particular, la siniestralidad aparece directamente relacionada con la cobertura contratada. En la literatura pueden encontrarse ejemplos que ponen de manifiesto que cuanto mayor es el número de garantías de las que disfruta el asegurado, mayor es la siniestralidad que presenta (Dionne *et al.* (1999), Chiappori y Salanié (2000)). Este hecho va ligado, generalmente, a problemas de información asimétrica tales como la selección adversa y/o el riesgo moral. Así, puede ocurrir que el conductor, consciente de su propensión a tener siniestros, contrate una cobertura más elevada; sería el caso de la selección adversa. Pero también pudiese ser que el asegurado, al sentirse protegido por su alto nivel de cobertura, tuviese una actitud descuidada al conducir, que le llevaría a sufrir siniestros con facilidad; estaríamos entonces ante un problema de riesgo moral.

Para las entidades aseguradoras resulta esencial conocer qué características del vehículo asegurado y del conductor, así como otras relativas a la póliza, inciden en la siniestralidad. Algunos ejemplos de trabajos en este sentido son los de Richaudeau (1999) y Cohen (2005), que usan modelos econométricos de tipo *count data* tradicionales para estimar el número de siniestros, o los de Melgar y Ordaz (2007), Ordaz y Melgar (2010) y Ordaz (2011), que analizan la probabilidad de sufrir siniestros a través de modelos de elección discreta. Pero además de conocer tales características, sería de gran interés estudiar con mayor detenimiento qué sucede según el nivel de cobertura contratado por el asegurado. Esto podría ayudar a realizar un ajuste más preciso de las primas, con objeto de hacer frente a las coberturas elegidas y alcanzar un mayor grado de eficiencia.

En el trabajo actual, nos planteamos combinar las dos cuestiones señaladas y analizarlas de forma simultánea. Nuestro objetivo es, por un lado, determinar las variables que resultan más relevantes al estimar el número de siniestros que los

asegurados declaran a su compañía aseguradora, para cada nivel de cobertura considerado, y, por otro, estimar, también para cada nivel de cobertura, el número de clientes que deciden no declarar los siniestros que sufren, junto con la cifra que los siniestros no declarados suponen. Finalmente, se compararán los resultados obtenidos para ver si cada grado de cobertura muestra un comportamiento diferenciado o no.

Para nuestro propósito, utilizaremos modelos inflados de ceros (*zero-inflated models*) al ser, desde el punto de vista teórico, una alternativa válida a los modelos de recuento tradicionales debido al elevado porcentaje de asegurados que no declara siniestros y la doble interpretación que puede otorgarse a este hecho (no sufrir ningún siniestro o sufrirlo pero no declararlo). Algunas de las referencias más destacables a nivel internacional del uso de estos modelos en el seguro de automóviles son Shankar *et al.* (1997) y Lee *et al.* (2002). En el caso de España, Melgar (2011) realiza un análisis similar al que aquí se presenta, pero de forma global para todos los niveles de cobertura.

El trabajo se estructura en 5 secciones. Tras esta Introducción, en la Sección 2 se lleva a cabo una breve descripción de los datos utilizados, haciendo especial hincapié en la siniestralidad para cada grado de cobertura. En la Sección 3, se exponen las principales características de los modelos inflados de ceros que se van a utilizar en el estudio. A continuación, en la Sección 4 se muestran los resultados de la modelización econométrica realizada. Terminaremos con unas breves conclusiones en la Sección 5, seguidas de las Referencias bibliográficas y un Anexo con la relación de variables utilizadas en el estudio.

## **2. DEFINICIÓN DE LOS GRADOS DE COBERTURA Y CARACTERÍSTICAS DE LA MUESTRA**

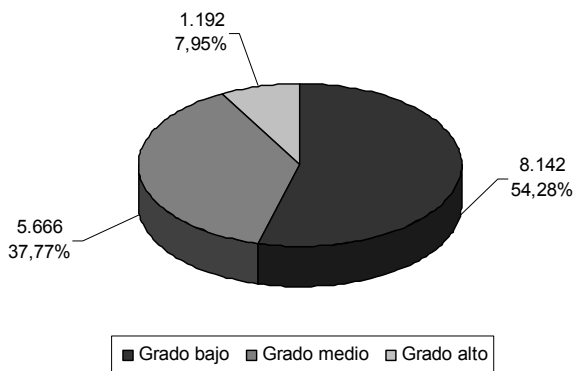
En este trabajo se han utilizado datos cedidos por una multinacional aseguradora que opera en el mercado español. Dichos datos corresponden a 15.000 clientes del periodo comprendido entre el 16 de junio de 2002 y el 15 de junio de 2003 en relación con características del vehículo asegurado (tipo y uso), del titular de la póliza (edad, sexo, antigüedad del permiso de conducción y región de residencia), de la propia póliza (prima anual y grado de cobertura aseguradora), así como al número de siniestros declarados por cada cliente.

Las pólizas se han agrupado según tres grados de cobertura:

- Grado bajo: incluye sólo las garantías obligatorias por ley (responsabilidad civil, defensa y reclamaciones, asistencia, y muerte e invalidez);
- Grado medio: contiene además algunas garantías opcionales, como la rotura de lunas, incendio, robo y/o la retirada del permiso de conducción;
- Grado alto: cubre también los daños propios del vehículo.

La Gráfica 1 muestra la distribución resultante, en la que se observa que la proporción de pólizas disminuye conforme aumenta el grado de cobertura: el 54,28% de los asegurados contrata el nivel más bajo, el 37,77% se decide por el nivel medio y únicamente el 7,95% dispone de la cobertura más elevada.

**Gráfica 1**  
Distribución de los asegurados, según grado de cobertura



Fuente: Elaboración propia

La composición de las tres submuestras resultantes en lo referente al porcentaje que cada categoría de las variables explicativas consideradas supone sobre el total, así como al porcentaje que ha declarado algún siniestro dentro de cada categoría, puede verse en la Tabla 1.

**Tabla 1**  
Distribución de las categorías y de la siniestralidad por variable, según grado de cobertura

Variable Categoría	Porcentaje sobre el total de cada submuestra			Porcentaje con siniestros, sobre el total de la categoría		
	Grado bajo	Grado medio	Grado alto	Grado bajo	Grado medio	Grado alto
<i>Tipo del vehículo asegurado</i>						
Turismo- furgoneta	68,23%	94,18%	99,33%	20,83%	29,44%	39,44%
Camión	0,10%	3,23%	0,25%	25,00%	25,14%	33,33%
Autocar	0,11%	0,23%	0,08%	44,44%	53,85%	100,00%
Ciclomotor- moto	13,79%	0,49%	0,17%	7,03%	3,57%	50,00%
Vehículo especial	17,77%	1,87%	0,17%	4,91%	32,08%	0,00%

**Tabla 1 (Cont.)**

Distribución de las categorías y de la siniestralidad por variable, según grado de cobertura

<b>Variable Categoría</b>	<b>Porcentaje sobre el total de cada submuestra</b>			<b>Porcentaje con siniestros, sobre el total de la categoría</b>		
	<b>Grado bajo</b>	<b>Grado me- dio</b>	<b>Grado alto</b>	<b>Grado bajo</b>	<b>Grado medio</b>	<b>Grado alto</b>
<i>Uso del vehículo asegurado</i>						
Particular	73,27%	86,23%	93,21%	17,70%	29,86%	39,15%
Profesional	26,35%	12,71%	6,71%	11,61%	27,50%	42,50%
Otros	0,38%	1,06%	0,08%	25,81%	3,33%	100,00%
<i>Edad del asegurado</i>						
De 18 a 25 años	3,50%	2,51%	2,94%	19,65%	30,28%	25,71%
De 26 a 45 años	35,06%	44,11%	51,26%	16,11%	29,29%	40,75%
De 46 a 70 años	54,02%	50,26%	43,37%	16,37%	29,60%	38,88%
De 71 años y más	7,42%	3,12%	2,43%	12,75%	23,16%	37,93%
<i>Experiencia como conductor del asegurado</i>						
Menos de 2 años	0,88%	0,44%	0,84%	37,50%	40,00%	10,00%
2 años y más	99,12%	99,56%	99,16%	15,94%	29,23%	39,68%
<i>Sexo del asegurado</i>						
Hombre	87,12%	82,97%	78,10%	15,93%	28,76%	38,45%
Mujer	12,88%	17,03%	21,90%	17,45%	31,81%	42,91%
<i>Región de residencia del asegurado</i>						
Canarias	6,24%	2,38%	1,17%	18,50%	30,37%	35,71%
Centro	18,58%	15,80%	9,90%	11,90%	28,16%	39,83%
Ceuta y Melilla	0,27%	0,67%	0,34%	13,64%	28,95%	50,00%
Este	13,23%	10,16%	13,26%	20,43%	30,21%	30,38%
Madrid	1,06%	1,31%	3,52%	18,60%	32,43%	42,86%
Noreste	2,47%	3,71%	5,45%	14,43%	28,57%	41,54%
Noroeste	12,97%	16,25%	28,36%	13,45%	29,75%	32,54%
Sur	45,18%	49,72%	38,00%	17,10%	29,22%	47,02%
<i>Prima anual de la póliza</i>						
Hasta 300 €	50,58%	12,09%	0,93%	10,03%	21,90%	36,36%
De 301 a 400 €	27,35%	31,22%	2,43%	19,71%	26,00%	31,03%
De 401 a 600 €	15,99%	36,57%	9,31%	23,58%	30,60%	34,23%
Más de 600 €	6,08%	20,12%	87,33%	31,11%	36,40%	40,25%
<i>Total</i>	100,00%	100,00%	100,00%	16,13%	29,28%	39,43%

Fuente: Elaboración propia

Globalmente, se aprecia que la siniestralidad aumenta conforme lo hace el grado de cobertura: el 16,13% de los clientes con el grado de cobertura bajo declara siniestros; este porcentaje asciende al 29,28% entre los que disfrutaban del grado medio; y alcanza el 39,43% para los asegurados que han contratado el grado alto. Esto conlleva, lógicamente, una gran cantidad de ceros en la variable dependiente de nuestro análisis: 83,87% en el grado bajo (6.829 de 8.142 asegurados no han declarado siniestros), 70,72% en el grado medio (4.007 de 5.666 asegurados sin siniestros) y 60,57% en el grado alto (722 de 1.192 asegurados no declaran siniestros).

### 3. JUSTIFICACIÓN DE LA UTILIDAD DE LOS MODELOS INFLADOS DE CEROS

Las distribuciones infladas de ceros se basan en el supuesto de la existencia de dos tipos de individuos en la población: en nuestro caso, por un lado estarían los asegurados que no han sufrido ningún siniestro a lo largo del periodo considerado y, por otro lado, los asegurados que, habiendo tenido algún siniestro, han decidido no declararlo a su compañía. De este modo, la variable  $Y_i$  con la que denotaremos el número de siniestros declarados por el asegurado  $i$  tomará en ambos casos el valor 0, si bien la variable que realmente nos interesa (el número de siniestros que el asegurado  $i$  tiene a lo largo del periodo considerado,  $Z_i$ ) tomará el valor 0 en el primer caso mientras que, en el segundo, podrá tomar valores positivos.

Por otra parte, el elevado porcentaje de valores nulos que hemos visto que presenta la variable  $Y_i$  provoca generalmente una gran sobredispersión en dicha variable. Esto conlleva que, desde un punto de vista teórico, un modelo de recuento “tradicional” como es la regresión de Poisson no resulte el más adecuado para su estimación. Se suele recurrir entonces al modelo binomial negativo para abordar dicha sobredispersión. Sin embargo, debido a la doble interpretación que hemos visto que puede tener el valor nulo de la variable endógena, la utilización de modelos inflados de ceros podría ser una buena elección.

En estos modelos (Cameron y Trivedi (1998) o Winkelmann (2003)), se considera que  $Y_i = Z_i I_i$ , donde  $I_i$  es una variable aleatoria de tipo Bernoulli que toma el valor 0 si el cliente  $i$  no declara sus siniestros (con probabilidad  $q_i$ ) y el valor 1 si los declara (con probabilidad  $1 - q_i$ ). Si las variables explicativas se denotan por  $X_{i1}, \dots, X_{in}$ , entonces se suele considerar que:

$$q_i = F(\tau(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \dots + \beta_n X_{in})), \quad [1]$$

donde  $F$  se refiere, generalmente, a la función de distribución logística o la normal estándar (Greene, 1999), dando así lugar a modelos logit o probit, respectivamente, y  $\tau, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$  son parámetros desconocidos a estimar.



Con esto, la distribución de probabilidad inflada de ceros vendrá dada por:

$$\begin{aligned} P(Y_i=0) &= q_i + (1-q_i)P(Z_i=0) \\ P(Y_i=k) &= (1-q_i)P(Z_i=k), \quad k=1,2,\dots \end{aligned} \quad [2]$$

Tanto de la definición de  $q_i$  como de la ecuación [2], se deduce que cuando  $q_i=0$ , es decir, cuando todos los asegurados declaran los siniestros que sufren, el modelo inflado de ceros se reduce al modelo de recuento tradicional que se haya considerado para  $Z_i$  (Poisson o binomial negativo).

La elección entre un modelo inflado de ceros y el tradicional correspondiente puede hacerse usando el estadístico de Vuong (Vuong, 1989), que sigue una distribución asintótica normal tipificada. Para un nivel de significación del 5%, si  $V > 1,96$ , el modelo inflado de ceros será el elegido frente al tradicional; si por el contrario,  $V < -1,96$ , la especificación tradicional del modelo será más adecuada; en el intervalo comprendido entre ambos valores la decisión no resulta clara.

El modelo de Poisson inflado de ceros (*Zero-Inflated Poisson*, ZIP) y el modelo binomial negativo inflado de ceros (*Zero-Inflated Negative Binomial*, ZINB) resultantes, según se elija para  $Z_i$  una distribución de Poisson de parámetro  $\lambda_i$  o binomial negativa de parámetros  $\nu > 0$  y  $\frac{\nu}{\nu + \lambda_i}$ , se pueden relacionar con el llamado

“parámetro de precisión”  $\alpha$ , dado por  $\alpha = \frac{1}{\nu}$  (Jones, 2001). Si  $\alpha$  tiende a cero, el modelo ZINB tiende al modelo ZIP. Por tanto,  $\alpha$  puede considerarse como una medida del nivel de sobredispersión que presentan los datos y el contraste de su significatividad nos ayudará a decidir entre uno u otro modelos inflados de ceros.

Por otra parte, en lo que respecta al número de asegurados que no declaran siniestros ( $N_0$ ) y al número total de siniestros no declarados ( $A_0$ ), éstos se pueden obtener de forma general a partir de las expresiones:

$$N_0 = \sum_{i=1}^N \chi_{\{z_i > 0, I_i = 0\}}, \quad A_0 = \sum_{i=1}^N Z_i \chi_{\{z_i > 0, I_i = 0\}}, \quad [3]$$

donde  $N$  es el número total de clientes de la compañía aseguradora y  $\chi_{\{A\}}$  es la función característica del suceso  $A$ .

Los valores esperados y las varianzas respectivas de dichas variables son:

$$E(N_0) = \sum_{i=1}^N q_i (1 - P(Z_i = 0)), \quad \text{Var}(N_0) = \sum_{i=1}^N q_i (1 - P(Z_i = 0)) \{1 - q_i (1 - P(Z_i = 0))\} \quad [4]$$

$$E(A_0) = \sum_{i=1}^N q_i E(Z_i), \quad \text{Var}(A_0) = \sum_{i=1}^N q_i \{ \text{Var}(Z_i) + E(Z_i)^2 (1 - q_i) \}. \quad [5]$$

Una vez elegida la distribución de  $Z_i$  y estimados los parámetros del modelo, se conocerán las variables significativas para explicar el número de siniestros declarados por los asegurados y, a partir de las expresiones [4] y [5], se podrán obtener intervalos de confianza para el número de clientes que no han declarado siniestros y el número que estos siniestros no declarados representan.

#### 4. FACTORES RELEVANTES PARA EXPLICAR LA SINIESTRALIDAD Y ESTIMACIÓN DE LA SINIESTRALIDAD NO DECLARADA, PARA CADA GRADO DE COBERTURA

A partir de las submuestras resultantes para los tres grados de cobertura considerados, se han especificado los distintos modelos de recuento señalados en la sección anterior con un primer objetivo consistente en determinar los factores que resultan significativos al estimar el número de siniestros que los asegurados declaran a sus compañías.<sup>1</sup> Tras realizar varias simulaciones, se han seleccionado finalmente las relativas al modelo ZIP que se muestran en la Tabla 2 y en las que únicamente figuran las categorías de las variables<sup>2</sup> que han resultado significativas para un nivel de confianza mínimo del 90%.

---

<sup>1</sup> Se ha utilizado en la estimación el software econométrico *Limdep 7.0*, usando la distribución logística para  $Q_i$  (Greene, 1995).

<sup>2</sup> En estas versiones últimas de nuestra modelización, no se ha considerado la variable relativa al importe de las primas, dada la fuerte relación de endogeneidad existente entre dicho importe y el grado de cobertura de las pólizas.

**Tabla 3**

Estimación del número de siniestros declarados, según el grado de cobertura

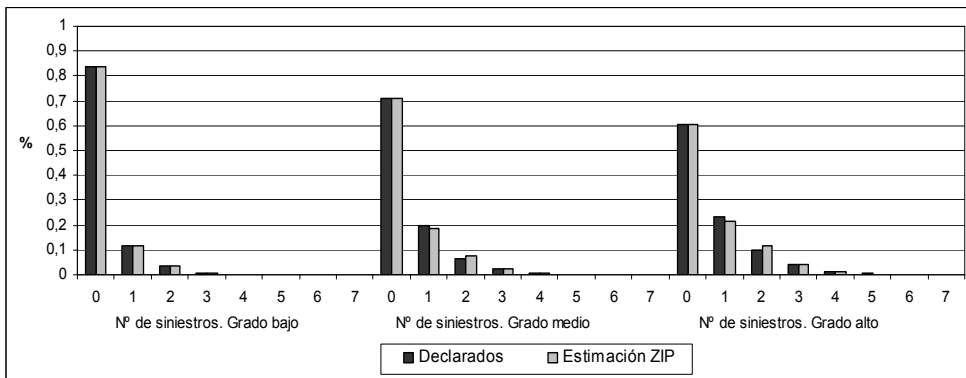
Variable dependiente: NUMSIN						
Modelo: Poisson inflado de ceros ( <i>Zero-Inflated Poisson – ZIP</i> )						
Método de estimación: Máxima verosimilitud						
Grado de cobertura	BAJO		MEDIO		ALTO	
Nº de observaciones	8.142		5.666		1.192	
Variable explicativa	Coefficiente	P-valor	Coefficiente	P-valor	Coefficiente	P-valor
C	-0,298682	0,0000	0,249618	0,0451	0,133448	0,0225
TUR_FUR*						
CAMION						
AUTOCAR			1,431398	0,0000		
CICL_MOT	-0,938600	0,0000	-3,049911	0,0054		
VEH_ESP	-1,000947	0,0000				
USO_PART*						
USO_PROF			-0,255591	0,0067		
OTR_USOS			-3,167493	0,0000		
ED18_25*						
ED26_45			-0,369120	0,0045		
ED46_70			-0,424682	0,0011		
ED71_	-0,220471	0,0088	-0,889781	0,0000		
ANTIG<2A	0,820702	0,0000				
MUJER						
SUR*						
CANARIAS			-0,444274	0,0907		
CENTRO	-0,292999	0,0000	-0,149161	0,0663		
CEU_MEL						
ESTE			0,173918	0,0361	-0,139931	0,0495
MADRID	0,371152	0,0346				
NORESTE						
NOROESTE	-0,173875	0,0034			-0,128148	0,0381
Parámetro de inflación de ceros (Tau)	-0,865150	0,0000	0,654888	0,0017	-4,919017	0,0999
Log. f. verosimilitud	-4.423,69350		-4.951,55958		-1.309,85134	
Nº de ceros reales	6.829		4.007		722	
Nº de ceros estimados	6.999		4.007		723	
Estadístico de Vuong	28,8083		21,0552		9,6832	

\* Categoría base

Fuente: Elaboración propia

La elección del modelo ZIP ha venido motivada, por un lado, por los valores del estadístico de Vuong obtenidos en las modelizaciones, siendo todos ellos superiores a 1,96, lo que hace que resulte preferido frente al tradicional modelo de Poisson. Por otro lado, se ha optado por el ZIP en contraposición con el ZINB, porque los valores del estadístico de Vuong en el caso de las estimaciones de este último modelo no han mostrado evidencias significativas tan claras al compararlas con su variante tradicional, como sucede en el caso del ZIP. En cuanto al parámetro de precisión  $\alpha$ , éste no ha mostrado tampoco una significatividad clara. Además, la Gráfica 2 muestra de manera gráfica, para cada grado de cobertura, la alta capacidad predictiva de nuestros modelos ZIP, reforzando así la bondad de éstos. Los resultados cualitativos de ambos modelos inflados de ceros han resultado ser, en cualquier caso, muy similares.

**Gráfica 2**  
Distribución porcentual del número de siniestros declarados y probabilidades estimadas por el modelo ZIP, para cada grado de cobertura



Fuente: Elaboración propia

Las variables que se muestran significativas a la hora de estimar el número de siniestros declarados, y sobre todo las categorías de éstas, son distintas para cada nivel de cobertura (Tabla 2). Cabe señalar que en ninguno de ellos la variable “sexo” ha mostrado significatividad, evidenciándose la falta de diferencia estadística entre hombres y mujeres en relación a la siniestralidad.

En lo que se refiere al grado bajo de cobertura, aparecen como relevantes el tipo de vehículo, la edad del asegurado, su experiencia al volante y la región donde reside. Respecto al tipo, las categorías correspondientes a los ciclomotores y motos y los vehículos especiales se muestran significativas y con una menor propensión a la siniestralidad que los demás vehículos. Por su parte, el tramo de edad de asegurados mayores de 71 años evidencia asimismo una menor siniestralidad que el resto. La experiencia del asegurado se revela igualmente como un factor importante, reflejando una relación directa entre siniestralidad y asegurados con menos

de 2 años de antigüedad en su permiso. Por último, en cuanto a la región de residencia del asegurado, las regiones Centro (Castilla y León, Castilla-La Mancha y Extremadura), Madrid y Noroeste (Cantabria, Galicia y Principado de Asturias) ofrecen un comportamiento significativamente distinto a las demás. Mientras que el Centro y el Noroeste presentan una relación inversa con la siniestralidad, vivir en Madrid en cambio supone un factor correlacionado positivamente con el registro de accidentes.

En el caso del grado de cobertura medio, el tipo de vehículo, la edad y la región de residencia del asegurado coinciden como factores relevantes con lo evidenciado para el grado de cobertura bajo. Las categorías significativas de cada variable son, sin embargo, diferentes en buena medida. Asimismo, el uso del vehículo es aquí otro factor relevante, en tanto que la antigüedad en el permiso de conducción no lo es. Los autocares y los ciclomotores y motos son los tipos de vehículos que destacan; los primeros con una influencia positiva sobre la siniestralidad y los segundos mostrando una fuerte relación inversa, como en el caso del grado de cobertura bajo. En cuanto al uso del vehículo, todos aquéllos distintos al particular resultan significativos y con relación inversa con la siniestralidad, siendo ésta más acusada en el caso de los usos diferentes al particular y al profesional. La edad también se muestra aquí como un factor relevante explicativo del modelo y lo hace a través de todas las categorías de tramos diferentes a la base, esto es, a partir de 25 años; de modo que el número de siniestros disminuye con la edad del asegurado. Este aspecto puede verse como otra forma de reflejo de la experiencia del asegurado distinta a la de la antigüedad de su permiso de conducción. Finalmente, las categorías relativas a las Regiones de Canarias, Centro y Este (Cataluña, Comunidad Valenciana e Islas Baleares) son las que se evidencian como estadísticamente significativas frente a las restantes regiones en este modelo. Las dos primeras ofrecen una relación inversa con el número de siniestros declarados, mientras que la influencia de la Región Este es positiva.

Por último, para el grado de cobertura alto la única variable relevante que aparece como relevante es la región de residencia del asegurado. En concreto, en las Regiones Este y Noroeste nuestro modelo recoge menor siniestralidad que en las demás regiones.

El segundo objetivo que pretendíamos alcanzar en este trabajo era la estimación del número de asegurados que no declaran siniestros y el número de siniestros no declarados correspondiente. Esto se ha llevado a cabo a partir de las expresiones [4] y [5] dadas en la Sección 3, para cada grado de cobertura. La Tabla 3 ofrece los resultados obtenidos.

**Tabla 3**

Estimaciones del número de asegurados que no declaran siniestros y del número de siniestros no declarados, según el grado de cobertura

<b>Grado de cobertura</b>	<b>Nº de asegurados que no declaran siniestros (intervalo de confianza al 95%)</b>	<b>Nº de siniestros no declarados (intervalo de confianza al 95%)</b>
Bajo	2.047 (1.970-2.123)	2.730 (2.615-2.845)
Medio	1.469 (1.405-1.533)	2.193 (2.082-2.304)
Alto	318 (288-348)	519 (462-576)

Fuente: Elaboración propia

Globalmente, el número estimado de asegurados que no declaran siniestros representa el 25,56% del total de asegurados. Por grado de cobertura, las cifras resultan muy semejantes: 25,14%, 25,93% y 26,68%, para los grados bajo, medio y alto, respectivamente. En este sentido, el comportamiento de los asegurados no parece depender a priori del grado de cobertura, al menos no del modo en que se suele pensar. De hecho, las leves diferencias existentes indican que los asegurados que dejan más de declarar son los que tienen un nivel de cobertura más elevado, a pesar de tener cubiertos más siniestros.

Sin embargo, si el análisis se lleva a cabo para el número de siniestros no declarados, la situación es bien distinta. El número total estimado de éstos representaría el 52,04% del total teórico de siniestros ocurridos y estas cifras sí resultan muy diferentes dependiendo del grado de cobertura. En el grado bajo se dejaría de declarar el 60,41% de los siniestros; en el medio, el 47,19%; y en el alto, el 40,20%. Es decir, el número de siniestros no declarados disminuye de forma sensible conforme aumenta el grado de cobertura.

De lo expuesto se extrae una conclusión clara: los asegurados más cubiertos no son los que más declaran, pero cuando lo hacen declaran un mayor número de siniestros que los demás.

## **5. CONCLUSIONES**

El trabajo presentado se planteaba dos objetivos primordiales: mostrar los principales factores determinantes de la siniestralidad que los conductores asegurados declaran a sus compañías y estimar el número de asegurados que no declaran sus siniestros así como el número de siniestros que esto representa; todo ello según el grado de cobertura del que disfrutaban.

A partir de los datos cedidos por una multinacional aseguradora que opera en el mercado español, se ha procedido a la estimación del número de siniestros declarados por los asegurados a través de distintas especificaciones “infladas de ceros”, de entre las que finalmente se ha seleccionado, para cada grado de cobertura definido (bajo, medio y alto), el modelo de Poisson inflado de ceros. Esta elección se ha basado tanto en su idoneidad teórica, como en la de los resultados del análisis econométrico obtenido.

La investigación llevada a cabo ha mostrado cómo la significatividad de las diferentes categorías de las variables consideradas (tipo de vehículo, uso de éste, edad del asegurado, antigüedad de su permiso de conducción, sexo y región de residencia) ha sido en general distinta para cada nivel de cobertura. De cualquier forma, tanto en el grado de cobertura bajo como en el medio, distintos tipos de vehículos, la experiencia del conductor (ya sea mediante la edad o directamente con la antigüedad del permiso) y algunas regiones de residencia aparecen como variables relevantes a la hora de explicar el número de siniestros registrados y declarados por los asegurados. En el grado de cobertura alto, sin embargo, únicamente algunas regiones de residencia han resultado significativas en nuestro modelo. Cabe resaltar, finalmente, que el sexo del asegurado no se ha evidenciado en ningún momento como un carácter diferenciador en lo que se refiere al registro de la siniestralidad.

Para dar respuesta a nuestro segundo objetivo, hemos realizado una estimación del número de asegurados que no han declarado ningún siniestro a sus compañías, así como del número de siniestros asociados a ellos. Estos resultados no son habituales en estos estudios. Nuestra investigación apunta a que en torno a una cuarta parte (25,56%) de los asegurados no declara sus siniestros. Ello supondría, según nuestra investigación, que no se declara el 52,04% del total de siniestros que ocurren. Esta cifra oscila entre, aproximadamente, un 40% y un 60% dependiendo de si el grado de cobertura del asegurado es el mayor o el menor, respectivamente. Ello parece evidenciar que existe un gran ahorro para las compañías en relación con los siniestros teóricos que estarían ocurriendo. Estos datos, sin duda, podrían ser de gran interés para las entidades aseguradoras a la hora de planificar sus niveles globales de riesgos.

## **AGRADECIMIENTOS**

Este trabajo ha recibido ayuda del Ministerio de Ciencia e Innovación y FEDER (Proyecto ECO2008-01223/ECON).

## **BIBLIOGRAFÍA**

Cameron, A.C.; Trivedi, P.K. (1998). *Regression Analysis of Count Data*. Cambridge: Cambridge University Press.

Chiappori, P.A.; Salanié, B. *Testing for Asymmetric Information in Insurance Markets*. *Journal of Political Economy*, 2000, vol. 108, nº 1, 56-78.

Cohen, A. (2005). "Asymmetric Information and Learning: Evidence from the Automobile Insurance Market". *Review of Economics and Statistics*, vol. 87, nº 2, 197-207.

Dionne, G.; Gouriéroux, C.; Vanasse, C. (1999). "Evidence of Adverse Selection in Automobile Insurance Markets". En Dionne, G.; C. Laberge-Nadeau (eds.): *Automobile Insurance: Road Safety, New Drivers, Risks, Insurance Fraud and Regulation*, 13-46. Montréal, 1999.

Greene, W.H. (1995). *Limdep Version 7.0: User's Manual*. Bellport, N.Y.: Econometric Software.

Greene, W.H. (2007). *Análisis Económico*. Madrid: Prentice Hall-Pearson Educación.

Jones, A.M. (2001). *Applied Econometrics for Health Economists-A Practical Guide*. London: Office of Health Economics.

Lee, A.H.; Stevenson, M.R.; Wang, K.; Yau, K.K.W. (2002). "Modeling Young Driver Motor Vehicle Crashes: Data with Extra Zeros". *Accident Analysis and Prevention*, vol. 34, nº 4, 515-521.

Melgar, M.C. (2011). "Utilización de los modelos inflados de ceros en la estimación del número de siniestros en el seguro de automóviles". En Ayuso, M. (ed.): *Métodos cuantitativos en economía del seguro del automóvil*, 35-51. Barcelona.

Melgar, M.C.; Ordaz, J.A. (2007). *Análisis comparativo de la siniestralidad en el seguro de automóviles según el grado de cobertura*. *Rect@, Actas\_15*, 1 (105), 1-11.

Ordaz, J.A. (2011). "Aplicación de un modelo Heckit en el análisis de la siniestralidad y su coste directo en el seguro de automóviles". En Ayuso, M. (ed.). *Métodos cuantitativos en economía del seguro del automóvil*, 15-33. Barcelona.

Ordaz J.A.; Melgar, M.C. (2010). "Covariate-Based Pricing of Automobile Insurance". *Insurance Markets and Companies: Analyses and Actuarial Computations*, vol. 1, nº 2, 92-99.

Richaudeau, D. (1999). "Automobile Insurance Contracts and Risk of Accident: An Empirical Test Using French Individual Data". *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, vol. 24, nº 1, 97-114.

Shankar, V.; Milton, J.; Mannering, F. (1997). "Modeling Accident Frequencies as Zero-Altered Probability Processes: An Empirical Inquiry". *Accident Analysis and Prevention*, vol. 29, nº 6, 829-837.



Vuong, Q.H. (1989). "Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Non-Nested Hypotheses". *Econometrica*, 1989, vol. 57, nº 2, 307-333.

Winkelmann, R. (2003). *Econometric Analysis of Count Data*. Berlin: Springer.

## ANEXO

### Definición de las variables utilizadas en el análisis

<i>Tipo del vehículo asegurado</i>
TUR_FUR = 1 si el vehículo asegurado es un turismo o una furgoneta; 0 en caso contrario (categoría base)
CAMION = 1 si el vehículo asegurado es un camión; 0 en caso contrario
AUTOCAR = 1 si el vehículo asegurado es un autocar; 0 en caso contrario
CICL_MOT = 1 si el vehículo asegurado es un ciclomotor o una moto; 0 en caso contrario
VEH_ESP = 1 si el vehículo asegurado es un vehículo especial; 0 en caso contrario
<i>Uso del vehículo asegurado</i>
USO_PART = 1 si el uso del vehículo asegurado es el uso particular; 0 en caso contrario (categoría base)
USO_PROF = 1 si el uso del vehículo asegurado es profesional; 0 en caso contrario
OTR_USOS = 1 si el vehículo asegurado se destina a otros usos; 0 en caso contrario
<i>Edad del asegurado</i>
ED18_25 = 1 si el asegurado tiene entre 18 y 25 años; 0 en caso contrario (categoría base)
ED26_45 = 1 si el asegurado tiene entre 26 y 45 años; 0 en caso contrario
ED46_70 = 1 si el asegurado tiene entre 46 y 70 años; 0 en caso contrario
ED71_ = 1 si el asegurado tiene 71 años o más; 0 en caso contrario
<i>Experiencia como conductor del asegurado</i>
ANTIG<2A = 1 si el asegurado obtuvo el permiso de conducción hace menos de 2 años; 0 en caso contrario
<i>Sexo del asegurado</i>
MUJER = 1 si el asegurado es mujer; 0 en caso contrario

## Definición de las variables utilizadas en el análisis

<i>Región de residencia del asegurado</i>
CANARIAS = 1 si el asegurado reside en la región de Canarias (Canarias); 0 en caso contrario CENTRO = 1 si el asegurado reside en la región Centro (Castilla y León, Castilla-La Mancha, Extremadura); 0 en caso contrario CEU_MELI = 1 si el asegurado reside en la región de Ceuta y Melilla (Ciudades Autónomas de Ceuta y Melilla); 0 en caso contrario ESTE = 1 si el asegurado reside en la región Este (Cataluña, Comunidad Valenciana, Islas Baleares); 0 en caso contrario MADRID = 1 si el asegurado reside en la región de Madrid (Comunidad Autónoma de Madrid); 0 en caso contrario NORESTE = 1 si el asegurado reside en la región Noreste (Aragón, Comunidad Foral de Navarra, La Rioja, País Vasco); 0 en caso contrario NOROESTE = 1 si el asegurado reside en la región Noroeste (Cantabria, Galicia, Principado de Asturias); 0 en caso contrario SUR = 1 si el asegurado reside en la región Sur (Andalucía, Región de Murcia); 0 en caso contrario (categoría base)
<i>Prima anual de la póliza</i>
PO_300 = 1 si la prima anual pagada por el asegurado no supera los 300 €; 0 en caso contrario (categoría base) P301_400 = 1 si la prima anual pagada por el asegurado es mayor de 300 € y no supera los 400 €; 0 en caso contrario P401_600 = 1 si la prima anual pagada por el asegurado es mayor de 400 € y no supera los 600 €; 0 en caso contrario P601_ = 1 si la prima anual pagada por el asegurado es mayor de 600 €; 0 en caso contrario
<i>Cobertura aseguradora de la póliza</i>
GR_BAJO = 1 si el asegurado disfruta del grado de cobertura bajo; 0 en caso contrario (categoría base) GR_MEDIO = 1 si el asegurado disfruta del grado de cobertura medio; 0 en caso contrario GR_ALTO = 1 si el asegurado disfruta del grado de cobertura alto; 0 en caso contrario
<i>Siniestralidad</i>
NUMSIN = número de siniestros sufridos y declarados por el asegurado a la compañía durante el periodo de tiempo considerado

### **III. GESTIÓN DE RIESGOS**

## Ponencia 18

# EXTREME VALUES AND VOLATILITY FORECASTING. THE PARKINSON RANGE ESTIMATOR AS AN ALTERNATIVE TO THE CARR MODEL

José Luis Miralles Quirós and Julio Daza Izquierdo

### ABSTRACT

The aim of this paper is to analyze the forecasting ability of the CARR model proposed by Chou (2005) using the S&P 500. We extend the data sample, allowing for the analysis of different stock market circumstances and propose the use of various range estimators in order to analyze their forecasting performance. Our results show that there are two range-based models that outperform the forecasting ability of the GARCH model. The Parkinson model is better for upward trends and volatilities which are higher and lower than the mean while the CARR model is better for downward trends and mean volatilities.

**Key Words:** CARR; GARCH; Range Estimators; Forecasting Performance.

### 1. INTRODUCTION

In the years following the publication of the ARCH model proposed by Engle (1982) and its generalization (GARCH model) proposed by Bollerslev (1986), modeling and forecasting volatility has been the subject of vast empirical and theoretical investigation. As a result, many different studies have focused on evaluating different volatility measures that might improve volatility forecasts and, if possible, identify a preferred technique.

Lamoureux and Lastrapes (1993) show that implied volatility tends to underpredict realized volatility while forecasts of variance from past returns contain relevant information not contained in the forecast constructed for implied volatility.

Moreover, Brailsford and Faff (1996) find GJR and GARCH models slightly superior to a number of simpler models for predicting Australian monthly stock index volatility. In contrast, Tse (1991) and Tse and Tung (1992) use data from Japan and Singapore and find that an Exponentially Weighted Moving Average model produces better volatility forecasts than do ARCH models.

Martens (2001) analyzes the improvement of forecasting on different GARCH models by including additional intraday information and finds that the higher the frequency used the better the volatility forecast.

The use of ranges is another alternative to measure the variability of a share, an index or a stock market, which makes sense because that is what traders perceive volatility to be. The application of ranges in finance started with Parkinson (1980) who showed the superiority of his proposal when compared with the standard methods of volatility estimations. This initial study was followed by others<sup>1</sup> where the range properties were analyzed.

More recently, Brandt and Jones (2006) compare a range-based EGARCH model with the return-based volatility model and find that the former produces better predictions for out of sample forecasts, while Chou (2005), in a very interesting paper, uses Standard and Poors 500 index data and proposes a range-based model, the Conditional Autoregressive Range (CARR), suggesting that it outperforms the forecasting ability of the GARCH model.

Our study furthers the line of research initiated by Chou (2005) by mainly discussing the results of the forecasting power of the CARR model, and suggesting the use of range estimators in order to improve the original model of Chou (2005).

We improve the previous literature in various ways. Firstly, we propose to extend the original sample of Chou (2005) to the week which begins on September 27, 2010 in order to analyze the performance of the models employed by Chou (2005) in different situations. Secondly, we analyze the performance of both models to forecast volatility depending on the day of the week the variables are calculated. Finally, we suggest substituting the original range employed by Chou (2005) with other range estimators with the aim of finding an alternative to the CARR model.

This paper shows that when forecasts are made on an upward trend and in a low volatility environment the Parkinson range estimator provides better forecasting results while the original CARR model is better on downward trends and mean volatility.

The remainder of the paper is organized as follows. Section 2 describes the original methodology and the initial results, Section 3 presents the alternatives, Section 4 shows the main results and Section 5 provides the main conclusions.

## **2. INITIAL METHODOLOGY AND PRELIMINARY RESULTS**

Different applications and methodologies have been developed in recent years to analyze the dynamics of volatility. Among them, the Generalized Autoregressive

---

<sup>1</sup> See Garman and Klass (1980), Beckers (1983), Rogers and Satchell (1991), Kunitomo (1992) or Yang and Zhang (2000) among others.

Conditional Heteroskedasticity (GARCH) models proposed initially by Engle (1982) and Bollerslev (1986), and the stochastic volatility (SV) models advocated by Taylor (1986) are two popular and useful alternatives for estimating and modeling time-varying conditional financial volatility. However, as pointed out by Alizadeh, Brandt, and Diebold (2002), Brandt and Diebold (2006) and Chou (2005) among others, both models are inaccurate and inefficient, because they are based on the closing prices of the reference period and fail to use the information contents in between the reference points.

We initially follow the Chou approach (2005), which proposed the Conditional Auto-regressive Range (CARR) model as an alternative for the modeling of financial volatility.

The CARR model of order (p,q) is shown as

$$\begin{aligned}
 R_t &= \lambda_t \varepsilon_t \\
 \lambda_t &= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i R_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \lambda_{t-j} \\
 \varepsilon_t | I_{t-1} &\sim f(I, \xi_t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

where,  $R_t = \text{Max}(P_t) - \text{Min}(P_t)$ , is the range measure calculated as the difference between the highest and the lowest logarithms of the prices of a speculative asset observed at time  $t$  and  $\lambda_t$  is the conditional mean of the range based on all information up to time  $t$ .

Chou (2005) performs out of sample forecasts and makes comparisons with a GARCH (1,1) model with conditional normal distribution. He chooses the forecast horizons ranging from 1 week to 50 weeks and makes rolling sample estimations to estimate the parameters of both models. In each case, 972 weeks of data prior to the forecast interval are used and 100 out of sample forecast are made for each forecast horizon. Four measures are used as the benchmark of the ex post volatility: the sum of squared daily returns (SSDR), weekly return squared (WRSQ), weekly range (WRNG) and absolute weekly return (AWRET).

In order to evaluate the performance of both models, Chou (2005) uses two symmetric error statistics, the Root Mean Squared Error (RMSE) and Mean Absolute Error (MAE).

After computing those symmetric statistics over 50 forecast horizons, Chou (2005) considers that both criteria give almost unanimous support for the CARR model over GARCH. Chou (2005) also points out that a closer analysis of the results shows that the differences in the performance of the two models are more evident when the horizons are shorter and, in particular, for the SSDR and WRNG measures, because both of them use more information (daily) than WRSQ and AWRET and, therefore, contain less noise.

### 3. COMMENTS AND PRICE RANGE ESTIMATORS

After analyzing in depth the methodology, we find some weaknesses in the model proposed by Chou (2005). The first one is related to the way in which the data is collected. Chou (2005) collects daily data from the Standard and Poors 500 for the period from April 26, 1982 to October 17, 2003, which was downloaded from the website "Yahoo.com". Daily and weekly data (obtained from the daily one) were considered, but only weekly estimations were shown because the results were basically the same and some weekday seasonal effects were found for the daily range data.

All the dates that are referred to in Chou (2005) are Mondays, which suggests us to think that all the weekly estimations are from Monday to Monday, but the fact is that the weekly format that can be downloaded from the aforementioned website is from Monday to Friday, which led us to check that the returns (close to close natural logarithm difference) used to calculate the GARCH models and, consequently, the GARCH forecasts are not from Monday to Monday but from Friday to Friday.<sup>2</sup>

We agree with the fact of using weekly returns in the analysis because they should not be subject to potential bias such as the bid–ask effect, non-trading days, etc, that might arise when daily returns are used. However, we must consider that the existence of calendar anomalies such as the Monday effect, the Friday effect or the day of the week effect could lead to an irregular behavior of the proposed models according to the day of the week on which the variables are calculated.

Secondly, the sample used by Chou (2005) was from April 26, 1982 to October 13, 2003, the forecast period<sup>3</sup> being characterized by a mix of downward and upward trend in the Standard and Poors 500. Since the publication of Chou's paper there have been different trends in the S&P500, with a higher maximum and a lower minimum than those that were considered by Chou (2005). In our opinion, it would be interesting to analyze the forecasting ability of the GARCH and the CARR models in different trends in order to check the performance of each one in special situations.

Thirdly, the classical estimator of volatility is based on the close to close prices but it has been demonstrated that the daily squared return is an unbiased estimator of the realized daily volatility. Furthermore, it must be pointed out that by only looking at opening and closing prices we may wrongly conclude that volatility on a given day is small if both prices are similar, despite large intraday price fluctuations. For those reasons, more sophisticated estimators using additional information such as high, low and open prices are needed to estimate volatility.

Taylor and Xu (1997) use the standard deviation of the intraday returns, while Martens (2001) uses the sum of squared intraday returns, in both cases provide better

---

<sup>2</sup> It was also checked with the Chou (2005) data.

<sup>3</sup> The first date is December 4, 2000.

results for the conditional variance. However, we consider the extreme value methods to be more effective. In order to explain them we adopt the notation of Garman and Klass (1980) and Yang and Zhang (2000).

$C_t$  = closing price on day  $t$ ,

$O_t$  = opening price on day  $t$ ,

$H_t$  = high price on day  $t$ ,

$L_t$  = low price on day  $t$ ,

$c_t = \ln C_t - \ln O_t$ , the normalized close price;

$o_t = \ln O_t - \ln C_{t-1}$ , the normalized open price;

$u_t = \ln H_t - \ln O_t$ , the normalized high price;

$d_t = \ln L_t - \ln O_t$ , the normalized low price;

$n$  = number of daily periods (five in our case).

Parkinson (1980) provides a simple way to measure daily volatility given the daily range of the high/low prices by suggesting the measurement of the daily volatility as follows:

$$\hat{\sigma}_{PARK}^2 = \frac{1}{n4 \ln 2} \sum_{i=1}^n (u_i - d_i)^2 \quad (2)$$

It has been demonstrated that the efficiency of this estimator is very high, about 4.91 in comparison with the standard simple variance estimator and could be as much as 8.5 times more efficient than log-squared returns.

Since then, different methods have been proposed for estimating the volatility parameter. Garman and Klass (1980) incorporate the opening and closing prices and suggest the following measure ( $V_{GK}$ ):

$$V_{GK} = V'_O - 0.383V'_C + 1.364V_{PARK} + 0.019V_{RS} \quad (3)$$

where:

$$V'_O = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n o_i^2 \quad \text{and} \quad V'_C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i^2$$

and  $V_{RS}$  is another alternative measure of volatility proposed by Rogers and Satchell (1991) which is calculated as:

$$V_{RS} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [u_i(u_i - c_i) + d_i(d_i - c_i)] \quad (4)$$



Finally, Yang and Zhang (2000) propose a new estimator which is, in their opinion, the minimum-variance unbiased variance estimator and is independent of both the drift and opening jumps of the underlying price movements. This estimator,  $V_{YZ}$ , is given by the equation:

$$V_{YZ} = V_O + kV_C + (1-k)V_{RS} \quad (5)$$

where:

$$V_O = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \bar{\sigma})^2 \quad \text{and} \quad V_C = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (c_i - \bar{c})^2$$

$$k = \frac{0.34}{1.34 + \frac{n+1}{n-1}}$$

Considering all these comments, we propose to extend the sample to the week which begins on September 27, 2010 in order to analyze the performance of the original models (GARCH and CARR) employed by Chou (2005) in different situations along this time (upward and downward trends) but always keeping the number of observations (1120) used by Chou (2005); we also analyze the performance of both models on forecasting volatility depending on the day of the week the variables are calculated and, additionally, we suggest to substitute the original range employed by Chou (2005) with the volatility measures previously mentioned (Parkinson, Garman-Klass, Rogers-Satchell and Yang-Zhang) with the aim of finding an alternative to the CARR model.

#### 4. DATA AND RESULTS

The data consists of daily data from the Standard and Poors 500 for the sample period from April 26, 1982 to September 27, 2010. As in Chou (2005), open, high, low and close prices are collected. Consistent with reviewed literature, the previous day of trading data was taken to calculate the different estimators in those cases when a holiday occurred. Weekly series were constructed for each day of the week so for example in the case of Monday, data from Tuesday to the following Monday (including it) was collected.

Having observed that there are different trends in the sample, we decide to divide the full sample in four sub-samples with the aim of analyzing the forecasting ability of the different range estimators in various periods.

Following those reasons, the first sub-sample (April 26, 1982-October 13, 2003) is the sample used by Chou (2005). The second sub-sample (April 14, 1986-October 9, 2007) is the period which ends with the historical maximum quote of the Standard and Poors 500. The phase which ends with the minimum after the technologi-

cal bubble crash is the period analyzed in the third sub-sample (September 7, 1987-March 9, 2009). Finally, the period from March 13, 1989 to September 27, 2010 is the fourth sub-sample.<sup>4</sup>

In spite of the fact that we focus the comments on the third and fourth subsamples, we must point out that the results for the first subsample denote a better forecasting performance for the CARR model proposed by Chou (2005), specially when the Mean Absolute Error (MAE) criteria is considered. However, we find that for the Root Mean Squared Errors (RMSE) the results of forecasting ability are not so favorable for the CARR model. Considering the RMSE we show that the GARCH model provides better forecasting results in the central part of the week, 3 out of 4 cases on Wednesday and 4 out of 4 on Thursday.

In the second subsample the Parkinson model is best for forecasting volatility, especially for the WRSQ and AWRET volatility measures, when the Mean Absolute Error estimator is considered. In those cases the Parkinson model performs better than the others for 46 out of 50 forecast horizons for Friday (WRSQ measure) and for 41 out of 50 forecast horizons on Monday, (AWRET measure), having also a high percentage of better results on the rest of the days and for the other two measures of volatility (SSDR and WRNG).

On the other hand, the GARCH model provides the best forecasting performance when the RMSE is considered. However, in three cases the model with the Parkinson volatility estimator is better (on Friday when SSDR is used and on Monday for WRNG and AWRET measures).

The results for the third sub-sample (September 7, 1987-March 9, 2009), which are reported in Table 1, show smaller differences among the proposed models than in the previous samples. As well as in the previous sample, the best forecasting results for the Parkinson model are obtained when the Mean Absolute Error (MAE) estimator is calculated and, in this case, for the WRSQ and AWRET measures, especially on Tuesday, Wednesday and Thursday.

---

<sup>4</sup> In order to save space we just show the results for the third and fourth samples. However, the rest are available upon request.

**Table 1**  
Out of sample forecast comparison.  
Third Sample September 7, 1987 to March 9, 2009

RMSE							MAE						
SSDR							SSDR						
	GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ		GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ
MO	25	25	0	0	0	0	MO	31	19	0	0	0	0
TU	19	31	0	0	0	0	TU	27	23	0	0	0	0
WD	34	14	0	2	0	0	WD	38	12	0	0	0	0
TH	17	31	0	0	0	2	TH	18	32	0	0	0	0
FR	28	22	0	0	0	0	FR	46	4	0	0	0	0
WRSQ							WRSQ						
	GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ		GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ
MO	21	28	0	0	0	1	MO	32	6	9	0	3	0
TU	27	20	0	2	0	1	TU	13	0	25	1	11	0
WD	27	18	0	2	0	3	WD	10	0	24	4	9	3
TH	15	24	0	0	0	11	TH	11	0	24	2	3	10
FR	24	24	0	1	0	1	FR	46	0	2	0	2	0
WRNG							WRNG						
	GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ		GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ
MO	14	28	0	0	0	8	MO	10	40	0	0	0	0
TU	15	31	0	0	4	0	TU	10	40	0	0	0	0
WD	22	21	0	0	5	2	WD	22	27	0	0	1	0
TH	0	30	0	0	0	20	TH	10	38	0	0	0	2
FR	20	28	0	0	0	2	FR	16	34	0	0	0	0
AWRET							AWRET						
	GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ		GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ
MO	11	30	0	0	0	9	MO	4	46	0	0	0	0
TU	21	23	0	0	3	3	TU	27	5	16	0	2	0
WD	26	17	0	0	5	2	WD	19	1	17	0	13	0
TH	11	19	0	0	2	18	TH	15	6	16	0	9	4
FR	18	28	0	1	0	3	FR	29	21	0	0	0	0

This table reports a summary of the results for the Root Mean Squared Error (RMSE) and the Mean Absolute Error (MAE) estimations for all the horizons (50), all the measures of volatility (SSDR, WRSQ, WRNG and AWRET) and the six models considered. The row next to each day shows the number of times in which forecasting ability of each model is better than the others. MO, TU, WD, TH and FR are the reference of Monday, Tuesday, Wednesday, Thursday and Friday respectively.

With respect to the Root Mean Squared Error (RMSE) estimator, the GARCH and the CARR models provide similar forecasting ability, when SSDR and WRSQ measures are considered. The GARCH model is better on Wednesday and Friday for SSDR and Tuesday and Wednesday for WRSQ but the CARR model is better on Tuesday and Thursday for SSDR and Monday and Thursday for WRSQ. They are equal on Monday for SSDR and Friday for WRSQ.

For the rest of the volatility measures used as benchmarks (WRNG and AWRET) the CARR model performance is better than the GARCH model one. However, the

improvement is insignificant because in most of the cases the GARCH model provides a high number of instances in which performs better than the CARR model.

Once again the Rogers-Satchell and the Yang-Zhang models are the only alternative to the Parkinson, GARCH and CARR models. In this case, it is significant to point out the fact that the best forecasting ability of the Rogers-Satchell is produced on Wednesday when the MAE estimator and the AWRET measure are considered (13 out of 50 forecast horizons are better fitted for that model). On the other hand, Table 1 shows that the best results for the Yang-Zhang model are on Thursday when RMSE estimator and WRNG are considered (in that case 20 out of the 50 forecast horizons are better fitted for that model).

**Table 2**  
Out of sample forecast comparison.  
Fourth Sample March 13, 1989 to September 27, 2010

RMSE							MAE						
SSDR							SSDR						
	GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ		GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ
MO	0	50	0	0	0	0	MO	0	50	0	0	0	0
TU	0	50	0	0	0	0	TU	0	50	0	0	0	0
WD	0	50	0	0	0	0	WD	0	50	0	0	0	0
TH	0	50	0	0	0	0	TH	0	50	0	0	0	0
FR	0	50	0	0	0	0	FR	0	50	0	0	0	0
WRSQ							WRSQ						
	GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ		GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ
MO	6	44	0	0	0	0	MO	0	50	0	0	0	0
TU	9	41	0	0	0	0	TU	6	44	0	0	0	0
WD	4	46	0	0	0	0	WD	6	44	0	0	0	0
TH	0	48	1	0	0	1	TH	0	49	0	0	0	1
FR	0	50	0	0	0	0	FR	0	50	0	0	0	0
WRNG							WRNG						
	GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ		GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ
MO	0	50	0	0	0	0	MO	0	50	0	0	0	0
TU	0	50	0	0	0	0	TU	0	50	0	0	0	0
WD	0	50	0	0	0	0	WD	0	50	0	0	0	0
TH	0	50	0	0	0	0	TH	0	50	0	0	0	0
FR	0	50	0	0	0	0	FR	0	50	0	0	0	0
AWRET							AWRET						
	GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ		GARCH	CARR	PARK	GK	RS	YZ
MO	2	48	0	0	0	0	MO	1	49	0	0	0	0
TU	1	49	0	0	0	0	TU	5	45	0	0	0	0
WD	0	50	0	0	0	0	WD	7	43	0	0	0	0
TH	0	50	0	0	0	0	TH	0	50	0	0	0	0
FR	0	50	0	0	0	0	FR	0	50	0	0	0	0

This table reports a summary of the results for the Root Mean Squared Error (RMSE) and the Mean Absolute Error (MAE) estimations for all the horizons (50), all the measures of volatility (SSDR, WRSQ, WRNG and AWRET) and the six models considered. The row next to each day shows the number of times in which forecasting ability of each model is better than the others. MO, TU, WD, TH and FR are the reference of Monday, Tuesday, Wednesday, Thursday and Friday respectively.

Finally, the results for the last sample (March 13, 1989 to September 27, 2010) are shown in Table 2. In this case there is no debate about which is the best model for forecasting volatility because the CARR model is clearly better than the other ones for both the error estimators as well as the volatility measures. According with Chou (2005), the differences in the performance of the models are more obvious when SSDR and WRNG are used to measure volatility.

The main explanation of the results we obtained is that the choice of the best forecasting model depends on three factors: the trend, the level of volatility in the analysis period and the error estimator that is used to analyze the forecasting ability of each model. On the other hand, the day of the week on which the estimations are made is insignificant.

The CARR model proposed by Chou (2005) shows better results for forecasting volatility in the first and fourth samples, where the forecasting period is a mix of downtrend<sup>5</sup> (most of the time) and uptrend. In both cases, the mean of the different volatility measures used as benchmarks on each weekday is approximately the mean of the four samples as reported in Table 3.

However, the CARR model is no longer adequate for forecasting volatility in other cases. That is the point of the second sample where the whole forecasting period is entirely included in an upward trend and the volatility values are significantly lower than the mean as show in Table 3. In that case, the proposed Parkinson model forecast volatility better than the rest of the models when the MAE estimator and the four volatility measures are considered. However, for the same forecasting period the GARCH model is better at forecasting when the RMSE estimator is used.

On the other hand, the Parkinson and the GARCH models perform better than the CARR model for both error estimators when the WRSQ and AWRET measures are used and when the volatility is higher than the mean and the trend is mixed, being in an upward trend most of the time. The GARCH model also shows good results when the SSDR measure is used while the CARR model reports the best forecasting ability only when the WRNG is used (precisely the variable used in the variance equation of the CARR model).

To sum up, we agree with the fact that the CARR model proposed by Chou (2005) is a good model, but it is also very important to point out that the Parkinson model is clearly an alternative for the CARR and the GARCH models, especially when the volatility is low and we run the forecast analysis on an upward trend.

---

<sup>5</sup> The downtrend is most significant in the fourth sample because it contains the technological bubble crash.

**Table 3**  
**Main statistics of the volatility measures**

		SSDR					WRSQ					
		MO	TU	WD	TH	FR	MO	TU	WD	TH	FR	
1st	Mean	5,691	5,692	5,691	5,691	5,691	Mean	6,381	5,980	5,460	4,991	4,957
	Std. Dev.	18,599	19,195	18,966	19,362	18,637	Std. Dev.	32,599	26,366	21,292	13,324	11,098
2nd	Mean	5,468	5,469	5,466	5,466	5,472	Mean	5,863	5,575	5,062	4,552	4,573
	Std. Dev.	18,565	19,177	18,955	19,351	18,619	Std. Dev.	32,226	26,147	21,131	13,022	10,685
3rd	Mean	7,008	7,041	7,041	7,055	7,053	Mean	6,863	6,114	5,681	5,858	5,710
	Std. Dev.	21,941	22,578	22,614	22,679	22,145	Std. Dev.	33,723	27,610	23,157	22,759	17,477
4th	Mean	6,590	6,590	6,590	6,589	6,585	Mean	6,146	5,502	5,319	5,649	5,617
	Std. Dev.	13,790	13,969	14,344	13,844	13,904	Std. Dev.	14,972	13,923	13,406	20,558	16,642
Mean	Mean	6,189	6,198	6,197	6,200	6,200	Mean	6,313	5,793	5,381	5,263	5,214
	Std. Dev.	19,402	19,883	19,908	19,965	19,511	Std. Dev.	30,048	24,469	20,660	20,264	15,814

		WRNG					AWRET					
		MO	TU	WD	TH	FR	MO	TU	WD	TH	FR	
1st	Mean	3,236	3,240	3,219	3,173	3,196	Mean	1,750	1,754	1,697	1,661	1,675
	Std. Dev.	2,064	2,126	2,021	1,896	1,852	Std. Dev.	1,822	1,704	1,607	1,495	1,467
2nd	Mean	3,077	3,073	3,047	3,006	3,033	Mean	1,666	1,675	1,604	1,561	1,589
	Std. Dev.	2,031	2,100	2,005	1,866	1,824	Std. Dev.	1,758	1,665	1,579	1,455	1,432
3rd	Mean	3,293	3,257	3,233	3,213	3,240	Mean	1,775	1,716	1,654	1,653	1,696
	Std. Dev.	2,415	2,397	2,345	2,345	2,269	Std. Dev.	1,928	1,781	1,717	1,769	1,685
4th	Mean	3,298	3,256	3,240	3,230	3,250	Mean	1,780	1,708	1,667	1,653	1,703
	Std. Dev.	2,227	2,131	2,143	2,196	2,160	Std. Dev.	1,726	1,608	1,594	1,709	1,648
Mean	Mean	3,226	3,206	3,185	3,155	3,180	Mean	1,743	1,713	1,656	1,632	1,666
	Std. Dev.	2,269	2,234	2,188	2,193	2,126	Std. Dev.	1,866	1,710	1,655	1,690	1,618

This table reports a summary of the mean and standard deviation for all the measures of volatility (SSDR, WRSQ, WRNG and AWRET). MO, TU, WD, TH and FR refer to Monday, Tuesday, Wednesday, Thursday and Friday respectively. 1<sup>st</sup>, 2<sup>nd</sup>, 3<sup>rd</sup> and 4<sup>th</sup> refer to the first, second, third and fourth samples, while Mean refer to the mean values of each statistic for the four periods.

## 5. CONCLUSIONS

In this paper we analyze the forecasting ability of the Conditional Autoregressive Range (CARR) model, proposed by Chou (2005), by extending the sample of analysis of the Standard and Poors 500 till the last week of September 2010 and allowing for the analysis of different stock market circumstances (like upward or downward trends). Additionally, we analyze the volatility forecasting ability for all the weekdays and we propose to use various range estimators in order to analyze their forecasting performance.

The results show that the original CARR model can be improved depending on three factors: the trend, the level of volatility in the analysis period and the error estimator that is used to analyze the forecasting ability of each model.

For that reason, in those samples where the whole forecasting period is entirely included in an upward trend and the volatility values are significantly lower than the

mean, the use of the Parkinson estimator instead of the range used by Chou (2005) leads to an improvement in the forecasting ability of the model.

Finally, we must point out that these results are of greatest relevance when applied to option pricing or market risk management where an under or over- estimation of risk can be disastrous.

## REFERENCES

Alizadeh, S.; Brandt, M; Diebold, F. (2002). "Range-based estimation of stochastic volatility models". *Journal of Finance*, Vol. 57, 1047-1091.

Beckers, S. (1983). "Variances of security price returns based on highest, lowest, and closing prices". *Journal of Business*, Vol. 56, 97-112.

Bollerslev, T. (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, Vol. 31, 307-327.

Brailsford, T.J.; Faff, R.W. (1996). "An evaluation of volatility forecasting techniques". *Journal of Banking and Finance*, Vol. 20, 419-438.

Brandt, M.; Diebold, F. (2006). "A no-arbitrage approach to range-based estimation of return covariances and correlations". *Journal of Business*, Vol. 79, 61-74.

Brandt, M.; Jones, C. (2006). Volatility Forecasting with Range-based EGARCH Models. *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 24, No. 4, 470-486.

Chou, R. (2005). "Forecasting financial volatilities with extreme values: The conditional autoregressive range CARR model". *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 37, 561-582.

Engle, R.F. (1982). "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation". *Econometrica*, Vol. 50, 987-1008.

Garman, M.; Klass, M. (1980). "On the estimation of security price volatilities from historical data". *Journal of Business*, Vol. 53, 67-78.

Kunitomo, N. (1992). "Improving the Parkinson method of estimating security price volatilities". *Journal of Business*, Vol. 65, 295-302.

Lamoureux, C.G.; Lastrapes, W.D. (1993). "Forecasting stock return variances: Toward an understanding of stochastic implied volatilities". *Review of Financial Studies*, Vol. 6, 293-326.

Martens, M. (2001). "Forecasting daily exchange rate volatility using intraday returns". *Journal of International Money and Finance*, Vol. 20, 1-23.

Parkinson, M. (1980). "The extreme value method for estimating the variance of the rate of return". *Journal of Business*, Vol. 53, 61-65.

Rogers, C.; Satchell, S. (1991). "Estimating variance from high, low and closing prices". *Annals of Applied Probability*, Vol. 1, 504-512.

Taylor, S. J. (1986). *Modelling Financial Time Series*. New York: John Wiley & Sons.

Taylor, S. J.; Xu, X. (1997). "The incremental volatility information in one million Foreign exchange quotations". *Journal of Empirical Finance*, Vol. 4, 317-340.

Tse, Y.K. (1991). "Stock Returns Volatility in the Tokyo Stock Exchange". *Japan and the World Economy*, Vol. 3, 285-298.

Tse, S.H.; Tung, K.S. (1992). "Forecasting Volatility in the Singapore Stock Market". *Asia Pacific Journal of Management*, Vol. 9, 1-13.

Yang D.; Zhang, Q. (2000). "Drift-independent volatility estimation based on high, low, open, and closing prices". *Journal of Business*, Vol. 73, 477-491.



## Ponencia 19

# ESO RISK-TAKING EFFECTS: A SENSITIVITY ANALYSIS OF DELTA AND VEGA

Susana Álvarez Díez, Juan Samuel Baixauli Soler  
and María Belda Ruiz

### ABSTRACT

Greek letters, in particular delta and vega based on Black-Scholes model (BS), have been widely used to estimate CEO' wealth sensitivity to changes in stock price and their volatility and to evaluate the executive stock options (ESOs) granted in performance and risk. However, Black-Scholes model does not take into account the main features of ESOs: American type, vesting period, long-term maturity, trading and hedging constraints and departure risk, among others. Consequently, the values of delta and vega could be not valid. In the present study we select Cvitanic-Wiener-Zapatero model (CWZ) to compute ESO delta and vega values because, unlike Black-Scholes model, CWZ model includes the main characteristics of ESOs. We carry out sensitivity analyses on delta and vega with respect to the BS and CWZ parameters and our results show significant differences that recommend do not follow using Black and Scholes Greeks.

**Key Words:** Executive stock options, Greek letters, Delta, Vega, Risk-taking.

### 1. INTRODUCTION

Executives are considered a key element to get a successful firm. Equity-based compensation has become increasingly common among U.S. top executives in recent years (Denis *et al.*, 2006), including shareholders, boards of directors, investment analysts and compensation consultants. Thus, due to the importance of executives in order to achieve the objectives, firms have come to rely more heavily on equity-based compensation than in the past.

A variety of equity-based compensation forms exist for firms wishing to provide an equity-based incentive to their executives, including stock options and stocks. However, the pay-performance incentive effect for option-based compensation is higher than that for stock-based compensation (Smith and Stulz, 1985; Lippert and

Porter, 1997; Hemmer *et al.*, 1999; Bryan *et al.*, 2002). Thus, employee stock options (ESOs) are mostly offered to management as part of their executive compensation package. Nevertheless the growth in the use of executive stock options as a form of non-cash compensation has become increasingly controversial in recent years. A first group of studies consider that the use of option-based compensation is a mechanism to align the interests of managers to those of shareholders, which helps constrain potential CEO opportunism and encourage managerial risk-taking behavior and thus mitigate the agency problems due to the separation of ownership and control characterizing large public corporations (Lambert *et al.*, 1991; Murphy, 1999; Hemmer *et al.*, 1999; Rajgopal and Shevlin, 2002; among others). Consequently, ESOs can affect firm's financing decisions. In this line, recent studies find that incentive compensation affects leverage (Cohen *et al.*, 2000; Coles *et al.*, 2006; Lewellen, 2006; Dong *et al.*, 2010) and influences investing decisions, such as investment in R&D or investment in property, plants and equipment (Guay, 1999; Coles *et al.*, 2006; Wu and Tu, 2007).

A second group of studies suggests that executive stock options could lead to perverse behaviours that are detrimental to shareholders. Options give executive the incentive to take excessive risk (Wiseman and Gomez-Mejía, 1998; Lambert, 1986; Ju *et al.*, 2003; Raviv and Landskrones, 2010; Dong *et al.* 2010). In addition, stock options could induce executives to manipulate corporate earnings and to fraudulently manipulate the firm's stock price in order to enhance the value of their options (Cheng and Warfield, 2005; Bergstresser and Philippon, 2006; Dennis *et al.*, 2006; Burns and Kedia, 2006, 2008; Peng and Roell, 2008).

A review of the literature indicates that most research analyzes managerial risk incentives using the Black-Scholes framework to value ESOs even though their main characteristics are not considered in that model. Among others, those characteristics are the vesting period, the long-term maturity, the American type, the sale and hedging restrictions and the job termination risk. Consequently, the ESO value could be different from the price resulting from Black-Scholes model (1973). Huddart (1994) and Cuny and Jorion (1995) pointed out that the optimal exercise policy is likely to deviate from the assumptions underlying the Black-Scholes framework, due to managers' risk-aversion and the non-transferability of employee stock options. Lewellen (2006) suggested that Black-Scholes estimates are not a good proxy for the actual risk incentives of undiversified executives.

Alternatively to Black-Scholes model, Cvitanic *et al.* (2008) developed a valuation model that captures the main particularities of the ESOs and derived an analytic expression for the price of the ESO. Consequently, Cvitanic-Wiener-Zapatero model (CWZ) could become an accountant standard in order to estimate the value of the ESOs. The present study examines how the sensitivity of CEO wealth to stock price (delta) and the sensitivity CEO wealth to stock-return volatility (vega) changes with CWZ parameters not included in BS change. In particular, the barrier, the decay rate of the barrier and the exit rate of employees. Also, this study compares the CWZ delta and vega sensitivities with those of BS to changes in their common parameters, which are the underlying stock's price, the time to maturity and the volatility.

Thus, unlike most prior studies which use the Black-Scholes model, our main contribution is using Cvitanic *et al.* (2008) model in order to analyze how delta and vega change with different parameters. Because of this model takes into account the majority of the main characteristics of the ESOs, we can obtain right conclusions about the sensitivity to stock price and to stock return volatility.

Overall, our results show significant differences that recommend do not follow using Black and Scholes Greeks. In particular, we find that Black-Scholes delta and vega values are overvaluated with regard to the market-to-stock price and volatility. But the biggest shape difference in BS and CWZ deltas and vegas occurs when time to maturity varies.

The remainder of the paper is organized as follows. Section 2 provides a discussion of ESO risk-taking effects. Section 3 describes briefly the delta and vega expressions based on BS and CWZ models. Section 4 describes the variable specification and data. In Section 5, results are reported and analyzed. Section 6 presents the main conclusions.

## **2. PRIOR LITERATURE: ESO RISK-TAKING EFFECTS**

### **2.1. Risk-taking effects of ESOs delta and vega values**

Managerial risk-taking behaviour depends on the sensitivities of executive wealth to stock price (delta) and to stock volatility (vega). Many studies have been focused on examining the impact of the ESOs on risk-taking behaviour in response to their delta and vega values. However, what it is not very clear are the results of such studies about how delta and vega affect on the executive risk-taking.

Many researchers have found that the effects of delta on different financial decisions are significant. Core and Guay (1999) examined delta as the dependent variable with a regression model in two stages. They found that there exists a positive association between CEO delta portfolio and growth opportunities and CEO tenure. Other recent example is O'Connor and Rafferty (2010), who examined the effect of executive stock options on firm value. After using GMM techniques to control for endogeneity bias, they found that there is a positive association between the sensitivity to stock market return and shareholder value while there is no relation between the sensitivity to stock market risk and firm value. Hence, they suggested that boards should increase the components of compensation that increase delta.

Other researchers have also found that vega is significant in taking more risk. Using vega as executive wealth sensitivity, Guay (1999) found a positive relation between vega and firm size, investment opportunities, and R&D intensity. Cohen *et al.* (2000) ignored how delta affects risk taking and they showed that managers respond to the risk-taking incentives created by executive stock options through vega value. They found a positive relation between vega and both leverage and

stock return volatility. In particular, managers try to increase stock price volatility and they tend to increase the level of leverage of the firm in response to increases in their wealth's sensitivity to volatility. Rajgopal and Shevlin (2002) examined how option-based compensation influences the decisions about investing in risky projects for a sample of oil and gas production firms. They found a positive relation between vega and exploration risk and suggested that executive stock options reduce managerial incentive problems by motivating them to invest in risky projects. Knopf *et al.* (2002) generalize these findings by showing that similar results hold in a broad sample of firms with multiple risk exposures. Low (2009) examined the impact of equity-based compensation on risk-taking behaviour in response to the Delaware takeover regime during the mid-1990s. He found that higher vega values encourage managerial risk-taking behaviour, which explains the increase in CEO portfolio vega values to counteract the adverse effects of the regime shift on firm risk. With regard to delta and how this sensitivity of CEO wealth to stock price affects risk-taking, he did not find conclusive results. Dong *et al.* (2010) reported that managers are more likely to use debt rather than equity when their wealth is more sensitive to stock return volatility.

Coles *et al.* (2006) concluded that managerial incentives, delta and vega, and policy choices are jointly determined. They found a positive relation among the sensitivity of CEO wealth to stock volatility and risky policy choices, including more investment in R&D, less investment in property, plant and equipment, greater focus on fewer lines of business, and higher leverage. However, they found that delta shows the opposite effect and that riskier policy choices generally lead to compensation structures with higher vega and lower delta.

All researchers above used delta and vega values based on Black-Scholes model incorporating the dividend yield and using the so called one-year approximation method proposed by Core and Guay (2002). However, there is no consensus on results.

## 2.2. Executive stock option pricing models

The majority of articles focused on examining the impact of the ESOs on risk-taking behaviour rely on delta and vega values from Black-Scholes model, even though ESOs and exchange-traded options differ significantly. Alternatively, ESO pricing models have been developed to value the ESOs taking into account some of the main features of this kind of options.

In order to introduce early exercise in the framework of the Black-Scholes model, Jennergren and Näslund (1993) considered the first jump time of a Poisson process to control the early exercise effect. They used a Poisson process as a proxy for all the determinants which lead to early exercise and assumed that the rate at which an employee can leave his job does not depend on the current stock price and time to maturity, what is known as constant intensity. Their model is a partial differential equation subject to various initial and side conditions, just like the ordi-

nary Black and Scholes model. As the early exercise depends on the underlying stock price and time, Carr and Linetsky (2000) developed a general stochastic intensity-based framework for stock options valuation exclusively based on the rate of exit. They suggested two simple analytically tractable specifications as they separated the exit rate into two parts in order to measure the early exercise: a constant Poisson intensity parameter and a random intensity which depends on the underlying stock price path.

Using binomial tree models, Huddart (1994) and Kulatilaka and Marcus (1994) proposed an utility-based framework to capture the early exercise behaviour. Tian (2004) also used an utility-maximization framework and developed a certain equivalent valuation model to value executive stock options and examine the incentive effects of these stock options. Hull and White (2004) model is an extension of the binomial tree model for the valuation of the ESOs. They modelled the early exercise behaviour of employees by assuming that the option exercise takes place whenever stock price reaches a certain multiple of strike price after the vesting period. In an easy way, Ammann and Seitz (2004) proposed a model that accounts for suboptimal exercise because of nontradability by a simple adjustment of the strike price. They adjusted the exercise price of the ESOs only to determine the time of exercise, not to calculate the payoff of the options.

Additionally to the determinants of ESO value, probability of departure and early exercise, other models have taken into account that the volatility of the underlying asset varies with the time under a GARCH framework (Duan and Wei, 2005 and Leon and Vaello-Sebastian, 2009) or uncertain volatility (Brown and Szimayer, 2008).

The model proposed by Cvitanic *et al.* (2008) model must be highlighted because it captures the early exercise through a barrier and provides a solution completely analytical, what is an advantage with respect to Hull and White (2004) model. In contrast to Carr and Linetsky (2000), their specifications do not require numerical integration assuming that ESO is vested. Furthermore, this model does not require hard-to-estimate parameters, such as employee risk aversion in contrast to binomial tree models using a utility-based (Huddart, 1994 and Kulatilaka and Marcus, 1994).

Overall, although no standard model ESO pricing model has been established in the literature, the model proposed by Cvitanic *et al.* (2008) could be considered the best model because its solution is completely analytical and it accounts for the majority of the main features of executive stock options. Hence, we use this model to obtain delta and vega from which we do comparisons with those obtained with Black-Scholes model.

### **3. DELTA AND VEGA BASED ON BS AND CWZ MODELS**

Delta, CEO's wealth sensitivity to the stock price, is obtained as the rate of change of option value with the underlying stock price while vega, CEO's wealth sensitivity

to the stock volatility, is obtained as the rate of change of option value with volatility. Using Black-Scholes model for European call options, delta and vega have the following expressions:

$$\Delta = N(d_1)e^{-qT} \quad \nu = e^{-qT} S\sqrt{T}n(d_1) \quad (1)$$

where  $N(\cdot)$  is the cumulative distribution function of a standard normal distribution,  $n(\cdot)$  is its density function and the parameter  $d_1$  is:

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2)$$

Black-Scholes formula is useful for computing the price of exchange-traded options easily but not for pricing the ESO since they are significantly different with respect to exchange-traded options. Cvitanic *et al.* (2008) developed an ESO valuation model from the point of view of the firm, because the firm is less constrained than the employee with regard to risk diversification. Among their assumptions, their pricing model considers a long-term maturity, a long vesting period during which the option cannot be exercised, the American style, the sale and hedging restrictions, the likelihood of early voluntary exercise and the obligation to exercise immediately if the employee leaves the firm, except if this happens before options are vested, in which case the options are forfeited. Other features of the ESO are not incorporated in this model because computations would become extremely difficult. In particular, the possibility of resetting and reloading, the dilution effect and the possibility of default of the firm are not included.

Unlike Hull and White (2004), Cvitanic *et al.* (2008) derived an analytic pricing formula which computes the expected payoff of a call option that can only be exercised after the vesting period  $T_0$ . To capture the effect of the early exercise behaviour of the employee, CWZ model includes a decreasing barrier as maturity  $T$  approaches, such that, if the barrier is crossed when the option is vested, it is exercised. The rate of decay of the barrier is given by the parameter  $\alpha$  and the level of the barrier at which the employee exercises the option is represented by  $L$ . Also, CWZ model includes an exit rate of the employee which represents the likelihood that the employee leaves the firm willingly or not. It is denoted by  $\lambda$  and is the intensity of a Poisson process. Under this scenario, Cvitanic *et al.* (2008) got that the ESO delta and vega expressions are:

$$\Delta = \frac{\partial(K_{11} + K_{12} + K_2 + K_3)}{\partial S}, \quad \nu = \frac{\partial(K_{11} + K_{12} + K_2 + K_3)}{\partial \sigma_S} \quad (3)$$

The explicit formulas for  $K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_2$  and  $K_3$  are given in the Appendix.

#### 4. PARAMETERS OF DELTA AND VEGA

Delta and vega values depend on all parameters used to price ESOs, which are the actual underlying stock price, the strike price, the time to maturity, the vesting period, the stock return volatility, the risk-free rate of interest, the dividend yield and the fictitious parameter values used to represent early exercise which are the level of the barrier, its rate of decay as maturity approaches and the likelihood that an employee leaves the firm.

We do not report sensitivity analysis for the risk-free rate of interest and dividend yield since they have a little impact on delta and vega values. The value of risk-free interest rate used in Carr and Linetsky (2000), Tian (2004), Cvitanic *et al.* (2008), Brown and Szimayer (2008) and León and Vaello-Sebastiá (2009) is 5%, Bettis *et al.* (2005) used a risk-free rate of 5.58% while Jennergren and Näslund (1993) of 8% and Core and Guay (2002) of 7%. Respect to the dividend yield, Jennergren and Näslund (1993), Carpenter (1998) and Core and Guay (2002) considered a stock's dividend yield of 3% while Bettis *et al.* (2005) of 0.14% and León and Vaello-Sebastiá (2009) included a continuously compounded dividend yield of 2.5%. Hence, we consider a risk-free rate of 5% and a continuously compounded dividend yield of 2%.

According to Bettis *et al.* (2005), the stock price and the strike price are usually equal because ESO grants are issued at-the-money. For numerical purposes we consider that stock and strike prices are equal to 1. Carpenter (1998) used a mean value of the ratio of the stock price to strike price when the options were exercised equals to 2.47, and Huddart and Lang (1996) equals to 2.22. In our study, we consider a wide range for market-to-strike ratio, from 0.25 to 2.5.

With regard to the stock return volatility we consider an annualized volatility of 30% for the underlying asset because many previous studies used this value (Jennergren and Näslund, 1993; Carr and Linetsky, 2000; Core and Guay, 2002; Tian, 2004; León and Vaello-Sebastiá, 2009) or a round it. Huddart and Lang (1996) showed a mean volatility of 39.3%, Carpenter (1998) of 31%, Marquardt (2002) of 29.2% and Bettis *et al.* (2005) of 38.61%. Accordingly, we use a range for stock market volatility from 20% to 60%, similar to Huddart and Lang (1996), Carpenter (1998), Marquardt (2002) and Bettis *et al.* (2005).

Empirical evidence on values of vesting period and time to maturity is conclusive. Jennergren and Näslund (1993) assumed that the time to expiration of ESOs is equal to 10 years with a 3-year vesting period. Huddart and Lang (1996) examined executive stock options grants and exercise records for eight companies listed on the NYSE. Their data set includes both 5-year and 10-year options with a vesting period ranges from 3 to 5 days. Carpenter (1998) considered ESO grants from 1983 to 1984 of 40 firms on the NYSE or AMEX, with a mean maturity of 5.83 years, ranging from 1.15 to 9.48 years, with a mean vesting period of 1.96 years. For a sample of 278 CEOs, Guay (1999) reported that the mean time to maturity had a median value of 7.2 years, ranging from 1.5 to 16.5 years. Core and Guay (2002) assumed a 3-year vesting period at the grant day. Marquardt (2002)

showed a mean maturity of 8.93 years (for a final sample of 57 firms and 966 ESO grants over the period 1963-1984). Bettis *et al.* (2005) and Cvitanic *et al.* (2008) assumed a 10-year life with a 2-year vesting period while Leung and Sircar (2009) a 10-year maturity and a vesting period ranging from 2 to 4 years. Therefore, we consider a 10-year maturity with a 3-year vesting period.

CWZ model captures the early exercise after the option is vested with a fictitious barrier at which executive exercise the option and the rate of decay of that barrier as maturity approaches, such that, if the barrier is crossed, the executive exercises the option at that point. As we choose a 10-year maturity and the barrier has to be over the strike, we consider a mean rate of decay of the barrier equal to 2%, ranging from 0% to 4%. Also, we include three levels of the barrier, equal to 1.5, 2 and 2.5 since evidence points out that early exercise is observed at market-to-strike ratio below 2.5.

Finally, we need to determine the probability that an executive leaves the firm, which is reflected in the intensity of the Poisson process. In a sample of 358 top executives during 1998-2001, Evans *et al.* (2010) showed a CEO turnover of 16.5% (1998), 19.8% (1999), 24.6% (2000) and 39.1% (2001), which includes involuntary and voluntary departure. For a sample of large U.S. firms from 1992 to 2005, Kaplan and Minton (2006) reported a CEO turnover of 14.9% (from 1992 to 1997) and of 16.5% (from 1998 to 2005). Hence, we consider a Poisson intensity of 16% and the sensitivities of delta and vega are computing for intensity values ranging from 14% to 20%.

## 5. DELTA AND VEGA SENSITIVITY RESULTS

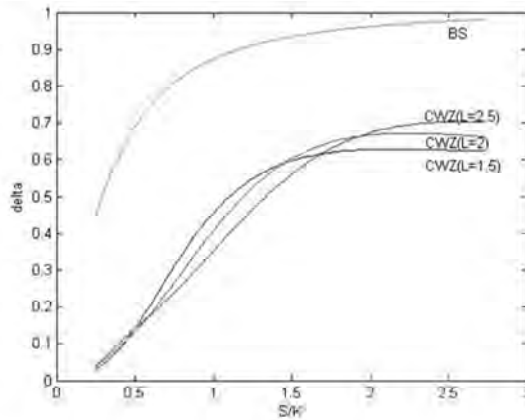
Figure 1 illustrates the sensitivity of delta with respect to the parameters common to BS and CWZ models, which are the underlying stock price, the time to maturity and the stock return volatility. The underlying stock price has been expressed as the ratio of the stock price to strike price.

As Figure 1a shows, the delta value under BS model is over 0.8 when the ESO is at-the-money while at-the-money exchange-traded options have deltas of about 0.5. Delta is increasing with respect to the market-to-strike and shows a decreasing rate of growth. As Figure 1a makes clear, for the three considered barrier levels delta values under CWZ model are significantly lower than those under BS model. CWZ delta values are slightly below 0.5 when ESOs are at-the-money and vary between 0.6 and 0.7 when they are in-the-money. BS delta values are greatly overvalued and, when ESOs have a strike ratio over 1.5, it can be observed that the differences between BS and CWZ delta values are greater as the level of the barrier is lower. It is due to the fact that the barrier represents the point at which the executive decides to collect the payoff and forfeit the remaining time-value of the option. Overall, results show differences of values in level but the rank order is preserved (monotonic transformation), what makes no difference if BS or CWZ delta values are used to evaluate risk-taking effects.

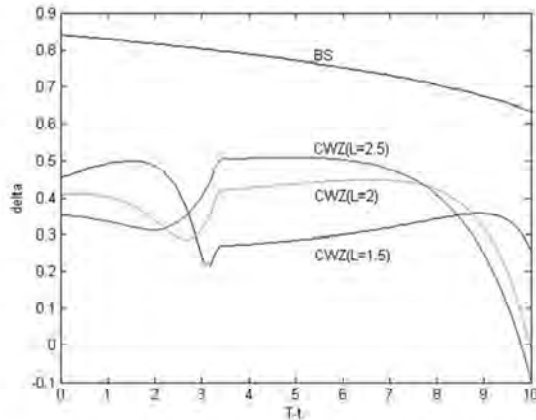


**Figure 1**

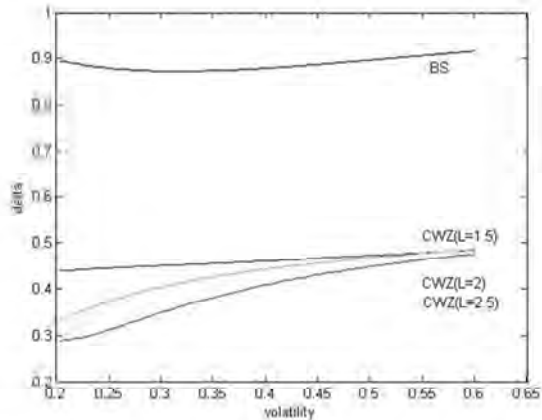
BS and CWZ delta sensitivity to the market-to-strike price, time to maturity and volatility.



(a) Market-to-strike price



(b) Time to maturity



(c) Volatility

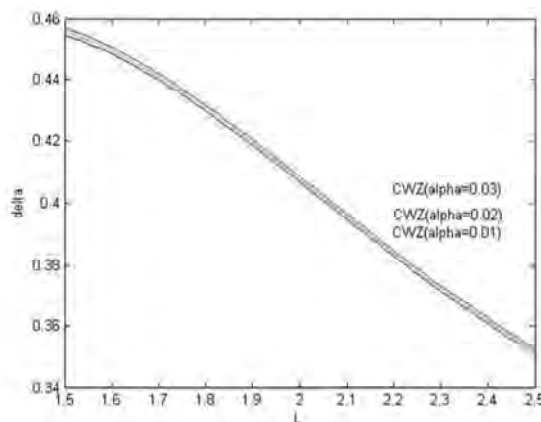
In contrast to Figure 1a, Figure 1b shows that when the time to maturity varies the behaviours of delta under BS and under CWZ are greatly different. BS delta is strictly decreasing as maturity approaches while CWZ deltas are U-shaped during the vesting period and are concave after it. It is due to the fact that, unlike BS model, CWZ model incorporates vesting period and consider that a ESO can only be exercised after the vesting period. If the executive leaves the firm willingly or not before vesting, the ESOs are worthless.

Figure 1c shows that BS and CWZ deltas are not very sensitive to changes in volatility. With regard to CWZ delta values it can be observed that they converge to the same value when the volatility is about 60% and that delta values are more sensitive to changes in volatility as the barrier is lower.

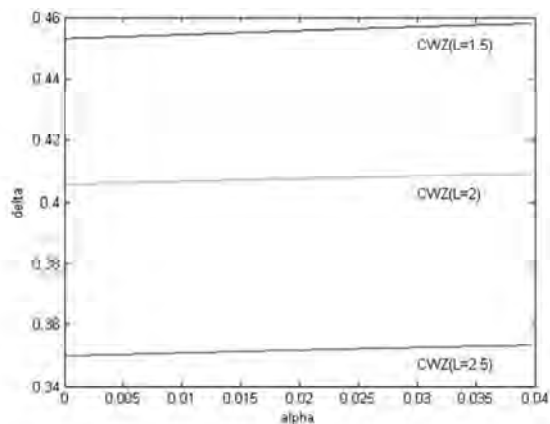
Figure 2 shows the sensitivity of delta with respect to the parameters which are considered only in CWZ model; that is, the barrier level, the decay rate of the barrier and the probability of departure. Figure 2a shows that CWZ deltas are slightly sensitive to changes in the barrier level while Figure 2b reports that CWZ deltas are not sensitive to changes in the decay rate of the barrier. In particular, when the barrier level varies the CWZ deltas range from 0.46 to 0.36. It can be observed in Figure 2c that, independently of the level of the barrier, as probability of departure increases the CWZ deltas decrease about 0.07. Overall, the consequences of increases of the barrier level and of the probability of departure are 15% and 2.0% reductions in CWZ delta values, respectively.

**Figure 2**

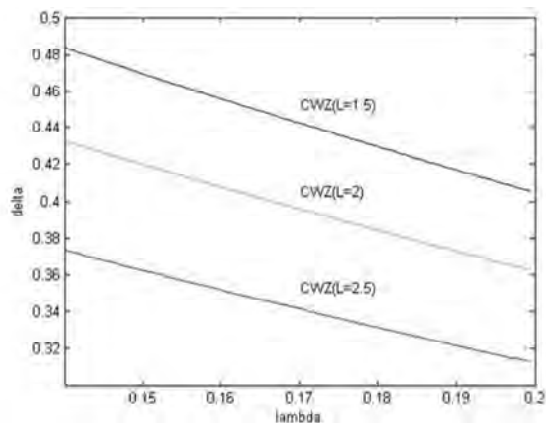
CWZ delta sensitivity to the level of the barrier, rate of decay of the barrier and probability of departure.



(a) Barrier level



(b) Decay rate of the barrier

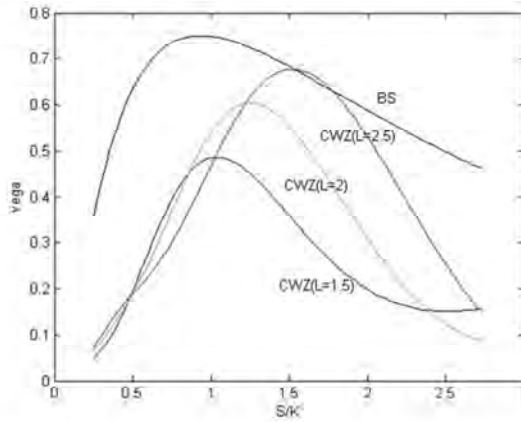


(c) Probability of departure

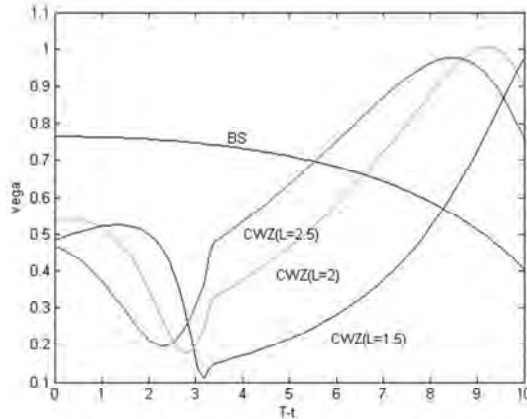
Figure 3 illustrates the sensitivity of vega with respect to the parameters common to BS and CWZ models. Firstly, in Figure 3a it can be observed that, when the option is out-the-money, BS vega is overvalued while, when the option is in-the-money, the overvaluation decreases as barrier level is higher. BS and CWZ vegas are bell-shaped and CWZ vegas are right-upper displaced as the barrier level is higher. Secondly, Figure 3b shows that BS vega is slightly decreasing as maturity approaches while CWZ vegas only decrease during the vesting period. At the end of the vesting period, CWZ vegas start to increase and, when the ESOs are vested, there is a point at which CWZ vegas cross the BS vega and remain above it. Overall, at the beginning of the vesting period BS vega is overvalued and, as maturity approaches, BS vega becomes undervalued. Finally, Figure 3c shows that for high (low) levels of volatility the BS vega overvaluation is higher (lower) as the level of the barrier decreases.

**Figure 3**

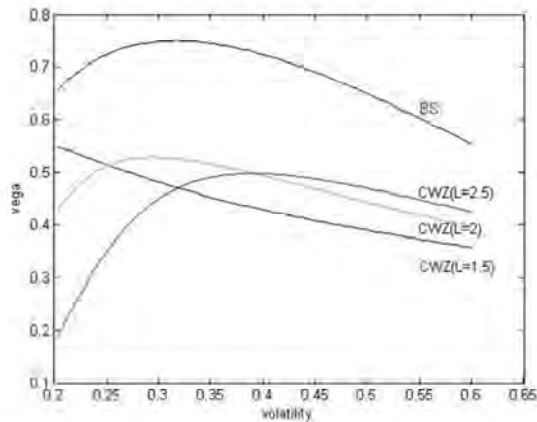
BS and CWZ vega sensitivity to the market-to-strike price, time to maturity and volatility.



(a) Market-to-strike price



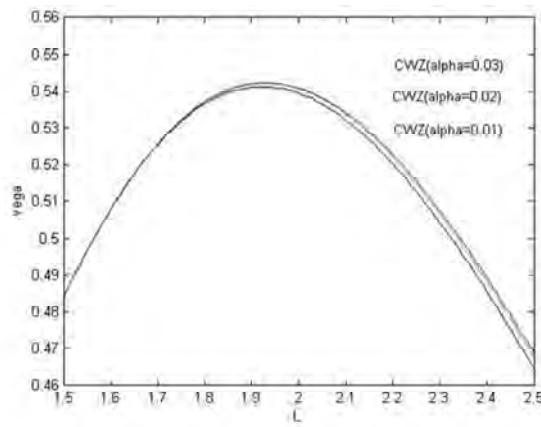
(b) Time to maturity



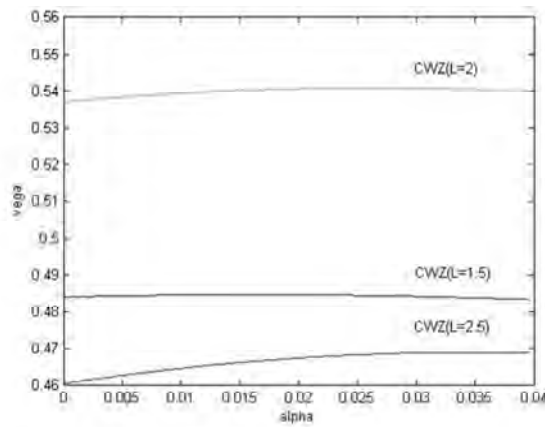
(c) Volatility

Figure 4 shows the sensitivity of vega with respect to the parameters which are considered only in CWZ model. Figure 4a illustrates that CWZ vegas are bell-shaped. Low and high barrier levels are associated to low values of CWZ vegas. In particular, for those barrier levels the CWZ vegas are reduced as least 10%. Figure 4b shows that the decay rate of the barrier level has not got a significant effect on CWZ vegas. Finally, in Figure 4c it can be observed that an increase in the probability of departure leaves to reduce the CWZ vegas approximately in 20%.

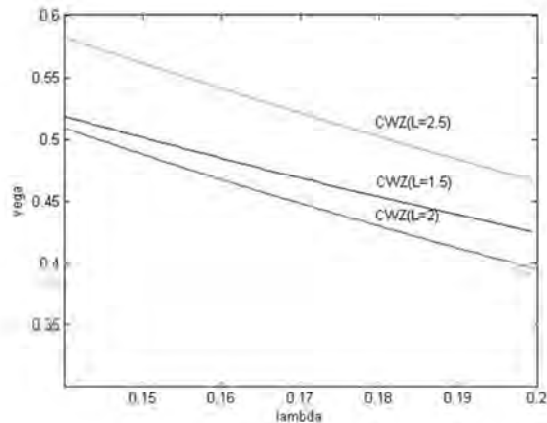
**Figure 4**  
CWZ vega sensitivity to the level of the barrier, rate of decay of the barrier and probability of departure.



(a) Level of the barrier



(b) Rate of decay of the barrier



(c) Probability of departure

## 6. CONCLUSIONS

In this study we have compared CWZ delta and vega sensitivities with those of BS to changes in their common parameters, which are the underlying stock's price, the time to maturity and the volatility. Also we have analysed how delta and vega values change when parameters included in CWZ model but not in BS model change: the level of the barrier, the decay rate of the barrier and the exit rate of employees.

Our results show that BS delta values are overvalued, being almost twice CWZ delta values. Thus, the CEO's wealth changes with respect to stock price are half the value that BS predicts. In contrast to happen when stock price and its volatility, when time to maturity is analysed we find significant shape differences in BS and CWZ deltas. CEO's wealth sensitive to stock price is not reduced as maturity approaches as BS model predicts. It behaves differently during the vesting period: at the beginning the sensitivity to the stock price decreases and becomes increasing until the maturity. Therefore, studies on risk-taking effects using delta values should split the vested and unvested options.

With regard to CEO's wealth sensitivity to stock volatility, we conclude that BS vega is overvalued. As in the delta case, the biggest difference in shape occurs when time to maturity varies. Under CWZ model as maturity approaches the CEO's wealth sensitivity to stock volatility increases, opposite to BS model predicts.

Considering the parameters which are only included in CWZ model, it must be highlighted that both the CEO's wealth sensitivity to stock price and to stock volatility are lower as probability of departure is higher. However, the decay rate of the barrier level has not got a significant effect on both CWZ vegas and deltas. In relation with the level of the barrier, as this level increases CWZ deltas decrease, while CWZ vegas are bell-shaped.

In sum, after analyzing both BS and CWZ deltas and vegas values, our results suggest not following using Black and Scholes Greeks because of the significant differences showed between BS and CWZ values.

Overall, research on option-based compensation and its risk-taking effects should be robust to ESO pricing models. In particular, CWZ model is very useful for ESO pricing because, as BS model, has a close formula, and additionally, takes into consideration the main features of ESOs. In contrast to using other ESO pricing models, one has not to resort to numerical methods.

## ACKNOWLEDGEMENTS

Financial support from Spanish government under project ECO 2008-02846 and from Fundacion Seneca under project 11837/PHCS/09 are acknowledged.

## REFERENCES

Ammann, M.; Seiz, R. (2004). "Valuing employee stock options: Does the model matter?". *Financial Analysts Journal*, vol. 60, nº 5, 21-37.

Bergstresser, D.; Philippon, Th. (2006). "CEO incentives and earnings management". *Journal of Financial Economics*, vol. 80, nº 3, 511-529.

Bettis, J., Bizjak, C., Lemmon, M. (2005). "Exercise behavior, valuation, and the incentive effects of employee stock options". *Journal of Financial Economics*, 2005, vol. 76, nº 2, 445-470.

Black, Fischer; Scholes, Myron (1973). "The pricing of options and corporate liabilities". *Journal of Political Economy*, vol. 81, nº 3, 637-654.

Brown, Ph.; Szimayer, A. (2008). "Valuing executive stock options: performance hurdles, early exercise and stochastic volatility". *Accounting and Finance*, vol. 48, nº 3, 363-389.

Bryan, S.; Hwang, L.; Lilien, S. (2002). "CEO stock-based compensation: an empirical analysis of incentive-intensity, relative mix and economic determinants". *Journal of Business*, vol. 73, nº 4, 661-693.

Burns, N.; Kedia, S. (2006). "The impact of performance-based compensation on misreporting". *Journal of Financial Economics*, vol. 79, nº 1, 35-67.

Burns, N.; Kedia, S. (2008). "Executive options exercises and financial misreporting". *Journal of Banking and Finance*, vol. 32, nº 5, 845-857.

Carpenter, J. (1998). "The exercise and valuation of executive stock options". *Journal of Financial Economics*, vol. 48, nº 2, 127-158.

Carr, P.; Linetsky, V. (2000). "The valuation of executive stock options in an intensity-based framework". *European Finance Review*, vol. 4, nº 3, 211-230.

Cheng, Q.; Warfield, T. (2005). "Equity incentives and earnings management". *The Accounting Review*, vol. 80, nº 2, 441-476.

Cohen, R.; Hall, B.; Viceira, L. [Web] *Do executive stock options encourage risk-taking?* Harvard Business School. 2000. (<http://www.people.hbs.edu/lviceira/cohallvic3.pdf>)

Coles, J.; Na veen, D.; Na veen, L. (2006). "Managerial incentives and risk-taking". *Journal of Financial Economics*, vol. 79, nº 2, 431-468.

Core, J.; Guay, W. (1999). "The use of equity grants to manage optimal equity incentive levels". *Journal of Accounting and Economics*, vol. 28, nº 2, 151-184.

Core, J.; Guay, W. (2002). "Estimating the value of employee stock options portfolios and their sensitivities to price and volatility". *Journal of Accounting Research*, vol. 40, nº 3, 613-630.

Cuny, C.; Jorion, Ph. (1995). "Valuing executive stock options with endogenous departure". *Journal of Accounting and Economics*, vol. 20, nº 2, 193-205.

Cvitanic, J.; Wiener, Z.; Zapatero, F. (2008). "Analytic pricing of employee stock options". *Review of Financial Studies*, vol. 21, nº 2, 683-724.

Denis, D.; Hanouna, P.; Sarin, A. (2006). "Is there a dark side to incentive compensation?". *Journal of Corporate Finance*, vol. 12, nº 3, 467-488.

Dong, Z.; Cong, W.; Fei, X. (2010). "Do executive stock options induce excessive risk taking?". *Journal of Banking and Finance*, vol. 34, nº 10, 2518-2529.

Duan, J.-Ch.; Jason, W. (2005). "Executive stock options and incentive effects due to systematic risk". *Journal of Banking and Finance*, vol. 29, nº 5, 1185-1211.

Evans, J.H.; Nagarajan, N.J.; Schloetzer, J.D. (2010). "CEO turnover and retention light: retaining former CEOs on the Board". *Journal of Accounting Research*, vol. 48, nº 5, 1015-1047.

Guay, W. (1999). "The sensitivity of CEO wealth to equity risk: an analysis of the magnitude and determinants". *Journal of Financial Economics*, vol. 53, nº 1, 43-71.

Hemmer, Th.; Kim, O.; Verrecchia, R. (1999). "Introducing convexity into optimal compensation contracts". *Journal of Accounting and Economics*, vol. 28, nº 3, 307-327.



Huddart, S. (1994). "Employee stock options". *Journal of Accounting and Economics*, vol. 18, nº 2, 207-231.

Huddart, S.; Lang, M. (1996). "Employee stock option exercises an empirical analysis". *Journal of Accounting and Economics*, vol. 21, nº 1, 5-43.

Hull, J.; White, A. (2004). "How to value employee stock options". *Financial Analysts Journal*, 2004, vol. 60, nº 1, 114-119.

Jennergren, P.; Näslund, B. (1993). "A comment on valuation of executive stock options and the FASB proposal". *The Accounting Review*, vol. 68, nº 1, 179-183.

Ju, N.; Leland, H.; Senbet, L. (2003). [Web] *Options, options repricing and severance packages in managerial compensation: their effects on corporate risk*. (<http://www.rhsmith.umd.edu/faculty/nju/JLSpaper03.pdf>)

Kaplan, S.; Minton, B. (2006). *How has CEO turnover changed? Increasingly performance sensitive Boards and increasingly uneasy CEOs*. (<http://www.nber.org/papers/w12465>)

Knoft, J.; Nam, J.; Thornton, J. (2002). "The volatility and price sensitivities of managerial stock option portfolios and corporate hedging". *Journal of Finance*, vol. 52, nº 2, 801-313.

Kulatilaka, N.; Marcus, A. (1994). "Valuing employee stock options". *Financial Analysts Journal*, vol. 50, nº 6, 46-56.

Lambert, R. (1986). "Executive effort and the selection of risky projects". *Rand Journal of Economics*, vol. 17, nº 1, 77-88.

Lambert, R.; Larcker, D.; Verrecchia, R. (1991). "Portfolio considerations in valuing executive compensation". *Journal of Accounting Research*, vol. 29, nº 1, 129-149.

León, A.; Vaello-Sebastiá, A. (2009). "American GARCH employee stock option valuation". *Journal of Banking and Finance*, vol. 33, nº 6, 1129-1143.

Leung, T.; Sircar, R. (2009). "Accounting for risk aversion, vesting, job termination risk and multiple exercises in valuation of employee stock options". *Mathematical Finance*, vol. 19, nº 1, 99-128.

Lewellen, K. (2006). "Financing decisions when managers are risk averse". *Journal of Financial Economics*, vol. 82, nº 3, 551-589.

Lippert, R.; Porter, G. (1997). "Understanding CEO pay: a test of two pay-to-performance sensitivity measures with alternative measures of alignment and influence". *Journal of Business Research*, vol. 40, nº 2, 127-138.

Low, A. (2009). "Managerial risk-taking behavior and equity-based compensation". *Journal of Financial Economics*, vol. 92, nº 3, 470-490.

Marquardt, C. (2002). "The cost of employee stock options grants: an empirical analysis". *Journal of Accounting Research*, vol. 40, nº 4, 1191-1217.

Murphy, K. (1999). *Executive compensation*. Handbook of Labor Economics, vol. 3, nº 2, 2485-2563.

O'Connor, M.; Rafferty, M. (2010). "Incentive effects of executive compensation and the valuation of firm assets". *Journal of Corporate Finance*, vol. 16, nº 4, 431-442.

Peng, L.; Roell, A. (2008). "Executive pay and shareholder litigation". *Review of Finance*, vol. 12, nº 1, 141-184.

Rajgopal, Sh.; Shevlin, T. (2002). "Empirical evidence on the relation between stock option compensation and risk taking". *Journal of Accounting and Economics*, vol. 33, nº 2, 145-171.

Raviv, A.; Landskroner, Y. (2010). [Web] *The 2007-2009 financial crisis and executive compensation: analysis and a proposal for a novel structure*. ([http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1695490](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1695490))

Smith, C.; Stulz, R. (1985). "The determinants of firms' hedging policies". *Journal of Financial Quantitative Analysis*, vol. 20, nº 4, 391-405.

Tian, Y. (2004). "Too much of a good incentive? The case of executive stock options". *Journal of Banking and Finance*, vol. 28, nº 6, 1225-1245.

Wiseman, R.; Gomez-Mejia, L. (1998). "A behavioral agency model of managerial risk taking". *The Academy of Management Review*, vol. 23, nº 1, 133-153.

Wu, J.; Tu, R. (2007). "CEO stock option pay and R&D spending: a behavioral agency explanation". *Journal of Business Research*, 2007, vol. 60, nº 5, 482-492.

## APPENDIX

$$\begin{aligned}
 K_{11} = & Le^{-\alpha T_0} e^{-(r_{\alpha+\lambda_0})T_0} \left(\frac{L}{s}\right)^{\frac{y_+^\alpha - c_\alpha}{\sigma^2}} e^{\frac{c_\alpha - y_-^\alpha}{\sigma^2}(r_0 - \sigma^2/2)T_0} \times B\left(\frac{(c_\alpha - y_-^\alpha)\sqrt{T_0}}{\sigma}, Q, d_0(L) + \frac{\sqrt{T-T_0}}{\sigma} c_\alpha\right) - \\
 & - Ke^{-(r_0+\lambda_0)T_0} \left(\frac{L}{s}\right)^{\frac{y_-^\alpha - \bar{c}}{\sigma^2}} e^{\frac{\bar{c} - y_-^\alpha}{\sigma^2}(r_0 - \sigma^2/2)T_0} \times B\left(\frac{(\bar{c} - y_-^\alpha)\sqrt{T_0}}{\sigma}, Q, d_0(L) + \frac{\sqrt{T-T_0}}{\sigma} \bar{c}\right) + \\
 & + Le^{-\alpha T_0} e^{-(r_0+\lambda_0)T_0} \left(\frac{L}{s}\right)^{\frac{y_+^\alpha + c_\alpha}{\sigma^2}} e^{-\frac{c_\alpha + y_-^\alpha}{\sigma^2}(r_0 - \sigma^2/2)T_0} \times B\left(-\frac{(c_\alpha + y_-^\alpha)\sqrt{T_0}}{\sigma}, Q, d_0(L) - \frac{\sqrt{T-T_0}}{\sigma} c_\alpha\right) - \\
 & - Ke^{-(r_0+\lambda_0)T_0} \left(\frac{L}{s}\right)^{\frac{y_-^\alpha + \bar{c}}{\sigma^2}} e^{-\frac{\bar{c} + y_-^\alpha}{\sigma^2}(r_0 - \sigma^2/2)T_0} \times B\left(-\frac{(\bar{c} + y_-^\alpha)\sqrt{T_0}}{\sigma}, Q, d_0(L) - \frac{\sqrt{T-T_0}}{\sigma} \bar{c}\right).
 \end{aligned}$$

$$K_{12} = e^{(\lambda-\lambda_0)T_0} e^{-\lambda T_0} \left[ sN\left(\frac{\sqrt{T_0}}{\sigma}\left(r_0 + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\log(s/L)}{\sigma\sqrt{T_0}}\right) - Ke^{-r_0 T_0} N\left(\frac{\sqrt{T_0}}{\sigma}\left(r_0 - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\log(s/L)}{\sigma\sqrt{T_0}}\right) \right].$$

$$\begin{aligned}
 K_2 = & e^{(\lambda-\lambda_0)T_0} e^{-(r_0+\lambda)T_0} \left[ D_1(K, r_0, r_0, b_0) + D_2(K, r_0, r_0, c_0) - \right. \\
 & - D_1(L, r_0, r_\alpha, b_\alpha) - \frac{K}{L} D_2(L, r_0, r_\alpha, \bar{c}) - G_1(K, r_0, r_0, b_0) - \\
 & \left. - G_2(K, r_0, r_0, c_0) + G_1(L, r_0, r_\alpha, b_\alpha) + \frac{K}{L} G_2(L, r_0, r_\alpha, \bar{c}) \right].
 \end{aligned}$$

$$K_3 = e^{(\lambda-\lambda_0)T_0} e^{-\lambda T - r_0 T_0} \left[ C_0(K_\alpha(T-T_0)) - C_0(L) - C_1(K_\alpha(T-T_0)) + C_1(L) \right].$$

where,

$$K_\alpha(T) = Ke^{-\alpha T}, r_\alpha = r_0 - \alpha;$$

$$X_Y = \frac{\log(Y/s)}{\sigma\sqrt{T_0}} - (r_0 - \sigma^2/2) \frac{\sqrt{T_0}}{\sigma};$$

$$y_+^\alpha = r_\alpha + \frac{\sigma^2}{2}, y_-^\alpha = r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2}, \bar{y} = \sqrt{(y_-^\alpha)^2 + 2\sigma^2 r_0};$$

$$\tilde{K}_\alpha(T) = \log(s/K_\alpha(T)), \tilde{L} = \log(s/L);$$

$$b_\alpha := \sqrt{(r_\alpha + \sigma^2/2)^2 + 2\sigma^2 \lambda};$$

$$c_\alpha := \sqrt{(r_\alpha - \sigma^2/2)^2 + 2\sigma^2(\lambda + r_\alpha)}, \bar{c} := \sqrt{(r_\alpha - \sigma^2/2)^2 + 2\sigma^2(\lambda + r_0)}.$$

$$\begin{aligned}
P_1^\alpha(s) = & sN\left(\frac{\tilde{K}_\alpha(T)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left(r_\alpha + \frac{\sigma_2}{2}\right)\right) - K_\alpha(T)e^{-r_\alpha T}N\left(\frac{\tilde{K}_\alpha(T)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left(r_\alpha - \frac{\sigma_2}{2}\right)\right) - \\
& -sN\left(\frac{\tilde{L}}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left(r_\alpha + \frac{\sigma_2}{2}\right)\right) + K_\alpha(T)e^{-r_\alpha T}N\left(\frac{\tilde{L}}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left(r_\alpha - \frac{\sigma_2}{2}\right)\right) - \\
& -\left(\frac{L}{s}\right)^{\frac{2r_\alpha}{\sigma^2}-1}\left[\frac{L^2}{s}N\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\log\left(\frac{L^2}{sK_\alpha(T)}\right) + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left(r_\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right) - \right. \\
& -K_\alpha(T)e^{-r_\alpha T}N\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\log\left(\frac{L^2}{sK_\alpha(T)}\right) + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left(r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right) - \frac{L^2}{s}N\left(-\frac{\tilde{L}}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left(r_\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right) + \\
& \left. +K_\alpha(T)e^{-r_\alpha T}N\left(-\frac{\tilde{L}}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left(r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

$$P(s, T, \mu, y) = \left(\frac{L}{s}\right)^{\frac{\mu-y}{\sigma^2}} N\left(\frac{\log(s/L)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}y\right) + \left(\frac{L}{s}\right)^{\frac{\mu+y}{\sigma^2}} N\left(\frac{\log(s/L)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sqrt{T}}{\sigma}y\right).$$

$$\begin{aligned}
I_1(x, T, z, r, b) = & x\left[1_{\{x>z\}} + \frac{1}{2}1_{\{x=z\}} - e^{-\lambda T}N\left(\frac{\log(x/z)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}(r + \sigma^2/2)\right)\right] + \\
& + x\left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{r-b}{\sigma^2}+\frac{1}{2}}\left\{\frac{r + \sigma^2/2}{b}N\left(\frac{\log(x/z)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}b\right) - 1_{\{x>z\}} - \frac{1}{2}1_{\{x=z\}}\right\} + \\
& + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{r + \sigma^2/2}{b}\right]\left[N\left(\frac{\log(x/z)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}b\right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{2b}{\sigma^2}}N\left(\frac{\log(x/z)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sqrt{T}}{\sigma}b\right) - \left[1 + \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{2b}{\sigma^2}}\right]1_{\{x>z\}} - 1_{\{x=z\}}\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2(x, T, z, R, r, c) = & -\frac{\lambda_z}{\lambda + R}\left[1_{\{x>z\}} + \frac{1}{2}1_{\{x=z\}} - e^{-(\lambda+R)T}N\left(\frac{\log(x/z)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}(r - \sigma^2/2)\right)\right] - \\
& -\frac{\lambda_z}{\lambda + R}\left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{r-c}{\sigma^2}+\frac{1}{2}}\left\{\frac{r - \sigma^2/2}{c}N\left(\frac{\log(x/z)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}c\right) - \right. \\
& - 1_{\{x>z\}} - \frac{1}{2}1_{\{x=z\}}\left. + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{r - \sigma^2/2}{c}\right]\left[N\left(\frac{\log(x/z)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}c\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{2c}{\sigma^2}}N\left(\frac{\log(x/z)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sqrt{T}}{\sigma}c\right) - \left[1 + \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{2c}{\sigma^2}}\right]1_{\{x>z\}} - 1_{\{x=z\}}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

$$B(a, b, c) := \int_{-\infty}^{x_L} e^{ax} N(bx+c) n(x) dx = e^{\frac{a^2}{2}} P(X \leq x_L, Y \leq c)$$

where  $(X, Y)$  has a bivariate normal distribution with

$$\mu_X = a, \quad \mu_Y = -ab, \quad \sigma_X^2 = 1, \quad \sigma_Y^2 = 1 + b^2, \quad \rho = -\frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{T_0}{T - T_0}}.$$

$$d_0(Y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T - T_0}} \left[ \log(s/Y) + (r_0 - \sigma^2/2)T_0 \right].$$

$$d_1(Y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T - T_0}} \left[ \log\left(\frac{L^2}{sY}\right) - (r_0 - \sigma^2/2)T_0 \right].$$

$$C_0(Y) = se^{(r_0 - \sigma^2/2)T_0} B\left(\sigma\sqrt{T_0}, Q, d_0(Y) + \frac{\sqrt{T - T_0}}{\sigma}(r_\alpha + \sigma^2/2)\right) - Ke^{-\alpha(T - T_0)} e^{-r_\alpha(T - T_0)} B\left(0, Q, d_0(Y) + \frac{\sqrt{T - T_0}}{\sigma}(r_\alpha - \sigma^2/2)\right).$$

$$C_1(X) = L\left(\frac{L}{S}\right)^{\frac{2r_\alpha}{\sigma^2}} e^{\frac{2r_\alpha}{\sigma^2}(r_0 - \sigma^2/2)T_0} B\left(-\frac{2r_\alpha}{\sigma}\sqrt{T_0}, -Q, -d_0(L^2/X) + \frac{\sqrt{T - T_0}}{\sigma}(r_\alpha + \sigma^2/2)\right) - Ke^{-\alpha(T - T_0)} \left(\frac{L}{S}\right)^{\frac{2r_\alpha - 1}{\sigma^2}} e^{-r_\alpha(T - T_0) - \frac{(2r_\alpha - 1)}{\sigma^2}(r_0 - \sigma^2/2)T_0} B\left(\frac{\sigma_2 - 2r_\alpha}{\sigma}\sqrt{T_0}, -Q, -d_0(L^2/X) + \frac{\sqrt{T - T_0}}{\sigma}y_\alpha^-\right).$$

$$D_1(Y, R, r, b) = \int_{-\infty}^{x_L} I_1(\rho(T_0, s, x), T - T_0, Y, r, b) n(x) dx =$$

$$= -se^{(R - \sigma^2/2)T_0 - \lambda(T - T_0)} B\left(\sigma\sqrt{T_0}, Q, d_0(Y) + (r + \sigma^2/2)\frac{\sqrt{T - T_0}}{\sigma}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{b}(r + \sigma^2/2) \right] s \left(\frac{Y}{S}\right)^{\frac{r - b + 1}{\sigma^2 + 2}} e^{\left[\frac{b - r + 1}{\sigma^2 + 2}\right](R - \sigma^2/2)T_0} \times$$

$$\times B\left(\left[\frac{b - r + \sigma}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right]\sqrt{T_0}, Q, d_0(Y) + b\frac{\sqrt{T - T_0}}{\sigma}\right) +$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{b}(r+\sigma^2/2)\right]s\left(\frac{Y}{s}\right)^{\frac{r+b}{\sigma^2}+\frac{1}{2}}e^{\left[-\frac{b+r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right](R-\sigma^2/2)T_0}\times \\
& \times B\left(-\frac{b+r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T_0}, Q, d_0(Y)-b\frac{\sqrt{T-T_0}}{\sigma}\Big)+ \\
& +se^{RT_0}\left[N(x_L-\sigma\sqrt{T_0})-N(x_Y-\sigma\sqrt{T_0})\right]- \\
& -\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{b}(r+\sigma^2/2)\right]s\left(\frac{Y}{s}\right)^{\frac{r-b}{\sigma^2}+\frac{1}{2}}e^{\left[\frac{b-r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right](R-\sigma^2/2)T_0+\left[\frac{b-r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right]^2\frac{\sigma^2}{2}T_0}\times \\
& \times\left[N\left(x_L-\left[\frac{b-r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right]\sqrt{T_0}\right)-N\left(x_Y-\left[\frac{b-r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right]\sqrt{T_0}\right)\right]- \\
& -\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{b}(r+\sigma^2/2)\right]s\left(\frac{Y}{s}\right)^{\frac{r+b}{\sigma^2}+\frac{1}{2}}e^{\left[-\frac{b+r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right](R-\sigma^2/2)T_0+\left[-\frac{b+r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right]^2\frac{\sigma^2}{2}T_0}\times \\
& \times\left[N\left(x_L-\left[-\frac{b+r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right]\sqrt{T_0}\right)-N\left(x_Y-\left[-\frac{b+r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right]\sqrt{T_0}\right)\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2(Y, R, r, c) & = \int_{-\infty}^{x_L} l_2(p(T_0, s, x), T-T_0, Y, R, r, c) n(x) dx = \\
& = \frac{\lambda Y}{\lambda+R} \left\{ e^{-(\lambda+R)(T-T_0)} B\left(0, Q, d_0(Y) + (r-\sigma^2/2)\frac{\sqrt{T-T_0}}{\sigma}\right) - \right. \\
& - \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{c}(r-\sigma^2/2)\right]\left(\frac{Y}{s}\right)^{\frac{r-c}{\sigma^2}+\frac{1}{2}}e^{\left[\frac{c-r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right](R-\sigma^2/2)T_0}\times \\
& \times B\left(\frac{c-r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T_0}, Q, d_0(Y)+c\frac{\sqrt{T-T_0}}{\sigma}\Big)- \\
& - \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{c}(r-\sigma^2/2)\right]\left(\frac{Y}{s}\right)^{\frac{r+c}{\sigma^2}+\frac{1}{2}}e^{\left[-\frac{c+r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right](R-\sigma^2/2)T_0}\times \\
& \times B\left(-\frac{c+r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T_0}, Q, d_0(Y)-c\frac{\sqrt{T-T_0}}{\sigma}\Big)-[N(x_L)-N(x_Y)]+ \\
& + \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{c}(r-\sigma^2/2)\right]\left(\frac{Y}{s}\right)^{\frac{r-c}{\sigma^2}+\frac{1}{2}}e^{\left[\frac{c-r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right](R-\sigma^2/2)T_0+\left[\frac{c-r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right]^2\frac{\sigma^2}{2}T_0}\times \\
& \times\left[N\left(x_L-\left[\frac{c-r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right]\sqrt{T_0}\right)-N\left(x_Y-\left[\frac{c-r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right]\sqrt{T_0}\right)\right]+ \\
& + \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{c}(r-\sigma^2/2)\right]\left(\frac{Y}{s}\right)^{\frac{r+c}{\sigma^2}+\frac{1}{2}}e^{\left[-\frac{c+r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right](R-\sigma^2/2)T_0+\left[-\frac{c+r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right]^2\frac{\sigma^2}{2}T_0}\times \\
& \times\left[N\left(x_L-\left[-\frac{c+r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right]\sqrt{T_0}\right)-N\left(x_Y-\left[-\frac{c+r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right]\sqrt{T_0}\right)\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1(Y,R,r,b) &= \int_{-\infty}^{x_L} \left( \frac{L}{p(T_0,s,x)} \right)^{\frac{2r_\alpha-1}{\sigma^2}} I_1(L^2/p(T_0,s,x), T-T_0, Y, r, b) n(x) dx = \\
&= -L \left( \frac{L}{s} \right)^{\frac{2r_\alpha}{\sigma^2}} e^{-\frac{2r_\alpha}{\sigma^2}(R-\sigma^2/2)T_0 - \lambda(T-T_0)} \times \\
&\times B \left( -\frac{2r_\alpha}{\sigma} \sqrt{T_0}, -Q, d_1(Y) + (r+\sigma^2/2) \frac{\sqrt{T-T_0}}{\sigma} \right) + \\
&+ \frac{L}{2} \frac{\sigma}{\sigma^2} \left[ 1 + \frac{1}{b} (r+\sigma^2/2) \right] Y^{\frac{r-b}{\sigma^2} + \frac{1}{2}} s^{\frac{r-b-2r_\alpha}{\sigma^2} + \frac{1}{2}} e^{\left[ \frac{1}{2} + \frac{r-b-2r_\alpha}{\sigma^2} \right] (R-\sigma^2/2) T_0} \times \\
&\times B \left( \left[ \frac{\sigma}{2} + \frac{r-b-2r_\alpha}{\sigma^2} \right] \sqrt{T_0}, -Q, d_1(Y) + b \frac{\sqrt{T-T_0}}{\sigma} \right) + \\
&+ \frac{L}{2} \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \left[ 1 - \frac{1}{b} (r+\sigma^2/2) \right] Y^{\frac{r+b}{\sigma^2} + \frac{1}{2}} s^{\frac{r+b-2r_\alpha}{\sigma^2} + \frac{1}{2}} e^{\left[ \frac{r+b-2r_\alpha}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right] (R-\sigma^2/2) T_0} \times \\
&\times B \left( \left[ \frac{r+b-2r_\alpha}{\sigma^2} + \frac{\sigma}{2} \right] \sqrt{T_0}, -Q, d_1(Y) - b \frac{\sqrt{T-T_0}}{\sigma} \right) + \\
&+ L \left( \frac{L}{s} \right)^{\frac{2r_\alpha}{\sigma^2}} e^{-\frac{2r_\alpha}{\sigma^2}(R-\sigma^2/2)T_0 + \frac{2r_\alpha}{\sigma^2}T_0} N \left( x_{\min[L, L^2/Y]} + \frac{2r_\alpha}{\sigma} \sqrt{T_0} \right) - \\
&- \frac{L}{2} \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \left[ 1 + \frac{1}{b} (r+\sigma^2/2) \right] Y^{\frac{r-b}{\sigma^2} + \frac{1}{2}} s^{\frac{r-b-2r_\alpha}{\sigma^2} + \frac{1}{2}} \times \\
&\times e^{\left[ \frac{1}{2} + \frac{r-b-2r_\alpha}{\sigma^2} \right] (R-\sigma^2/2) T_0 + \left[ \frac{1}{2} + \frac{r-b-2r_\alpha}{\sigma^2} \right]^2 \frac{\sigma^2}{2} T_0} \times \\
&\times N \left( x_{\min[L, L^2/Y]} - \left[ \frac{\sigma}{2} + \frac{r-b-2r_\alpha}{\sigma^2} \right] \sqrt{T_0} \right) - \\
&- \frac{L}{2} \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \left[ 1 - \frac{1}{b} (r+\sigma^2/2) \right] Y^{\frac{r+b}{\sigma^2} + \frac{1}{2}} s^{\frac{r+b-2r_\alpha}{\sigma^2} + \frac{1}{2}} \times \\
&\times e^{\left[ \frac{r+b-2r_\alpha}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right] (R-\sigma^2/2) T_0 + \left[ \frac{r+b-2r_\alpha}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right]^2 \frac{\sigma^2}{2} T_0} \times \\
&\times N \left( x_{\min[L, L^2/Y]} - \left[ \frac{\sigma}{2} + \frac{r+b-2r_\alpha}{\sigma^2} \right] \sqrt{T_0} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2(Y, R, r, c) &= \int_{-\infty}^{x_L} \left( \frac{L}{p(T_0, s, x)} \right)^{\frac{2r_\alpha}{\sigma^2} - 1} I_2(L^2/p(T_0, s, x), T - T_0, Y, R, r, c) n(x) dx = \\
&= \frac{\lambda Y}{\lambda + R} \left\{ \left( \frac{L}{s} \right)^{\frac{2r_\alpha}{\sigma^2} - 1} e^{\left( 1 - \frac{2r_\alpha}{\sigma^2} \right) (R - \sigma^2/2) T_0 - (\lambda + R)(T - T_0)} \times \right. \\
&\quad \times B \left( \left( \sigma - \frac{2r_\alpha}{2} \right) \sqrt{T_0}, -Q, d_1(Y) + (r - \sigma^2/2) \frac{\sqrt{T - T_0}}{\sigma} \right) - \\
&\quad - \frac{L}{2} \frac{\frac{2(r_\alpha + c - r)}{\sigma^2}}{\sigma^2} \left[ 1 + \frac{1}{c} (r - \sigma^2/2) \right] Y^{\frac{r-c}{\sigma^2} \frac{1}{2}} s^{\frac{r-c-2r_\alpha}{\sigma^2} \frac{1}{2}} e^{\left[ \frac{1}{2} + \frac{r-c-2r_\alpha}{\sigma^2} \right] (R - \sigma^2/2) T_0} \times \\
&\quad \times B \left( \left[ \frac{\sigma}{2} + \frac{r-c-2r_\alpha}{\sigma^2} \right] \sqrt{T_0}, -Q, d_1(Y) + c \frac{\sqrt{T - T_0}}{\sigma} \right) - \\
&\quad - \frac{L}{2} \frac{\frac{2(r_\alpha - c - r)}{\sigma^2}}{\sigma^2} \left[ 1 - \frac{1}{c} (r - \sigma^2/2) \right] Y^{\frac{r+c}{\sigma^2} \frac{1}{2}} s^{\frac{r+c-2r_\alpha}{\sigma^2} \frac{1}{2}} e^{\left[ \frac{r+c-2r_\alpha}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right] (R - \sigma^2/2) T_0} \times \\
&\quad \times B \left( \left[ \frac{r+c-2r_\alpha}{\sigma^2} + \frac{\sigma}{2} \right] \sqrt{T_0}, -Q, d_1(Y) - c \frac{\sqrt{T - T_0}}{\sigma} \right) - \\
&\quad - \left( \frac{L}{s} \right)^{\frac{2r_\alpha}{\sigma^2} - 1} e^{\left( 1 - \frac{2r_\alpha}{\sigma^2} \right) (R - \sigma^2/2) T_0 + \left( 1 - \frac{2r_\alpha}{\sigma^2} \right) \frac{\sigma^2}{2} T_0} N \left( x_{\min[L, L^2/Y]} - (\sigma - 2r_\alpha/\sigma) \sqrt{T_0} \right) + \\
&\quad + \frac{L}{2} \frac{\frac{2(r_\alpha + c - r)}{\sigma^2}}{\sigma^2} \left[ 1 + \frac{1}{c} (r - \sigma^2/2) \right] Y^{\frac{r-c}{\sigma^2} \frac{1}{2}} s^{\frac{r-c-2r_\alpha}{\sigma^2} \frac{1}{2}} \times e^{\left[ \frac{1}{2} + \frac{r-c-2r_\alpha}{\sigma^2} \right] (R - \sigma^2/2) T_0 + \left[ \frac{1}{2} + \frac{r-c-2r_\alpha}{\sigma^2} \right]^2 \frac{\sigma^2}{2} T_0} \times \\
&\quad \times N \left( x_{\min[L, L^2/Y]} - \left[ \frac{\sigma}{2} + \frac{r-c-2r_\alpha}{\sigma^2} \right] \sqrt{T_0} \right) + \frac{L}{2} \frac{\frac{2(r_\alpha - c - r)}{\sigma^2}}{\sigma^2} \left[ 1 - \frac{1}{c} (r - \sigma^2/2) \right] Y^{\frac{r+c}{\sigma^2} \frac{1}{2}} s^{\frac{r+c-2r_\alpha}{\sigma^2} \frac{1}{2}} \times \\
&\quad \times e^{\left[ \frac{r+c-2r_\alpha}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right] (R - \sigma^2/2) T_0 + \left[ \frac{r+c-2r_\alpha}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right]^2 \frac{\sigma^2}{2} T_0} \times N \left( x_{\min[L, L^2/Y]} - \left[ \frac{\sigma}{2} + \frac{r+c-2r_\alpha}{\sigma^2} \right] \sqrt{T_0} \right) \left. \right\}.
\end{aligned}$$







As this example shows, in the regression approach the selection among a huge set of potential solutions to System (1), most of which are very irregular and show many different levels and slopes, is then tackled by assuming a particular set of functions to regress the available data. However, this assumption has no further justification than enforcing parsimony on the resulting curves and makes of cubic splines a typical choice [Campbell, 1997]. Note that the use of splines adds the difficulty of estimating *the knots* (i.e. that is the time points where different smooth splines pieces meet) and opens the question whether the available data carry sufficient information for all the estimation needs.

As for the linear programming approach, it is important to start by noting the equivalence between a linear program and a 1-norm optimisation problem, also known quite appropriately in this context as “Least Absolute Deviations Curve-Fitting” [Bloomfield, 1980].

One example of this general approach is that of [Balbás, Heras 2011], under the name of “goal programming”: First of all consider a set of possible *goals*  $v=(v_1, v_2, \dots, v_m)$  that we would like to reach, i.e., we are interested in finding a discount factor as close to  $v$  as possible. Then we solve

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \sum_{i=1}^m |\mu_i - v_i| \\ \mu A = p \\ \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m \\ \mu_m \geq 0 \end{array} \right.$$

This formulation may be very interesting when computing credit spreads of private issues. In such a case the matrices  $p$  and  $A$  must contain the parameters associated to those bonds issued by the private company we are dealing with, and the goal may be given by the discount factors of the default free assets issued by the Government.

In this approach, the solution comes in the form of a vector of point estimates, which must then be interpolated; and makes some assumptions, in this case about the absolute proximity of the estimates to the proposed *goals*.

In summary, the main problems to be addressed are: the sparseness of data, the parsimony of solutions and the assumptions to be made in the data fitting regularisation process.

In this paper, we argue about the potential interest of revising the aforementioned approximations under a recent statistical paradigm widely spread as *compressive sampling* or *compressive sensing* [Candés, Wakin 2008], [Donoho, 2006]] but having a strong statistical basis [Efron, Hastie, Johnstone, Tibshirani 2004], [Candés, Tao 2007] see also [Hastie, Tibshirani, Friedman 2011]]. The basic tenet of this approach

is the provably faithful reconstruction of a time series with a small number of random samples provided that this series is sparse and the samples fulfil certain technical conditions. The promise behind it is a rigorous framework to deal with the sparseness of data and to discuss the value of the obtained approximation in terms of the information present in the available data. From another point of view, it may be taken as a mixture of the 2-norm of the regression and the 1-norm implicit in the linear programming into a single programming representation. Therefore, this approach is based on the concept of information, as further elaborated in the next section.

## 2. THE COMPRESSIVE SAMPLING APPROACH

The concept of sparseness of a time series is strongly connected to that of its compressibility and intrinsic information. The deepest theories about the information fundamentals for compressive sampling might probably be set in the Kolmogorov's and Chaitin's algorithmic complexity frameworks but a closer relation to our discussion can be found in [Donoho 2006], both of which are however beyond the scope of this paper. Intuitively, it has to do with the quantity of information a time series really has even though it can be extended to long periods of time. If it has little intrinsic information, it may be compressed into a few numbers which summarise this information and from which the original time series can be faithfully reconstructed. If, in addition, these few numbers can be obtained at random from measurements, the original time series reconstruction procedure is undoubtedly interesting. In our setting, the available bonds (prices and future cash flows) play the role of random samples and the time series to be reconstructed is the interest curve (TSIR).

If the available bonds are such that a proper TSIR can be defined, pertinent questions are: How can we check whether the TSIR is a sparse time series? If it is, how many bonds are needed for a faithful reconstruction? If we do not have that many, how can we bound the estimation error? Then, is it a computationally efficient estimation algorithm? And finally, we could also argue about how parsimonious the obtained results should be. If the available bonds allow for arbitrage, similar questions can be posed as well (see [Jaschke, 1998] for an interesting discussion) but we have to minimise the unavoidable error or look for different strategies to tackle potentially different TSIRs. We will assume for this paper that we are set within the first hypothesis and see what kind of answers the compressive sampling framework can give us.

We cannot pretend to give full account of concepts and main results of compressive sampling in this paper. An interested reader can easily access to more information about this topic and tools in <http://dsp.rice.edu/cs>.

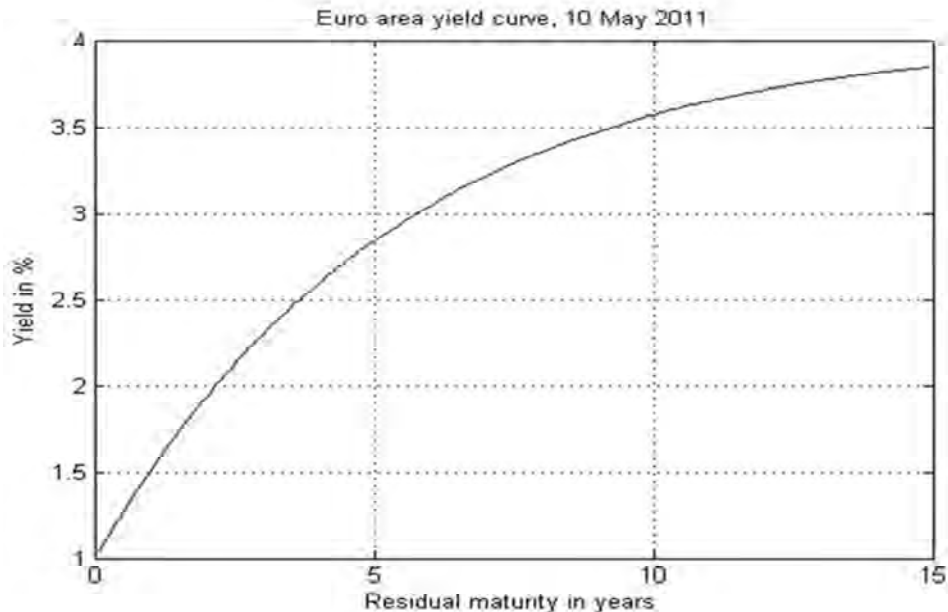
### 2.1. A sparse vector. Is the TSIR sparse?

The first question is whether the interest rates curves can be considered sparse vectors. The simplest definition of a sparse vector is that of a vector having most

of its components zero, i.e., it belongs to a sub-dimensional space of much reduced dimensionality. This can be generalised to that vector for which a linear base (not specific to that particular vector) can be found in which the vector is sparse according to the first definition.

A vector of TSIR defined as the monthly interest rates for about 12 years will be considered in this paper. A typical curve for the TSIR can be borrowed from <http://www.ecb.int/stats/money/yc/html/index.en.html> as that given in Figure 1.

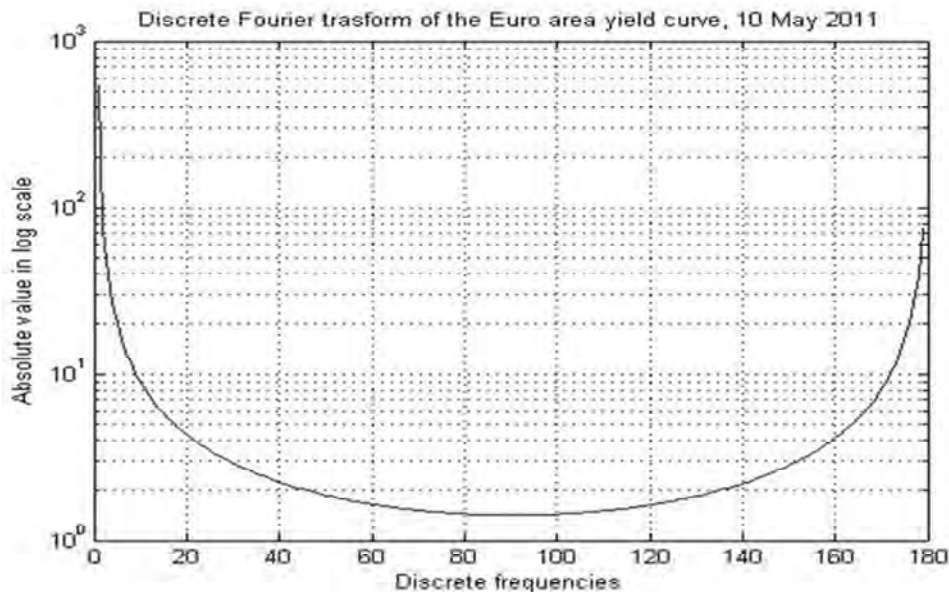
Figure 1



Although the yields are definitely not mostly zero, this curve is so smooth that it can be readily suspect of having a much more *compressed* representation. A first attempt can be done using the Fourier base (i.e. we perform a Discrete Fourier transform as shown in Figure 2).

Even though its Fourier coefficients are much smaller in the middle frequencies, they are not zero. Thus it is not a sparse vector but a compressible vector which can be accommodated within this framework. For a rigorous test see Equation I.1 in [Donoho 2006].

Figure 2

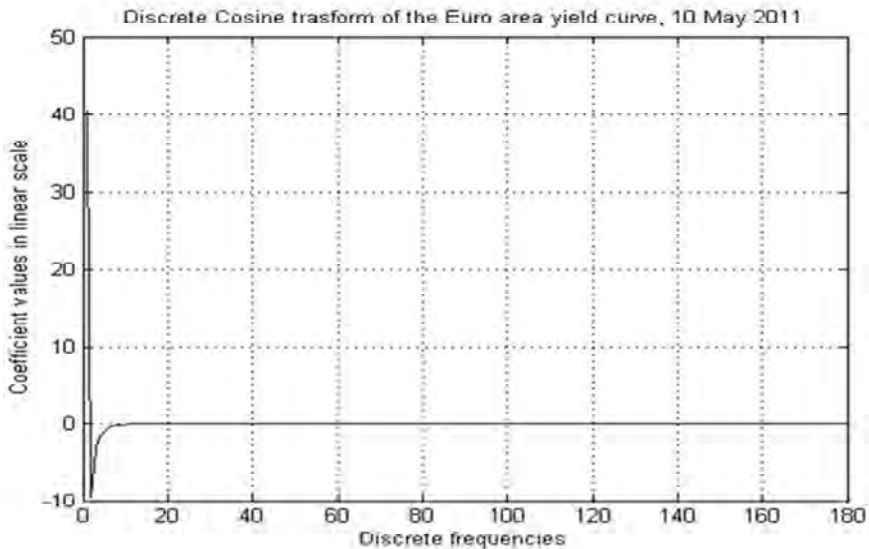


However, the use of the Fourier base comes with some other technical problems: since the coefficients are complex numbers, typical optimisation algorithms do not perform well, there are also symmetries which should but are not preserved in the processing and finally, and most importantly, the approximation errors for the reconstructed time series are bounded from below by the so called Gibbs effect (see [Mallat, 1998] for details). Related bases<sup>1</sup> which do have much better properties are the *cosine bases*. Additionally, they have good computational properties since the fast *discrete cosine transform* can be used. The TSIR represented in the cosine base is shown in Figure 3.

---

<sup>1</sup> From a theoretical point of view, the most appropriate bases to consider are the wavelets (see [Mallat, 1998] and [Hastie, Tibshirani, Friedman 2011]), but those are beyond the scope of this premier.

Figure 3



From Figure 3, it can be observed that the TSIR can be undoubtedly considered as a sparse vector (with the cosine base). Furthermore, we can say it is  $S$ -sparse, where  $S$  is around 15, meaning that the sparseness of this vector is concentrated in around 15 coefficients different from zero.

The previous discussion prompted the issue of the bases selection and its implications. Although this is an open problem, we provide some comments as conclusions to our experiments in Section 3.

## 2.2. Reconstructing a time series from random samples

Our second question is then how many samples do we need for a faithful reconstruction of the time series? Or in our terms, how many bonds do we need for faithful estimation of the TSIR?

From [Candés, Wakin 2008] we have an interesting result: assuming a vector is  $S$ -sparse, the number of observations (or bonds) we need for a faithful reconstruction is  $C S \log(N)$ , where  $N$  is the total dimension of the vector (in the previous subsection  $N = 180$  and  $S \sim 15$ ) and  $C$  is a constant which is well behaved, meaning that in practical applications a good quality is obtained from 3 to 5 times  $S$  with this sort of bases. For our case, this means that for ensuring a perfect estimation, it should be needed around 50 bonds.

The reconstruction of a vector from its samples within this framework proceeds as follows: let  $b$  be the vector to be reconstructed and let its samples be given by  $Cb=P$ , if  $b$  is sparse, its reconstruction is done by solving:

$$\begin{aligned} \min \|b\|_1 \\ \text{s.t. } Cb=P \end{aligned}$$

Since in our case  $b$  is not sparse but in a cosine bases, our formulation has to be modified accordingly: Let  $b=Tv$ , where  $T$  is the matrix which represents the cosine bases and  $v$  is the vector of the discrete cosine transform coefficients that is sparse. The optimisation problem now is:

$$\begin{aligned} \min \|v\|_1 \\ \text{s.t. } (CTv=)Ev=P \end{aligned}$$

Then, we can recover the needed vector as  $b=Tv$ . However, the number of bonds available is, for our experiment in Section 3, much smaller (actually, 6) than the suggested by this theory (around 50). This is not a rare situation in practice and part of its solution is accomplished along with the computational algorithm to be discussed in the next subsection.

### 2.3. The LARS algorithm

The Least Angle Regression relates to the classic model-selection method known as Forward Selection but proceeds in a much cautious way towards the selection of the regressors but in an efficient way. The details of its geometry make of it a quite similar algorithm to the so called the Lasso (see [Efron, Hastie, Johnstone, Tibshirani 2004] for more details) and it has finally come to be considered as the Lasso-Lars algorithm in its software implementations. There is also a set of different approaches to solve the same optimisation problem with different degrees of advantages and disadvantages depending on the application at hand. For the estimation of the TSIR we will choose the easiest formulation that could be enhanced with more delicate discussion of the Danzig Selector [Candes and Tao 2007].

In this paper we are not to be very orthodox in the treatment of this topic and rather go for practical and a quite widespread formulation following and using the sparselab tools, in particular, the “SolveLasso” implementation for this algorithm (see [Donoho, Stodden, Tsaig 2007]).

The algorithm gives a solution for the particular problem:

$$\min \|v\|_1 + \frac{1}{2}\|Ev-P\|_2$$



Thus, it regularises the solution of the minimum 1-norm when the number of available data does not reach the required amount.

### 3. SOME EXPERIMENTS

Experiments are essential to assess the practicality of a theory, especially when it is not possible to conform to its hypothesis (as for the minimum required data). Here we present some basic experiments and conclusions but these are not meant to be a final evaluation for this theory, rather we intend them to be an inviting setup for future experimentation.

#### 3.1. Data

We borrow data from a previous fitting experiment of [Balbás, Heras 2011]. They correspond to the Spanish market of default free bonds on November, 2nd 2004 with the coupons given in Table1 and prices given in Table 2. The first observation is that already made about the number of available bonds being much smaller than those required by the information reconstructing setting of Section 2.

**Table 1**  
Cash flows in the Spanish public Market. Dates in years are at first column.

0,12295082	0	0	0	0	100	0
0,295081967	0	0	0	0	0	100
0,739726027	104,95	0	5,5	0	0	0
0,994520548	0	5,35	0	-4,25	0	0
1,739726027	0	0	5,5	0	0	0
1,994520548	0	5,35	0	-4,25	0	0
2,739726027	0	0	5,5	0	0	0
2,994520548	0	5,35	0	104,25	0	0
3,739726027	0	0	5,5	0	0	0
3,994520548	0	5,35	0	0	0	0
4,739726027	0	0	5,5	0	0	0
4,994520548	0	5,35	0	0	0	0
5,739726027	0	0	5,5	0	0	0
5,994520548	0	5,35	0	0	0	0
6,739726027	0	0	5,5	0	0	0
6,994520548	0	105,35	0	0	0	0
7,739726027	0	0	5,5	0	0	0
8,739726027	0	0	5,5	0	0	0
9,739726027	0	0	5,5	0	0	0
10,73972603	0	0	5,5	0	0	0
11,73972603	0	0	5,5	0	0	0
12,73972603	0	0	105,5	0	0	0

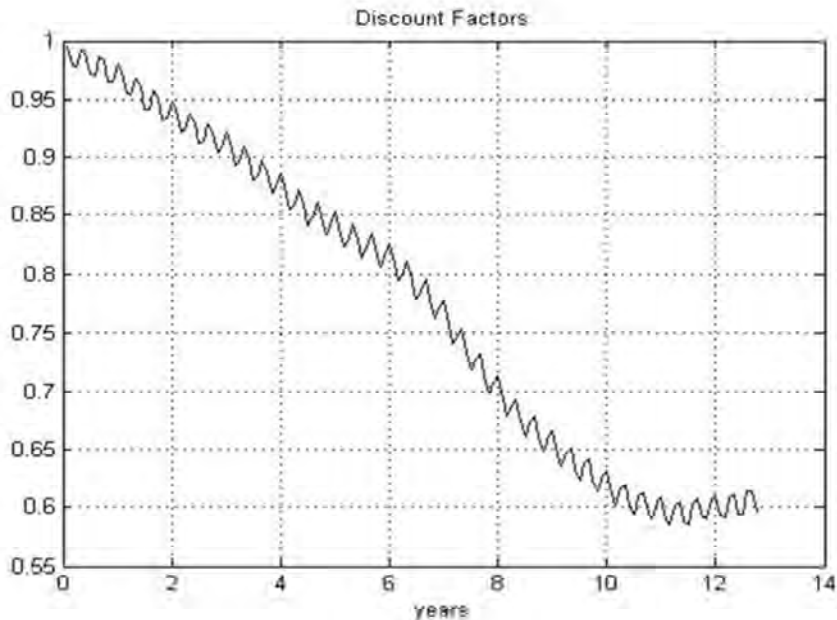
**Table 2**  
Prices at the Spanish public market

103.248356	110,7753151	114.5665068	104,23629	99,6	99,3
------------	-------------	-------------	-----------	------	------

### 3.2. Sparseness and estimations

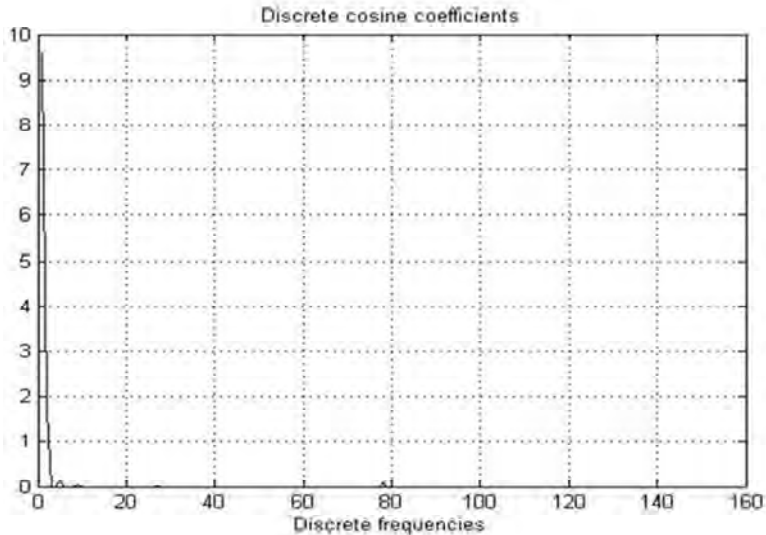
The application of the LARS algorithm to the data in Tables 1 and 2 gives the discount factors in Figure 4.

**Figure 4**



Before analysing the discount factors graph, let us consider the coefficients selected by the algorithm in Figure 5. As a first observation, the discounted factors fulfill the sparseness criterion. Furthermore, the number of non-zero coefficients is six, the number of bonds. The reason for this lies in the orthogonality properties of the  $E$  matrix which relates to the technical conditions for the problem to be solved (see [Candes, Romberg, Tao 2006]).

Figure 5

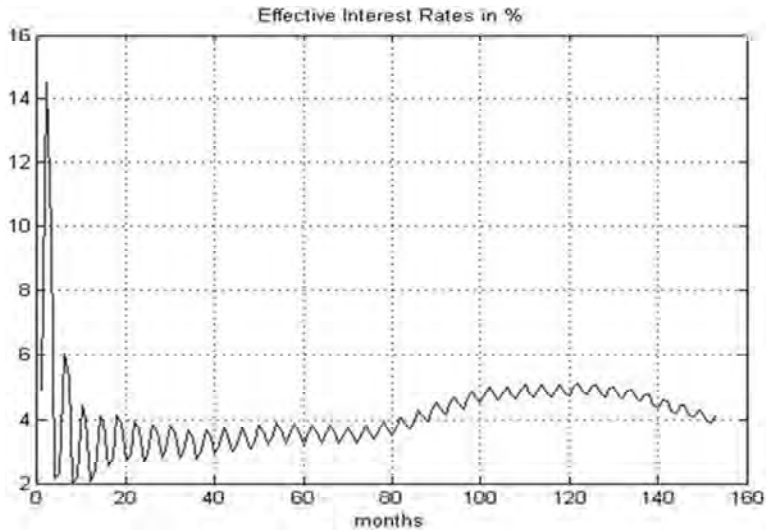


As for the discount function, the presence of small terms of high frequency (at discrete frequencies of around 80) makes the curve quite wiggly. This wiggling is bound to increase as the transform from the discount factors to the effective interest rates,  $r$ , is done following the typical equations:

$$s_i = -\frac{\log(b_i)}{t_i}$$
$$r_i = e^{s_i} - 1$$

The result of this transformation is shown in Figure 6. Additional observations from this curve are the high oscillations within the first months of the estimation.

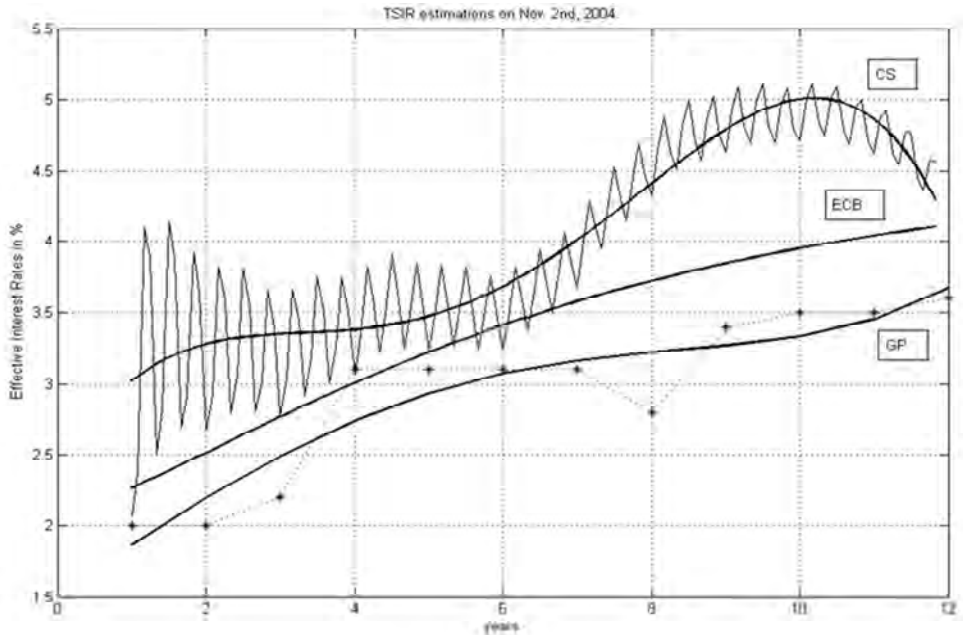
**Figure 6**



In order to better assess the obtained estimation, a comparison of our curve, CS, is given with two more references: the European Central Bank yield curve for that date, ECB, and the estimation for these data from goal programming, GP, of [Balbás, Heras 2011]. To overcome the noted shortfalls, we have limited the estimation from the first year onwards and we have added a fourth degree polynomial fit to the estimated curves from the bond data. Results are given in figure 7.

From figure 7, several observations are in order. Firstly, the estimation by CS is of a similar separation from the EBC than the GP one. It is tempted to think of a prime of risk for Spanish bonds which should be positive and, from historic data from the Spanish Central Bank, on the order of 0.2% or 0.3% over the ECB. Secondly, the variation from the CS estimation comes in local bursts which are much larger at short terms. There are also some more wiggling shown by the CS at longer terms and a curious symmetry around the ECB estimation between CS's and GP's.

Figure 7



#### 4. SOME CONCLUSIONS AND FURTHER WORK

Our aim for this article is to propose an initial formulation and discussion of the TSIR estimation under a recent estimation interpretation, typically known as Compressive Sampling, which might eventually pave the way for future debate and hopefully future improvements and applications of this fascinating research topic.

This presentation is admittedly limited in scope and results: We do not intend to readily improve previous estimators but to encourage new perspectives on the traditional approaches. We have tried to point to the promises, encountered difficulties, and possible ways to overcome them with references and public repositories of SW and literature over this topic.

Needless to say, the sheer inertia of some classic solutions will also play a role in the final selection of a particular estimation method for a particular econometric application. Nevertheless, there are also applications, specially those with non-risk free interest rates curves, where the most accurate rather than the most established option may well pay off.

## REFERENCES

- Balbás, B.; Heras, A. (2011). "TSIR and credit risk estimates with Goal Programming", *Journal of Financial Decision Making*, Dec. 2011, vol. 6, n° 2, 51-65.
- Bloomfield, P.; Steiger, W. (1980). "Least Absolute Deviations Curve-Fitting", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, June 1980, vol. 1, n° 2, 290-301.
- Campbell, J.Y.; Mackinlay, A.W. Lo (1997). *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton Univ. Press.
- Candés, E.; Wakin, N.B (2008). "An Introduction to Compressive Sampling", *IEEE Signal Processing Mag.*, March 2008, vol. 25, 21-30.
- Candés, E.; Tao, T. (2007). "The Dantzig Selector: Statistical Estimation when  $p$  is much larger than  $n$ ", *The Annals of Statistics*, vol. 35, n° 6, 2313-2351.
- Candés, E.; Romberg, J.; Tao, T. (2006). "Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly incomplete Frequency Information", *IEEE Trans. On Inf. Theor.*, Feb. 2006, vol. 52, n° 2, 489-509.
- Donoho, D.L. (2006). "Compressed Sensing", *IEEE Trans. on Inf. Theory*, April. 2006, vol. 52, n° 4, 1289-1306.
- Donoho, D.; Stodden, V.; Tsaig, Y. (2007). *About SparseLab* [web], March 2007. (<http://sparselab.stanford.edu/>)
- Efron, B.; Hastie, T.; Johnstone, I.; Tibshirani, R. (2004). "Least Angle Regression", *The Annals of Statistics*, vol. 32, n° 2, 407-499.
- Hastie, T.; Tibshirani, R.; Friedman, J. (2011). "The Elements of Statistical Learning: Data Mining", *Inference and Prediction*, Springer (2<sup>nd</sup>. ed.).
- Jaschke, S.R. (1998). "Arbitrage Bounds for the Term Structure of Interest Rates", *Finance Stochast.*, Vol. 2, 29-40.
- Mallat, S. (1998). *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press.
- McCulloch, J.H. (1987). "The monotonicity of the term premium: A closer look". *Journal of Financial Economics*, vol. 18, 158-192.
- McCulloch, J.H. (1990). *U.S. term structure data, 1940-1987*. Handbook of monetary economics, North-Holland, Amsterdam 1990, vol. I, 672-715.
- Nelson, C.R.; Siegel, A.F. (1987). "Parsimonious modelling of yield curves", *Journal of Business*, 60, vol. 4, 473-489.

Poggio, T.; Girosi, F. (1998). "A Sparse Representation for Function Approximation". *Neural Computation*, vol. 10, 1445-1454.

Prisman, E.Z. (1990). "A Unified approach to Term Structure Estimation: A methodology for estimating the Term Structure in a Market with Frictions", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 25, nº 1, 127-142.

## Ponencia 21

# APLICACIÓN DE UN MODELO DE REGRESIÓN LOGÍSTICA BASADO EN DISTANCIAS EN EL PROBLEMA DE *CREDIT SCORING*

Eva Boj del Val, Josep Fortiana Gregori, Anna Esteve Gómez,  
M<sup>a</sup> Mercè Claramunt Bielsa y Teresa Costa Cor

### RESUMEN

En este trabajo se propone como herramienta alternativa en el problema de *credit scoring* un modelo de regresión logística no-paramétrico (NP) basado en distancias (BD). Dicho modelo es NP porque no es necesario estimar los coeficientes involucrados en el predictor lineal subyacente, y es BD puesto que la única información requerida como *input* en el espacio de los predictores es una matriz de distancias al cuadrado. Ilustramos la adecuación de la regresión logística BD en riesgo de crédito con dos conjuntos de datos reales. En ambas aplicaciones utilizamos criterios de selección de modelo derivados de una función de coste del error que tiene en cuenta las probabilidades de mala clasificación en las subpoblaciones tanto de buenos como de malos riesgos. Comparamos los resultados con los obtenidos por otros autores y otras metodologías.

**Palabras Clave:** Riesgo de crédito; *Credit scoring*; Probabilidad de insolvencia; Regresión logística; Predicción basada en distancias; Estadística no-paramétrica.

### 1. INTRODUCCIÓN

Tal y como se explica en Boj *et al.* 2009b, las primas por riesgo de crédito se calculan haciendo uso de las probabilidades de insolvencia de los riesgos a partir de un modelo de *credit scoring*, por lo que la elección del modelo de *scoring* es un paso clave para la solvencia de una Entidad. En este trabajo estudiamos la viabilidad de un modelo de regresión logística BD para constituir una metodología alternativa en el cálculo de *scorings*. La metodología propuesta es adecuada en este contexto, ya que se trata de una metodología NP que permite de modo natural una mezcla de variables numéricas y categóricas. A partir de ahora nos referiremos a ella como regresión logística BD.



Ilustramos la utilización del modelo de regresión logística BD con dos conjuntos de datos reales de dos Entidades Financieras. Como medida de ajuste utilizamos dos criterios (descritos con detalle en Boj *et al.* 2009b). El primero se basa en analizar las probabilidades de mala clasificación en las poblaciones, la de buenos y la de malos riesgos de crédito, y la probabilidad global. El segundo se basa en una función de coste del error, la cual tiene en cuenta el entorno de la cartera analizada.

Comparamos los ajustes obtenidos con regresión logística BD para las dos carteras con los obtenidos mediante otras metodologías de la literatura. Las metodologías comparadas ya han sido propuestas por varios autores para dar solución al problema de cálculo de *scorings*. En función de si son NP o paramétricas son:

- Métodos no-paramétricos: Análisis Discriminante Basado en Distancias (ADBD), redes neuronales, método de los  $k$  vecinos más próximos, método de la estimación núcleo de la densidad y árboles de clasificación *classification and regression trees* (CART)
- Métodos paramétricos: análisis discriminante lineal y regresión logística.

Observamos como dentro de las técnicas NP, hay dos metodologías que también están BD, el ADBD, la cual fue propuesta para este problema por varios de los autores de este trabajo en Boj *et al.* (2009a y 2009b), y el método de los  $k$  vecinos más próximos utilizado en West (2000).

El trabajo se estructura del siguiente modo: en el apartado 2 describimos el modelo de regresión logística BD; en el apartado 3 ilustramos su uso con dos conjuntos de datos reales, comparando el resultado de los ajustes con los obtenidos mediante otras metodologías de *credit scoring*. Finalmente, en el apartado 4, exponemos las principales conclusiones del trabajo.

## 2. EL MODELO DE REGRESIÓN LOGÍSTICA NO PARAMÉTRICO Y BASADO EN DISTANCIAS

El modelo de regresión logística BD (ver Boj *et al.* 2008 para una primera versión con aplicación a datos funcionales) es una versión de la regresión logística clásica en el ámbito NP y BD. Es NP y BD puesto que la única información requerida en el espacio de los predictores es una matriz de distancias al cuadrado, calculada mediante una función de distancias a partir de los predictores originales. Internamente el modelo está construido suponiendo que es un modelo lineal generalizado en el sentido de la familia exponencial de McCullagh y Nelder (ver McCullagh and Nelder 1989). La variable respuesta en el caso de riesgo de crédito la construimos codificando con 1 a los individuos que han resultado insolventes en el periodo de estudio y con 0 a los que no. La información aportada por los predictores originales, que usualmente son de tipo mixto, la incorporamos en una matriz de distancias con la propiedad euclídea y de ella calculamos mediante escalamiento métri-

co multidimensional una configuración euclídea denominada latente, ya que no es necesario hacerla explícita en ningún cálculo y de ahí el término NP. Dicha configuración pasa a jugar el papel de predictor lineal en el modelo. A partir de aquí se propone realizar los mismos supuestos que en regresión logística clásica. La diferencia con regresión logística clásica es que en el proceso iterativo de estimación por mínimos cuadrados ponderados hacemos uso del modelo de regresión BD en lugar del modelo lineal de regresión clásica.

El modelo de regresión BD fue introducido inicialmente por Cuadras (1989) y ha sido desarrollado posteriormente en Cuadras *et al.* (1990, 1996) y en Boj *et al.* (2007, 2010). Nos referimos a dichas referencias para un detalle teórico. Por otro lado, ha sido aplicado en el problema de selección de factores de riesgo en tarificación *a priori* de los seguros de no-vida en Boj *et al.* (2000, 2001 y 2004).

Respecto del algoritmo iterativo de mínimos cuadrados ponderados (ver McCullagh and Nelder 1989) los elementos sobre los que iteramos con regresión logística BD hasta no tener cambios en la predicción del predictor lineal son:

$$z_k = \hat{\eta}_k + (y - \hat{\mu}_k) \frac{1}{\hat{\mu}_k(1 - \hat{\mu}_k)} \text{ con pesos } W_k = \hat{\mu}_k(1 - \hat{\mu}_k)w .$$

siendo  $w$  unos posibles pesos *a priori* de los datos originales. El proceso iterativo propone ajustar  $z_k$  sobre la matriz de distancias con pesos  $W_k$  hasta no obtener cambios en el predictor lineal estimado  $\hat{\eta}_{k+1}$  con la fórmula anterior.

Notar que en el caso de utilizar la función de distancias Euclídea entre supuestos predictores continuos, obtenemos el caso particular de regresión logística clásica.

Finalmente, para un individuo de la población,  $\omega$ , estimamos las probabilidades de insolvencia como:

$$\hat{\pi}(\omega) = \hat{\mu}(\omega) = \frac{e^{\hat{\eta}(\omega)}}{1 + e^{\hat{\eta}(\omega)}} .$$

### 3. APLICACIONES

En este apartado, aplicamos la regresión logística BD a dos conjuntos de datos reales de riesgo de crédito. Los datos pueden ser descargados gratuitamente del repositorio *Statlog*. Ambos conjuntos son carteras de Entidades Financieras, los primeros de una Financiera australiana y los segundos de una alemana. Los datos australianos están descritos y pueden descargarse en la dirección electrónica [http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Statlog+\(Australian+Credit+Approval\)](http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Statlog+(Australian+Credit+Approval)), y los alemanes en [http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Statlog+\(German+Credit+Data\)](http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Statlog+(German+Credit+Data)).

Para las dos bases de datos hemos calculado, en las Tablas 1 y 3, las probabilidades de mala clasificación de buenos y malos riesgos, y la probabilidad global, utilizando diferentes metodologías de *credit scoring*. En las Tablas 2 y 4 hemos calculado el coste del error para los mismos modelos suponiendo dos escenarios:  $\pi_2 = 0.144$  y  $\pi_2 = 0.249$ . Respecto de las metodologías alternativas que aparecen en estas tablas comparativas, hay que notar que los resultados numéricos están extraídos de West (2000) y de Boj *et al.* (2009b), por lo que para obtener información de los procesos de estimación de los métodos y las hipótesis en que se basan debemos consultar ambas referencias. A continuación listamos los métodos divididos en dos clases:

- *Métodos no-paramétricos:*
  - ADBD.
  - Redes neuronales, cuyas siglas se refieren a (consultar West 2000 para mayor detalle): *Mixture of experts* (MOE); *Radial basis function* (RBF); *Multi-layer perceptron* (MLP); *Learning vector quantization* (LVQ); *Fuzzy adaptive resonance* (FAR).
  - Método de los  $k$  vecinos más próximos.
  - Método de la estimación núcleo de la densidad.
  - CART.
- *Métodos paramétricos:*
  - Análisis discriminante lineal.
  - Regresión logística.

Dentro de los métodos NP tenemos al ADBD, por ello, para la estimación del modelo de regresión logística BD utilizaremos, en ambas aplicaciones, las mismas matrices de distancias que las utilizadas en Boj *et al.* (2009b) con la técnica ADBD. Utilizamos las mismas matrices puesto que éstas se adaptan bien a los datos y, además, nos permiten realizar una comparativa adecuada de resultados respecto de ambos modelos BD.

### 3.1. Aplicación 1: Datos de riesgo de crédito australianos

Esta base de datos hace referencia al riesgo asociado a tarjetas de crédito de una Entidad Financiera. Para mantener la confidencialidad de los datos, el autor no cedió los nombres de los factores de riesgo ni lo que significan sus clases y valores. La base es de especial interés porque el conjunto de predictores es de tipo mixto, mezcla de continuos, nominales con un número reducido de clases, nominales con un gran número de clases y binarios. Además, el número de datos faltantes es reducido. Para las variables continuas, los datos faltantes han sido reemplazados por la media de la variable correspondiente, y para las variables categóricas y binarias, éstos han sido reemplazados por la moda.

En total contiene  $n = 690$  individuos, de los cuales 307 han sido buenos riesgos y 383 malos. Los factores potenciales de riesgo son 14, de los cuales 6 son continuos, 4 categóricos y 4 binarios.

A partir de los 14 predictores mixtos, calculamos la matriz de distancias como la suma pitagórica dada por la fórmula (1) de Boj *et al.* (2009b) teniendo en cuenta el índice de similitud de Gower (Gower 1971) para cada una de las variables individualizadas. Como resultado, la matriz de confusión del modelo ajustado de regresión logística BD es:  $\begin{bmatrix} 282 & 25 \\ 21 & 362 \end{bmatrix}$ .

### **Análisis comparativo de modelos**

Tal y como ya hemos indicado, utilizaremos como criterio de selección de modelo las probabilidades de mala clasificación: la de buenos riesgos, la de malos riesgos y la global. En Boj *et al.* (2009b) se explica con detalle que es adecuado buscar un equilibrio entre las tres probabilidades, aunque como es de esperar dentro del equilibrio, minimizar la de clasificación de malos riesgos es básico. Por otro lado, calcularemos los costes del error dados por las fórmulas (5) y (6) de Boj *et al.* (2009b), los cuales minimizaremos para la elección de un modelo predictivo en el cálculo de *scorings*.

**Tabla 1**

Probabilidades de mala clasificación para cada grupo, buenos y malos riesgos, y global para los datos de crédito Australianos utilizando diferentes metodologías de *credit scoring*.

	Probabilidades estimadas de mala clasificación		
	Buenos riesgos	Malos riesgos	Global
<i>Modelos no-paramétricos</i>			
Regresión logística DB (Suma pitagórica)	0.081	<b>0.055</b>	<b>0.067</b>
ADBDB (Suma pitagórica)	0.094	0.162	0.132
Red neuronal MOE	0.145	0.124	0.133
Red neuronal RBF	0.131	0.127	0.128
Red neuronal MLP	0.154	0.132	0.141
Red neuronal LVQ	0.171	0.171	0.170
Red neuronal FAR	0.256	0.238	0.246
K vecinos próximos	0.153	0.133	0.142
Estimación núcleo de la densidad	0.185	0.151	0.166
Árbol de clasificación CART	0.192	<b>0.120</b>	0.156
<i>Modelos paramétricos</i>			
Análisis discriminante lineal	0.078	0.190	0.140
Regresión logística	0.110	0.140	<b>0.127</b>

Para estos datos observamos en la Tabla 1 que la metodología con menores probabilidades de mala clasificación tanto para los malos riesgos como la probabilidad global se obtiene con regresión logística BD, con probabilidades 0.055 y 0.067. La siguiente técnica con menor probabilidad de mala clasificación de malos riesgos es CART, con 0.120, seguida de la red neuronal MOE, con 0.124. Si nos centramos en la probabilidad global la siguiente técnica con menor probabilidad es la regresión logística, con 0.127, seguida del ADBD, con 0.132.

En la Tabla 2 observamos, al igual que en la Tabla 1, que los menores costes para los dos escenarios se obtienen con regresión logística BD. Las siguientes metodologías con menores costes son la red neuronal MOE, empatada cuando la probabilidad *a priori* es de 0.144 con la regresión logística, y con la red neuronal MLP cuando la probabilidad es de 0.249.

**Tabla 2**

Coste del error suponiendo  $\pi_2=0.144$  y  $\pi_2=0.249$  para los datos de riesgo de crédito Alemanes utilizando diferentes metodologías de *credit scoring*.

	Costes estimados	
	$\pi_2=0.144$	$\pi_2=0.249$
<i>Modelos no-paramétricos</i>		
Regresión logística DB (Suma pitagórica)	<b>0.105</b>	<b>0.135</b>
ADBD (Suma pitagórica)	0.202	0.289
Red neuronal MOE	<b>0.196</b>	<b>0.243</b>
Red neuronal RBF	0.194	0.245
Red neuronal MLP	0.198	<b>0.243</b>
Red neuronal LVQ	0.237	0.300
Red neuronal FAR	0.319	0.388
K vecinos próximos	0.227	0.281
Estimación núcleo de la densidad	0.267	0.328
Árbol de clasificación CART	0.251	0.294
<i>Modelos paramétricos</i>		
Análisis discriminante lineal	0.204	0.296
Regresión logística	<b>0.196</b>	0.258

### 3.2. Aplicación 2: Datos de riesgo de crédito alemanes

Estos datos clasifican a un conjunto de individuos como buenos o malos riesgos en función de una serie de predictores de tipo mixto. La cartera contiene datos cedidos en fecha 17-11-1994. En total contiene  $n = 1000$  individuos, de los cuales

700 han sido buenos riesgos y 300 malos. Los factores potenciales de riesgo considerados son  $p = 20$ , de los cuales 7 son continuos, 11 categóricos y 2 binarios.

Puesto que para la aplicación del modelo de regresión logística BD utilizamos las mismas matrices de distancias que las utilizadas para ADBD en Boj *et al.* (2009b), realizamos a continuación tan sólo algunos comentarios. Para el detalle teórico de la construcción de distancias con familias paramétricas nos remitimos a la citada referencia y también a Esteve (2003) como referencia más amplia y completa.

Los comentarios a destacar son los siguientes:

Hemos realizado una agrupación previa en cuatro conjuntos de predictores, lo cual es usual en el problema del riesgo de crédito (ver por ejemplo: Artís *et al.* 1994, Bonilla *et al.* 2003, Trias *et al.* 2005, 2008 ). Concretamente, para estos datos, los conjuntos de datos por los que hemos optado han sido: Características del crédito; Características sociales del creditor (beneficiario del crédito); Características económicas del creditor (beneficiario del crédito); Relación del creditor (beneficiario del crédito) con el banco.

Hemos analizado seis casos en lo que se refiere a matrices de distancias: en primer lugar el general, igual que en la primera aplicación para la que no teníamos el significado de los predictores (y por lo tanto nos era imposible realizar una agrupación previa), con suma pitagórica de las distancias aportadas por cada predictor utilizando el índice de similitud de Gower. Por otro lado, hemos utilizado la familia de métricas adaptativas dependientes de parámetros dadas por la fórmula (2) de Boj *et al.* (2009b) con cinco combinaciones *ad-hoc* de parámetros  $\lambda$ . A continuación detallamos las matrices de confusión resultantes de aplicar estas combinaciones de métricas al modelo de regresión logística BD.

Caso 1. Suma pitagórica de distancias:  $\begin{bmatrix} 640 & 60 \\ 114 & 186 \end{bmatrix}$ .

Caso 2. Familia convexa de distancias paramétricas con diferentes pesos *a priori*:

$$1) \text{ Para } \lambda = [0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.25]: \begin{bmatrix} 626 & 74 \\ 124 & 176 \end{bmatrix},$$

$$2) \text{ Para } \lambda = [0.16 \ 0.05 \ 0.32 \ 0.47]: \begin{bmatrix} 626 & 74 \\ 122 & 178 \end{bmatrix},$$

$$3) \text{ Para } \lambda = [0.14 \ 0.05 \ 0.36 \ 0.45]: \begin{bmatrix} 627 & 73 \\ 123 & 177 \end{bmatrix},$$

$$4) \text{ Para } \lambda = [0.10 \ 0.10 \ 0.40 \ 0.40]: \begin{bmatrix} 627 & 73 \\ 123 & 177 \end{bmatrix},$$

$$5) \text{ Para } \lambda = [0.40 \ 0.40 \ 0.10 \ 0.10]: \begin{bmatrix} 631 & 69 \\ 124 & 176 \end{bmatrix}.$$

### **Análisis comparativo de modelos**

Si nos centramos en la probabilidad de mala clasificación de los malos riesgos de la Tabla 3, la metodología con menor probabilidad es el ADBD con  $\lambda = [0.16 \ 0.05 \ 0.32 \ 0.47]$ , con un valor de 0.243. La siguiente técnica que ofrece una menor probabilidad es el análisis discriminante lineal, con 0.266. Observamos por lo tanto que el AD (el paramétrico clásico y el denominado ADBD en este trabajo) parece ser la técnica más adecuada cuando minimizamos esta probabilidad. Si nos limitamos a la regresión logística y comparamos resultados, la que nos brinda un mejor resultado, y con diferencia, es la versión BD (como suma pitagórica), 0.38 vs 0.513 de la clásica. Destacar que seguido de los AD (el clásico y el ADBD) la siguiente técnica con menor probabilidad de mala clasificación de malos riesgos es la regresión logística BD con 0.38.

Si nos centramos en la probabilidad global de la Tabla 3, la técnica que menor error de clasificación conlleva es la de regresión logística BD (como suma pitagórica) con 0.174, seguida del resto de casos de regresión logística BD, y por la regresión logística clásica con una probabilidad de 0.237. Sin embargo, hay que notar que la probabilidad de malos riesgos para la regresión logística clásica es muy elevada, de 0.513. La siguiente técnica con menor probabilidad global es la red neuronal MOE con una probabilidad de 0.243. Observamos que algunas de las técnicas que tienen también una probabilidad global pequeña tienen también una probabilidad de mala clasificación elevada, haciendo que la global disminuya a costa de clasificar mal a los buenos riesgos. Así, si nos centramos sólo la probabilidad global, la técnica con mejor resultado es la de regresión logística en sus dos versiones.

**Tabla 3**

Probabilidades de mala clasificación para cada grupo, buenos y malos riesgos, y global para los datos de riesgo de crédito Alemanes utilizando diferentes metodologías de *credit scoring*.

	Probabilidades estimadas de mala clasificación		
	Buenos riesgos	Malos riesgos	Global
<i>Modelos no-paramétricos</i>			
Regresión logística (Suma pitagórica)	0.086	0.38	0.174
Regresión logística ( $\lambda = [0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.25]$ )	0.105	0.413	0.198
Regresión logística ( $\lambda = [0.16 \ 0.05 \ 0.32 \ 0.47]$ )	0.105	0.407	0.196
Regresión logística ( $\lambda = [0.14 \ 0.05 \ 0.36 \ 0.45]$ )	0.104	0.41	0.196
Regresión logística ( $\lambda = [0.10 \ 0.10 \ 0.40 \ 0.40]$ )	0.104	0.41	0.196
Regresión logística ( $\lambda = [0.40 \ 0.40 \ 0.10 \ 0.10]$ )	0.099	0.413	0.193
ADBD (Suma pitagórica)	0.223	0.627	0.344
ADBD ( $\lambda = [0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.25]$ )	0.350	0.287	0.331
ADBD ( $\lambda = [0.16 \ 0.05 \ 0.32 \ 0.47]$ )	0.437	0.243	0.379
ADBD ( $\lambda = [0.14 \ 0.05 \ 0.36 \ 0.45]$ )	0.419	0.253	0.369
ADBD ( $\lambda = [0.10 \ 0.10 \ 0.40 \ 0.40]$ )	0.400	0.270	0.361
ADBD ( $\lambda = [0.40 \ 0.40 \ 0.10 \ 0.10]$ )	0.341	0.353	0.345
Red neuronal MOE	0.142	0.477	0.243
Red neuronal RBF	0.134	0.529	0.254
Red neuronal MLP	0.135	0.575	0.267
Red neuronal LVQ	0.249	0.481	0.316
Red neuronal FAR	0.403	0.488	0.427
$K$ vecinos próximos	0.225	0.553	0.324
Estimación núcleo de la densidad	0.155	0.630	0.308
Árbol de clasificación CART	0.206	0.545	0.304
<i>Modelos paramétricos</i>			
Análisis discriminante lineal	0.277	0.266	0.274
Regresión logística	0.118	0.513	0.237



**Tabla 4**

Coste del error suponiendo  $\pi_2=0.144$  y  $\pi_2=0.249$  para los datos de riesgo de crédito Alemanes utilizando diferentes metodologías de *credit scoring*.

	Costes estimados	
	$\pi_2 = 0.144$	$\pi_2 = 0.249$
<i>Modelos no-paramétricos</i>		
Regresión logística (Suma pitagórica)	0.318	0.371
Regresión logística ( $\lambda = [0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.25]$ )	0.372	0.428
Regresión logística ( $\lambda = [0.16 \ 0.05 \ 0.32 \ 0.47]$ )	0.369	0.423
Regresión logística ( $\lambda = [0.14 \ 0.05 \ 0.36 \ 0.45]$ )	0.368	0.424
Regresión logística ( $\lambda = [0.10 \ 0.10 \ 0.40 \ 0.40]$ )	0.368	0.423
Regresión logística ( $\lambda = [0.40 \ 0.40 \ 0.10 \ 0.10]$ )	0.359	0.416
ADBBD (Suma pitagórica)	0.683	0.756
ADBBD ( $\lambda = [0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.25]$ )	0.562	0.591
ADBBD ( $\lambda = [0.16 \ 0.05 \ 0.32 \ 0.47]$ )	0.604	0.625
ADBBD ( $\lambda = [0.14 \ 0.05 \ 0.36 \ 0.45]$ )	0.598	0.621
ADBBD ( $\lambda = [0.10 \ 0.10 \ 0.40 \ 0.40]$ )	0.596	0.622
ADBBD ( $\lambda = [0.40 \ 0.40 \ 0.10 \ 0.10]$ )	0.607	0.647
Red neuronal MOE	0.432	0.653
Red neuronal RBF	0.469	0.707
Red neuronal MLP	0.483	0.758
Red neuronal LVQ	0.501	0.714
Red neuronal FAR	0.668	0.942
K vecinos próximos	0.592	0.858
Estimación núcleo de la densidad	0.587	0.901
Árbol de casificación CART	0.569	0.834
<i>Modelos paramétricos</i>		
Análisis discriminante lineal	0.429	0.540
Regresión logística	0.471	0.728

Observamos en la Tabla 4 que los menores costes para los dos escenarios se obtienen con los modelo de regresión logística BD, concretamente el menor es para el caso de suma pitagórica de distancias, igual que ocurría en la Tabla 3 para la probabilidad global. Del resto de metodologías, si suponemos un escenario en que la probabilidad *a priori* de la población de malos riesgos es 0.144, la metodo-

logía con un menor coste es la regresión logística, que a su vez recordemos era la siguiente que tenía una probabilidad de mala clasificación global también menor. En un escenario peor, suponiendo que la probabilidad *a priori* es de 0.249, la metodología con coste menor es el análisis discriminante lineal. Observamos finalmente que los siguientes costes más bajos en este escenario peor, se obtienen con ADBD.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos propuesto como herramienta alternativa en el problema de *credit scoring* un modelo de regresión logística BD. Dicho modelo es adecuado en este contexto, ya que se trata de un modelo NP que permite de modo natural una mezcla de variables numéricas y categóricas. En comparación con la regresión logística clásica, permite un tratamiento más amplio de predictores teniendo la opción de incluir la información aportada por éstos a través de una función de distancias. Esto hecho también ocurre con el ADBD en comparación con el AD clásico, el cuál incorpora además el inconveniente de tener hipótesis rígidas que muchas veces no cumplen los datos.

Hemos ilustrado la utilización del modelo de regresión logística BD con dos conjuntos de datos reales, utilizando como criterio de selección de modelo medidas basadas en analizar las probabilidades de mala clasificación y en una función de coste del error que permite tener en cuenta el entorno de la cartera analizada. Hemos comparado los ajustes con los obtenidos mediante otras metodologías de la literatura propuestas para dar solución también al problema de cálculo de *scorings*. Los hemos dividido en dos grupos, los NP (ADBD, redes neuronales, método de los  $k$  vecinos más próximos, método de la estimación núcleo de la densidad y CART) y los paramétricos (análisis discriminante lineal y regresión logística). Dentro de los NP, hemos tenido en cuenta dos métodos más BD, el ADBD y el método de los  $k$  vecinos más próximos. Cabe notar que no existe un método óptimo para todas las carteras, conviene estudiar el entorno de una experiencia reciente y adicionalmente cada metodología tiene sus ventajas e inconvenientes, en sus hipótesis, en el tiempo computacional, etc.

Respecto de la comparación de modelos en las aplicaciones del trabajo hemos obtenido buenos resultados. En la primera aplicación, el modelo de regresión logística BD es el de menores probabilidades de mala clasificación. Por otro lado, también es la técnica con menores costes para los dos escenarios analizados. En la segunda aplicación, si nos fijamos en los resultados de las probabilidades de mala clasificación ha resultado ser la segunda técnica con menor probabilidad. La menor ha sido para el análisis discriminante (paramétrico clásico y ADBD). Pero si nos centramos sólo en la regresión logística, la clásica y la BD, observamos como introduciendo la misma información como *input* en el modelo, la regresión BD obtiene una probabilidad de mala clasificación menor y con diferencia, 0.38 vs 0.513. En esta segunda aplicación, si nos fijamos en la probabilidad global la técnica con

menor valor es la regresión logística BD, seguida por la regresión logística clásica. Finalmente, centrados en los costes, hemos obtenido los menores en los dos escenarios con el modelo propuesto en este trabajo.

## AGRADECIMIENTOS

Trabajo financiado en parte por el Ministerio de Educación y Ciencia y la *Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca de la Generalitat de Catalunya*, proyectos: MTM2010-17323, ECO2010-22065-C03-03 y 2009SGR970.

## BIBLIOGRAFÍA

Artís, M.; Guillén, M.; Martínez, J.M. (1994). "A model for credit scoring: an application of discriminant analysis". *QÜESTIÓ*, vol. 18, nº 3, 385-395.

Boj, E.; Claramunt, M.M.; Fortiana, J. (2000). "Una alternativa en la selección de los factores de riesgo a utilizar en el cálculo de primas". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, Tercera Época, nº 6, 11-35.

Boj, E.; Claramunt, M.M.; Fortiana, J. (2001). "Herramientas estadísticas para el estudio de perfiles de riesgo". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, Tercera Época, nº 7, 59-89.

Boj, E.; Claramunt, M.M.; Fortiana, J. (2004). "Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación". *Cuadernos de la Fundación MAPFRE*, nº 88. Madrid: Fundación MAPFRE Estudios, 2004.

Boj, E.; Claramunt, M.M.; Fortiana, J. (2007). "Selection of predictors in distance-based regression". *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, vol. 36, nº. 1, 87-98.

Boj, E.; Delicado, P.; Fortiana, J. (2008). "Logistic and Local Logistic Distance-Based Regression". *Proceedings of the International Seminar on Nonparametric Inference ISNI 2008*, 66-70.

Boj, E.; Claramunt, M.M.; Esteve, A.; Fortiana, J. (2009). "Credit Scoring basado en distancias: coeficientes de influencia de los predictores", en Heras, A. y otros. *Investigaciones en Seguros y Gestión de riesgos: RIESGO 2009*, pp. 15-22. *Cuadernos de la Fundación MAPFRE*, 2009a, nº 136. Fundación MAPFRE Estudios, Madrid.

Boj, E.; Claramunt, M.M.; Esteve, A.; Fortiana, J. (2009). "Criterios de selección de modelo en credit scoring, aplicación del análisis discriminante basado en distancias". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, Tercera Época, 2009b, nº 15, 209-230.

Boj, E.; Delicado, P.; Fortiana, J. (2010). "Local linear functional regression based on weighted distance-based regression". *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. 54, 429-437.

Bonilla, M.; Olmeda, I.; Puertas, R. (2003). "Modelos paramétricos y no paramétricos en problemas de credit scoring". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, vol. 32, nº. 118, 833-869.

Cuadras, C.M.; Arenas, C.; Fortiana, J. (1996). "Some computational aspects of a distance-based model for prediction". *Communications in Statistics B. Simulation and Computation*, vol. 25, 593-609.

Cuadras, C.; Arenas, C. (1990). "A distance-based regression model for prediction with mixed data". *Communications in Statistics A. Theory and Methods*, vol. 19, 2261-2279.

Cuadras, C.M. (1989). "Distance analysis in discrimination and classification using both continuous and categorical variables". In: Y. Dodge (Ed.), *Statistical Data Analysis and Inference*, pp. 459-473. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V. (North.Holland), 1989.

Esteve, A. (2003). *Distancias estadísticas y relaciones de dependencia entre conjuntos de variables*. Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona, 2003.

Gower J.C. (1971). "A general coefficient of similarity and some of its properties". *Biometrics*, 1971, vol. 27, 857-874.

McCullagh, P.; Nelder, J.A. (1989). *Generalized Linear Models* (2<sup>nd</sup> ed.). London: Chapman & Hall, 1989.

Trias, R.; Carrascosa, F.; Fernández, D.; Parés, Ll.; Nebot, G. (2005). "Riesgo de Créditos: Conceptos para su medición", *Basilea II, Herramientas de Apoyo a la Gestión*. AIS Group-Financial Decisions, ([www.ais-int.com](http://www.ais-int.com))

Trias, R.; Carrascosa, F.; Fernández, D.; Parés, Ll.; Nebot, G. (2008). "El método RDF (Risk Dynamics into the Future)". *El nuevo estándar de stress testing de riesgo de crédito*. AIS Group - Financial Decisions ([Www.ais-int.com](http://www.ais-int.com))

West, D. (2000). "Neural network credit scoring models". *Computer & Operations Research*, vol. 27, 1131-1152.

## Ponencia 22

### **CREDIT SCORING MODEL FOR SMALL FIRMS IN THE UK USING LOGISTIC REGRESSION**

Antonio Jesús Blanco Oliver, Ana Isabel Irimia Diéguez  
and María Dolores Oliver Alfonso

#### **ABSTRACT**

Within the commercial client segment, small-business lending is gradually becoming a major target for many banks. The new Basel Capital Accord has helped the financial sector to recognize small and medium-sized enterprises (SMEs) as a client, distinct from the large corporation. In this context, it is increasingly important to develop appropriate risk models for this large and potentially even larger portion of bank assets. So far, there are few studies that have focused on developing credit risk models specifically for small firms which have included non-financial information as predictors of the company credit worthiness.

For the first time, in this study we have available non-financial. We employ a sample consisting of over 39,000 unlisted small firms of which 50% failed during the period 1999-2008. We find that qualitative data relating to such variables as legal action by creditors to recover unpaid debts, company filing histories and firm specific characteristics make a significant contribution to increasing the default prediction power of risk models built specifically for SMEs. Moreover, the original financial variables are substituted for their hyperbolic tangent and this transformation improves the result of our model.

**JEL Classification:** G33, G32, M13.

**Key Words:** Small-Business Failure; credit scoring; non-financial information; logistic regression.

#### **1. INTRODUCTION**

SMEs, particularly small firms, have historically faced significant difficulties in accessing funding for creditworthy (that is, positive net present value) projects due to a lack of credible information about them by potential providers of funds (Ang,

1991; Altman and Sabato, 2007). SMEs are typically much more informationally opaque than large corporations because they often do not have certified audited financial statements to yield credible financial information on a regular basis. Many research about credit risk have focused on the SME segment in the last years (Berger and Udell, 2004; Altman and Sabato, 2005 and 2007; Altman *et al.* 2010) due to Basel II. However, the above studies have dealt with the problem of the possible effects of Basel II on bank capital requirements, but the problem of modeling credit risk specifically for SMEs has either not been addressed or only briefly considered. Moreover, actually the 2007 financial crisis and the New Basel Capital Accord (Basel III) have provided renewed impetus for lenders to research and develop adequate failure predictions models.

Moreover, according to Bradbury (1992) and Altman and Sabato (2007), the bank must consider that the small and medium-sizes enterprises (SMEs) are a distinct kind of customer with specific needs and peculiarities that require risk-management tools and methodologies specifically developed for them.

Therefore, the main goal of this paper is to develop a credit scoring model specially designed for micro-enterprise by using a logistic regression. That is, the model will inform us about what are the variables which explain the failure of small firms. This model will be advantageous for both banks/MFIs and SMEs. On the other hand, for banks/MFIs, due to the control of risk and the reduction of the bank capital requirements and, according to the works of a large number of authors (Kolari and Shin, 2004; Berger, 2006), the small business lending has a strong positive effect on bank profitability. On the other hand, for SMEs, because they would be able to obtain the required bank financial sources.

The remainder of our paper proceeds as follows. In Section 2, an overview of the extent literature on failure prediction is included. In Section 3, we provide an analysis of the UK sample used in this study. In Section 4, a failure prediction model for micro-enterprise is presented. A test of the impact of adding financial and non-financial information to the models estimated is performed. In addition, a transformation of some financial variables is developed. Lastly in this section, our models are undertaken out of sample forecasts. Finally, in the section 5, provides a concluding discussion.

## **2. LITERATURE REVIEW**

### **2.1. Small and medium enterprise failure**

SME failure rates are very often difficult to track properly. However, in the past few years, considerable research (e.g., Everett and Watson, 1996; and Headd, 2003) has been conducted to determine the rates and causation of such failures. Two of the principle reasons businesses suffer unexpected closures are insufficient capitalization and lack of planning. However, the previous research analyzed only fi-

financial ratios in order to explain the default firms. However, recent literature (Peel *et al.*, 1986; Grunet *et al.*, 2004; Peel and Peel, 1989; Hill and Wilson, 2007; and Altman *et al.*, 2010) concludes that financial variables are not sufficient to predict SME default and that including non-financial variables improves the models' prediction power.

When analyzing business failure, it is extremely important to distinguish between failure and closure. Watson and Everett (1996) mention that closing firms could have been financially successful but closed for other reasons: the sale of the firm or a personal decision by the owner to accept employment with another firm, to retire, or the like. To define failure they created five categories: ceasing to exist (discontinuance for any reason); closing or a change in ownership; filing for bankruptcy; closing to limit losses; and failing to reach financial goals. Brian Headd (2003) finds that only one-third of new businesses (33%) closed under circumstances that owners considered unsuccessful.

In this paper, we have taken into account only micro-enterprise business firms that entered into liquidation, administration or receivership between 1999 and 2008.

## 2.2. Research Methodology

The objective of credit scoring models is to assign credit applicants to one of two groups: a "good credit" group that is likely to repay the financial obligation, or a "bad credit" group that should be denied credit because of a high likelihood of defaulting on the financial obligation.

According to the literature various methods have been used to predict the default of enterprises. Beaver (1967) originally proposed the use of univariate analysis. Altman (1968), Altman *et al.* (1977), and Pompe and Bilderbe (2005) used Multiple Discriminant Analysis (MDA).

For many years thereafter, MDA was the prevalent statistical technique applied to the default prediction models. It was used by many authors (Taffler and Tisshaw; 1977; Altman *et al.*, 1977; Micha, 1984).

Ohlson (1980), for the first time, applied the conditional logistic regression (logit) to the default prediction's study. The research examining bankruptcy (Ohlson, 1980; Aziz *et al.*, 1988) favors the logit over MDA for both theoretical and empirical reasons. The logit model requires less restrictive statistical assumptions and offers better empirical discrimination (Zavgren, 1983). Moreover, the estimated coefficients can be interpreted separately as the importance or significance of each of the independent variables in the explanation of the estimated PD. Other researchers also used logit model in order to examine the default firms (Keasey and Watson, 1987; Ooghe *et al.*, 1995; and Becchetti and Sierra, 2002).

### 3. EMPIRICAL STUDY

#### 3.1. The data set

We use a dataset from Credit Management Research Center of the University of Leeds (UK). That contains 38,570 cases (50% non-default cases and 50% default cases) of unlisted small firms from UK during the period 1999-2008. The accounts analyzed for failed companies are the last set of accounts filed in the year preceding insolvency. Firstly, significant financial ratios (see table 1) are introduced into the credit scoring model and then we explore the value added by the non-financial information (see table 2). On the other hand, the default of firms has a close relationship with the economic situation and, in particular, small and medium enterprises are more sensitive to the changes in economic conditions. Therefore, a macroeconomic variable is also considered as an input variable.

#### 3.2. Input variables description

##### 3.2.1. Financial information

Previous empirical research has found that a firm is more likely to go bankrupt if it is unprofitable, highly leveraged, and suffers liquidity difficulties (Myers 1977, Aghion and Bolton 1992, Lennox 1999). Our financial ratios are selected in the following order. First, since our sample is taken from the UK, we employ some variables taken from prior studies into failures of UK companies as set out in the survey articles of Taffler (1984) and Altman and Narayanan (1997). We supplement the variables from UK studies with some variables from the models of Altman (1968) and Zmijewski (1984), and some variables from the model of Ohlson (1980) as analyzed by Begley, Ming and Watts (1996) and Hillegeist *et al.* (2004). Moreover, Hudson (1987) argues that trade credit forms a large proportion of a firm's liabilities, especially for small firms. He proposes that small firm bankruptcy is mainly influenced by trade creditors rather than bondholders. Therefore, we employ some ratios related to the trade credit.

In summary, there are 14 financial ratios which are grouped into the following six broad categories: leverage, liquidity, profitability, activity and firm size. Table 1 describes these ratios and how they were calculated<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Annex 1 summarizes the descriptive statistics of all variables for both the insolvency and solvency sample.



**Table 1**  
Financial ratios

<b>Ratio</b>	<b>Formulation</b>	<b>Category</b>
CELT	Capital employed / Total liabilities	Leverage
STLTA	Short-term liabilities / Total assets	Leverage
TLCA	Total liabilities / Current assets	Leverage
NWTA	Net worth / Total assets	Leverage
QACA	Quick assets / Current assets	Liquidity
NCNW	Cash / Net worth	Liquidity
CRATIO	Current assets / Current liabilities	Liquidity
CASHTA	Cash / Total assets	Liquidity
PRTA	Retain profit / Total assets	Profitability
TCTD	Trade Creditors / Trade Debtors	Activity
TCTL	Trade Creditors / Total Liabilities	Activity
TDTA	Trade Debtors / Total Assets	Activity
LN_ASSET	Neperian logarithm of the total assets	Size
ASSET	Total assets	Size

### 3.2.2. Non-Financial information

Non-financial and potentially predictive information, initially explored in Hill and Wilson (2007), were considered in our credit scoring model:

**Table 2**  
Non-Financial Information

<b>Variables</b>	<b>Theoretical relationship default</b>
County Court Judgments Number	+
County Court Judgments Value	+
Late Filing Days	+
Audited accounts	-
Audit Report Judgment	+/-
Change auditor	+
Age of the Firm	-
Charge on assets	+
Family firm	+

*Note:* The Audit Report Judgment has +/- because of the auditor can issue a positive (AQ\_CLEAN) or negative (AQ\_NO\_CLEAN) opinion about the financial situation of the firms.

A county court judgment (CCJ) arises from a claim made to the court following the non-payment of unsecured debt (usually trade debts). Therefore, we also employ the variable capturing the *CCJ\_VALUE* within the previous 12 months at the end of the accounting year for the last set of accounts. In conclusion, relationships with the CCJ two variables are employed: *CCJ\_NUMBER* and *CCJ\_VALUE*. Both variables are referred to the last 12 months.

In the UK, unlisted companies have a period of 10 months in which to file accounts following the financial year end. The variable *LATE FILING DAYS* is the number of days following this 10 month period and relates to non-compliance with regulation.

We employ a series of dummy variables to incorporate the data contained in audit reports. The first of these is a dummy variable indicating that the accounts were audited. *AUDITED* takes a value of 1 where the firm has been audited, and 0 otherwise. The dummy variables which capture the information contained in audit reports are as follows: *AQ\_CLEAN* takes a value of 1 where the audit report is favorable. That is, the auditor did not detect financial problems. Or *AQ\_NO\_CLEAN* takes a value of 1 where the audit report is not favorable. Moreover, we employ other dummy variable linked to the audit accounts (*CHANGE AUDITOR*). If a company changes the auditor then that act may be indicative of problems with the company's financial health.

On the other hand, following Hudson (1987), we employ two variables related to the age of the firm (*AGE*<sup>2</sup>) at the date of the latest accounts. We find that the *LN\_AGE* is strongly significant.

Lenders typically take charges on assets as collateral for loans (Citron and Wright, 2008). *CHARGE ON ASSETS* are measured as a dummy variable indicating at least one fixed or floating charge in the last accounting year.

Morten *et al.* (2007) find that relatively less profitable firms that are managed by family CEOs are more likely to file for bankruptcy or be liquidated, relative to comparable firms that are headed by nonfamily CEOs. Therefore, we use the variable *FAMILY FIRM* in order to control this characteristic. *FAMILY FIRM* takes a value of 1 where the company is a family firm and 0 otherwise.

### **3.2.3. Macro-Economic conditions**

The default of firms has a close relationship with the macro-economic situation (Kim and Sohn, 2010). Rather than including industrial sector dummy variables we construct a 'weight of evidence' variable, which expresses the previous years' sector failure rate as the log odds of failure in each of 51 industrial sectors (*INDWOE*<sup>3</sup>).

---

<sup>2</sup> We use two variables linked to the AGE. The first variable is the variable *AGE* of the firm in days. The other variable is the neperian logarithm of the age (*LN\_AGE*) of the company in days.

<sup>3</sup> We use forecasts of the aggregate insolvency rate present in the 'Risk and Insolvency Report' (CMRC). CMRC developed a Cointegration and Vector Error Correction model for UK corporate insol-

This is calculated for each sector using population data on the number of insolvencies in relation to the number of active companies in each sector and acts as a useful proxy for macro-economic conditions. If the variable *INDWOE* is negative, the risk of the industry is high, and otherwise. Therefore, *INDWOE* must be negatively relationship respect to the default.

### 3.3. Data preprocessing

We had a dataset of SMEs, concretely, 4,813,391 (98.32% non-failure case and 1.68% failure cases<sup>4</sup>). In order to have in our dataset only micro-small firms were eliminated all the firms which had an asset greater than 67,000 £. Therefore, after eliminating missing cases, 2,089,140 cases remained. Among them, 20,228 (0.97%) were defaulted cases and 2,068,912 (99.03%) were not. To build a more accurate default prediction model, the abnormal cases, which had the top 1% and the bottom 1% of each financial ratio, were eliminated. After eliminating these abnormal data, 2,020,492 cases remained. Among them, 19,855 cases (0.98%) were defaulted cases and 2,000,637 cases (99.01%) were not. As seen in the data, the number of default cases is smaller than that of non-default cases. Similar to previous bankruptcy studies, this paper also adopts a matched pairs approach for drawing subsamples for both the training and validation set. Therefore, over-sampling was performed: 19,855 (50%) failure cases and 19,855 (50%) non-failure cases.

In order to run the logistic regression this final dataset is arbitrarily split into two subsets; about 80% of the data is used for a training set and 20% for a validation set (see Sobehart *et al.*, 2001).

## 4. CONSTRUCTION OF LOGISTIC REGRESSION

### 4.1. Selecting financial ratios

According to Altman and Sabato (2007), we follow the next procedure to select the most important financial ratios. After the potential candidate predictors have been defined and calculated, we observe the accuracy ratio (AR) as defined by Keenan and Sobehart (1999) for each financial variable. Since this analysis does not take into account the possible correlations between the variables in each group, only a variable was selected from each ratio category. The selected variable was the financial ratio which had the highest accuracy from each group. Next, we apply a statistical forward stepwise selection procedure in order to make the final regression<sup>5</sup>.

---

vency rate for the period 1999 and 2008 and find that insolvency rate has a cointegrating long term relationship with labour conditions, money availability, and capital gearing level.

<sup>4</sup> The account analyzed for failed firms are the last set of accounts filed in the year preceding insolvency.

<sup>5</sup> In some statistical studies, criticism of the forward stepwise selection procedure has been raised as it can yield theoretically implausible models and select irrelevant variables. For this reason, we use a two-

We ran the logistic regression using the five important variables (*CELT*, *CASHTA*, *PRTA*, *TDTA* and *LN\_ASSET*). All of the slopes (signs) follow our expectations. Thus, the five financial ratios retain their appropriate signs and significance.

Moreover, in order to check if the non-financial information improves our model, we introduce the most relevant non-financial information in previous model using by stepwise selection process. Then, the variables which their slopes (signs) do not follow our expectations were not considerate.

Finally, four non-financial variables were introduced in the new model: *NUMBER CCJs*, *LATE FYLING DAYS*, *LN\_AGE* and *FAMMILY FIRM*.

Lastly, a third model incorporating the macro-economic variable *INDWOE* is made. Following our expectations, its slopes (signs) is negative. The results of all the models are collected in the annex 1 (coefficients).

Observing the distributions of each of the selected variables for the two dependent variable groups, a large range of values is clearly visible. This high variability of the financial ratios for SMEs can be due either to the different sectors in which these companies operate (real estate firms have financial data completely different from agricultural companies), or to the different ages of the firms in the sample as well as their different level of financial health. Therefore, some researcher (see Altman and Sabato, 2007) use logarithmic transformations for financial selected variables in order to reduce the range of possible values and increase the importance of the information given by each one of them. They found that the accuracy ratio model which uses logarithmic transformations is higher than that use original variables.

Therefore, four of the five original financial variables were transformed<sup>6</sup>. The logarithmic transformations, instead of, hyperbolic tangent transformations of financial selected original variables is made due to our financial ratios are negative<sup>7</sup>. However, before of introduce the transformed variables in our model, we check (through logit univariate analysis) if their accuracy ratio is better than the financial selected original variables. If their accuracy ratio is not better than the financial selected original variables, we continue employing in the model the original variable. After of to run the logit univariate analysis, all the transformed variables, except *CASHTA*, had a better accuracy ratio. Therefore, we run a new model (model 4) which have the same variables that the model 3. However, the variables *CELT*, *PRTA* and *TDTA* were substituted for three new variables (*tanh\_CELT*, *tanh\_PRTA* and *tanh\_TDTA*).

---

step analysis, first choosing the most relevant variables for our study and then applying the stepwise selection procedure. See also Hendry and Doornik (1994).

<sup>6</sup> The variable *LN\_ASSET* is transformed. Therefore, it was not transformed again.

<sup>7</sup> Thus, if we apply logarithmic transformations to a negative variable, the results will be missing value.

## 4.2. Results

The model 2 has an average correct classification rate by 73.61%, higher than that of the model 1 (70.22%). Therefore, clearly the non-financial variables add value to the model with an improvement of over 4.8% compared with model using only financial information (see table 3).

Moreover, the Type I error decreases considerably (exactly, 22.43%). However, the Type II error increases smoothly (3.87%). Therefore, we suggest, like Peel *et al.* (1986), Grunet *et al.* (2004), Peel and Peel (1989), Hill and Wilson (2007) and Altman *et al.* (2010), that the non-financial information improve the accuracy of the credit scoring models.

However, when we control the macroeconomic conditions (see model 3). Its average correct classification rate is the 73.45% with 26.34% (25.51%) Type I error (Type II error). Therefore, we also conclude, like the literature about credit scoring, that the macroeconomic conditions affect to the default firms.

However, a fourth model was made. It obtains the best result. Its average correct classification rate is by 74.78%. Its Type I and II error are by 25.74% and 24.70%, respectively. Therefore, we suggest, like Altman and Sabato (2007), that if the original financial variables are transformed, model predictive capacity increases. (All training results can see in the table 3).

**Table 3**

Model	Actual Class	Classified Class	
<i>Training sample</i>			
		0 (good credit)	1 (bad credit)
Model 1	0 (good credit)	10405 (65.50%)	5479 (34.50%)
	1 (bad credit)	3978 (25.04%)	11906 (74.95%)
Average correct classification rate: 70.22%			
Model 2	0 (good credit)	11634 (73.24%)	4250 (26.76%)
	1 (bad credit)	4130 (26.01%)	11754 (73.99%)
Average correct classification rate: 73,61%			
Model 3	0 (good credit)	11700 (73.66%)	4184 (26.34%)
	1 (bad credit)	4052 (25.51%)	11832 (74.49%)
Average correct classification rate: 74,08%			
Model 4	0 (good credit)	11795 (74.26%)	4089 (25.74%)
	1 (bad credit)	3924 (24.70%)	11960 (75.30%)
Average correct classification rate: 74,78%			

**Table 3 (Cont.)**

Model	Actual Class	Classified Class	
<i>Holdout sample</i>			
		0 (good credit)	1 (bad credit)
Model 3	0 (good credit)	<b>2885 (72.65%)</b>	<b>1086 (27.35%)</b>
	1 (bad credit)	<b>1059 (26.67%)</b>	<b>2912 (73.33%)</b>
Average correct classification rate: 72,99%			
Model 4	0 (good credit)	<b>2896 (72.93%)</b>	<b>1075 (27.07%)</b>
	1 (bad credit)	<b>1012 (25.48%)</b>	<b>2959 (74.52%)</b>
Average correct classification rate: 73,73%			

### 4.3. Model validation

We, randomly, retained 20% our cases in order to undertake hold-out tests for model performance. Table 4 summarizes the results, in terms of AUC test of the two different models tested on the training and hold-out sample (model 3 and model 4). The error rates shown in table 6 are calculated fixing an arbitrary cut-off rate of 50 percent.

**Table 4**

Models	Training			Holdout		
	AUC	Type I	Type II	AUC	Type I	Type II
Model 3	0.809	26,34%	25.51%	0.806	27.35%	26.67%
Model 4	0.819	25.74%	24.70%	0.816	27.07%	25.48%

## 5. CONCLUSIONS

We improve upon existing models from the literature of small distress prediction in various ways. First, we are able to explore the value added by non-financial information specifically for SMEs. We find that this information, when available, is likely to significantly improve the prediction accuracy of the model by up to 4.8%. In our models we control for macro-economic conditions by including a variable (*INDWOE*) that tracks, for each company, the industry sector failure rate, for 51 industrial sectors, in the previous year. Using available information, we develop a default prediction model for that large part of micro-enterprises for which financial information is very limited. To the best of the authors' knowledge, in the existing literature, solutions to address credit risk management for these clients have never been provided.

Our findings clearly confirm for micro-enterprise what has been found in other studies for large corporations (e.g. Grunet *et al.* 2004), that using qualitative variables

as predictors of company failure significantly improves the prediction model's accuracy. However, we believe that this result is even more important for micro-enterprise considering that for a large part of them financial information is often-times quite limited. Moreover, non-accounting information, such as the ones used in this study, can be updated frequently allowing financial institutions to correct their credit decisions in a timely manner. Thus, IMFs and banks should carefully consider the results of this study when setting their internal systems and procedures to manage credit risk for micro-enterprises.

## REFERENCES

- Aghion, P.; Bolton, P. (1992). "An 'incomplete contracts' approach to financial contracting". *Review Economic Studies*, 59(3), 473-494.
- Altman, E.I. (1968). "Financial ratios, discriminant analysis and prediction of corporate bankruptcy". *Journal of Finance*, 23, 589-609.
- Altman, E.I.; Edward, I.; Haldeman, R.; Narayanan, P. (1977). "A new model to identify bankruptcy risk of corporation". *Journal of Banking and Finance*, 1, 29-54.
- Altman, E.I.; Narayanan, P. (1997). "Business Failure Classification Models: An International Survey", in: Choi, F. (ed.), *International Accounting*, 2<sup>nd</sup> New York: Wiley.
- Altman, Edward I.; Sabato, G. (2005). "Effects of the new Basel Capital Accord on Bank Capital Requirements for SMEs". *Journal of Financial Services Research*, vol. 28.
- Altman, E.I.; Sabato, G. (2007). "Modeling Credit Risk for SMEs: Evidence from US Market", *ABACUS*, vol. 43 (3), 332-357.
- Altman, E.I.; Sabato, G.; Wilson, N. (2010). "The value of non-financial information in small and medium-sized enterprise risk management". *Journal of Credit Risk*, 6(2), 95-127.
- Ang, J. (1991). "Small Business Uniqueness and the Theory of Financial Management". *The Journal of Small Business Finance*, vol. 1, (1), pp. 1-13.
- Aziz, A.; Emanuel, D.; Lawson, G. (1998). "Bankruptcy prediction —An investigation of cash flow based models". *Journal of Management Studies*, 25, 419-437.
- Beaver, W. (1966). "Financial ratios as predictors of failure, empirical research in accounting: Selected studied". *Journal of Accounting Research*, 71-111.
- Becchetti, L.; Sierra J. (2002). "Bankruptcy risk and productive efficiency in manufacturing firms". *Journal of Banking and Finance*, vol. 27, 2099-2120.

Begley, J.; Ming, J.; Watts, S. (1996). "Bankruptcy Classification Errors in the 1980's: An Empirical Analysis of Altman's and Ohlson's Models". *Review of Accounting Studies*, vol. 1, 267-284.

Berger, A.N. (2006). "Potential Competitive Effects of Basel II on Banks in SME Credit Markets in the United States". *Journal of Financial Services Research*, vol. 28.

Berger, A.N.; Udell, G.F. (2004). *A More Complete Conceptual Framework about SME Finance*. World Bank Conference an "SME: Overcoming Growth Constraints", 14-15.

Bradbury, M.E. (1992). "Empirical Evidence on Predicting Small Business Loan Default". *Accounting Forum*.

Citron, D.; Wright, M. (2008). "Bankruptcy costs, leverage and multiple secured creditors: the case of MBOs". *Accounting and Business Research*, vol. 38, 71-90.

Grunet, J.; Norden, L.; Weber M. (2008). "The Role of Non-Financial Factors in Internal Credit Ratings". *Journal of Banking and Finance*, vol. 29, nº 2.

Headd, B. (2003). "Redefining Business Success: Distinguishing Between Closure and Failure". *Small Business Economics*, vol. 21, 51-61.

Hendry, D.F.; Doornik, J.A. (1994). "Modelling linear dynamic econometric systems". *Scottish Journal of Political Economy*, 41, 1-33.

Hill, P.; Wilson, N. (2007). "Predicting the insolvency of unlisted companies". *Working paper*, CMRC, Leeds University.

Hillegeist, S.A.; Keating, E.K.; Cram, D.P.; Lundstedt, K.G. (2004). "Assessing the Probability of Bankruptcy". *Review of Accounting Studies*, vol. 9, 5-34.

Hudson, J. (1987). "The Age, Regional and Industrial Structure of Company Liquidations". *Journal of Business Finance and Accounting*, vol. 14, nº 2, 199-213.

Keasey, K.; Watson R. (1987). "Non-financial symptoms and the prediction of small company failure: a test of Argenti's hypotheses". *Journal of Business Finance and Accounting*, vol. 14(3), 14.

Kim, H.S.; Sohn, S.Y. (2010). "Support vector machines for default prediction of SMEs based on technology credit". *European Journal of Operational Research*, 201, 838-846.

Kolari; Sh. *Assessing the Profitability and Riskiness of Small Business Lenders in the U.S. Banking Industry*. (www.sba.gov, consultado en 2004).

Lennox, C. (1999). "Identifying failing companies: A re-evaluation of the logit, probit and DA approaches". *J. Economy Business*, 51, 347-364.



Micha, B. (1984). "Analysis of business failures in France". *Journal of Banking and Finance*, vol. 8, 281-291.

Morten B.; Nielsen; Perez-Gonzalez; Wolfenzon (2007). "Inside the Family Firm: The Role of Families in Succession Decisions and Performance". *The Quarterly Journal of Economics*, 122 (2), 647-691.

Myers, S. (1977). "Determinants of corporate borrowing". *Journal Financial Economy*, 5(2), 147-175.

Ohlson, J.A. (1980). "Financial ratios and the probabilistic prediction of bankruptcy". *Journal of Accounting Research*, 109-131.

Ooghe, H.; Joos, P.; De Bourdeaudhuij, C. (1995). "Financial distress models in Belgium: The results of a decade of empirical research". *International Journal of Accounting*, vol. 30, 245-274.

Peel, M.J.; Peel, D.A.; Pope, P.F. (1986). "Predicting Corporate Failure —Some Results for the UK Corporate Sector". *Omega International Journal of Management Science*, 14(1). 5-12.

Peel, M.J.; Peel, D.A. (1989). "A Multi-logit Approach to Predicting Corporate Failure- Some Evidence for the UK Corporate Sector". *Omega International Journal of Management Science*, 16(4), 309-318.

Pompe, P.P.M.; Bilderbe, J. (2005). "The prediction of bankruptcy of small-and medium-sized industrial firms". *Journal of Business Venturing*, 20, 847-868.

Sobehart, J.; Keenan, S.; Stein, R. (2001). "Benchmarking quantitative default risk". *Research Quarterly*, vol. 4, n° ½, March/June.

Taffler, R.J. (1984). "Empirical Models for the Monitoring of UK Corporations". *Journal of Banking and Finance*, vol. 8, 199-227.

Taffler, R.J.; Tisshaw H. (1977). "Going, Going, Gone —Four Factors Which Predict". *Accountancy*, vol. 88, March 1977, 50-54.

Watson, J.; Everett, J.E. (1996). "Do small businesses have high failure rates?". *Journal of Small Business Management*, vol. 34, n° 4, 45-62.

Zavgren, C. (1983). "The prediction of corporate failure: the state of the art". *Journal of Accounting Literature*, vol. 2, p. 1-37.

Zmijewski, M.E. (1984). "Methodological Issues Related to the Estimation of Financial Distress Prediction Models". *Journal of Accounting Research*, vol. 22, 59-82.

## ANNEX 1

### Descriptive statistical

Variables	Status	Mean	Std. Desviation
Capital employed/Total liabilities	Failed	0.4470	2.8807
	Non Failed	1.7932	4.9640
Short-term liabilities/Total assets	Failed	0.1144	0.2299
	Non Failed	0.0586	0.1751
Total liabilities/Current assets	Failed	3.2275	5.5601
	Non Failed	2.3840	5.4470
Net worth/Total assets	Failed	-0.7022	3.0220
	Non Failed	0.3745	0.3458
Quick assets/Current assets	Failed	0.8032	0.2937
	Non Failed	0.8837	0.2564
Cash/Net worth	Failed	4.6336	5.6858
	Non Failed	2.9657	4.6527
Current assets/Current liabilities	Failed	1.1768	2.5651
	Non Failed	2.3907	4.3887
Cash/Total assets	Failed	0.1513	0.2294
	Non Failed	0.3745	0.3458
Retain profit/Total assets	Failed	-0.5541	1.4332
	Non Failed	0.0120	1.0839
Trade Creditors/Trade Debtors	Failed	6.9060	17.4073
	Non Failed	12.4498	22.6862
Trade Creditors/Total Liabilities	Failed	0.8502	0.2737
	Non Failed	0.8520	0.3102
Trade Debtors/Total Assets	Failed	0.4344	0.3185
	Non Failed	0.3111	0.3107
Ln (Total assets)	Failed	10.3707	0.5509
	Non Failed	10.0877	0.6083
Total assets	Failed	36425.46	16787.13
	Non Failed	28646.46	16401.24
CCJ Number	Failed	0.3000	0.8390
	Non Failed	0.0200	0.1890
CCJ Value	Failed	1508.75	7721.52
	Non Failed	49.7101	758.2787

<b>Variables</b>	<b>Status</b>	<b>Mean</b>	<b>Std. Desviation</b>
Late Filing Days	Failed	35.0000	77.2670
	Non Failed	10.0000	38.3200
Audited accounts	Failed	0.0500	0.2170
	Non Failed	0.0300	0.1830
AQ_Clean	Failed	0.0400	0.2020
	Non Failed	0.0300	0.1770
AQ_No_Clean	Failed	0.0100	0.0830
	Non Failed	0.0010	0.0430
Change auditor	Failed	0.0500	0.2220
	Non Failed	0.0500	0.2090
Ln_Age firm	Failed	7.4764	0.6760
	Non Failed	7.5913	0.7554
Charge on assets	Failed	0.0600	0.2430
	Non Failed	0.0100	0.1070
Family firm	Failed	0.4300	0.4960
	Non Failed	0.5000	0.5000
Indwoe	Failed	-0.0698	0.4830
	Non Failed	0.1808	0.5303
TanH_Capital employed/Total liabilities	Failed	0.0439	0.4239
	Non Failed	0.3603	0.4682
TanH_Retain profit/Total assets	Failed	-0.1928	0.4709
	Non Failed	0.1249	0.4356
TanH_Trade Debtors/Total Assets	Failed	0.3764	0.2536
	Non Failed	0.2734	0.2531

## Ponencia 23

# CREDIT RISK MANAGEMENT AND MACROECONOMIC CONDITIONS

Ana-Maria Săndică and Alexie Ciprian Alupoaei

### ABSTRACT

In this paper we aim to analyze the impact of macroeconomic variables on the results provided by behaviour models designed to estimate the probability of default rate for retail loans. In order to capture this view, we engaged a straight comparison between different credit scoring models with and without incorporation of the impact posts by macroeconomic context. The results of VAR approach highlighted the inter connections between macro variables and default rate. Additionally we propose an aggregate indicator to capture partly the variance of the overall evolution. For this task we used the Principal Component Analysis to link the macro and micro impacts on default rate. The credit scoring models were compared before and after the inclusion of this new variable and the results revealed that the robustness of the regression models increases. The back testing values confirmed that macroeconomic effects could detect earlier increases in the probability of default.

### 1. INTRODUCTION

During this downturn period many households continue to carry high levels of debt, which may leave them vulnerable to future different external shocks, either as a result of unemployment, rising of interest payments or national currency's depreciation.

In order to reduce the budget deficit and complete the demands of IMF, the austerity program which started on first of July 2010 in Romania includes: the reducing wages in public sector by 25%, increase in VAT from 19% to 24%, cut in social transfers by 15%, tax of 16% on interest on deposits and on lunch tickets, a cut in current expenses with goods and services in the public sector, and lay-offs in public sector. Private individuals have been very affected by all these measures and the overall non-performance rate for loans granted to population sector has increased since December 2008 until June 2010 from 2.4% to 6.9%. The evolution of the non-performing rate for loans in foreign currencies has accounted a higher increase, by 300% (reaching the level of 6.1%) in comparison with the non-performing rate of loans in national currency that has increased by 125%. All these corroborated events

have resulted in the creation of a problematic framework for credit risk both in terms of granting new loans as well as monitoring existing ones. Over the time the proposal of rating behavioural analysis came up, being one good signal to take into account to quantify the credit risk. But with the increase of macroeconomic impacts on microeconomic domains, the importance of behavioural variables has been moved from the individual's environment to a global level.

Households apply mostly for loans granted in foreign currencies by domestic banks (over 60%). Real-estate loans (mortgage credits and mortgage-backed consumer credits) account for almost 80% of the foreign currency loans granted to households. These loans have long and very long maturities, so it is expected that the risk generated by the borrowers earning incomes in other currencies than the loan currency will dissipate once Romania has adopted the Euro. In order to protect high risk concentration some preventive measures were taken by the National Bank of Romania to slow down foreign currency loan growth. In February 2008 they officials of NBR proposed different provisioning coefficients for foreign currency or currency-indexed loans granted to un-hedged borrowers. In August 2008 the proposal from NBR was to consider the interest rate risk and the exchange rate risk in setting the indebtedness ceiling (set on a case-by-case basis by using internal risk models). Insolvency of debtors under current economic conditions is the effect of the high level of debt that has soared in the last 4 years. Growth rate of loans granted to households was not sustained on long term by the growth of the population's income rate, leading to over-indebtedness of the sector. Deterioration of the household portfolio of loans has become an important risk for banks. The concern comes from many sources such as: low values of lags considered as months, the negative shocks in the labor market that are transferred to the volume of arrears and the significant increase in outstanding amounts for all types of credit and others. In this context the restructuring process of the loans should be closely reviewed and more actions to collect delinquent loans should be initiated. The magnitude of the household analysis in a macroeconomic framework has been perceived as a new approach to credit risk and benefits of such initiatives might help banks for a more accurate assessment of the portfolio's health. Analysis of the portfolio is seen through the quantification of the credit risk by measuring, in time, the impact factors either being micro or macro nature.

In this paper we aim to analyze the impact of macroeconomic variables on the results provided by behaviour models designed to estimate the probability of default rate for retail loans. In order to capture this view, we engaged a straight comparison between different credit scoring models with and without incorporation of the impact posts by macroeconomic context. The results of VAR approach highlighted the inter connections between macro variables and default rate.

Additionally we propose an aggregate indicator to capture partly the variance of the overall evolution. For this task we use the Principal Component Analysis to link the macro and micro impacts on default rate. The credit scoring models were compared before and after the inclusion of this new variable and the results revealed that the robustness of the regression models increases. The back testing values confirmed that macroeconomic effects could detect earlier increases in the probability of default.

The paper is organized as follows: chapter 2 provides a review of literature on credit scoring models with macroeconomic variables. Chapter 3 describes the methodology used and chapter 4 relates the results. In Section 5 are presented the conclusion of this paper followed by Appendix.

## 2. LITERATURE REVIEW

The credit risk research on retail portfolio revealed that macroeconomic factors explain the evolution of the default rate. Carling *et al.* (2002) estimated a duration model to explain the survival time to default. The used sample was a portfolio of a major Swedish bank over the period 1994-2000 and as significant variables he obtained output gap and the yield curve.

Komorád (2002) analyzed the credit scoring prediction accuracy and performance on a data set from a French bank. The performances of the logistic regression and neuronal networks were compared and the obtained results indicated that the methods, namely the logistic regression, and neural networks give very similar results. However the traditional logit model seems to perform marginally better.

Virolainen (2004), using Finnish data over seven years starting with 1986 found a significant relationship between corporate default rates and macroeconomic factors including GDP, interest rate and corporate indebtedness. Bellotti and Crook (2007) researched if the survival analysis is competitive for prediction of default in comparison with logistic regression and also they have included macroeconomic variables and a cost decision matrix. In a review of consumer credit risk models, Crook, Edelman and Thomas (2007) presented the difficulties in setting a cut-off. Malik and Thomas (2008) and incorporated both consumer specific ratings and macroeconomic factors in the framework of Cox proportional hazard model.

Kocenda and Vojtek (2009) made a comparison between logistic regression and a classification tree and their results are that the socio-demographic variables are important for a credit scoring model but also behavioural variables should be included for managing the portfolio.

## 3. METHODOLOGY

### 3.1 VAR approach

Let  $Y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{nt})'$  denote a vector of time series variables. The basic  $p$ -lag vector autoregressive (VAR ( $p$ )) model has the form:

$$Y_t = c + \Pi_1 Y_{t-1} + \Pi_2 Y_{t-2} + \dots + \Pi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t=1, \dots, T \quad (1)$$

Where  $\Pi_i$  are coefficient matrices and  $\varepsilon_t$  is an unobservable zero mean white noise vector process. In lag operator notation the VAR ( $p$ ) is written as:

$$\Pi(L)Y_t = c + \varepsilon_t \quad (2)$$

The model is stable if the roots of  $\det(\Pi_1 z + \dots + \Pi_p z^p - I_n) = 0$  lie inside the complex unit circle (have modulus lower than one)

Considering the matrices

$$\phi_i = \sum_{j=1}^i \phi_{i-j} \Pi_j \quad (3)$$

With  $\phi_0 = I_k$  and  $\Pi_j = 0$  for  $j > p$ . It is well known that the  $j$ -th element of the trix  $\phi_i$ ,  $\phi_{jh,i}$  represents the response of the variable  $y_{j,t+1}$  to a unit change in  $y_{h,t}$ , under the assumption that  $y_s = 0$ , for  $s < t$ ,  $u_s = 0$ , for  $s > t$  and  $y_t = u_t$  where  $u_t$  is  $k$ -dimensional unit vector, with one as the  $h$ -th coordinate and zero elsewhere. The sequence

$$\{\phi_{jh,i}; \quad i = 0, 1, \dots\} \quad (4)$$

is the impulse response function. It traces out the time path of a unit shock in  $y_h$  on the variable  $y_j$ .

## 3.2. Credit Scoring Models

### 3.2.1. Logistic regression

If  $p_i$  is the probability that applicant  $i$  has defaulted, the purpose is to find  $w^*$  that best approximate

$$p_i = w_0 + x_{1i}w_1 + x_{2i}w_2 + \dots + x_{ip}w_p \quad (5)$$

The purpose is to find a function of  $p_i$  which could take values between 0 and 1 and one such function is the log of probability odds.

The linear combination of the characteristic variables is:

$$\log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) = w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_px_p = w \cdot x^T \quad (6)$$

Taking exponential on both sides of (5) leads to the equation:

$$p_i = \frac{e^{w \cdot x}}{1 + e^{w \cdot x}} \quad (7)$$

Dividing by  $e^{w \cdot x}$ , the equation (6) becomes:

$$p_i = \frac{1}{1 + e^{-w \cdot x}} \quad (8)$$

The probability of observing either class (good or bad client) is given by the probability function of the Bernoulli distribution:

$$p(Y|X) = P(Y = 1|X)^y(1 - P(Y = 1|X))^{1-y} \quad (9)$$

Considering the fact that the observations are drawn independently the joint probability function is:

$$\prod_{i=1}^N P(y_i = 1|x_i)^{y_i}(1 - P(y_i = 1|x_i))^{1-y_i} \quad (10)$$

The log likelihood function then becomes:

$$LL = \sum_{i=1}^N y_i \log(P(y_i = 1|x_i)) + (1 - y_i) \log(1 - P(y_i = 1|x_i)) \quad (11)$$

This leads to an iterative Newton-Raphson method to solve the equation that arises.

### 3.2.2. Probit Regression

Grablowsky and Talley in 1981 used for the first time the probit function in credit scoring. In probit analysis if  $N(x)$  is the cumulative normal distribution function so that:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (12)$$

Then the purpose is to estimate  $N^{-1}(p_i)$  as a linear function of the characteristics of the applicant so:

$$N^{-1}(p_i) = w_0 + w_1 x_{1i} + w_2 x_{2i} + \dots + w_p x_{pi} = w \cdot x_i^T \quad (13)$$



Again,  $p_i$  takes only values between 0 and 1,  $N^{-1}(p_i)$  takes values between  $-\infty$  to  $+\infty$ . Considering:

$$W = w_0 + w_1X_1 + w_2X_2 + \dots + w_pX_p = w \cdot x_i^T \quad (14)$$

is a measure of goodness of an applicant and the fact that the applicant is defaulter or not depends on whether the value of  $W$  is greater or less than a cut-off level  $C$ . Supposing that  $C$  is a variable with standard normal distribution using maximum likelihood estimation  $w$ , the vector of weights, could be estimated.

Consider the probability of a client to be defaulter (bad) as:

$$P(Y = 1|X) = N(w \cdot x_i^T) \quad (15)$$

### 3.2.3. Neural Networks

A neural network contains three basic types of neurons: input units, acquiring the input variables values or standard values of input variables; neurons intermediaries are located between the input layer and output layer having a function purely computer and output neurons, which calculates predicted values by neural network.

Each value of  $X_1, X_2, \dots, X_p$  is a variable and the weights, also known as synaptic weights<sup>1</sup> are written in the order  $(k, p)$  where  $k^2$  indicates the neuron to which the weight applies and  $p$  indicates the variable.

$$u_k = w_{k0}x_0 + w_{k1}x_1 + \dots + w_{kp}x_p = \sum_{q=0}^p w_{kq}x_p, \quad (16)$$

$$y_k = F(u_k) \quad (17)$$

The  $u_k$  value is then transformed using an activation function known as transfer function. Various alternative activation functions have been used:

- Threshold Function

$$\begin{cases} F(u) = 1, & \text{if } u \geq 0, \\ F(u) = 0, & \text{if } u < 0 \end{cases} \quad (18)$$

---

<sup>1</sup> If the sign is positive then the weights are known as excitatory because they would increase the corresponding variable and if is negative they would reduce the value of  $u_k$  for positive variables are known as inhibitory.

<sup>2</sup> If the architecture is a single layer neuron then  $k$  is 1.

- Logistic Function:

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{1 + e^{-a\mathbf{u}}} \quad (19)$$

- Hyperbolic tangent :

$$F(\mathbf{u}) = 1 - \frac{2}{1 + e^{2\mathbf{u}}} \quad (20)$$

In order to apply neural network technique the problem of specifying the weights that are used in the architecture built and this task is accomplished by the learning algorithm which trains the network and iteratively modifies those weights until a condition is satisfied ,especially when the error between the desired output and the one produced by the model is minimal.

A multilayer perceptron is composed of an input layer of signals, an output layer and a number of layers of neurons between, called hidden layers. The weights applied in the input neurons may differ from the weights applied in hidden layers:

$$y_k = F_1 \left( \sum_{q=0}^p w_{kq} x_q \right) \quad (21)$$

Where the subscript 1 in equation (19) indicates the fact that it is the first layer and  $y_k$  are the outputs from the first hidden layer and the output of one layer is the input for the following layer; the relation became:

$$z_v = F_2 \left( \sum_{k=1}^r K_{vk} y_k \right) = F_2 \left( \sum_{k=1}^r K_{vk} F_1 \left( \left( \sum_{q=0}^p w_{kq} x_q \right) \right) \right) \quad (22)$$

Where  $z_v$  is the output of neuron  $v$  in the output layer,  $v = 1, \dots, s$ ,  $F_2$  is the transfer function the output layer and the weight applied to the  $y_k$  layer is  $K_{vk}$ .

The method for calculating these weights is also known as training process, and most frequently method is the back-propagation algorithm, that looks for the minimum error function in weight space using the method of gradient descent. The solution of the learning problem is the combination of weights which minimizes the error function.

First, all weights are equal to some randomly chosen numbers and a training pair is selected, the forward pass is ending when  $z_v$  is calculated. The backward pass consists of distributing the error between known value  $o_v$  and calculated one,  $z_v$ , through the net-

work proportionally with the contribution made by each weight. After that, a second pair is selected and both forward and back pass are calculated this process is known as epoch and the repeated process ends up when a stopping criterion has been fulfilled.

Defining the error,  $e_v(t)$  the purpose is to choose a vector of weights that minimizes the average value over all training cases of:

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^s e_v^2(t) \quad (23)$$

where  $s$ , is the number of neurons in the output layer. For a giving training set the weights in the network are the only parameters that can be modified to make the quadratic error  $E$  as low as possible. This can be minimized by using an iterative process of gradient descent for which the gradient is:

$$\Delta E = \left( \frac{\partial E(1)}{\partial w_{vk}(1)}, \frac{\partial E(2)}{\partial w_{vk}(2)}, \dots, \frac{\partial E(t)}{\partial w_{vk}(t)} \right) \quad (24)$$

The whole learning problem has now been reduced to the questions of calculating the gradient of a network function with respect to its weights, minim of the error function, where  $\Delta E = 0$ . The main advantages have to be found in their learning capabilities and the fact that the derived model does not make any assumption on the relations among input variables and as an important drawback are that the development of neural networks requires quite a lot of expertise.

### 3.3. Principal component analysis

This is a mathematical procedure that develops an orthogonal transformation in order to generate a set of uncorrelated values called principal components from a set of possibly correlated variables. This statistical technique is used to reduce the number of variables in a data set to a smaller number of dimensions. The new uncorrelated indices resulted are a linear weighted combination of the initial variables. Moreover the transformation of the initial set of observations is defined in such a way that the first principal component has the high variance as possible.

Considering from an initial set of  $n$  correlated variables, PCA creates uncorrelated indices or components, where each component is a linear weighted combination of the initial variables.

From the set of variables  $X_1$  through to  $X_n$ ,

$$\begin{aligned} \text{Comp 1} &= a_{11} * X_1 + \dots + a_{1n} * X_n \\ \text{Comp } n &= a_{n1} * X_1 + \dots + a_{nn} * X_n \end{aligned} \quad (25)$$

where  $a_{mn}$  represents the weight for the  $m$ -th principal component and the  $n$ -th variable.

## 4. EMPIRICAL RESULTS

The main purpose of this paper is to underline the impact of macroeconomic variables in a microeconomic field. This analysis was done in two stages. The first one was to measure the impact of the dynamics of macro-variables on the evolution of a retail portfolio. The quality of a portfolio could be explained by default rate. This ratio represents the proportion of the default clients, in this case the clients who didn't paid three consecutively months<sup>3</sup>. The second phase contains the quantification of the importance of these variables in accuracy's terms of a credit scoring model.

The macro-vulnerabilities could be incorporated in two different moments in a credit lifetime, either in the moment of approval, either after one or more years, in order to play the role of a stressed condition.

The first analysis we have conducted, is a variance decomposition of this portfolio indicator into several macroeconomic triggers such as: Interest Rate, FX Rates (EUR and CHF), Unemployment Rate and Net Average Income. Besides the last variable mentioned, all the others are in a positive relationship with the dependent variable: Default Rate.

In this respect, we have used a Vector Autoregressive approach in order to capture the causalities between the Default Rate and the macroeconomic variables taking into account that some inter-connections exist also among them. The obtained results on the roots of the polynomial indicated that the model satisfies the stability condition (Appendixes - Table 1). In the below table are presented the results of the Portmanteau test which revealed that there is no residual autocorrelation up to lag  $h$ . The results of the LM tests pointed out no serial correlation at lag  $h$  (Appendixes - Table 2)

**Table 1**  
**Residual Portmanteau Tests for Autocorrelations**

VAR Residual Portmanteau Tests for Autocorrelations					
H0: no residual autocorrelations up to lag $h$					
Lags	Q-Stat	Prob.	Adj Q-Stat	Prob.	df
1	12.13724	NA*	12.51653	NA*	NA*
2	41.65161	0.2383	43.93506	0.1707	36
3	76.51392	0.3358	82.28359	0.1910	72
*The test is valid only for lags larger than the VAR lag order.					
df is degrees of freedom for (approximate) chi-square distribution					

<sup>3</sup> This is the default definition according to Basel II Agreement.

In order to substantiate the use of a macro-indicator in credit scoring models, we engaged a VAR analysis in which we customized the impulse-response functions such as an interest variable (default rate in this case) responds to a positive, respective negative defined shock. For this purpose we analyzed the impact of positive/negative shocks applied on the variables that compose the macro-indicator on default rate. Therefore we defined a negative shock only for income, while on the other variables we applied positive shocks. As we can observe (Appendixes Figures 1, 2) the most powerful impact was determined by the positive shocks on CHF/RON and interest rate. This fact is explained by the structure of retail portfolio<sup>4</sup> and the high level of interbank's interest rates. Also a positive shock on unemployment rate exhibit a very rough increase in default rate. A very interesting result was that a depreciation of domestic currency against euro has a negative impact on default rate in the short-run. This impact could be explained by both the fact that in short-run a depreciation of local currency lead to an increase in exports which stimulates the economic activity and a good selection of bank debtors.

The decomposition of the variance of the default rate established the following conclusion: the default rate is an autoregressive model (80% of the variance being explained by it); the rest of 20% being split between Income variation and CHF/RON exchange rate. The variation of Income is in line with the decision of cutting wages for Public Sector employees. This decrease has been done in July 2010 and starting that point, the trend of the default rate slightly gone up. (Appendixes –Figure 3). At the moment of a loan approval, it is very important for a bank to achieve, based on qualitative and quantitative information, high accuracy discrimination between good and bad clients. The previous analysis revealed that macroeconomic factors impacts the trend of the default rate therefore a macroeconomic indicator has been included as a trigger for default detection.

Each client will have different strength (in terms of capacity to repay) to respond to an external shock such as an increase in interest rate (the case of loans with interest rate settled on the base of EURIBOR), an increase in unemployment rate in different industries (retail, sales and construction industries have recorded the higher dynamic in the number of unemployed individuals). The propagation of an exchange rate shock will be translated into the default rate through monthly payment channel since the depreciation of the local currency will lead to a higher value of the payment denominated in RON. The fact that almost 95% of the clients have the inflows in national currency and 90% of the exposures are in foreign currency explains the relation between one shock on exchange rate and the capacity to repay of an individual.

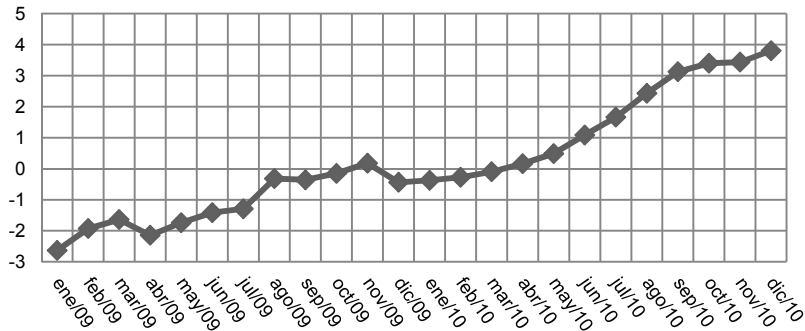
Having this as the basis of our analysis, we took into account the importance of these macroeconomic factors during the lifetime of a loan. In order to cluster the most important information from the global variables we have used the principal component analysis (Appendixes –Table 3). The new obtained indicator based on the initial variables such as unemployment rate, income and FX rates includes also

---

<sup>4</sup> More than half of the exposures of this portfolio are denominated in CHF.

a portfolio trend (Appendixes –Table 4). In order to capture the direction of the delinquency rate for the entire portfolio we have included these several overdue rates for the main purpose of having as an output the principal component of the overall evolution.

**Figure 1**  
The evolution of the Aggregate Indicator



In credit scoring models we have introduced this new aggregate indicator for a retail portfolio with loans granted in 2008. After the moment of the approval of a loan the time frame used was two years. For instance a client with a loan granted in November 2008 the observation time starts in January 2009 and ends in November 2010, in this way we have differentiated between the moments of approval.

The first model analysed was a logistic regression and the results obtained indicated that the variable Income, with a negative coefficient of  $-0.0004$ , statistically different by zero, underlined a negative relationship between the income of a client and its probability of default (Appendixes –Tables 5-7).

**Table 2**  
Analysis of Maximum Likelihood Estimates-LOGIT

Parameter	Estimate	Standard Error	Wald Chi-Square	Pr > ChiSq
Intercept	0.6627	1.5040	0.1900	0.6595
Expenses	0.0016	0.0001	210.9200	<.0001
Income	-0.0004	0.0000	261.2800	<.0001
Payment	0.0006	0.0002	12.4200	0.0004
Term	-0.0002	0.0000	58.3600	<.0001
Aggregate Indicator	0.2464	0.0742	11.0100	0.0009

The same relation was identified for the term of the loan, the higher the period of a loan the smaller the probability of default. The variables Expenses and Payment with positive coefficients revealed the direct relationship between the increasing in the pressure of capacity to repay and the probability of default.

The coefficient of the aggregate indicator of 0.2464 revealed the fact that during the time observation the macroeconomic factors did influence the trend of the probability of default in a positive way.

Based on other empirical research, the probit<sup>5</sup> models have a better improvement when macroeconomic variables are introduced. The new aggregate indicator has a positive coefficient significantly different by zero, of 0.14, meaning that once the pressure of this indicator increases also the probability of default of a client increase too (Appendixes – Tables 8,9)

**Table 3**  
Analysis of Maximum Likelihood Estimates -PROBIT

Parameter	Estimate	Standard Error	Wald Chi-Square	Pr > ChiSq
Intercept	0.4091	0.4943	0.6800	0.4079
Expenses	0.0007	0.0000	221.7400	<.0001
Income	-0.0002	0.0000	261.4700	<.0001
Loan Value	0.0000	0.0000	14.2400	0.0002
Payment	0.0002	0.0001	7.0800	0.0078
Term	-0.0001	0.0000	60.4100	<.0001
Aggregate Indicator	0.1423	0.0404	12.4000	0.0004

A comparison between the regressions and neural network has been performed with and without aggregate indicator. The results obtained highlighted the importance of this macroeconomic indicator in a credit scoring model. Regarding the accuracy of detection some useful<sup>6</sup> indicators have been used for comparison. The Gini Statistic recorded the higher value for neural network with aggregate indicator incorporated and all the other indicators improved once the new variable has been introduced. The Brier Score values for the logistic regression, with aggregate indicator, are smaller comparing to the same model without having this new variable.

<sup>5</sup> Sandica Ana-Maria, Credit Scoring Modelling: A Micro–Macro Approach, Dissertation Paper, Center for Advanced Research in Finance and Banking - CARFIB in its series Advances in Economic and Financial Research - DOFIN Working Paper Series (Nr 45), 2010.

<sup>6</sup> Oestereichische Nationalbank, 2004. Guidelines on Credit Risk Management, Rating Models and Validation.

**Table 4**  
Goodness of fit statistics

MODEL	Aggregate Indicator	K-S Statistic	ROC Index	Gini Statistic	Brier Score
Logit	YES	61.51%	86.16%	72.32%	9.269%
Logit	NO	61.26%	86.24%	72.47%	9.270%
Probit	YES	61.50%	85.91%	71.82%	9.516%
Probit	NO	61.35%	86.02%	72.03%	9.518%
Neural Network	YES	63.77%	87.13%	74.26%	8.239%
Neural Network	NO	62.40%	86.59%	73.19%	8.136%

Another important aspect in credit risk models is the detection of defaulters and non-defaulters and this is expressed through sensitivity and specificity. The difference between error of Type I and error of Type II in credit risk is penalized through cost policy since a good client rejected costs less than a bad client accepted. Having a fixed cut-off of 50%, it can be observed that the bad detection increases for probit models with new variable included. For logistic models an improvement is for non-defaulters detection rate from 97.42% to 97.59% (Table 5).

**Table 5**  
Fixed cut-off results

MODEL	Aggregate Indicator	TN	FN	TP	FP	Sensitivity	Specificity	Misclassification Rate
LOGIT	YES	1173	144	155	29	51.84%	97.59%	11.53%
LOGIT	NO	1171	141	158	31	52.84%	97.42%	11.46%
PROBIT	YES	1173	146	153	29	51.17%	97.59%	11.66%
PROBIT	NO	1174	149	150	28	50.17%	97.67%	11.79%
NEURAL NETWORK	YES	1174	129	170	28	56.86%	97.67%	10.46%
NEURAL NETWORK	NO	1178	122	177	24	59.20%	98.00%	9.73%

The overall smallest misclassification rate is for neural network without the macro-economic factors but for the regression classes, the inclusion of the aggregate indicator in a probit model decreased the error rate.

In order to choose the best cut-off value we took into account the value of KS Statistics and we looked after that value that maximised this distance, meaning that at that level the higher values for sensitivity and specificity recorded. For each model we proceeded in this way and the results listed in Table 6, show that the probit model



improved its bad rate detection while the logit model improved the good rate detection and also the misclassification rate, while the neural network didn't.

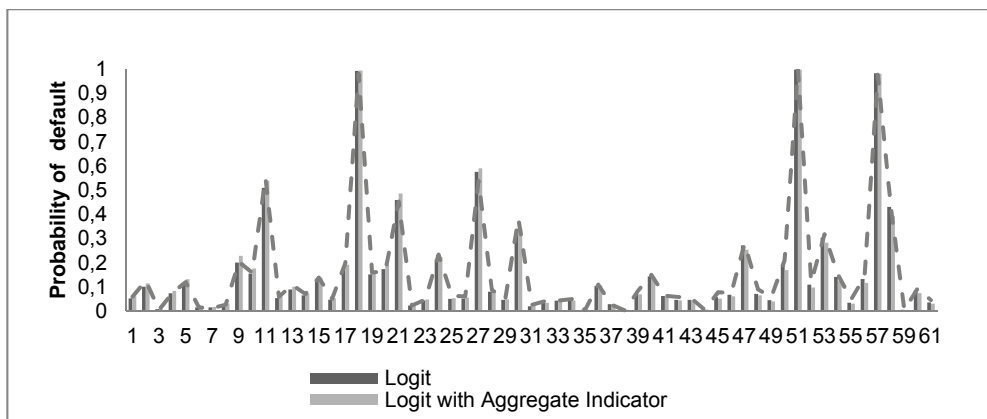
**Table 6**  
Dynamic Cut-Off Results

MODEL	Aggregate Indicator	TN	FN	TP	FP	Sensitivity	Specificity	Misclassification Rate
LOGIT	YES	1081	85	214	121	71.57%	89.93%	13.72%
LOGIT	NO	1078	85	214	124	71.57%	89.68%	13.92%
PROBIT	YES	1101	90	209	101	69.90%	91.60%	12.72%
PROBIT	NO	1059	80	219	143	73.24%	88.10%	14.86%
NEURAL NETWORK	YES	1064	74	225	138	75.25%	88.52%	14.12%
NEURAL NETWORK	NO	1144	98	201	58	67.22%	95.17%	10.39%

In the previous analysis we research if a new aggregate indicator will increase the accuracy of a credit scoring model. In order to measure the power of this new macroeconomic effect we took into consideration default sample from 2010 and observe the estimated probabilities of default with and without the new component.

The results for the logistic regression shows that the Brier Score for test sample analyzed decreased with 0.13% once the new effect has been introduced, meaning that the power of this new credit scoring model increased. For the new default cases (occurred in 2010) the error rate decreased since the probabilities of default estimated with the new model are higher comparing to the simple model (Figure 2)

**Figure 2**  
Comparison between logit and probit models



The comparison among logit with and without the macroeconomic effect and probit model revealed the fact that the smaller error rate is for probit model which improves not only the default detection ratio but also on the entire portfolio<sup>7</sup>.

## 5. CONCLUSION

The discrimination between good and bad clients is made at the approval time and the output is the acceptance or not of the client. During the lifetime of the loan it is possible that the client will default and extended researches do analyze this point in time. Having the start variables and other behavioural components the probability of a client to default could be considered as a dynamic process. The behavioural component is an aggregate indicator that captures not only the external factors but also the overdue rate of the portfolio. The macroeconomic component is given by the unemployment rate, net average income and exchange rates while the microeconomic part is realized by the portfolio behaviour in terms of delinquency rate. This last component is seen as the natural deterioration of the portfolio explained by external factor such as a macroeconomic regression, while the entire portfolio is affected.

The main conclusions of these analyses are that default rate realized has been influenced by macroeconomic factors such as unemployment rate or depreciation of national currency. The inclusion of an aggregate indicator improved the error rate for credit risk models and moreover some regression models did behave better rather than more complex models such as neural networks.

The fact that in a credit scoring model an aggregate indicator is incorporated and the results improved leads to the conclusion that in order to capture the behaviour of the entire portfolio an analysis of this aggregate indicator could be sufficient. Moreover in order to capture the migration of the clients from non-default rating classes to the default classes some threshold values could be determined. Once those figures have been crossed some signals are transmitted and risk management optimization of the accelerated overdue trend could be used.

This type of analysis could be useful if the default definition is changed, by decreasing the number of overdue days for example 30 days. Different credit scoring models and in the end different probabilities of default adjusts the risk assessment of each client and in the end mitigates the risk.

## ACKNOWLEDGEMENT

This work was cofinanced from the European Social Fund through Sectoral Operational Programme Human Resources Development 2007-2013; project number POSDRU/107/1.5/S/77213 „Ph.D. for a career in interdisciplinary economic research at the European standards” (DOCCENT).

---

<sup>7</sup> The analysis has been performed on test sample.

## REFERENCES

- Andersen, H. (2008). "Failure prediction of Norwegian banks: A logit approach", *Financial Market Department*, Norges Bank.
- Baesens, B. (2003). "Developing intelligent systems for credit scoring using machine learning techniques", Ph.D. thesis, K.U. Leuven.
- Balcaen, S. and Ooghe, H. (2004). *Alternative methodologies in studies on business failure: do they produce better results than the classical statistical methods?* Working Paper 2004/249, Faculteit Economie en Bedrijfskunde.
- Balzarotti V, Gutiérrez, M. and Vallés, G.V. (2006). "Credit Scoring models with truncated samples and their validation". National Bank of Argentina.
- Banasik, J, Crook, J.N. and Thomas, L.C. (1999). "Not if but when will borrowers default". *Journal of the Operational Research Society*.
- Banasik, J, Crook, J.N. and Thomas, L.C. (2001), "Sample selection bias in credit scoring models" In *Proceedings of the Seventh Conference on Credit Scoring and Credit Control (CSCCVII'2001)*, Edinburgh, Scotland.
- Banasik, J, Crook, J.N. and Thomas, L.C. (2003), "Sample selection bias in credit scoring models", *Journal of the Operational Research Society*, vol. 54, nº 8.
- BCBS, Basel Committee on Banking Supervision, (2005). *Studies on the Validation of Internal Rating Systems*. Working paper no. 14, Basel Committee on Banking Supervision, Feb 2005.
- Crook, J.N. y Banasik, J. (2004), "Does reject inference really improve the performance of application scoring models?". *Journal of Banking & Finance*.
- Engelmann B. and Rauhmeier, R. (2006), "The Basel II Risk Parameters", Springer.
- Kočenda, E, Vojtek, M. (2009). "Default Predictors and Credit Scoring Models for Retail Banking", Working paper, Prague.
- Komorád, K. (2002). "On Credit Scoring Estimation". Master's Thesis, Institute for Statistics and Econometrics, Humboldt University, Berlin.
- OENB (2004). *Guidelines on Credit Risk Management, Rating Models and Validation*.
- Roszbach (2003), "Bank Lending Policy, Credit Scoring and the Survival of Loans", Sveriges Riksbank.
- Thomas, D.B. Edelman, S. y Crook, J.N. (2002). "Credit Scoring and Its Applications", SIAM.

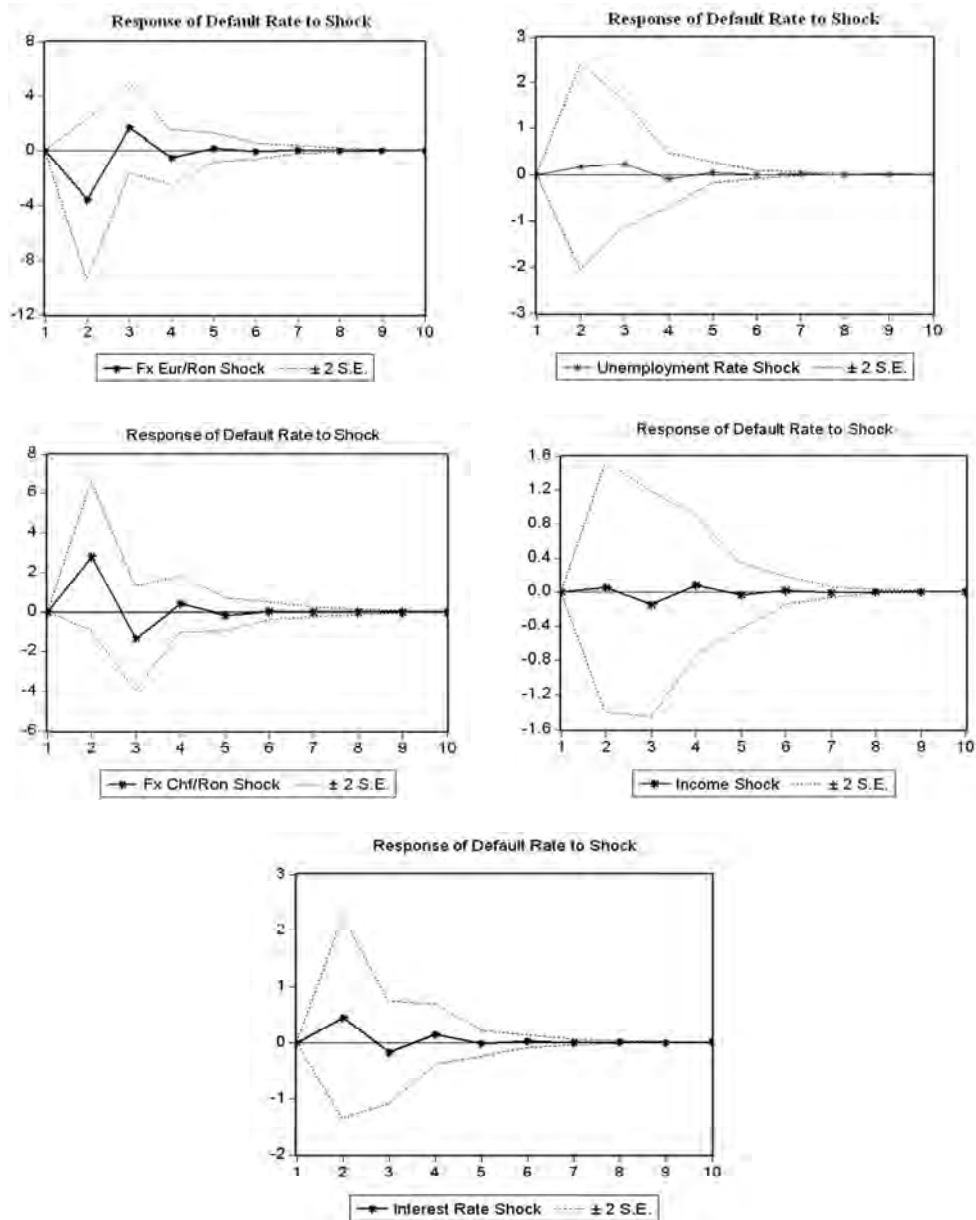
**Table 1**  
Roots of Characteristic Polynomial

<b>Root</b>	<b>Modulus</b>
0.475560 - 0.066334i	0.480164
0.475560 + 0.066334i	0.480164
-0.351555 - 0.069522i	0.358364
-0.351555 + 0.069522i	0.358364
0.019374 - 0.193672i	0.194639
0.019374 + 0.193672i	0.194639
No root lies outside the unit circle.	
VAR satisfies the stability condition.	

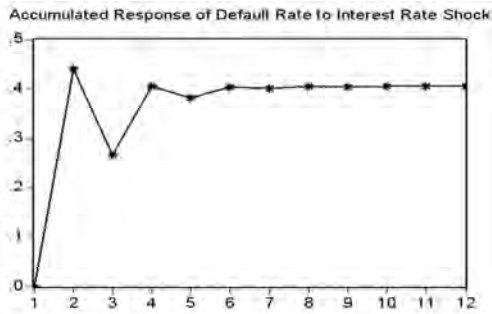
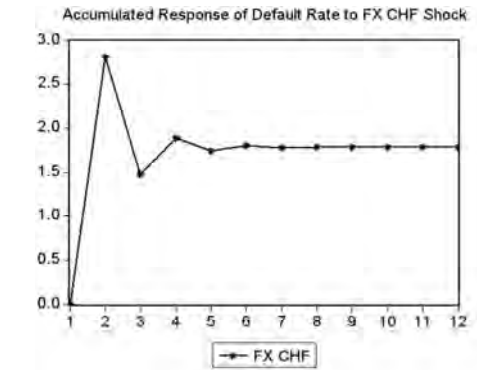
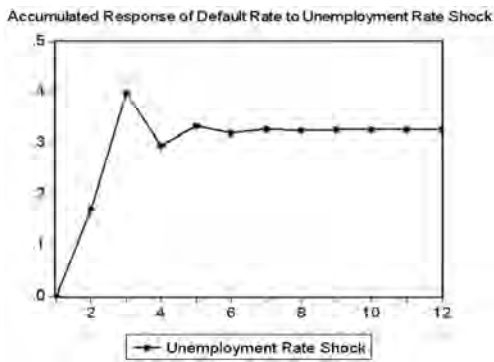
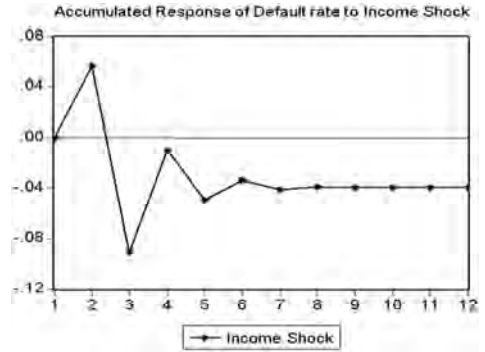
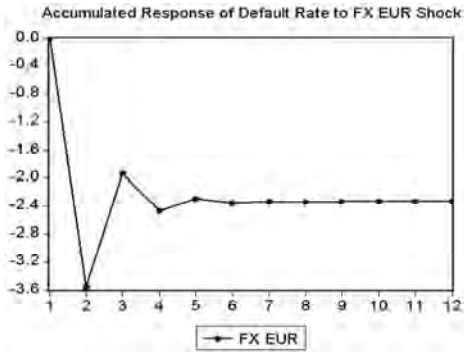
**Table 2**  
Residual Serial Correlation LM Tests

<b>VAR Residual Serial Correlation LM Tests</b>		
<b>H0: no serial correlation at lag order h</b>		
Lags	LM-Stat	Prob
1	37.74865	0.3893
2	32.77801	0.6226
3	40.58902	0.2752
4	37.33904	0.4074
5	43.07250	0.1944
6	39.08280	0.3330
Probs from chi-square with 36 df.		

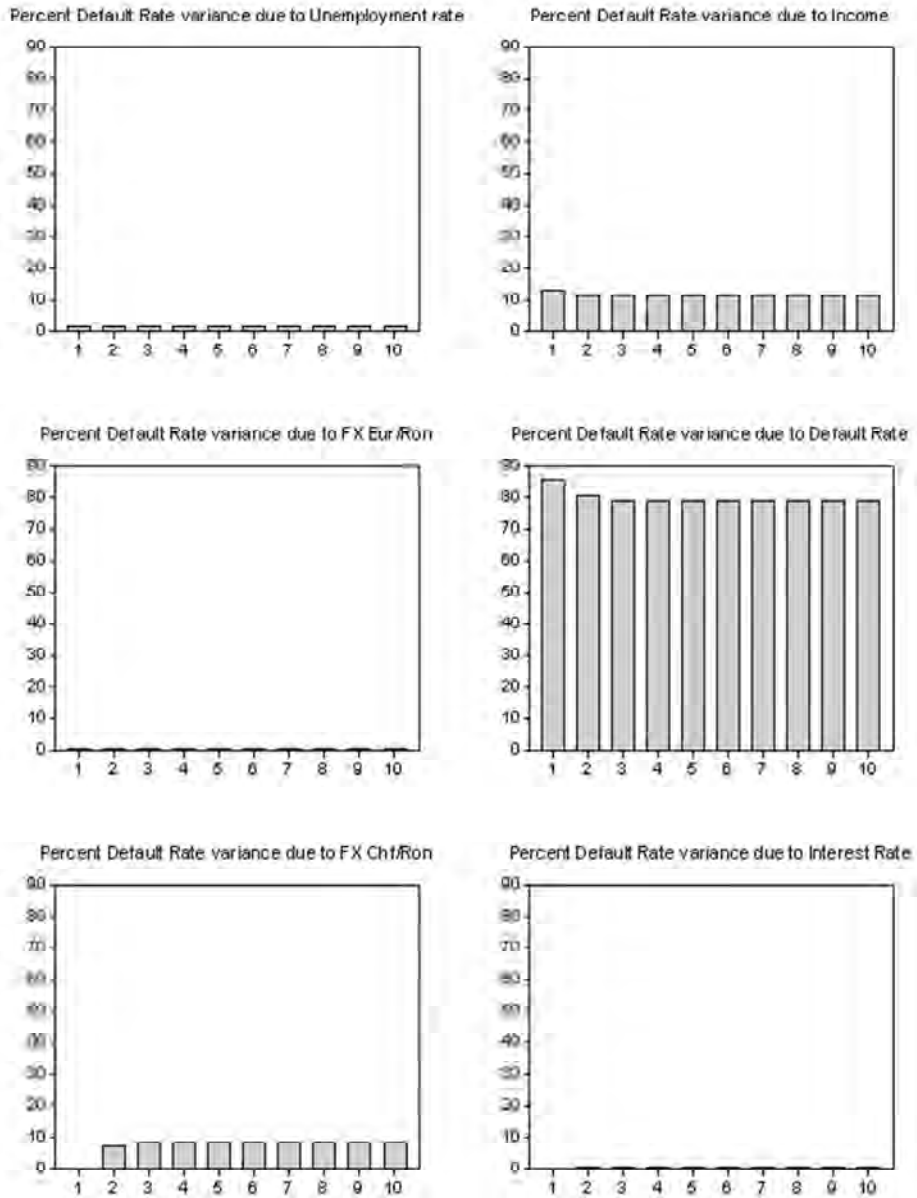
**Figure1**  
Impulse Response Analysis



**Figure 2**  
Accumulated Responses



**Figure 3**  
Variance Decomposition



**Table 3**  
The Principal Components

Component	Eigenvalue	Difference	Proportion	Cumulative
Comp1	4.47878	2.82581	0.6398	0.6398
Comp2	1.65297	1.16823	0.2361	0.876
Comp3	0.484739	0.210204	0.0692	0.9452
Comp4	0.274534	0.173337	0.0392	0.9844
Comp5	0.101197	0.095348	0.0145	0.9989
Comp6	0.005849	0.00392	0.0008	0.9997
Comp7	0.001929	.	0.0003	1

**Table 4**  
The structure of the first component principal

Variable	Comp1
CHF Overdue Rate (%)	46%
RON Overdue Rate (%)	45%
EUR Overdue Rate (%)	46%
CHF FX (CHF/RON)	43%
EUR FX(EUR/RON)	27%
Total Unemployment rate (%)	29%
Net average Income(RON)	-16%

**Table 5**  
Likelihood ratio for Logit without aggregate indicator

-2 Log Likelihood		Likelihood Ratio	DF	Pr > ChiSq
Intercept Only	Intercept & Covariates	Chi-Square		
10580.107	6909.522	3670.5858	36	<.0001



**Table 6**  
Analysis of Maximum Likelihood Estimates Logistic without aggregate indicator

Parameter	Estimate	Standard Error	Wald Chi-Square	Pr > ChiSq
Intercept	0.5111	1.5288	0.1100	0.7382
Expenses	0.0016	0.0001	212.3400	<.0001
Income	-0.0004	0.0000	262.6000	<.0001
Loan Value	0.0000	0.0000	12.6400	0.0004
Payment	0.0006	0.0002	13.5400	0.0002
Term	-0.00016	0.000021	55.57	<.0001

**Table 7**  
Likelihood ratio for Logistic with aggregate indicator

Likelihood Ratio Test for Global Null Hypothesis: BETA=0				
-2 Log Likelihood		Likelihood Ratio	DF	Pr > ChiSq
Intercept Only	Intercept & Covariates	Chi-Square		
10580.107	6898.5	3681.608	37	<.0001

**Table 8**  
Likelihood ratio for Probit without aggregate indicator

Likelihood Ratio Test for Global Null Hypothesis: BETA=0				
-2 Log Likelihood		Likelihood Ratio	DF	Pr > ChiSq
Intercept Only	Intercept & Covariates	Chi-Square		
10580.107	7038.503	3541.604	36	<.0001

**Table 9**  
Analysis of Maximum Likelihood Estimates Probit without aggregate indicator

Analysis of Maximum Likelihood Estimates				
Parameter	Estimate	Standard Error	Wald Chi-Square	Pr > ChiSq
Intercept	0.3209	0.4984	0.4100	0.5197
Expenses	0.0007	0.0000	224.0300	<.0001
Income	-0.0002	0.0000	261.6700	<.0001
Loan Value	0.0000	0.0000	13.5900	0.0002
Payment	0.0002	0.0001	7.9000	0.0049
Term	-0.0001	0.0000	57.6100	<.0001

## Ponencia 24

# MODELO DE PRIMAS AJUSTADAS AL RIESGO EN LOS SISTEMAS DE GARANTÍA DE DEPÓSITOS EUROPEOS: IMPLICACIONES PARA LA BANCA ESPAÑOLA

Pilar Gómez Fernández-Aguado y Antonio Partal Ureña

### RESUMEN

La reforma planteada por la Comisión Europea en julio de 2010 para determinar las aportaciones de las entidades de crédito a los sistemas de garantía de depósitos en función de su nivel de riesgo, modificará las cuotas que pagan actualmente. Este trabajo analiza el impacto que tendrá sobre los bancos españoles adheridos al Fondo de Garantía de Depósitos de las Entidades Bancarias (FGDEB).

Determinamos en primer lugar el perfil de riesgos de los bancos españoles, en base a los indicadores básicos y complementarios planteados en la propuesta legislativa, parámetro que condicionará las contribuciones a realizar. Evaluamos el alcance sobre las entidades adheridas al Fondo y, planteamos una alternativa para la estimación del coeficiente de riesgo del modelo que permitirá un sistema de financiación más justo y equitativo.

**Palabras Clave:** Sistemas de garantía de depósitos, financiación ajustada al riesgo, disciplina de mercado, entidades de crédito.

### 1. INTRODUCCIÓN

Desde el comienzo de la crisis financiera en 2007, las autoridades nacionales e instituciones internacionales<sup>1</sup> desarrollaron iniciativas encaminadas a proponer medidas y cambios que reforzasen el sistema financiero internacional<sup>2</sup>. Culminan-

---

<sup>1</sup> El Foro Estabilidad Financiera, a instancia de los ministros del G7 y los Gobernadores de los Bancos Centrales en octubre de 2007, coordinó gran cantidad de trabajo y aportaciones desarrollado por los principales organismos internacionales (BCBS, IOSCO, IAIS, IASB, CPSS, CSFM, FMI y BPI) y autoridades nacionales de los principales centros financieros.

<sup>2</sup> El Foro de Estabilidad Financiera propuso una serie de acciones concretas agrupadas en cinco áreas: fortalecer la supervisión de capital, liquidez y gestión de riesgos, aumentar la transparencia y valoración,

do con la publicación de un nuevo acuerdo para fortalecer la regulación financiera, conocido como Basilea III<sup>3</sup>. La nueva norma financiera cambiará considerablemente el escenario actual, centrada fundamentalmente en la necesidad de incrementar el capital y mejorar su calidad como exigencia a las entidades, el objetivo no es otro que aumentar la capacidad para absorber pérdidas, y establecer mayores requerimientos en la actividad de negociación junto a medidas que eviten o atenuen la prociclicidad, favoreciendo una mayor estabilidad financiera.

El nuevo paradigma de la actividad bancaria, centrada en controlar y gestionar los riesgos de forma global determinará la solidez del sistema financiero, llevando a la posible desaparición de aquellas entidades que no se adapten. La necesidad de gestionar en base al riesgo es la piedra angular sobre la que gira toda la normativa emanada y en proceso de las instituciones financieras internacionales, en este sentido la aplicación de primas variables en las aportaciones a los fondos de garantía según el nivel de riesgos de cada entidad es un paso más en esa dirección. Aquellas instituciones con mayor volumen de riesgos, que tienen más probabilidad de quiebra, deben aportar más, en lugar de una cantidad fija que penalizaría a las entidades mejor gestionadas.

El papel fundamental atribuido al seguro de depósitos es estabilizar el sistema financiero en caso de quiebra bancaria, avalando a los depositantes el acceso a sus fondos asegurados. Esta seguridad reduce la posibilidad de una retirada masiva de dinero o situaciones de pánico bancario, que afectarían tanto a bancos sólidos como en dificultades y la consiguiente crisis sistémica, sin olvidar, que los sistemas de garantía suelen llevar a cabo medidas que permiten un proceso ordenado de gestión en caso de insolvencias bancarias, contribuyendo a limitar el coste de la crisis. En momentos de mayor volatilidad en los mercados, las ventajas que aporta el seguro de depósitos para la estabilidad del sistema son evidentes, aunque su funcionamiento no está exento de riesgos e incentivos perversos en la conducta de los depositantes y entidades aseguradas (riesgo moral, selección adversa, subsidio transversal, entre otros). Garantizar la estabilidad financiera, minimizando los riesgos implícitos, es uno de los mayores retos a los que se enfrentan las autoridades monetarias para la reforma de los sistemas de garantía de depósitos (SGD). En esa línea, los Principios Básicos para la implantación de seguros de depósitos efectivos, desarrollados por el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea y la Asociación Internacional de Aseguradores de Depósitos (BCBS/IADI, 2009 y 2010), además de las propuestas de reforma planteadas por

---

cambiar el papel y usos de las calificaciones crediticias, incrementar la capacidad de respuestas de las autoridades a los riesgos y realizar acuerdos robustos para tratar la tensión en el sistema financiero.

<sup>3</sup> En julio de 2010, el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea acuerda llevar a cabo una serie de medidas para fortalecer la regulación, supervisión y gestión de riesgos del sector bancario, como respuesta a la crisis financiera internacional. Estas medidas recogidas en el informe "A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems" de diciembre de 2010 y conocidas como Basilea III persiguen: mejorar la capacidad del sector bancario para afrontar perturbaciones ocasionadas por tensiones financieras o económicas; mejorar la gestión de riesgos y el buen gobierno en los bancos y; reforzar la transparencia y divulgación de información en el sector.

la Comisión Europea (2009 y 2010), como una solución más a futuras crisis, representan un paso adelante que define los sistemas de garantía del futuro.

La finalidad de este trabajo es determinar el impacto que tendría sobre las aportaciones de los bancos españoles adheridos al Fondo de Garantía de Depósitos (FGDEB) la propuesta legislativa de la Comisión de julio de 2010 para el cálculo de las contribuciones a realizar por las entidades de crédito a los SGD en función de sus perfiles de riesgo, además aportamos una alternativa para modificar el modelo formulado con el fin de que éste sea más justo y equitativo para el sistema.

El documento está estructurado de la siguiente manera. La sección 2 describe la situación de los sistemas de garantía de depósitos en la actualidad. Sección 3 desarrolla la reforma de los sistemas de financiación en SGD europeos. La sección 4 describe el modelo de contribuciones ajustadas al riesgo para los SGD planteado por la Comisión Europea (2010). En la sección 5 se analiza el impacto de la aplicación del sistema propuesto, estudiando en primer lugar el perfil de riesgo de los bancos españoles, y el efecto del mismo sobre las contribuciones actuales, además de plantear una propuesta alternativa para estimación del riesgo en el modelo. Sección 6 concluye.

## **2. PANORAMA ACTUAL DE LOS SGD**

Los sistemas de garantía de depósitos, en su función de promover la estabilidad financiera, otorgan protección a los ahorradores con poca capacidad para efectuar el control y seguimiento de las actividades desarrolladas por las entidades. En la medida que los depositantes se sienten protegidos, disminuye la posibilidad de episodios de pánico que provocarían una retirada masiva de fondos, haciendo peligrar la estabilidad del sistema. Por contra, es una realidad generalmente admitida que esta protección reduce el papel de la disciplina emanada del mercado y genera incentivos perversos, alterando la conducta de depositantes y entidades aseguradas.

La empatía protectora provoca que los ahorradores no necesiten elegir entre las distintas entidades en función de su nivel de solvencia, ni exigirles una prima adicional por riesgo en la rentabilidad de sus depósitos. En este contexto, las entidades aseguradas no se sienten amenazadas por un posible encarecimiento del coste financiero de los depósitos como consecuencia del riesgo asumido, y pueden disponer de recursos a coste inferior al que deberían satisfacer en ausencia del seguro de depósitos, realidad que promueve la asunción de riesgos en busca de una mayor rentabilidad. Bajo este amparo, las entidades trasladan el riesgo de sus actividades al asegurador, a los depositantes y al sistema en general, generando un problema conocido como riesgo moral<sup>4</sup>. El trabajo de Ioannidou y Penas

---

<sup>4</sup> Riesgo moral es un término utilizado por los economistas para referirse a todo elemento (por ejemplo un seguro o subsidio público) que fomenta un comportamiento arriesgado, llevando a los agentes que asumen un riesgo financiero a creer que obtendrán los beneficios de las inversiones arriesgadas que hagan, quedando al mismo tiempo protegidos contra las pérdidas.

(2010) pone de manifiesto un aumento de riesgo moral de las entidades tras la implantación del seguro de depósitos en Bolivia, incrementando la concesión de créditos a prestatarios de baja calidad crediticia y disminuyendo la disciplina de mercado en los grandes depositantes. El estudio de Demirgüç-Kunt y Servén (2010), evidencia igualmente como la protección otorgada por el seguro de depósitos perjudica la disciplina de mercado, sobre todo en las entidades insolventes.

Esta anomalía en el funcionamiento y comportamiento de los mecanismos aseguradores, impulsa a los depositantes a colocar sus ahorros en las entidades que ofrecen mayor retribución sin entrar a considerar la mayor o menor solvencia de las mismas, fomentando así el desplazamiento de los depósitos de las entidades más seguras a las entidades más arriesgadas y generando un problema de selección adversa.

Otro aspecto no exento de inconvenientes para el desarrollo de una adecuada disciplina de mercado, es la financiación de los SGD. La manera de proceder en muchos países, entre ellos España, de financiar los sistemas de garantía con aportaciones independientes del riesgo asumido por la entidad, fomenta malas prácticas. La inexistente relación entre el coste del seguro de depósitos y los riesgos asumidos supone una injusta penalización para las entidades eficientes en su gestión del riesgo, al consentir que las más solventes estén obligadas a pagar en exceso mientras otras aportan una cuantía insuficiente, generando un problema de subsidio transversal. Esta falta de equidad bancaria agrava el problema de riesgo moral, e incentiva a las entidades que llevan a cabo una gestión prudente de sus riesgos a descuidar la efectiva administración de las contingencias.

La gravedad y complejidad de la crisis financiera manifestada a raíz del segmento *subprime* del mercado hipotecario norteamericano, evidenció la necesidad de consolidar mecanismos para lograr mayor solidez, transparencia y confianza en el sistema financiero internacional. Además, la celeridad y urgencia en adoptar medidas por el rápido desarrollo de los acontecimientos provocó, prácticamente desde el inicio, que el Consejo de Estabilidad Financiera (antes Foro de Estabilidad Financiera), encargado en última instancia de arbitrar y coordinar los medios para solucionar la extrema situación, emitiera las líneas fundamentales sobre las que debería basarse la construcción de un nuevo paradigma de actuación del sistema financiero internacional. Entre las medidas para avanzar más decididamente en la gestión de crisis, el Consejo de Estabilidad Financiera recogía en su informe “*On enhancing market and institutional resilience*” de 2008, que algunos acontecimientos durante la reciente agitación financiera internacional revelaban la importancia de procedimientos efectivos para compensar al depositante, y resaltó la necesidad de construir acuerdos entre las autoridades sobre un conjunto de principios internacionales que contribuyeran a mejorar la eficacia de los sistemas de seguro de depósitos. A nivel internacional existe un consenso en la conveniencia de establecer sistemas de financiación basados en medidas de riesgo para mejorar la eficacia de los seguros de depósitos. Un sistema de estas características permitiría, en primer lugar, cuantificar de forma más precisa las necesidades de patrimonio y los niveles de solvencia del fondo, asegurando la capacidad del sistema para cumplir con sus objetivos y, definir contri-

buciones más justas sobre la base del riesgo de cada entidad asegurada, contribuyendo a una mayor disciplina de mercado.

De acuerdo con este llamamiento, el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea y la Asociación Internacional de Aseguradores de Depósitos (BCBS/IADI, 2009 y 2010) han desarrollado los *Principios Básicos para sistemas de seguros de depósitos eficaces*. Se presentan como un esquema voluntario que guíe a las autoridades monetarias en la implantación o modificación de los SGD, teniendo en cuenta las diferentes características en el nivel de desarrollo económico, político y cultural de los distintos países.

La Directiva 2009/14/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 11 de marzo de 2009, por la que se modifica la Directiva 94/19/CE relativa a los sistemas de garantía de depósitos, en lo que respecta al nivel de cobertura y al plazo de pago, ordenaba a la Comisión que, si procedía, presentara propuestas de modificación de la Directiva 94/19/CE. Esto abarca la armonización de los mecanismos de financiación de los sistemas de garantía de depósitos, posibles modelos para fijar las contribuciones en función del nivel de riesgo, los beneficios y costes de la posible introducción de un sistema de garantía de depósitos a nivel de la Unión, las repercusiones de las distintas normativas en materia de compensaciones sobre la eficiencia del sistemas y las armonización del alcance de los productos y depositantes cubiertos.

El 12 de julio de 2010, la Comisión adoptó una propuesta legislativa para una profunda revisión de la Directiva 94/19/CE que incorpora reformas sustanciales en la armonización de los depósitos protegidos y los sistemas de financiación de los seguros.

### **3. DESARROLLO DE LA REFORMA DE LOS SISTEMAS DE FINANCIACIÓN EN LOS SGD EUROPEOS**

Actualmente, coexisten en el ámbito europeo mecanismos de financiación ex-ante, ex-post y mixtos. La financiación ex-ante requiere la constitución anticipada y el mantenimiento de un fondo a partir de las aportaciones realizadas por sus miembros con el que hacer frente a los pagos derivados del seguro ante la quiebra de una entidad adherida. En los sistemas de financiación ex-post, los fondos para pagar los reclamos al seguro son aportados por las entidades miembros cuando se produce la quiebra. Los sistemas de financiación híbridos o mixtos son una combinación de los anteriores, donde el fondo se nutre de aportaciones periódicas y de aportaciones extraordinarias cuando se produce la contingencia.

La Comisión Europea (2006) sometió a consulta la posibilidad de homogenizar el marco existente con la implantación única de sistemas ex-ante. Los países partidarios de esta iniciativa, alegaban que estas diferencias ponen en duda la capacidad de actuación transfronteriza ante situaciones de crisis; falseando la competencia,

al proporcionar ventajas indebidas a los bancos que operan en el marco de sistemas que soportan menos costes, suponiendo un obstáculo para aquellos bancos que desean concentrar sus actividades al amparo del Estatuto de la Sociedad Europea. Aquellos que se han pronunciado en contra de introducir cambios, argumentan fundamentalmente los elevados costes que implicaría la transición para los Estados miembros con sistemas ex-post hacia la financiación ex-ante. A su juicio, el sistema funciona relativamente bien en las condiciones vigentes y es adecuado a efectos de supervisión, consideran que no falsea la competencia entre mercados, pues los problemas de concentración transfronteriza sólo afectarían a un número limitado de entidades y no justifica la introducción de cambios en este sentido.

Si bien, algunas de las opiniones expresadas parecen decantarse hacia el mantenimiento del *statu quo*, evitando las onerosas inversiones necesarias, la Comisión considera fundamental intensificar la integración financiera transfronteriza en Europa, ante el riesgo de un elevado coste a largo plazo por no alcanzar una armonización suficiente en las redes de seguridad, impidiendo un funcionamiento adecuado en el caso de una situación de crisis de alcance transfronterizo. Los costes que acarrearía en términos económicos y deterioro de la confianza en el mercado financiero único podrían, en última instancia, resultar mucho mayores que el nivel de inversión necesario para asegurar el funcionamiento satisfactorio de la red de seguridad pan europea. El informe *Scenario Analysis: Estimating the effects of changing the funding mechanisms of EU Deposit Guarantee Schemes* realizado por la Comisión (2007), estimó que el coste de la armonización de los mecanismos de financiación oscilaría entre 2.500 y 4.300 millones de euros, en un plazo de 10 años para los países que actualmente se financian ex-post.

La Comisión, conforme a su plan de mejora del marco legislativo de los SGD, pretende ir más allá de la simple implantación de sistemas de financiación ex-ante, estableciendo aportaciones en función del perfil de riesgo de la entidad. Si bien la Directiva 94/19/CE autoriza la introducción de elementos basados en el riesgo<sup>5</sup>, una armonización exigiría claramente modificarla, algo que por su complejidad no se presenta como un proyecto a corto plazo, siendo necesario estudiar la situación actual y el impacto de la reforma. Con esta línea de actuación, presentó en junio de 2008 el informe *Risk-based contributions in EU Deposit Guarantee Schemes: current practices*, donde se describen los distintos modelos de contribución en base al riesgo aplicados por Alemania, Francia, Italia, Portugal, Finlandia y Suecia, siendo utilizado para sustentar el informe *Possible models for risk-based contributions to EU Deposit Guarantee Schemes* de junio de 2009, en el que proponen tres modelos

---

<sup>5</sup> En los SGD europeos que emplean modelos de financiación ajustados al riesgo (Alemania, Francia, Italia, Portugal, Finlandia y Suecia), la contribución anual de las entidades adheridas generalmente se establece en función de la base de cotización o total de depósitos elegibles o cubiertos, un coeficiente representativo del perfil de riesgo de la entidad. El perfil de riesgo es evaluado a través de diferentes indicadores financieros que determinan el grado de solvencia, exposición al riesgo y rentabilidad de la entidad. En función de la evaluación obtenida, las entidades son clasificadas en categorías de riesgo y asociadas a un coeficiente de ponderación de riesgo.

diferentes para el cálculo de las contribuciones: Modelo de indicador único<sup>6</sup>, Modelo de indicadores múltiples<sup>7</sup> y Modelo de riesgo de impago<sup>8</sup>. Los dos primeros modelos emplean información contable y el tercero además, información de mercado.

En julio de 2010, la Comisión presenta en la propuesta legislativa para la modificación de la Directiva 94/19/CE un método de cálculo de las contribuciones a realizar por las entidades de crédito a los SGD en función de sus perfiles de riesgo. El método está respaldado por los estudios e informes previos de 2008 y 2009, y refleja la tendencia adoptada en varios Estados miembros. La propuesta constituye un incentivo para la gestión de riesgos sensata y un disuasivo para la propensión al riesgo, ya que establece una distinción clara entre el nivel de contribución de los bancos con un menor o mayor riesgo (oscilando entre 75% y el 200% de la cantidad estándar, respectivamente).

#### **4. MODELO DE CONTRIBUCIONES AJUSTADAS AL RIESGO PARA LOS SGD EUROPEOS**

En el modelo propuesto por la Comisión Europea (2010), el importe total de contribuciones que pretende recaudar el SGD será definido a priori en función del nivel objetivo de fondos y, posteriormente, repartido entre las entidades adheridas según el nivel de riesgo de cada una. El importe de la contribución ajustada al riesgo de un miembro ( $C_i$ ), estará determinado por el producto del importe total de las contribuciones a recaudar ( $TC$ ), y un coeficiente representativo del perfil de riesgo de la entidad ( $RS_i$ ):

$$C_i = TC \cdot RS_i$$

El coeficiente  $RS_i$  representa la cuota de riesgo de la entidad, calculada en términos de porcentaje, resultado del cociente entre la contribución del  $i$ -ésimo miembro

---

<sup>6</sup> El modelo de indicador único utiliza para establecer la diferenciación del riesgo y consecuentemente las contribuciones a realizar al seguro, el ratio de capital propuesto por Basilea II. Diferentes estudios en el ámbito académico corroboran la adecuación de utilizar la ratio de capital o algunos de los métodos establecidos en Basilea II para medir el riesgo a fin de establecer un sistema de primas variables objetivo y consistente (Sironi y Zazzara, 2004; Lee, 2008; Gilman, 2009, entre otros).

<sup>7</sup> En el modelo de indicadores múltiples, el coeficiente de ajuste estaría determinado por cuatro indicadores correspondientes a las áreas que comúnmente son utilizadas para evaluar la solidez financiera de un banco: adecuación de capital, calidad de activos, rentabilidad y liquidez. Actualmente, el FEDIC (*Federal Deposit Insurance Corporation*) emplea un sistema de indicador múltiple basado en sistema de calificación CAMELS.

<sup>8</sup> El modelo de riesgo de impago, está basado en la teoría de valoración de opciones propuesta por Merton (1977), estableciendo una analogía entre el seguro de depósitos y una opción de venta para establecer la probabilidad de impago. El contrato de garantía de depósitos se considera una emisión por parte del sistema de garantía de un derecho de venta a favor de los depositantes sobre los activos bancarios, a un precio de ejercicio igual al valor de los depósitos más los intereses. Esta línea de investigación iniciada hace varios años, ha vuelto a cobrar importancia de nuevo con los trabajos de Madan y Pennacchi, 2003; Campos, et. al., 2007; Hwang, et. al., 2009, entre otros.



y el importe total de las contribuciones al sistema, ponderadas siempre en función del riesgo:

$$RS_i = \frac{RA_i}{\sum_{j=1}^n RA_j}$$

El importe ponderado en función del riesgo para cada entidad ( $RA_i$ ) es fijado por el producto entre el coeficiente de riesgo de la entidad ( $\beta_i$ ) y la exposición al riesgo ( $CB_i$ ) (depósitos elegibles o cubiertos que son la base de contribución):

$$RA_i = CB_i \cdot \beta_i$$

Respecto al coeficiente de riesgo ( $\beta_i$ ), se determina en función de la puntuación compuesta de riesgo ( $\rho_i$ ) obtenida por cada miembro, y puede variar entre un 75% para entidades con riesgo mínimo y el 200% para entidades con riesgo extremo. De este modo, aquellas con un grado de riesgo por encima de la media pueden ser penalizadas hasta con el doble de aportaciones, mientras las que tenga un perfil de riesgo por debajo, pueden disminuir su contribución hasta el 25%.

La puntuación compuesta de riesgo ( $\rho_i$ ) se calcula en base a un conjunto de indicadores propuestos que cubren las categorías de riesgos más importantes y, generalmente utilizados para reflejar el perfil de riesgo de cada entidad de crédito y evaluar la solvencia de las mismas: adecuación de capital, calidad de los activos, rentabilidad y liquidez. En este sentido se establecen dos grupos de indicadores: básicos y complementarios, con una ponderación en la puntuación compuesta del 75% y 25%, respectivamente. Los indicadores básicos serán fijados por la Comisión Europea y aplicados a todos los SGD europeos (tabla 1). Mientras, los Estados miembros serán los que establezcan qué indicadores complementarios deberán aplicar los SGD en su jurisdicción, a este efecto pueden elegir algunos de los indicadores propuesto por la Comisión que aparecen en la tabla 2.

Algunos aspectos metodológicos de la propuesta aún no están totalmente especificados (fundamentalmente en lo que respecta al procedimiento para la asignación de las puntuaciones por riesgo de los indicadores complementarios y el indicador básico de liquidez), todo indica que a más tardar el 31 de diciembre de 2012, la Autoridad Bancaria Europea emita las orientaciones necesarias para completar la metodología.

**Tabla 1**  
Indicadores de riesgo básicos.

Categoría de riesgo	Indicador	Ratio
Adecuación de capital	Ratio de capital (normativa BIS)	$AC1 = \frac{\text{Fondos Propios}}{\text{Activos Ponderados por riesgo}}$
Calidad de los activos	Ratio de morosidad	$CA1 = \frac{\text{Activos dudosos}}{\text{Inversión crediticia}}$
Rentabilidad	Ratio de rentabilidad del activo	$R1 = \frac{\text{Beneficio neto}}{\text{Activo total medio}}$
Liquidez	A determinar por los Estados miembros.	

Fuente: European Commission (2010).

**Tabla 2**  
Indicadores de riesgo complementarios.

Categoría de riesgo	Indicador	Ratio
Adecuación de capital	Ratio Tier 1	$AC2 = \frac{\text{Capital Tier 1}}{\text{Activos Ponderados por riesgo}}$
	Ratio de Capital excedentario	$AC3 = \frac{\text{Capital excedentario}}{\text{Activo Total}}$
		$AC4 = \frac{\text{Capital excedentario}}{\text{Activos ponderados en función del riesgo}}$
Calidad de los activos	Ratio de activos ponderados en función del riesgo	$CA2 = \frac{\text{Activos ponderados en función del riesgo}}{\text{Activo total}}$
	Ratio de provisión para préstamos incobrables	$CA3 = \frac{\text{Provisión para préstamos incobrables}}{\text{Ingresos netos por intereses}}$
		$CA4 = \frac{\text{Provisión para préstamos incobrables}}{\text{Ingresos de explotación}}$
Rentabilidad	Ratio costes-ingresos	$R2 = \frac{\text{Gastos de explotación}}{\text{Ingresos de explotación}}$
	Margen neto	$R3 = \frac{\text{Margen neto}}{\text{Capital Total}}$
Liquidez	A determinar por los Estados miembros.	

Fuente: European Commission (2010).

## 5. ESTUDIO DEL IMPACTO DE LA APLICACIÓN DE UN SISTEMA DE FINANCIACIÓN BASADO EN EL RIESGO PARA EL FGDEB

Nuestro objetivo es estimar el impacto que tendría aplicar al Fondo de Garantía de Depósitos de las Entidades Bancarias en España, el modelo de reforma propuesto

por la Comisión Europea (2010) para el régimen de financiación de los Sistemas de Garantía de Depósitos en Europa; analizando en primer lugar el perfil de riesgo actual de los bancos adheridos al FGDEB y, posteriormente, cuantificar el efecto sobre el sistema de financiación actual la implantación de contribuciones ajustadas al riesgo, considerando a este respecto dos escenarios, en primer lugar, el efecto de la nueva propuesta sobre los bancos, y un segundo escenario donde proponemos una transformación lineal para estimar el coeficiente de riesgo en función de la puntuación compuesta, al considerar que de esta forma se obtendría un sistema de contribuciones más justo y equitativo.

La muestra utilizada está compuesta por 33 bancos del total actualmente adheridos al FGDEB (ver anexo I). La información financiera empleada en el análisis procede de informes financieros públicos (cuentas anuales, memorias e informes con relevancia prudencial). El año al que se ha referenciado el estudio es 2009<sup>9</sup>, para este período solo ha sido posible obtener la información financiera completa de 33 entidades del total de 72 adheridas al FGDEB en ese año, limitándose por tanto el análisis a ese grupo. No obstante, la muestra es suficientemente representativa del conjunto, pues suponen el 94% del volumen de activo total de la población y el 97% respecto al volumen de depósitos con la clientela.

Los indicadores de riesgo utilizados han sido seleccionados entre los propuestos por la Comisión (tablas 2 y 3), concretamente, los indicadores básicos: ratio de capital (AC1), ratio de morosidad (CA2) y ratio de rentabilidad del activo (R1); y los indicadores complementarios: ratio Tier 1 (AC2), ratio de activos ponderados en función del riesgo (CA2) y ratio costes-ingresos (R2). En relación a los indicadores de liquidez, la Comisión establece que sean los Estados miembros quienes los determinen, por este motivo para la realización del estudio hemos considerado como indicador básico, la ratio de liquidez inmediata ( $L1 = \text{Activos Líquidos}^{10}/\text{Depósitos de la clientela}$ ) y como indicador complementario, la ratio de liquidez estructural ( $L2 = \text{Crédito a la clientela}/\text{Depósitos de la clientela}$ ).

## 5.1. Análisis del perfil de riesgo de los bancos adheridos al FGDEB

Realizamos en primer lugar el análisis del perfil de riesgo de los bancos adheridos al FGDEB a nivel univariante, considerando los indicadores de riesgo de forma individual, y a continuación multivariante, teniendo en cuenta el efecto conjunto de los indicadores. El análisis univariante tiene por objeto determinar en qué áreas de evaluación del riesgo (adecuación de capital, calidad de los activos, rentabilidad o liquidez), los bancos presentan un mayor grado de vulnerabilidad, y consecuentemente qué indicadores provocarían una mayor variabilidad en la determinación de

---

<sup>9</sup> Al finalizar el estudio, la mayoría de los bancos no tenían publicados sus informes económicos-financieros correspondientes a 2010.

<sup>10</sup> Los Activos Líquidos comprenden los siguientes conceptos: Caja y depósitos en bancos centrales, Depósitos en entidades de crédito, Valores representativos de deuda e instrumentos de capital disponibles para la venta.

la contribución ajustada al riesgo. El análisis multivariante nos permitirá determinar cuál es el perfil global de riesgo y el efecto de éste sobre las contribuciones a realizar por cada banco bajo el nuevo sistema.

La medición del nivel de riesgo respecto a los indicadores básicos (excepto el indicador de liquidez) se realiza con la escala de valores establecida por la Comisión Europea (2010) para las puntuaciones obtenidas en cada indicador (véase anexo II tablas 1 y 2). Para los indicadores complementarios, así como para el indicador de liquidez básico, la Comisión no establece una escala estándar de puntuaciones, dejando a discreción de los SGD en cada país su propuesta, motivo por el que procedemos a realizar el análisis definiendo los umbrales de clasificación en función de los percentiles de la distribución de valores de cada indicador complementario en la muestra<sup>11</sup> (véase anexo II, tabla 3).

La tabla 4 muestra el perfil de riesgo por indicador en cada una de las cuatro áreas de evaluación establecidas (adecuación de capital, calidad de los activos, rentabilidad y liquidez) y el perfil de riesgo global, diferenciando cinco niveles de riesgo (extremo, alto, medio, bajo y muy bajo).

**Tabla 4**

Distribución del perfil de riesgo de los establecimientos bancarios adheridos al FGDEB

Nivel de riesgo	Indicadores Básicos				Indicadores Complementarios				Global
	AC1	CA1	R1	L1	AC2	CA2	R2	L2	
Extremo	0,0%	21,2%	57,6%	21,2%	12,1%	21,2%	21,2%	21,2%	0,0%
Alto	0,0%	33,3%	18,2%	21,2%	15,2%	18,2%	18,2%	18,2%	15,2%
Medio	0,0%	27,3%	12,1%	18,2%	15,2%	18,2%	18,2%	21,2%	60,6%
Bajo	45,5%	12,1%	6,1%	18,2%	18,2%	18,2%	21,2%	18,2%	24,2%
Mínimo	54,5%	6,1%	6,1%	21,2%	39,4%	24,2%	21,2%	21,2%	0,0%

### **Perfil de riesgo según los indicadores básicos**

Al ser las puntuaciones por riesgo en los indicadores básicos (a excepción del indicador de liquidez) comunes para todos los Estados miembros, los resultados obtenidos ponen de manifiesto cual es la posición de riesgo de la banca española respecto a la europea.

<sup>11</sup> La Comisión en el informe *Possible models for risk-based contributions to EU Deposit Guarantee Schemes* de junio de 2009 utiliza este procedimiento para estimar la puntuación por riesgo asignada a cada indicador tanto para el Modelo de indicador único como en el Modelo de indicadores múltiples.

La ratio de solvencia (AC1) valora la adecuación de capital, relacionando los fondos disponibles que posee la entidad para absorber pérdidas inesperadas y evitar crisis con la seguridad deseada, con los activos ponderados por riesgo (riesgo de crédito, riesgo de mercado y riesgo operacional)<sup>12</sup>, el perfil de riesgo determinado por este indicador es el que más favorece a la banca española, encontrándose todas las entidades en un nivel bajo o mínimo respecto al estándar europeo. En el otro extremo, la ratio con peores cotas es el de rentabilidad del activo (R1), donde más del 75% de los bancos presentan un riesgo alto o elevado. Respecto a los otros dos indicadores, la ratio de morosidad (CA1), y la ratio de liquidez inmediata (L1), muestran en ambos casos, perfiles de riesgos de las entidades situados en niveles alto y extremo para la mitad de las entidades, más evidente en la ratio de morosidad.

Los resultados obtenidos manifiestan que la banca española presenta niveles adecuados de solvencia, pero un nivel de riesgo por encima del estándar europeo en morosidad y rentabilidad.

### ***Perfil de riesgo según los indicadores complementarios***

En los indicadores complementarios, la puntuación por riesgo es definida sobre la base de la distribución de valores de cada indicador en la muestra, por tanto, las conclusiones que pueden extraerse son respecto a cómo se estructura el riesgo en la banca española. Los resultados reflejan una distribución más uniforme entre las diferentes categorías de riesgo, siendo la ratio Tier 1 (AC2) la que arroja mejores niveles de riesgo, no obstante, el 37% estarían situadas en valores alto o extremo, si bien, con los otros indicadores, la ratio de activos ponderados por riesgo (CA2), la relación entre gastos e ingresos de explotación (R2) y la ratio de liquidez estructural (L2), el perfil de riesgo estaría situado en niveles elevados en el 40% de los casos.

### ***Perfil de riesgo a nivel global***

Cuando se realiza el análisis de forma global, la dispersión en los extremos desaparece, no encontrándose ninguna entidad en situación de riesgo extremo o mínimo, en este caso, solo el 15,2% de los bancos muestran un perfil de riesgo alto, mientras que el resto en su mayoría están situados en un nivel medio (60,6%) y bajo (24,2%).

## **5.2. Análisis del impacto del sistema de financiación ajustado al riesgo**

Para evaluar el impacto de la aplicación del modelo de financiación ajustado al riesgo en el FGDEB, comparamos las estimaciones de las contribuciones ajusta-

---

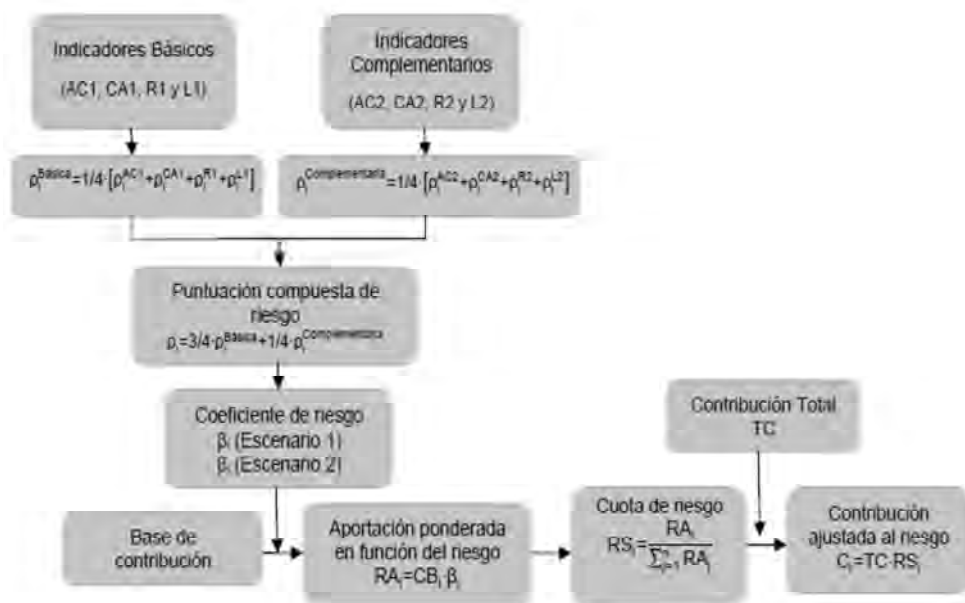
<sup>12</sup> El Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (2006) establece que el valor de la ratio debe ser superior al 8%.

das al riesgo con las contribuciones actuales, calculando el porcentaje de cambio relativo:

$$\% \text{ Cambio en la contribución} = \frac{\text{Contribución ajustada al riesgo} - \text{Contribución actual}}{\text{Contribución actual}} \times 100$$

La contribución actual hace referencia a la aportación realizada al FGDEB por las entidades de la muestra en el ejercicio 2009, equivalente al 0,6‰ de los depósitos garantizados según el art. art. 3 y 4 del RD 2606/1996, de 20 diciembre. El proceso metodológico para la estimación de las contribuciones ajustadas al riesgo se ilustra en la figura 1.

**Figura 1**  
Metodología para el cálculo de las contribuciones ajustadas al riesgo



Teniendo en cuenta que actualmente el modelo propuesto por la Comisión (2010) no está totalmente desarrollado en algunos aspectos, es necesario considerar algunas hipótesis de partida que permitan estimar las contribuciones ajustadas al riesgo:

1. El importe total de las contribuciones recaudadas (TC), es igual a la suma de las aportaciones realizadas por los establecimientos bancarios de la muestra en el año 2009 y posteriormente repartida según la cuota de riesgo de cada miembro. Este supuesto facilita la comparación entre los dos sistemas de financiación.

2. La base de contribución o exposición al riesgo de cada establecimiento bancario equivale a los depósitos garantizados (art. 3 y 4 del RD 2606/1996, de 20 diciembre).
3. El perfil de riesgo de cada miembro dependerá de las puntuaciones alcanzada en los indicadores básicos (AC1, CA1, R1 y L1) y en los indicadores complementarios (AC2, CA2, R2, y L2). La ponderación de los indicadores básicos en la puntuación compuesta es de un 75%, y la de los indicadores complementarios del 25%.
4. El nivel de riesgo respecto a los indicadores básicos (AC1, CA1 y R1) es medido con la escala de valores propuesta por la Comisión (Tablas nº 1 y 2 del anexo II). En el caso de los indicadores complementarios (AC2, CA2, R2, y L2) e indicadores de liquidez básico (L1), los umbrales de clasificación para estos indicadores se realiza en función de los percentiles de la distribución de valores de cada indicador (Tabla nº 3 del anexo II).
5. Son considerados dos escenarios para la estimación del coeficiente de riesgo ( $\beta_i$ ). En el Escenario 1, el coeficiente de riesgo vendrá determinado por el valor alcanzado en la puntuación compuesta según la escala propuesta por la Comisión (véase tabla 3). Esta escala penaliza de forma excesiva aquellas entidades que muestran una puntuación compuesta de riesgo próxima a los extremos (p.ej. un banco con una puntuación compuesta de 1,49 tendría un mismo coeficiente de riesgo que una entidad con una calificación de 2,49). Por este motivo, consideramos el impacto que tendrían las contribuciones ajustadas al riesgo en un segundo escenario donde el coeficiente de riesgo se estima a partir de la transformación lineal de la puntuación compuesta de riesgo, considerando el valor del 75% para banco con riesgo mínimo ( $\rho_i = 1$ ) y el valor de 200% para banco con riesgo extremo ( $\rho_i = 5$ ), como muestra la figura 2. Al introducir esta transformación, las contribuciones de los bancos con valores muy próximos en los indicadores serán muy similar, obteniendo un modelo de financiación más imparcial que con el uso de clases para el ajuste por riesgo.

**Tabla 3**

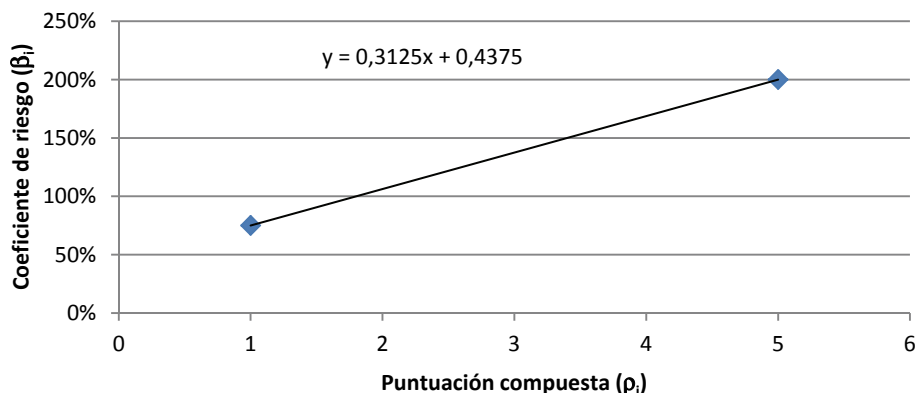
Valor del coeficiente de riesgo en función de la puntuación compuesta de riesgo (Escenario 1).

Puntuación compuesta ( $\rho_i$ )	$1 < \rho_i \leq 1,5$	$1,5 < \rho_i \leq 2,5$	$2,5 < \rho_i \leq 3,5$	$3,5 < \rho_i \leq 4,5$	$4,5 < \rho_i \leq 5$
Coeficiente de riesgo ( $\beta_i$ )	75%	100%	125%	150%	200%

Fuente: European Commission (2010).

**Figura 2**

Transformación lineal para la estimación del coeficiente de riesgo en función de la puntuación compuesta (Escenario 2).



Los resultados obtenidos para cada uno de los establecimientos bancarios se recogen en el anexo III y a nivel agregado en la tabla nº 5, donde mostramos el rango de variación de las contribuciones ajustadas al riesgo definido por el aumento porcentual máximo (cambio porcentual máximo positivo) y la disminución máxima (cambio porcentual máximo negativo), y los porcentajes de entidades que disminuyen o aumentan su contribución con la aplicación del modelo.

**Tabla 5**

Resultados agregados del Modelo de contribuciones ajustadas al riesgo para el FGDEB

	Escenario 1	Escenario 2
Aumento porcentual máximo	21,8%	19,7%
Disminución porcentual máxima	-18,8%	-19,0%
% Entidades que aumentan aportación	75,8%	57,6%
% Entidades que disminuyen aportación	24,2%	42,4%

Se puede observar como el rango de variación en uno u otro escenario no varía significativamente respecto a la aportación máxima o mínima que debería realizar una entidad. Sin embargo, no sucede lo mismo cuando se aplica la propuesta de la Directiva y la transformación lineal, en el primer caso la mayoría de los bancos, hasta un 75,8% tendría que aumentar su aportación al Fondo, y solo un 24,2% la disminuiría, mientras que al realizar la transformación lineal, el número de bancos que deberían incrementar su contribución es del 57,6%, esto supone un 32% me-



nos de entidades. Es evidente que el sistema propuesto por Comisión penaliza considerablemente a una cantidad importante de entidades.

## 6. CONCLUSIONES

Aspectos claves para afianzar la estabilidad financiera y prevenir escenarios de crisis sistémica entre otros son, garantizar la seguridad de los depositantes en las entidades y una gestión ordenada de las insolvencias sin desestabilizar el sistema financiero, objetivos encomendados a los fondos de garantía de depósitos. Sin embargo, actualmente estos mecanismos adolecen de importantes limitaciones, sobre todo en lo que respecta a su financiación, mermando su eficacia y provocando una deficiente disciplina de mercado. Motivos que han llevado a las autoridades europeas e internacionales a buscar medidas para evitar esta arbitrariedad. Utilizar medidas de riesgo que permitan evaluar mejor las necesidades de patrimonio y niveles de solvencia necesarios para los SGD, lograría un sistema de contribuciones más equitativo, favoreciendo la disciplina de mercado. En este contexto, la Comisión Europea (2010) ha planteado un modelo de financiación para los sistemas de garantía basado en contribuciones variables para las entidades en función de su perfil de riesgos. Esta iniciativa supone un incentivo regulatorio más para la gestión prudencial de los riesgos asociados a la actividad de las entidades de crédito en favor de la estabilidad financiera.

El análisis realizado arroja importantes evidencias del efecto que sobre los bancos españoles tendría la aplicación de un sistema de primas ajustadas al riesgo en las contribuciones al FGDEB, medido a partir del modelo propuesto. Respecto al perfil de riesgo de las entidades analizadas, la ratio de solvencia arroja los mejores resultados, mientras en el resto, alrededor de la mitad están situados por encima de la media europea, esto es, presentan niveles de riesgo alto o extremo. En cuanto a los indicadores complementarios, alrededor del 40% de los superan en nivel de riesgo medio de la banca española. Por último, el análisis global muestra que un 15,2% de las entidades tienen un riesgo alto, y un 24,2% por debajo de la media.

Aplicar el modelo propuesto por la Comisión, supondría que el 75,8% de los bancos españoles tendrían que incrementar su contribución actual al fondo de garantía, y solo el 24,2% de las entidades se verían favorecidos por el sistema de aportaciones en base al riesgo. No obstante, este sistema de puntuaciones penaliza considerablemente a los bancos que obtienen un valor del coeficiente de riesgo cercano a los extremos. Parece en principio más justo y equitativo que las aportaciones se realizasen sobre la base de la transformación lineal del coeficiente de riesgo, de esta forma solo el 57,6% de los bancos deberían incrementar las contribuciones actuales.

## BIBLIOGRAFÍA

Ayadi, R. y Lastra, R.M. (2010). "Proposal for reforming deposit guarantee schemes in Europe", *Journal of Banking Regulation*, nº 11, pp. 210-22.

Basel Committee on Banking Supervision (2006). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework —Comprehensive Version*, Basel Committee Publications, June.

Basel Committee on Banking Supervision (2010). *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*, Basel Committee Publications, December.

Basel Committee on Banking Supervision, International Association of Deposit Insurer (BCBS/IADI 2009): *Core Principles for Effective Deposit Insurance System*, Bank for International Settlements Publications, June.

Basel Committee on Banking Supervision, International Association of Deposit Insurer (BCBS/IADI 2010). *Core Principles for Effective Deposit Insurance Systems: A proposed methodology for compliance assessment*, Bank for International Settlements Publications, November.

Bernet, B. y Walter, S. (2009). *Design, structure and implementation of a modern deposit insurance scheme*, The European Money and Finance Forum, Vienna.

Campos, P., Yagüe, M y Chinchetru, I. (2007). "Un nuevo marco de seguro de depósitos para España". *Estabilidad Financiera*, nº 12, pp. 93-110.

Cariboni, J., Vanden, K., Campolongo, F., De Cesare, M. (2008). "Deposit protection in the UE: State of play and future prospects", *Journal of Banking Regulation*, nº 9, pp. 82-101.

Demirgüç-Kunt, A. y Servén, L. (2010). "Are all the sacred cows dead? Implications of The Financial Crisis form Macro and Financial Policies", *The World Bank Research Observer*, vol. 25, nº 1, pp. 91-124.

European Commission (2006). *Communication from the Commission to the European Parliament and the Council concerning the review of Directive 94/19/EC on Deposit Guarantee Schemes*, Brussels, november.

European Commission (2007). *Scenario Analysis: Estimating the effects of changing the funding mechanisms of EU Deposit Guarantee Schemes*, DGS Project, Final Report, February.

European Commission (2008). *Risk-based contributions in EU Deposit Guarantee Schemes: current practices*, June.

European Commission (2009). *Possible models for risk-based contributions to EU Deposit Guarantee Schemes*, June.

European Commission (2010). *Proposal for a Directive on Deposit Guarantee Schemes EU of The European Parliament and of the Council*, Brussels, COM(2010)368 final.

European Forum of Deposit Insurers (2006). *Deposit Guarantee systems: EFDI'S first report*, Interbank Deposit Protection Fund, October.

Financial Stability Forum (2008). *Report of the Financial Stability Forum on Enhancing Market and Institutional Resilience*, April.

Gilbert, R.A., Mayer, A.P. y Vaughan, M.D. (2000). "The role of a CAMEL Downgrade Model in Bank Surveillance", The Federal Reserve Bank of St. Louis, Working Paper 2000-021A.

Gilman, M. (2009). "International deposit insurance", *Economic Affairs*, vol. 29, nº 3, pp. 103-104.

Hwang, D.Y., Shie, F.S., Wang, K. y Lin, J.C. (2009). "The pricing of deposit insurance considering bankruptcy cost and closure policies", *Journal of Banking and Finance*, vol. 33, nº 10, pp. 1909-1919.

Ioannidou, V.P. y Penas, M.F. (2010). "Deposit insurance and bank risk-taking: Evidence from internal loan ratings", *Journal of Financial Intermediation*, vol. 19, nº 1, pp. 95-115.

Madan, D. y Pennachi, G. (2003). "Introduction: Special Issue on Pricing the Risk of Deposit Insurance", *Journal of Financial Services Research*, vol. 24, nº 2, pp. 89-110.

Merton, R. (1977). "An analytic derivation of the cost of deposit insurance and loan guarantees. An application of modern option pricing theory", *Journal of Banking and Finance*, nº 1, pp. 3-11.

Partal Ureña, A. y Gómez Fernández-Aguado, P. (2002). "Los sistemas de garantía de depósitos ante la nueva regulación de capital de Basilea", *Cuadernos de Información Económica*, nº 168, pp. 104-112.

Sironi, A. y Zazzara, C. (2004). "Applying credit risk models to deposit insurance pricing: Empirical evidence from the Italian banking system", *Journal of International Banking Regulation*, vol. 6, nº 1, pp. 10-33.

## **IV. PROTECCIÓN SOCIAL Y DEPENDENCIA**

## Ponencia 25

# ESPERANZA DE VIDA Y COSTE DE LOS CUIDADOS DE LARGA DURACIÓN EN LA POBLACIÓN ESPAÑOLA

Ramón Alemany Leira y Catalina Bolancé Losilla

### RESUMEN

Este trabajo contribuye a cuantificar las necesidades económicas de los cuidados de larga duración (CLD) ligados a la situación de dependencia a partir de los 65 años. Confluyen diversas fuentes de incertidumbre en dicha cuantificación: la edad de inicio de la situación de dependencia, la duración de los CLD y su intensidad. Estimamos la esperanza de vida desde la edad de jubilación en adelante. También estimamos el coste esperado de los CLD en la población española desde el momento en que se inicia la dependencia, separadamente para los hombres y las mujeres. Los datos utilizados corresponden a las dos grandes operaciones estadísticas sobre discapacidad y dependencia llevadas a cabo por el INE en 1999 y en 2008. También se han utilizado las tablas de mortalidad del INE y con ellas se han creado escenarios realistas para la longevidad. La posibilidad de reproducir el análisis para los años 1999 y 2008 ha permitido la comparación entre ambos así como el análisis de la tendencia registrada en la última década por la longevidad, la prevalencia de la dependencia y los costes esperados.

### 1. INTRODUCCIÓN

Cualquiera que realice planes de jubilación sabe que el envejecimiento implica un aumento de las necesidades de asistencia de terceras personas. Es imposible hacer una predicción exacta de cuál va a ser el coste de los cuidados de larga duración (CLD) de un individuo concreto a lo largo de su vida debido a los muchos factores que influyen en la estimación de los costes de los mismos. Estas fuentes de incertidumbre son, principalmente, la edad en la que el individuo empieza a necesitar los CLD, así como la duración y la intensidad de la dependencia.

Otro factor que interviene en la predicción de los costes de los CLD a lo largo de la vida tiene que ver con la cuestión de por cuánto tiempo va a seguir manteniéndose la tendencia decreciente de las tasas de mortalidad, tal y como sugiere el aumento de la longevidad en las últimas décadas. Siendo probable que dicha tendencia continúe en el futuro, se plantea la cuestión de si vivir más años significará estar

más años en activo o si, por el contrario, los individuos requerirán atención y cuidados asociados a una situación de dependencia durante un mayor período de tiempo (Wittenberg *et al.*, 2002 y Guillén *et al.*, 2007).

La definición de dependencia que hemos considerado en este trabajo es la que se estableció en España a partir de la entrada en vigor de la llamada Ley de Dependencia en enero de 2007, por lo que se distinguen tres grados de dependencia. Para el análisis hemos utilizado datos obtenidos por el Instituto Nacional de Estadística (INE) sobre la prevalencia de la dependencia por edad y sexo, es decir, el porcentaje de personas que necesitan ayuda para realizar las actividades básicas de la vida diaria (ABVD). Hemos realizado proyecciones sobre cuánto espera gastar un individuo en CLD sobre la base de su edad actual, habiéndonos centrado en los individuos de 65 años o más.

A partir de datos de los costes unitarios por servicios de cuidados hemos comparado las estimaciones obtenidas en 1999 y en 2008. En esos nueve años se han registrado importantes cambios en la longevidad y en la prevalencia de la dependencia, que también hemos analizado.

A continuación, en la segunda sección de este trabajo resumimos las principales características del sistema español de atención a la dependencia; también en esta sección mostramos una aproximación de cuáles son los costes anuales de los CLD en función del grado de dependencia, lo que nos permitirá valorar hasta que punto el sistema público cubre dichas cuantías. En la tercera sección de este trabajo describimos la base de datos utilizada. Posteriormente, en la cuarta sección presentamos la metodología utilizada para la estimación de los costes esperados de los CLD, desde los 65 años hasta la edad de muerte. En la quinta sección describimos los resultados obtenidos, para finalizar, en la sexta sección, resumiendo las principales conclusiones del trabajo.

## **2. EL SISTEMA PÚBLICO ESPAÑOL DE ATENCIÓN A LA DEPENDENCIA**

En Diciembre de 2006 el Parlamento Español aprobó la llamada Ley de Dependencia, la cual entró en vigor en enero de 2007. La ley establece un sistema público de atención a la dependencia dotando a los ciudadanos de nuevos derechos frente a las necesidades de asistencia personal. La ley fue reconocida como el cuarto pilar del Estado del Bienestar. Desde entonces los presupuestos generales del Estado han ido asignando niveles crecientes de fondos para los ciudadanos necesitados de cuidados de larga duración, y dichos fondos se han establecido de forma independiente del sistema público de salud.

En la nueva ley española el concepto de dependencia se define como "el estado de carácter permanente en que se encuentran las personas que, por razones derivadas de la edad, la enfermedad o la discapacidad, y ligadas a la falta o a la pérdida de autonomía física, mental, intelectual o sensorial, precisan de la atención de otra u otras personas o ayudas importantes para realizar actividades básicas de

la vida diaria o, en el caso de las personas con discapacidad intelectual o enfermedad mental, de otros apoyos para su autonomía personal". El tipo de prestación que se garantiza a cualquier individuo reconocido como dependiente por la ley no está completamente clara. Los dependientes pueden recibir dinero o servicios, pero aunque se ha priorizado la provisión de servicios, la mayoría de ciudadanos reconocidos como dependientes prefieren la prestación económica.

El presupuesto asignado en España a las prestaciones por dependencia está entre los más bajos de los países de Europa occidental lo que significa que, incluso después de la reforma, el sistema público no cubre suficientemente todas las necesidades de protección social derivadas de la dependencia. Así, según datos de Eurostat, los gastos en cuidados por dependencia en España suponían el 0.74% del PIB. Es por ello que, desde la entrada en vigor de la Ley de Dependencia en España, la sociedad en general se siente decepcionada por los insuficientes recursos que se han aportado (más información sobre los países de la Unión Europea en Holdenrieder, 2006, Solé-Auró y Crimmins, 2008, Fernández *et al.*, 2009 y Reimat, 2009).

El sistema español se basa en los principios de universalidad, equidad y no discriminación. Hay tres niveles de responsabilidad pública de la protección frente a la dependencia: el mínimo (general para todo España), el ampliado (mediante convenio entre la administración central y la Comunidad Autónoma) y los adicionales (aportados exclusivamente por las Comunidades Autónomas). Por ello se creó el Consejo Territorial del SAAD para reducir las discrepancias o inconsistencias entre las comunidades autónomas. El sistema se financia enteramente con cargo a los presupuestos públicos pero la ley prevé la posibilidad de establecer un sistema de copago por parte del beneficiario de la prestación que estaría en función del tipo y coste del servicio y de su capacidad económica personal, es aquí donde el seguro de dependencia adquiere especial relevancia.

Uno de los elementos clave de cualquier sistema de protección frente a la dependencia es cómo se define el nivel de necesidades que requieren apoyo, es decir, cómo se clasifica en uno u otro grupo a un individuo que haya solicitado la prestación. Esto se realiza mediante una escala, el Baremo de Valoración de la Dependencia (BVD), según la cual, una vez examinado por los expertos y como consecuencia de dicho examen, al solicitante se le dictamina uno de los tres posibles niveles de dependencia o bien se le deniega el reconocimiento de dicha situación.

El BVD mide la incapacidad de un individuo para llevar a cabo las actividades de la vida diaria mediante una escala de 0 a 100 puntos. Dicho baremo pone mucho énfasis en la intensidad del apoyo necesitado y las tareas para las que se requiere la asistencia. De hecho, el sistema ya ha sido cambiado en un par de ocasiones desde su primera publicación y todavía hay dudas de que esté siendo homogéneamente aplicado por todas las Comunidades Autónomas. En el sistema español hay tres niveles de severidad (Esparza, 2010):

- Grado 1: Dependencia Moderada: la persona necesita ayuda para realizar las ABVD al menos una vez al día (Nivel I: 25-40 puntos, Nivel II: 40-49 puntos)
- Grado 2: Dependencia Severa: la persona necesita ayuda para realizar las ABVD dos o tres veces al día (Nivel I: 50-64 puntos, Nivel II: 65-74 puntos)
- Grado 3: Gran dependencia: la persona necesita ayuda para realizar las ABVD varias veces al día (Nivel I: 75-89 puntos, Nivel II: 90-100 puntos)

Una vez que al individuo se le dictamina un grado y nivel, recibe un plan personalizado y puede escoger entre la atención residencial o la prestación económica, si prefiere ser atendido en casa cuando esto sea posible. No todos los grados y niveles reciben prestación, y la cobertura se irá extendiendo gradualmente hasta el año 2016, dependiendo de las disponibilidades presupuestarias. A día de hoy sólo son beneficiarios de alguna prestación aquellos que tienen reconocido un nivel de dependencia con severidad de grado 1 y nivel II o más.

En la Tabla 1 se muestran las cuantías mensuales de las prestaciones en 2011. Los valores en la Tabla 1 indican que un beneficiario del sistema público puede obtener hasta 833,96 euros en efectivo como pago mensual por los servicios recibidos o 520,69 euros mensuales por cuidados familiares, si prefiere que sus parientes cuiden de él. Las cuantías se van reduciendo gradualmente de acuerdo con el nivel de severidad de la dependencia. Actualmente la prestación mínima es de 60 euros mensuales para personas con un grado de severidad 1 y nivel II. En caso de deterioro de la situación individual se puede solicitar una re-evaluación del grado o nivel de severidad.

**Tabla 1**  
Ayudas a los CLD en España en 2009.

<b>Máximo (mínimo)<sup>(a)</sup> mensual en euros</b>				
<b>Grado y nivel</b>		<b>Servicio</b>	<b>Cuidados de la familia<sup>(b)</sup></b>	<b>Asistencia Personal</b>
Grado 3	Nivel II	833,96 (266,57)	520,69	833,96
Grado 3	Nivel I	625,47 (181,26)	416,98	625,47
Grado 2	Nivel II	462,18 (103,20)	337,25	
Grado 2	Nivel I	401,20 (70,70)	300,90	
Grado 1	Nivel II	300,00 (60,00)	180,00	

(a) La cuantía mínima que una persona puede recibir en cada nivel de dependencia.

(b) Se añade una cuantía adicional de 162.49 euros para la formación y las cuotas de la Seguridad Social del cuidador.



## 2.1. El coste de los cuidados de larga duración en España

Para valorar en qué medida la ley de dependencia cubre los costes de los CLD en España es necesario su cálculo. Para ello hemos hecho algunas hipótesis realistas sobre el coste de los servicios, en lugar de utilizar el máximo, o el mínimo, de las cuantías públicas vigentes. La Tabla 2 muestra la información sobre el coste medio anual de los CLD en 2008 según el grado de severidad y el tipo de cuidados. Para nuestras predicciones del coste de CLD a lo largo de la vida hemos tomado el supuesto que consiste en la combinación de cuidados en el hogar y servicios externos, en el que el coste es diferente para cada nivel de severidad y el tipo de cuidados viene condicionado por el grado de severidad.

**Tabla 2**  
Costes medios de los CLD en España en 2008 en euros.

<b>Combinando cuidados en el hogar y servicios externos</b>		
<b>Nivel de severidad</b>	<b>Tipo de cuidados</b>	<b>Coste anual</b>
Grado 1	3h/día de cuidados en el hogar	13917,45
Grado 2	Centro de día y 1h/día de cuidados en el hogar	12512,47
Grado 3	Cuidados en residencia	17295,60

En la Tabla 2 observamos que aquellos individuos con dependencia severa tienen unos costes medios anuales en CLD más bajos que aquellos con dependencia moderada. Aunque este hecho parezca contradictorio, es debido a que la dependencia moderada comporta únicamente atención en domicilio que es proporcionalmente más costosa que la atención en centros de día. Hemos basado nuestras valoraciones de coste en las opiniones de los expertos, que recomiendan extender la atención en domicilio tanto como sea posible para prolongar el estado de dependencia moderada y detener la progresión de la pérdida de autonomía. Los individuos que se mantienen en su domicilio son en general más autónomos que quienes asisten a un centro de día. Finalmente, la atención residencial es la alternativa recomendada para personas con el nivel más severo de dependencia. Una residencia para una persona dependiente cuesta 17295,60 euros al año, incluyendo únicamente los costes derivados de la dependencia y no los costes de manutención y alojamiento.

## 3. LOS DATOS

Hemos utilizado datos recogidos en 1999 y 2008 por el Instituto Nacional de Estadística, INE. La primera encuesta de 1999 se denominó EDDDES (Encuesta sobre Discapacidad, Dependencia y Estado de Salud). La muestra era de un tamaño considerable dado que 220.000 personas fueron entrevistadas mediante un cuestionario muy extenso, en el que los individuos con al menos una discapacidad proporcionan información sobre la misma, la edad en la que empieza la discapacidad, el tipo de atención que se necesita y que se recibe, etc. (Bermúdez *et al.*, 2009).

En 2008 el INE llevó a cabo una segunda encuesta a gran escala que se llamó EDAD (Encuesta de Discapacidades, Autonomía Personal y Situaciones de Dependencia). En esta se seleccionó una muestra nueva por lo que no se dispone de información longitudinal. La estructura de aquella encuesta era muy similar a la anterior y aproximadamente fueron entrevistadas 260.000 personas. En la encuesta EDAD había 22.795 entrevistados que manifestaron tener al menos una dificultad para llevar a cabo las actividades de la vida diaria (AVD). La estimación del número total de personas con al menos una dificultad en las AVD, que se obtiene con el factor de elevación muestral, es de 3,85 millones. Esto corresponde a una prevalencia de aproximadamente 85,5 por mil personas en la población total.

En ambas encuestas se pregunta sobre las actividades de la vida diaria utilizadas en el BVD para medir la severidad de la dependencia. Cuando un entrevistado indica que tiene una dificultad para actuar en una AVD específica debe indicar si tal dificultad es moderada, severa o total. Se asigna un coeficiente de valor 0.90 para dificultad moderada, 0.95 para dificultad severa y 1.00 para el incapacitado para llevar a cabo aquella AVD concreta. También, debido a que la escala del BVD tiene una tabla de coeficientes distinta, identificamos a los individuos con dificultades intelectuales o por enfermedad mental en la realización de actividades de la vida diaria.

La puntuación del BVD se obtiene sumando los productos de los coeficientes de severidad por los pesos asignados en la escala a cada tarea concreta para cada una de las actividades de la vida diaria (BOE 18 de febrero de 2011, Real Decreto 174/2011 del 11 de febrero).

#### 4. LA ESTIMACIÓN DEL COSTE MEDIO A LO LARGO DE LA VIDA EN CLD

Utilizamos una notación que es común en la ciencia actuarial. Siendo  $p_x$  la probabilidad de que un vivo a la edad  $x$  sobreviva a la edad  $x+1$ , entonces  $q_x = 1 - p_x$  es la probabilidad de que un individuo de edad  $x$  muera antes de llegar a la edad  $x+1$ . En este trabajo hemos supuesto que la probabilidad de muerte no cambia con el nivel de dependencia de un individuo. Aunque es un supuesto poco realista, no tenemos datos para poder medir si las personas dependientes tienen una probabilidad de muerte a una edad dada mayor o menor que alguien no dependiente (Crimmins *et al.*, 1994, Albarran *et al.*, 2005 y Cairns *et al.*, 2008).

Llamamos  $t_x$  a la tasa de prevalencia de la dependencia de los individuos en la edad  $x$ . Cuando especificamos la prevalencia de la dependencia por grado de severidad utilizamos la siguiente notación:  $t_x^{(1)}$ ,  $t_x^{(2)}$  y  $t_x^{(3)}$ , que son, respectivamente, los porcentajes de individuos en los grados 1, 2 y 3 de entre todos los de edad  $x$ . Se cumple que:

$$t_x = t_x^{(1)} + t_x^{(2)} + t_x^{(3)} = \sum_{k=1}^3 t_x^{(k)}$$

y denotamos  $t_x^{(0)} = 1 - t_x$  a la tasa de prevalencia de la no dependencia.

Sea  $l_x$  el número de vivos en la edad  $x$ . Para cada edad, tenemos que:

$$l_{x+1} = (1 - q_x) \cdot l_x.$$

Aquellos que están vivos en la edad  $x$  pueden clasificarse de modo que, o bien son no dependientes o pertenecen a alguno de los tres grados de dependencia 1, 2 o 3. El número de personas en cada estado puede calcularse como sigue:

$$l_x^{(j)} = t_x^{(j)} \cdot l_x, \quad j=0,1,2,3.$$

Entonces sabemos que:

$$l_x = l_x^{(0)} + l_x^{(1)} + l_x^{(2)} + l_x^{(3)} = \sum_{j=0}^3 l_x^{(j)}.$$

Como resultado de lo anterior, el número total de años vividos por los individuos en la edad  $x$  se puede expresar como la suma del número total de años vividos por cada individuo en cada uno de los niveles de dependencia:

$$T_x = \sum_{i=x}^{\infty} l_i = \sum_{i=x}^{\infty} (l_i^{(0)} + l_i^{(1)} + l_i^{(2)} + l_i^{(3)}) = T_x^{(0)} + T_x^{(1)} + T_x^{(2)} + T_x^{(3)}. \quad (1)$$

De la expresión anterior podemos obtener el conocido concepto de esperanza de vida en la edad  $x$  como la suma de cuatro términos, lo que llamamos la desagregación de la esperanza de vida (Sullivan, 1971 y Chiang, 1984):

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{T_x^{(0)}}{l_x} + \frac{T_x^{(1)}}{l_x} + \frac{T_x^{(2)}}{l_x} + \frac{T_x^{(3)}}{l_x} = e_x^{(0)} + e_x^{(1)} + e_x^{(2)} + e_x^{(3)}. \quad (2)$$

La expresión (2) muestra que la esperanza de vida en la edad  $x$  se puede descomponer en la esperanza de vida libre de dependencia  $e_x^{(0)}$ , y la esperanza de vida en la edad  $x$  en los grados 1, 2 y 3, respectivamente.

Sea  $C_x$  la variable aleatoria que representa el coste en CLD para lo que resta de vida de un individuo de edad  $x$ . Cuando calculamos la esperanza matemática  $E(C_x)$ , necesitamos  $c^{(1)}$ ,  $c^{(2)}$  y  $c^{(3)}$ , que corresponden a los costes anuales promedio de los CLD de los individuos en los grados de severidad 1, 2 y 3, respectivamente (dados en la parte superior de la Tabla 2). Suponemos que el coste de los cuidados de los no dependientes es cero. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
E(C_x) &= \frac{\sum_{i=x}^{\infty} (c^{(1)}I_i^{(1)} + c^{(2)}I_i^{(2)} + c^{(3)}I_i^{(3)})(1+r)^{i-x}}{I_x} \\
&= \frac{\sum_{i=x}^{\infty} (c^{(1)}I_i^{(1)})(1+r)^{i-x}}{I_x} + \frac{\sum_{i=x}^{\infty} (c^{(2)}I_i^{(2)})(1+r)^{i-x}}{I_x} + \frac{\sum_{i=x}^{\infty} (c^{(3)}I_i^{(3)})(1+r)^{i-x}}{I_x}, \quad (3) \\
&= E(C_x^{(1)}) + E(C_x^{(2)}) + E(C_x^{(3)})
\end{aligned}$$

donde  $r$  es la tasa de inflación anual. Una ampliación de lo anterior, introduciendo más hipótesis, se puede encontrar en Haberman y Pitacco (1999). En nuestros resultados supondremos  $r = 0$  y de este modo aislamos el efecto del incremento en la esperanza de vida, es decir, los cambios en los costes únicamente vienen provocados por el incremento en la longevidad.

## 7. RESULTADOS

Los cálculos se han realizado de forma separada para hombres y mujeres, y para 1999 y 2008, utilizando los datos de las dos encuestas realizadas por el INE que se han descrito anteriormente. Para cada encuesta se han obtenido las tasas de prevalencia de dependencia en cada nivel de severidad en hombres y mujeres en la edad  $x$ . Hemos utilizado la definición de los grados de dependencia fijados por la legislación española, aunque esto puede ser discutible dado que el número de personas con alguna discapacidad que requiere alguna forma de cuidado o asistencia es distinta del número de personas dependientes que define el BVD. Nuestro cálculo del coste de los CLD sólo hace referencia a aquellos que necesitan ayuda de terceras personas porque así es como lo define la Ley de Dependencia española. Las tasas de prevalencia obtenidas de las dos encuestas han sido aliadas utilizando un método de alisamiento no paramétrico

Las probabilidades de supervivencia o tablas de mortalidad también se obtienen de las estadísticas oficiales del INE para la población residente en España. Para obtener los resultados de las expresiones (1), (2) y (3) utilizamos dichas tasas de mortalidad brutas. Dado que para edades avanzadas los datos sobre mortalidad son poco fiables, supondremos que a partir de los 99 años de edad la probabilidad de muerte es constante e igual a 0,5, tanto para hombres como para mujeres.

La Tabla 3 muestra los valores de la esperanza de vida restante para algunas edades concretas en 2008. Las estimaciones para 1999 se muestran entre paréntesis. Por ejemplo, un hombre de 65 años en 2008 tiene una esperanza de vida restante de 16,33 años y de ese total, 14,58 años corresponde a esperanza de vida no dependiente, 0,72 años, en promedio, corresponde a dependencia moderada, 0,47 a dependencia severa y 0,56 a gran dependencia. En la Tabla 3 podemos ver que existen diferencias en la esperanza de vida de hombres y mujeres. Además, tanto para hombres como para mujeres, la esperanza de vida en todos

los niveles de severidad de la dependencia ha aumentado entre 1999 y 2008. Hay dos excepciones dado que para la dependencia moderada en las edades de 65 y de 95 dicha esperanza de vida ha decrecido ligeramente, tanto para hombres como para mujeres. De los resultados de la Tabla 3 podemos concluir que la longevidad ha aumentado en la pasada década y que la esperanza de vida en situación de dependencia también ha crecido de forma generalizada.

**Tabla 3**  
Esperanza de vida para una edad dada por sexo en España en 2008 (1999)

<b>Hombres</b>					
<b>Edad</b>	<b>No dependiente</b>	<b>Dependencia Moderada</b>	<b>Dependencia Severa</b>	<b>Gran Dependencia</b>	<b>Total</b>
65	14,58 (13,81)	0,72 (0,76)	0,47 (0,36)	0,56 (0,43)	16,33 (15,36)
70	11,11 (10,45)	0,66 (0,71)	0,45 (0,35)	0,56 (0,43)	12,78 (11,93)
75	7,98 (7,48)	0,59 (0,66)	0,43 (0,34)	0,57 (0,43)	9,58 (8,91)
80	5,35 (5,03)	0,52 (0,62)	0,42 (0,32)	0,60 (0,43)	6,89 (6,40)
85	3,30 (3,13)	0,43 (0,57)	0,40 (0,27)	0,63 (0,42)	4,75 (4,39)
90	1,81 (1,76)	0,31 (0,51)	0,36 (0,19)	0,64 (0,41)	3,13 (2,87)
95	0,69 (0,73)	0,16 (0,37)	0,24 (0,09)	0,50 (0,30)	1,58 (1,48)
100	0,27 (0,36)	0,08 (0,33)	0,17 (0,04)	0,47 (0,26)	0,98 (0,98)
<b>Mujeres</b>					
<b>Edad</b>	<b>No dependiente</b>	<b>Dependencia Moderada</b>	<b>Dependencia Severa</b>	<b>Gran Dependencia</b>	<b>Total</b>
65	16,35 (16,15)	1,51 (1,53)	1,07 (0,68)	1,27 (0,86)	20,19 (19,23)
70	12,29 (12,16)	1,37 (1,37)	1,01 (0,66)	1,24 (0,85)	15,91 (15,04)
75	8,60 (8,56)	1,20 (1,18)	0,93 (0,62)	1,20 (0,84)	11,94 (11,20)
80	5,49 (5,51)	0,97 (0,98)	0,83 (0,58)	1,15 (0,80)	8,44 (7,87)
85	3,18 (3,22)	0,72 (0,76)	0,69 (0,51)	1,05 (0,73)	5,64 (5,23)
90	1,70 (1,68)	0,47 (0,57)	0,54 (0,41)	0,87 (0,61)	3,58 (3,27)
95	0,70 (0,65)	0,22 (0,34)	0,31 (0,24)	0,50 (0,36)	1,73 (1,58)
100	0,37 (0,32)	0,11 (0,25)	0,22 (0,17)	0,29 (0,25)	0,98 (0,98)

Con el objetivo de ver si lo que más ha crecido es la longevidad, o bien la duración media en un nivel de dependencia, hemos calculado el porcentaje de esperanza

de vida en no dependencia en 2008 y en 2009 (entre paréntesis) para algunas edades concretas y, separadamente, para hombres y mujeres. Los resultados se pueden encontrar en la Tabla 4. A partir de estos resultados concluimos que la proporción de años vividos en un estado de no dependencia ha disminuido desde 1999 a 2008 para todas las edades, tanto para hombres como para mujeres. Por tanto, esto significa que la duración media en un estado de dependencia ha aumentado más que la longevidad en la pasada década. Existe nuevamente una excepción a la anterior conclusión que se produce para las mujeres centenarias, para las cuales dicho patrón cambia y no sabemos si se debe a fluctuaciones aleatorias o si es un resultado estable. Las estimaciones indican que las mujeres centenarias tienen proporcionalmente una mayor esperanza de vida en no dependencia en 2008 que en 1999.

**Tabla 4**

Proporción de esperanza de vida en situación de no dependencia con respecto a la esperanza de vida restante para hombres y mujeres, en España en 2008(1999)

Edad	Hombres	Mujeres
65	89% (90%)	81% (84%)
70	87% (88%)	77% (81%)
75	83% (84%)	72% (76%)
80	78% (79%)	65% (70%)
85	69% (71%)	56% (62%)
90	58% (61%)	47% (51%)
95	43% (49%)	40% (41%)
100	27% (36%)	37% (32%)

Nuestros resultados evidencian que la longevidad en España aumenta mientras que la esperanza de vida con dependencia también aumenta en todas las edades por encima de los 65 años, tanto para mujeres como para hombres. Simultáneamente, la esperanza de vida en no dependencia ha disminuido en la pasada década para todas las edades por encima de los 65 años. No hemos explorado las razones que expliquen dicho fenómeno, aunque probablemente sean el resultado de la existencia de unas mejores terapias médicas para las personas dependientes que dan lugar a unas mejores perspectivas de supervivencia. Sin embargo, concluimos que dado que el coste de los cuidados a los dependientes es proporcional a la esperanza de vida en cada uno de los niveles de severidad de la dependencia, las tendencias recientes indican que el coste total de los CLD se mantendrá también creciente en el futuro.

La Tabla 5 muestra el coste esperado en CLD para hombres y mujeres en miles de euros en 2008 y 1999 (entre paréntesis) calculados de acuerdo con la expresión (3), y sin tasa de inflación por lo que representan un mínimo. Constatamos el

diferencial entre hombres y mujeres. Debido a la mayor esperanza de vida y a la mayor prevalencia de dependencia las mujeres incurrirán en mayores costes en CLD que los hombres. También observamos un incremento en el coste esperado entre 1999 y 2008 el cual es debido tanto a la evolución de la longevidad como a la prevalencia de la dependencia. Las variaciones entre 1999 y 2008 también se detallan en la Tabla 5. Un hombre de edad entre 65 y 80 años se enfrentará a un coste medio en CLD a lo largo de su vida de entre 20 y 25 mil euros. Por otro lado, para una mujer de entre 65 a 75 años de edad dicho coste promedio esperado será de alrededor de 50 mil euros, lo que supone el doble de lo que se espera para un hombre de la misma edad. A la edad de 90 años el diferencial entre hombres y mujeres es mucho menor que para otras edades pero todavía es elevado.

**Table 5**

Estimación de los costes esperados de los CLD en 2008(1999) en miles de euros.

Edad	Hombres		Mujeres	
	Costes de CLD	Incr. 1999-2008	Costes de CLD	Incr. 1999-2008
65	25.6 (22.5)	14%	56.3 (44.8)	26%
70	24.5 (21.6)	13%	53.1 (42.0)	27%
75	23.5 (20.9)	13%	49.2 (38.7)	27%
80	22.8 (20.0)	14%	43.8 (34.7)	26%
85	21.8 (18.7)	17%	36.8 (29.7)	24%
90	20.0 (16.6)	21%	28.4 (23.6)	20%
95	13.8 (11.4)	21%	15.7 (13.9)	12%
100	11.3 (9.5)	18%	9.2 (9.9)	-7%

Esos resultados no significan que un hombre de 65 años de edad en 2008 pueda estimar que dentro de 25 años, cuando él tenga 90, tendrá un coste esperado de 20 mil euros. Diferir el gasto durante veinticinco años implicaría tener en cuenta la inflación, el incremento de la longevidad y la evolución de la prevalencia de la dependencia. Llamamos a eso la predicción dinámica de los costes dado que necesita tener en cuenta las tendencias de esos tres factores conjuntamente. Un simple cálculo utilizando el diferencial entre 1999 y 2008 indica que, si el aumento del coste medio es parecido al que se ha producido en el pasado, entonces el coste esperado en CLD a lo largo de la vida restante se incrementaría en un 21% cada nueve años en la edad de 90. Para edades más jóvenes el incremento es mayor, por ejemplo, una mujer de 38 años en 2008, si todo permanece igual, debería esperar unos costes en CLD a lo largo de la vida a los 65 años que se habrían incrementado un 26% cada nueve años, por lo que debería estimar que sus costes en CLD a lo largo de la vida serían de 113 mil euros ( $56.3 \times 1.26^3$ ). Un incremento del 26% cada nueve años significa que la cantidad estimada inicialmente se dobla cada tres décadas aproximadamente, mientras que un incremento del 15% que se corresponde con el aumento experimentado en los costes esperados en CLD para

los hombres entre 1999 y 2008, significaría que la cantidad inicial se doblaría en alrededor de cinco décadas.

## 7. CONCLUSIONES

Tal y como muchos expertos indican, el sistema público de salud y de servicios sociales debe reforzar la prevención de la extensión de la duración de la vida activa entre las personas de mayor edad. En nuestro análisis hemos visto que tres factores han tenido influencia sobre el aumento en los costes en CLD a lo largo de la vida a lo largo de la última década: el aumento de la longevidad, un incremento de los años vividos en estado de dependencia y el aumento del precio de los servicios de atención y cuidado a los dependientes. Las políticas sociales deben dirigirse a reducir el periodo de tiempo en estado de dependencia promoviendo la vida activa y la autonomía personal, y también se deberán regular los mercados para proveer eficientemente servicios de atención y cuidados a los dependientes con variaciones en los precios que vayan acordes a la evolución de la inflación.

## BIBLIOGRAFÍA

Albarrán, I., Ayuso, M., Guillén, M. y Monteverde, M. (2005). "A multiple state model for disability using the decomposition of death probabilities and cross-sectional data". *Communications in Statistics: Theory and Methods*, vol. 24, nº 9, 2063-2076.

Bermúdez, L.I., Guillén, M. y Solé-Auró, A. (2009). "Scenarios for the impact of immigration in the longevity and dependence of the elderly in the Spanish population" [in Spanish]. *Revista Española de Geriátría y Gerontología*, vol. 44, nº 1, 19-24.

Cairns, A., Blake, D. y Dowd, K. (2008). "Modeling and management of mortality risk: A review". *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2, nº 3, 79-113.

Chiang, C.L. (2008). *The Life Table and its Applications*. Florida: Robert E. Krieger Publishing Company. Malabar.

Crimmins, E., Hayward, M. y Saito, Y. (1994). "Changing Mortality and Morbidity Rates and the Health Status and Life Expectancy of the Older Population". *Demography*, vol. 31, 159-175.

Esparza Catalán, C. (2010). *Métodos de cálculo de la gravedad de la discapacidad* [Web]. <http://www.imsersomayores.csic.es/documentos/documentos/pmmetodos-01.pdf> [Accesible: 25/06/2010]

Fernández J.L., Forder J., Trukeschitz B., Rokosova M. y McDaid D. (2009). *How can European states design efficient, equitable and sustainable funding systems for long-term care projects for older people?* Copenhagen: World Health Organisation.



Guillén, M., Rodríguez, N. y Strassberg, B.A. (2007). "The new responsibilities of social sciences in aging societies. The case of Spain". *International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*, vol. 2, 213-228.

Haberman, S. and Pitacco, H. (1999). *Actuarial models for disability insurance*. London: CRC Press, 1999.

Holdenrieder J. (2006). "Equity and efficiency in funding long-term care from an EU perspective". *Journal of Public Health*, vol. 14, 139-147.

Reimat, A. (2009). *Welfare regimes and long-term care for elderly people in Europe. The European Social Model in a Global Perspective*. IMPALLAESPAnet Joint conference. March 6-7.

Solé-Auró, A. and Crimmins, E.M. (2008). "Health of Immigrants in European countries". *International Migration Review*, vol. 42, nº 4, 861-876.

Sullivan, D. (1971). "A Single Index of Mortality and Morbidity". *HSMHA Health Reports*, vol. 86, 347-354.

Wittenberg, R, Sandhu, B. y Knapp, M. (2002). "Funding long-term care: the public and private options". En *Funding Health Care: Options for Europe* edited by Elias Mosialos *et al.*, cap. 10, 226-249.

## Ponencia 26

### LA DEPENDENCIA COMO RIESGO ASEGURABLE CON DATOS DE LA EDAD 2008

M<sup>a</sup> Manuela Segovia González, Ana M<sup>a</sup> Martín Carballo,  
Patricia Herranz Peinado y Flor M<sup>a</sup> Guerrero Casas

#### RESUMEN

El envejecimiento de la población ha traído como consecuencia la necesidad de cobertura de un nuevo pilar del bienestar social, la dependencia. En este trabajo se aborda el estudio de la misma desde varias vertientes, por un lado se realiza un planteamiento teórico de un seguro de dependencia privado y el desarrollo de las funciones actuariales asociadas, se realiza una explotación de la encuesta EDAD 2008 con el cálculo de la prevalencia de dependientes en España y finalmente se plantea un análisis de correspondencia de la dependencia por tipología de la discapacidad.

**Palabras clave:** Dependencia, seguro, actuarial, análisis de correspondencia.

#### 1. INTRODUCCIÓN

El envejecimiento progresivo de la población de los países desarrollados es un hecho generalizado, lo que ocasiona que haya un volumen creciente de individuos con discapacidades y en muchas ocasiones dependientes.

La existencia de personas dependientes representa un problema para sus familias, para la sociedad y para el Estado, ya que las necesidades de cuidados y su cobertura económica total son tan altas, que su financiación a través de impuestos es prácticamente inviable (Herranz *et al.*, 2006). Ello ha movido a algunos países a incluirlo como un cuarto pilar de la Seguridad Social y paralelamente promover la cobertura privada por parte de las empresas aseguradoras.

En este trabajo realizamos un planteamiento teórico de un seguro privado de dependencia, que necesita de las funciones actuariales asociadas a la dependencia. Para su cálculo hemos seguido el estudio de modelos de múltiples estados basa-

dos en los procesos estocásticos de Markov, como Haberman y Pitacco (1999) en su estudio sobre invalidez y Pociello y Varea (2004).

Los resultados de este trabajo se obtienen a partir de la explotación de los datos de Encuesta sobre Discapacidad, Autonomía Personal y Situaciones de Dependencia (en adelante EDAD 2008)<sup>1</sup>.

Uno de los primeros problemas con los que nos encontramos al hacer una revisión de la bibliografía de autores que estudian la dependencia es la disparidad a la hora de establecer los requisitos necesarios para considerar a una persona en estado de dependencia. Desde la entrada en vigor de la Ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia<sup>2</sup>, nuestro equipo ha considerado en sus trabajos el uso de la definición que esta Ley hace sobre la dependencia. Además se ha realizado un análisis de correspondencias simple para comparar el comportamiento de los dependientes respecto a la intensidad de las discapacidades.

## 2. MATERIAL Y MÉTODOS

Este trabajo pretende profundizar en el conocimiento de la dependencia en España. Puesto que no toda persona con discapacidad es dependiente y ambos conceptos se han ido modificando a lo largo de los últimos años. La definición de dependencia que se considera en este trabajo es la emitida en la Ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia. En la citada ley se entiende por **dependencia** *el estado de carácter permanente en que se encuentran las personas que, por razones derivadas de la edad, la enfermedad o la discapacidad, y ligadas a la falta o a la pérdida de autonomía<sup>3</sup> física, mental, intelectual o sensorial, precisan de la atención de otra u otras personas o ayudas importantes para realizar actividades básicas de la vida diaria (ABVD)<sup>4</sup> o, en el caso de las personas con discapacidad intelectual o enfermedad mental, de otros apoyos para su autonomía personal.*

---

<sup>1</sup> INE en colaboración con la Secretaría de Estado de Servicios Sociales, Familias y Discapacidad (a través de la Dirección General de Coordinación de Políticas Sectoriales de Personas con Discapacidad y del IMSERSO) y la Fundación ONCE.

<sup>2</sup> LEY 39/2006, de 14 de diciembre, por el se aprueba la “Ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia”.

<sup>3</sup> Es la capacidad de controlar, afrontar y tomar, por propia iniciativa, decisiones personales acerca de cómo vivir de acuerdo con las normas y preferencias propias así como de desarrollar las actividades básicas de la vida diaria.

<sup>4</sup> Son las tareas más elementales de la persona, que le permiten desenvolverse con un mínimo de autonomía e independencia, tales como: el cuidado personal, las actividades domésticas básicas, la movilidad esencial, reconocer personas y objetos, orientarse, entender y ejecutar órdenes o tareas sencillas.

Los datos utilizados en este trabajo proceden de EDAD 2008 que principalmente se basa en la Clasificación Internacional del Funcionamiento, de la Discapacidad y de la Salud (CIF)<sup>5</sup>. La encuesta está diseñada de manera que haya una muestra independiente para cada provincia y en total está dirigida a 96.075 viviendas distribuidas en todo el territorio nacional.

El cuestionario contiene una lista de 44 discapacidades, agrupadas en 8 modalidades, que se han creado según el criterio anatómico-funcional utilizado en otros trabajos en 6 grupos (Puga y Abellán 2004, Gispert *et al.* 2008 e INE 2010), habiendo considerado dentro del grupo “Sensorial” la visión y audición y como grupo de “Comunicación y cognitivo” las de comunicación y aprendizaje (Tabla 1).

Para el análisis de la intensidad de la discapacidad hacemos uso de las respuestas que cada individuo puede dar: 1 sin dificultad; 2 dificultad moderada; 3 dificultad severa; 4 no puede realizar la actividad.

En este trabajo se ha considerado que una persona es dependiente si además de ser discapacitado necesita la ayuda de otra persona para su cuidado personal. Para identificar a tales individuos y el tipo de dependencia (moderada, severa o gran dependiente) se han utilizado las variables L1: “la persona discapacitada recibe cuidados personales”; CC\_B\_12\_1: “días a la semana que la persona cuidadora dedica a prestar los cuidados personales” y CC\_B\_12\_2: “número de horas al día que la persona cuidadora dedica a prestar los cuidados personales” de la encuesta EDAD 2008. De esta forma, la dependencia moderada la consideramos cuando el individuo necesita menos de 15 horas de cuidado a la semana; la dependencia severa cuando necesita entre 15 y 60 horas y por último, la gran dependencia si la persona necesita más de 60 horas de cuidados a la semana.

Por otra parte, en algunos de los resultados hemos considerado en la variable edad los siguientes tramos: [6,25], [26,64], [65,74], [75,84] y mayores o iguales a 85 años.

Para el tratamiento de los datos se han tenido en cuenta los factores de elevación de cada individuo que ofrece la EDAD 2008.

En cuanto a la metodología empleada, hay que indicar que a partir de toda la información obtenida se ha planteado, con las correspondientes técnicas actuariales, un seguro de dependencia muy elemental, para el que era necesario calcular diversas probabilidades de mortalidad en dependencia, de supervivencia en activo y de transición de activo a dependiente; además, otro elemento necesario es la prevalencia en dependencia por de edad.

---

<sup>5</sup> Revisión de la Clasificación Internacional de Deficiencias, Discapacidades y Minusvalías (CIDDM) publicada por la OMS en 1980. Para realizar la nueva versión se llevaron a cabo estudios de campo sistemáticos y consultas internacionales a lo largo de cinco años.

Dado que en otros países y en otros trabajos de investigación la dependencia se toma atendiendo a las discapacidades de las personas junto con el grado de severidad de cada una de ellas, y puesto que la definición de dependencia utilizada en este trabajo difiere de las anteriores, se ha considerado oportuno realizar un análisis de correspondencias. En dicho análisis se pretende relacionar cada una de las discapacidades tanto con los distintos grados de severidad como con los distintos grados de dependencia definidos anteriormente.

**Tabla 1**  
Descripción de los grupos de discapacidades

ESTUDIO PROPIO	CIF	EDAD 2008	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
SENSORIAL	Funciones corporales	Visión	VISI_1_1	Es ciego o sólo distingue la luz y la oscuridad
			VISI_2_1	Tiene dificultad importante para ver la letra de un periódico
			VISI_3_1	Tiene dificultad importante para ver la cara de alguien al otro lado de la calle
			VISI_4_1	Tiene alguna otra dificultad importante de visión
		Audición	AUD_5_1	Es sordo/a
			AUD_6_1	Tiene dificultad importante para oír una alarma, una sirena u otros sonidos fuertes sin ayudas
			AUD_7_1	Tiene dificultad importante para oír una conversación con varias personas sin audífono u otro tipo de ayuda para oír

ESTUDIO PROPIO	CIF	EDAD 2008	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
COMUNICACIÓN Y COGNITIVO	Comunicación	Comunicación	COM_8_1	Tiene dificultad importante para hablar de manera comprensible o decir frases con sentido sin ayudas
			COM_9_1	Tiene dificultad importante para comprender el significado de lo que le dicen los demás sin ayuda de otras personas
			COM_10_1	Tiene dificultad importante para comprender o expresarse a través del lenguaje escrito
			COM_11_1	Tiene dificultad importante para comprender o expresarse a través de gestos, símbolos, dibujos o sonidos
			COM_12_1	Tiene dificultad importante para mantener un diálogo o intercambiar ideas con una o más personas a través del lenguaje hablado, escrito u otro tipo de lenguaje
			COM_13_1	Tiene dificultad importante para utilizar el teléfono sin ayudas y sin supervisión
	Aprendizaje	Aprendizaje	APR_14_1	Tiene dificultad importante para prestar atención con la mirada o mantener la atención con el oído
			APR_15_1	Tiene dificultad importante para aprender a leer, aprender a escribir, aprender a contar (o calcular), aprender a copiar o aprender a manejar utensilios
			APR_16_1	Tiene dificultad importante para llevar a cabo tareas sencillas sin ayudas y sin supervisión
			APR_17_1	Tiene dificultad importante para llevar a cabo tareas complejas sin ayudas y sin supervisión

ESTUDIO PROPIO	CIF	EDAD 2008	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
MOVILIDAD	Movilidad	Movilidad	MOV_18_1	Tiene dificultad importante para cambiar de postura sin ayudas y sin supervisión
			MOV_19_1	Tiene dificultad importante para mantener el cuerpo en la misma posición sin ayudas y sin supervisión
			MOV_20_1	Tiene dificultad importante para andar o moverse dentro de su vivienda sin ayudas y sin supervisión
			MOV_21_1	Tiene dificultad importante para andar o moverse fuera de su vivienda sin ayudas y sin supervisión
			MOV_22_1	Tiene dificultad importante para desplazarse utilizando medios de transporte como pasajero sin ayudas y sin supervisión
			MOV_23_1	Tiene dificultad importante para conducir vehículos sin ayudas
			MOV_24_1	Tiene dificultad importante para levantar o transportar con las manos o brazos un objeto sin ayudas y sin supervisión
			MOV_25_1	Tiene dificultad importante para manipular y mover objetos, utilizando las manos y los brazos sin ayudas y sin supervisión
			MOV_26_1	Tiene dificultad importante para manipular objetos pequeños con manos y dedos sin ayudas y sin supervisión

ESTUDIO PROPIO	CIF	EDAD 2008	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
AUTONOMÍA	Autocuidado	Autocuidado	AUT_27_1	Tiene dificultad importante para lavarse o secarse las diferentes partes del cuerpo sin ayudas y sin supervisión
			AUT_28_1	Tiene dificultad importante para realizar los cuidados básicos del cuerpo sin ayudas y sin supervisión
			AUT_29_1	Tiene dificultad importante para controlar las necesidades o realizar las actividades relacionadas con la micción sin ayudas y sin supervisión
			AUT_30_1	Tiene dificultad importante para controlar las necesidades o realizar las actividades relacionadas con la defecación sin ayudas y sin supervisión
			AUT_31_1	Tiene dificultad importante para realizar las actividades relacionadas con el cuidado menstrual sin ayudas y sin supervisión
			AUT_32_1	Tiene dificultad importante para vestirse o desvestirse sin ayudas y sin supervisión
			AUT_33_1	Tiene dificultad importante para llevar a cabo las tareas de comer o beber sin ayudas y sin supervisión
			AUT_34_1	Tiene dificultad importante para cumplir las prescripciones médicas sin ayudas y sin supervisión
			AUT_35_1	Tiene dificultad importante para evitar situaciones de peligro en la vida diaria sin ayudas y sin supervisión

ESTUDIO PROPIO	CIF	EDAD 2008	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
TAREAS VIDA DOMÉSTICA	Vida doméstica	Vida doméstica	VDOM_36_1	Tiene dificultad importante para organizar, hacer y trasladar las compras de la vida cotidiana sin ayudas y sin supervisión
			VDOM_37_1	Tiene dificultad importante para preparar comidas sin ayudas y sin supervisión
			VDOM_38_1	Tiene dificultad importante para ocuparse de las tareas de la casa sin ayudas y sin supervisión

ESTUDIO PROPIO	CIF	EDAD 2008	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
RELACIONES	Interacciones y relaciones interpersonales	Interacciones y relaciones interpersonales	INTER_39_1	Tiene dificultad importante para mostrar a otras personas afecto, respeto o para transmitir sentimientos
			INTER_40_1	Tiene dificultad importante para relacionarse con extraños
			INTER_41_1	Tiene dificultad importante para crear y mantener relaciones con personas subordinadas, iguales o con cargos superiores
			INTER_42_1	Tiene dificultad importante para crear y mantener relaciones con amigos/as, vecinos/as, conocidos/as o compañeros/as
			INTER_43_1	Tiene dificultad importante para crear y mantener relaciones familiares
			INTER_44_1	Tiene dificultad importante para crear y mantener relaciones sentimentales, de pareja o sexuales

### 3. SEGURO DE DEPENDENCIA PRIVADO

El diseño de un seguro de dependencia privado (Herranz, 2007) pasaría por establecer, de manera precisa, las diferentes coberturas en caso de caer en dependencia, pudiendo ser éstas tanto en forma de servicios como monetarias, y a su vez estas últimas en forma de capital o de renta, o combinando servicios y prestaciones monetarias. Las posibilidades de formulación son múltiples y, como ocurre con otros tipos de seguros, las Compañías podrían diseñar productos específicos para su comercialización dependiendo del nicho del mercado al que deseen dirigirse.

#### 3.1. Planteamiento teórico del seguro de dependencia privado

Se va a cuantificar un riesgo consistente en la posibilidad de ocurrencia del suceso “caer en dependencia” o “precisar la ayuda de terceras personas para su cuidado” a partir de una edad de entrada en riesgo establecida en 65 años, para un individuo que en el momento de la contratación cuenta con una edad actuarial de  $x$  años ( $x < 65$ ).

Con el fin de acotar este estudio nos centramos en un solo producto para su explicación teórica y mostraremos el cálculo de alguno de los elementos que intervienen en el mismo. Este es un tipo de seguro de dependencia diferido y vitalicio con prestación en forma de renta vitalicia y constante de cuantía anual  $b$ .

Si se realizara su pago en forma de prima única su formulación teórica vendría dada por:

$${}_{(65-x)}l_{renta}\Pi_x = {}_{(65-x)}p_x^{aa} \cdot v^{(65-x)} \cdot b \cdot \sum_{t=1}^{\omega-65} {}_t p_{65}^{ad} \cdot a_{65+t}^d \cdot v^t \quad (1)$$

donde

$i$  = Tipo de interés técnico utilizado.

$v^t = (1+i)^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}$  = factor de actualización financiera.

$b$  = Cuantía constante de la renta a percibir en caso de caer en dependencia.

${}_m p_x^{aa}$  Probabilidad de que un individuo en estado de activo<sup>6</sup> a la edad  $x$  sobreviva en activo a la edad  $x+m$ .

${}_t p_{x+m}^{ad}$  Probabilidad de que un individuo inicialmente activo a la edad  $x+m$  pase a ser dependiente en el transcurso de  $t$ -ésimo año.

${}_t p_x^{dd}$  Probabilidad de que un individuo en estado de dependiente a la edad  $x$  permanezca vivo y dependiente a la edad  $x+t$ .

El desarrollo de la renta actuarial  $a_{x+m+t}^d$  vendría dado por:

$$\begin{aligned} a_{x+m+t}^d &= {}_1 p_{x+m+t}^{dd} \cdot v^1 + {}_2 p_{x+m+t}^{dd} \cdot v^2 + {}_3 p_{x+m+t}^{dd} \cdot v^3 + \dots + {}_{\omega-(x+m+t)} p_{x+m+t}^{dd} \cdot v^{\omega-(x+m+t)} = \\ &= \sum_{h=1}^{\omega-(x+m+t)} {}_h p_{x+m+t}^{dd} \cdot v^h \end{aligned}$$

En el caso de realizarse el pago de la prima de manera periódica mientras el asegurado permaneciese activo sería:

$${}_{(65-x)/renta} \Pi_x = P \cdot \ddot{a}_{x:(65-x)}^{aa}$$

Donde  $\ddot{a}_{x:(65-x)}^{aa}$  sería el valor actual de una renta actuarial unitaria inmediata, prepagable y temporal hasta los 65 años:

$$\ddot{a}_{x:(65-x)}^{aa} = 1 + {}_1 p_x^{aa} \cdot v^1 + {}_2 p_x^{aa} \cdot v^2 + {}_3 p_x^{aa} \cdot v^3 + \dots + {}_{65-x-1} p_x^{aa} \cdot v^{(65-x-1)} = \sum_{t=0}^{65-x-1} {}_t p_x^{aa} \cdot v^t$$

Por consiguiente el importe de la prima periódica sería:

$$P = \frac{{}_{(65-x)/renta} \Pi_x}{\ddot{a}_{x:(65-x)}^{aa}} = \frac{{}_{(65-x)/renta} \Pi_x}{\sum_{t=0}^{65-x-1} {}_t p_x^{aa} \cdot v^t} = \frac{{}_{65-x} p_x^{aa} \cdot v^{(65-x)} \cdot b \cdot \sum_{t=1}^{\omega-65} {}_t p_{65}^{ad} \cdot a_{65+t}^d \cdot v^t}{\sum_{t=0}^{65-x-1} {}_t p_x^{aa} \cdot v^t}$$

<sup>6</sup> Llamamos activo al no dependiente.



Para poder realizar la transformación de la formulación teórica a la cuantificación económica es fundamental obtener las probabilidades  ${}_t p_x^{aa}$ ,  ${}_t p_x^{ad}$  y  ${}_t p_x^{dd}$ . Para ello se deben generar, para hombres y mujeres, las tablas a de probabilidad de caer en dependencia, de cabezas vivas en estado de activo para cualquier edad  $x$  y la tabla de cabezas vivas en estado de dependencia a cada edad  $x$ .

Nuestro equipo de investigación trabaja estas tablas a partir del estudio de las encuestas sobre discapacidad y dependencia de los años 1999 y 2008. Los cálculos de todas las tablas pueden consultarse en el trabajo de Herranz 2007 que fue realizado con los datos de la encuesta de 1999. En este trabajo dado lo extenso del desarrollo de todas las tablas, nos proponemos realizar el cálculo de la que se considera primordial, la prevalencia de la dependencia.

Veamos cómo obtener teóricamente la tabla de probabilidad de caer en dependencia  $p_x^{ad}$ .

Si partimos del colectivo de personas dependientes, suponiendo que ese estado no tiene retroceso, la relación entre la contingencia de supervivencia y fallecimiento durante un año viene dada por el hecho de ser sucesos contrarios,  $p_x^{dd} + q_x^d = 1$ , siendo  $q_x^d$  es la tasa anual de fallecimiento de dependientes a la edad  $x$

Por otra parte, la función  $I_x^d$  indica el número de personas de edad  $x$  que son dependientes, su función nos refleja su evolución respecto a la edad, recogiendo las entradas de los que se van haciendo dependientes y las salidas por fallecimiento de los mismos.

Se tiene además, la función  $I_x^a$  que refleja el número de personas de edad  $x$  que están en estado de activo; tiene dos causas de salida, dependencia o muerte; cabe destacar que existiría la posibilidad de fallecer habiendo pasado por el estado intermedio de dependencia en el transcurso del año, pero al tratarse de un seguro con carácter anual y ser ciertamente difícil cuantificar su probabilidad, hemos obviado esta posibilidad, la relación vendría dada como se expresa a continuación:

$$p_x^{aa} + p_x^{ad} + q_x^a = 1$$

Una vez establecidas las probabilidades asociadas a la dependencia, podemos describir la evolución de  $I_x^d$  y de  $I_x^a$  como sigue:

$$\begin{aligned} I_{x+1}^d &= I_x^d - I_x^d \cdot q_x^d + I_x^a \cdot p_x^{ad} \\ I_{x+1}^a &= I_x^a - I_x^a \cdot q_x^a - I_x^d \cdot p_x^{ad} \end{aligned}$$

La probabilidad de transición anual de activo a dependiente  $p_x^{ad}$  se podría obtener de despejar:

$$p_x^{ad} = \frac{l_{x+1}^d - l_x^d + l_x^d \cdot q_x^d}{l_x^a}$$

Por otra parte la función  $l_x$  nos muestra la evolución de los elementos de un colectivo teórico, número de cabezas vivas a la edad  $x$ , en el que existe una sola causa de salida, la muerte y puede ser descompuesto en activos y dependientes,

$$l_x = l_x^a + l_x^d$$

Por ello, se hace fundamental establecer qué parte del colectivo es dependiente, y esto vendría dado por:

$$l_x^d = l_x \cdot \beta_x$$

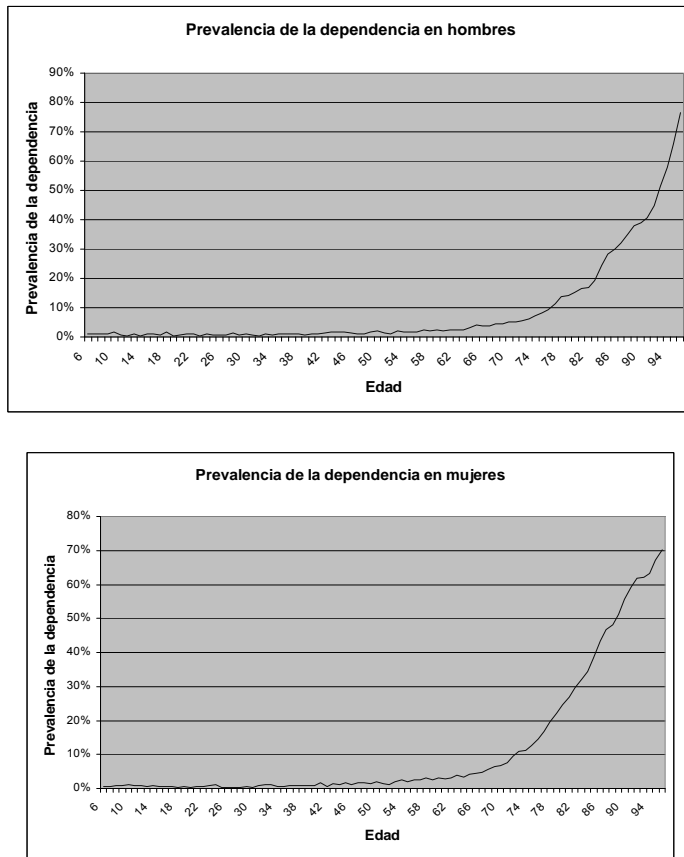
Siendo  $\beta_x$  la tasa de dependencia o prevalencia en dependencia para una persona de edad  $x$ , es decir, proporción de casos de dependencia a la edad  $x$  sobre el total de población de esa edad. Por último, otro elemento importante en la evolución de los dependientes vendría dado por  $q_x^d$ .

### 3.2. Aproximación de la prevalencia de la dependencia

En este apartado se realiza una aproximación de la prevalencia de la dependencia. En la figura 1 se puede apreciar la evolución de la prevalencia en dependencia para cada edad en hombres y mujeres respectivamente.

**Figura 1**

Prevalencia dependencia hombres y mujeres por tramos de edad.



Como puede apreciarse en la Figura 1, la edad es un factor fundamental a la hora de hablar sobre dependencia, debido a que el avance en la longevidad no conlleva un mantenimiento de las condiciones físicas sino una mayor dificultad, e incluso imposibilidad, para realizar tareas de la vida diaria. Además, se aprecia una diferencia entre sexos, siendo la prevalencia en dependencia de mujeres superior a la de hombres a partir de 70 años.

Abundando en un análisis descriptivo se han calculado los porcentajes de dependiente atendiendo a los distintos grupos de discapacidades dados en la tabla 1. Así, en la tabla 2 se puede observar el porcentaje de individuos que hay para cada uno de los grados de dependencia establecidos en el apartado 2 según el tipo de discapacidad que tienen, desglosados por tramo de edad y sexo. Esto sería valioso en tanto que con un mayor conocimiento sobre el origen de la dependencia se podría establecer la cuantificación económica de la renta a percibir según el grado de dependencia en que se incurriese.

**Tabla 2**  
Porcentaje de individuos por tipo de discapacidad y grado de dependencia

	Dependencia Moderada		Dependencia Severa		Gran Dependencia	
	%Hombres	%Mujeres	%Hombres	%Mujeres	%Hombres	%Mujeres
<i>Sensorial</i>						
Menores o iguales a 25	3,0%	3,6%	6,3%	9,8%	17,2%	23,2%
[26, 64]	2,9%	3,6%	5,5%	4,9%	7,4%	5,6%
[65, 74]	3,8%	6,0%	6,5%	7,8%	9,6%	10,4%
[75, 84]	5,2%	8,5%	11,8%	15,9%	13,5%	17,9%
Mayores o iguales a 85	7,0%	8,6%	18,8%	18,8%	25,2%	38,5%
<i>Cognitiva+comunicación</i>						
Menores o iguales a 25	4,7%	5,1%	14,8%	21,3%	30,4%	36,8%
[26, 64]	4,1%	4,9%	11,5%	10,2%	17,6%	14,5%
[65, 74]	4,3%	6,2%	7,6%	9,7%	18,1%	17,2%
[75, 84]	5,1%	7,7%	14,2%	18,6%	20,2%	26,9%
Mayores o iguales a 85	6,1%	7,1%	20,3%	19,8%	33,5%	45,2%
<i>Movilidad</i>						
Menores o iguales a 25	4,9%	6,3%	14,0%	21,9%	44,4%	46,9%
[26, 64]	6,5%	8,5%	11,5%	11,6%	16,8%	10,1%
[65, 74]	7,0%	9,0%	11,8%	14,1%	24,4%	15,9%
[75, 84]	8,0%	11,1%	20,7%	19,5%	28,6%	25,0%
Mayores o iguales a 85	8,0%	8,6%	23,9%	21,7%	38,2%	42,6%
<i>Autonomía</i>						
Menores o iguales a 25	6,8%	6,5%	20,6%	24,7%	52,5%	55,2%
[26, 64]	11,3%	11,1%	21,1%	18,7%	31,5%	18,6%
[65, 74]	10,3%	11,9%	17,9%	18,7%	32,6%	24,1%
[75, 84]	11,5%	12,0%	24,6%	24,1%	32,7%	31,6%
Mayores o iguales a 85	9,2%	8,3%	26,7%	23,5%	41,7%	47,0%
<i>AVD</i>						
Menores o iguales a 25	5,9%	5,2%	23,0%	26,0%	53,1%	47,5%
[26, 64]	7,8%	10,4%	18,6%	14,6%	27,8%	12,4%
[65, 74]	8,1%	10,9%	16,1%	16,3%	34,1%	19,1%
[75, 84]	9,0%	13,0%	26,1%	22,3%	32,9%	28,2%
Mayores o iguales a 85	8,1%	9,4%	27,7%	22,7%	40,6%	44,4%
<i>Elaboración propia</i>						

Como puede observarse, la tendencia es creciente respecto a la edad para todas las discapacidades salvo para el tramo inicial de edad en el que la caída en dependencia podría venir relacionada con problemas congénitos o de temprana edad y que le acarrearían ciertos problemas en el desarrollo de las habilidades propias del aprendizaje en las edades tempranas de la vida.

#### 4. ANÁLISIS DE CORRESPONDENCIAS

En este apartado se realizan dos análisis de correspondencias simples para analizar, por una parte, las relaciones del tipo de discapacidad y los grados de severidad asociados a cada discapacidad y por otra las relaciones entre el tipo de discapacidad y los grados de dependencia establecidos en el apartado 2.

Sean las variables  $X =$  “tipo de discapacidad” e  $Y =$  “severidad de la discapacidad” dos variables categóricas con valores  $\{x_3, \dots, x_{44}\}$  y  $\{y_1, \dots, y_4\}$ , respectivamente.

En lo siguiente se muestran los resultados obtenidos al realizar un Análisis de Correspondencias con normalización simétrica para las dos variables anteriores.

De las contribuciones de cada una de las  $K = \min\{42-1, 4-1\} = 3$  dimensiones calculadas por el programa a la inercia total se observa que, la primera dimensión contribuye un 96.7% a dicha inercia y que las dos primeras dimensiones contribuyen un 99.3%, por lo que se concluye que las dependencias observadas vienen adecuadamente explicadas por las dos primeras dimensiones.

En la figura 2 se muestran las puntuaciones de cada uno de los perfiles de las variables del estudio, así como las contribuciones totales de cada perfil fila a la inercia de cada dimensión y las contribuciones relativas de cada dimensión a la inercia del punto. Se observa (ver Figura 3) que el primer factor distingue los grados de severidad de las discapacidades y separa claramente la severidad grave de las otras dos (moderada y severa).

En la figura 2 se puede apreciar que existen ciertas discapacidades que se asocian mejor con ciertos estados de severidad que con otros. Por ejemplo, las variables 13, 35, 36 y 38 se asocian más con una severidad grave.

Figura 2

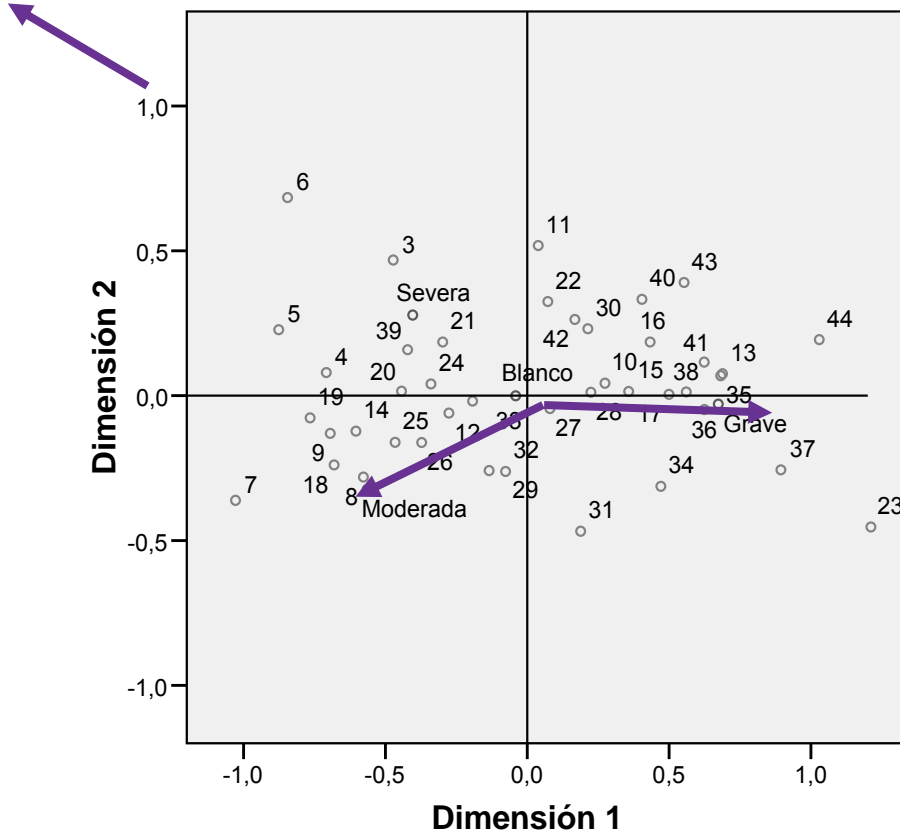
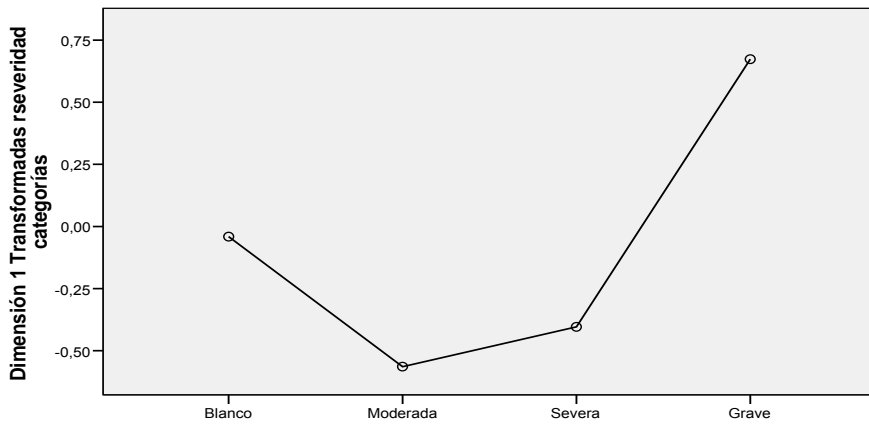


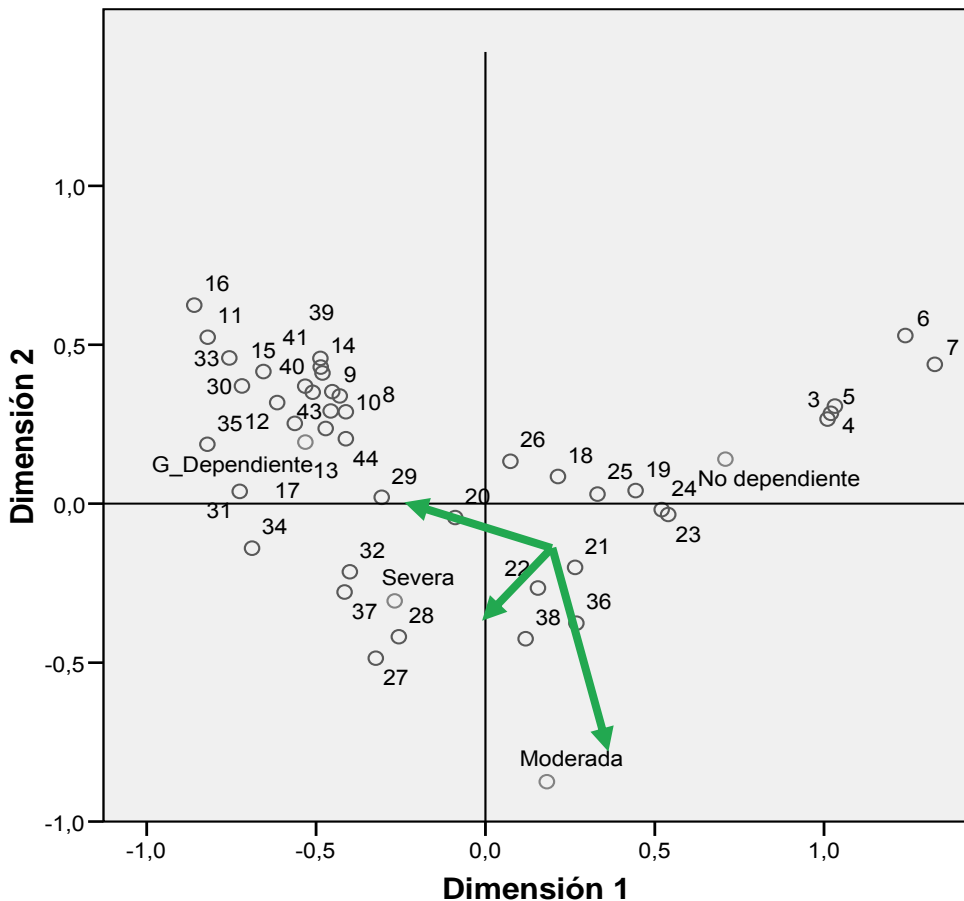
Figura 3

Simétrica Normalización



las variables 8,14 y 18 se asocian a una severidad moderada y por último, las variables 12, 20, 21, 24, 26 y 39 a una severa. Así, se tiene que discapacidades del tipo AVD como “preparar comidas” o de interrelaciones como “mostrar afecto” o de movilidad como “cambiar de postura” se asocian a un estado grave dentro de la severidad, mientras que actividades del tipo “desplazarse en medios de transporte” o “relacionarse con extraños” se asocian más a un estado severo. Y por último, aquellas actividades que tienen que ver con la visión o la audición se asocian en mayor medida con severidades moderadas.

**Figura 4**



A continuación realizamos el análisis de correspondencia con las variables X = “tipo de discapacidad” e Y = “grado de dependencia”. En este caso, la primera dimensión explica el 90.8%, entre la primera y la segunda dimensión se explica el 99.8% por lo que nos quedamos con estas dos dimensiones ya que explican adecuadamente las relaciones observadas por las dos variables del estudio.

En la figura 4 se observa que al igual que anteriormente con la severidad de la discapacidad hay ciertos tipos de discapacidad que se asocian mejor con estados de gran dependencia o con estados de dependencia severa, estos son, en su mayoría, los que se asociaban con un grado de severidad grave de la discapacidad en el anterior análisis.

## 5. CONCLUSIONES

A través de un seguro de dependencia elemental que se ha formulado, se pone de manifiesto la necesidad de contar con datos sobre la mortalidad de los dependientes y sobre posibilidad de caer en dependencia.

La mayor parte de los trabajos sobre seguros de dependencia, hasta el momento, han elaborado tales datos con la EDDDES99. Nosotros hemos trabajado con la EDAD2008 que, aunque mejora la información de la anterior con preguntas más concretas y dirigidas a la discapacidad, sigue presentando lagunas que hacen difícil la obtención de las probabilidades necesarias para el cálculo de dicho seguro.

En este trabajo hemos obtenido la prevalencia de la dependencia para hombres y mujeres por edad, y observamos que a partir de los 75 años la de las mujeres tiene una pendiente y unos valores mayores.

Puesto que a las aseguradoras les puede resultar interesante saber si determinados tipos de discapacidad conllevan un grado mayor o menor de dependencia, hemos realizado, además de un análisis descriptivo, dos análisis de correspondencias simples. Se deduce de ellos que las discapacidades asociadas a los grados altos de severidad de las mismas son coincidentes en su mayoría, con los grados de dependencia más altos, que hemos definido en este trabajo.

## BIBLIOGRAFÍA

Bermúdez Morata, L.; Bolancé Losilla, C.; Guillén Estany, M.; Gondolbeu, K.M. (2008). "Tipologías sociodemográficas de individuos con dependencia en España y su supervivencia en estado de Salud". *Revista Española de Geriátría Gerontológica*, 43(1), 19-31.

Haberman, S.; Pitacco, E. (1999). *Actuarial Models for Disability Insurance*. Chapman & Hall/CRC, 1999.

Herranz Peinado, P. (2007). Tesis Doctoral con el título "Análisis de la Dependencia de las Personas Mayores en España. Aproximación Actuarial a las Bases Técnicas de un Seguro Privado de Dependencia". Universidad Pablo de Olavide.



Herranz Peinado, P; Guerrero Casas, F.M.; Segovia González, M.M. (2006). "Un acercamiento al coste de la dependencia". *Revista electrónica de comunicaciones y trabajos de Asepuma*. Rect@, 2006.

Instituto Nacional de Estadística (2008) [Web]. Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estados de Salud, 1999. Encuesta sobre Discapacidad, Autonomía personal y Situaciones de dependencia. ([http://www.ine.es/inebmenu/mnu\\_salud.htm](http://www.ine.es/inebmenu/mnu_salud.htm))

Organización Mundial de la Salud (2001) [Web]. Clasificación Internacional del Funcionamiento, de la Discapacidad y de la Salud. Edita Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales. Secretaría General de Asuntos Sociales. Instituto de Migraciones y Servicios Sociales (IMSERSO) (<http://www.imsersomayores.csic.es>).

Pallás, J.M. "El perfil de la dependencia en España: Un análisis de la encuesta de discapacidades de 1999". *Revista Española de Salud Pública*, vol. 82: 653-665.

Pociello, E.; Varea, J. (2004). "El Seguro de Dependencia. Una visión general". *Cuadernos de la Fundación Mapfre Estudios* nº 81. Marzo.

Puga González, M<sup>a</sup>D.; Abellán García, A. (2004). *El proceso de discapacidad. Un análisis de la encuesta sobre discapacidades, deficiencia y estado de salud*. Alcobendas: Fundación Pfizer.

## Ponencia 27

# LA SOSTENIBILIDAD DEL SISTEMA DE PROTECCIÓN DE DESEMPLEO ESPAÑOL EN EL PERIODO 1981-2008

José Enrique Devesa Carpio, Mar Devesa Carpio,  
Inmaculada Domínguez Fabián, Borja Encinas Goenechea,  
Robert Meneu Gaya y Amparo Nagore García

### RESUMEN

La protección de desempleo es una de las prioridades actuales del Sistema de la Seguridad Social, tanto por el alto porcentaje de población afectado por este problema como por el impacto del mismo sobre la exclusión social, las desigualdades y el bienestar de la sociedad. En este contexto, resulta necesario realizar un estudio financiero de la sostenibilidad y equidad del sistema de protección al desempleo. Este es llevado a cabo desde una óptica de microsimulación, sobre los datos de la Muestra Continua de Vidas Laborales. A partir de los resultados obtenidos se abre el debate a posibles reformas del mismo, tan demandadas, tanto por los agentes sociales como evidenciadas por la literatura.

**PALABRAS CLAVE:** Sostenibilidad, equidad, MCVL, prestación, desempleo.

### 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los principales efectos de la actual crisis económica ha sido el crecimiento de la tasa de paro en España, con la traslación de su efecto a las prestaciones de desempleo.

Si se observa la evolución de la tasa de paro en España (ver Gráfico 1) y la evolución de los ingresos y gastos del Presupuesto del Servicio Público de Empleo Estatal (SPEE) (ver Tablas 3 y 4), se puede constatar que, unido al aumento de la tasa de paro está aumentando el gasto en prestaciones y disminuyendo el ingreso por cotizaciones. Estos movimientos están siendo compensados por un aumento de las transferencias del Estado hacia el Presupuesto del SPEE. Estas cifras junto con las actuales demandas de los agentes sociales y la literatura reciente que analiza el sistema de protección del desempleo (a modo de ejemplo, Tobes (2006), Estrada *et al.* (2009)) potencian la necesidad de revisar el actual sistema de la protección de desempleo.

**Tabla 1**  
Evolución del tipo de cotización al desempleo en el Régimen General  
de la Seguridad Social. 1981-2008

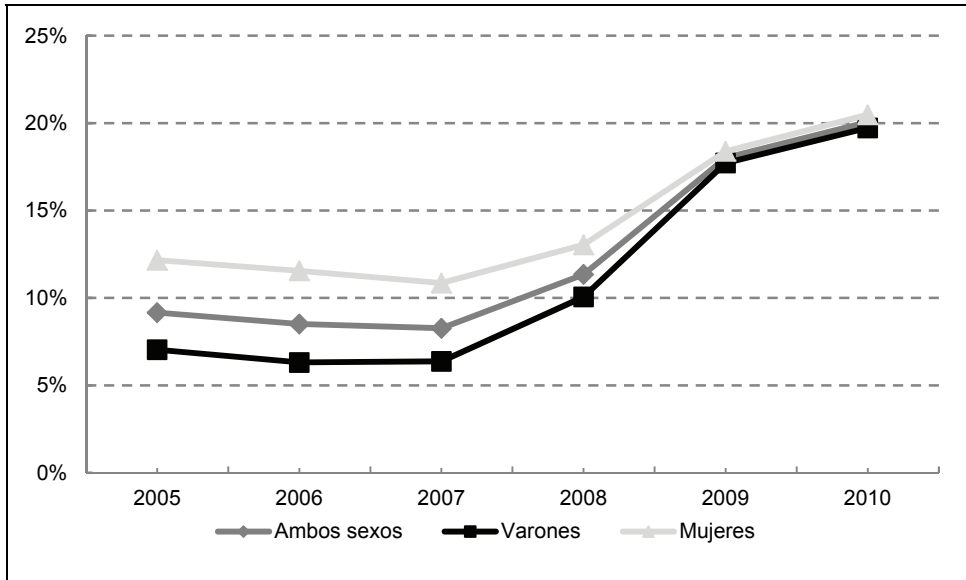
	<b>Indefinidos</b>	<b>Tiempo completo</b>	<b>Tiempo parcial</b>	<b>ETT</b>
<b>1981</b>	4.00%			
<b>1982</b>	5.20%			
<b>1983</b>	5.80%			
<b>1984</b>	6.30%			
<b>1985</b>	6.30%			
<b>1986</b>	6.30%			
<b>1987</b>	6.30%			
<b>1988</b>	6.30%			
<b>1989</b>	6.30%			
<b>1990</b>	6.30%			
<b>1991</b>	6.30%			
<b>1992</b>	7.30%			
<b>1993</b>	7.30%			
<b>1994</b>	7.80%			
<b>1995</b>	7.80%			
<b>1996</b>	7.80%			
<b>1997</b>	7.80%			
<b>1998</b>	7.80%			
<b>1999</b>	7.80%	8.30%	9.30%	9.30%
<b>2000</b>	7.55%	8.30%	9.30%	9.30%
<b>2001</b>	7.55%	8.30%	9.30%	9.30%
<b>2002</b>	7.55%	8.30%	9.30%	9.30%
<b>2003</b>	7.55%	8.30%	9.30%	9.30%
<b>2004</b>	7.55%	8.30%	9.30%	9.30%
<b>2005</b>	7.55%	8.30%	9.30%	9.30%
<b>2006</b>	7.55%	8.30%	9.30%	9.30%
<b>2007</b>	7.30%	8.30%	9.30%	9.30%
<b>2008</b>	7.30%	8.30%	9.30%	9.30%

Fuente: Elaboración propia. A partir de la Ley de Presupuestos Generales.

Muchos son los trabajos que analizan el sistema de desempleo, desde la óptica de los flujos de caja, considerando los ingresos que se destinan cada año a esta prestación así como los pagos que genera la misma.

**Gráfico 1**

Evolución de la tasa de paro en España. Periodo 2005-2010



Fuente: INE

Esta investigación centra su objetivo en valorar la sostenibilidad financiera del sistema de desempleo, en base a la equivalencia financiera que se produce en el horizonte temporal considerado, entre las aportaciones (cotizaciones de la contingencia de desempleo) y las prestaciones contributivas. Se presentarán datos globales, pero también se analizará de forma desagregada a los individuos, a través de un análisis de microsimulación que permitirá estudiar la equidad del sistema, así como determinar para qué tipos de individuos (por ejemplo, que tengan más episodios de desempleo a lo largo de su vida activa) los resultados son significativamente diferentes a otros (por ejemplo, aquéllos cuyos episodios de desempleo sean menores). Además, se podrá evaluar qué grado de transferencia de recursos (solidaridad) existe entre los diferentes grupos de individuos.

Los resultados proporcionarán, previsiblemente, elementos de evaluación para analizar alternativas al modelo actual.

En el siguiente epígrafe describimos sucintamente las principales características del sistema de protección por desempleo. En el epígrafe 3 se describe la base de datos utilizada, la Muestra Continua de Vidas Laborales (MCVL), mientras que en el epígrafe 5 se define y se obtienen las medidas de sostenibilidad empleadas para analizar el sistema. A continuación se presentan las principales conclusiones y la bibliografía.

## 2. LA ACCIÓN PROTECTORA DE LA SEGURIDAD SOCIAL EN MATERIA DE DESEMPLEO

El desempleo es una situación cuya protección está incluida dentro del campo de la acción protectora de la Seguridad Social, de acuerdo con las previsiones contenidas en el artículo 41 de la Constitución Española. El modelo español de prestaciones por desempleo fue creado por ley en 1961 e incorporado en la Ley de Bases de la Seguridad Social en 1963.

La Ley 33/1987, de 23 de diciembre, de Presupuestos Generales del Estado para 1988 establece una financiación conjunta y general del sistema, sin diferenciar entre los dos niveles de protección (nivel contributivo y asistencial).

La financiación de la prestación de desempleo se realiza a través de dos vías:

1. Cotizaciones de empresarios y trabajadores. Siendo la base de cotización la correspondiente a accidentes de trabajo y enfermedades profesionales, y el tipo de cotización se fija cada año en la Ley de Presupuestos Generales del Estado. En la Tabla 1 se recoge la evolución del tipo de cotización para el periodo objeto de análisis de este trabajo (1981-2008) y para el Régimen General de la Seguridad Social.
2. Aportaciones del Estado. Se aprueban cada año en la correspondiente Ley de Presupuestos Generales del Estado.

En relación a las prestaciones de desempleo, se distinguen dos tipos: las prestaciones contributivas y los subsidios. Este estudio se va a centrar en el nivel contributivo, por tanto, sólo se va a considerar la financiación vía cotizaciones y las prestaciones contributivas. Todo ello con la finalidad de analizar exclusivamente la sostenibilidad del sistema contributivo, para conocer si existe relación entre las aportaciones y las prestaciones.

La normativa existente sobre la prestación de desempleo es muy amplia, la referencia principal de este trabajo es el RDL 1/1994 de 20 de junio, por el que se aprueba el Texto Refundido de la Ley General de la Seguridad Social, en el que se recoge el funcionamiento actual de la prestación.

En cuanto a la cuantía de la prestación (art. 206, y 211 del RDL 1/1994) en el nivel contributivo, ésta comprende:

- Prestación por desempleo, que es igual al 70% (180 primeros días) y 60% (siguientes días) de la Base Reguladora, que es el promedio de la base de cotización de accidentes de trabajo de los 6 meses anteriores a la situación de desempleo. De esta cuantía se destinará el 65% de la aportación del trabajador a la contingencia de jubilación, es decir,  $65\% \cdot 4.70\% \cdot$  Base de cotización de contingencias comunes, al pago de la correspondiente cuota de la Seguridad Social.

- Abono de la aportación de la empresa a la contingencia de jubilación (23.6%) y el 35% de la aportación del trabajador (4.70%) a dicha contingencia.

Además, la normativa establece unos límites de prestación máxima y mínima, que están en función de las condiciones familiares del individuo, siendo:

a) La cuantía de la prestación mínima:

- Sin hijos a cargo: 80% IPREM mensual + 1/6 (parte proporcional de las pagas extra).
- Al menos un hijo a cargo: 107% IPREM mensual + 1/6 (parte proporcional de las pagas extra).

b) La cuantía de la prestación máxima:

- Sin hijos a cargo: 175% del IPREM.
- Con un hijo a cargo: 200% del IPREM.
- Con dos o más hijos a cargo: 225% del IPREM.

La duración de la prestación contributiva está en función del número de días cotizados en los últimos 6 años, resultando aproximadamente una relación de 1/3 del periodo cotizado (Ver Tabla 2), siendo el periodo mínimo de cotización necesario para acceder a la prestación contributiva de 12 meses en los 6 años anteriores a la situación de desempleo. El periodo máximo de disfrute de esta prestación es de 720 días.

**Tabla 2**

Duración de la prestación en función del periodo de cotización.

<b>Periodo de ocupación cotizada en los últimos 6 años</b>	<b>Duración de la prestación (días)</b>
Desde 360 hasta 539 días	120
Desde 540 hasta 719 días	180
Desde 720 hasta 899 días	240
Desde 900 hasta 1.079 días	300
Desde 1.080 hasta 1.259 días	360
Desde 1.260 hasta 1.439 días	420
Desde 1.440 hasta 1.619 días	480
Desde 1.620 hasta 1.799 días	540
Desde 1.800 hasta 1.979 días	600
Desde 1.980 hasta 2.159 días	660
Desde 2.160 días	720

Fuente: SPEE

**Tabla 3**  
Evolución de los Ingresos. Periodo 2004-2010. (En millones de euros)

Año	Cuotas Sociales			Aportación Estado	Otros (tasas)	FSE	TOTAL
	Desempleo	Formación	Total				
<b>2004</b>	15,450.76	1,500.91	16,951.67	0	467.42	804.33	18,223.42
<b>2005</b>	16,773.14	1,625.55	18,398.69	0	375.11	815.34	19,589.14
<b>2006</b>	18,245.46	1,776.00	20,021.46	6	754.34	905.86	21,687.66
<b>2007</b>	19,355.86	1,930.00	21,285.86	6	396.83	941.51	22,630.20
<b>2008</b>	19,850.22	2,004.52	21,854.74	0.06	321.41	397.45	22,573.66
<b>2009</b>	18,418.80	1,913.87	20,332.67	19,247.70	370.54	517.57	40,468.48
<b>2010(*)</b>	18,600.00	1,920.00	20,520.00	16,490.00	360	620	37,990.00

Fuente: SPEE

**Tabla 4**  
Evolución del Gasto en Desempleo. Periodo 2003-2009. (En millones de euros)

Año	Prestaciones Contributivas			Subsidios			REAS	RAI	Total Prestac.
	Prestac.	Cuotas	Total	Subsidios	Cuotas	Total			
<b>2004</b>	6,405.0	2,735.4	9,140.4	1,636.5	324.5	1,961.0	885.1	163.4	12,150.0
<b>2005</b>	6,867.3	2,883.3	9,750.6	1,748.8	359.1	2,107.9	885.6	221.2	12,965.3
<b>2006</b>	7,587.1	3,013.8	10,600.9	1,800.4	381.0	2,181.4	877.8	250.0	13,910.1
<b>2007</b>	8,261.2	3,265.8	11,526.9	1,900.9	433.1	2,334.0	844.9	322.7	15,028.4
<b>2008</b>	11,317.5	4,467.8	15,785.3	2,418.1	568.2	2,986.3	917.7	373.2	20,062.5
<b>2009</b>	19,224.1	7,579.3	26,803.4	3,741.3	582.6	4,323.8	815.3	423.4	32,365.9
<b>2010 (*)</b>	16,934.4	6,025.8	22,960.2			8,056.5	767.3	592.5	32,376.5

Fuente: SPEE

### 3. FUENTE DE DATOS: LA MUESTRA CONTINUA DE VIDAS LABORALES (MCVL)

La fuente de datos utilizada para la construcción de la base de datos que nos permite realizar este análisis de microsimulación es la MCVL. Ésta se elabora por la Dirección General de Ordenación de la Seguridad Social anualmente desde el año 2004. La MCVL es un conjunto organizado de microdatos anónimos extraídos de diversos registros administrativos: la Seguridad Social, el Padrón Municipal de Habitantes y, dependiendo de las versiones, la Agencia Tributaria. En ella se recopila toda la información existente sobre un determinado colectivo de personas, algo más de un millón, no sólo desde el punto de vista de la afiliación durante los periodos activos sino también en lo referente a las prestaciones sociales recibidas.

La población de la que se extrae la muestra está constituida por todas aquellas personas que, en algún momento del año de referencia, han mantenido algún tipo de relación económica con la Seguridad Social, bien porque estuvieran cotizando (“activos”) o percibiendo algún tipo de prestación contributiva (“pasivos”), con independencia del tiempo en que hayan permanecido en esa situación.

Esta fuente de datos es cada vez más utilizada para su explotación por los investigadores, principalmente en estudios sobre pensiones y mercado de trabajo (Cantó *et al.* (2003), Cebrián *et al.* (2011) García, J.I. (2008), Toharia (2008), Toharia *et al.* (2009) entre otros). Son referentes para trabajar con la MCVL los artículos de García (2008), Lapuerta (2010) y Arranz *et al.* (2011).

La técnica utilizada para explotar la muestra es la microsimulación, técnica cada vez más utilizada en el ámbito fiscal, para simular posibles reformas impositivas a partir de datos microeconómicos y evaluar los efectos de dichas reformas ex-ante y ex-post, sobre la distribución de la renta, el bienestar de los ciudadanos, etc.

En este estudio se aplica un algoritmo que reproduce las condiciones de financiación (vía cotizaciones) y pago de las prestaciones de desempleo contributivas correspondientes al periodo objeto de estudio [1981, 2008], caracterizado por continuas reformas. A partir de los resultados obtenidos se analiza la sostenibilidad y equidad del sistema de prestaciones en el nivel contributivo.

#### **4. ANÁLISIS DE LA SOSTENIBILIDAD Y EQUIDAD DEL SISTEMA DE PRESTACIONES DE DESEMPLEO EN ESPAÑA**

Para cumplir con los objetivos propuestos, es decir, analizar la equidad del sistema de protección al desempleo en España y valorar la sostenibilidad y el equilibrio financiero del sistema en su parte contributiva, vamos a utilizar los siguientes ratios:

- Coste por Prestación Unitaria.
- Tanto Interno de Rendimiento (TIR).
- Saldo Financiero.

Este análisis se lleva a cabo tanto a nivel agregado (el sistema en su conjunto) como para diferentes niveles de desagregación de la información (sexo, tramo de edad, combinación de contratos, etc.). Consideramos que trabajar con un adecuado nivel de desagregación de la información nos va a permitir identificar aquellos factores determinantes de las posibles inequidades del sistema y fuentes del desequilibrio financiero.

Diremos que el sistema de prestación de desempleo es equitativo si, a priori, todos los participantes tienen la misma rentabilidad esperada, es decir el mismo TIR. Además, para determinar la existencia o no de equidad se puede comparar el Coste por Prestación Unitaria de los diferentes individuos o colectivos.



Existe desequilibrio financiero cuando no se cumple el principio de equivalencia financiera, es decir, cuando el valor financiero de todas las cotizaciones no sea igual al valor financiero de todas las prestaciones. Para cuantificar este desequilibrio en términos absolutos utilizamos el Saldo Financiero y, en términos relativos, el TIR y el Coste por Prestación Unitaria.

A continuación, se describe la construcción e interpretación de los indicadores que hemos utilizado en el análisis.

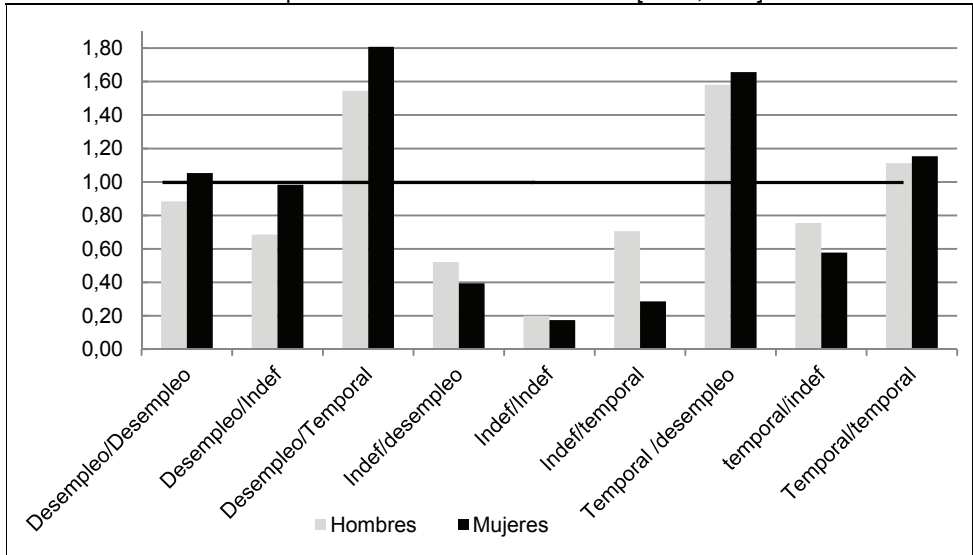
#### 4.1. Coste por Prestación Unitaria

Este ratio se obtiene mediante el cociente del Sumatorio del Valor financiero de las prestaciones y el Sumatorio del Valor financiero de las cotizaciones correspondientes al periodo  $[t, t + n]$  y valoradas en el momento “ $t + n$ ”.

A través del Coste por Prestación Unitaria se analiza, desde el punto de vista financiero, cuál es el coste de entregar una unidad monetaria de prestación. Si el coste es mayor que uno el sistema no será financieramente sostenible porque entrega mayores prestaciones que las aportaciones que recibe. En resumen:

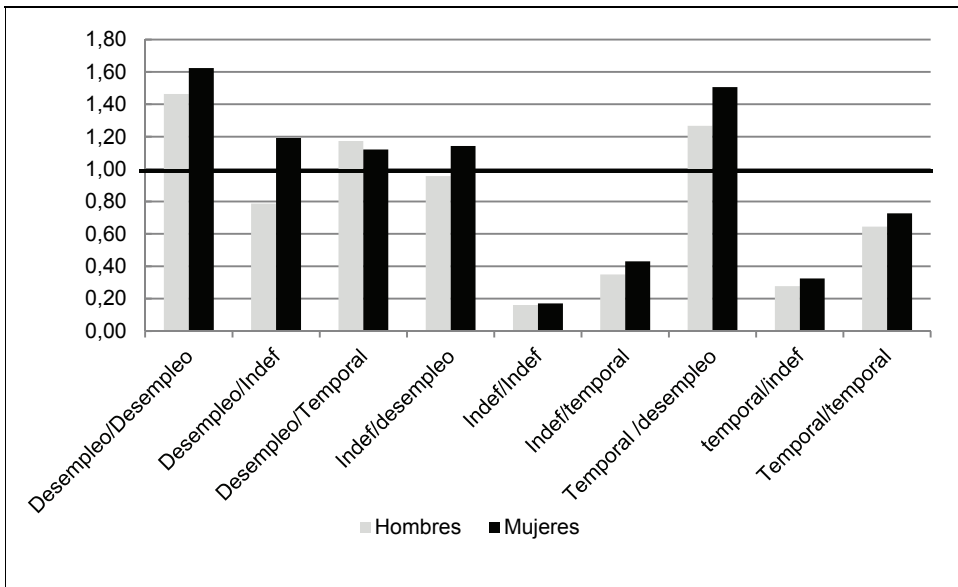
$$\text{Coste por prestación unitaria} = \frac{\text{VF Prestaciones}}{\text{VF Cotizaciones}} = \begin{cases} >1 \Rightarrow \text{Pérdida para el sistema} \\ <1 \Rightarrow \text{Ganancia para el sistema} \\ =1 \Rightarrow \text{Punto de equilibrio} \end{cases}$$

**Gráfico 2**  
 Coste por Prestación Unitaria. Nacidos [1944,1948]



Fuente: Elaboración propia

**Gráfico 2 bis**  
 Coste por Prestación Unitaria. Nacidos [1974,1978]



Fuente: Elaboración propia

## 4.2. Tanto Interno de Rendimiento

Mediante el Tanto Interno de Rendimiento (TIR) se trata de determinar cuál es la rentabilidad que el sistema está entregando a los participantes en el mismo. En este caso, la viabilidad del sistema viene dada por la relación entre el valor obtenido y el nivel máximo de rentabilidad que podría ofrecer teóricamente el sistema, que, a su vez, está relacionado con el crecimiento del PIB. A la hora de analizar los resultados, se ha de tener presente que se está trabajando con datos ciertos, lo que implica que no se conoce la vida laboral completa de todos los individuos (con la ventaja de que no se realiza ningún supuesto que pueda sesgar los resultados obtenidos), es decir, se obtiene el TIR en un momento determinado —en este caso en el año 2008— considerando las cotizaciones y prestaciones de todos los individuos entre 1981 y 2008.

Una de las características del sistema de desempleo es la disparidad de las prestaciones que reciben los individuos, con lo que el TIR toma valores extremos que no aportan información relevante para estudiar la sostenibilidad y, por lo tanto, no vamos a utilizarlos.

## 4.3. Saldo Financiero

Este ratio se obtiene como la diferencia entre el Sumatorio del valor financiero de las cotizaciones y el Sumatorio del valor financiero de las prestaciones correspondientes al periodo  $[t, t + n]$ , valoradas en el momento “ $t + n$ ”.

Este nuevo criterio indica cuál es el saldo financiero en unidades monetarias. Su relación con la viabilidad es clara: el sistema será inviable cuando entregue mayor cuantía en valor final de la que reciba.

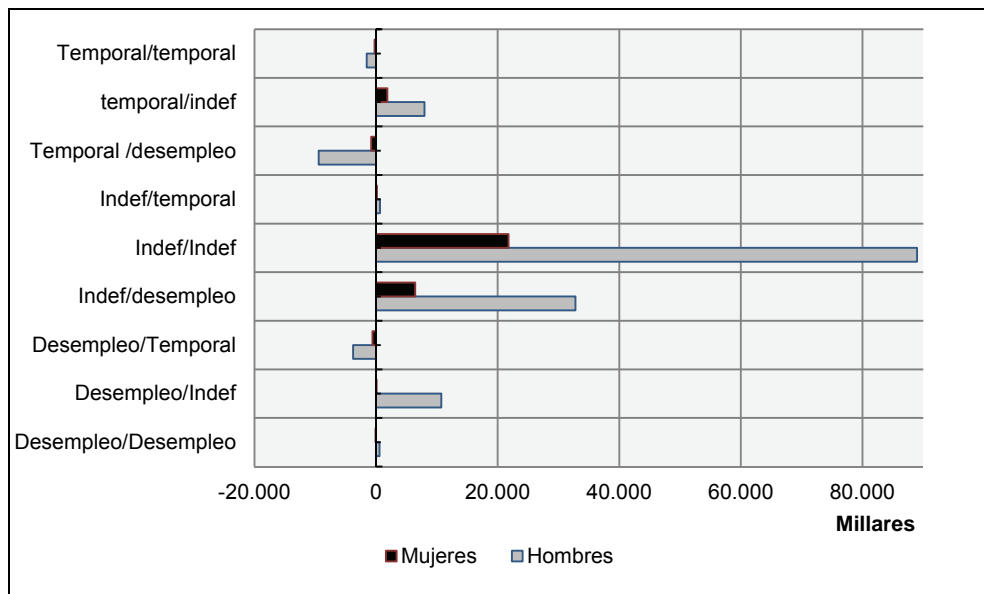
$$\text{Saldo financiero} = \text{VF Cotizaciones} - \text{VF prestaciones} = \begin{cases} >0 & \Rightarrow \text{Superávit del sistema} \\ <0 & \Rightarrow \text{Déficit del sistema} \\ =0 & \Rightarrow \text{Equilibrio} \end{cases}$$

Para disponer de unos resultados más fácilmente comparables entre las distintas cohortes objeto de análisis, se calcula también el saldo financiero per cápita y el saldo financiero per cápita y por año cotizado.

Además, para captar el grado de dispersión existente dentro de cada uno de los grupos analizados, calculamos el coeficiente de variación del saldo financiero, definido como el cociente entre la desviación típica y la media. Es una medida de dispersión útil para comparar dispersiones a escalas distintas. Como la construcción de esta medida requiere que todos los valores sean positivos y el saldo financiero puede tomar valores negativos, realizamos el siguiente cambio de variable para garantizar el cumplimiento de esta condición:

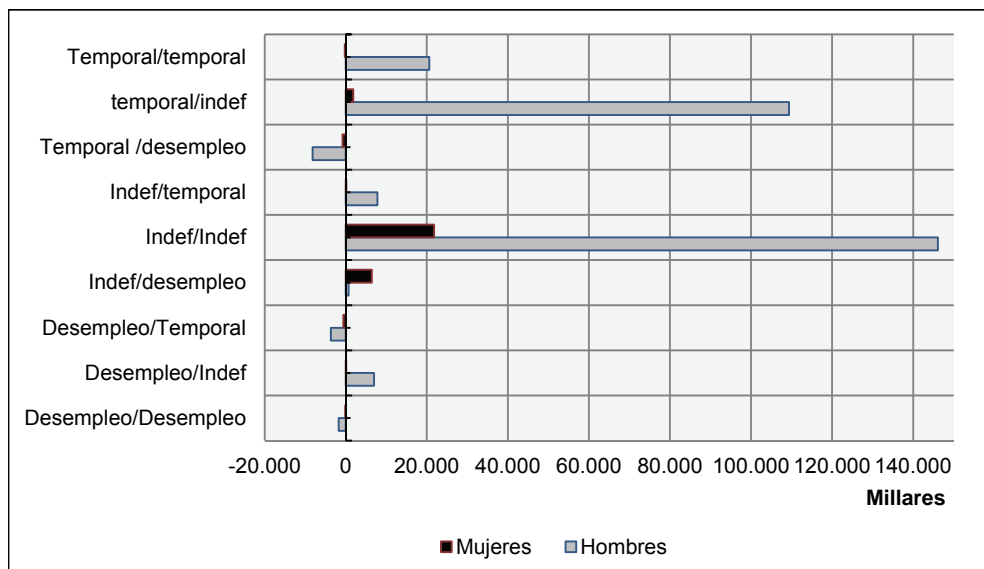
$$\text{Saldo financiero con cambio de variable} = \text{Saldo financiero} + \text{abs}(\min(\text{saldo financiero del grupo}))$$

**Gráfico 3**  
Saldo Financiero. Nacidos [1944,1948]. Unidad: Millares



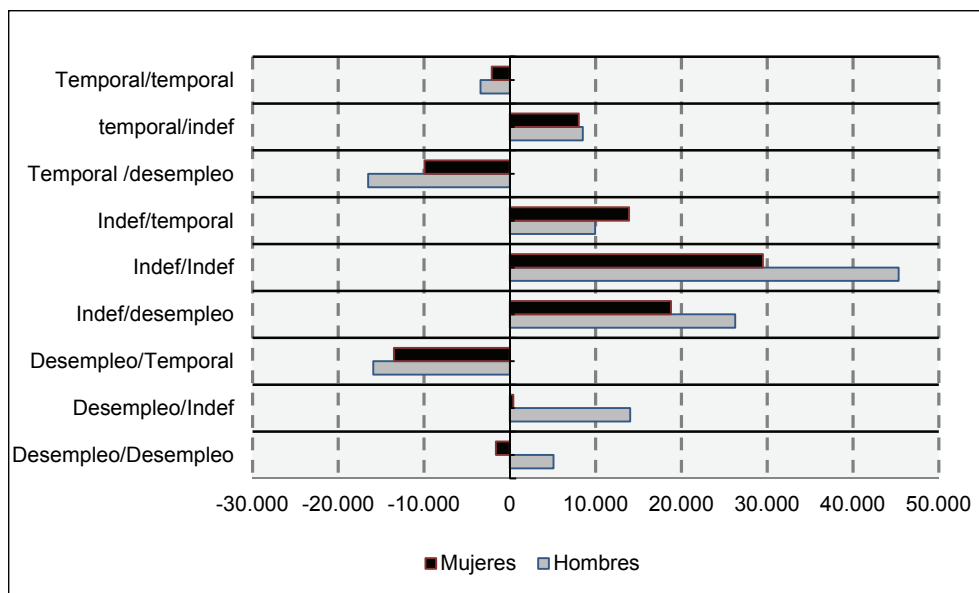
Fuente: Elaboración propia

**Gráfico 3bis**  
Saldo Financiero. Nacidos [1974,1978]. Unidad: Millares



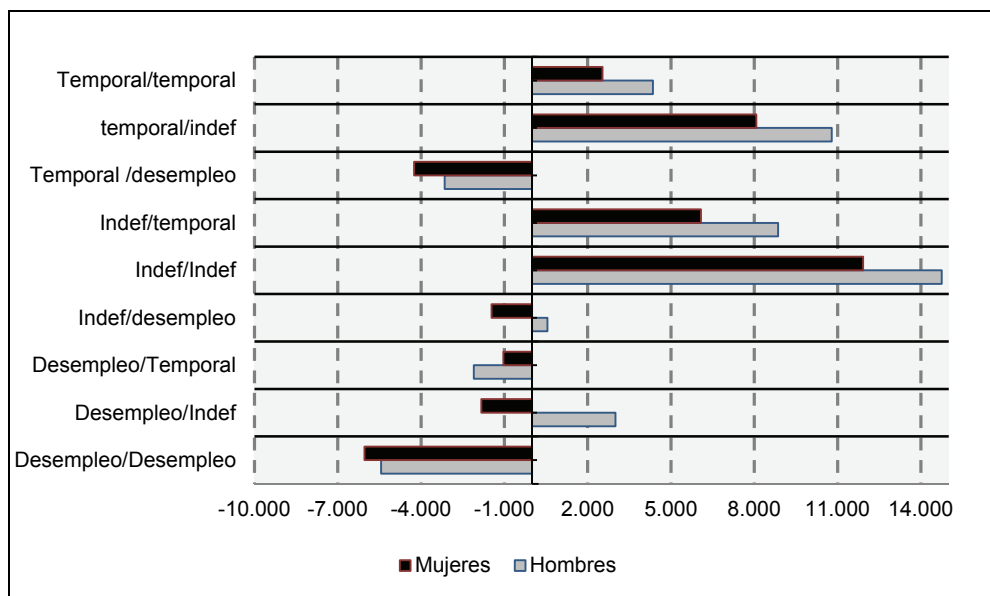
Fuente: Elaboración propia

**Gráfico 4**  
Saldo Financiero per cápita. Nacidos [1944,1948]. (Unidad: Euros)



Fuente: Elaboración propia

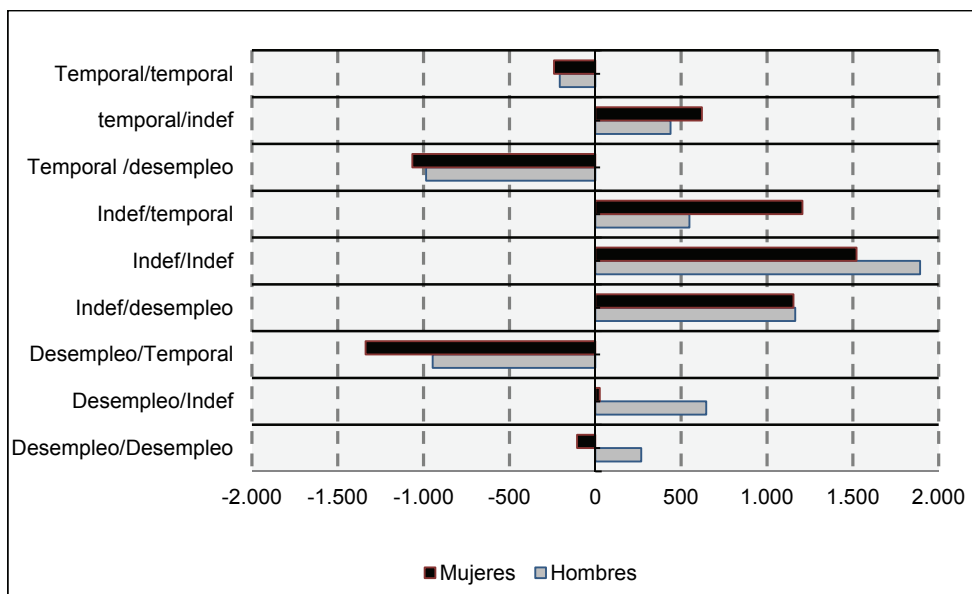
**Gráfico 4 bis**  
Saldo Financiero per cápita. Nacidos [1974,1978]. (Unidad: Euros)



Fuente: Elaboración propia

**Gráfico 5**

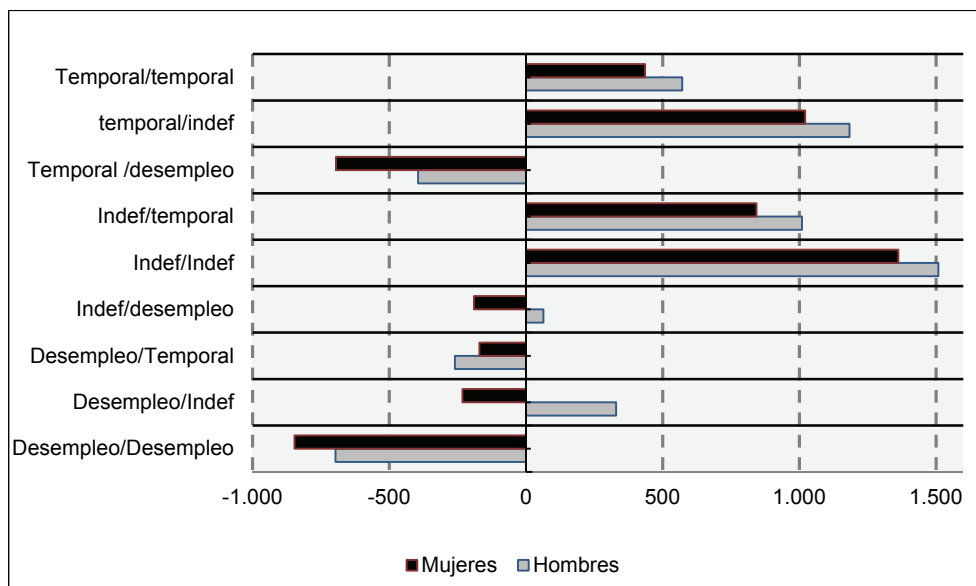
Saldo Financiero per cápita y por año de cotización. Nacidos [1944,1948] (Unidad: Euros)



Fuente: Elaboración propia

**Gráfico 5bis**

Saldo Financiero per cápita y por año de cotización. Nacidos [1974,1978]. (Unidad: Euros)



Fuente: Elaboración propia

Los grupos están definidos por las variables: sexo, tramo de edad y combinación de los dos últimos contratos, tal y como se detalla a continuación.

#### 4.4. Análisis de los resultados

En primer lugar, conviene recopilar una serie de consideraciones relacionadas con los cálculos:

- La MCVL utilizada ha sido la correspondiente a 2008. De la que la submuestra seleccionada (Tabla 5), tras aplicar diversos filtros para conseguir una información depurada y libre de sesgos, está formada por 296.821 individuos en situación de alta de la Seguridad Social en 2008.
- El periodo objeto de estudio es [1981, 2008].
- El tipo de interés utilizado para calcular el valor actual de cotizaciones y prestaciones es constante para todos los periodos e igual al 3% real.
- Se están considerando las prestaciones contributivas, es decir, no se incluyen los subsidios.
- Los criterios de desagregación de la información utilizados:
  - Tramo de edad: cada tramo agrupa a los individuos nacidos en alguno de los cinco años del periodo definitorio del correspondiente tramo. Cada cohorte presenta un comportamiento diferente en el mercado laboral (formación, salario, participación de la mujer en el mercado laboral, edad de incorporación al mercado de trabajo...). Además, el tramo de edad nos permite identificar aquellos individuos para los que se dispone de una información de la vida laboral más amplia.
  - Sexo: Existen numerosos estudios que destacan esta variable como significativa en el comportamiento diferenciador en el mercado de trabajo, en relación a la duración de los contratos, tipos de contrato, remuneración, etc.
  - Combinación de los dos últimos contratos de cada individuo, variable que, a priori, se espera que resulte significativa para explicar los resultados del sistema para los diferentes colectivos. El tipo de contrato identifica patrones de comportamiento muy diferenciados, en cuanto a condiciones laborales (salarios, duración de los contratos, probabilidad de colocación...), por la cada vez más acentuada dualidad del mercado de trabajo español entre los contratos temporales e indefinidos, tal y como lo argumentan Estrada *et al.* (2009).
- Los grupos de edad considerados más representativos para analizar en este trabajo son: el correspondiente a los nacidos entre 1944 y 1948 por ser el grupo de los que se dispone de una información más amplia de vida laboral (en número de años). Y el correspondiente a los nacidos entre 1974 y 1978, por incluir el mayor número de individuos de entre todos los tramos de edad considerados, supone el 19.26% de la submuestra seleccionada, es decir, 57.164 individuos.

**Tabla 5**

Submuestra de la MCVL utilizada tras la consideración de los siguientes filtros

<b>Filtros incorporados</b>	<b>Número de individuos</b>
Activos incluidos en la MCVL2008	917,463
Filtro 1: Activos sin algún fecha de nacimiento o sexo	178
Filtro 2: Activos fallecidos antes del 31-12-2008	972
Filtro 3: Activos que perciben una pensión de jubilación o invalidez antes del 31-12-2008	20,522
Filtro 4: Activos que en algún momento de su vida laboral han tenido un grado de minusvalía	6,829
Filtro 5: Nacionalidad española	112,288
Filtro 6: Activos del Régimen Agrario por cuenta ajena	67,799
Activos de la submuestra (1)	776,674
Eliminación de registros correspondientes a activos que no cotizan al desempleo: Régimen Especial de Trabajadores Autónomos, Régimen Especial Agrario por cuenta propia, Régimen Especial de Empleados de hogar	
Activos de la submuestra (2)	627,277
Requisitos adicionales para obtener la combinación de los dos últimos contratos: <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Tener informado el tipo de contrato o la situación de desempleado.</li> <li>▪ Se han eliminado los siguientes tipos de contrato: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Contratos a tiempo parcial</li> <li>- Contratos indefinidos discontinuos</li> <li>- Percepción de subsidio de desempleo no contributivo</li> <li>- Funcionarios</li> <li>- Otros</li> </ul> </li> <li>▪ Se han eliminado los individuos que tienen más de un contrato en la fecha de referencia (diciembre 2008) y en el momento del anterior contrato.</li> </ul>	
Activos de la submuestra (definitivo)	296,821

Fuente: Elaboración propia

Al analizar la sostenibilidad del sistema en su conjunto (Tabla 6), tanto medida a través del Coste por Prestación Unitaria (0.52) como por el signo del Saldo Financiero (Valor financiero de cotizaciones superior al valor financiero de prestaciones), el sistema resulta sostenible en el periodo considerado.

Sin embargo, si analizamos la sostenibilidad del sistema por grupos, en base a los criterios de desagregación descritos anteriormente, la riqueza de información nos permite detectar resultados muy diferentes entre distintos colectivos que señalan la falta de equidad en el sistema.



**Tabla 6**

Principales indicadores de Sostenibilidad del sistema de prestaciones de desempleo para la submuestra seleccionada. Periodo 1981-2008

Indicadores	Valor
Coste por Pensión Unitaria	0.526600892
Saldo Financiero	3,135,049,871.45
Saldo Financiero per cápita	10,562.09
Nº de individuos	296,821.000

Fuente: Elaboración propia.

Nos centraremos, en primer lugar, en el colectivo de los nacidos entre 1944 y 1948, formado por 8.190 individuos. Se caracteriza por: una baja participación de la mujer en el mercado de trabajo (22% frente al 77% del hombre), y donde el 78% de los hombres ha tenido uno de los dos últimos contratos de tipo indefinido (84% en el caso de las mujeres) frente al 20% de los hombres (13% en el caso de las mujeres) que han tenido al menos uno de los dos contratos de tipo temporal, —sin considerar combinación indefinido/temporal y temporal/ indefinido que se ha considerado en la categoría de los indefinidos— tal y como se puede apreciar en el Gráfico 6 y en la Tabla 7.

**Tabla 7**

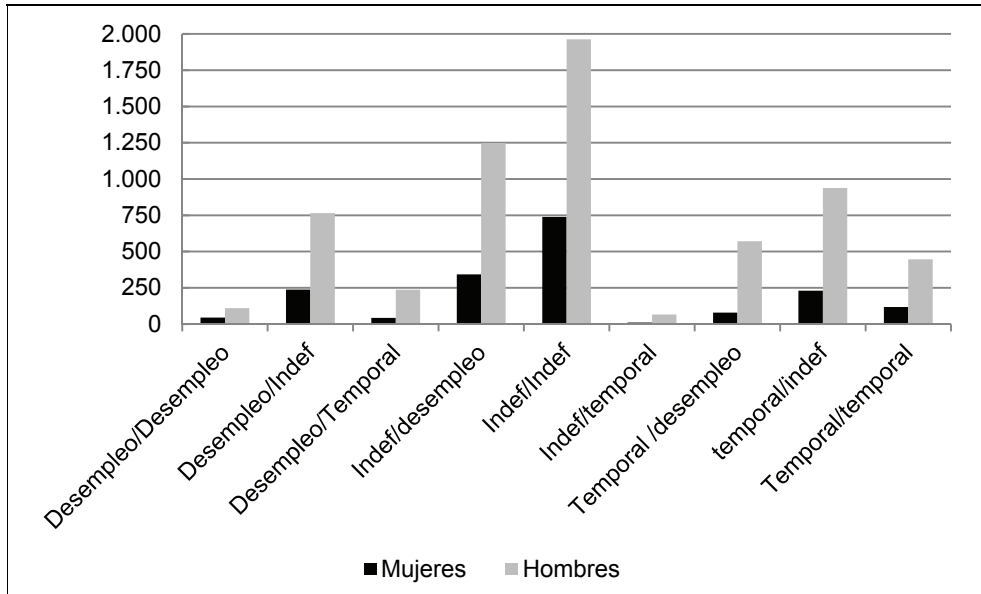
Distribución de los individuos por tipo de contrato, y sexo de los individuos nacidos en los periodos: [1944,1948] y [1974,1978]

Tipo Contrato	[1944,1948]		[1974,1978]	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
<b>Sobre el total del colectivo</b>	<b>77.46%</b>	<b>22.54%</b>	<b>59.36%</b>	<b>40.64%</b>
Desempleo/Desempleo	1.73%	2.44%	0.94%	2.55%
Desempleo/Indef	12.06%	12.89%	6.87%	8.93%
Desempleo/Temporal	3.74%	2.33%	5.18%	5.25%
Indef/desempleo	19.67%	18.58%	3.68%	5.48%
Indef/Indef	30.94%	40.03%	29.19%	26.63%
Indef/temporal	1.04%	0.60%	2.61%	2.12%
Temporal /desempleo	9.00%	4.28%	7.66%	5.62%
temporal/indef	14.79%	12.46%	29.87%	29.70%
Temporal/temporal	7.03%	6.39%	13.99%	13.73%

Fuente: Elaboración propia

**Gráfico 6**

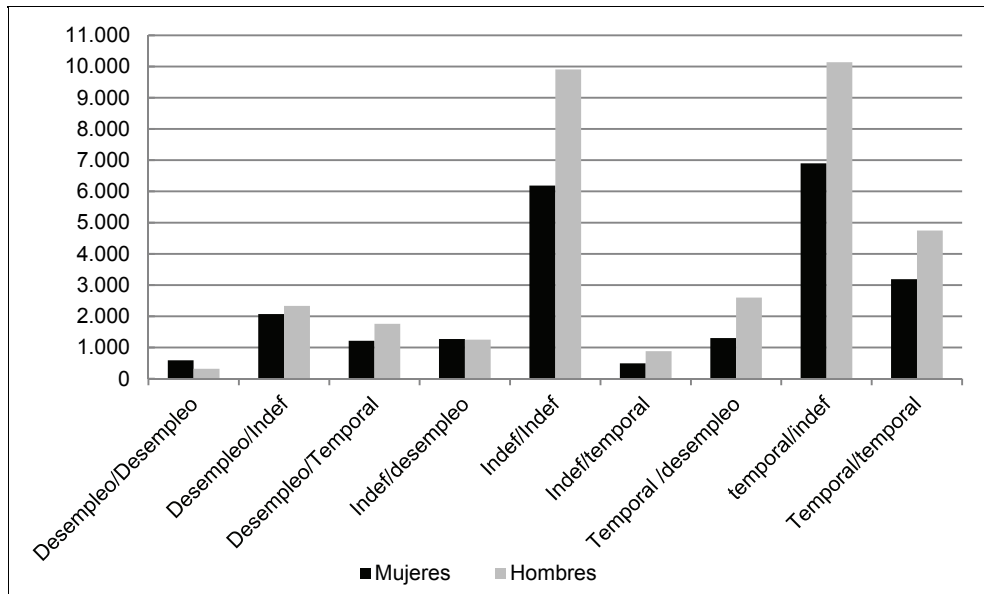
Número de individuos por sexo y por combinación de contrato. Nacidos 1944,1948]



Fuente: Elaboración propia

**Gráfico 6bis**

Número de individuos por sexo y por combinación de contrato. Nacidos [1974,1978]



Fuente: Elaboración propia

Analizando el Saldo Financiero per Cápita (Gráfico 4), aquellos colectivos en los que uno de los dos últimos contratos ha sido temporal resultan deficitarios (el valor financiero de las prestaciones es mayor al valor financiero de sus cotizaciones), además, estos resultados se mantienen tanto para el colectivo de hombres como para el de mujeres. Este tipo de contratos normalmente está ligado a individuos con menor cualificación, menores salarios y con más episodios de desempleo. El saldo financiero per cápita más deficitario corresponde a la combinación de contratos Temporal/desempleo y desempleo/Temporal. En cambio, para aquellos colectivos en los que uno de los dos últimos contratos ha sido indefinido, el saldo financiero per cápita resulta positivo tanto para hombres como para mujeres. Principalmente estos contratos están vinculados a personas con mayor cualificación profesional que ocupan puestos de mayor responsabilidad y, por tanto, mayores salarios, así como una mayor estabilidad en el empleo.

Estos resultados sugieren que los individuos con contratos indefinidos están subvencionando —a través de sus cotizaciones— las prestaciones que están percibiendo los colectivos con contratos temporales. Se aprecia un resultado diferente entre el colectivo de hombres y mujeres para la combinación de Desempleo/Desempleo, resultando el Saldo financiero positivo para los hombres y negativo para las mujeres, aunque se trata de cuantías poco significativas.

Para evitar el sesgo producido por las diferencias en el número de años de vida laboral considerado para ambas cohortes, se puede comparar el saldo financiero per cápita y por año de cotización (Gráfico 5 y Gráfico 5bis). El saldo financiero per cápita y por año de cotización de la cohorte de las mujeres nacidas en [1944,1948], 1778.45 euros, es ligeramente superior al correspondiente de la cohorte [1974,1978], 1.529,45 euros. En cambio esta relación es inversa para el caso de los hombres, en los que el saldo financiero per cápita y por año cotizado de los nacidos en [1944,1948], 2.816,22 euros, es inferior al correspondiente de la cohorte [1974,1978], que es de 3.315,87 euros.

A partir del saldo financiero per cápita conocemos el saldo financiero medio para cada uno de los grupos de desagregación definidos anteriormente. Para conocer la dispersión del saldo financiero de cada grupo respecto de la media, analizamos los valores del coeficiente de variación del Saldo financiero tras haber aplicado el cambio de variable especificado anteriormente (Tabla 8). La dispersión de los hombres es ligeramente inferior a la de las mujeres para la cohorte de [1944,1948], ya que el coeficiente de variación supone un 88% respecto de las mujeres; sin embargo, sucede lo contrario para la cohorte [1974,1978], donde el coeficiente de variación de los hombres es 1.16 veces el de las mujeres. Se puede apreciar, como era de esperar, que la dispersión de los nacidos en [1944,1948] es mayor que la correspondiente a [1974,1978] (1.24 veces para el caso de los hombres y 1.62 veces en el caso de las mujeres), dado que el número de años con información sobre el saldo financiero es superior para el primer grupo. La mayor dispersión corresponde a los individuos cuya última combinación de contratos ha sido indefinido/temporal, aplicada al colectivo de hombres y mujeres nacidos en [1944,1948], así como el de las mujeres nacidas en [1974,1978]; sorprendentemente, los grupos formados por un menor número

de individuos. La mayor heterogeneidad de los hombres nacidos en [1974,1978] se localiza en la combinación de contratos desempleo/temporal.

**Tabla 8**

Coeficiente de variación del Saldo Financiero con cambio de variable por combinación de tipo de contrato, sexo de los nacidos en los periodos: [1944,1948] y [1974,1978] y relación entre el coeficiente de variación de hombres y mujeres por tipo de contrato y tramo de edad.

Tipo Contrato	[1944, 1948]			[1974, 1978]		
	Hombres	Mujeres	CVh/CVm	Hombres	Mujeres	CVh/CVm
Desempleo/Desempleo	33.38%	41.74%	0.7998	11.22%	26.27%	0.42723
Desempleo/Indef	29.99%	30.92%	0.97007	23.60%	25.94%	0.90955
Desempleo/Temporal	40.39%	46.31%	0.87216	28.13%	24.90%	1.12958
Indef/desempleo	27.16%	37.25%	0.72913	16.32%	21.70%	0.75212
Indef/Indef	24.67%	30.04%	0.82125	16.67%	20.01%	0.83337
Indef/temporal	47.38%	79.72%	0.59432	18.36%	27.13%	0.67669
Temporal /desempleo	32.90%	23.87%	1.37827	27.14%	20.09%	1.35081
Temporal/indef	25.99%	37.72%	0.68893	21.18%	21.68%	0.97706
Temporal/temporal	31.99%	24.00%	1.33319	17.28%	22.27%	0.77598
<b>Total</b>	<b>33.86%</b>	<b>38.11%</b>	<b>0.88836</b>	<b>27.25%</b>	<b>23.41%</b>	<b>1.16407</b>

Fuente: Elaboración propia

Los resultados del Coste por Prestación Unitaria (Gráfico 2 y Gráfico 2bis), señalan también esa clara distinción de un grupo integrado por aquellos colectivos con tipo de contrato temporal, cuya relación cotizaciones-prestaciones supone una pérdida para el sistema y otro grupo formado por individuos con tipo de contrato indefinido, cuya relación cotizaciones-pensiones aporta ganancias al sistema.

Si comparamos este ratio para este colectivo distinguiendo por género, el ratio es ligeramente superior para los hombres (0.56) frente al 0.46 de las mujeres. En cuanto al saldo financiero per cápita, el de los hombres (20.011,46€) es superior al de las mujeres (15.519,53€). Tanto la cotización media como la prestación media de los hombres son superiores a las de las mujeres (1.6 veces en el caso de las cotizaciones y 1.97 en el caso de las prestaciones). Esta importante diferencia es debida al *gap* salarial hombres-mujeres propio de estas generaciones.

Por otra parte, el colectivo integrado por los individuos nacidos entre 1974 y 1978 está formado por un 40% de mujeres (23.233) y un 60% de hombres (33.931). Comparándolo con el colectivo anteriormente analizado, se aprecia la progresiva incorporación de la mujer al mercado de trabajo. La información de la vida laboral de este colectivo corresponde a los primeros 15 años, de modo que se están in-

cluyendo los primeros años de vida laboral caracterizados por una sucesión de trabajos temporales, con bajos salarios, para posteriormente ir consiguiendo una cierta estabilidad laboral con contrataciones indefinidas y mayores salarios. Tal y como se aprecia en la Tabla 7, el 60% de los individuos se concentra en la combinación de contratos temporal/Indefinido e indefinido/Indefinido.

Al contemplar las cuantías de saldo financiero per cápita de este colectivo (Gráfico 4bis), el importe de estos saldos es significativamente inferior al correspondiente al grupo de nacidos entre 1944-1948, debido a las menores cotizaciones y menores episodios de desempleo con derecho a prestación contributiva de este colectivo, ya que el número de años de vida laboral transcurridos es menor. Los grupos con saldo financiero deficitario son los correspondientes a las combinaciones de contratos en los que al menos uno de los dos últimos contratos ha sido de desempleo, con la excepción de las combinaciones Indefinido/desempleo y desempleo/indefinido para el caso de los hombres. Estas mismas conclusiones se extraen al analizar el Coste por Prestación Unitaria.

Comparando el comportamiento de los hombres y las mujeres de este colectivo, la cotización media de los hombres es 1.28 veces la de las mujeres, en cambio, la prestación media de los hombres es el 1.07 de las mujeres, efecto que puede explicarse por el impacto de la existencia de pensiones máximas y mínimas. Como consecuencia, el Coste por Prestación Unitaria de las mujeres (0.53) es superior al de los hombres (0.44) y el saldo financiero per cápita de los hombres (8.192,71€) es muy superior al de las mujeres (5.357,21€).

## 5. CONCLUSIONES

Tal y como evidencian los resultados, el sistema en su conjunto resulta sostenible, aunque no equitativo, para el periodo considerado. Sin embargo, en el contexto de la actual crisis económica, puede resultar de gran interés realizar este mismo estudio incluyendo los años 2009 y 2010, para apreciar el efecto de la crisis sobre la sostenibilidad del sistema de protección al desempleo. Asimismo, dado el carácter de financiación conjunta propio del sistema de protección al desempleo, este estudio se podría completar incorporando los subsidios y realizando un análisis comparativo con y sin incluir la prestación asistencial...

Entre los factores que pueden estar incidiendo en esta falta de equidad, se pueden citar:

- La fórmula de cálculo de la prestación, que sólo considera la base reguladora de los últimos 6 meses.
- La aplicación de los topes máximos y mínimos de prestación, caracterizado dicho tope máximo por tener poca relación con las bases máximas.
- La inexistencia de un método o instrumento que revierta a los individuos con saldo financiero positivo dicho saldo en caso de no entrar en situación de desempleo.

- Ajuste inadecuado de los tipos de cotización en función del tipo de contrato.
- Las lagunas legales existentes en relación a la posibilidad de realizar sucesivos contratos temporales, con posibles interrupciones de episodios de desempleo, a una misma persona mediante la contratación por parte de distintas empresas del mismo grupo o cambiando de puestos de trabajo. De forma que las empresas no tienen incentivo a contratar de manera estable a estos trabajadores, y como consecuencia de ello el comportamiento de dichas empresas produce grandes desequilibrios al sistema frente al de las empresas con un perfil de contratación mucho más estable. Con la reforma laboral de 2010 se ha pretendido cubrir estas lagunas. Será conveniente realizar un seguimiento de la efectividad de dicha reforma laboral a este respecto, pues existe el riesgo de que se produzca un aumento de la rotación y no una mayor estabilidad laboral.

Con el objetivo de diseñar un sistema de prestaciones de desempleo equitativo, sostenible y que incentive el empleo, sería necesaria una reforma de nuestro sistema de protección al desempleo.

Una medida podría ir dirigida a ajustar el tipo de cotización en función de la probabilidad, intrínseca al tipo de contrato, de padecer más episodios de desempleo. Con esta medida se conseguiría desincentivar el comportamiento de determinados agentes del mercado que realizan contrataciones-despidos de manera continuada, causando un mayor gasto a la Seguridad Social y, además, se ajustaría la relación cotización-prestación, tendiendo ésta a ser más proporcional y equitativa.

Otra alternativa (compatible con la anterior) podría ser la creación de un fondo de capitalización, el denominado fondo austriaco. De este modo, los colectivos con saldo financiero positivo en el momento de la jubilación o en alguna situación de necesidad, recibirían el importe de dicho saldo, logrando así el equilibrio financiero deseado.

Para que existiera una mayor proporción entre el importe de las cotizaciones y las prestaciones se podría considerar para el cálculo de la prestación, la base reguladora de todo el periodo de empleo previo a la situación de desempleo y no únicamente los últimos seis meses.

## BIBLIOGRAFÍA

Arranz, J.M. y García-Serrano, C. (2011). “Los datos fiscales de la Muestra Continua de Vidas Laborales: Algunas ideas para su explotación”, *Papeles de Trabajo*, nº 5, Instituto de Estudios Fiscales.

Cantó, O. y Toharia, L. (2003). “Las prestaciones por desempleo en España: eficiencia y equidad”. *Hacienda Pública Española, Monografía*, 125-156.

Cebrián, I. y Moreno, G. “Trayectorias laborales: Diferencias por género en los abandonos de empleo”. *Mimeo*, 2011.

Estrada, A., Izquierdo, M. y Lacuesta, A. (2009). "El funcionamiento del mercado de trabajo y el aumento del paro en España". *Boletín Económico*, Julio-Agosto.

García, J.I. (2008). "La muestra continua de vidas laborales: una guía de uso para el análisis de transiciones". *Revista de Economía Aplicada*, nº E-I (vol. XVI), 5-28.

Gómez, V. (2010). "El modelo austriaco de despido. Una nota sobre su posible aplicación en España". *Revista Cuadernos de Mercado de Trabajo*, Junio.

Hofer, H. (2007). *The severance pay reform in Austria*. CESifo DICE Report.

Lapuerta, I. (2010). "Claves para el trabajo con la Muestra Continua de Vidas Laborales". *DemoSoc Working Paper*. Paper Number 2010-37.

López García, M.A.; Gil Trasfi, J.; Onrubia Fernández, J.; Patxot Cardoner, C. y Souto Nieves, G. (2008). *Sipes, un modelo de simulación del sistema de pensiones contributivas en España: Proyecciones de gasto a largo plazo*. Madrid: Instituto de Estudios Fiscales.

Malo, M.A. (2010). "La reforma laboral de 2010: Una discusión de sus componentes básicos". *Revista Cuadernos de Mercado de Trabajo*, Junio.

Tobes, P. (2006). "La protección por desempleo en España. Una propuesta de revisión". *Boletín Económico del ICE*, nº 2883, 3 al 16 de julio de 2006.

Toharia, L. (2008). *El sistema español de protección por desempleo: equidad, eficiencia y perspectivas*. Estudio financiado por Fipros 2008/26.

Toharia, L., Arranz, J.M., García-Serrano, C. y Herranz, V. (2009). "Análisis de la eficiencia del sistema español de protección por desempleo". *Mimeo*.

## Ponencia 28

### ABOUT CO<sub>2</sub> ALLOWANCES HEDGING AND UTILITY GAINS

Mara Madaleno and Carlos Pinho

#### ABSTRACT

Optimal hedge ratios are investigated and determined for CO<sub>2</sub> allowances, both conditionally and unconditionally, using multivariate GARCH models and more basic strategies (OLS and the naïve strategy), for the European Climate Exchange (ECX) market, in the period 2005-2009. As far as we know, this is the first empirical tentative work to estimate optimal hedge ratios, considering also utility gains for risk-return inferences.

It is found that dynamic hedging provides superior gains, in reducing the variance portfolio, with respect to those obtained from static hedging, ignoring adjustment costs. When leptokurtic data characteristics are considered through distributions, results improve. Finally, utility gains increase with investor's increased preference over time.

Results are always compared in and out of sample, in order to gain statistical inference.

**KEY WORDS:** CO<sub>2</sub> Emission Allowances; Dynamic Hedging; Futures Prices; Risk Management; Spot Prices.

#### 1. INTRODUCTION

With countries development and increased living standards, pollution started to worry governments, markets and people, worldwide. Global warming is in fact a growing concern in our days, and the European Union (EU) clearly indicated its will to take the lead in the fight against it when in 2005 they decided to trade European Union allowances (EUAs), each representing the right to emit one ton of CO<sub>2</sub> in the atmosphere. In the context of controlling greenhouse gas emissions, the EU-wide trading system for emission allowances can be considered one of the major steps towards reducing the environmental burden. For market participants, academics, policy makers and especially traders/hedgers understanding the price behaviour



and the links between spot and futures in the European Union Trading System (EU ETS) of this new asset class (carbon dioxide CO<sub>2</sub> emission allowances) is of particular interest.

Under the emission cap-and-trade system of the EU ETS, CO<sub>2</sub> has become a kind of tradable good. With the evolution of the carbon trading market, not only the carbon spot market but also some derivative markets such as the carbon futures market and options market have gradually emerged. Price risk arise when futures prices fluctuate, making agents to assume long or short positions in the forward and spot markets to hedge their exposure to price risk.

There exists a large number of studies in the hedging area, which consider the hedge ratio across financial (stocks and indices), agricultural, livestock, interest rates, foreign exchange, metal and energy markets (fuels and electricity), etc. However, research on hedging in the carbon market is very limited, if almost no existent. Given that this is a very recent market (trading started in the early 2005), market immaturity, efficiency issues, liquidity and lack of data availability have been commonly cited as restrictions (Daskalakis and Markellos, 2008; Paoletta and Taschini, 2008; Uhrig-Homburg, 2008; Daskalakis, Psychoyios and Markellos, 2009; Chevallier, 2010). Chevallier (2008) researched Phase I of the EU-ETS extensively with the emphasis on banking<sup>1</sup>, pricing and risk hedging strategies, but he does not discuss the possible use of the optimal hedge ratio, and we try to fill here the gap in the existing literature.

The appropriate way to calculate hedge ratios remains a controversial issue in the literature. The major methodologies for hedging with futures contracts have been OLS, VAR, VECM and multivariate GARCH (Moschini and Myers, 2002; Moulton, 2005; Pen and Sévy, 2007; Hua, 2007; Kumar, Singh and Pandey, 2008; Torró, 2008; among others). Modelling the asymmetric behaviour of the covariance matrix in a multivariate setting and studying its consequences in the ECX CO<sub>2</sub> allowances spot-future systems is the main objective of this paper. As such, this work is an attempt to calculate and evaluate the effectiveness of the minimum variance hedge ratio and expected utility in the EU-ETS carbon market that as far as we know has never been tested before.

In order to capture the dynamic structure of second moments conditional on the underlying and price variations, recent studies have concentrated in the development of hedging ratios changing through time using modelling techniques based on conditional heteroskedasticity. Multivariate GARCH models capture the dynamic evolution of the variance covariance matrix and construct an estimate of the opti-

---

<sup>1</sup> Banking of allowances means the carrying forward of the unused emission allowances from the current year for use in the following year. The banking of allowances is now permitted within Phases (except for France and Poland), but it was prohibited from 2007 to 2008 (inter-phase). This had significant implications for the pricing of emission allowance and its underlying derivatives, where we have seen prices decreasing towards zero between both phases (Daskalakis and Markellos, 2008). Nevertheless, industries are allowed to bank the unused permit from Phase II to Phase III in France and others EU countries.

mal hedge ratio using the conditional variances and covariance's of spot and futures returns. Different authors use different specifications and use valid arguments to justify one or the other (Byström, 2003, Torró, 2008, among others).

Torró (2008) uses Minimum Variance Hedge Ratio estimated by OLS and Multivariate GARCH with a bivariate t-student distribution. Moulton (2005) and Byström (2003) also use this as the main objective function. Lien and Tse (2000) consider the optimal strategy for hedging the downside risk measured by the lower partial moments in the Nikkei stock exchange. Lien and Tse (2002) evaluate constant hedge ratios and time-varying hedge ratios, exploring different econometric implementations. They provide a survey that reviews some recent developments in futures hedging. However, there are superior gains including heteroskedasticity and time-varying variances in the calculation of hedge ratios, and in this sense multivariate GARCH models are useful in reducing the variance portfolio.

The conditional heteroskedastic autoregressive specification (ARCH) was first presented by Engle (1982). It has been extended by Bollerslev (1986) to the generalized conditional heteroskedastic specification (GARCH). In fact, the great part of financial series contradicts the constant correlation hypothesis as explored by Tse and Tsui (2002). In order to capture the different conditional correlation characteristics between rates, Engle and Kroner (1995) develop the BEKK procedure for the multivariate GARCH estimation. The BEKK algorithm allows changes through time of the conditional covariance which assumes the positiveness of the conditional variance covariance matrix.

Some of the deviations of the optimal hedge ratio are based on the minimization of return variance or maximization of the expected utility. Other derivations of the optimal hedge ratio are based on the mean-Gini coefficient and generalized semi variance. A brief discussion is provided by Chen, Lee and Shrestha (2001).

Milliaris and Urrutia (1991) used weekly data to estimate the optimal hedge ratio and found hedging to be more effective when the hedging horizon was equal to the frequency of the data. Also by using weekly data, Benet (1992) found that shorter hedging horizons produced more effective hedging. Moreover, Chen *et al.* (2003) stress the potential problem of matching the length of the hedging horizon with data frequency, which leads to the loss of data observations. Our work evolves with respect to those of Byström (2003) and Torró (2008) in this respect, favouring the main point of Moulton (2005), although we consider both static (naïve and OLS) and dynamic hedging strategies.

Moschini and Myers (2002) reject the null of a constant hedge ratio and that time variation in optimal hedge ratios can solely be explained by deterministic seasonality and time to maturity effects, using weekly corn cash and futures prices. They develop modified BEKK parameterization for the Bivariate GARCH(q,r) model. Ripple and Moosa (2005) examine the effect of the maturity of the futures contract used as the hedging instrument on the effectiveness of futures hedging, using daily and monthly data on the WTI crude oil futures and spot prices (NYMEX).

Hua (2007) estimates the constant and dynamic hedge ratios from 3 alternative modelling frameworks: OLS, VEC and MGARCH for Chinese copper futures markets, to conclude that the Multivariate GARCH dynamic hedge ratios are superior to other hedge ratio estimates in terms of portfolio variance reduction. Pen and Sévi (2007) use as objective function the minimum variance hedge ratio and model the dynamic and distributional properties of daily spot and forward electricity prices across European wholesale markets. They doubt of the potential of forward markets for hedging purpose using multivariate Garch models, including the diagonal BEKK. They confirm the poor performance of these models since the variance reduction obtained was near zero or even negative. In opposition we obtained a good performance for the EU-ETS market using the same specification, thus contradicting their results. This made us believe on the effectiveness of multivariate GARCH models, especially BEKK, for hedging purposes.

Data selection is a very important aspect for several reasons. Not only due to a required large number of observations, but also because non-overlapping futures contracts are preferable to avoid artificially introducing autocorrelation in the data series. The present study focus on daily hedging with futures taking one price per day, for the ECX allowances market. In this work, minimum variance hedge ratios are conditionally and unconditionally estimated with the multivariate GARCH model, the OLS and Naïve models. Empirical results indicate that dynamic hedging provides superior gains compared to those obtained from static hedging.

The rest of the work evolves as follows. Section 2 describes the methodology, presenting optimal hedge ratios estimation based on minimum variance hedging and maximization of expected utility, while it also presents the six hedging strategies to be used. Section 3 explains the data to be used and its summary statistics, while section 4 presents and discusses the results attained. Finally, section 5 concludes.

## 2. METHODOLOGY

Hedging is a very common term in the financial world but a proper definition depends on the player of the industry. To some, hedge means eliminate the risk in a position or in a portfolio. To others it simply means limit the risk. A hedge is an action, which reduces risk, usually at the expense of potential reward.

The simplest way to hedge a position is to enter an identical, but opposite position to off-set all the risk (replicating hedge)<sup>2</sup>. For linear positions, whose price is linear in the underlying price, futures are generally the simplest hedging instrument. If the goal is to minimize the risk with a future that does not behave equivalent to the position that is to be hedged, it might not be optimal from a hedging point of view to enter a future with the same underlying amount as the position to be hedged. Under certain assumptions one can actually find the optimal future position that minimizes the risk.

---

<sup>2</sup> One tries to replicate the risky position that is to be hedged and take a short position in that replication.

## 2.1. The optimal hedge ratio and evaluation of hedging effectiveness

In the "Optimal hedge ratio" one assumes that a company holds a long spot position that it wants to hedge with a future. Let  $\Delta S$  define the change in the spot price  $S$ , during the period of time equal to the life of the hedge.  $\Delta F$  define the change in futures price  $F$ , during the same period. The standard deviation of  $\Delta S$  and  $\Delta F$  are given by  $\sigma_s$  and  $\sigma_f$  respectively. The correlation between  $\Delta S$  and  $\Delta F$  is given by  $\rho$  and the hedge ratio, defined as the position in the future divided by the position in the spot is given by  $h$ .

The change in value of the hedged position will be given by

$$\Delta S - h\Delta F \quad (1)$$

The variance  $\sigma^2$ , of the change in value of the hedged position is

$$\sigma^2 = \sigma_S^2 + h^2\sigma_F^2 - 2h\rho\sigma_S\sigma_F \quad (2)$$

and the derivative with respect to the hedge ratio is

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial h} = 2h\sigma_F^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_F \quad (3)$$

and since  $\frac{\partial^2\sigma^2}{\partial h^2} = 2\sigma_F^2$  is positive, the first order condition is sufficient to find the  $h$  that minimizes the variance namely

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial h} = 0 \Rightarrow h_t = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F} = \frac{\text{Cov}(\Delta S_t, \Delta F_t)}{\text{Var}(\Delta F_t)} = \frac{\sigma_{s,f}}{\sigma_f^2} \quad (4)$$

which shows that the amount of futures CO<sub>2</sub> contracts that should be purchased to minimize the risk of holdings of spot CO<sub>2</sub> allowances is proportional to the covariance of changes in the spot and future price of CO<sub>2</sub> divided by the variance of change in future prices. As such, the hedge ratio is basically the slope coefficient in a regression of the spot price (the instrument) on the price of the future instrument. But, as expected, this also depends on the hedger's objective function; being the minimum variance the most widely used approach.

We have assumed that  $\Delta S_t$  and  $\Delta F_t$  define the change in the spot price ( $S$ ) and in futures price ( $F$ ) during the period of time equal to the life of the hedge, respectively. Defining this time between  $t$  and  $t+1$  we will end up with  $\Delta S_t = s_{t+1}$  and  $\Delta F_t = f_{t+1}$ , thus providing

$$h_t = \frac{\text{Cov}_t(s_{t+1}, f_{t+1})}{\text{Var}_t(f_{t+1})} \quad (5)$$

The minimum variance approach has been object of several criticisms, being the strongest the fact that it does not take into account the expected return. But, each participant in the carbon market has its own preferences. While investors desire to protect the investment portfolio from carbon price risk, they also need to ensure high returns at the same time. However, priority of risk management for emitters may be solely to hedge the carbon price risk. As such, their objective function can be, but not limited to, the achievement of a minimum variance of the hedged portfolio.

It is certain that the hedge ratio  $h$ , will minimize the variance, but it is debatable if it is optimal, since we implicitly state that variance is the risk measure of concern. If we assume that the spot price follows a geometric Brownian motion and that the good is storable, then the cash-and-carry strategy implies that also the future price will follow the same price process. The returns of both the spot and the future will therefore be normally distributed, while variance or standard deviation will be the natural risk measure, and a variance minimization is appropriate.

At the present work we will measure the effectiveness of each estimated hedge ratio based on the variance reduction and utility maximization, or else from a utility gains standpoint.

The degree of hedging effectiveness we will consider here was proposed by Ederington (1979) and is measured by the percentage reduction in the variance of spot price changes. Therefore, the degree of hedging effectiveness, denoted as  $EH$ , can be expressed as

$$EH = \frac{\text{Var}(\Delta S_t) - \text{Var}(\Delta h_t)}{\text{Var}(\Delta S_t)} = \rho_{sf,t}^2 \quad (6)$$

where  $\rho_{sf,t}^2$  is the square of the correlation between the change in the spot and futures prices.

The variance metric ( $EH$ ) measures the percentage reduction in the variance of a hedged portfolio as compared with the variance of an unhedged portfolio. The hedged portfolios are calculated by using the OHR's derived from the hedging models, with the best model being the one with the largest reduction in the variance. The performance metric can be re-written as:

$$EH = 1 - \left[ \frac{\text{Variance}_{\text{hedgedPortfolio}}}{\text{Variance}_{\text{unhedgedPortfolio}}} \right] \quad (7)$$

This gives us the percentage reduction in the variance of the hedged portfolio as compared with the unhedged portfolio. When the futures contract completely eliminates risk, we obtain  $EH = 1$  which indicates a 100% reduction in the variance, whereas we obtain  $EH = 0$  when hedging with the futures contract does not reduce risk. Therefore, a larger number indicates better hedging performance.

The variance is a standard measure of risk in finance and has become the dominant measure of hedging effectiveness used by hedgers. It has also been extensively applied in the literature on hedging and was used by Ederington (1979) to evaluate hedging effectiveness. The advantage of using the variance as a measure of performance is its ease of calculation and interpretation.

Hedging strategies considering the risk-return structure over the portfolio have appeared to fulfil the lack delivered by the inconsistency of the minimum variance strategies by not considering the expected return of the portfolio in the determination of the optimal hedge ratio, as shown by Howard and D'Antonio (1984), Cecchetti *et al.* (1988) and Hsin *et al.* (1994).

Even though the existence of proposals to define a hedging strategy are mostly consistent with the mean-variance structure of the portfolio, others have look to strategies being consistent also with the agent utility function, trying to determine the optimal ratio maximizing this utility.

Looking to the utility function of a risk averse agent:

$$U[E(r_{p,t});\sigma_{p,t};\eta(r_{p,t})] \quad (8)$$

where  $\eta(r_{p,t})$  is the absolute risk aversion coefficient, presented by Pratt (1964) and computed as

$$\eta(r_{p,t}) = -\frac{U''(r_{p,t})}{U'(r_{p,t})} \quad (9)$$

Hsin *et al.* (1994) assume that the agent that looks for a hedging strategy is risk averse. As such, his expected utility function is concave, conditioned on a constant absolute risk aversion measure. In using this method, the level of investor's utility will be computed differently from the hedged portfolio and after, compared and ranked by the degree of utility improvement from the unhedged portfolio.

Considering the return of the hedged portfolio, his variance and that transaction costs equal zero, the authors determine the optimal ratio in contracts on the futures market to hedge a position of an asset in the spot market, given by the maximization of the utility function relative to h, where the expected utility is:

$$E[U(r_{p,t})|\psi_{t-1}] = E[r_{p,t}|\psi_{t-1}] - \lambda \text{Var}[r_{p,t}|\psi_{t-1}] \quad (10)$$

and

$$\text{Max}_h U[E(r_{p,t});\sigma_{p,t};\eta(r_{p,t})] = \text{Max}_h E(r_{p,t}) - 0,5\eta(r_{p,t})\sigma_{p,t}^2 \quad (11)$$

Where  $r_{p,t}$  is the hedged portfolio (1), or else  $\Delta S - h\Delta F$ ,  $E(r_{p,t})$  is the expected return of the hedged portfolio,  $\text{Var}(r_{p,t})$  its variance and  $\eta = 2\lambda$  ( $\lambda = (1/2)\eta$ ) is the investor's level of risk aversion, which we will consider to be  $\eta=1$  (risk averse),  $\eta = 2$  (risk neutral), and  $\eta = 4$  (risk lover). Finally,  $\psi_{t-1}$  stands for the information set at time  $t-1$ .

The extreme value of the expected utility function is given when the first derivative equals zero

$$\frac{\partial U[E(r_{p,t}), \sigma_{p,t}; \eta(r_{p,t})]}{\partial h} = 0 \quad (12)$$

which yields

$$h = \frac{\sigma(r_s, r_f)}{\sigma^2(r_f)} - \frac{E(r_f)}{\sigma^2(r_f)\eta(r_h)} \quad (13)$$

This strategy incorporates the risk-return structure of the portfolio to determine the optimal hedge ratio, but for it to be consistent it is necessary the agent expected utility function to be quadratic or that the returns of the hedged portfolio would be normally distributed, once she assumes it explicitly.

Therefore, researchers tried to derive the optimal hedge ratio based on a structure that does not depend on such assumptions. An alternative was to use as a measure of portfolio risk the extended Gini coefficient, instead of the variance of the hedged portfolio, as it is consistent with the rules of the stochastic dominance.

Still, the MV hedge ratio is the most heavily used, analyzed, and discussed hedge ratio, and it can also be shown that, under some normality and martingale conditions, most of the hedge ratios based on other criteria (expected utility, extended mean-Gini coefficient, and generalized semi-variance) converge to the MV hedge ratio (Chen, Lee and Shrestha, 2001).

## 2.2. Hedge ratio estimation models

There are basically two hedging strategies categories: the static and the dynamic. By static hedging we mean that once the optimal hedging ratio is defined, the position in the futures market is kept constant until the end of the hedging period. Näsäkkälä and Keppo (2005) study partial hedging of electricity cash flows with static forward strategies. The dynamic strategy occurs when defined the optimal hedge ratio, this one is constantly monitored and the position in the futures market continuously rebalanced. However, the constant rebalancing becomes expensive to the hedger due to operational costs.

### 2.2.1. Static hedge ratio estimation models

We will assume that the market is incomplete; therefore not all the risks are hedgeable through trading the underlying stock. If the market was complete, given sufficient initial capital, all claims could be replicated by trading the stock dynamically. Static derivatives hedges do not add anything to dynamic hedges in complete markets, but of course they are very valuable tools in realistic incomplete market models, where there may be risk factors that cannot be eliminated just by dynamic trading of the underlying stock. By incorporating static hedges, we enlarge the set of feasible hedging strategies that the investor can choose from and allow for a better hedging performance.

When a hedge, where the futures position has the same size but the opposite sign than the position held in the spot market, is considered, we have what is called a naïve hedge ratio ( $h_t = 1, \forall t$ ). The naïve model has a lower perceived value in practice, but will be used here for comparison purposes.

We have also estimated the hedge ratio through the OLS method. Empirically, the one period hedge ratio is estimated by the slope from the following ordinary least squared (OLS) regression equation:

$$s_{t+1} = \alpha + h^* f_{t+1} + \varepsilon_t \quad (14)$$

where  $\varepsilon_t$  is the error term from OLS estimation,  $s_{t+1}$  and  $f_{t+1}$  are the changes in the spot and futures prices, respectively, between time  $t$  and  $t+1$ , and  $h^*$  is the minimum hedge ratio.

### 2.2.2. Time-varying (dynamic) hedge ratio estimation models

The static hedging strategy determines the equilibrium point or neutral point of the dynamic hedging strategy. If the position taken in derivatives changes over time the hedging strategy is dynamic.

Multivariate models can be used for the computation of optimal hedge ratios. Selected multivariate models for this work are: the BEKK, the Diagonal BEKK, the CCC and DCC models. As such, we are also able to compare different parameterizations.

Developed by Engle (1982) and then Bollerslev (1986), the autoregressive conditional heteroskedasticity model (ARCH) sparked a substantial body of work which concerns with not only further examining the second moment of economic and financial time series, but also extending and generalizing the initial ARCH model to better fit the situation being investigated. Bollerslev, Engle and Wooldridge (1988) generalized the univariate GARCH to a multivariate dimension to simultaneously model the conditional variance and covariance of two interacted series. This multivariate GARCH model is thus applied to the calculation of dynamic hedge ratios



that vary over time based on the conditional variance and covariance of the spot and futures prices. Engle and Kroner (1995) present various MGARCH models with variations to the conditional variance-covariance matrix of equations.

Generalized from GARCH(1,1), a standard M-GARCH(1,1) model is expressed as:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ss,t}^2 \\ \sigma_{sf,t}^2 \\ \sigma_{ff,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{ss,t} \\ c_{sf,t} \\ c_{ff,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_{s,t-1}^2 \\ \varepsilon_{s,t-1}\varepsilon_{f,t-1} \\ \varepsilon_{f,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{ss,t-1}^2 \\ \sigma_{sf,t-1}^2 \\ \sigma_{ff,t-1}^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

where  $\sigma_{ss}^2, \sigma_{ff}^2$  are the conditional variance of the errors ( $\varepsilon_{s,t}, \varepsilon_{f,t}$ ) from the mean equations,  $c_{ij}, a_{ij}$  and  $b_{ij}$  are coefficients. Where we have that:

$$\varepsilon_t | \phi_{t-1} \sim BN(0, H_t) \text{ with} \quad (16)$$

$$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{st} \\ \varepsilon_{ft} \end{bmatrix} \text{ and } H_t = \begin{bmatrix} \sigma_{ss,t}^2 & \sigma_{sf,t}^2 \\ \sigma_{fs,t}^2 & \sigma_{ff,t}^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

To maintain a reasonable number of parameters and positive definiteness of the covariance matrix, different parameterizations for the conditional covariance matrix are proposed.

#### *0The BEKK and Diagonal BEKK models*

Here is presented the BEKK model of Engle and Kroner (1995) (named after an earlier working paper by Baba, Engle, Kraft and Kroner). In its full parameterization, the BEKK model can be written as

$$\Sigma_t = C'C + B'\Sigma_{t-1}B + A'\eta_{t-1}\eta'_{t-1}A \quad (18)$$

where  $C$  is a lower triangular matrix, and  $B$  and  $A$  are square matrices. Positive definiteness is guaranteed by the use of quadratic forms. Hence, strong restrictions that have to be made on the VEC model to ensure positive definiteness are bypassed. Restrictions of the BEKK model include the diagonal BEKK and the scalar BEKK. In the diagonal BEKK, matrices  $B$  and  $A$  are diagonal matrices. In the scalar BEKK,  $B$  and  $A$  are scalars. We will only look at the BEKK and diagonal versions.

Drawbacks from the BEKK parameterization are: (i) the remaining significant number of parameters to estimate which still grows with  $O(n^2)$ . For a BEKK model with one lag on ARCH and GARCH components, this gives  $\left(\frac{5n^2+n}{2}\right)$  coefficients.

(ii) the impossibility to interpret estimated coefficients. Any co variability persistence is then difficult to characterize. (iii) the implicit hypothesis of a constant correlation

structure. It is then useful to enrich the structure of the model by allowing for time-varying correlations.

Karolyi (1995) suggests that the BEKK (Baba, Engle, Kraft and Kroner) model allows the conditional variance and covariance of the spot and futures prices to influence each other, and, at the same time, do not require the estimation of a large number of parameters to be employed. The model also ensures the condition of a positive semi-definite conditional variance-covariance matrix in the optimization process which is a necessary condition for the estimated variance to be zero or positive. The BEKK parameterization for the MGARCH(1,1) model is written as:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_{ss,t}^2 & \sigma_{sf,t}^2 \\ \sigma_{fs,t}^2 & \sigma_{ff,t}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{ss} & c_{sf} \\ 0 & c_{ff} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} c_{ss} & c_{sf} \\ 0 & c_{ff} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} a_{ss} & a_{sf} \\ a_{fs} & a_{ff} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \varepsilon_{s,t-1}^2 & \varepsilon_{s,t-1}\varepsilon_{f,t-1} \\ \varepsilon_{f,t-1}\varepsilon_{s,t-1} & \varepsilon_{f,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ss} & a_{sf} \\ a_{fs} & a_{ff} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} b_{ss} & b_{sf} \\ b_{fs} & b_{ff} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \sigma_{ss,t-1}^2 & \sigma_{sf,t-1}^2 \\ \sigma_{fs,t-1}^2 & \sigma_{ff,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{ss} & b_{sf} \\ b_{fs} & b_{ff} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{19}$$

where  $\sigma_{ss,t}^2$ ,  $\sigma_{ff,t}^2$  and  $\sigma_{sf,t}^2$  are the conditional variances and covariance's of the errors ( $\varepsilon_{st}, \varepsilon_{ft}$ ) from mean equations, so that we allow for the cointegration relationship in the series. Conditional variance and covariance only depend on their own lagged squared residuals and lagged values. The MGARCH model incorporates a time-varying conditional covariance and variance between the spot and futures prices and hence generates more realistic time-varying hedge ratios. The BHHH (Berndt, Hall, Hall and Hausman) algorithm is used to produce the maximum likelihood parameter estimates and their corresponding asymptotic standard errors.

Notice that the assumption of normality in allowances log-price variation is not a realistic one. As we will see in the summary statistics of the data, one fact that characterizes allowances price distribution is its leptokurtosis. As such, as an alternative empirical distribution to the normal one we will also use the bivariate t-student distribution in the multivariate-GARCH BEKK and Diagonal BEKK models used here:

$$\varepsilon_t | \phi_{t-1} \sim BN(0, H_t, \nu) \tag{20}$$

where  $\nu$  is the degrees of freedom parameter of a conditional bivariate  $t$ -student distribution.

Bivariate GARCH modelling allows to model the conditional second moments, but also the cross moments, with special relevance, in our case, to the contemporaneous covariance between electricity spot and futures. That's why the conditional, on

time  $t-1$  available information, error term vector follows a bivariate normal law, and for comparison purposes also a bivariate t distribution, being  $H_t$  the positive definite variance covariance matrix dependent on time.

In view of the excessively large number of parameters needed to be estimated in the model, Bollerslev (1990) proposed an assumption that matrix  $A_i$  and  $B_i$  are diagonal and the correlation between the conditional variances are to be constant. Bollerslev, Engle and Wooldridge (1988) propose a parameterization of the conditional variance equation in the multivariate-GARCH model termed the Diagonal BEKK model which allows for a time-varying conditional variance. Like the constant correlation model, the off-diagonal in the matrices  $A_i$  and  $B_i$  are set to zero, i.e. the conditional variance depends only on its own lagged squared residuals and lagged values. Following Bollerslev, Engle and Wooldridge (1988), the diagonal representation of the conditional variances elements  $\sigma_{ss}^2$  and  $\sigma_{ff}^2$  and the covariance element  $\sigma_{sf}^2$  can be expressed as:

$$\begin{aligned}\sigma_{ss,t}^2 &= c_{ss} + a_{ss}\varepsilon_{s,t-1}^2 + b_{ss}\sigma_{ss,t-1}^2 \\ \sigma_{sf,t}^2 &= c_{sf} + a_{sf}\varepsilon_{s,t-1}\varepsilon_{f,t-1} + b_{sf}\sigma_{sf,t-1}^2 \\ \sigma_{ff,t}^2 &= c_{ff} + a_{ff}\varepsilon_{f,t-1}^2 + b_{ff}\sigma_{ff,t-1}^2\end{aligned}\quad (21)$$

This BEKK multivariate GARCH model employed here explicitly incorporates a time varying conditional correlation coefficient between the spot and futures prices and hence generates more realistic time-varying hedge ratios.

#### *The Bollerslev's (1990) CCC*

In the Bollerslev's (1990) model, covariances between  $i$  and  $j$  are allowed to vary only through the product of standard deviations with a correlation coefficient which is constant through time (constant correlation model or CCC). The dynamic of standard deviations is governed by the GARCH(1,1) variances' dynamic or any univariate GARCH model. Keeping the covariance matrix  $\Sigma_t = [\sigma_{ij,t}]$ , we have

$$\sigma_{ii,t}^2 = c_{ii} + b_{ii}\sigma_{ii,t-1}^2 + a_{ii}\varepsilon_{i,t}^2 \quad (22)$$

And

$$\sigma_{ij,t} = \rho_{ij} \sqrt{\sigma_{ii,t}^2 \sigma_{jj,t}^2} \quad (23)$$

As pointed out by Bollerslev (1990), under the assumption of constant correlation, MLE of the correlation matrix and sample-based correlation matrixes coincide. Because of the positive semi-definiteness of the sample-based estimate, the same is guaranteed for the conditional covariance matrix. The main advantage of this model is to greatly simplify computation by keeping out of the likelihood function

the correlation matrix. The number of parameters to estimate when a GARCH(1,1) is retained is  $n(n+5)/2$ . The main drawback of this model is that the sign of the conditional correlation is constant over time once  $\rho_{ij}$  is estimated. This may be a problem in the estimation of OHRs.

### *The DCC model of Engle (2002)*

Correlations between returns may not be constant in time. They may be stronger when prices are falling. To model this feature of the series some dynamic correlation models can be employed in order to avoid an implicit loss of information when estimating conditional variances and covariances. Among dynamic correlation models is that of Engle (2002).

The general form of the dynamic conditional correlation (DCC) model introduced by Engle (2002) is defined by

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= D_t R_t D_t \\ R_t &= Q_t^*{}^{-1} Q_t Q_t^*{}^{-1} \\ Q_t &= \left( 1 - \sum_{p=1}^P a_p - \sum_{q=1}^Q b_q \right) \bar{Q} + \sum_{p=1}^P a_p (\varepsilon_{t-p} \varepsilon'_{t-p}) + \sum_{q=1}^Q b_q Q_{t-q}\end{aligned}\tag{24}$$

where  $D_t$  is a  $n \times n$  diagonal matrix of time varying standard deviations defined by any univariate GARCH model,  $R_t$  is a  $n \times n$  time varying correlation matrix,  $\bar{Q}$  is the unconditional covariance matrix using standardized residuals from the univariate estimates, and  $Q_t^*$  is a diagonal matrix of the square root of the diagonal elements of  $Q_t$ . We then have the time varying correlation matrix defined as  $R_t = [\rho_{ij,t}]$  with

$$\left[ \rho_{ij,t} = \frac{q_{ij,t}}{\sqrt{q_{ii} q_{jj}}} \right].$$

DCC differs from CCC mainly in that it allows the correlation matrix

to be changed over time and by having  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  parameters.

Interestingly, the DCC model can be estimated in two steps and the number of parameters to estimate is greatly reduced. The model is then manageable for a greater number of series. The model also keeps intuition in the interpretation of the parameters, which is lost by using a factor model where parameters describe an unobserved variable. Nevertheless, this simplification is made at a cost. Indeed, an implicit assumption of the DCC model is that  $a_p$  and  $b_q$  being scalars, all correlations obey the same dynamic.

### 3. DATA AND SUMMARY STATISTICS

The European Union (EU) clearly indicated its will against the fight of global warming when in 2005 they decided to trade European Union Allowances (EUAs), each representing the right to emit one ton of CO<sub>2</sub> in the atmosphere.

Established under Directive 2003/87/EC, the EU ETS (EU Emissions Trading Scheme) regulates the carbon dioxide emissions (CO<sub>2</sub>) from installations across the EU, which includes power generation, mineral oil refineries, offshore installations, and other heavy industrial sectors in its first phase from 2005-2007 (Phase I or pre-Kyoto period) and in its second phase from 2008-2012 (Phase II or Kyoto period). Further 5-years phase will follow and CO<sub>2</sub> emission allowances are currently being traded on electricity power exchanges. We have decided to work with data from Pownext in France who trades CO<sub>2</sub> spots.

CO<sub>2</sub> has thus become a kind of tradable good where initially each member state decides, through the National Allocation Plan, how much EUAs to emit and how those will be distributed to each installation. If an installation emits below its level then at the end of the compliance year it can trade the excess EUAs; or it may need to buy EUAs due to excess emission in a given year, otherwise it will be forced to pay an excess emissions penalty (€100 according to the World Bank reports). With the evolution of the carbon trading market, not only the carbon spot but also some derivatives markets such as the carbon futures and options markets have gradually emerged.

Due to the newness of this market, data of any useful size and quality has only recently become available. This article uses daily (Monday to Friday) CO<sub>2</sub> spot and futures prices for more than 4 years, June 24, 2005 to October 9, 2009, thus extending the data span considered by previous authors that mostly cover Phase I period contracts (Daskalakis and Markellos, 2008; Paoletta and Taschini, 2008; Uhrig-Homburg, 2008; Chevallier, 2008, 2010).

From these daily prices quotes in Euro (€) per metric tonne, daily returns (log price first differences) are calculated. Data used comes from the French electricity market Pownext<sup>3</sup>, who's trading of CO<sub>2</sub> allowances, is performed on the Bluenext, the market place dedicated to CO<sub>2</sub> spot trading, based in Paris and created on June 24, 2005.

Trading of emission allowances futures contracts is primarily performed through the European Climate Exchange (ECX). Since the ECX does not allow spot EUA trading, it uses Bluenext spot prices as a reference for the futures contracts. ECX EUA Futures contracts were the first emissions products to be listed on the Intercontinental Exchange (ICE) Futures Europe platform in UK on April 22, 2005. ECX EUA Futures are based on underlying EU allowances (EUAs) and provide the market with standardized contract terms and a benchmark for price discovery. ICE/ECX

---

<sup>3</sup> We would like to thank them for providing us with the necessary CO<sub>2</sub> spot data.

continues to be the most liquid and transparent platform for EUA trading offering transparent screen trading with tight spreads as well as the clearing of over-the-counter positions. Contracts are listed on a quarterly expiry cycle such that March, June, September and December contract months are listed up to March 2013 and annual contracts with December expiries for 2013 and 2014. We choose to work with December contracts only, which are physically settled three days after expiry with the maturity date being the last business day of December in ECX.

As argued by Daskalakis, Psychoyios and Markellos (2009), the pricing mechanism and relationship between spot and futures allowances prices may vary considerably depending on if the futures contract is written and expires in the same phase or between different phases of the EU ETS, respectively. We have performed empirical tests using the methodologies presented before for all current December contracts traded on ECX (Futures December 2005 - FutDec05 - through Futures December 2012 - FutDec12). However, results turn out to be very similar in terms of general conclusions. As such, and in order to save space<sup>4</sup>, we have decided to work only with the Future Contract maturing on December 2009 (FutDec09) given that for this specific contract we have data since June 24, 2005 until October 9, 2009, thus covering our entire data span<sup>5</sup>. As such, in the empirical application presented next, only one future contract (that maturing on December 2009) is considered to hedge the spot price variation at a daily scale.

Summary Statistics of the spot price and EUA futures contracts for all delivery dates (from 2005 to 2012) in the ECX market are provided in table 1.

**Table 1**  
Descriptive Statistics of spot prices and futures price contracts,  
both in logarithmic returns for the ECX/Bluenext market

ECX Series	Mean	Variance	Skewness	Kurtosis
Spot CO <sub>2</sub>	0.044	4.045	0.671	45.072
FutDec05	0.132	2.831	-1.811	12.494
FutDec06	-0.223	4.864	-0.292	44.226
FutDec07	-0.918	7.423	-0.821	18.152
FutDec08	0.110	2.944	-1.558	10.310
FutDec09	-0.009	3.353	-1.718	20.844
FutDec10	-0.002	3.322	-1.660	20.104
FutDec11	0.005	3.335	-1.600	18.576
FutDec12	0.011	3.404	-1.564	16.965

<sup>4</sup> Results for all these contracts, using the hedging strategies applied, will be provided upon request.

<sup>5</sup> Phase II contracts have started to be trading also during Phase I, and thus FutDec09 is the contract which allows us to have a complete picture of the whole scenario.

Spot refers to ECX CO<sub>2</sub> Spot prices, FutDec05 to FutDec12 refer to ECX December 2005 to 2012 CO<sub>2</sub> Futures contracts; The variables are the standard ones.

Alberola and Chevallier (2009) show that banking restrictions<sup>6</sup> between 2007 and 2008 caused the disconnection of spot and futures prices between Phase I and Phase II.

Besides this also a structural break for carbon prices of all maturities occurred in April 2006 due to information revelation (Alberola, Chevallier and Chèze, 2008). The 2008 onwards decreasing EUAs prices are justified by the decreasing volume demand, a product of the worldwide financial crisis. EUAs were traded at €15 in March 2007, then stayed in the range of €19-25 until July 2008, and decreased steadily afterwards to achieve €8 in February 2009.

Futures of all maturities present negative skewness and excess kurtosis (for a normal distributed random variable skewness is zero and kurtosis is three). We may observe from table 1 the absence of normality in the returns, and data fat tail leptokurtic distributions. As such, we have heteroskedasticity presented on the series under analysis and MGARCH models are able to capture the data properties in a proper way.

Emission allowances are characterized by high historical volatility, as they were also previously in the literature (Paoletta and Taschini, 2008; Daskalakis, Psychoyios and Markellos, 2009). Volatility is higher for FutDec06 and FutDec07, which should be expected given the immaturity of the ECX market during Phase I. However, future 2008 contracts through futures 2012 contracts evidence a much more similar volatile behaviour between them, which may indicate a stabilized investors learning process, and when we compare Phase II futures contracts with the spot CO<sub>2</sub> allowances returns, we see that the latter is more volatile than the formers. As such, being CO<sub>2</sub> a commodity, its spot price is more volatile than futures<sup>7</sup>.

In order to apply the methodologies presented previously, we also need to ensure the data stationarity.

Apart from the augmented Dickey-Fuller (ADF) tests, which attempt to account for temporally dependent and heterogeneously distributed errors by including lagged sequences of first differences of the variable in its set of regressors, the KPSS test can also be used. The null hypothesis for the ADF test is that the variables contain a unit root or that they are non-stationary at a certain significant level. In the KPSS tests, proposed by Kwiatkowski *et al.* (1992), the null hypothesis is that a series is

---

<sup>6</sup> According to the proposal of EU ETS, allowance banking and borrowing between Phase I and II were prohibited. Hence, at the end of 2007, when the first phase of EU ETS came to its end, a palpable seem between the two phases appeared, which lead the carbon spot price to approach zero.

<sup>7</sup> As argued by Lien and Shrestha (2007): "In the case of commodities, the futures markets are more liquid than the spot markets. Consequently, the variances of futures returns are much smaller than that of the spot returns for commodities".

stationary around a deterministic trend (TS) and the alternative hypothesis is that the series is difference stationary (DS).

We have performed ADF and KPSS tests for the market and strategies considered. We are working with spot and futures returns (log price first differences) and these tests confirm that series are stationary<sup>8</sup>.

We also have to check cointegration in CO<sub>2</sub> allowances markets, and for this we use the Johansen's test. Although results are not presented here<sup>9</sup>, correlation values revealed to be high, which will then ensure a good risk reduction for hedgers, as we will be able to confirm in the results of the empirical part.

#### 4. EMPIRICAL RESULTS

This paper presents empirical results about hedging allowances price risk with futures when an early daily cancellation of futures positions is made. As previously mentioned, to compare the hedging effectiveness and utility maximization obtained through the strategy, both risk reduction and utility gains are computed. Furthermore, ex post and ex ante results will be distinguished by splitting the data sample into two parts. In the first part, the hedging strategy is compared ex post, whereas in the second part, an *ex ante* approach is used. That is, in the *ex ante* study, strategies are compared using forecasted hedge ratios and models are estimated every time a new observation is considered by maximizing the log-likelihood function for multivariate GARCH BEKK models and quasi-likelihood maximization for the estimation of CCC and DCC models.

In the following we will present the results obtained using the empirical methodologies presented before.

Figures 1 to 4 show the estimated spot and futures volatility from each multivariate model (figures 1 and 2, respectively) and the estimated covariance and conditional correlations (figures 3 and 4, respectively).

Volatility estimated by the six different multivariate models adopted are presented in figures 1 and 2, being the spot CO<sub>2</sub> conditional volatility presented in figure 1, and Future December 2009 conditional volatility presented in figure 2.

Comparing both figures we may see that conditional volatility estimated through multivariate models is lower the December 2009 future contract with regard to its benchmark (CO<sub>2</sub> spot), which confirms the results obtained in the summary statistics.

Thus, it seems that portfolios which replicated the spot obtained lower volatility, i.e. risk levels, with this effect being particularly noticeable during periods of maximum

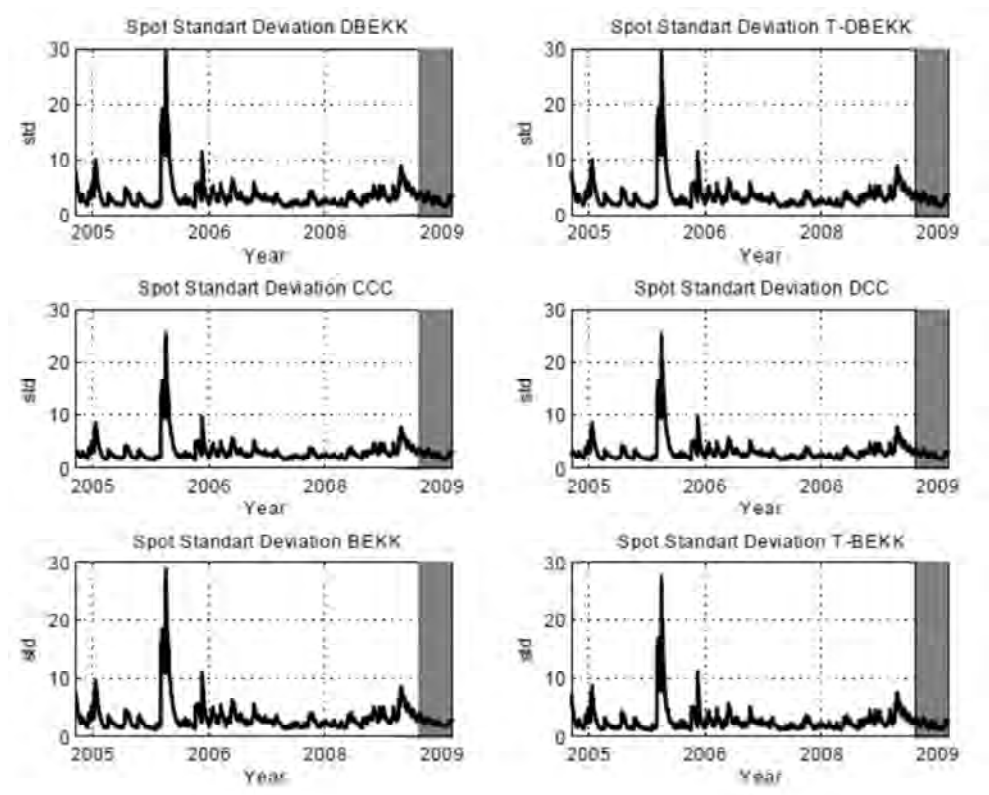
---

<sup>8</sup> Results will be provided upon request.

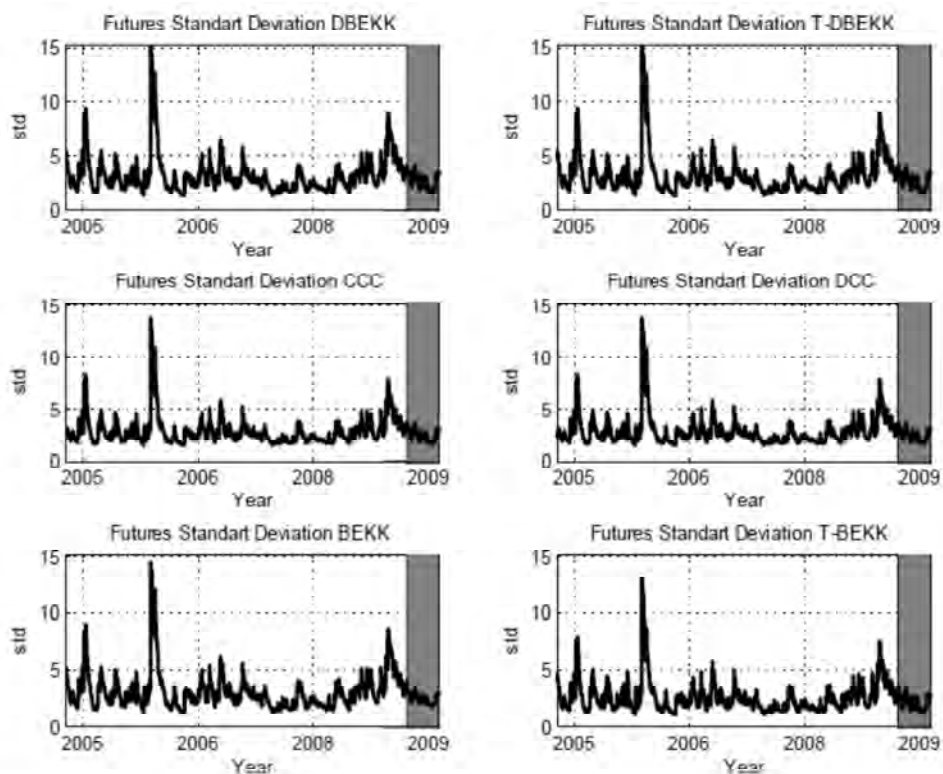
<sup>9</sup> Results will also be provided upon request.



volatility. These periods of maximum uncertainty started at the end of 2006 and the year 2007, while after we also have increased uncertainty in the second week of October 2008 which then ran to January 2009. It seems to have been caused by a growing lack of confidence of the agents operating in the stock market, caused by the worldwide crisis and the spread to all other financial and commodity markets around the globe.

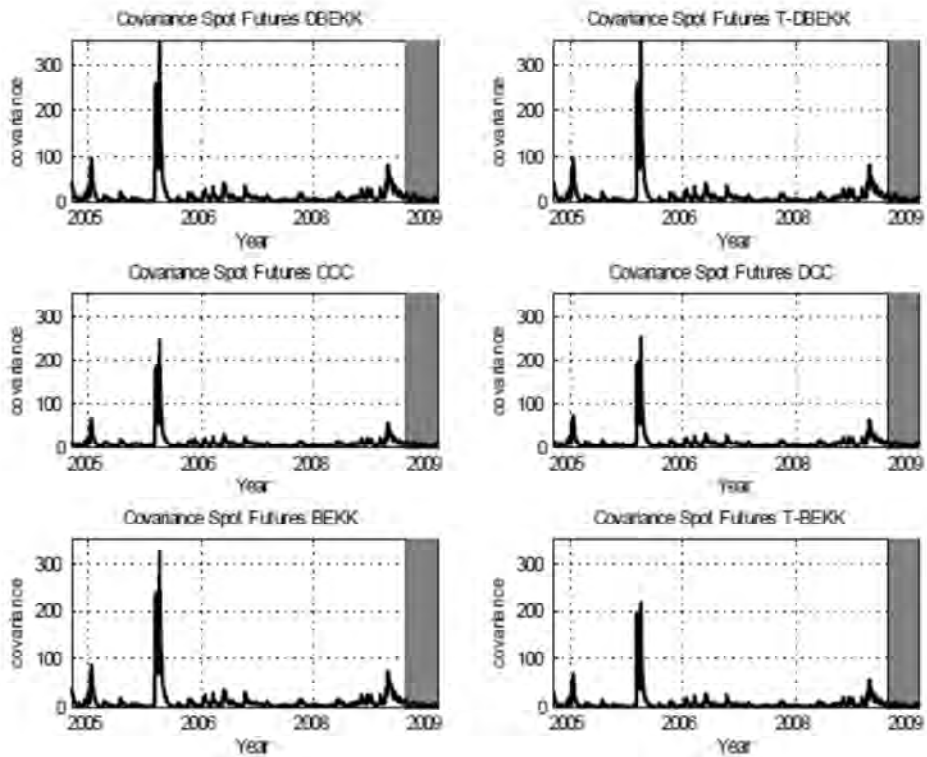


**Figure 1**  
Conditional volatility for the spot CO<sub>2</sub> allowances in the ECX market



**Figure 2**  
 Conditional volatility for the Futures December 2009 CO<sub>2</sub> allowances  
 in the ECX market

Results for the conditional covariance between EU ETS allowances and futures maturing in December 2009 are plotted in figure 3. This figure illustrates results of covariance estimated for in-sample prediction based on different econometric models that we have mentioned previously. Generally speaking, there are no significant differences in covariance forecasting performance, despite the MGARCH model used under the in-sample context. Both correlations (figure 4) and covariance's are all positive and similar in absolute term (values) for all of these models. Moreover, by looking at the plots the only difference that seems to exist among models is the estimated correlation process. However, we can find that their covariance process have salient differences and accordingly it seems inappropriate to assume that the correlation parameter between CO<sub>2</sub> spot and futures is constant over time.



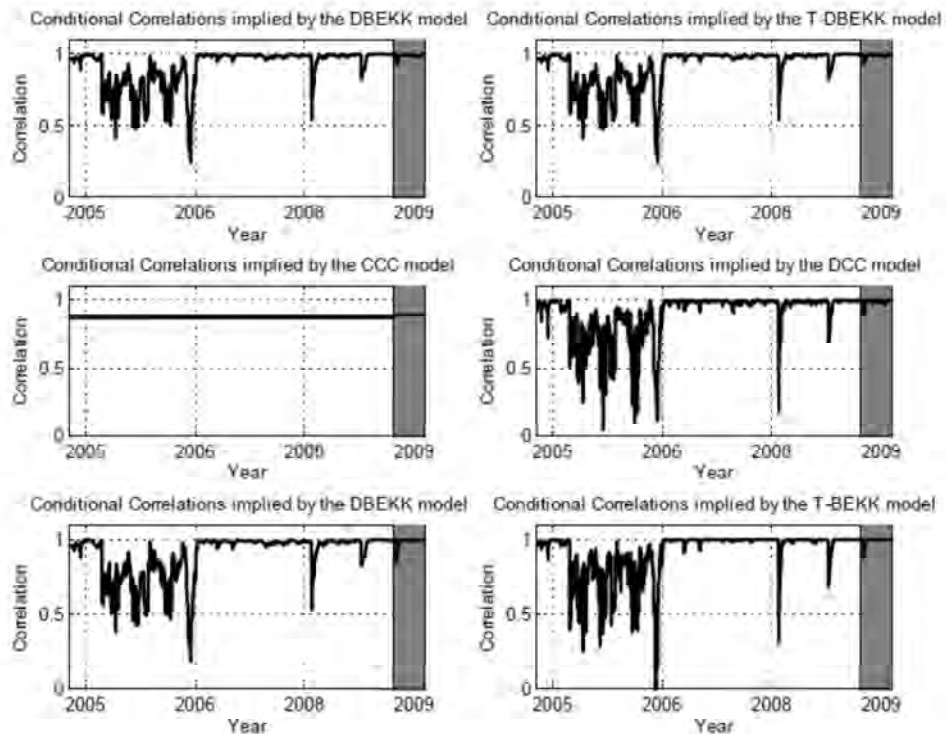
**Figure 3**

Conditional covariance between spot and futures CO<sub>2</sub> allowances for the ECX market during the period 2005-2009

Figure 3 shows that covariance values are higher using BEKK models, with a peak value around 325. However, covariance shows to be very close to zero, most of the time. But, at the same time we see the conditional covariance approaching zero we also see conditional correlations very close to one (figure 4).

Apart from such considerations it is remarkable that the evolution of returns estimated by the multivariate models for both CO<sub>2</sub> spot and FutDec09 are strongly correlated (figure 4) to an estimated value of near one most of the time. The exception is for the conditional correlations implied by the CCC model. In general during 2005 and 2006 we see conditional correlations deviate from the value 1 (perfect correlation), but still remained very high (between 0.5 and 1).

The price level and returns in 2008 hedging horizon has opened the way for a series of dynamic variances and covariance's which are plotted has being fairly stable. Given that we can consider the Kyoto period a more mature phase when compared with the learning phase of the pre-kyoto commitment (Phase I), when increased and clustered volatility was evident, these softer optimal hedge ratios for 2008 and 2009 are somehow expected.



**Figure 4**  
Conditional correlations between spot and FutDec09 in the ECX CO<sub>2</sub> allowances market

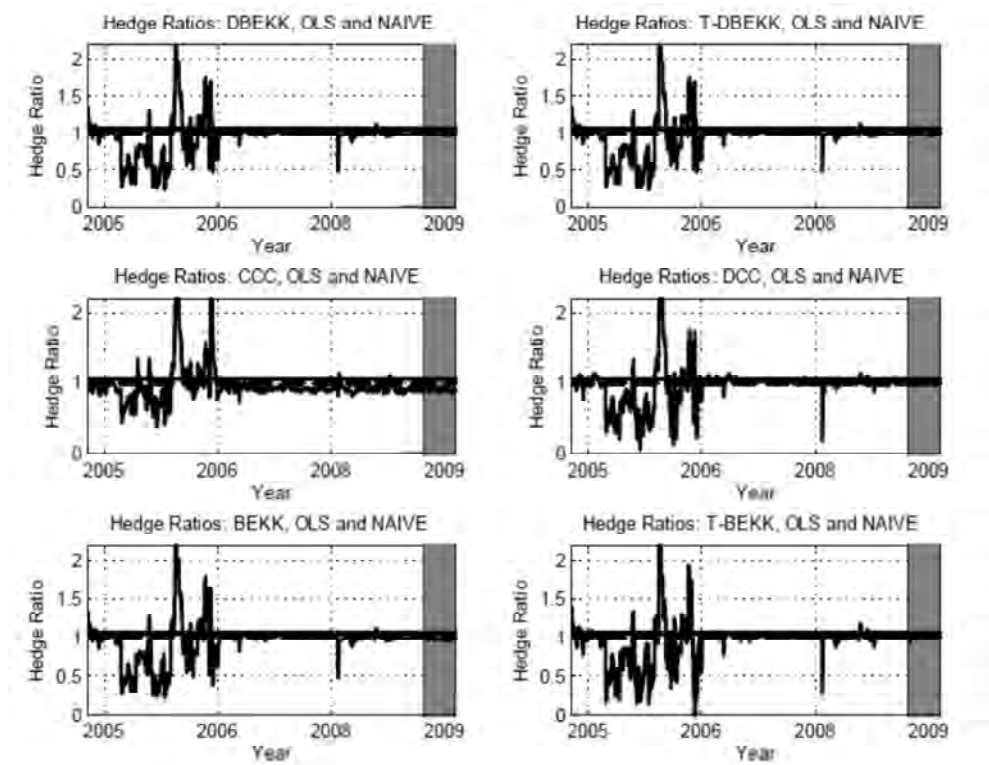
Obviously, the correlation results are important for EU ETS allowances price risk management, as they show that December Futures will provide a good risk reduction for hedgers. The time variation pattern documented in this study may carry some important implications for hedging. The instability in various aspects of market comovements may imply serious limitations to the investor's ability to exploit potential benefits from hedging with futures contracts in allowances markets. Much variation in the contemporaneous relationships among spot and futures prices may also highlight inadequacy in assuming (short-term) relationships in both markets, which might account for the difficulty in achieving profitable active trading.

The conditional hedge ratios derived by MGARCH models are graphed in figure 5. The computed values move around their unconditional values, and consequently, their performance is expected to be quite similar. In this figure, the dynamic optimal hedge ratio is plotted against the fixed optimal hedge ratio derived using OLS and N ave strategies.

The horizontal axis indicates the hedging horizon while the vertical one represents the level of hedge ratios. The fluctuating line represents the conditional hedge ratio at each point in time obtained through the six considered dynamic MGARCH models

(one plot for each), while the straight lines represent the constant hedge ratio (the solid straight line for OLS and the broken straight line being the naïve hedge ratio).

Results suggest that despite the volatile behaviour evident during 2005 and 2006, for the rest of the time this hedge ratio clearly approaches its long run equilibrium value of one. The degree of hedging effectiveness approaches one because the shared permanent component ties both spot and futures in allowances markets. This also implies that the effect of the transitory components becomes weaker. As such, in the long run, the spot and futures prices are perfectly correlated in these newly markets (favouring In and Kim (2006, 2006a); and Fernandez (2008) results, for different commodities and financial assets).



**Figure 5**  
Conditional Hedge ratios plot using FutDec09 to cover the spot CO<sub>2</sub> position in the ECX allowances market

Moreover, we see a very volatile behaviour of estimated conditional hedge ratios for Phase I values, while an outlier at the beginning of 2008 is also observed. The former is explained by the investor’s uncertain expectations about the spot and futures CO<sub>2</sub> markets given the newness of the market. The latter (the sudden ex-

treme jump in variance and covariance) deserves a more careful analysis and probably a structural break test would provide more insightful conclusions. In sum, optimal hedge ratios are very sensitive to changes in prices since the hedged portfolio is calculated on a daily basis.

Table 2 displays the variance reduction for the hedging combination spot CO<sub>2</sub> and Futures December 2009. The middle column reports in-the-sample results for the period June 24, 2005 to May 13, 2009. The last column reports out-of-sample results for the period May 14, 2009 to October 9, 2009 (around 100 observations). In this table the variance of a hedge strategy is calculated as the variance of the hedged portfolio. The risk reduction achieved for each strategy is computed by comparison with the variance of the spot position (the spot variance or else, assuming no hedging,  $h = 0$ ).

**Table 2**  
Hedging Effectiveness results in and out-of sample using ECX and Bluenext market data

	In the Sample	Out of Sample
Spot variance (no hedging) ( $h = 0$ )	13.61	4.53
<b>Hedging</b>	<b>Risk reduction</b>	<b>Risk reduction</b>
Naive ( $h = 1$ )	74.32	98.62
OLS ( $h = \frac{\sigma_{F,t}}{\sigma_{F,t}^2}$ )	74.04	99.04
Diag-BEKK ( $h_t = \frac{\sigma_{F,t,t}}{\sigma_{F,t}^2}$ )	85.53	99.04
T-Diag-BEKK ( $h_t = \frac{\sigma_{F,t,t}}{\sigma_{F,t}^2}$ )	86.63 <sup>+</sup>	99.06
CCC ( $h_t = \frac{\sigma_{F,t,t}}{\sigma_{F,t}^2}$ )	83.72	97.72
DCC ( $h_t = \frac{\sigma_{F,t,t}}{\sigma_{F,t}^2}$ )	85.64	99.01
BEKK ( $h_t = \frac{\sigma_{F,t,t}}{\sigma_{F,t}^2}$ )	85.34	99.00
T-BEKK ( $h_t = \frac{\sigma_{F,t,t}}{\sigma_{F,t}^2}$ )	85.03	99.07 <sup>+</sup>

The table displays the percentage of risk reduction achieved by each hedging strategy using Fut Dez 2009

The symbol + refers to the strategy with the largest risk reduction

In view of in sample and out of sample empirical results, we cannot clearly put all forecasting models in a proper order. However it is undoubted that the class of BEKK models possess the optimal forecasting power in covariance.

The dynamic hedging methods perform better than the static hedging strategies at a first look and not considering transaction costs<sup>10</sup>. One of the reasons for this re-

<sup>10</sup> Transaction costs will not be considered when comparing hedging methods as the hedging theoretical framework is a one-period model for all hedging methods. As such, the individual must take futures positions at the beginning of the period and cancel them at the end of the period. As hedging ratio values revealed to be very similar in the considered methods, all will have similar transaction costs.

sult is the commodity we choose to work with, clearly indicating the dynamic relationship existing between spot and futures returns in CO<sub>2</sub> allowances.

Results can be summarized in the following way: 1) Hedge ratios vary from model to model but are extremely close to each other in most cases. Still, these minor differences may condition the hedge ratio performance evaluations being optimal hedge ratios one of the inputs for performance computations. 2) Naive and OLS strategies give worse statistical performance than dynamic hedging strategies. However, adjustment costs of dynamic hedging strategies are higher given the daily adjustment. As such, the better statistical performance of MGARCH models should be expected. If those same costs were considered when OLS hedge ratio is used, probably results would point out a similar hedging effectiveness or variance reduction, although they are still very close to each other. This result implies that the better statistical performance of MGARCH models does not imply a better hedging strategy performance. 3) When MGARCH hedge ratio performances are compared, results are inconclusive in favour of any method as differences are quite small between strategies. However, the strategy with the largest risk reduction, for both in-sample and out-of-sample computations, is that obtained using the t distribution. This should also come at no surprise given that we have seen previously that one fact that characterizes allowances price distributions is its leptokurtosis. 4) For in-sample results the naïve hedging strategy provides better risk reduction than OLS although lower than that obtained using dynamic strategies.

As mentioned previously, the pure variance reduction approach of performance evaluation could be questioned by not taking into account the risk return trade-off, which is by opposition considered by utility maximization. As such, utility improvements (gains) of each considered model over the unhedged position are taken into account in the following. Results are presented in table 3.

This table presents utility gains resulting from using different models with the risk aversion parameter ( $\eta$ ) ranging from 1 until 4. Utility gains values are presented in percentage terms for both in-sample and out-of-sample data span, as considered also in table 2.

As evidenced by the results, utility gains increase with the level of the risk aversion parameter. As such, for risk lovers ( $\eta=4$ ) utility gains are superior to those obtained for risk averse ( $\eta=1$ ) or risk neutral ( $\eta=2$ ) investors.

Moreover, the model which produces the highest utility gain over the unhedged position is the T-Diagonal-BEKK model for in-sample results. As for the out-of-sample results evidence is mixed with respect to the model providing the higher utility gain (value), but the highest utility gain, although similar, is obtained from the naïve hedging strategy. This could be used as an argument for full hedge, as the easiest and cheapest hedging strategy.

By all that was previously seen we may say that as more data for EU ETS allowances markets becomes available, a more careful analysis of hedging using CO<sub>2</sub>

could provide insightful results for hedgers that participate in the allowances markets<sup>11</sup>. For now, we have provided evidence for the need to consider carbon instruments in the portfolio optimization. Moreover, given that allowances are traded in electricity markets, and are affected by fuel prices also, mixed portfolio strategies optimization could also be analyzed carefully, but we leave it for a future research.

**Table 3**  
Utility gains for alternative risk aversion levels and different models using spot and December 2009 futures CO<sub>2</sub> allowances for the ECX/Bluenext market

	In Sample				Out Sample			
	Variance	Return	Exp Util <sup>a</sup>	Gain <sup>b</sup>	Variance	Return	Exp Util <sup>a</sup>	Gain <sup>b</sup>
<i>η = 1</i>								
Unhedge	13.61	-0.01	-13.63	—	4.53	-0.13	-4.67	—
Naive	3.50	0.00	-3.50	10.13	0.06	0.01	0.00	4.67
OLS	3.53	0.00	-3.53	10.09	0.04	0.00	-0.04	4.62
Diag-BEKK	1.97	0.01	-1.96	11.66	0.04	-0.00	-0.04	4.62
T-Diag-BEKK	1.82	0.00	-1.82	11.81	0.04	-0.00	-0.04	4.63
CCC	2.22	-0.01	-2.23	11.40	0.10	-0.02	-0.12	4.55
DCC	1.96	-0.00	-1.96	11.67	0.04	-0.00	-0.05	4.62
BEKK	2.00	0.01	-1.99	11.64	0.05	-0.00	-0.05	4.62
T-BEKK	2.04	0.00	-2.03	11.59	0.04	-0.00	-0.04	4.63
<i>η = 2</i>								
Unhedge	13.61	-0.01	-27.24	—	4.53	-0.13	-9.20	—
Naive	3.50	0.00	-6.99	20.25	0.06	0.01	-0.01	9.19
OLS	3.53	0.00	-7.07	20.17	0.04	0.00	-0.09	9.12
Diag-BEKK	1.97	0.01	-3.93	23.31	0.04	-0.00	-0.09	9.12
T-Diag-BEKK	1.82	0.00	-3.64	23.60	0.04	-0.00	-0.09	9.12
CCC	2.22	-0.01	-4.44	22.80	0.10	-0.02	-0.22	8.98
DCC	1.96	-0.00	-3.91	23.33	0.04	-0.00	-0.09	9.11
BEKK	2.00	0.01	-3.98	23.26	0.05	-0.00	-0.09	9.11
T-BEKK	2.04	0.00	-4.07	23.17	0.04	-0.00	-0.08	9.12
<i>η = 4</i>								
Unhedge	13.61	-0.01	-54.47	—	4.53	-0.13	-18.27	—
Naive	3.50	0.00	-13.98	40.49	0.06	0.01	-0.03	18.25
OLS	3.53	0.00	-14.14	40.34	0.04	0.00	-0.17	18.10
Diag-BEKK	1.97	0.01	-7.87	46.60	0.04	-0.00	-0.17	18.10
T-Diag-BEKK	1.82	0.00	-7.28	47.19	0.04	-0.00	-0.17	18.10
CCC	2.22	-0.01	-8.88	45.59	0.10	-0.02	-0.43	17.84
DCC	1.96	-0.00	-7.83	46.64	0.04	-0.00	-0.18	18.09
BEKK	2.00	0.01	-7.98	46.49	0.05	-0.00	-0.18	18.09
T-BEKK	2.04	0.00	-8.15	46.32	0.04	-0.00	-0.17	18.10

<sup>a</sup> Expected Utility:  $E[U(r_{p,t})|v_{t-1}] = E[r_{p,t}|v_{t-1}] - \lambda \text{Var}(r_{p,t}|v_{t-1})$

<sup>b</sup> Utility Gain of Hedging Models over Unhedged Position

<sup>11</sup> Despite the entire data span used we are still limited in terms of Phase II data.



## 5. CONCLUSIONS

With this work we investigate and empirically estimate optimal hedge ratios, for the first time as far as we are aware, in the EU ETS CO<sub>2</sub> allowances markets (more specifically the EXC - European Climate Exchange-market). We analyze their hedging effectiveness applying both static (OLS and naïve) and dynamic (Multivariate GARCH-MGARCH) estimation strategies. To get further insights about the risk-return relation, utility gains are also derived through the application of these models, for different risk aversion parameters level.

The contribution of this paper is fourfold: First, we calculate for the first time hedge ratios for the CO<sub>2</sub> allowances market. Second, we extend the data span considered by previous authors that mostly covered the Phase I period (2005-2007). Third, we use both static and dynamic hedging strategies which allow us to compare different specifications. Finally, we help to identify the internal dynamics of widely traded CO<sub>2</sub> emission allowances, essential in pricing of the contracts, while the implications of the study are expected to be functional for risk managers, individual investors and hedgers dealing with carbon allowances trading markets.

Our empirical findings can be summarized as follows: 1) Dynamic hedging provides superior gains measured by variance portfolio reduction as compared to static hedging strategies; 2) However, taking into account transaction costs of rebalancing daily the hedged portfolio in dynamic MGARCH models will imply that their better statistical performance in the EU ETS market becomes seriously questioned; 3) Also, taking into account data leptokurtosis characteristics through the error distribution assumption indicates superior gains, measured by variance reduction, obtained from the multivariate model BEKK (Diagonal), for both in sample and out of sample results (BEKK); 4) It is also found that, utility gains increase with investor's preference over risk.

Correlation results are important for EU ETS allowances price risk management, as they show that December Futures will provide a good risk reduction for hedgers participating in EU ETS markets. Overall, there seems to exist gains by including heteroskedasticity and time-varying variances in hedge ratios calculations, although it is not completely guaranteed that improving statistical price modelling provides better performance. As the market evolves and more data becomes available, it should be expected more useful results, obtained through dynamic models.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This research has been supported by the Portuguese Foundation for Science and Technology (FCT) (Grant number SFRH/BD/19948/2004) as part of the first author doctoral grant. Any shortcomings and errors are the author's sole responsibility.

## BIBLIOGRAFÍA

Alberola, E. and Chevallier, J. (2009). "European Carbon Prices and Banking Restrictions: Evidence from Phase I (2005-2007)". *The Energy Journal*, 30, 3, 107-136.

Alberola, E., Chevallier, J. and Chèze, B. (2008). "Price drivers and structural breaks in European carbon prices 2005-2007". *Energy Policy*, 36, 787-797.

Anderson, T.G., Bollerslev, T., Christoffersen, P.F. and Diebold, F.X. (2006). "Volatility and correlation forecasting. in the Handbook of Economic Forecasting", G. Elliot, C.W.J. Granger and A. Timmermann (eds.), North Holland Press, Amsterdam.

Benet, B.A. (1992). "Hedge period length and ex ante futures hedging effectiveness: the case of foreign exchange risk cross hedges". *The Journal of Futures Markets*, 12, 163-175.

Benth, F.E., Cartea, A. and Kiesel, R. (2008). "Pricing forward contracts in power markets by the certainty equivalence principal: explaining the sign of the market risk premium". *Journal of Banking and Finance*, 32, 2006-2021.

Benz, E. and Trüch, S. (2009). "Modeling the price dynamics of CO<sub>2</sub> emission allowances". *Energy Economics*, 3, 1, 4-15.

Bessembinder, H. and Lemmon, M.L. (2002). "Equilibrium pricing and optimal hedging in electricity forward markets". *The Journal of Finance*, 57, 1347-1382.

Bollerslev, T. (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, 32, 307-327.

Bollerslev, T. (1990). "Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized arch approach". *Review of Economics and Statistics*, 72, 498-505.

Bollerslev, T., Engle, R.F. and Wooldridge, J.M. (1988). "A capital asset pricing model with time-varying covariances". *Econometrica*, 96, 116-131.

Borak, S., Härdle, W., Trüch, S. and Weron, R. (2006). "Convenience yields for CO<sub>2</sub> emission allowance futures contracts". SFB 649 Discussion Paper 2006-076, *Economic Risk*, Berlin, 1-25.

Botterud, A., Battacharyya, A. and Ilic, M. (2002). "Futures and spot prices -an analysis of the Scandinavian electricity market". In: *Proceedings of the North American Power Symposium 2002*. Tempe, Arizona.

Byström, H. (2003). "The hedging performance of electricity futures on the nordic exchange nord pool". *Applied Economics*, 35, 1, 1-11.

Cecchetti, S.G., Cumby, R.E. and Figlewski, S. (1988). "Estimation of the optimal futures hedge". *The Review of Economics and Statistics*, 70, 4, 623-630.

Chen, S., Lee, C. and Shrestha, K. (2001). "On the mean-generalized semivariance approach to determining the hedge ratio". *The Journal of Futures Markets*, 21, 581-598.

Chen, S.S., Lee, C.F. and Shrestha, K. (2003). "Futures hedge ratios: a review". *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 43, 433-465.

Chevalier, J., Ielpo, F. and Mercier, L. (2009). "Risk aversion and institutional information disclosure on the European carbon market: a case study of the 2006 compliance event". *Energy Policy*, 37, 15-28.

Chevallier, J. (2008). *The European carbon market (2005-2007): banking, pricing and risk hedging strategies*. Unpublished thesis (Ph. D), University of Paris X, Nanterre.

Chevallier, J. (2010). "Modeling risk premia in CO<sub>2</sub> allowances spot and futures prices". *Economic Modelling*, 27, 3, May, 717-729.

Considini, T.J. and Larson, D.F. (2001). "Risk premium on inventory assets: the case of crude oil and natural gas". *Journal of Futures Markets*, 21, 2, 109-126.

Daskalakis, G. and Markellos, R. N. (2008). "Are the European carbon markets efficient?". *Review of Futures Markets*, 17, 2, 103-128.

Daskalakis, G. and Markellos, R. N. (2009). "Are electricity risk premia affected by Emission Allowance prices? Evidence from the EEX, Nord Pool and Powernext". *Energy Policy*, 37, 7, 2594-2604.

Daskalakis, G., Psychoyios, D. and Markellos, R. (2009). "Modeling CO<sub>2</sub> emission allowance prices and derivatives: Evidence from the European Trading Scheme". *Journal of Banking and Finance*, 33, 1230-1241.

DeJong, D.A. and Whiteman, H. (1991). "Reconsidering trends and random walks in macroeconomic time series". *Journal of Monetary Economics*, 28, 2.

Demirer, R., Lien, D. and Shaffer, D.R. (2005). "Comparisons of short and long hedge performance: the case of Taiwan". *Journal of Multinational Financial Management*, 15, 1, 51-66.

Diko, P., Lawford, S. and Limpens, V. (2006). "Risk premia in electricity forward prices". *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 10, 1-27.

Doege, J., Schiltknecht, P. and Lüthi, H.-J. (2006). "Risk management of power portfolios and valuation of flexibility". *OR Spectrum, Regular Article*, 28, 267-287.

Ederington, L. (1979). "The hedging performance of the new futures markets". *Journal of Finance*, 34, 1, 157-170.

Engle, R.F. (1982). "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation". *Econometrica*, 50, 987-1008.

Engle, R.F. and Kroner, K.F. (1995). "Multivariate simultaneous generalized arch". *Econometric Theory*, 11, 122-150.

Fama, E. and French, K. (1988). "Business cycles and the behavior of metal prices". *Journal of Finance*, 43.

Fernandez, V. (2008). "Multi-period hedge ratios for a multi-asset portfolio when accounting for returns co-movement", *Journal of Futures Markets*, vol. 28, n° 2, 182-207.

Figlewski, S. (1997). "Forecasting volatility. in Financial Markets", Int. Instruments, NYU, Salomon Center, 6, 1, 1-88.

Harris, R.D.F. and Shen, J. (2006). "Hedging and value at risk". *The Journal of Futures Markets*, 26, 4, 369-390.

Howard, C.T. and D'Antonio, L.J. (1984). "A risk-return measure of hedging effectiveness". *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, 1, 101-112.

Hsin, C.W., Kuo, J. and Lee, C.F. (1994). "A new measure to compare the hedging effectiveness of foreign currency futures versus options". *Journal of Futures Markets*, 14, 6, 685-690.

Hua, Z. (2007). "Constant vs. dynamic hedge ratios with an application to Chinese copper futures market". *IEEE-Transactions on Power Systems*, 5, 4056-4059.

Hull, J.C. (2006). *Options, futures, and other derivatives*, volume 1. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 6th edition edition.

In, F. and Kim, S. (2006). "The hedge ratio and the empirical relationship between the stock and futures markets: A new approach using wavelet analysis", *Journal of Business*, vol. 79, n° 2, pp. 799-820.

In, F. and Kim, S. (2006a). "Multiscale hedge ratio between the Australian stock and futures markets: evidence from wavelet analysis". *Journal of Multinational Financial Management*, 16, 4, October, pp. 411-423.

Johnson, L.L. (1960). "The theory of hedging and speculation in commodity futures". *Review of Economic Studies*, 27, 3, 139-151.

Karakatsani, N.V. and Bunn, D.W. (2005). *Diurnal reversals of electricity forward premia*. Mimeo, Department of Decision Sciences, London Business School.

Karolyi, G.A. (1995). "A multivariate garch model of international transmissions of stock returns and volatility: the case of the united states and Canada". *Journal of Business and Economic Statistics*, 14, 11-25.

Keynes, J. (1930). *A treatise on money*. Vol. 2, London, MacMillan.

Kuo, C.K. and Chen, K.W. (1995). "A risk-return measure of hedging effectiveness: a simplification". *Journal of Futures Markets*, 15, 1, 39-44.

Lee, C.-F., Bubnys, E.L. and Lin, Y. (1987). "Stock index futures hedge ratios: test on horizon effects and functional form". *Advances in Futures and Options Research*, 2, 291-311.

Lien, D. and Shrestha, K. (2007). "An empirical analysis of the relationship between hedge ratio and hedging horizon using wavelet analysis". *Journal of Futures Markets*, 27, 2, December, pp. 127-150.

Lien, D. and Tse, Y.K. (2000). "Hedging downside risk with futures contracts". *Applied Financial Economics*, 10, 2, 163-170.

Lien, D. and Tse, Y.K. (2002). "Some recent developments in futures hedging". *Journal of Economic Surveys*, 16, 3, 357-396.

Logstaff, F.A. and Wang, A.W. (2004). "Electricity forward prices: A high-frequency empirical analysis". *Journal of Finance*, 59, 1877-1900.

Lunkus, J.C. and Lee, C.F. (1985). "Use of three index futures in hedging decisions". *Journal of Futures Markets*, 5, 2, 201-222.

Milliaris, A.G. and Urrutia, J.L. (1991). "The impact of the lengths of estimation periods and hedging horizons on the effectiveness of a hedge: evidence from foreign currency futures". *The Journal of Futures Markets*, 3, 271-289.

Moschini, G.C. and Myers, R.J. (2002). "Testing for constant hedge ratios in commodity markets: a multivariate garch approach". *Journal of Empirical Finance*, 9, 589-603.

Moulton, J.S. (2005). "California electricity futures: the NYMEX experience". *Energy Economics*, 27, 1, 181-194.

Näsäkkälä, E. and Keppo, J. (2005). "Electricity load pattern hedging with static forward strategies". *Managerial Finance*, 31, 6, 116-137.

Paoella, M. and Taschini, L. (2008). "An econometric analysis of emission allowance prices". *Journal of Banking & Finance*, 32, 10, 2022-2032.

Patton, A. J. (2008). *Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies*. University of Oxford, Working Paper, December, 1-30.

Pen, Y.L. and Sévi, B. (2007). *Optimal hedging in European electricity forward markets*. University of Nantes, Working Paper, 1-38.

Pindyck, R. (2001). "The dynamics of commodity spot and futures markets: a primer". *The Energy Journal*, 22, 1-29.

Poon, S.-H. and Granger, C.W.J. (2003). "Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review". *Journal of Economic Literature*, XLI, June, 478-539.

Pratt, J.W. (1964). "Risk aversion in the small and the large". *Econometrica*, 32, 1-2, 122-136.

Redl, C., Haas, R., Huber, C. and Bohm, B. (2009). "Price formation in electricity forward markets and the relevance of systematic forecast errors". *Energy Economics*, 31, 356-364.

Ripple, R.D. and Moosa, I.A. (2005). *Futures maturity and hedging effectiveness*. Macquarie University, North Ryde, Australia, and La Trobe University, Working Paper, 1-20.

Samuelson, P. (1965). "Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly". *Industrial Management Review*, 6, 41-49.

Satyanarayan, S. (1998). "A note on a risk-return measure of hedging effectiveness". *The Journal of Futures Markets*, 18, 7, 867-870.

Schwartz, E. (1997). "The stochastic behaviour of commodity prices: implications for valuation and hedging". *Journal of Finance*, 52, 3, 923-973.

Schwartz, G. (1987). "Effects of model specification on tests for unit roots in macroeconomic data". *Journal of Monetary Economics*, 20, 73-103.

Seifert, J., Uhrig-Homburg, M. and Wagner, M. (2008). "Dynamic behavior of CO2 spot prices". *Journal of Environmental Economics and Management*, 56, 2, 180-194.

Torró, H. (2008). *Hedging weekly electricity price risk with futures at Nord Pool: duration and maturity effects*. University of Valencia, Spain, Working Paper.

Tse, Y.K. and Tsui, A. (2002). "A multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity model with time-varying correlations". *Journal of Business and Economics Statistics*, 20, 351-362.

Uhrig-Homburg, M. and Wagner, M. (2006). "Success chances and optimal design of derivatives on CO<sub>2</sub> emission certificates". Working Paper, University of Karlsruhe.

Uhrig-Homburg, M. and Wagner, M. (2007). "Futures price dynamics of CO<sub>2</sub> emission certificates -An empirical analysis". Working Paper, Universität Karlsruhe, Germany, 1-29.

Wei, S.Z.C. and Zhu, Z. (2006). "Commodity convenience yield and risk premium determination: the case of the US natural gas market". *Energy Economics*, 28, 4, July, 523-534.

Wei, Y.M., Liu, L.C., Fan, Y. and Wu, G. (2008). *China energy report 2008: carbon emission research*. Beijing: Science Press.

Weron, R. (2008). "Market price of risk by Asian-style electricity options and futures". *Energy Economics*, 30, 1098-1115.

## COLECCIÓN “CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN”

Instituto de Ciencias del Seguro

**Para cualquier información o para adquirir nuestras publicaciones  
puede encontrarnos en:**

FUNDACIÓN MAPFRE

Publicaciones

Paseo de Recoletos 23 – 28004 Madrid – (España)

Tel.: +34 915 818 768 Fax: +34 915 818 409

[www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro)

171. Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos. RIESGO 2011
170. Introdução ao Resseguro. 2011
169. La salud y su aseguramiento en Argentina, Chile, Colombia y España. 2011
168. Diferencias de sexo en conductas de riesgo y tasa de mortalidad diferencial entre hombres y mujeres. 2011
167. Movilización y rescate de los compromisos por pensiones garantizados mediante contrato de seguros. 2011
166. Embedded Value aplicado al ramo No Vida. 2011
165. Las sociedades cautivas de Reaseguro. 2011
164. Daños del amianto: litigación, aseguramiento de riesgos y fondos de compensación. 2011
163. El riesgo de tipo de interés: experiencia española y Solvencia II. 2011
162. I Congreso sobre las Nuevas Tecnologías y sus repercusiones en el Seguro: Internet, Biotecnología y Nanotecnología. 2011
161. La incertidumbre bioactuarial en el riesgo de la longevidad. Reflexiones bioéticas. 2011
160. Actividad aseguradora y defensa de la competencia. La exención antitrust del sector asegurador. 2011
159. Estudio empírico sobre la tributación de los seguros de vida. 2010



158. Métodos estocásticos de estimación de las provisiones técnicas en el marco de Solvencia II. 2010
157. Introducción al Reaseguro. 2010
156. Encuentro Internacional sobre la Historia del Seguro. 2010
155. Los sistemas de salud en Latinoamérica y el papel del seguro privado. 2010
154. El Seguro de Crédito en Chile. 2010
153. El análisis financiero dinámico como herramienta para el desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II. 2010
152. Características sociodemográficas de las personas con doble cobertura sanitaria. Un estudio empírico. 2010
151. Solidaridad impropia y seguro de Responsabilidad Civil. 2010
150. La prevención del blanqueo de capitales en las entidades aseguradoras, las gestoras y los corredores de seguros. 2010
149. Los fondos de aseguramiento agropecuario y rural: la experiencia mexicana en el mutualismo agropecuario y sus organizaciones superiores. 2010
148. Avaliação das Provisões de Sinistro sob o Enfoque das Novas Regras de Solvência do Brasil. 2010
147. El principio de igualdad sexual en el Seguro de Salud. Análisis actuarial de su impacto y alcance. 2010
146. Investigaciones históricas sobre el Seguro español. 2010
145. Perspectivas y análisis económico de la futura reforma del sistema español de valoración del daño corporal. 2009
144. Contabilidad y Análisis de Cuentas Anuales de Entidades Aseguradoras (Plan contable 24 de julio de 2008). 2009
143. Mudanças Climáticas e Análise de Risco da Indústria de Petróleo no Litoral Brasileiro. 2009
142. Bases técnicas dinámicas del Seguro de Dependencia en España. Una aproximación en campo discreto. 2009

141. Transferencia Alternativa de Riesgos en el seguro de Vida: Titulización de Riesgos. 2009
140. Riesgo de negocio ante asegurados con múltiples contratos. 2009
139. Optimización económica del Reaseguro cedido. Modelos de decisión. 2009
138. Inversiones en el Seguro de Vida en la actualidad y perspectivas de futuro. 2009
137. El Seguro de Vida en España. Factores que influyen en su progreso. 2009
136. Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos. RIESGO 2009.
135. Análisis e interpretación de la gestión del fondo de maniobra en entidades aseguradoras de incendio y lucro cesante en grandes riesgos industriales. 2009
134. Gestión integral de Riesgos Corporativos como fuente de ventaja competitiva: cultura positiva del riesgo y reorganización estructural. 2009
133. La designación de la pareja de hecho como beneficiaria en los seguros de vida. 2009
132. Optimización económica del Reaseguro cedido. Modelos de decisión. 2009
131. La cobertura pública en el seguro de crédito a la exportación en España: cuestiones prácticas-jurídicas. 2009
130. La mediación en seguros privados: análisis de un complejo proceso de cambio legislativo. 2009
129. Temas relevantes del Derecho de Seguros contemporáneo. 2008
128. Cuestiones sobre la cláusula *cut through*. Transferencia y reconstrucción. 2008
127. La responsabilidad derivada de la utilización de organismos genéticamente modificados y la redistribución del riesgo a través del seguro. 2008
126. Ponencias de las Jornadas Internacionales sobre Catástrofes Naturales. 2008
125. La seguridad jurídica de las tecnologías de la información en el sector asegurador. 2008
124. Predicción de tablas de mortalidad dinámicas mediante un procedimiento *bootstrap*. 2008

123. Las compañías aseguradoras en los procesos penal y contencioso-administrativo. 2008
122. Factores de riesgo y cálculo de primas mediante técnicas de aprendizaje. 2008
121. La solicitud de seguro en la Ley 50/1980, de 8 de octubre, de Contrato de Seguro. 2008
120. Propuestas para un sistema de cobertura de enfermedades catastróficas en Argentina. 2008
119. Análisis del riesgo en seguros en el marco de Solvencia II: Técnicas estadísticas avanzadas Monte Carlo y Bootstrapping. 2008
118. Los planes de pensiones y los planes de previsión asegurados: su inclusión en el caudal hereditario. 2007
117. Evolução de resultados técnicos e financeiros no mercado segurador iberoamericano. 2007
116. Análisis de la Ley 26/2006 de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2007
115. Sistemas de cofinanciación de la dependencia: seguro privado frente a hipoteca inversa. 2007
114. El sector asegurador ante el cambio climático: riesgos y oportunidades. 2007
113. Responsabilidade social empresarial no mercado de seguros brasileiro influências culturais e implicações relacionais. 2007
112. Contabilidad y análisis de cuentas anuales de entidades aseguradoras. 2007
111. Fundamentos actuariales de primas y reservas de fianzas. 2007
110. El Fair Value de las provisiones técnicas de los seguros de Vida. 2007
109. El Seguro como instrumento de gestión de los M.E.R. (Materiales Especificados de Riesgo). 2006
108. Mercados de absorción de riesgos. 2006
107. La exteriorización de los compromisos por pensiones en la negociación colectiva. 2006
106. La utilización de datos médicos y genéticos en el ámbito de las compañías aseguradoras. 2006

105. Los seguros contra incendios forestales y su aplicación en Galicia. 2006
104. Fiscalidad del seguro en América Latina. 2006
103. Las NIC y su relación con el Plan Contable de Entidades Aseguradoras. 2006
102. Naturaleza jurídica del Seguro de Asistencia en Viaje. 2006
101. El Seguro de Automóviles en Iberoamérica. 2006
100. El nuevo perfil productivo y los seguros agropecuarios en Argentina. 2006
99. Modelos alternativos de transferencia y financiación de riesgos "ART": situación actual y perspectivas futuras. 2005
98. Disciplina de mercado en la industria de seguros en América Latina. 2005
97. Aplicación de métodos de inteligencia artificial para el análisis de la solvencia en entidades aseguradoras. 2005
96. El Sistema ABC-ABM: su aplicación en las entidades aseguradoras. 2005
95. Papel del docente universitario: ¿enseñar o ayudar a aprender? 2005
94. La renovación del Pacto de Toledo y la reforma del sistema de pensiones: ¿es suficiente el pacto político? 2005
92. Medición de la esperanza de vida residual según niveles de dependencia en España y costes de cuidados de larga duración. 2005
91. Problemática de la reforma de la Ley de Contrato de Seguro. 2005
90. Centros de atención telefónica del sector asegurador. 2005
89. Mercados aseguradores en el área mediterránea y cooperación para su desarrollo. 2005
88. Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación. 2004
87. Dependencia en el modelo individual, aplicación al riesgo de crédito. 2004
86. El margen de solvencia de las entidades aseguradoras en Iberoamérica. 2004
85. La matriz valor-fidelidad en el análisis de los asegurados en el ramo del automóvil. 2004

84. Estudio de la estructura de una cartera de pólizas y de la eficacia de un Bonus-Malus. 2004
83. La teoría del valor extremo: fundamentos y aplicación al seguro, ramo de responsabilidad civil autos. 2004
81. El Seguro de Dependencia: una visión general. 2004
80. Los planes y fondos de pensiones en el contexto europeo: la necesidad de una armonización. 2004
79. La actividad de las compañías aseguradoras de vida en el marco de la gestión integral de activos y pasivos. 2003
78. Nuevas perspectivas de la educación universitaria a distancia. 2003
77. El coste de los riesgos en la empresa española: 2001
76. La incorporación de los sistemas privados de pensiones en las pequeñas y medianas empresas. 2003
75. Incidencia de la nueva Ley de Enjuiciamiento Civil en los procesos de responsabilidad civil derivada del uso de vehículos a motor. 2002
74. Estructuras de propiedad, organización y canales de distribución de las empresas aseguradoras en el mercado español. 2002
73. Financiación del capital-riesgo mediante el seguro. 2002
72. Análisis del proceso de exteriorización de los compromisos por pensiones. 2002
71. Gestión de activos y pasivos en la cartera de un fondo de pensiones. 2002
70. El cuadro de mando integral para las entidades aseguradoras. 2002
69. Provisiones para prestaciones a la luz del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados; métodos estadísticos de cálculo. 2002
68. Los seguros de crédito y de caución en Iberoamérica. 2001
67. Gestión directiva en la internacionalización de la empresa. 2001
65. Ética empresarial y globalización. 2001
64. Fundamentos técnicos de la regulación del margen de solvencia. 2001

63. Análisis de la repercusión fiscal del seguro de vida y los planes de pensiones. Instrumentos de previsión social individual y empresarial. 2001
62. Seguridad Social: temas generales y régimen de clases pasivas del Estado. 2001
61. Sistemas Bonus-Malus generalizados con inclusión de los costes de los siniestros. 2001
60. Análisis técnico y económico del conjunto de las empresas aseguradoras de la Unión Europea. 2001
59. Estudio sobre el euro y el seguro. 2000
58. Problemática contable de las operaciones de reaseguro. 2000
56. Análisis económico y estadístico de los factores determinantes de la demanda de los seguros privados en España. 2000
54. El corredor de reaseguros y su legislación específica en América y Europa. 2000
53. Habilidades directivas: estudio de sesgo de género en instrumentos de evaluación. 2000
52. La estructura financiera de las entidades de seguros, S.A. 2000
50. Mixturas de distribuciones: aplicación a las variables más relevantes que modelan la siniestralidad en la empresa aseguradora. 1999
49. Solvencia y estabilidad financiera en la empresa de seguros: metodología y evaluación empírica mediante análisis multivariante. 1999
48. Matemática Actuarial no vida con MapleV. 1999
47. El fraude en el Seguro de Automóvil: cómo detectarlo. 1999
46. Evolución y predicción de las tablas de mortalidad dinámicas para la población española. 1999
45. Los Impuestos en una economía global. 1999
42. La Responsabilidad Civil por contaminación del entorno y su aseguramiento. 1998
41. De Maastricht a Amsterdam: un paso más en la integración europea. 1998

39. Perspectiva histórica de los documentos estadístico-contables del órgano de control: aspectos jurídicos, formalización y explotación. 1997
38. Legislación y estadísticas del mercado de seguros en la comunidad iberoamericana. 1997
37. La responsabilidad civil por accidente de circulación. Puntual comparación de los derechos francés y español. 1997
36. Cláusulas limitativas de los derechos de los asegurados y cláusulas delimitadoras del riesgo cubierto: las cláusulas de limitación temporal de la cobertura en el Seguro de Responsabilidad Civil. 1997
35. El control de riesgos en fraudes informáticos. 1997
34. El coste de los riesgos en la empresa española: 1995
33. La función del derecho en la economía. 1997
32. Decisiones racionales en reaseguro. 1996
31. Tipos estratégicos, orientación al mercado y resultados económicos: análisis empírico del sector asegurador español. 1996
30. El tiempo del directivo. 1996
29. Ruina y Seguro de Responsabilidad Civil Decenal. 1996
28. La naturaleza jurídica del Seguro de Responsabilidad Civil. 1995
27. La calidad total como factor para elevar la cuota de mercado en empresas de seguros. 1995
26. El coste de los riesgos en la empresa española: 1993
25. El reaseguro financiero. 1995
24. El seguro: expresión de solidaridad desde la perspectiva del derecho. 1995
23. Análisis de la demanda del seguro sanitario privado. 1993
22. Rentabilidad y productividad de entidades aseguradoras. 1994
21. La nueva regulación de las provisiones técnicas en la Directiva de Cuentas de la C.E.E. 1994
20. El Reaseguro en los procesos de integración económica. 1994
19. Una teoría de la educación. 1994

18. El Seguro de Crédito a la exportación en los países de la OCDE (evaluación de los resultados de los aseguradores públicos). 1994
16. La legislación española de seguros y su adaptación a la normativa comunitaria. 1993
15. El coste de los riesgos en la empresa española: 1991
14. El Reaseguro de exceso de pérdidas 1993
12. Los seguros de salud y la sanidad privada. 1993
10. Desarrollo directivo: una inversión estratégica. 1992
9. Técnicas de trabajo intelectual. 1992
8. La implantación de un sistema de controlling estratégico en la empresa. 1992
7. Los seguros de responsabilidad civil y su obligatoriedad de aseguramiento. 1992
6. Elementos de dirección estratégica de la empresa. 1992
5. La distribución comercial del seguro: sus estrategias y riesgos. 1991
4. Los seguros en una Europa cambiante: 1990-95. 1991
2. Resultados de la encuesta sobre la formación superior para los profesionales de entidades aseguradoras (A.P.S.). 1991
1. Filosofía empresarial: selección de artículos y ejemplos prácticos. 1991

## **ÚLTIMOS LIBROS PUBLICADOS**

Modelo de proyección de carteras de seguros para el ramo de decesos. 2011

Desarrollo comercial del seguro colectivo de dependencia en España. 2010

La mediación de seguros en España: análisis de la Ley 26/2006, de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2010

Museo del Seguro. Catálogo. 2010

Diccionario MAPFRE de Seguros. 2008

Teoría de la credibilidad: desarrollo y aplicaciones en primas de seguros y riesgos operacionales. 2008



El seguro de caución: una aproximación práctica. 2007

El seguro de pensiones. 2007

Las cargas del acreedor en el seguro de responsabilidad civil. 2006

Diccionario bilingüe de expresiones y términos de seguros: inglés-español, español-inglés. 2006

El seguro de riesgos catastróficos: reaseguro tradicional y transferencia alternativa de riesgos. 2005

La liquidación administrativa de entidades aseguradoras. 2005

## **INFORMES Y RANKINGS**

Desde 1994 se publican anualmente estudios que presentan una panorámica concreta de los mercados aseguradores europeos, de España e Iberoamérica y que pueden consultarse en formato electrónico desde la página Web: [www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro)

- Mercado español de seguros
- Mercado asegurador de Iberoamérica
- Ranking de grupos aseguradores europeos
- Ranking de grupos aseguradores iberoamericanos