

Área de Seguro y Previsión Social

INTELIGENCIA COMPUTACIONAL EN LA GESTIÓN DEL RIESGO ASEGURADOR: OPERADORES DE AGREGACIÓN OWA EN PROCESOS DE TARIFICACIÓN

Montserrat Casanovas Ramón
José María Merigó Lindahl
Agustín Torres Martínez

FUNDACIÓN MAPFRE

FUNDACIÓN MAPFRE no se hace responsable del contenido de esta obra, ni el hecho de publicarla implica conformidad o identificación con la opinión del autor o autores.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin el permiso escrito del autor.

© 2014, FUNDACIÓN MAPFRE

Paseo de Recoletos 23

28004 Madrid (España)

www.fundacionmapfre.com

publicaciones.ics@fundacionmapfre.org

ISBN: 978-84-9844-474-2

Depósito Legal: M-17632-2014

Impreso por **Discript Preimpresión, S.L.**

PRESENTACIÓN

Desde 1975, FUNDACIÓN MAPFRE desarrolla actividades de interés general para la sociedad en distintos ámbitos profesionales y culturales, así como acciones destinadas a la mejora de las condiciones económicas y sociales de las personas y sectores menos favorecidos de la sociedad. En este marco, el Área de Seguro y Previsión Social de FUNDACIÓN MAPFRE promueve y desarrolla actividades educativas y de investigación en los campos del seguro y de la gerencia de riesgos.

En el ámbito educativo, su actuación abarca la formación académica de postgrado y especialización, desarrollada en colaboración con la Universidad Pontificia de Salamanca, así como cursos y seminarios para profesionales, impartidos en España e Iberoamérica. Estas tareas se extienden hacia otros ámbitos geográficos mediante la colaboración con instituciones españolas e internacionales, así como a través de un programa de formación en Internet.

Esta área promueve ayudas a la investigación en las áreas científicas del riesgo y del seguro y mantiene un Centro de Documentación especializado en seguros y gerencia de riesgos, que da soporte a sus actividades.

Dentro de estas actividades se encuadra la publicación de este libro, resultado de la Ayuda a la Investigación Riesgo y Seguro que concedió FUNDACIÓN MAPFRE a los autores Montserrat Casanovas, José María Merigó y Agustín Torres en la convocatoria de 2011.

Desde hace unos años, Internet es el medio por el que se desarrollan mayoritariamente nuestras actividades, ofreciendo a los usuarios de todo el mundo la posibilidad de acceder a las mismas de una manera rápida y eficaz mediante soportes Web de última generación a través de www.fundacionmapfre.org

Montserrat Casanovas Ramón es Doctora en Ciencias Económicas y Empresariales y Catedrática de Economía Financiera y Contabilidad de la Universidad de Barcelona. Economista, analista financiero, auditora y *European Financial Adviser* ha trabajado en el mundo de la empresa y de las instituciones financieras, siendo creadora del Master Asesor Financiero Europeo y del de Dirección de Empresas Constructoras e Inmobiliarias, de los cuales es su directora. Actualmente es Interventora de la Junta de Gobierno del Colegio de Economistas de Cataluña, Vicepresidenta de la Asociación Catalana de Contabilidad y Dirección de Empresas y del Registro de Economistas Docentes e Investigadores del Consejo General de Colegios de Economistas de España (CGCEE); Copresidenta de la Comisión de Financiación e Inversiones del CGCEE, Consejera del Registro de Empresas de Asesoramiento Financiero (EAF); Vocal del Consejo de Redacción y revisora de diversas revistas nacionales e internacionales. Es autora de diversos libros sobre finanzas, mercados financieros y valoración de empresas y de más de un centenar de artículos publicados.

José María Merigó Lindahl es Investigador Asociado Senior en la Manchester Business School de la Universidad de Manchester (Reino Unido). Es Licenciado y Doctor (con premio extraordinario) en Estudios Empresariales por la Universidad de Barcelona (UB) y Bachelor in Economics por la Lund University (Suecia). De su actividad investigadora, se destaca la publicación de más de 200 trabajos de investigación incluyendo más de 50 artículos en revistas indexadas en la Web of Science – Journal Citation Reports (ISI) como Information Sciences, Computers & Industrial Engineering y Knowledge-Based Systems. También ha publicado varios libros y pertenece al consejo editorial de varias revistas.

Agustín Torres Martínez es Doctorando en Ciencias Empresariales y Master de Investigación en Empresa, Finanzas y Seguros de la Universidad de Barcelona e Ingeniero Industrial de la Universidad del Valle (Colombia). Se ha desempeñado como docente en las áreas de administración y producción en universidades colombianas. Actualmente desarrolla su actividad investigadora en el campo de la lógica difusa aplicada a problemas económicos y empresariales.

AGRADECIMIENTOS

*Nuestro agradecimiento profundo a FUNDACIÓN MAPFRE
(Proyecto 099311 de la Universidad de Barcelona),
que ha hecho posible el desarrollo de esta investigación.*

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
PARTE PRIMERA: HERRAMIENTAS PARA TARIFICACIÓN EN SEGUROS	5
1. MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA EL CÁLCULO DE LA PRIMA PURA	7
1. Tarificación	8
2. Calculo de la tarifa (<i>ratemaking</i>)	8
3. Sistemas de tarificación	9
3.1. Sistema a priori	10
3.1.1. Técnicas predictivas	10
3.1.2. Técnicas no predictivas	15
3.2. Sistema a posteriori	21
3.2.1. Bonus-Malus	22
3.2.2 .Teoría de la credibilidad	23
2. TÉCNICAS DE INTELIGENCIA COMPUTACIONAL	33
1. Inteligencia computacional	34
2. Algoritmos genéticos	34
2.1. Ventajas de los algoritmos genéticos	36
2.2. Desventajas de los algoritmos genéticos	36
3. Redes neuronales artificiales	37
3.1. Ventajas de las redes neuronales artificiales	40
3.2. Desventajas de las redes neuronales artificiales	41

4. Sistemas de lógica difusa	41
4.1. Conjuntos difusos o borrosos	42
4.2. Función de pertenencia	44
4.3. Variables lingüísticas	46
4.4. Etapas de la lógica difusa	46
4.5. Ventajas de la lógica difusa	47
4.6. Desventajas de la lógica difusa	47
5. Máquinas de vectores soporte	47
5.1. Ventajas de las máquinas de vectores soporte	50
5.2. Desventajas de las máquinas de vectores soporte	50
3. OPERADORES DE AGREGACIÓN OWA	53
1. Conceptos básicos de los operadores OWA	54
2. Operadores de agregación Ascending OWA (AOWA)	56
3. Criterios de decisión clásicos	58
4. Familias de operadores OWA	60
4.1. ME-OWA	60
4.2. STEP-OWA	60
4.3. WINDOW-OWA	61
4.4. OLYMPIC-OWA	61
4.5. S-OWA	61
4.6. EZ-OWA	63
5. Extensiones de los operadores OWA	63
5.1. Induced OWA Operator IOWA	63
5.2. Lingüistic OWA Operator	65
5.3. Heavy OWA Operator	68

5.4. Hybrid Averaging Operator	69
5.5. Uncertain OWA Operator	70
5.6. Fuzzy OWA Operator	71
PARTE SEGUNDA: APORTACIONES CIENTÍFICAS	75
4. EL OPERADOR OWA PROBABILÍSTICO GENERALIZADO DIFUSO Y SU APLICACIÓN EN LAS DECISIONES DE GRUPO	77
1. Introducción	77
2. Preliminares	79
2.1. Números borrosos	79
2.2. El Probabilistic OWA Operator	81
2.3. El Fuzzy OWA Operator	81
2.4. El Fuzzy Generalized OWA Operator	82
3. El operador OWA probabilístico generalizado	83
3.1. Principales conceptos	83
3.2. Familias de operadores FGPOWA	86
4. El operador cuasi-FPOWA	88
5. Decisiones de grupo con el operador FGPOWA	88
6. Ejemplo ilustrativo	90
7. Conclusiones	94
5. LA MEDIA PONDERADA PROBABILÍSTICA GENERALIZADA INCIERTA Y SU APLICACIÓN EN LA TEORÍA DE EXPERTONES	97
1. Introducción	97
2. Preliminares	99
2.1. Los números intervalo	99

2.2. La Media Generalizada Incierta	100
2.3. La Media Ponderada Probabilística	100
2.4. La Media Ponderada Probabilística Generalizada	101
2.5. Familias de operadores UGPWA	104
3. Aplicación en toma de decisiones con la teoría de expertones	107
4. Conclusiones	112
6. DECISIONES DE GRUPO LINGÜÍSTICAS CON OPERADORES DE AGREGACIÓN INDUCIDOS E INFORMACIÓN PROBABILÍSTICA	115
1. Introducción	115
2. Preliminares	117
2.1. El enfoque lingüístico	117
2.2. El OWA Operator	119
2.3. El Linguistic OWA Operator	120
2.4. El Induced OWA Operator	120
2.5. El Probabilistic OWA Operator	121
3. El Induced Linguistic Probabilistic OWA Operator	122
3.1. Conceptos principales	122
3.2. Familias de ILPOWA Operators	127
4. Medias móviles y medias de Bonferroni en el ILPOWA Operator	129
5. Decisiones de grupo con el ILPOWA Operator	131
5.1. Marco teórico	131
5.2. Ejemplo ilustrativo	134
6. Conclusiones	141

7. TOMA DE DECISIONES EN PROCESOS DE TARIFICACIÓN DE SEGUROS NO VIDA UTILIZANDO LÓGICA DIFUSA Y OPERADORES OWA	143
1. Introducción	143
2. Preliminares	145
2.1. Lógica difusa	145
2.2. Números inciertos	145
2.3. Operador de agregación de información OWA	146
2.4. Operador de agregación Ascending OWA (AOWA)	147
2.5. Extensiones de los operadores OWA	147
2.5.1. Uncertain OWA Operator	148
2.5.2. Uncertain Probabilistic OWA Operator	149
2.5.3. Heavy OWA Operator	150
3. Metodología propuesta	151
4. Aplicación ilustrativa	154
5. Conclusiones	164
PARTE TERCERA: APLICACIONES DE LOS OPERADORES OWA A LA TARIFICACIÓN EN SEGUROS	167
8. APLICACIONES DE LOS OPERADORES DE AGREGACIÓN OWA A PROCESOS DE TARIFICACIÓN EN SEGUROS RAMO AUTOMÓVIL	169
1. Ejemplo ilustrativo: aplicación a la prima pura de una póliza	171
2. Ejemplo ilustrativo: aplicación a la frecuencia de siniestralidad	174
3. Ejemplo ilustrativo: aplicación al costo de reclamaciones	176
4. Ejemplo ilustrativo: aplicación al recargo de seguridad	181
5. Ejemplo ilustrativo: aplicación sobre la prima comercial	184

9. APLICACIONES DE LOS OPERADORES DE AGREGACIÓN OWA CON LÓGICA DIFUSA EN PROCESOS DE TARIFICACIÓN	197
1. Ejemplo ilustrativo: aplicación con FGPOWA Operator	198
2. Ejemplo ilustrativo: aplicación con UGPWA Operator	202
3. Ejemplo ilustrativo: aplicación con ILPOWA Operator	209
CONCLUSIONES	215
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	233
Colección “Cuadernos de la Fundación” Área de Seguro y Previsión Social	251
ÍNDICE DE TABLAS	
Tabla 1.1. Métodos de segmentación AID	15
Tabla 1.2. Cartera del modelo clásico de Bühlmann	26
Tabla 1.3. Cartera del modelo clásico de Bühlmann-Straub	28
Tabla 3.1. Criterios de decisión clásicos	59
Tabla 4.1. Experto 1	91
Tabla 4.2. Experto 2	92
Tabla 4.3. Experto 3	92
Tabla 4.4. Resultados colectivos	93
Tabla 4.5. Resultados agregados	93
Tabla 4.6. Ordenación de estrategias	94
Tabla 5.1. Experto 1	108
Tabla 5.2. Experto 2	108

Tabla 5.3. Experto 3	108
Tabla 5.4. Experto 4	109
Tabla 5.5. Experto 5	109
Tabla 5.6. Expertones para cada estrategia y escenario económico	110
Tabla 5.7. Expertón para A1 y S2	111
Tabla 5.8. Valores esperados de los expertones para cada estrategia y escenario económico	111
Tabla 5.9. Resultados agregados	111
Tabla 6.1. Experto 1-Criterio 1	135
Tabla 6.2. Experto 1-Criterio 2	135
Tabla 6.3. Resultado general esperado del Experto 1	136
Tabla 6.4. Experto 2-Criterio 1	136
Tabla 6.5. Experto 2-Criterio 2	137
Tabla 6.6. Resultado general esperado del Experto 2	137
Tabla 6.7. Experto 3-Criterio 1	137
Tabla 6.8. Experto 3-Criterio 2	138
Tabla 6.9. Resultado general esperado del experto 3	138
Tabla 6.10. Resultados colectivos	138
Tabla 6.11. Resultados agregados 1	139
Tabla 6.12. Resultados agregados 2	140
Tabla 6.13. Ordenación de las estrategias de importación	140
Tabla 7.1. Ejemplo de perfiles de riesgo	155
Tabla 7.2. Perfiles de riesgo para la aplicación	155
Tabla 7.3. Pronóstico del Experto 1 para el Perfil 1	156
Tabla 7.4. Pronóstico del Experto 2 para el Perfil 2	156

Tabla 7.5. Pronóstico del Experto 3 para el Perfil 3	156
Tabla 7.6. Pronóstico del Experto 4 para el Perfil 4	157
Tabla 7.7. Pronóstico del Experto 5 para el Perfil 5	157
Tabla 7.8. Resultados agregados del Perfil 1	158
Tabla 7.9. Resultados agregados del Perfil 2	158
Tabla 7.10. Resultados agregados del Perfil 3	159
Tabla 7.11. Resultados agregados del Perfil 4	159
Tabla 7.12. Resultados agregados del Perfil 5	159
Tabla 7.13. Resumen de resultados máximos	160
Tabla 7.14. Resumen de resultados mínimos	160
Tabla 7.15. Resumen de resultados con media aritmética	160
Tabla 7.16. Resumen de resultados con media ponderada	160
Tabla 7.17. Resumen de resultados con operadores UOWA	161
Tabla 7.18. Resumen de resultados con operadores AUOWA	161
Tabla 7.19. Resumen de resultados con operadores UPOWA	161
Tabla 7.20. Valores representativos del operador UPOWA	162
Tabla 7.21. Resultados agregados con Heavy OWA	163
Tabla 7.22. Ranking de alternativas	163
Tabla 8.1. Siniestralidad por segmentos	171
Tabla 8.2. Matriz de cambios en la prima pura	172
Tabla 8.3. Matriz de resultados agregado	173
Tabla 8.4. Matriz de resultados familias OWA	174
Tabla 8.5. Matriz de cambios en la frecuencia de siniestralidad	175
Tabla 8.6. Matriz de resultados agregados	175
Tabla 8.7. Matriz de resultados familias OWA	176

Tabla 8.8. Cambios en el coste medio de reclamaciones	177
Tabla 8.9. Matriz de resultados agregados	177
Tabla 8.10. Matriz de resultados familias OWA	178
Tabla 8.11. Ajuste de la prima pura	179
Tabla 8.12. Ajuste de la prima pura	179
Tabla 8.13. Ajuste de la prima pura	180
Tabla 8.14. Cambios en la prima pura	180
Tabla 8.15. Matriz de resultados agregados	180
Tabla 8.16. Matriz de resultados familias OWA	181
Tabla 8.17. Siniestralidad por segmentos	182
Tabla 8.18. Recargos de seguridad	183
Tabla 8.19. Matriz de resultados agregados	183
Tabla 8.20. Matriz de resultados familias OWA	184
Tabla 8.21. Beneficios esperados en el Perfil 1	185
Tabla 8.22. Beneficios esperados en el Perfil 2	186
Tabla 8.23. Beneficios esperados en el Perfil 3	186
Tabla 8.24. Beneficios esperados en el Perfil 4	186
Tabla 8.25. Beneficios esperados en el Perfil 5	186
Tabla 8.26. Criterios de decisión para el Perfil 1	188
Tabla 8.27. Criterios de decisión para el Perfil 2	188
Tabla 8.28. Criterios de decisión para el Perfil 3	188
Tabla 8.29. Criterios de decisión para el Perfil 4	189
Tabla 8.30. Criterios de decisión para el Perfil 5	189
Tabla 8.31. Alternativas de decisión máximas por perfil	189
Tabla 8.32. Alternativas de decisión mínimas por perfil	190

Tabla 8.33. Alternativas de decisión con media aritmética por perfil	190
Tabla 8.34. Alternativas de decisión con media ponderada por perfil	190
Tabla 8.35. Alternativas de decisión con operadores OWA por perfil	191
Tabla 8.36. Alternativas de decisión con operadores AOWA por perfil	191
Tabla 8.37. Alternativas de decisión con operadores POWA por perfil	191
Tabla 8.38. Resultados POWA	192
Tabla 8.39. Ranking de alternativas	192
Tabla 8.40. Criterio optimista POWA	193
Tabla 8.41. Criterio pesimista POWA	193
Tabla 8.42. Criterio Step-POWA	194
Tabla 8.43. Criterio Step-POWA	194
Tabla 8.44. Criterio Step-POWA	194
Tabla 9.1. Predicción Experto 1	200
Tabla 9.2. Predicción Experto 2	200
Tabla 9.3. Predicción Experto 3	200
Tabla 9.4. Resultados colectivos	200
Tabla 9.5. Resultados agregados	201
Tabla 9.6. Resultados agregados	201
Tabla 9.7. Ranking de estrategias	202
Tabla 9.8. Predicción Experto 1	203
Tabla 9.9. Predicción Experto 2	204
Tabla 9.10. Predicción Experto 3	204
Tabla 9.11. Predicción Experto 4	204
Tabla 9.12. Predicción Experto 5	204
Tabla 9.13. Expertón para la Alternativa 1 y Situación 1	205

Tabla 9.14. Expertones para cada alternativa y situación (cont.)	206
Tabla 9.15. Valor esperado de los expertones para cada alternativa y situación	208
Tabla 9.16. Resultado agregados	208
Tabla 9.17. Ranking de estrategias	209
Tabla 9.18. Predicción Experto 1	210
Tabla 9.19. Predicción Experto 2	211
Tabla 9.20. Predicción Experto 3	211
Tabla 9.21. Resultados colectivos	211
Tabla 9.22. Resultados agregados	212
Tabla 9.23. Ranking de estrategias	213

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Arquitectura de una red neuronal artificial	42
Figura 2.2. Ejemplo del Índice de Expectativa Bursátil de los Economistas (IEBE)	43
Figura 2.3. Función triangular de un conjunto difuso	44
Figura 2.4. Función trapezoidal de un conjunto difuso	45
Figura 2.5. Clasificador con máquinas de soporte vectorial	48
Figura 3.1. Ejemplo de una escala lingüística	66
Figura 9.1. Ejemplo de un número borroso triangular	199

INTRODUCCIÓN

La crisis económica está teniendo un fuerte impacto en el sector asegurador en España, provocando una reducción de las primas y en consecuencia de los ingresos de las divisiones de seguros y en última instancia una disminución de los beneficios obtenidos en España. El sector no ha sido ajeno a los efectos de dicha coyuntura, reflejo no solo de la contracción de la demanda por parte de los clientes, sino también en los cambios en los hábitos de consumo de los mismos. Este último factor es de especial relevancia para predecir el comportamiento de la frecuencia y severidad en la siniestralidad para el cálculo de tarifas justas y equitativas. Por el lado de la oferta, teniendo en cuenta que las perspectivas no son buenas, se incrementará la presión en los precios (tarificación) de la competencia. También por parte del entorno hay que añadir a la dificultad de predecir la situación económica a corto y medio plazo, la problemática actual en el ramo del automóvil de los cambios en la normativa referente a la velocidad de circulación máxima permitida, ya sea en autopistas, carreteras o ciudades. De ahí la importancia de la investigación realizada, ya que incorpora la incertidumbre asociada a todos los elementos mencionados.

La finalidad de este proyecto ha sido el desarrollo de nuevas herramientas dentro del campo de la inteligencia computacional que proporcionen mayor flexibilidad en la información que se utiliza habitualmente en el sector asegurador, permitiendo que se involucre la actitud optimista o pesimista del decisor, de modo que se pueda infravalorar o sobrevalorar dicha información con el objeto de obtener una representación más completa del problema estudiado. Este trabajo se ha enfocado principalmente en el diseño de nuevos operadores de agregación basados en las medias ponderadas ordenadas Ordered Weighted Averaging (OWA) Operator, unificándolo con la probabilidad y la media ponderada y a su vez combinándolo con herramientas de lógica difusa como los números borrosos, la teoría de expertones o variables lingüísticas, que permitan tratar

información vaga o imprecisa. De este modo se diseñan nuevas técnicas que permiten complementar los actuales modelos probabilísticos.

El trabajo está estructurado en 4 partes. En la primera de ellas se realiza un análisis del estado de la cuestión, en la que se hace una revisión de las diferentes herramientas utilizadas en procesos de tarificación en seguros. Dicha parte, consta de 3 capítulos.

En el primer capítulo se explican los conceptos básicos de tarificación y se analizan los diferentes métodos estadísticos utilizados en la práctica, desde un doble enfoque:

- a) Sistema a priori, es decir, cuando no se cuenta con información del nuevo asegurado y se lleva a cabo con los datos históricos de la cartera, a través de técnicas predictoras y modelos de regresión.
- b) Sistema a posteriori, es decir, después de transcurrido cierto periodo de tiempo en el que se conoce el comportamiento de siniestralidad del asegurado y se hace necesario ajustar la prima, para ello existen muchos métodos, pero en este trabajo se explican el sistema bonus-malus y la teoría de la credibilidad por ser los más aplicados.

En el segundo capítulo se aborda el tema de la inteligencia computacional poniendo el acento en las técnicas más utilizadas:

- Algoritmos genéticos
- Redes neuronales artificiales
- Lógica difusa
- Máquinas de vectores soporte

En el tercer capítulo se presentan los operadores de agregación de información Ordered Weighted Average (OWA), que hace parte de las herramientas de lógica difusa y en los cuales se profundiza por su importancia para esta investigación, describiéndose en este capítulo los conceptos básicos, las principales familias para definir el vector de ponderación y las extensiones más

relevantes para agregar otras características a dicho operador según las circunstancias o la problemática a resolver.

La segunda parte de este trabajo contiene las nuevas aportaciones científicas desarrolladas por los autores y enviadas para su publicación a revistas científicas indexadas en la ISI Web of Science. Dichos artículos corresponden a los capítulos 4, 5, 6 y 7 y comprenden 3 nuevas extensiones de los operadores de agregación OWA combinándolos con otras características tales como la probabilidad, la media generalizada, números borrosos, teoría de expertones y variables lingüísticas y una metodología para determinar la estrategia de precio en un caso de seguros No Vida en el ramo del automóvil. Estos artículos son:

- Decisiones de grupo con operadores owa generalizados probabilísticos y lógica difusa.
- Decisiones de grupo inciertas con expertones y operadores de agregación ponderados, probabilísticos y generalizados.
- Decisiones de grupo lingüísticas con operadores de agregación inducidos e información probabilística.
- Toma de decisiones en procesos de tarificación de seguros No Vida utilizando lógica difusa y operadores OWA en dos etapas.

La tercera parte de este documento presenta un conjunto de aplicaciones ilustrativas, con las que se demuestra el potencial de los nuevos conocimientos que se han desarrollado en esta investigación, para dar respuesta a problemas de tarificación en el sector asegurador. Todas estas aplicaciones se presentan en los capítulos 8 y 9.

En el capítulo 8, utilizando los operadores de agregación OWA, Ascending OWA y Probabilistic OWA, se aplica en diferentes etapas del proceso de tarificación, como el ajuste de la prima pura, ya sea directamente o en sus componentes (frecuencia y severidad), el recargo de severidad y la estrategia de precios para establecer la prima comercial, buscando complementar la información estadística con la actitud optimista o pesimista del decisor.

En el capítulo 9 se presentan aplicaciones para definir la estrategia de precios de la prima comercial en un entorno incierto que presenta diferentes escenarios económicos posibles. En estos casos se utilizan el FGPOWA operator, el UGPWA operator y el ILPOWA operator, que son las nuevas extensiones de operadores OWA desarrolladas por los autores en esta investigación y presentadas en la segunda parte.

La cuarta parte del documento presenta las conclusiones tanto de cada uno de los capítulos como también a nivel general, que abren el camino a futuras líneas de investigación en las que se espera seguir desarrollando nuevos proyectos que sean aplicables en diferentes campos del conocimiento, en especial al sector asegurador.

PARTE PRIMERA

HERRAMIENTAS PARA LA TARIFICACIÓN EN SEGUROS

El proceso de tarificación en seguros no vida es de una alta complejidad, debido a los múltiples factores que intervienen en él, principalmente el azar y la incertidumbre que hacen necesario el uso de múltiples herramientas para el tratamiento de la información y poder llegar a cobrar tarifas justas a los clientes manteniendo la solvencia y la competitividad de la empresa aseguradora. En esta primera parte se ha realizado una revisión de los artículos a los que se hace referencia a lo largo del documento y en los que se ha inspirado el mismo. Asimismo se presentan los conceptos teóricos claves para el desarrollo de esta investigación y que corresponde a los siguientes tres capítulos:

Capítulo 1. Métodos Estadísticos para el Cálculo de la Prima Pura: para establecer una tarifa justa y equitativa se parte de la estimación de una prima pura, que combina la esperanza matemática tanto de la frecuencia como del coste del siniestro, siendo un proceso bastante complejo, debido a que los asegurados no tienen el mismo comportamiento aunque los cubrimientos de las pólizas sean los mismos, siendo necesaria llevar a cabo una segmentación en la que se puedan clasificar los asegurado en grupos homogéneos para poder establecer una tarifa adecuada ante el riesgo que represente a través de diferentes técnicas denominadas “a priori” porque en ellas se desconoce la información de siniestralidad de dicho asegurado, pero después de cierto periodo de tiempo por lo general de un año, esta tarifa se puede ajustar con los datos que la compañía tenga registrados acerca de la siniestralidad, lo que obliga a determinar una nueva tarifa con otro tipo de herramientas estadísticas conocidas como “a posteriori”, para penalizar o bonificar el comportamiento de siniestralidad.

Capítulo 2. Técnicas de Inteligencia Computacional: con el desarrollo de aplicaciones informáticas la estadística ha avanzado enormemente en los últimos años en el tratamiento de los datos para obtener resultado con altos niveles de confianza. Sin embargo, muchas veces la calidad de los datos recolectados o la información pueden provocar desaciertos en las predicciones, siendo necesario recurrir a otras técnicas en las que se pueda involucrar la incertidumbre

asociada a la tarificación, ya sea por cambios en las normas legislativas, el escenario económico o las costumbres de la sociedad. La inteligencia computacional permite obtener una perspectiva diferente de los problemas para tratarlos con herramientas en las cuales se puede tener en cuenta las opiniones de expertos en diferentes procesos empresariales. Las técnicas más utilizadas son: algoritmos genéticos, redes neuronales artificiales, lógica difusa y máquinas de vectores soporte.

Capítulo 3. Operadores de Agregación OWA: la lógica difusa dispone de muchos mecanismos para el tratamiento de la incertidumbre, uno de los más destacados cuando se requiere agregar información son los operadores OWA (*Ordered Weighted Average*), que permiten incluir la actitud optimista o pesimista en las decisiones, convirtiéndola en una herramienta muy poderosa cuando la información disponible es vaga, imprecisa o incompleta permitiendo complementar o ajustar los resultados obtenidos con métodos estadísticos como también trabajar solamente con opiniones de expertos e información cualitativa.

1. MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA EL CÁLCULO DE LA PRIMA PURA

Los procesos de cálculo de tarifas de seguros no vida son un tema ampliamente estudiado por los investigadores tanto por su complejidad como por aplicabilidad en un sector de gran importancia en el ámbito financiero, en este proyecto se pretende hacer una aportación al tema desde el campo de la inteligencia computacional principalmente en el diseño de operadores de agregación basado en las medias ponderadas ordenadas (*ordered weighted averaging-OWA operator*) complementando los datos estadísticos con el criterio optimista / pesimista de los decisores, y de este modo ser más flexibles para ajustar los modelos a la realidad. En este primer capítulo se describe de manera general los conocimientos estadísticos aplicados en los procesos de tarificación necesarios para comprender el tema antes de adentrarse en las aplicaciones de inteligencia computacional. En primer lugar se aborda el concepto de tarificación y los elementos más importantes para el cálculo de prima que debe pagar un asegurado por una póliza de riesgo, posteriormente se describen los dos sistemas de tarificación utilizados: el primero a priori, en el que el cálculo de la tarifa se hace sin conocer la información de siniestralidad, teniendo en cuenta las características de los asegurados para establecer perfiles de riesgo en grupos lo más homogéneos posibles a través de técnicas estadísticas predictivas y no predictivas. El segundo sistema denominado a posteriori, porque se aplica a períodos posteriores cuando se renuevan las pólizas, en cuyo caso ya se cuenta con una información sobre las reclamaciones que hacen necesario ajustar las primas de acuerdo con el riesgo que representa el asegurado y sean más justas y equitativas, se describe el sistema bonus-malus por ser el más utilizado y la teoría de la credibilidad.

1. TARIFICACIÓN

Cuando existe la probabilidad de ocurrencia de un evento con sus consecuencias (pérdidas o ganancias), se habla de la existencia de un riesgo, y una de las formas de cubrirlo total o parcialmente es a través de una póliza de seguro, en el que una empresa aseguradora está dispuesta a cubrir las pérdidas que se generen en caso de un siniestro y a cambio un asegurado pagara una tarifa denominada prima.

El reto para los actuarios es el cálculo de primas justas para el asegurado en función del riesgo y suficientes para garantizar la solvencia y hacer rentable a la empresa aseguradora [Boj, 2006] que reflejen los diferentes perfiles de riesgos y utilizando herramientas estadísticas para agrupar a los asegurados por perfiles similares [Katrien *et al.*, 2012], puesto que si las primas son demasiado bajas se corre el riesgo de no poder cubrir los siniestros por insolvencia y por el contrario si son muy altos se puede perder participación en el mercado, es por eso que muchos investigadores han trabajado en el desarrollo de diferentes técnicas estadísticas de cálculo de tarifas como se explica a continuación:

2. CÁLCULO DE LA TARIFA (RATEMAKING)

El valor que un asegurado debe pagar por una póliza de seguros se desarrolla partiendo de la estimación de una prima pura que corresponde a la esperanza matemática del coste de la póliza $E[S]$, teniendo en cuenta el número de siniestros o frecuencia de reclamaciones N y sus cuantías o pérdidas X_i para $i=1,2,\dots,N$. Así:

$$E[S]=E[N]E[X] \quad (1.1)$$

Para obtener la prima comercial o tarifa se agregan los siguientes cargos a la prima pura [Boj, 2004]:

- *Recargo de seguridad como reserva técnica* para absorber los excesos de siniestralidad, ya que en la práctica no se dispone de una cartera infinita ni de información estadística suficiente.
- *Recargo para gastos de gestión interna*, destinado a cubrir los gastos propios de la póliza dentro de la compañía aseguradora.
- *Recargo para gastos de gestión externa*, destinado a remunerar a los mediadores entre aseguradores y asegurados, gastos de adquisición y gastos de cobro y mantenimiento de la cartera.
- *Recargo para beneficios o excedentes*, destinado a remunerar los recursos financieros y aumentar la solvencia dinámica, es el beneficio directo para la empresa.

Como se puede notar la fórmula para el cálculo de la primas de riesgo es sencilla, sin embargo, su complejidad se encuentra en la estimación de los valores de la frecuencia y cuantía de las reclamaciones, ya que, por lo general la población de asegurados es muy heterogénea y por ende así mismo el riesgo de siniestralidad que representa, siendo totalmente injusto asignar una tarifa global basada en el comportamiento histórico de la cartera, y por otro lado resultaría muy costoso y bastante engorroso hacerlo de manera individual. Lo más acertado en este caso y lo que practican las compañías de seguros es el cálculo de tarifas de acuerdo a los perfiles de riesgo. A partir de esto existen diferentes alternativas de clasificación que se utilizan en los procesos de tarificación.

3. SISTEMAS DE TARIFICACIÓN

Para obtener primas justas y equitativas los asegurados deben estar clasificados en grupos lo más homogéneos posibles, distinguiéndose dos sistemas: a priori o class-rating en donde no existe información de siniestralidad del asegurado y por tanto para tarificar se asigna una prima acorde con su perfil de riesgo; y el sistema a posteriori o experience-rating en el que se incluye la experiencia de siniestralidad del asegurado para ajustar las primas,

castigando o premiando las reclamaciones. Ambos sistemas son utilizados en los procesos de tarificación el primero principalmente cuando se contrata una póliza por primera vez y el segundo posteriormente cuando se cuenta con información acerca de las reclamaciones o siniestralidad individual.

3.1. Sistema a priori

Como se mencionó anteriormente, en los métodos de tarificación a priori la prima se calcula sin que sea necesaria información de siniestralidad del asegurado, en estos casos se tienen en cuenta factores de riesgo que afectan las reclamaciones y asumiendo como criterio estadístico que la media de daños sea distinta para cada clase y que la varianza sea mínima dentro de cada clase, de modo tal que si se conocen algunos factores se pueda establecer una siniestralidad esperada y por ende un valor de la prima [Boj, 2004].

Los criterios para seleccionar las variables en este sistema deben considerar los siguientes aspectos [Katrien *et al.*, 2012]:

- *Precisión*: que tengan un impacto directo en los costes.
- *Homogeneidad*: que los costes previstos en cada clase, sean aceptablemente similares.
- *Confiabilidad y credibilidad* desde el punto de vista estadístico.

Los métodos para la clasificación a priori se basan en técnicas estadísticas predictivas y no predictivas.

3.1.1. Técnicas predictivas

Estas técnicas pretenden determinar una variable de respuesta que sea explicada a través de unas variables independientes, generalmente se utilizan métodos de regresión o de segmentación con el objetivo de agrupar los asegurados teniendo en cuenta factores que inciden y explican la siniestralidad.

3.1.1.1. Modelos de regresión

El objetivo de las técnicas de regresión es modelar la relación existente entre una variable independiente Y con una serie de variables dependientes o explicativas X_i y un factor aleatorio ε . El cual se puede expresar de manera general así:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p + \varepsilon \quad (1.2)$$

donde:

Y_t : es la variable dependiente, explicada o regresando.

X_1, X_2, \dots, X_p : son las variables explicativas o independientes.

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$: son los parámetros, miden la influencia que las variables explicativas tienen sobre la variable independiente, donde β_0 es la intersección.

p : es el número de parámetros independientes a tener en cuenta en la regresión.

Este modelo clásico, sin embargo es cuestionable en los siguientes casos [Fortiana, 2009]:

- Las variables regresoras o independientes son mixtas.
- La relación entre la variable dependiente o predictora con las variables independientes o explicativas es no lineal.

Ambos casos, principalmente el segundo son muy frecuentes en los modelos para el cálculo de las primas en seguros, siendo necesario utilizar otros modelos de regresión más adecuados para distribuciones de tipo exponencial. Los más utilizados son el modelo lineal generalizado y la regresión basada en distancias [Bousoño *et al.*, 2008].

- **Modelo Lineal Generalizado (MLG)**

Teniendo en cuenta que en el caso de los seguros los datos por lo general no siguen una distribución normal [Katrien *et al.*, 2012], el uso de modelo lineal

generalizado es uno de los más utilizados en el proceso de tarificación, ya que permite trabajar con datos que siguen distribuciones de tipo exponencial [Haberman, 1996], [Katrien *et al.*, 2007], que para el caso de la cuantía se utiliza la Gamma o Gaussiana Inversa por que no toman valores negativos y tienen asimetría positiva y para la frecuencia de siniestralidad Poisson, Binomial o Binomial Negativa [Boj, 2006].

Un MLG establece a través de una función de distribución de tipo exponencial una variable dependiente Y , que tiene una media μ que depende de unas variables independientes X , definida por la siguiente formula:

$$E(Y) = \mu = g^{-1}(X\beta) \quad (1.3)$$

donde

$E(Y)$ es el valor esperado de Y .

$X\beta$ es el «predictor lineal», una combinación lineal de parámetros desconocidos β .

g es la función de enlace.

La varianza es una función V de la media:

$$Var(Y) = V(\mu) = V(g^{-1}(X\beta)) \quad (1.4)$$

Es conveniente si V proviene de una distribución en la familia exponencial, pero podría simplemente ser que la varianza es una función del valor ajustado.

Los parámetros desconocidos β son generalmente estimados por máxima verosimilitud, máxima cuasi-verosimilitud, o técnicas de inferencia bayesiana.

- **Regresión basada en distancias**

Esta técnica fue propuesta por Cuadras (1989) [Boj, 2006], [Cuadras *et al.*, 1996] y aplicables a los siguientes problemas [Fortiana, 2009].

- *Predecir una variable continua* como función de regresión de un conjunto mixto de variables.
- *Predecir una variable* como una función de regresión no lineal de un conjunto de variables continuas.
- *Predecir una variable discreta con g estados* como un problema de clasificación de un conjunto mixto de variables.

El modelo se puede definir así [Fortiana *et al.*, 2009], [Boj, 2006]:

Sea $U = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de individuos o unidades experimentales, sobre los cuales se tienen observaciones de las variables regresoras, que permiten encontrar una matriz de distancias Δ de orden $n \times n$, suponiendo que la distancia es euclídea, y la de productos escalares $\mathbf{G} = \frac{1}{2} \mathbf{J} \Delta^2 \mathbf{J}$ donde \mathbf{J} es la matriz de centrado $\mathbf{J} = \mathbf{I}n - \frac{1}{n} \mathbf{1}n\mathbf{1}n^T$ con $\mathbf{1}n$ representando el vector $n \times 1$ con todos sus elementos iguales a 1.

Se puede calcular la predicción:

$$\hat{y}_{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{g} - \mathbf{d}) \mathbf{G}^+ \quad (1.5)$$

donde, \mathbf{g} es el vector fila que contiene la diagonal \mathbf{G} , \mathbf{d} es el vector fila que contiene las distancias del nuevo individuo al resto y \mathbf{G}^+ la pseudo-inversa de Moore-Penrose de \mathbf{G} .

Aunque este método no sustituye a los modelos clásicos de predicción con variables explicativas si puede considerarse como un procedimiento alternativo [Boj *et al.*, 2007].

Es importante tener en cuenta en los modelos de regresión que estos requieren ser combinados con técnicas de selección de variables para establecer grupos homogéneos iniciales [Boj, 2004].

3.1.1.2. Técnicas de segmentación

El propósito de estas técnicas es dividir un grupo heterogéneo de individuos u objetos de investigación en grupos más pequeños con características similares, utilizando datos tipo regresión, donde hay una variable dependiente cuantitativa o cualitativa y unas variables independientes o explicativas cualitativas de tipo nominal u ordinal [Boj *et al.*,2001].

Estas técnicas están basadas en el algoritmo de AID (*Automatic Interaction Detection*) creado por Morgan y Sonquist (1963), que comprende los siguientes pasos [Escobar, 2007]:

- *Preparación de las variables:* es la selección de la variable dependiente y las posibles variables explicativas por parte del analista.
- *Agrupación de las categorías:* las variables independientes se van dividiendo en mitades progresivamente buscando que haya heterogeneidad entre ellas.
- *Primera segmentación:* es la selección de la variable que proporciona la mejor predicción de la variable dependiente.
- *Posteriores segmentaciones:* partiendo de los segmentos del paso anterior se seleccionan nuevamente las variables que proporcionen el mejor pronóstico como se hizo anteriormente y así sucesivamente con cada una de las segmentaciones previas.

Dependiendo del tipo de variable dependiente la tabla 1.1 muestra los diferentes métodos de segmentación AID que se pueden utilizar [Avila, 1977], [Boj, 2008]

Tabla 1.1. Métodos de segmentación AID

Método	Autor	Variable dependiente	Criterio
Algoritmo de Morgan & Sonquist	Morgan & Sonquist, 1963	Cuantitativa	Reducción porcentual de la suma de cuadrados no explicada
XAID (Extended AID)	Worsley, 1977	Cuantitativa	Estadístico F del análisis de la varianza Estadístico de Kruskal-Wallis en la versión no paramétrica
THAID (Theta AID)	Messenger & Mandel, 1972. Morgan & Messenger, 1973	Cualitativa	Estadístico $\theta_{y/x}$
CHAID (Chi-Square AID)	Kass, 1980	Cualitativa	Test Chi-cuadrado

Fuente: elaboración propia

3.1.2. Técnicas no predictivas

Se basan en la clasificación de individuos u objetos de estudio en dos o más grupos que conllevan riesgos diferentes, en sus aplicaciones al campo de los seguros no vida la base para clasificar es la siniestralidad observada de los grupos, se utilizan el análisis discriminante y el análisis clúster.

3.1.2.1. Análisis discriminante

Esta técnica estadística multivariante se puede considerar como un análisis de regresión donde la variable dependiente es categórica y tiene como categorías la etiqueta de cada uno de los grupos, además de que las variables independientes son continuas y determinan a qué grupos pertenecen los objetos. Se pretende por un lado encontrar relaciones lineales entre las variables continuas que me-

por discriminen en los grupos dados a las observaciones y por otro construir una regla de decisión que asigne un objeto nuevo, que no se sabe clasificar previamente a uno de los grupos prefijados con un cierto grado de riesgo.

Para desarrollar un análisis discriminante es necesario tener en cuenta los siguientes supuestos:

- La variable dependiente es categórica y las otras son de intervalo o razón independientes de la primera.
- Al menos deben existir dos grupos, y cada grupo debe contar con dos o más casos.
- El número de variables discriminantes debe ser menor que el número de observaciones n menos 2. X_1, \dots, X_k con $k < (n-2)$.
- En ningún caso, una variable discriminante puede ser combinación lineal de otras variables discriminantes.
- El número de funciones discriminantes será igual al mínimo entre el número de variables y el número de grupos G menos 1, $\min(G-1, K)$.
- Las matrices de covarianzas dentro de cada grupo deben ser aproximadamente iguales.
- Las variables continuas deben seguir una distribución normal multivariante.

La estimación del modelo discriminante consiste entonces en obtener D_i funciones discriminantes que son combinación lineal de las variables explicativas X , así:

$$D_i = u_{i1}X_1 + u_{i2}X_2 + \dots + u_{ik}X_k, \quad i=1, 2, \dots, G-1 \quad (1.6)$$

donde los vectores discriminantes u_1, u_2, \dots, u_{G-1} se puede expresar así:

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1k} \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{2k} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad u_{G-1} = \begin{bmatrix} u_{G-11} \\ u_{G-12} \\ \vdots \\ u_{G-1k} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Si la covarianza es total se define como la covarianza dentro de los grupos más la covarianza entre grupos:

$$W = F + T \quad (1.8)$$

siendo,

W = matriz de covarianzas total.

F = matriz de covarianzas entre los grupos.

T = matriz de covarianzas dentro de los grupos.

La obtención del primer eje discriminante se obtiene al maximizar λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{u_1' F u_1}{u_1' W u_1} \quad (1.9)$$

Si se deriva λ_1 respecto de u y se iguala a cero se obtiene:

$$W^{-1} F u_1 = \lambda_1 u_1 \quad (1.10)$$

De los valores propios de λ_1 que se obtienen de resolver la ecuación anterior se retiene el mayor que será la obtención del vector propio u_1 que será el primer eje discriminante, los demás ejes discriminantes serán los vectores propios asociados a los valores propios de la matriz $W^{-1}F$ ordenados de mayor a menor, o sea que el eje discriminante será mejor entre mayor sea el valor propio.

3.1.2.2. Análisis clúster

Esta técnica estadística se utiliza para resolver problemas de clasificación, estableciendo estructuras y relaciones entre los datos que no son evidentes con el propósito de ordenar los objetos de estudio en grupos denominados clúster o conglomerados heterogéneos entre sí, sin embargo los miembros de cada uno poseen una gran similitud entre ellos.

En el caso de la tarificación en seguros al realizar esta clasificación a priori la homogeneidad entre los miembros y la heterogeneidad entre los grupos se

hace a partir de los datos de siniestralidad [Guillen, 2005], como característica principal en el cálculo de las primas.

Existen diferentes métodos que se pueden utilizar para obtener la clasificación de los conglomerados. Véase [Guillen, 2005]:

- **Método no jerárquico**

Es un método adecuado para trabajar con grandes bases de datos partiendo de un grupo en el que se cuenta con todos los individuos objeto de análisis, que posteriormente se va dividiendo en subgrupos que tienen como característica común tener centros de grupo distintos.

El número de clústeres que se pueden obtener generalmente es desconocido, ya que estos se determinan por ensayo y error de las siguientes dos formas:

1. Iniciando con un número elevado de grupos e irlos reduciendo hasta encontrar la clasificación más adecuada, los criterios que se aplican para disminuir la cantidad de grupos son:
 - o Que en un grupo se presente un número muy reducido de casos.
 - o La existencia de dos grupos con centro similares o que la media de la media de las variables de cada grupo presenten igualmente una gran similitud.
2. Iniciar con dos grupos (el mínimo) e ir aumentando el número cuando exista una alta dispersión dentro de un grupo con un elevado número de casos.

El criterio para asignar un asegurado a un clúster es el de la distancia euclídea mínima con respecto al centro del grupo:

$$\text{Min}_{j=1,\dots,m} d_{ip} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (X_{ij} - C_{pj})^2} \quad (1.11)$$

donde C_{pj} es la media de la variable j del centro C_p .

- **Método jerárquico aglomerativo**

Este método parte de la idea de que cada individuo forma un grupo y posteriormente se va uniendo con otros hasta formar un único grupo, que se presenta gráficamente a través de un dendograma en el que se presenta el orden en que se han ido formando los clústeres, esta técnica parte de la construcción de una matriz de distancias:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & 0 & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

donde d es la distancia euclídea entre i e i' .

$$d_{ii'} = \sqrt{\sum_{j=1}^k (X_{ij} - X_{i'j})^2} \quad (1.13)$$

La idea es encontrar individuos o grupos en los cuales la distancia $d_{ii'}$ sea mínima. Posteriormente se calcula la distancia entre los conglomerados, a través de los siguientes métodos:

Método del mínimo:

$$d_{(b,b')i} = \text{Mín} (d_{bi}, d_{b'i}) \quad (1.14)$$

Método del máximo:

$$d_{(b,b')i} = \text{Máx} (d_{bi}, d_{b'i}) \quad (1.15)$$

Método de la media:

$$d_{(b,b')i} = \frac{d_{bi} + d_{b'i}}{2} \quad (1.16)$$

Método UPGMA:

$$d_{(b,b')_i} = \frac{n_b}{n_b + n_{b'}} d_{bi} + \frac{n_{b'}}{n_b + n_{b'}} d_{b'i} \quad (1.17)$$

siendo n_b y $n_{b'}$ el número de individuos que existe en los grupos b y b' .

- **Método jerárquico divisivo**

Es el más utilizado para segmentar la cartera de asegurados, en el cual se forma un árbol de decisión con la ventaja de que aparte de ser descriptivo, también es explicativo [Guillén, 2005], este método parte de un solo grupo de individuos del cual se van formando los clústeres, donde además de segmentar, al ser explicativo se requiere tener una variable cuantitativa y unas variables categóricas o explicativas que son presentadas en una matriz:

$$XY = \begin{bmatrix} Y_1 & X_{11} & \dots & X_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_n & X_{n1} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

siendo la primera columna de la matriz XY la variable cuantitativa Y y las demás columnas las variables explicativas X .

A partir de estos datos se calcula la suma de cuadrados entre grupos:

$$SCE_j = \sum_{b=1}^2 n_b (\bar{Y}_{.b} - \bar{Y})^2 \quad j=1, \dots, k \quad (1.19)$$

con

$$\bar{Y}_{.b} = \frac{\sum_{i=1}^{n_b} Y_{ib}}{n_b}$$
$$\bar{Y} = \frac{\sum_{b=1}^2 \sum_{i=1}^{n_b} Y_{ib}}{\sum_{b=1}^2 n_b} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$$

donde:

n_b : es el número de individuos del grupo b .

\bar{Y}_b : es la media de la variable cuantitativa en el grupo b .

\bar{Y} : es la media global.

Y_{ib} : es el valor del individuo i que pertenece al grupo b .

Para dividir los segmentos el criterio es el SCE_j máximo de las variables categóricas X_l , es decir, $SCE_l = \text{Máx} \{SCE_j\}$ con $j=1, \dots, k$ utilizando el estadístico F de Fisher para comprobar la existencia de diferencias significativas entre los grupos. Dentro de cada segmento formado, se repite el mismo proceso calculando la suma de cuadrados entre grupos SCE_j hasta que no se tengan más variables explicativas para dividir o las diferencias estadísticas de los grupos no sean significativas, obteniendo al final un árbol de decisión con todos los clústeres formados.

3.2. Sistema a posteriori

La implementación de los sistemas a posteriori o experience-rating se justifica porque en un sistema a priori los grupos nunca serán completamente homogéneos, lo cual hace necesario reevaluar la prima teniendo en cuenta la experiencia de siniestralidad de los asegurados, en cuanto esté disponible [Katrien, *et al.*, 2012].

Los métodos para estos sistemas de tarificación son: bonus-malus, merit-rating, retrospective-rating y distribución de dividendos, los cuales se basan en un principio de eficacia y el último teniendo en cuenta también la estabilidad. [Bousoño *et al.*, 2006], en este trabajo nos enfocaremos en el sistema bonus-malus por ser el más utilizado y en la teoría de la credibilidad que también presenta modelos para ajustar la tarifa combinando tanto la prima de la cartera como la prima individual.

3.2.1. Bonus-Malus

Un sistema Bonus-Malus SBM tiene como objetivo corregir la prima calculada a priori [Guillen *et al.*, 2001] se basa en la distribución de la frecuencia de reclamaciones de los asegurados sin tener en cuenta la cuantía, garantizando que la prima aumente cuando se presenten reclamaciones y disminuya cuando estas no existan [Gómez *et al.*, 2006], en otras palabras SBM se define como un sistema en el que si en un año previo una póliza no tiene reclamaciones tendrá un incentivo (bonus) que se restará de la prima siguiente, en caso contrario se cobrará una penalización (malus) [Vandebroek, 1993].

[Lemaire, 1995] define que una compañía aseguradora utiliza un SBM cuando cumple las siguientes condiciones:

- Una cartera puede ser dividida en un número finito de clases, denominado C_i ($i=1,2,\dots,s$), donde la prima anual depende únicamente de la clase a la que pertenece.
- La clase a la que se asigna una póliza en un periodo depende de la clase a la que pertenece en el periodo anterior y del número de siniestros reportados.

Los SBM están determinados por tres elementos:

- La escala de primas $\bar{b} = (b_1, \dots, b_s)$.
- La clase inicial C_i .
- Las reglas de transición con las condiciones para que una póliza pase de una clase C_i a otra C_j en un periodo cuando se conoce el número de siniestros.

Estas reglas se aplican como transformaciones $T_k(i) = j$, de modo que cuando los asegurados de la clase C_i , reportan k siniestros pasan a la clase C_j en el periodo siguiente. Generalmente T_k se presenta como matrices:

$$T_k = (t_{ij}^{(k)}) \quad (1.20)$$

donde

$$\begin{aligned} t_{ij}^{(k)} &= 1 \quad \text{si } T_k(i) = j \\ t_{ij}^{(k)} &= 0 \quad \text{si } T_k(i) \neq j \end{aligned}$$

La probabilidad de transición de C_i a C_j para un parámetro λ como puede ser la frecuencia de reclamos, está dada por:

$$P_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\lambda) t_{ij}^{(k)} \quad (1.21)$$

donde $P_k(\lambda)$ es la probabilidad de k siniestros en un periodo dado $\Lambda = \lambda$, con $P_{ij}(\lambda) \geq 0$, y $\sum_{j=1}^5 P_{ij}(\lambda) = 1$.

La matriz $M(\lambda) = (P_{ij}(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\lambda) T_k$, es la matriz de transición de la cadena de Markov¹, suponiendo que la frecuencia de reclamos es estacionaria en el tiempo la cadena es homogénea, entonces la matriz $M(\lambda)$, será la matriz de la cadena de Markov.

3.2.2. Teoría de la credibilidad

Esta teoría fue desarrollada para cobrar tarifas justas en función del riesgo que represente un asegurado, tratando así de solucionar el problema de heterogeneidad y encontrar una prima que integre tanto la experiencia particular del asegurado como la del portafolio, basándose en la siguiente fórmula:

$$C = (1 - Z)B + ZA \quad (1.22)$$

¹ La cadena de Markov, se refiere a un proceso estocástico discreto en el que la probabilidad de que ocurra un evento depende del evento inmediatamente anterior.

donde

Z : es el factor de credibilidad, con $0 \leq Z \leq 1$

A : es la prima propia en los últimos t periodos

B : es la prima de la cartera o prima teórica

C : es el valor de la prima entre A y B

3.2.2.1. Credibilidad total

La credibilidad total se da cuando Z toma los valores extremos de 0 o 1, así:

1. Si $Z = 0$, $C=B$, en este caso se tiene credibilidad total utilizando la prima teórica, es decir la experiencia de la cartera.
2. Si $Z = 1$, $C=A$, en este caso la credibilidad total está dada en la prima propia, es decir, se tiene en cuenta únicamente la experiencia individual.

3.2.2.2. Credibilidad parcial

Teniendo en cuenta que Z representa la ponderación que se le asigna a la prima propia, si $0 < Z < 1$, se dice que existe credibilidad parcial, al obtener una prima como combinación de los valores de la prima propia y la teórica.

Para el cálculo del factor de credibilidad Z , Bühlmann ha propuesto la siguiente fórmula:

$$Z = \frac{a}{s^2 + at} = \frac{t}{t + \frac{s^2}{a}} = \frac{a}{a + \frac{s^2}{t}} \quad (1.23)$$

donde

t : es el período de observación o número de años de experiencia

a : es el grado de heterogeneidad entre las flotillas $a > 0$

s^2 : es la variabilidad de las reclamaciones

La utilidad de esta forma se puede observar analizando los siguientes casos [Moreno *et al.*, 2003]:

1. Cuando varía t , si $t \rightarrow \infty, \Rightarrow Z = 1$, o si $t \rightarrow 0, \Rightarrow Z = 0$. En este caso a mayor experiencia mayor credibilidad en la prima propia, pero si la experiencia es nula, se tiene más credibilidad en la prima de la cartera.
2. Cuando varía t , si $a \rightarrow \infty, \Rightarrow Z = 1$, o si $a \rightarrow 0, \Rightarrow Z = 0$. En este caso a mayor heterogeneidad mayor credibilidad en la prima propia, pero si la cartera es homogénea se tiene mayor credibilidad en la prima de la cartera.
3. Cuando varía s^2 , si $s^2 \rightarrow \infty, \Rightarrow Z = 0$, o si $s^2 \rightarrow 0, \Rightarrow Z = 1$. En este caso a mayor variabilidad de los siniestros mayor credibilidad en la prima de la cartera, pero si existe poca variabilidad es preferible la prima propia.

3.2.2.3. Modelos de distribución libre

Son los primeros modelos con los que se desarrolla la teoría de la credibilidad moderna (Modelo Clásico de Bühlmann y Modelo de Bühlmann-Straub), denominados también de distribución libre, ya que en ellos no es necesario definir hipótesis ni sobre la distribución de los riesgos individuales, ni sobre la distribución a priori, ambos modelos buscan determinar la prima que corresponde a un asegurado o grupo restringiéndose a las primas lineales con la utilización del método de mínimos cuadrados [Gómez, E. *et al.*, 2008].

- **Modelo clásico de Bühlmann**

Este modelo pretende determinar un estimador lineal en el que se pondere la experiencia de siniestralidad individual con la de toda la cartera. Véase [Gómez, E. *et al.*, 2008]. Los datos se presentan como en la tabla 1.2, que describe la evolución de las pólizas con características similares durante n años:

Tabla 1.2. Cartera del modelo clásico de Bühlmann

Años	Pólizas					
	1	2	...	j	...	k
1	X_{11}	X_{21}	...	X_{j1}	...	X_{k1}
2	X_{12}	X_{22}	...	X_{j2}	...	X_{k2}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
n	X_{1n}	X_{2n}	...	X_{jn}	...	X_{kn}

donde, X_{jn} es una variable aleatoria que representa el riesgo del asegurado j en el año n , cuya función de distribución depende de un parámetro de riesgo desconocido θ_j , teniendo en cuenta las siguientes hipótesis:

1. Homogeneidad en el tiempo ($\theta_{ij} = \theta_j$).
2. Los parámetros θ_j son variables aleatorias independientes y con la misma distribución $\pi(\theta)$.
3. Independencias de riesgos, las pólizas son independientes entre sí.
4. Dado el valor θ particular θ_j las variables aleatorias dentro de la columna son independientes.

El modelo consiste en estimar la mejor prima lineal por el método de mínimos cuadrados:

$$H[\mu(\theta_j) | X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jn}] \quad (1.24)$$

Se denota entonces:

$\mu(\theta) = E[X | \theta]$ a la prima de riesgo que corresponde a la póliza

$m = E[\mu(\theta)]$ al valor esperado de todas las primas de riesgo o prima colectiva

$a = \text{Var}[E[X|\theta]] = \text{Var}[\mu(\theta)]$ a la varianza de las primas de riesgo

$s^2 = E[\text{Var}(X|\theta)]$ a la dispersión de la siniestralidad individual

siendo la mejor aproximación lineal según Bühlmann (1967):

$$a + b\bar{X} = a + b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1.25)$$

donde

$$a = (1-b)m$$

$$b = \frac{n}{n+k}$$

$$k = \frac{E[\sigma^2(\theta)]}{\text{Var}[\mu(\theta)]}$$

Por tanto, según el factor de credibilidad propuesto por Bühlmann. Véase demostración [Gómez *et al.*, 2008]:

$$Z = \frac{an}{s^2 + an} = \frac{n\text{Var}[\mu(\theta)]}{E[\sigma^2(\theta)] + n\text{Var}[\mu(\theta)]} \quad (1.26)$$

Uno de los principales problemas de este modelo es que considera que todas las pólizas tienen la misma importancia al incluir sólo el valor de la cuantía sin tener en cuenta la frecuencia de reclamaciones como se plantea en los dos modelos que se explican a continuación.

- **Modelo de Bühlmann-Straub**

Este modelo se considera una generalización del modelo de Bühlmann introduciendo observaciones ponderadas con un factor de ponderación m_{ij} que indica que las observaciones no tienen la misma importancia ni en las pólizas ni en los periodos de tiempo, como se presenta en la tabla 1.3 en la página siguiente. Véase [Gómez, E. *et al.*, 2008].

Tabla 1.3. Cartera del modelo clásico de Bühlmann-Straub

Años	Pólizas					
	1	2	...	j	...	k
1	X_{11} m_{11}	X_{21} m_{21}	...	X_{j1} m_{j1}	...	X_{k1} m_{k1}
2	X_{12} m_{12}	X_{22} m_{22}	...	X_{j2} m_{j2}	...	X_{k2} m_{k2}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	X_{1n} m_{1n}	X_{2n} m_{2n}	...	X_{jn} m_{jn}	...	X_{kn} m_{kn}

En este caso el modelo incluye un parámetro conocido m_{ij} , $i=1,\dots,k$; $j=1,\dots,n$, que por lo general representa la cantidad de reclamaciones, mientras X_{ij} corresponde a la cuantía del siniestro. Entonces:

$$v = \text{Var}[\theta_j] = m_{ij} \text{Var}[X_{ij} | \theta_j] \quad (1.27)$$

De acuerdo con el modelo clásico de Bühlmann:

$$H[\mu(\theta_i) | X_1, X_2, \dots, X_n] = Z_i(n) \bar{X}_i + [1 - Z_i(n)] \bar{X} \quad (1.28)$$

donde

$$Z(n) = \frac{ma}{ma + s^2}$$

$$m = \sum_{i=1}^k m_i$$

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j X_j$$

Por tanto se tendrá un factor de credibilidad distinto para cada póliza, con los parámetros estructurales estimados a partir de:

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k m_i \bar{X}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n m_{ij} X_{ij} \\ \bar{X}_i &= \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^n m_{ij} X_{ij} \\ \bar{v} &= \frac{1}{\sum_{j=1}^n (n_j - 1)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \\ \hat{a} &= \frac{1}{m - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k m_i^2} \left[\sum_{i=1}^k m_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 t - v(k-1) \right]\end{aligned}$$

$\hat{\mu}$, \hat{v} y \hat{a} son los estimadores insesgados de μ , v y a y el estimador $\hat{K} = \hat{v}/\hat{a}$. El factor de credibilidad para el grupo o póliza i es:

$$\hat{Z}(n) = \frac{n}{n + \hat{K}} \quad (1.29)$$

El estimador Bühlmann-Straub para el número medio de reclamaciones es:

$$\hat{X}_i = \hat{Z}(n) \hat{X}_i + [1 - \hat{Z}(n)] \hat{\mu} \quad (1.30)$$

Y la cantidad total reclamada por estimador:

$$\hat{C}_i = m_{i, n_{i+1}} \hat{X}_i \quad (1.31)$$

- **Modelo jerárquico de Jewell**

Este modelo se puede considerar una generalización del Modelo de Bühlmann-Straub, donde las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo y la varianza depende del período considerado teniendo en cuenta los pesos naturales, con el objetivo de hallar estimadores lineales de credibilidad para las primas de riesgo individuales, utilizando el método de mínimos cuadrados. Véase [Pons, M. *et al.*, 2008].

En este modelo las carteras pueden ser divididas en p subcarteras, teniendo cada una de ellas un parámetro de riesgo que describe las diferencias que existen entre ellas, se denomina jerárquico por que se desarrolla en dos niveles contando cada póliza con dos parámetros de riesgo, uno a nivel de las pólizas, y otro a nivel de las subcarteras.

Las variables más relevantes del modelo son:

θ_p : es el parámetro de riesgo que caracteriza a la cartera p , con $p=1,2,\dots,P$, siendo P el número de subcarteras producto de dividir la cartera.

θ_{pj} : es el parámetro de riesgo que caracteriza a la póliza j -ésima que pertenece a la subcartera p , con $j=1,2,\dots,K_p$, siendo K_p el número de pólizas que conforman la subcartera p .

X_{pjs} : es la variable aleatoria de la experiencia de siniestros de la póliza j -ésima que pertenece a la subcartera p en el período s -ésimo.

W_{pjs} : son las observaciones o pesos naturales de las variables X_{pjs} que tiene valores positivos conocidos.

Términos del modelo

$$W_{p..} = \sum_{j=1}^k W_{pj.} = \sum_{j=1}^k \sum_{s=1}^t W_{pjs} : \text{Ponderador del contrato } p.$$

$Z_{pj} = \frac{aW_{pj.}}{s^2 + aW_{pj.}}$: Factor de credibilidad para determinar la prima que sería adecuada cobrar al grupo de riesgo j .

$$Z_p = \sum_{j=1}^{k_p} Z_{pj} : \text{Factor acumulado de credibilidad para cada subcartera } p.$$

$Z_p = \frac{bZ_p.}{a + bZ_p.}$: Factor de credibilidad que corresponde a todas las pólizas de la subcartera p .

$X_{pjw} = \sum_{s=1}^t X_{pj^s} \left(\frac{W_{pj^s}}{W_{pj}} \right)$: Es el nuevo contrato de la clase j , que representa el promedio ponderado de las reclamaciones presentadas por aquellos contratos sujetos a los riesgos en cualquier momento.

$X_{pzw} = \sum_{j=1}^k X_{pjw} \left(\frac{Z_{pj}}{Z_p} \right)$: Representa un nuevo contrato, a nivel de subcartera, integrado por el promedio ponderado de las reclamaciones presentadas en todas las clases sujetas al mismo factor de riesgo.

$X_{zzw} = \sum_{p=1}^P X_{pzw} \left(\frac{Z_p}{Z} \right)$: Es el nuevo contrato que considera el promedio ponderado de las reclamaciones de todos los subportafolios, clases de contratos y contratos individuales, sin tener en cuenta los parámetros estructurales de cada uno, ni el momento de la reclamación.

La prima que corresponde a la clase de contratos sujetos a los riesgos (Θ_p, Θ_{pj}) está dada por:

$$\hat{\mu} = (\Theta_p, \Theta_{pj}) = M_{pj^a} = (1 - Z_{pj})m_p + Z_{pj}X_{pjw} \quad (1.32)$$

donde

$$Z_{pj} = \frac{aW_{pj.}}{s^2 + aW_{pj.}}$$

Y el estimador ajustado de credibilidad lineal $\hat{\mu}(\theta_p)$ es:

$$\hat{\mu}(\theta_p) = N_p^a = [1 - Z_p]m + Z_p X_{pzw} \quad (1.33)$$

donde

$$Z_{pj} = \frac{bZ_p}{a + bZ_p}$$

Los estimadores insesgados para estos parámetros son los siguientes:

$$\begin{aligned}\widehat{m}_p &= N_p = X_{pzw} \\ \widehat{m} &= N_o = X_{zzw} \\ \widehat{S}^2 &= \frac{\sum_{p,j,s} (X_{pjs} + X_{pjw})^2}{\sum_{p,s} (t_{pj} - 1)} \\ \widehat{a} &= \frac{\sum_{p,s} \sum_{pj} (X_{pjw} - X_{pxw})^2}{\sum_p (Kp - 1)} \\ \widehat{b} &= \frac{\sum_p \sum_p (X_{pzw} - X_{zzw})^2}{(P - 1)}\end{aligned}$$

Estos sistemas de estimación de la prima pura constituyen una forma de involucrar la información evolutiva de la cartera de asegurados, para ajustar las primas al riesgo que representan de acuerdo a su comportamiento en el tiempo. Es así como las empresas aseguradoras pueden llegar a establecer precios más justos y equitativos.

2. TÉCNICAS DE INTELIGENCIA COMPUTACIONAL

Como se explicó en el capítulo anterior, en el proceso de tarificación de seguros No Vida se utilizan diferentes técnicas estadísticas clasificadas como: “a priori” o “a posteriori”, dependiendo de la información que se utilice en su cálculo. A priori cuando se desconoce la experiencia de siniestralidad del asegurado y se estima de acuerdo con el perfil de riesgo del asegurado. Y a posteriori, generalmente, cuando después de un período de tiempo se cuenta con información de reclamaciones de la póliza y es utilizada para corregir la prima inicial, con el fin de que sea más justa y equitativa. En este sentido las empresas aseguradoras siempre buscan una prima óptima que tenga en cuenta la competitividad y la solvencia, ya que si la prima es muy baja la compañía puede ganar participación en el mercado pero a su vez perder solvencia, mientras que si por el contrario, la prima es muy alta se puede ganar solvencia pero también perder parte del mercado.

El uso de herramientas estadísticas involucra un alto grado de objetividad dependiendo de la calidad de la información disponible. Ello significa un gran problema que afecta el proceso de tarificación, ya que no se puede tener información total sobre el riesgo de una póliza, o no siempre corresponde a la realidad. Por otro lado, algunos acontecimientos del entorno como cambios en la legislación o en los hábitos de la sociedad puede afectar la siniestralidad en el futuro, lo cual no es observable en la información histórica. En estos casos la información obtenida por métodos estadísticos no tiene en cuenta la incertidumbre asociada a al entorno cambiante. En la inteligencia computacional se pueden encontrar diferentes técnicas que se pueden utilizar para tratar la incertidumbre, tal como se explica a continuación en este capítulo.

1. INTELIGENCIA COMPUTACIONAL

Es una rama de la inteligencia artificial que se dedica al estudio de mecanismos adaptativos para permitir o facilitar el comportamiento inteligente en sistemas complejos y cambiantes, combinando elementos de aprendizaje, evolución y lógica difusa para crear programas que de cierto modo son inteligentes.

La inteligencia computacional también es denominada como *Soft Computing*, término que en 1994 L.A Zadeh definió como la utilización de una mezcla de diferentes métodos, que pueden trabajar tolerando ciertos niveles de imprecisión e incertidumbre, manteniendo la robustez y la flexibilidad para obtener soluciones de bajo coste. Los principales componentes del soft computing son:

- La lógica difusa que se ocupa de la imprecisión y el razonamiento aproximado.
- La neuro-computación que se dedica al aprendizaje.
- El razonamiento aproximado que trabaja la incertidumbre y la propagación de creencias.

Las técnicas más utilizadas de soft computing corresponden a los algoritmos genéticos, las redes neuronales artificiales, la lógica difusa y las máquinas de vectores soporte, las cuales se describen a continuación:

2. ALGORITMOS GENÉTICOS

Los algoritmos genéticos (AG) pertenecen a una rama de la inteligencia artificial denominada computación evolutiva basada, en el proceso genético de los organismos vivos para solucionar problemas de búsqueda y optimización. Los AG inicialmente fueron desarrollados por Holland (1975) con los siguientes objetivos:

- Diseñar sistemas artificiales que retuvieran los mecanismos más importantes de los sistemas naturales.
- Abstractar y explicar el proceso adaptativo de los sistemas naturales.

De este modo los algoritmos genéticos se pueden definir según Goldberg (1989) como:

Algoritmos de búsqueda basados en los mecanismos de selección y genética natural. Se trata de combinar la supervivencia de los más compatibles entre las estructuras de cadenas, con una estructura de información ya aleatorizada, intercambiada para construir un algoritmo de búsqueda con algunas de las capacidades de innovación de la búsqueda humana.

En términos generales un algoritmo genético consiste en una población de soluciones codificadas de forma similar a los cromosomas, donde cada una tendrá un valor de bondad o ajuste que cuantifica su validez en la solución del problema. Y en función de dicho valor se le dará más o menos oportunidades en la reproducción, realizando con una cierta probabilidad mutaciones de estos cromosomas.

Los pasos básicos a seguir en un algoritmo genético son:

- Evaluar la bondad de cada uno de los cromosomas generados.
- Permitir la reproducción de los cromosomas, donde los más aptos son los que tienen mayor probabilidad de reproducirse.
- Mutar un gen del nuevo individuo generado con cierta probabilidad de mutación.
- Organizar la nueva población.

Estas etapas se repetirán hasta que se establezca una condición de finalización con un número máximo de iteraciones, aunque lo más habitual es detenerlo cuando no se produzcan más cambios en la población.

Los AG se distinguen de otras técnicas de búsqueda y optimización por las siguientes cuatro características [Goldberg, 1989]:

- No trabajan directamente sobre los parámetros a optimizar, sino sobre la codificación de los mismos.

- Investigan sobre poblaciones de posibles puntos o soluciones, o sea, que no buscan un único punto.
- Usan directamente la función objetivo, no la derivada u otro tipo de conocimiento auxiliar.
- Las reglas de transición utilizadas son probabilísticas y no deterministas.

Sin embargo, es importante tener en cuenta en la función objetivo que:

- Si tiene muchos mínimos o máximos locales se deben hacer más iteraciones del algoritmo para asegurar el mínimo o máximo global.
- Cuando existen muchos valores cercanos al óptimo, solo se puede asegurar que se encuentre uno de ellos que necesariamente no es el óptimo.

2.1. Ventajas de los algoritmos genéticos

- Operan simultáneamente con varias soluciones, a diferencia de las técnicas tradicionales que lo hacen de manera secuencial.
- No requieren conocimiento específicos sobre el problema que se pretende resolver.
- En los problemas de optimización, resultan menos afectados por los máximos locales o falsas soluciones que las técnicas tradicionales.
- Pueden manipular muchos parámetros simultáneamente en el caso de tener varios objetivos a resolver.
- Utilizan operadores probabilísticos y no determinísticos como en otras técnicas.

2.2. Desventajas de los algoritmos genéticos

- Pueden tardar mucho tiempo en converger o no converger en absoluto, lo cual depende de los parámetros que se utilicen como el tamaño de la población o número de generaciones entre otros.

- Pueden tener algunos problemas que lo hagan converger prematuramente.
- El lenguaje para especificar las posibles soluciones debe ser robusto, referente a la capacidad para tolerar cambios aleatorios que no produzcan grandes errores o soluciones sin sentido.

Los AG vienen siendo ampliamente utilizados por investigadores del campo de las finanzas principalmente en problemas de solvencia o predicción de quiebra como se puede ver en los trabajos de [Chen, 2011], [Divsalar, 2011], [Garkaz, 2011], [Zhang, 2011], [Ahn, 2009], [Wu, 2007], [Ahn, 2006], [Min, 2006] y [Abdelwahed, 2005]. Y particularmente, en el campo de los seguros se destaca el trabajo de [Salcedo-Sanz, 2005], del cual se pueden encontrar más detalles en el cuaderno de MAPFRE No. 97 Aplicación de Métodos de Inteligencia Artificial para el Análisis de la Solvencia en Entidades Aseguradoras.

3. REDES NEURONALES ARTIFICIALES

El sistema de cálculo más complejo que se conoce es el cerebro humano por su capacidad de pensar, recordar, aprender y resolver problemas. Por ello, muchos investigadores han perseguido desarrollar modelos para que la computación se aproxime a distintas funciones del cerebro, teniendo como resultado las redes neuronales artificiales (RNA).

La arquitectura de una RNA (Fig. 2.1) consiste en:

- Una primera capa de entradas, que recibe información del exterior.
- Una serie de capas intermedias ocultas que son las que realizan el trabajo en la red.
- Una capa de salida que proporciona el resultado del trabajo al exterior.

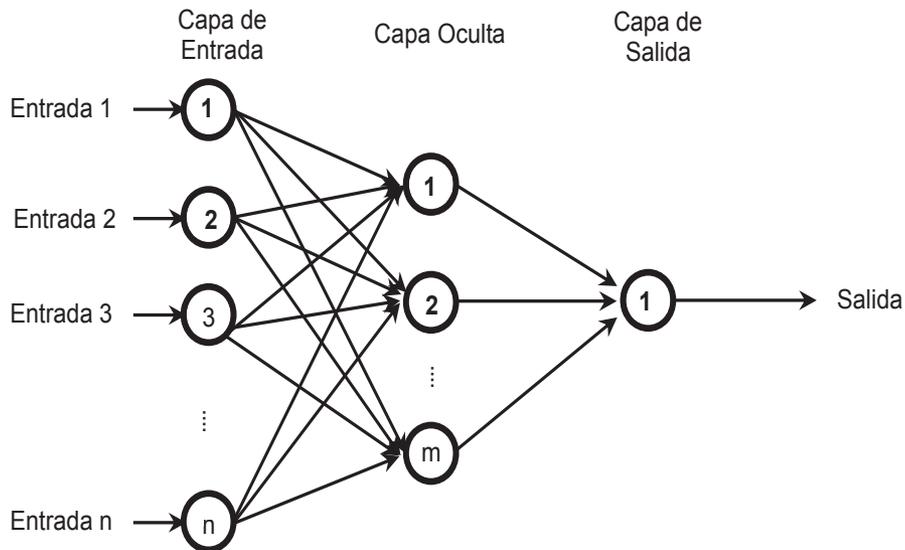


Figura 2.1. Arquitectura de una Red Neuronal Artificial

Las RNA están inspiradas en las redes neuronales del cerebro humano, y al igual que estas intentan aprender en un sistema de interconexión de neuronas, que a partir de los datos que se le suministran colaboran para producir un estímulo de salida. De este modo la red logra obtener ciertas características similares al cerebro como:

- Abstractar la esencia de un conjunto de entradas que aparentemente no presentan aspectos comunes o relativos.
- Generalizar debido a su propia estructura, proporcionando dentro de un margen respuestas correctas a entradas que tienen pequeñas variaciones debido a los efectos de distorsión.
- Aprender cambiando su comportamiento en función del entorno, de modo que cuando se les muestra un conjunto de entradas, ellas mismas se ajustan para producir salidas consistentes.

Este último proceso de aprendizaje puede ser:

Aprendizaje supervisado: que consiste en entrenar la red a partir de un conjunto de datos de entrenamiento compuesto por patrones de entrada y salida. El objetivo del algoritmo de aprendizaje es ajustar los pesos de la red “w”, de manera tal que la salida generada por la RNA sea lo más cercanamente posible a la verdadera salida, dada una cierta entrada. Es decir, la red neuronal trata de encontrar un modelo al proceso desconocido que generó la salida. Este aprendizaje se llama supervisado pues se conoce el patrón de salida, el cual hace el papel de supervisor de la red. Se puede llevar a cabo de las siguientes tres formas:

- **Aprendizaje por corrección de error:** consiste en ajustar los pesos en función de la diferencia entre los valores deseados y los obtenidos en la salida de la red; es decir, en función del error.
- **Aprendizaje por refuerzo:** se basa en la idea de no indicar durante el entrenamiento exactamente la salida que se desea que proporcione la red, ante una determinada entrada. La función del supervisor se reduce a indicar mediante una señal de refuerzo si la salida obtenida en la red se ajusta a la deseada (éxito=+1 o fracaso = -1), y en función de ello se ajustan los pesos basándose en un mecanismo de probabilidades.
- **Aprendizaje estocástico:** este tipo de aprendizaje consiste básicamente en realizar cambios aleatorios en los valores de los pesos de las conexiones de la red y evaluar su efecto a partir del objetivo deseado y de distribuciones de probabilidad.

Aprendizaje no supervisado: en este se presenta sólo un conjunto de patrones a la RNA. El objetivo del algoritmo de aprendizaje es ajustar los pesos de la red de tal manera que la red encuentre alguna estructura o configuración presente en los datos. Se consideran dos tipos:

- **Aprendizaje hebbiano:** consiste básicamente en el ajuste de los pesos de las conexiones de acuerdo con la correlación. De modo que, si las dos unidades son activas (positivas) se produce un reforzamiento de la conexión.

Por el contrario, cuando una es activa y la otra pasiva (negativa) se produce un debilitamiento de la conexión.

- **Aprendizaje competitivo y cooperativo:** Las neuronas compiten y cooperan unas con otras con el fin de llevar a cabo una tarea dada. Con este tipo de aprendizaje se pretende que cuando se presente a la red cierta información de entrada, solo una de las neuronas de salida se active, es decir, alcance su valor de respuesta máximo. Por tanto, las neuronas compiten por activarse quedando finalmente una, o una por grupo, como neurona vencedora.

En general una RNA consta de tres elementos principales:

- Topología: se refiere a como está organizada la red en capas y cómo se conectan estas capas.
- Aprendizaje: se refiere a como se almacena la información en la red como se explicó anteriormente con más detalle.
- Recuperación: se refiere a cómo puede recuperarse la información almacenada en la red.

3.1. Ventajas de las redes neuronales artificiales

Comparándola con otros sistemas de procesamiento de información, algunas de las ventajas de las RNA son:

- Pueden sintetizar algoritmos a través de un proceso de aprendizaje.
- Para usarlas no es necesario conocer los detalles matemáticos. Sólo se requiere estar familiarizado con los datos de trabajo.
- Una de sus grandes fortalezas es la solución de problemas no lineales.
- Las redes son robustas, es decir, que pueden fallar algunos elementos de procesamiento pero la red continua funcionando, a diferencia de lo que sucede en la programación tradicional.

3.2. Desventajas de las redes neuronales artificiales

- Las RNA se deben entrenar para cada tipo de problema, siendo necesario desarrollar múltiples pruebas para determinar la arquitectura adecuada.
- Debido a que las RNA se entrenan en lugar de programarlas, se requiere la definición de muchos parámetros antes de poder aplicar la metodología.
- Son complejas para un observador externo que desee realizar cambios.
- Tienen problemas de estimación de cálculos precisos, es decir, que funcionan bien con problemas complejos de difícil cálculo, que no requieren respuestas precisas sino buenas y rápidas.

Algunos investigadores han desarrollado trabajos en el campo de los seguros utilizando RNA en problemas como solvencia o quiebra [Illichevskiy, 2011], [Salcedo-Sanz, 2005], [Deng, 2010], el fraude [Viaene, 2002], [Subelj, 2011], [Furlan, 2011], [Masturakis, 2008] y en el cálculo o efectos de la prima de las pólizas [Yeo, 2011], [Lin, 2009].

4. SISTEMAS DE LÓGICA DIFUSA

La Lógica Difusa (LD) ("*Fuzzy Logic*", en inglés) fue introducida por Lofti Zadeh en 1965 combinando los conceptos de la lógica tradicional (Booleana) y de los conjuntos de Lukasiewicz, mediante la definición de grados de pertenencia para obtener conclusiones a partir de información vaga, ambigua, imprecisa, con ruido o incompleta. Por tanto, es una lógica multivaluada que permite valores intermedios para poder definir opiniones entre sí/no, verdadero/falso, cerca/lejos, lento/rápido, caliente/frío, etc., como una forma de presentar la información. De este modo se establecen pertenencias parciales a unos conjuntos que denominó difusos, en contraposición a los conjuntos clásicos.

Los sistemas de LD se caracterizan por:

- Soportar datos imprecisos
- Ser fácil de entender
- Ser flexible
- Basarse en el lenguaje humano
- Tener en cuenta la experiencia de expertos sobre el problema
- Poder modelar funciones no lineales de alguna complejidad
- Unificar expresiones lingüísticas con datos numéricos

Todo esto sirve para que los modelos se adapten mejor a la forma de pensar del ser humano, al permitir trabajar con expresiones utilizadas cotidianamente como: no es muy probable, es poco probable, muy probable, etc., que luego se pueden expresar de una forma numérica, a través de los conjuntos difusos.

4.1. Conjuntos difusos o borrosos

Estos surgen para aplicarlos a hechos que no tienen límites claros y poder relacionarlos con un valor lingüístico definido por una palabra o adjetivo. A diferencia de los conjuntos clásicos donde la función de pertenencia toma valores de 0 ó 1, estos se mueven en valores intermedios que definen un grado de pertenencia. Es por esto que ha surgido un creciente interés de los investigadores por los conjuntos difusos que son más flexibles y en muchos casos se ajustan mejor a la realidad. Estos pueden definirse de la siguiente manera:

$$A = \{(x, u_A(x)) / x \in U\} \quad (2.1)$$

Donde, $u_A(x)$ es la función de pertenencia de la variable x , y U es el universo, de modo que entre más se acerque $u_A(x)$ al valor 1, mayor pertenencia tendrá la variable x al conjunto, como se puede ver en la figura 2.2.

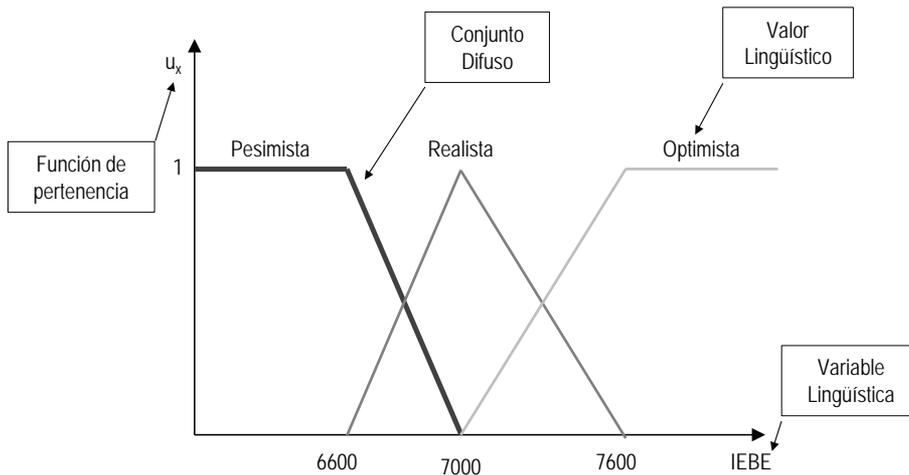


Figura 2.2. Ejemplo del Índice de Expectativa Bursátil de los Economistas (IEBE)

Un ejemplo de una aplicación de conjunto conjuntos difusos es el Índice de Expectativa Bursátil de los Economistas IEBE desarrollado por los investigadores de la Universidad de Barcelona Montserrat Casanovas Ramón y Alfonso Fernández Pascual, que consiste en una predicción del valor de cierre trimestral del Ibex35 que desde el año 2002 elabora y publica el Colegio de Economistas de Catalunya. Dicha previsión toma como inputs las opiniones de 30 expertos en Bolsa española. El objetivo es predecir el valor del índice, lo cual es muy difícil hacerlo con exactitud por la incertidumbre del mercado y la alta volatilidad existente en algunos períodos. Sin embargo el uso de conjuntos borrosos permite pronosticar no sobre un único valor, sino sobre un intervalo de valores que dependen del grado de optimismo o pesimismo del experto, de acuerdo con el análisis del mercado para la previsión. Así un valor por debajo de 7.695 sería en el peor de los escenarios pesimista y por encima de los 8.505 en el mejor de los escenarios optimista. El valor de 7.000 se ha establecido como el valor más realista, pero los valores entre 6.600 y 7.600 involucran un grado de pesimismo u optimismo dependiendo del nivel de pertenencia a un conjunto u otro.

4.2. Función de pertenencia

La función de pertenencia indica el grado en que cada elemento de un universo dado pertenece a un conjunto, de la forma $u_A: X \rightarrow [0, 1]$, donde $u_A(x) = r$, r es el grado en que x pertenece A . Para representar un conjunto difuso es válida cualquier función, aunque comúnmente las más utilizadas son las de tipo triangular y trapezoidal.

Función triangular

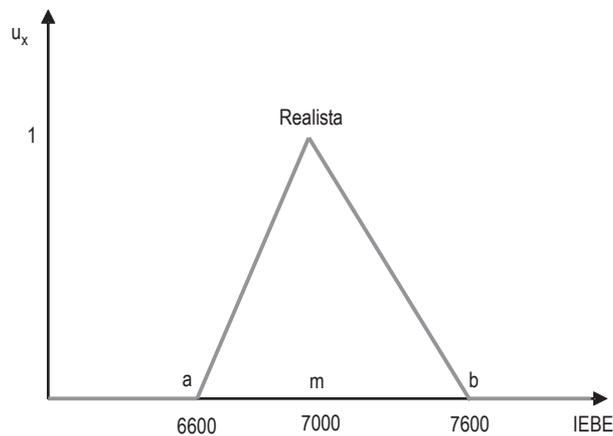


Figura 2.3 Función triangular de un conjunto difuso

$$u_x = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{para } a < x \leq m \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{para } m < x \leq b \\ 0 & \text{para } x > b \end{cases} \quad (2.2)$$

Como se puede observar en la figura 3, un número difuso triangular es representado por una triplete **a** (límite inferior), **m** (valor medio) y **b** (límite superior, donde los valores menores que **a** y mayores que **b** tienen un grado de pertenencia 0, y los que se encuentran entre **a** y **b** varían entre 0 y 1 dependiendo de

la distancia hacia el valor medio o los extremos. En el caso del ejemplo de la figura 2.2 los valores cercanos a 7.000 son los más realistas y con mayor posibilidad de ocurrencia según el experto o con una visión pesimista u optimista conforme se aproximen a 6.600 o 7.600, respectivamente.

Función trapezoidal

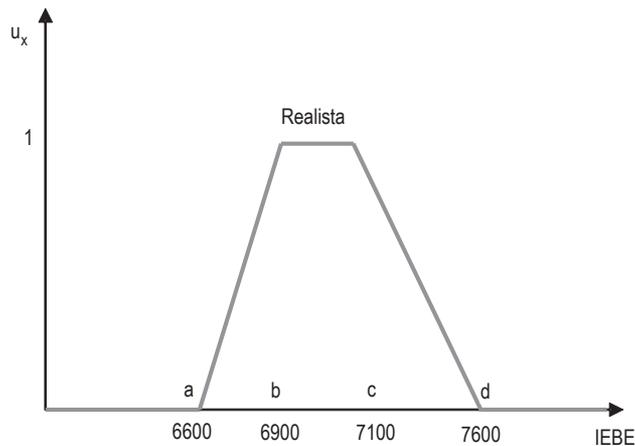


Figura 2.4. Función trapezoidal de un conjunto difuso

$$u_x = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{para } a < x \leq b \\ 1 & \text{para } b < x \leq c \\ \frac{d-x}{b-c} & \text{para } c < x \leq d \\ 0 & \text{para } x > d \end{cases} \quad (2.3)$$

Los números borrosos trapezoidales son muy similares a los triangulares, en este caso el grado de pertenencia es 0 para valores menores que a y superiores que d, 1 cuando están entre b y c, y con un grado de pertenencia entre 0 y 1 para valores entre a y b, o c y d. En el ejemplo de la figura 4 los valores en el intervalo [6.900, 7.100] son los más realistas y con mayor posibilidad de ocurrencia, pero

cuando se aproximan a los límites 6.600 o 7.600 tienden a ser más pesimistas u optimistas.

4.3. Variables lingüísticas

Se utilizan para expresar el lenguaje natural impreciso y difuso, que es la forma como los seres humanos nos expresamos, a las cuales se les asocian ciertos valores para aproximarlas a las variables numéricas. Por lo general se clasifican en dos categorías:

Tipo I: las que pueden representarse como operadores que actúan en un conjunto difuso. Ejemplo. “muy”, “más o menos”, “altamente”, “ligeramente”, “bastante”, poco, etc.

Tipo II: las que requieren una descripción de cómo actúan en los componentes del conjunto difuso. Ejemplo: “técnicamente”, “esencialmente”, “virtualmente”, “prácticamente”, etc.

4.4. Etapas de la lógica difusa

La lógica difusa se compone básicamente de las siguientes tres etapas:

- *Fusificación:* consiste en convertir valores reales en valores difusos, asignando grados de pertenencia a cada una de las variables de entrada con relación a los conjuntos difusos definidos previamente.
- *Inferencia:* es la forma como se relacionan los conjuntos difusos de entrada y salida, para representar las reglas que definirán el sistema mediante el uso de condiciones.
- *Defusificación:* después del proceso de inferencia se obtiene una conclusión difusa, o sea una variable lingüística con un grado de pertenencia, sin embargo generalmente se requiere un valor escalar que corresponda a dicho grado. Este proceso se desarrolla utilizando métodos matemáticos simples como: promedio máximo, promedio ponderado, centroide y membresía del medio del máximo.

4.5. Ventajas de la lógica difusa

- Facilidad de implementación.
- Permitir obtener buenos resultados en procesos no lineales y de difícil modelización.
- Su funcionamiento es similar al comportamiento humano.
- No requerir el conocimiento del modelo matemático que rige su funcionamiento.
- Ser una forma rápida y eficiente de resolución de problemas complejos.

4.6. Desventajas de la lógica difusa

- Los resultados no son mejores si un problema se puede resolver mediante un modelo matemático.
- Dificultad de llegar a una función de membresía y a una regla confiable sin la participación de un experto humano.
- Dificultad de interpretación de valores difusos por parte de no expertos.
- Múltiples definiciones de operadores y reglas de inferencia difusas.

En el campo de los seguros se pueden encontrar aplicaciones utilizando LD en los trabajos de [Lai, 2011], [Hongxia, 2010], [Gao *et al.*, 2009], [Aggour, 2006], [Shapiro, 2002], [Shapiro, 2007], [Stefano, 2001].

5. MÁQUINAS DE VECTORES SOPORTE

La teoría de las máquinas de soporte vectorial (MVS) fue desarrollada a principios de los años 80 por V. Vapnik para trabajar problemas de clasificación binarios. La idea es encontrar un hiperplano que separa los datos perfectamente en dos clases y luego observar de qué lado queda el vector que representa una nueva muestra desconocida previamente. En muchos casos para poder realizar

la clasificación de muestras que no son linealmente separables se introduce la utilización de "Kernels" con la idea de transformar el conjunto de datos a un espacio de dimensión superior donde este si es perfectamente separable, o bajo una cota de error aceptable. Por ejemplo, si los puntos de entrada están en \mathbb{R}^2 , entonces son mapeados a \mathbb{R}^3 y encontrar un hiperplano que los separe maximizando el margen m entre las clase como se muestra en la figura 2.5.

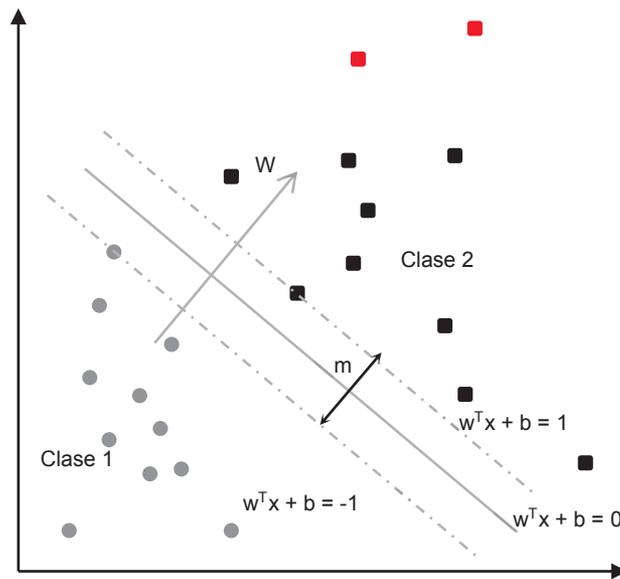


Figura 2.5. Clasificador con máquinas de soporte vectorial

Donde:

- Cada observación contiene dos datos:
 - Un vector $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i=1, \dots, l$
 - Una etiqueta $y_i \in \{+1, -1\}$
- El hiperplano separa las muestras positivas $+1$ de las negativas -1 , o sea que los puntos del hiperplano deben cumplir la ecuación $w^T x + b = 0$

- El vector W es la normal al hiperplano
- $\frac{|b|}{|w|}$ es la distancia perpendicular al hiperplano de origen
- $|w|$ es la norma del vector W
- $m = \frac{2}{|w|}$ es el margen entre los hiperplanos positivo y negativo

El objetivo de las MVS en el caso de que los datos sean linealmente separables es encontrar $w \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$, que minimicen:

$$\tau(w) = \frac{1}{2} |w|^2 \quad (2.4)$$

$$\text{Sujeto a: } y_i (w^t \cdot x_i + b) \geq 1 \quad \forall i = 1, \dots, l$$

La regla de clasificación será:

$$f(x_i) = \text{sign}(w^t \cdot x_i + b) = \begin{cases} 1 & y_i = 1 \\ -1 & y_i = -1 \end{cases} \quad (2.5)$$

Y el error de clasificación $R_{ent}(w, b)$

Sin embargo, cuando los datos no son linealmente separables no se encontrará solución factible al sistema anterior. Este problema se resuelve introduciendo nuevas variables de tamaño pequeño, quedando planteado de la siguiente manera:

Encontrar $w \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ y $\xi_i = 1, \dots, l$ que minimicen:

$$\tau(w) = \frac{1}{2} |w|^2 + C \sum_{i=1}^l \xi_i \quad (2.6)$$

$$\text{Sujeto a: } y_i (w^t \cdot x_i + b) \geq 1 - \xi_i \quad \text{y} \quad \xi_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, l$$

donde C se puede definir como parámetro de regularización.

Cuando las MVS no son lineales, las variables de entrada se proyectan a un espacio dimensional mayor al que pertenecen utilizando funciones de núcleo conocidas como Kernel.

5.1. Ventajas de las máquinas de vectores soporte

- El uso de la función de Kernel, le da una gran capacidad de generalización, incluso cuando el conjunto de entrenamiento es pequeño.
- El proceso de aprendizaje no depende necesariamente del número de atributos, haciendo que funcionen muy bien en problemas de alta dimensionalidad.
- El modelo solo depende de los datos con mayor información, existiendo pocos parámetros a ajustar.
- La estimación de los parámetros se realiza a través de la optimización de una función de coste convexa, evitando la existencia de un mínimo local.
- El modelo final se puede presentar como una combinación de pequeños vectores de entrada, denominados vectores soporte.

5.2. Desventajas de las máquinas de vectores soporte

- Si se seleccionan mal los parámetros se puede presentar un problema de aprendizaje.
- Requieren grandes necesidades de memoria y presentan una alta complejidad de cómputo en problemas de grandes dimensiones.
- No incrementan el conocimiento acerca del problema.

En los siguientes trabajos se pueden encontrar aplicaciones de MVS en el sector asegurador:

- “Factores de Riesgo y Cálculo de Primas Mediante Técnicas de Aprendizaje” Cuaderno de Mapfre No. 122, desarrollado por Carlos Bousoño y otros, donde se desarrolla una sistema de máquinas de vectores soporte para clasificar factores de riesgo.
- “Un Análisis Comparativo de una SVM y un Modelo Logit en un Problema de Clasificación de Asegurados, desarrollado por Antonio Heras y otros. En esta investigación se hace una clasificación de una cartera de asegurados del sector del automóvil utilizando MVS y se compara con el modelo Logit.

Las cuatro técnicas de inteligencia computacional explicadas en este capítulo, permiten tener una visión general de su desarrollo en la solución de problemas complejos, en los que muchas veces las soluciones con modelos matemáticos tradicionales no son apropiadas, debido a, la incertidumbre asociada al problema y la imprecisión e insuficiencia de datos, que hacen necesario recurrir a otros métodos más flexibles que involucren aprendizaje y opiniones de expertos. Cabe destacar que las técnicas de inteligencia artificial no necesariamente buscan una solución óptima, pero si satisfactoria, ya que esta en cierto modo depende del grado de pesimismo u optimismo del experto y del proceso de aprendizaje, para lo cual, el uso de operadores de agregación de medias ponderadas *OWA* (*Ordered Weighted Average*) son una gran herramienta para toma de decisiones en incertidumbre, que se pueden aplicar para definir reglas o condiciones para el tratamiento de los datos como se explica en el capítulo siguiente.

3. OPERADORES DE AGREGACIÓN OWA

Los métodos estadísticos han demostrado ser muy eficientes en el análisis y la predicción de eventos en el caso de la tarificación en seguros no vida, sus aportaciones han tenido un gran desarrollo y contribuido a una estimación de las primas de las pólizas más justas y equitativas. Sin embargo como se explicó en el capítulo anterior, en muchos casos es necesario recurrir a otras técnicas de la inteligencia computacional, en las cuales se puedan incluir las opiniones y el juicio de expertos para la toma de decisiones. Aunque existen muchas herramientas que se pueden aplicar desde la lógica difusa, para este proyecto se ha decidido utilizar los operadores de agregación *OWA (Ordered Weighted Averaging)*.

En los procesos de tarificación en compañías de seguros el cálculo de la prima pura basado en métodos estadísticos es muy efectivo, permitiendo obtener con bastante aproximación el coste por unidad. Sin embargo al establecer el valor de una póliza o prima comercial existen otros elementos que se tienen en cuenta para alcanzar los objetivos de la compañía, tales como los recargos por seguridad, gestión interna y externa, y por los beneficios esperados. Aunque en mercados altamente competitivos las compañías aseguradoras no siempre pueden elegir su nivel de beneficios. El problema en la asignación de un precio es que entran en contradicción algunos objetivos empresariales, puesto que, por un lado los técnicos prefieren precios altos que garanticen la solvencia y rentabilidad del producto y por otro, los departamentos de marketing se inclinan por precios más bajos para que los productos sean más fáciles de vender. Así mismo, en la búsqueda de un precio óptimo de las primas de seguro, se hace necesario tener en cuenta los precios con escenarios distintos de volumen de ventas.

En este caso, el problema para la toma de decisiones es llegar a un consenso que satisfaga a la mayor parte de los integrantes y preferiblemente a todos.

Se trata de un proceso de agregación de información que no se resuelve de una manera simple con un promedio, ya que pueden existir factores, criterios u opiniones que tengan mayor peso, y esto afecta el resultado final. En este contexto los operadores de agregación *OWA* ofrecen múltiples alternativas que permiten una mejor solución a este tipo de problemas, al permitir establecer múltiples reglas que puedan agrupar las opiniones de diferentes expertos. A continuación, se explican los conceptos básicos de los *OWA*, algunas familias, y las extensiones propuestas por los investigadores de este proyecto y que se aplicarán en procesos de tarificación en seguros no vida.

1. CONCEPTOS BÁSICOS DE LOS OPERADORES OWA

Definición: Un operador *OWA* se define como una función de dimensión n $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a la que se asocia un vector W de dimensión n $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$, que cumple las siguientes condiciones:

- $w_j \in [0, 1]$
- $\sum_{j=1}^n w_j = 1$
- $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j$

La esencia de los *OWA* es el reordenamiento de los elementos o argumentos, haciendo que en la agregación los a_j no estén asociados con una ponderación w_j , pero, los w_j sí estarán asociados con la posición en el orden para la agregación.

Ejemplo: Si se tiene:

$$W = [0.5, 0.3, 0.1, 0.1]$$

Entonces:

$$f(0.3, 0.2, 1, 0.6) = (0.5)(1) + (0.3)(0.6) + (0.1)(0.3) + (0.1)(0.2) = 0.73$$

Algunas de las propiedades más importantes son:

Propiedad 1. (Conmutatividad): La evaluación es igual para cualquier permutación de los elementos, es decir, si $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ son los argumentos a agregar y $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ es una permutación de los mismos, se cumple que:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = F(d_1, d_2, \dots, d_n) \quad (3.1)$$

Propiedad 2. (Monotonía): Si a_i y c_i son elementos a agregar con $c_i \leq a_i$, entonces:

$$F(c_1, c_2, \dots, c_n) \leq F(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (3.2)$$

Propiedad 3. (Delimitación): Existen unos límites superior e inferior para los operadores OWA, de modo que:

$$\text{Min}(a_i) \leq F(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \text{Max}(a_i) \quad (3.3)$$

Propiedad 4. (Idempotencia): Si $a_i = a$, para todo $i=1, 2, \dots, n$ se tiene que:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = a \quad (3.4)$$

Obteniéndose siempre el mismo resultado.

Yager también define varias medidas importantes que caracterizan un vector de pesos:

- La primera de ellas denominada dispersión o entropía, se define así:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^n w_j \ln w_j \quad (3.5)$$

De modo que si $w_j = 1$ para cualquier j , entonces $H(W) = 0$, indicando que la información utilizada es mínima y si $w_j = \frac{1}{n}$ para todo j , se tiene la máxima entropía de dispersión.

- La segunda medida está relacionada con el carácter actitudinal del decisor y se define así:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \quad (3.6)$$

En este caso se tiene que:

$\alpha = 1$, para el Criterio Optimista

$\alpha = 0$, para el Criterio Pesimista

$\alpha = 0.5$, para el Criterio de Laplace

- La tercera medida conocida como *Balance Operator* establece la preferencia hacia valores pesimistas u optimistas. Se define así:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^n \frac{(n+1-2j)}{(n-1)} w_j \quad (3.7)$$

$Bal(W) \in [0,1]$, de modo que:

$Bal(W) = 1$, para el Criterio Optimista

$Bal(W) = -1$, para el Criterio Pesimista

$Bal(W) = 0$, para el Criterio de Laplace

- La cuarta medida determina el grado de divergencia del vector W y se define así:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \quad (3.8)$$

Esta medida se utiliza cuando $H(W)$ y $\alpha(W)$ resultan incompletos, siendo $Div(W) = 0$ para el criterio optimista y pesimista.

2. OPERADORES DE AGREGACIÓN ASCENDING OWA (AOWA)

En el caso de las reordenaciones, es importante diferenciar que estas se pueden hacer de forma descendente utilizándose el *Descending OWA (DOWA) Operator* o ascendente con el *Ascending OWA (AOWA) Operator*. El *DOWA* es el

mismo *OWA* explicado anteriormente, mientras el *AOWA* se define como una función de dimensión n , $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a la que se asocia un vector W de dimensión n $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$, que cumple las siguientes condiciones:

$$w_j \in [0, 1].$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j$$

donde b_j , es el j -ésimo más pequeño de los a_i , o sea, que $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, diferenciándose así de los *OWA*, donde $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$.

Las propiedades de conmutatividad, monotonía, delimitación e idempotencia de los *OWA* explicadas anteriormente, también se cumplen para los *AOWA*.

En cuanto a las medidas que caracterizan el vector de pesos en los *AOWA* tenemos:

- En la dispersión o entropía:

$$H(W) = - \sum_{j=1}^n w_j \ln w_j \quad (3.9)$$

Da el mismo resultado del *OWA*, aunque la ordenación sea diferente.

- En el carácter actitudinal del decisor:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \quad (3.10)$$

Se tiene que:

$\alpha = 1$, para el Criterio Optimista

$\alpha = 0$, para el Criterio Pesimista

$\alpha = 0.5$, para el Criterio de Laplace

- En el *Balance Operator*:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^n \frac{(n+1-2j)}{(n-1)} w_j \quad (3.11)$$

Se tiene que:

$Bal(W) = 1$, para el Criterio Optimista

$Bal(W) = -1$, para el Criterio Pesimista

$Bal(W) = 0$, para el Criterio de Laplace

- En el grado de divergencia del vector W :

$$Div(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \quad (3.12)$$

$Div(W) = 0$, tanto para el criterio optimista como pesimista.

3. CRITERIOS DE DECISIÓN CLÁSICOS

En la teoría de la decisión existen varios criterios que se han utilizado tradicionalmente para elegir entre una u otra alternativa en situaciones de incertidumbre en las que además desconocerse el resultado final no es posible predecir su probabilidad objetiva. Algunos de estos criterios son:

- **Criterio Optimista:** En este caso el decisor considera que para cualquier decisión la situación será la más favorable, también se denomina Criterio Maximax, donde la mejor alternativa es la que ofrezca el mejor resultado posible.
- **Criterio Pesimista:** En este supuesto el decisor considera que la situación será la menos favorable, también conocido como Criterio Minimax, en el que la decisión óptima es elegir la menor pérdida entre las mayores pérdidas.
- **Criterio de Laplace:** Se basa en el principio de la razón insuficiente, ya que al no tener información sobre la probabilidad de ocurrencia de ninguno de los estados, se considera que todos tienen la misma probabilidad. De modo que para n estados se le asignaría una probabilidad de $1/n$ a cada uno.

- **Criterio de Hurwicz:** en este caso se establece una suma ponderada entre los extremos optimista y pesimista, estableciendo un punto intermedio entre los criterios Maximin y Minimax, donde el mejor resultado se pondera con coeficiente de optimismo α y el peor con un coeficiente de pesimismo $(1 - \alpha)$.

En la tabla 3.1 se puede ver la utilización de estos criterios en la agregación de operadores *OWA* y *AOWA*:

Tabla 3.1. Criterios de decisión clásicos

Criterio	OWA	AOWA
Optimista	$w_1=1$ y $w_j=0, \forall j \neq 1$ $f(a_1 \dots a_n) = \text{Max}\{a_j\}$	$w_n=1$ y $w_j=0, \forall j \neq n$ $f(a_1 \dots a_n) = \text{Max}\{a_j\}$
Pesimista	$w_n=1$ y $w_j=0, \forall j \neq n$ $f(a_1 \dots a_n) = \text{Min}\{a_j\}$	$w_1=1$ y $w_j=0, \forall j \neq 1$ $f(a_1 \dots a_n) = \text{Min}\{a_j\}$
Laplace	$w_j = \frac{1}{n}, \forall j$ $f(a_1 \dots a_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$	$w_j = \frac{1}{n}, \forall j$ $f(a_1 \dots a_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$
Hurwicz	$w_1 = \alpha, w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0, \forall j \neq 1, n$ $f(a_1 \dots a_n) = \alpha \text{Max}\{a_j\} + (1 - \alpha) \text{Min} a_j$	$w_n = \alpha, w_1 = 1 - \alpha$ y $w_j = 0, \forall j \neq 1, n$ $f(a_1 \dots a_n) = \alpha \text{Max}\{a_j\} + (1 - \alpha) \text{Min} a_j$

4. FAMILIAS DE OPERADORES OWA

Una de las principales características de los operadores *OWA* es la gran flexibilidad que para obtener para obtener el vector de pesos W que permite hacer la agregación de los argumentos. Algunas de las familias más conocidas son:

4.1. Me-OWA

Los operadores de máxima entropía ME OWA, definidos por O'Hagan (1987,1988), se calcula a través de un valor α (nivel de optimismo) que maximice la dispersión. Se define como:

$$\text{Maximizar} \left(-\sum_{j=1}^n w_j \ln w_j \right) \quad (3.13)$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (n-j)w_j &= \alpha(W) = \alpha, \quad \alpha \in [0, 1] \quad \sum_{j=1}^n w_j = 1, \\ w_j &\in [0, 1], \quad j=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

4.2. Step-OWA

Los operadores *Step OWA* o tipo escalón (Yager, 1993), proporcionan una ponderación única diferente de cero y se definen así:

$$F_{\text{step}(k)}(a_1 \dots a_n) = b_k \quad (3.14)$$

con

$$\begin{aligned} w_k &= 1 \\ w_j &= 0, \quad \forall j \neq k \end{aligned}$$

donde b_k corresponde al k -ésimo elemento más grande del conjunto de argumentos a_j , obteniéndose el máximo si $k=1$ y el mínimo si $k=n$.

4.3. Window-OWA

Los operadores *Window OWA* (Yager, 1993), se obtienen a través de m ponderaciones de idéntico valor $\frac{1}{m}$ diferentes de cero, que se definen así:

$$F_w(a_1 \dots a_n) = \frac{1}{m} \sum_{j=k}^{k+m-1} b_j \quad (3.15)$$

donde, k y m son enteros positivos, de modo que $k+m-1 \leq n$ y k es la posición donde comienza el vector no nulo, o sea que:

$$w_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < k \\ \frac{1}{m} & \text{si } k \leq j < k+m \\ 0 & \text{si } j \geq k+m \end{cases} \quad (3.16)$$

Este operador se convierte en el máximo si $m=k=1$, en el mínimo si $m=1, k=n$ y en la media aritmética si $m=n$ y $k=1$.

4.4. Olympic-OWA

Los operadores *Olympic OWA* (Yager, 1996) son otra familia que se define a través de un vector de ponderaciones así:

$$w_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j=1 \\ \frac{1}{n-2} & \text{si } 2 \leq j < n-1 \\ 0 & \text{si } j=n \end{cases} \quad (3.17)$$

En caso de $n=3$ o $n=4$, se obtiene la mediana y si $m=n-2$ y $k=2$, sería un *Window-OWA*.

4.5. S-OWA

Los operadores *S OWA* (Yager, 1994) son otra familia que se clasifica en tres tipos: *orlike*, *andlike* y generalizado, los cuales se explican a continuación.

Los operadores *S-OWA* tipo *orlike*, definen sus ponderaciones como:

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-\alpha) + \alpha & j=1 \\ \frac{1}{n}(1-\alpha) & j=2, \dots, n \end{cases} \quad (3.18)$$

Obteniéndose una agregación de la siguiente forma:

$$f_{so}(a_1, \dots, a_n) = \alpha \text{Max}(a_j) + \frac{1}{n}(1-\alpha) \sum a_i \quad (3.19)$$

De esta manera se produce un promedio ponderado entre el máximo y la media de los argumentos. Si $\alpha=0$ se obtiene la media aritmética y si $\alpha=1$ se obtiene el máximo.

Los operadores *S-OWA* tipo *andlike*, definen sus ponderaciones como:

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-\beta) & j \neq n \\ \frac{1}{n}(1-\beta) + \beta & j = n \end{cases} \quad (3.20)$$

Obteniéndose una agregación de la siguiente forma:

$$f_{sa}(a_1, \dots, a_n) = \beta \text{Min}(a_j) + \frac{1}{n}(1-\beta) \sum a_i \quad (3.21)$$

El resultado de este operador genera un promedio entre el mínimo y la media de los argumentos. Si $\beta = 0$ se obtiene la media aritmética y si $\beta=1$ se obtiene el mínimo.

El operador *S-OWA* generalizado se estima combinando las dos familias de operadores α y β de modo que:

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-(\alpha+\beta)) + \alpha & j=1 \\ \frac{1}{n}(1-(\alpha+\beta)) & j \neq 1, n \\ \frac{1}{n}(1-(\alpha+\beta)) + \beta & j = n \end{cases} \quad (3.22)$$

donde, $\alpha \in [0,1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$

Obteniéndose una agregación de la forma:

$$f_s(a_1, \dots, a_n) = \alpha \text{Max}(a_j) + \beta \text{Min}(a_j) + \frac{1}{n} (1 - (\alpha + \beta)) \sum a_j \quad (3.23)$$

Cuando $\alpha + \beta = 1$, se obtiene el criterio de Hurwicz.

4.6. EZ-OWA

En los operadores *EZ-OWA* (Yager, 2003), se pueden diferenciar dos clases:

- La primera define su vector de ponderaciones así:

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{k} & 1 \leq j \leq k \\ 0 & j > k \end{cases} \quad (3.24)$$

- La segunda define su vector de ponderaciones así:

$$w_j = \begin{cases} 0 & 1 \leq j \leq n-k \\ \frac{1}{k} & n-k < j \leq n \end{cases} \quad (3.25)$$

5. EXTENSIONES DE LOS OPERADORES OWA

Algunos autores han propuestos la utilización de operadores *OWA* que se adaptan mejor a determinadas circunstancias agregando una o más características. Las principales extensiones son:

5.1. Induced OWA Operator IOWA

Este operador propuesto por Yager y Filev (1999) se basa en hacer la reordenación no teniendo en cuenta el valor de los argumentos a_j , sino otras variables de ordenación inducida u_j , y se define como una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de dimensión n , con un vector asociado W tal que:

$$w_j \in [0,1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

con

$$F(\langle a_1, u_1 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n \rangle) = \sum_{j=1}^n w_j b_j \quad (3.26)$$

donde los b_j se ordenan teniendo en cuenta las parejas que tienen el $u_i (i \in \mathbb{N})$ más alto.

La importancia de este operador, es que se le da mayor importancia a las variables de inducción u_i , que puede corresponder a factores temporales económicos, psicológicos u otros que hace más complejo el proceso decisorio y tener en cuenta otros criterios diferentes a la actitud optimista o pesimista del decisor.

En el caso de *Ascending IOWA (AIOWA) Operator*, la ordenación de los argumentos se hace teniendo en cuenta el orden ascendente de las variables de inducción u_i , siendo su definición una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de dimensión n , con un vector asociado W tal que:

$$w_j \in [0,1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

con

$$F(\langle a_1, u_1 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n \rangle) = \sum_{j=1}^n w_j b_j \quad (3.27)$$

donde los b_j se ordenan teniendo en cuenta las parejas que tienen el $u_i (i \in \mathbb{N})$ más pequeño.

5.2. Lingüistic OWA Operator

Existen muchas situaciones, en las cuales por su complejidad es muy difícil hacer estimaciones con valores numéricos, siendo necesario el uso de variables lingüísticas para facilitar el tratamiento de un problema. Los primeros operadores de agregación *OWA* utilizando variables lingüísticas fueron propuestos por (Herrera, *et al.*, 1995; Bordogna y Pasi, 1995) y luego han aparecido otros modelos con un enfoque similar como los de Herrera y Martínez (2000) y Xu (2004)

En este caso se deben seleccionar unas variables lingüísticas que describan las diferentes situaciones que puede valorar un experto frente a una situación, que componen una escala de términos lingüísticos en un orden total. Por ejemplo, se puede expresar un conjunto S de términos lingüísticos de la siguiente forma:

$S_1 =$ Ninguno

$S_2 =$ Muy Bajo

$S_3 =$ Bajo

$S_4 =$ Medio

$S_5 =$ Alto

$S_6 =$ Muy Alto

$S_7 =$ Extremadamente Alto

Por lo general el conjunto de variables lingüísticas debe cumplir las siguientes características:

1. Un operador de negación: $\text{Neg}(S_i) = S_j$, tal que $j = g + 1 - i$.
2. El conjunto está ordenado: $S_i \leq S_j$, si y solo si $i \leq j$.
3. Operador máximo: $\text{Max}(S_i, S_j) = S_i$, si $S_i \geq S_j$.
4. Operador mínimo: $\text{Min}(S_i, S_j) = S_i$, si $S_i \leq S_j$.

La semántica de los términos, se describe con funciones de pertenencia con números borrosos en un intervalo $[0,1]$, donde los más utilizados son los trapecoidales y los triangulares.

Si se representa la semántica de las variables lingüísticas del conjunto S expuesto anteriormente con números borrosos triangulares, quedaría de la siguiente forma:

$$S_1 = \text{Ninguno} = (0, 0, 0.17)$$

$$S_2 = \text{Muy Bajo} = (0, 0.17, 0.33)$$

$$S_3 = \text{Bajo} = (0.17, 0.33, 0.5)$$

$$S_4 = \text{Medio} = (0.33, 0.5, 0.67)$$

$$S_5 = \text{Alto} = (0.5, 0.67, 0.83)$$

$$S_6 = \text{Muy Alto} = (0.67, 0.83, 1)$$

$$S_7 = \text{Extremadamente Alto} = (0.83, 1, 1)$$

Gráficamente se representa como en la figura 3.1 en la página siguiente.

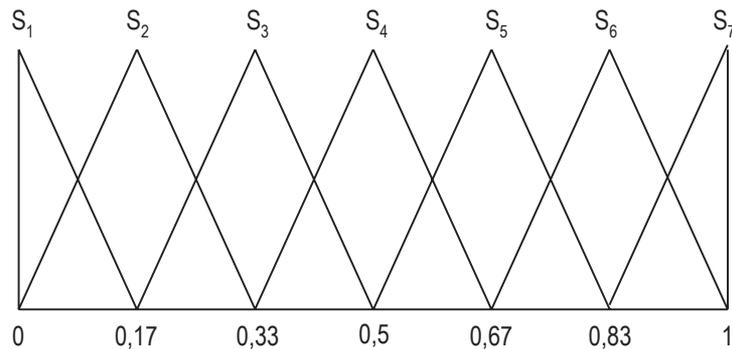


Figura 3.1. Ejemplo de una escala lingüística

A partir de la definición del conjunto S de valores lingüísticos existen diferentes modelos que se pueden utilizar con los operadores de agregación *OWA*, uno

de ellos es el de Xu (2004) en el cual se hace una extensión del conjunto S a otro conjunto de términos lingüísticos continuos $\hat{S} = \{s_\alpha \mid s_l < s_\alpha \leq s_t, \alpha \in [1, t]\}$, de forma tal, que si $s_\alpha \in S$, se denomina término lingüístico original y en los demás casos será término lingüístico virtual. Donde, si se suponen dos términos lingüísticos $s_\alpha, s_\beta \in \hat{S}$, y $u, u_1, u_2 \in [0, 1]$, es posible establecer las siguientes leyes operacionales:

- $u s_\alpha = s_{u\alpha}$
- $s_\alpha \oplus s_\beta = s_\beta \oplus s_\alpha = s_{\alpha+\beta}$
- $(s_\alpha)^u = s_{\alpha^u}$
- $s_\alpha \otimes s_\beta = s_\beta \otimes s_\alpha = s_{\alpha\beta}$

Entonces, el *LOWA Operator* se define como una función $F: \hat{S}^n \rightarrow S$, de dimensión n que tiene un vector asociado W , también de dimensión n , tal que sus componentes satisfacen que:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

con

$$F(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}) = w_1 \otimes s_{\beta_1} \oplus w_2 \otimes s_{\beta_2} \oplus \dots \oplus w_n \otimes s_{\beta_n} = S_{\bar{\alpha}} \quad (3.28)$$

siendo, $S_{\bar{\alpha}} = \sum_{j=1}^n w_j \beta_j$; s_{β_j} es el j -ésimo más grande de los s_{α_j} . A este operador también se le conoce como *Extended OWA (EOWA)*.

En el caso del *Ascending LOWA (ALOWA) Operator*, la ordenación se hace de manera ascendente, definiéndose también como una función $F: \hat{S}^n \rightarrow S$, de dimensión n que tiene un vector asociado W , también de dimensión n , tal que sus componentes satisfacen que:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

con

$$F(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}) = w_1 \otimes s_{\beta_1} \oplus w_2 \otimes s_{\beta_2} \oplus \dots \oplus w_n \otimes s_{\beta_n} = S_{\bar{A}} \quad (3.29)$$

siendo $S_{\bar{A}} = \sum_{j=1}^n w_j \beta_j$; s_{β_j} es el j -ésimo más pequeño de los s_{α_j} .

5.3. Heavy OWA Operator

Estos operadores fueron propuestos por Yager (2002), siendo su característica principal que la suma de las ponderaciones no es igual a 1, sino que se encuentra entre 1 y n . La importancia de este operador es su aplicación en situaciones que son independientes entre sí, o sea, que los resultados se pueden producir simultáneamente.

El operador *HOWA* se define como una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de dimensión n , con un vector asociado W tal que:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$1 \leq \sum_{j=1}^n w_j \leq n$$

y,

$$HOWA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j \quad (3.30)$$

donde, b_j es j -ésimo más grande los a_i .

En el caso del *Ascending HOWA (AHOWA) Operator* que corresponde a la ordenación ascendente de los argumentos se puede definir como una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de dimensión n , con un vector asociado W tal que:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$1 \leq \sum_{j=1}^n w_j \leq n$$

y,

$$AHOWA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j \quad (3.31)$$

donde, b_j es j -ésimo más pequeños los a_i

5.4. Hybrid Averaging Operator

Este operador fue propuesto por Xu [2006], donde se integra en un mismo concepto la media ponderada (WA) y la media ponderada ordenada (OWA), integrándose de esta forma las ponderaciones subjetivas con la actitud optimista o pesimista del decisor en los argumentos.

El operador HA se define como una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de dimensión n , con un vector asociado W tal que:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

con

$$HA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j \quad (3.32)$$

donde b_j es j -ésimo más grande los \hat{a}_i ($a_i = n w_i a_i$, $i=1, 2, \dots, n$), $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ corresponde al vector de ponderaciones de los a_i , con $w_i \in [0, 1]$ y la suma de todos los w_i igual a 1.

Cuando las ordenaciones se hacen forma ascendente se obtiene el *Ascending Hybrid Averaging (AHA) Operator* que se define como una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de dimensión n , con un vector asociado W tal que:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

con

$$AHA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j \quad (3.33)$$

donde, b_j es j -ésimo más pequeño los \hat{a}_i ($a_i = n w_i a_i$, $i=1, 2, \dots, n$), $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ corresponde al vector de ponderaciones de los a_i , con $w_i \in [0, 1]$ y la suma de todos los w_i igual a 1.

5.5. Uncertain OWA Operator

El *Uncertain OWA (UOWA) Operator* fué propuesto por Xu y Da (2002) para situaciones de incertidumbre en las cuales se utilizan intervalos de confianza para presentar la información. Dichos intervalos se puede presentar de diferentes formas: cuádruplos de confianza, cuando estos se componen de 4-tuplas (a, b, c, d), donde, a es el mínimo, d el máximo; b y c el intervalo de máxima presunción, tripletas de confianza, cuando b y c son iguales, e intervalos de confianza cuando b y c no son conocidos.

El *UOWA Operator* se define como una función $F : \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n , con un vector asociado $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ tal que:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

con

$$UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j^* \quad (3.34)$$

donde b_j^* es el j -ésimo más grande de los \tilde{a}_i , \tilde{a}_i ($i \in \mathbb{N}$) son los intervalos de confianzas ya sean definidos como simples, tripletas o cuádruplos.

Una de las dificultades de este método es la ordenación de los intervalos de confianza donde no siempre es claro que uno sea superior a otro, teniendo que

recurrir a otros criterios subjetivos como el valor medio, y en otros casos el de mayor extremo superior para los más optimistas, o el de mayor extremo inferior para los más pesimistas, o un valor medio ponderado $(a_1 + 4a_2 + 4a_3 + a_4) / 10$ en el caso de un cuádruplo de confianza.

En este método el *Ascending UOWA (AUOWA) Operator*, que corresponde a una ordenación ascendente se define como una función $F : \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n , con un vector asociado $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ tal que:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

con

$$AUOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j^* \quad (3.35)$$

donde b_j^* es el j -ésimo más pequeño de los \tilde{a}_i , \tilde{a}_i , $(i \in \mathbb{N})$ son los intervalos de confianzas.

5.6. Fuzzy OWA Operator

Este tipo de operador presenta unas características bastantes similares al anterior y aplicable también a situaciones de alta incertidumbre donde la información es escasa e imprecisa y se requiere la opinión de expertos, a diferencia del *UOWA*, en este caso en lugar de intervalos de confianza se utilizan números borrosos, siendo los más habituales los triangulares y los trapezoidales, los cuales son muchos más completos, ya que aparte de delimitar los valores extremos, también permiten conocer las posibilidades de valores intermedios. Dentro de los modelos que utilizan números borrosos en los operadores de agregación se pueden destacar (Merigó y Casanovas 2010; Chen *et al.*, 2011, Yager, 1998; Mitchell y Estrakh, 1998;). El *Fuzzy OWA (FOWA) Operator* se define así:

Sea Ψ un conjunto de números borrosos, entonces el operador *FOWA* de dimensión n es una función $F: \Psi^n \rightarrow \Psi$, que cuenta con un vector asociando $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, tal que:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

con

$$FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j^* \quad (3.36)$$

donde b_j^* es el j -ésimo más grande de los \tilde{a}_i , \tilde{a}_i ($i \in \mathbb{N}$) son los números borrosos, ya sea triangular, trapezoidal u otro que se adapte mejor al problema que se pretenda resolver.

De forma similar al *FOWA*, la dificultad adicional de este operador tiene que ver con la comparación de los números borrosos para su ordenación, donde no siempre se puede establecer claramente si un número es superior o inferior a otro, teniéndose que recurrir a criterios subjetivos.

El *Ascending FOWA (AFOWA) Operator* se define como una función $F: \Psi^n \rightarrow \Psi$, que cuenta con un vector asociando $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, tal que:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

con

$$AFOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j^* \quad (3.37)$$

donde b_j^* es el j -ésimo más pequeño de los \tilde{a}_i , \tilde{a}_i ($i \in \mathbb{N}$) son los números borrosos.

Una de las más importantes ventajas de los operadores *OWA* es la gran flexibilidad que tienen para incluir en ellos otros conceptos utilizados para tomar decisiones o valorar las opiniones de expertos (media, media ponderada, distancias, probabilidades, conjuntos difusos, etc.) agregando características que definen un nuevo operador *OWA* de nivel 1,2 o n, como se puede ver en los trabajos de investigación publicados (ISI *Web of Science*) por los investigadores de este proyecto (Merigó, J.M. y Casanovas, M. 2008, 2009, 2010a, 2010b, 2010c, 2010d, 2011a, 2011b, 2011c, 2011d, 2011e, 2011f, 2011g, 2012a, 2012b, 2012c, Merigó, J.M. y Casanovas, et. al., 2010e, 2010f, 2010g) y en los cuatro artículos que se presentan en los capítulos siguientes de este trabajo.

PARTE SEGUNDA

APORTACIONES CIENTÍFICAS

Los autores de este proyecto vienen trabajando en la línea de investigación de los operadores de agregación de información OWA desde hace varios con excelentes resultados que se evidencia con 100 publicaciones de ponencias de congreso y artículos de revista en la ISI Web of Science y 1.157 citaciones según reporte de mayo de 2014. El propósito de este proyecto ha sido continuar fortaleciendo estas investigaciones por su alta aplicabilidad en diferentes campos de la ciencia y en particular en este trabajo en procesos de tarificación de seguros no vida. Se presentan cuatro artículos de investigaciones científicas que corresponden a nuevas aportaciones científicas a la inteligencia computacional. Estos trabajos corresponden a los siguientes cuatro capítulos:

Artículo 1. El Operador OWA Probabilístico Generalizado Difuso y su Aplicación en la Toma de Decisiones de Grupo (Enviado a Journal Intelligent & Fuzzy Systems). Realizado por José Maria Merigó Lindahl y Montserrat Casanovas Ramón.

Artículo 2. La Media Ponderada Probabilística Generalizada Incierta y su Aplicación en la Teoría de Expertones (Enviado a European Journal Of Operational Research). Realizado por José Maria Merigó Lindahl y Montserrat Casanovas Ramón.

Artículo 3. Decisiones de Grupo Lingüísticas con Operadores de Agregación Inducidos e Información Probabilística (Enviado a Applied Soft Computing). Realizado por José Maria Merigó Lindahl, Montserrat Casanovas Ramón y Daniel Palacios-Marqués.

Artículo 4. Toma de Decisiones en Procesos de Tarificación de Seguros No Vida utilizando Lógica Difusa y Operadores OWA (Enviado a Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research ECECSR). Realizado por Montserrat Casanovas Ramón, José Maria Merigó Lindahl y Agustín Torres Martínez.

4. EL OPERADOR OWA PROBABILÍSTICO GENERALIZADO DIFUSO Y SU APLICACIÓN EN LAS DECISIONES DE GRUPO

1. INTRODUCCIÓN

La toma de decisiones es un proceso muy común en nuestra vida, puesto que las personas siempre están optando por una u otra alternativa para solucionar problemas. Cuando se estudia este proceso se puede utilizar una gran variedad de técnicas matemáticas y estadísticas, siendo una herramienta muy útil para hacerlo los operadores de agregación, de los cuales se pueden encontrar muchos en la literatura (Beliakov *et al.*, 2007; Calvo *et al.*, 2002; Yager y Kacprzyk, 1997; Yager *et al.*, 2011) como es el caso de la agregación probabilística, basada en el uso de probabilidades en el análisis y la media ponderada ordenada (*OWA*) (Yager, 1988), la cual proporciona una familia parametrizada de operadores entre el mínimo y el máximo.

Por lo general, cuando se utiliza el operador *OWA* se supone que la información es claramente conocida. Sin embargo, en situaciones del mundo real este no suele ser el caso, ya que dicha información puede ser vaga o imprecisa, siendo necesario utilizar otro enfoque, como el uso de los números borrosos (NB) que consideran el mínimo y el máximo rendimiento y la posibilidad de que se produzcan los valores internos en un intervalo difuso. Así, al extender el operador *OWA* a un ambiente difuso se obtiene el Fuzzy *OWA* (*FOWA*) Operator, el cual desde su introducción ha sido estudiado por muchos autores (Chen y Chen, 2003; Liu, 2011; Merigó y Casanovas, 2010a, 2010b; Wang y Luo, 2009; Wei, 2011; Wei *et al.*, 2010; Xu de 2009, Zhao *et al.*, 2010).

Otra extensión interesante del operador *OWA* es el *Generalized OWA* (*GOWA*) Operator (Yager, 2004), en el cual se utilizan medias generalizadas en el análisis y mediante el uso de información difusa forma el *Fuzzy Generalized OWA*

(*FGOWA*) Operator (Merigó y Casanovas, 2010b), incluyendo el *FOWA* Operator como un caso especial y muchos otros más, tales como el *Quadratic FOWA* (*FOWQA*) Operator y el *Fuzzy Generalized Average* (*FGA*). El operador *FGOWA* puede ampliarse mediante el uso de medias cuasi-aritméticas para obtener el *Fuzzy Quasi-Arithmetic OWA* (*Quasi-FOWA*) Operator.

Otro caso interesante es el *Probabilistic OWA* (*POWA*) Operator, en el que se unifica la probabilidad y el operador *OWA* en la misma formulación, teniendo en cuenta el grado de importancia que cada concepto tiene en la agregación, siendo importante resaltar que las probabilidades y el uso de operadores *OWA* en la misma fórmula ya ha sido considerado por otros autores, en especial, el concepto de probabilidades inmediatas (Engemann *et al.*, 1996; Merigo, 2010; Yager, 1999. Yager *et al.*, 1995). Sin embargo, ninguno de los modelos anteriores considera el grado de importancia de ambos conceptos en el análisis.

El objetivo de este trabajo es presentar un marco más general que sea capaz de hacer frente a entornos inciertos que puedan evaluarse con información difusa introduciendo el *Fuzzy Generalized Probabilistic OWA* (*FGPOWA*) Operator, en el que se unifica el *FOWA* y la agregación probabilística difusa (*FPA*) en la misma formulación, teniendo en cuenta el grado de importancia que cada concepto tiene en el análisis. Por otro lado, se incluye una amplia gama de casos particulares como los operadores, *FPOWA*, *FOWA*, *FPA*, *FPOWA*, *Quadratic FPOWA* (*FPOWQA*), *Fuzzy Generalized Probabilistic Aggregation* (*FGPA*) y *FGOWA*. Este método también se puede ampliar mediante el uso de medias cuasi-aritméticas para obtener el *Fuzzy Quasi-Arithmetic POWA* (*Quasi-FPOWA*) Operator y generalizar a una amplia gama de operadores de agregación como el *FGPOWA* Operator entre otros.

Se estudia la aplicación de este nuevo método observándose que puede ser muy amplia, debido a que los estudios anteriores que utilizan la probabilidad o el operador *OWA* pueden ser revisados y extendidos como casos especiales de este nuevo modelo. Por lo tanto, siempre se puede tomar el modelo para el caso especial que se quiere considerar. La aplicación se enfoca a un problema relativo a la selección de estrategias de decisión de grupo, utilizando el *Multi-Person FGPOWA* (*MP-FGPOWA*) Operator, con el que se puede tratar la opinión de varias

personas (o expertos) en el análisis, incluyendo una amplia gama de casos particulares como el *Multi-Person FGOWA Operator* y el *Multi-Person FPOWA Operator*.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

En la sección 2 se revisan brevemente algunos preliminares básicos, la sección 3 introduce el *FGPOWA Operator*, la sección 4 el *Quasi-FPOWA Operator*, la sección 5 presenta una aplicación en la toma de decisiones multi-persona, la sección 6 un ejemplo ilustrativo y en la sección 7 se resumen las principales conclusiones del artículo.

2. PRELIMINARES

En esta sección se revisan brevemente algunos conceptos básicos sobre los números borrosos y los operadores *POWA*, *FOWA* y *FGOWA*.

2.1. Números borrosos

Los números borrosos NBs (Chang y Zadeh, 1972; Zadeh, 1975) han sido estudiados y aplicados por muchos autores (Dubois y Prade, 1980, Kaufmann y Gupta, 1985). Su principal ventaja es que se puede representar de una manera más completa la información, ya que se puede tener en cuenta el mínimo, el máximo y valores intermedios.

Definición 4.1. Sea $\mathbb{R} [-\infty, \infty]$, el conjunto de todos los números reales. El número borroso A es un subconjunto difuso (Zadeh, 1965) de \mathbb{R} con función de pertenencia $m: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ si cumple las siguientes condiciones:

- Normalidad: Existe al menos un número $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que $m(a_0) = 1$.
- Convexidad: $m(t)$ es no decreciente en $[-\infty, a_0]$ y no creciente en $[a_0, \infty]$.

Los NB se pueden considerar como una generalización de los números intervalo. En la literatura se encuentra una amplia gama de número borrosos

como: NB triangulares (NBT), NB trapezoidales (NBTP), NB intervalo, NB intuicionistas, NB generalizados, NB tipo 2 y estructuras más complejas.

Por ejemplo, un NB trapezoidal (NBTP) A de un universo de discurso R, puede ser caracterizado por una función de pertenencia trapezoidal $\mathbf{A} = (\underline{a}, \bar{a})$ de modo que:

$$\begin{aligned}\underline{a}(\alpha) &= a_1 + \alpha(a_2 - a_1), \\ \bar{a}(\alpha) &= a_4 - \alpha(a_4 - a_3).\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $\alpha \in [0, 1]$ y es representado por $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, siendo $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, valores reales, teniendo en cuenta que si $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, el NB es un valor exacto, y si $a_2 = a_3$, este representa un NB triangular (NBT). Nótese que un NBT puede ser parametrizado por $\{a_1, a_2, a_4\}$.

El NBTP puede ser representado de la siguiente forma:

$$m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = [a_2, a_3], \\ \frac{t - a_1}{a_2 - a_1} & \text{si } t \in [a_1, a_2], \\ \frac{a_4 - t}{a_4 - a_3} & \text{si } t \in [a_3, a_4], \\ 0 & \text{otros,} \end{cases}\tag{4.2}$$

donde $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ y $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. Debe tenerse en cuenta en este trabajo, principalmente en el desarrollo del ejemplo ilustrativo que el NBTP se simboliza como $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ y también se representan todos los NB en forma general como \tilde{a} . Por lo tanto, al proporcionar esta abreviatura se pueden presentar todos los NB en la misma formulación.

A continuación se presentan las operaciones aritméticas con NB. Sean A y B dos NBT, donde $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, tal que:

1. $A + B = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$.
2. $A - B = \{a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1\}$.
3. $A \times k = \{k \times a_1, k \times a_2, k \times a_3\}$; para $k > 0$.

Entre la amplia gama de métodos existentes en la literatura para ordenar NB se recomienda el uso de los métodos comentados por Merigo (2008), como el uso del valor encontrado en el más alto nivel de membresía ($\alpha = 1$), y si se trata de un intervalo la media de los extremos, teniendo en cuenta que se podrían utilizar otras operaciones y métodos de clasificación (Dubois y Prade, 1980, Kaufmann y Gupta, 1985; Merigó, 2008), pero en este trabajo se utilizan las mencionadas anteriormente.

2.2. El Probabilistic OWA Operator

El *POWA Operator* es un operador de agregación que proporciona una familia parametrizada de operadores de agregación que varía entre el mínimo y el máximo, unificando probabilidades y *OWA* en la misma formulación, de acuerdo con el grado de importancia que cada concepto tiene en la agregación (Merigó, 2008). Se define de la siguiente manera:

Definición 4.2. Un operador *POWA* de dimensión n , es una función *POWA*: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que tiene un vector de ponderación asociado W de dimensión n , tal que $w_j \in [0, 1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, de acuerdo con la siguiente formula:

$$POWA(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n \hat{p}_j b_j, \quad (4.3)$$

donde, b_j es el j -ésimo más grande de los a_i . Cada argumento a_i tiene un vector de probabilidad asociado p_i , con $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{p}_j = \beta w_j + (1 - \beta) p_j$ con $b \in [0, 1]$ y p_j es la probabilidad p_i ordenada de acuerdo con el j -ésimo valor más grande de los a_i .

2.3. El Fuzzy OWA Operator

El *FOWA Operator* es una extensión del operador *OWA* que utiliza información incierta, representada en forma de NB, el cual suministra una familia parame-

trizada de operadores de agregación que incluye los criterios máximo, mínimo y promedio difuso entre otros. Se define de la siguiente manera:

Definición 4.3. Sea Ψ un conjunto de NB. Un operador *FOWA* de dimensión n es una función *FOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ que tiene un vector de ponderación asociado W de dimensión n con $w_j \in [0, 1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, de modo que:

$$FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j, \quad (4.4)$$

donde b_j es el j -ésimo más grande de los \tilde{a}_i , y los \tilde{a}_i son NB.

Se debe tener en cuenta que a veces, no está claro cómo reordenar los argumentos. Por tanto, es necesario establecer un criterio para ordenar los NB. A efectos de simplicidad, se recomienda seleccionar el NB con el valor más alto de su nivel de afiliación, generalmente cuando $a = 1$, considerando que para el nivel de membresía $a = 1$ en un intervalo se puede calcular el promedio del intervalo.

El *FOWA* Operator tiene propiedades similares que el operador *OWA*, como la distinción entre el operador descendente *FOWA* (*DFOWA*) y el operador *FOWA* ascendente (*AFOWA*) entre otras.

2.4. El Fuzzy Generalized OWA Operator

El Fuzzy Generalized *OWA* (*FGOWA*) Operator es una extensión del *GOWA* Operator que utiliza información incierta en la agregación representado en forma de NBs. La razón de utilizar este operador es que a veces los factores de incertidumbre que afectan a nuestras decisiones no se conocen con claridad y para poder evaluar el problema se requiere utilizar NB, con el fin de tener en cuenta los diferentes resultados inciertos que podrían ocurrir en el futuro. Se puede definir de la siguiente manera:

Definición 4.4. Sea Y un conjunto de NB. Un *FGOWA Operator* de dimensión n es una función *FGOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$, que cuenta con un vector de ponderación asociado

W de dimensión n , de forma tal que la suma de las ponderaciones es igual a 1 y $w_j \in [0,1]$, Entonces:

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^n w_j b_j^\lambda \right)^{1/\lambda}, \quad (4.5)$$

donde b_j es el j -ésimo más grande de los \tilde{a}_i , los argumentos \tilde{a}_i son NB y λ es un parámetro tal que, $\lambda \in [-\infty, \infty]$.

Téngase en cuenta que si $\lambda = 1$, se obtiene el *FOWA Operator*, y si $\lambda = 2$, el *Quadratic FOWA (FOWQA) Operator*.

El *FGOWA Operator* cumple propiedades similares al *GOWA Operator* (Yager, 2004).

3. EL OPERADOR OWA PROBABILÍSTICO GENERALIZADO

En esta sección se introduce el *FGPOWA Operator* y se estudian algunas de sus principales propiedades y casos particulares.

3.1. Principales conceptos

El *Fuzzy Generalized Probabilistic OWA (FGPOWA) Operator* es un operador de agregación que proporciona una formulación unificada entre la probabilidad y el operador *OWA* en un entorno incierto que puede ser evaluado con NBs. También utiliza medias generalizadas proporcionando un marco general que incluye una amplia gama de casos particulares. Se puede definir de la siguiente manera:

Definición 4.5. Sea Ψ un conjunto de NB. Un *FGPOWA Operator* de dimensión n es una función *FGPOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ que tiene un vector de ponderación asociado W de dimensión n con $\tilde{w}_j \in [0, 1]$ y $\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j = 1$, y un vector probabilístico P de dimensión n con $\tilde{p}_i \in [0, 1]$ y $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1$, tal que:

$$FGPOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \left(\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j b_j^\lambda \right)^{1/\lambda} + (1 - \tilde{\beta}) \left(\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{a}_i^\delta \right)^{1/\delta}, \quad (4.6)$$

donde b_j es el j -ésimo más grande de los argumentos \tilde{a}_i , los \tilde{a}_i son NB, $\tilde{\beta} \in [0, 1]$, y λ es un parámetro, tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Se debe considerar que diferentes tipos de NB se podrían utilizar en la agregación, incluyendo NBT, NBTps y estructuras más complejas. A menudo, cuando se trata con NB en el *FGPOWA Operator* no está claro cuál es mayor, por lo tanto es necesario establecer un criterio para clasificarlos. Para simplificar se recomienda en primer lugar analizar si existe un orden entre los NB, es decir, si el valor más bajo de un intervalo es mayor que el valor más alto de otro intervalo: $A = (a_1, a_2, a_3)$ es estrictamente superior a $C = (c_1, c_2, c_3)$, si $a_1 > c_3$. Nótese que en este caso se puede garantizar al 100% que $A > C$, de otra manera se selecciona el NB con su nivel de membresía más alto, por lo general, cuando $a = 1$, teniendo en cuenta que si el nivel de membresía $a = 1$ es un intervalo, se puede calcular el promedio del intervalo.

También es posible distinguir entre el *FGPOWA* descendente (*DFGPOWA*) y el *FGPOWA* ascendente (*AFGPOWA*) mediante el uso de $w_j = w_{n-j+1}^*$, donde w_j es la j -ésima ponderación del *DFGPOWA* y w_{n-j+1}^* la j -ésima ponderación del operador *AFGPOWA*. Nótese que esta reordenación es la agregación del *OWA*. Sin embargo, es posible considerar un proceso de reordenación más general, mediante el uso de $\hat{p}_j = \hat{p}_{n-j+1}$. En este caso se utiliza ordenaciones descendentes y ascendentes en el *FOWA* y la agregación probabilística difusa (*FPA*) al mismo tiempo.

Otra transformación interesante (Yager, 1993) puede ser estudiada mediante el uso de $w_i^* = (1 + w_i) / (m - 1)$. Además se pueden analizar las situaciones con medidas de optimismo. En este caso se asume que $w_i \geq w_j$, para $i < j$. También se puede considerar una caso más intenso conocido como medida de optimismo extensiva, donde $w_i \geq w_j$, para $i < j$, sin dejar de lado el caso contrario que se refiere a $w_i \leq w_j$, para $i < j$, y su correspondiente medida extensiva $w_i < w_j$, para $i < j$. El *FGPOWA Operator* es monótono, delimitado e idempotente.

Adicionalmente, si las ponderaciones de las probabilidades y los *OWA* son también difusas, entonces se tiene que establecer un método para tratar con estos pesos. En esta situación es muy común que $W = \sum_{j=1}^n \tilde{w}_j \neq 1$ y

$P = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \neq 1$. Por tanto, un método muy útil para hacer frente a estas situaciones es el uso de:

$$FGPOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \frac{\tilde{\beta}}{W} \left(\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j b_j^\lambda \right)^{1/\lambda} + \frac{(1-\tilde{\beta})}{P} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{a}_i^\delta \right)^{1/\delta} \quad (4.7)$$

Una cuestión interesante son las medidas para la caracterización del vector de pesos ya que, si se sigue una metodología similar a la que ha sido desarrollada para el operador *OWA* (Merigó y Casanovas, 2010b; Yager, 1988), se puede formular la medida *orness* (carácter de actitud) y la entropía de la dispersión. La medida *orness* del operador *FPOWA* se formula de la siguiente manera:

$$\alpha(\hat{P}) = \tilde{\beta} \left(\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^\lambda \right)^{1/\lambda} + (1-\tilde{\beta}) \left(\sum_{j=1}^n \tilde{p}_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^\lambda \right)^{1/\lambda}. \quad (4.8)$$

Donde \tilde{p}_i representa los pesos probabilísticos reordenados de acuerdo a los valores de los argumentos b_j . Cabe destacar que si $\tilde{\beta} = 1$, se obtiene la medida *orness* del *FGOWA Operator* y si $\tilde{\beta} = 0$, la medida *orness* de *Fuzzy Generalized Probabilistic Aggregation (FGPA)*.

La entropía de la dispersión (Yager, 1998) mide la cantidad de información que se utiliza en la agregación. Para el *FGPOWA Operator* se define de la siguiente manera:

$$H(\hat{P}) = - \left(\tilde{\beta} \sum_{j=1}^n \tilde{w}_j \ln(\tilde{w}_j) + (1-\tilde{\beta}) \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \ln(\tilde{p}_i) \right) \quad (4.9)$$

Teniendo en cuenta que \tilde{p}_i es la i -ésima ponderación de la agregación *FPA* y como se puede ver si $\tilde{\beta} = 1$ se obtiene la entropía de la dispersión del *FGOWA Operator*. Y si $\tilde{\beta} = 0$, se extiende a la entropía clásica de Shannon para usarla en probabilidades generalizadas difusas (Shannon, 1948).

3.2. Familias de operadores FGPOWA

Otro tema interesante es el análisis de las diferentes familias de operadores *FGPOWA*, mediante el estudio de casos particulares en el coeficiente b el parámetro λ y δ y en el vector de ponderación W . Si se analiza el coeficiente b obtenemos lo siguiente:

- Si $b = 1$, se obtiene el *FGOWA Operator*
- Si $b = 0$, se obtiene el *Fuzzy Generalized Probabilistic Aggregation (FGPA)*

Cuanto más se acerca el valor de b a 1 más importancia se le da al *FGOWA Operator* y viceversa. Si se analizan diferentes valores de los parámetros λ y δ se obtienen otro grupo de casos particulares, tales como los operadores: *FPOWA*, *Geometric FPOWA (FPOWGA)*, *Harmonic FPOWA (FPOWHA)*, *Quadratic FPOWA (FPOWQA)*.

- El *FPOWA Operator*: Cuando $\lambda = 1$
- El *Geometric FPOWA (FPOWGA) Operator*: Cuando $\lambda \rightarrow 0$
- El *Harmonic FPOWA (FPOWHA) Operator*: Cuando $\lambda = -1$
- El *Quadratic FPOWA (FPOWQA) Operator*: Cuando $\lambda = 2$
- El máximo difuso: Cuando $\lambda \rightarrow \infty$
- El mínimo difuso: Cuando $\lambda \rightarrow -\infty$

Por otra parte es posible considerar otras familias mediante el uso de diferentes valores en los parámetros λ y δ . Por ejemplo, se pueden formar los siguientes operadores de agregación:

- Si $\lambda = 2$ y $\delta = 1$, se obtiene el *Fuzzy Probabilistic Ordered Weighted Quadratic Averaging (FPOWQA) Operator*. Es decir,

$$FGPOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \left(\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j b_j^2 \right)^{1/2} + (1 - \tilde{\beta}) \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{a}_i \quad (4.10)$$

- Si $\lambda = 1$ y $\delta = 2$, se obtiene el *Fuzzy Probabilistic Quadratic Ordered Weighted Averaging (FPQOWA) Operator*. Es decir,

$$FGPOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \sum_{j=1}^n \tilde{w}_j b_j + (1 - \tilde{\beta}) \left(\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{a}_i^2 \right)^{1/2} \quad (4.11)$$

- Si $\lambda = 1$ y $\delta = 3$, se obtiene el *Fuzzy Probabilistic Cubic Ordered Weighted Averaging* (FPCOWA) Operator. Es decir,

$$FGPOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \sum_{j=1}^n \tilde{w}_j b_j + (1 - \tilde{\beta}) \left(\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{a}_i^3 \right)^{1/3} \quad (4.12)$$

- Si $\lambda = 2$ y $\delta = 3$, se obtiene el *Fuzzy Probabilistic Quadratic Ordered Weighted Cubic Averaging* (FPQOWCA) Operator. Es decir,

$$FGPOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \left(\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j b_j^2 \right)^{1/2} + (1 - \tilde{\beta}) \left(\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{a}_i^3 \right)^{1/3} \quad (4.13)$$

Y si se observa el vector de ponderación W , se obtiene por ejemplo lo siguiente:

- El *Maximum Fuzzy Probabilistic Aggregation* (Max-FPA) ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$)
- El *Minimum Fuzzy Probabilistic Aggregation* (Min-FPA) ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$)
- El *Fuzzy Generalized Mean* (FGM) ($w_j = 1/n$, y $p_i = 1/n$, para todo \tilde{a}_i)
- El *Arithmetic FGOWA* ($p_i = 1/n$, para todo \tilde{a}_i)
- El *Arithmetic FGPA* ($w_j = 1/n$, para todo \tilde{a}_j)
- El *Step-FGPOWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$)
- El *Centered-FGPOWA* (si es simétrico, desciende fuertemente desde el centro hasta el máximo y el mínimo inclusive)
- El *General Olympic-FGPOWA Operator* ($w_j = 0$ para $j = 1, 2, \dots, k, n, n - 1, \dots, n - k + 1$; y para el resto $w_j^* = 1/(n - 2k)$, donde $k < n/2$).

Obsérvese que otras familias de operadores *FGPOWA* podrían ser estudiadas Merigó [2008], Yager [1993] y Yager et al. [2011].

4. EL OPERADOR CUASI-FPOWA

El operador *FGPOWA* puede ser además generalizado a través de medias cuasi-aritméticas (Beliakov *et al.*, 2007; Fodor *et al.*, 1995; Merigó y Casanovas, 2011a, 2011b; Merigó y Gil-Lafuente, 2009). Por lo tanto se obtiene el Quasi-FPOWA Operator, definido de la siguiente manera:

Definición 4.6. Sea Ψ un conjunto de NBs. Un *Quasi-FPOWA Operator* de dimensión n es una función *QFPOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ que cuenta con un vector de ponderación W de dimensión n , con $\tilde{w}_j \in [0, 1]$ y $\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j = 1$, y un vector probabilístico P de dimensión n , con $\tilde{p}_i \in [0, 1]$ y $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1$, tal que:

$$QFPOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} g^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j g(b_j) \right) + (1 - \tilde{\beta}) h^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i h(\tilde{a}_i) \right), \quad (4.14)$$

donde b_j es el j -ésimo más grande a_i , los \tilde{a}_i son NBs, $b \in [0, 1]$, siendo $g(b)$ y $h(a)$ funciones monótonas estrictamente continuas.

Se debe tener en cuenta que si $g(b) = b^\lambda$ y $h(\tilde{a}) = \tilde{a}^\delta$, entonces, el *Quasi-FPOWA Operator* se convierte en el *FGPOWA Operator*.

5. DECISIONES DE GRUPO CON EL OPERADOR FGPOWA

En esta sección se analiza el uso del *FGPOWA Operator* en problemas de decisiones multi-persona difusos, enfocándose en la selección de estrategias generales de la empresa, ya que a medida que estas decisiones son más complejas y relevantes se requiere la opinión de diferentes expertos para evaluar el problema. Por lo tanto, mediante el uso del análisis multipersona se puede valorar la información de una manera más eficiente

El procedimiento para seleccionar estrategias generales con el *GPOWA Operator* en decisiones multi-persona difusas se describe a continuación:

Paso 1. Sea $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ un conjunto finito de alternativas, $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, un conjunto de estados de la naturaleza (o atributos), que forman la matriz de pagos

$(\tilde{a}_{hi})_{m \times n}$. Sea $E = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ un conjunto finito de decisores. Sea $U = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ el vector de ponderación definido por los decisores, tal que, $\sum_{k=1}^p \tilde{u}_k = 1$ y $\tilde{u}_k \in [0, 1]$. Cada decisor proporciona su propia matriz de pagos $(\tilde{a}_{hi}^{(k)})_{m \times n}$.

Paso 2. Se calcula el vector de ponderación $\hat{P} = \tilde{\beta} \times \tilde{W} + (1 - \tilde{\beta}) \times \tilde{P}$ para ser utilizado en el *FGPOWA Operator*. Teniendo en cuenta que $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ de modo que, $\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j = 1$ y $\tilde{w}_j \in [0, 1]$ y $P = (p_1, p_2, \dots, p_q)$ tal que $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1$ y $\tilde{p}_i \in [0, 1]$.

Paso 3. Se agrega la información de los decisores E utilizando el vector de ponderación U . En este ejemplo, usaremos *Fuzzy Weighted Average (FWA)*. El resultado obtenido es la matriz de pagos colectiva $(\tilde{a}_{hi})_{m \times n}$, entonces, $\tilde{a}_{hi} = \sum_{k=1}^p \tilde{u}_k \tilde{a}_{hi}^k$. Es importante tener en cuenta que se pueden utilizar diferentes tipos de operadores de agregación, en lugar de *FWA* para tratar esta información con operadores *FGPOWA* en caso de que se tenga alguna información probabilística para ponderar la información.

Paso 4. Se agregan los resultados usando el *FGPOWA Operator* explicado en la fórmula (4.6), considerando diferentes familias de operadores *FGPOWA* como se describe en la sección 3.

Paso 5. Se adoptan las decisiones de acuerdo con los resultados encontrados en los pasos anteriores, seleccionando la alternativa que provee los mejores resultados y estableciendo una ordenación de las mismas.

El proceso de decisión multi-persona difuso anterior se puede resumir usando el siguiente operador de agregación denominado *Multi-Person-FGPOWA (MP-FGPOWA) Operator*.

Definición 4.7. Un operador *MP-FGPOWA* es una función *MP-FGPOWA*: $\Psi^n \times \Psi^p \rightarrow Y$ que cuenta con un vector de ponderación U de dimensión p con $\sum_{k=1}^p \tilde{u}_k = 1$ y $\tilde{u}_k \in [0, 1]$ y un vector de ponderación W de dimensión n con $\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j = 1$ y $\tilde{w}_j \in [0, 1]$, tal que:

$$MP-FGPOWA\left(\left(\tilde{a}_1^1, \dots, \tilde{a}_1^p\right), \dots, \left(\tilde{a}_n^1, \dots, \tilde{a}_n^p\right)\right) = \sum_{j=1}^n \hat{p}_j b_j, \quad (4,15)$$

donde b_j es el j -ésimo más grande de los \tilde{a}_j . Cada argumento \tilde{a}_j cuenta con una probabilidad asociada \tilde{p}_i con $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1$ y $\tilde{p}_i \in [0, 1]$, $\hat{p}_j = \tilde{\beta} \tilde{w}_j + (1 - \tilde{\beta}) \tilde{p}_j$

con $\tilde{\beta} \in [0, 1]$ y \tilde{p}_j es la probabilidad \tilde{p}_i ordenados de acuerdo a b_j , es decir, de acuerdo al j -ésimo más grande de los \tilde{a}_i , $\tilde{a}_i = \sum_{k=j}^p \tilde{u}_k \tilde{a}_i^k$, \tilde{a}_i^k es el argumento variable propuesto por cada persona o experto.

Se debe tener en cuenta que el operador *MP-FGPOWA* tiene propiedades similares a las explicadas en la sección 3, tales como la distinción entre ordenaciones descendentes y ascendente, entre otras.

El operador *MP-FGPOWA* incluye una amplia gama de casos particulares, siguiendo la metodología explicada en esta sección. Por tanto, incluye:

- El *Multi-Person-FOWA (MP-FOWA) Operator*
- El *Multi-Person-Fuzzy Arithmetic Mean (MP-FAM) Operator*
- El *Multi-Person-Fuzzy Generalized Probabilistic Aggregation (MP-FGPA)*
- El *Multi-Person-FGOWA (MP-FGOWA)*
- El *Multi-Person-Fuzzy Generalized Mean (MP-FGM)*
- El *Multi-Person-Arithmetic-FGPA (MP-AFGPA) Operator*
- El *Multi-Person-Arithmetic-FGOWA (MP-AFGOWA) Operator*

También es posible considerar otros tipos de operadores de agregación para tratar las opiniones de expertos, aunque en la definición 4.6 asumimos que estas opiniones se agregan mediante el uso de operadores *WA*.

6. EJEMPLO ILUSTRATIVO

A continuación se presenta un ejemplo numérico del nuevo enfoque, en un problema de toma de decisiones multipersona difuso respecto a la selección de estrategias. Se refiere a un problema económico relacionado con la estrategia general de la empresa para el próximo año, teniendo en cuenta que una gran cantidad de otros tipos de problemas de toma de decisiones se encuentran en la literatura (Figueira *et al.*, 2005; Merigó y Casanovas, 2009; Merigó y Gil-Lafuente, 2010; Yager, 2009), siguiéndose el siguiente proceso:

Paso 1. Se supone una empresa que está planeando su estrategia general para el próximo año y considera cuatro posibles estrategias:

- A_1 = Expandirse al mercado asiático
- A_2 = Expandirse al mercado suramericano
- A_3 = Expandirse al mercado africano
- A_4 = No hacer ninguna expansión

Para evaluar estas estrategias la compañía ha elegido tres expertos independientes. Estos expertos consideran que uno de los factores clave es la situación económica para el próximo periodo. Ellos consideran cinco posibles escenarios que podrían suceder en el futuro:

- S_1 = Muy mala situación económica
- S_2 = Mala situación económica
- S_3 = Regular situación económica
- S_4 = Buena situación económica
- S_5 = Muy buena situación económica

Cada experto tiene una opinión diferente en relación a los otros dos. Los resultados de las estrategias disponibles, dependiendo del estado de la naturaleza S_i y la alternativa A_k que el decisor elige, se muestran en las tablas 4.1, 4.2 y 4.3.

Tabla 4.1. Experto 1

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	(30,40,50)	(50,60,70)	(60,70,80)	(80,90,100)	(90,100,110)
A_2	(30,40,50)	(20,30,40)	(60,70,80)	(50,60,70)	(70,80,90)
A_3	(40,50,60)	(60,70,80)	(70,80,90)	(80,90,100)	(70,80,90)
A_4	(40,50,60)	(30,40,50)	(60,70,80)	(60,70,80)	(70,80,90)

Tabla 4.2. Experto 2

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	(20,30,40)	(40,50,60)	(70,80,90)	(80,90,100)	(90,100,110)
A_2	(30,40,50)	(20,30,40)	(60,70,80)	(50,60,70)	(80,90,100)
A_3	(40,50,60)	(60,70,80)	(70,80,90)	(70,80,90)	(70,80,90)
A_4	(60,70,80)	(60,70,80)	(50,60,70)	(60,70,80)	(70,80,90)

Tabla 4.3. Experto 3

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	(40,50,60)	(60,70,80)	(60,70,80)	(70,80,90)	(90,100,110)
A_2	(30,40,50)	(20,30,40)	(50,60,70)	(50,60,70)	(80,90,100)
A_3	(40,50,60)	(60,70,80)	(70,80,90)	(70,80,90)	(70,80,90)
A_4	(50,60,70)	(60,70,80)	(70,80,90)	(60,70,80)	(70,80,90)

Paso 2. En esta etapa se asume el siguiente vector de pesos para los tres expertos: $U = (0.4, 0.3, 0.3)$. Estos expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones para el *FGOWA*: $W = (0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.3)$ y la siguiente información probabilística difusa para cada estado de la naturaleza: $P = (0.1, 0.2, 0.3, 0.3, 0.1)$. Por simplicidad se supone que las ponderaciones no son borrosas, por lo que es más fácil tratar con ellas. También, en este ejemplo en particular el operador *FOWA* tiene una importancia del 30% mientras que el *FPA* del 70%.

Paso 3. En primer lugar se agrega la información de los tres expertos en una matriz colectiva que representa la información de todos los expertos del problema. Los resultados se muestran en la tabla 4.4.

Tabla 4.4. Resultados colectivos

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	(30,40,50)	(50,60,70)	(63,73,83)	(77,87,97)	(90,100,110)
A_2	(30,40,50)	(20,30,40)	(57,67,77)	(50,60,70)	(76,86,96)
A_3	(40,50,60)	(60,70,80)	(70,80,90)	(74,84,94)	(70,80,90)
A_4	(49,59,69)	(48,58,68)	(60,70,80)	(60,70,80)	(70,80,90)

Paso 4. Con esta información se pueden agregar los resultados esperados para cada estado de la naturaleza para tomar una decisión, utilizando la fórmula (4.6) para calcular la agregación *FGPOWA*. En la tabla 4.5 de la página siguiente se presentan los resultados obtenidos usando diferentes tipos de operadores *FGPOWA*.

Tabla 4.5. Resultados agregados

	FAM	FPA	FOWA	FPOWA	A-FPA
A_1	(62,72,82)	(64,74,84)	(53.3,63.3,73.3)	(60.79,70.79,80.79)	(63.4,73.4,83.4)
A_2	(46.6,56.6,66.6)	(46.7,56.7,66.7)	(38.3,48.3,58.3)	(44.18,54.18,64.18)	(46.6,56.6,66.6)
A_3	(62.8,72.8,82.8)	(66.2,76.2,86.2)	(58.4,68.4,78.4)	(63.86,73.86,83.86)	(65.1,75.1,85.1)
A_4	(57.4,67.4,77.4)	(57.5,67.5,77.5)	(54.1,64.1,74.1)	(56.48,66.48,76.48)	(57.4,67.4,77.4)

Paso 5. Si se establece una ordenación de las alternativas se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 4.6. Se debe tener en cuenta que la primera alternativa en cada ordenación es la mejor opción.

Tabla 4.6. Ordenación de estrategias

	Ordenación		Ordenación
<i>FAM</i>	$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$	<i>FPOWA</i>	$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$
<i>FPA</i>	$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$	<i>A-FPA</i>	$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$
<i>FOWA</i>	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$	<i>A-FOWA</i>	$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$

Obviamente, la preferencia de orden puede ser diferente en función del operador de agregación utilizado. Por lo tanto, la decisión sobre la estrategia en la selección puede ser también diferente.

7. CONCLUSIONES

Se ha presentado el *FGPOWA Operator*, que consiste en un operador de agregación que unifica la agregación *FGPA* y el *FGOWA Operator* en la misma formulación, teniendo en cuenta el grado de importancia que cada concepto tiene en la agregación. También se utilizan medias generalizadas que proporcionan un marco general que incluye una amplia gama de casos particulares, incluyendo el *FPOWA Operator* y el *FPOWQA Operator*, mediante el uso de información difusa que es capaz de hacer frente a entornos inciertos donde la información es vaga o imprecisa. Este enfoque se generaliza además utilizando medias cuasi-aritméticas que forman el *Quasi-FPOWA Operator*.

También se ha estudiado la aplicabilidad de este nuevo método en un problema de decisiones de grupo difusas para la selección de las estrategias generales de la empresa, utilizando el *MP-FGPOWA Operator*, con el fin de evaluar la opinión de varios expertos en el análisis. Se observa que cada caso particular del *FGPOWA Operator* puede conducir a resultados y decisiones diferentes.

Es importante tener en cuenta que la aplicabilidad del *FGPOWA Operator* es muy amplia, ya que todos los estudios previos que utilizan la probabilidad o el operador *OWA* pueden ser revisados y extendidos con este nuevo enfoque. Por

ejemplo se puede implementar en diferentes ámbitos, tales como la teoría de la decisión, economía, negocios, ingeniería, inteligencia computacional, física y biología entre otros.

En investigaciones futuras se espera el desarrollo de los nuevos conocimientos mediante la adición de más conceptos en el análisis, tal como el uso de medidas de distancia, operadores de agregación inducidos, medias móviles, promedios ponderados y estructuras más complejas.

5. LA MEDIA PONDERADA PROBABILÍSTICA GENERALIZADA INCIERTA Y SU APLICACIÓN A LA TEORÍA DE EXPERTONES

1. INTRODUCCIÓN

Los operadores de agregación son muy comunes en la literatura (Beliakov *et al.*, 2007; Xu & Da, 2003; Yager, 1988, 1993; Yager & Kacprzyk, 1997), siendo muy útiles para evaluar la información disponible de una forma muy eficiente. Uno de los operadores de agregación más importantes es la media ponderada, que agrega la información dando diferentes grados de importancia a los argumentos considerados en el problema, siendo utilizado extraordinariamente en una amplia gama de aplicaciones (Beliakov *et al.*, 2007; Torra, 1997; Xu & Da, 2003). Otro operador muy común es la agregación probabilística, que trata la información mediante el uso de probabilidades en el análisis, siendo también utilizado en muchas aplicaciones (Merigó, 2010; Merigó & Casanovas, 2009; Yager, *et al.*, 1995).

Otro tipo de operadores de agregación que también están llegando a ser muy populares en la literatura son los generalizados (Beliakov *et al.*, 2007; Merigó & Casanovas, 2010a, 2010b, 2010c, 2011a; Merigó & Gil Lafuente, 2009; Yager, 2004; Zhou & Chen, 2010). Su principal característica es que se generaliza un amplio rango de operadores mediante el uso de medias generalizadas y cuasi-aritméticas. Por lo tanto se puede incluir en la misma formulación agregaciones aritméticas, geométricas o cuadráticas.

Recientemente, Merigó (Merigó, 2009), ha propuesto un nuevo enfoque que unifica la probabilidad y la media ponderada en la misma formulación, teniendo en cuenta el grado de importancia de cada concepto en la agregación denominado *Probabilistic Weighted Averaging (PWA) Operator*. Su principal ventaja es que se puede considerar la información subjetiva y objetiva en la misma formulación. Por lo tanto se puede hacer una evaluación más completa.

Generalmente cuando se trata de estos operadores se supone que la información es claramente conocida y se puede evaluar con números exactos. Sin embargo, en problemas del mundo real no es tan fácil de evaluar la información, ya que por lo general esta es muy compleja y afectada por diferentes tipos de incertidumbres. Por lo tanto el uso de números exactos no es suficiente, puesto que proporciona información incompleta y en muchas ocasiones conduce a decisiones equivocadas, siendo necesario el uso de otras técnicas para evaluar adecuadamente la información y representar la incertidumbre de una manera más completa, tales como el uso de números intervalo. Si se utiliza este tipo de números los operadores anteriores se conocen como: *Uncertain Weighted Average (UWA)* y *Uncertain Probabilistic Aggregation (UPA)*.

El objetivo de este trabajo es presentar el *Uncertain Generalized Probabilistic Weighted Averaging (UGPWA) Operator*, el cual es un nuevo operador de agregación que unifica la *UWA* y el operador *UPA* en la misma formulación, teniendo en cuenta el grado de importancia que cada concepto tiene en el análisis. Por lo tanto se puede representar la información desde perspectivas subjetivas y objetivas, además de entornos inciertos evaluados con los números intervalo. Por otro lado, también utiliza medias generalizadas que permiten proporcionar un marco general que incluye una amplia gama de casos particulares como: el *UWA*, el *UPA*, el *Uncertain Generalized Weighted Average (UGWA)*, el *Uncertain Generalized Probabilistic Aggregation (UGPA)*, el *Uncertain Average (UA)*, el *PWA Operator*, el *Uncertain PWA (UPWA)* entre otros.

Se generaliza aún más este enfoque utilizando medias cuasi-aritméticas, obteniendo el *Quasi-Arithmetic PWA (Quasi-UPWA) Operator*, el cual proporciona una generalización más robusta que incluye el *UGPWA Operator* como un caso particular.

Se estudia la aplicación del nuevo enfoque en un problema de decisiones grupales con respecto a la selección de las políticas monetarias mediante el uso de la teoría de la expertones (Kaufmann, 1988; Kaufmann & Gil Aluja, 1993). La teoría de expertones amplía el concepto de conjunto probabilístico para ambientes inciertos que pueden ser evaluados con números intervalo. La principal ventaja de este enfoque es que permite analizar la información del grupo de una manera más completa, al tener en cuenta todas las opiniones individuales y producir un sólo resultado final.

Este documento está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se describen brevemente algunos conceptos básicos, la sección 3 introduce el *UGPWA Operator*, la sección 4 analiza varias familias del operador, la sección 5 muestra una aplicación en la toma de decisiones con la teoría de expertos y la sección 6 resume los principales resultados del trabajo.

2. PRELIMINARES

En esta sección se revisan brevemente algunos conceptos básicos relativos a los números intervalo, la media ponderada generalizada incierta y el operador *PWA*.

2.1. Los números intervalo

Los números intervalo (Moore, 1966) son una técnica muy útil y simple para la representación de la incertidumbre, que se ha utilizado en una amplia gama de aplicaciones.

Los números intervalo se pueden expresar de diferentes formas. Por ejemplo, si se toma una cuádrupleta (a_1, a_2, a_3, a_4) , se puede considerar que a_1 y a_4 , representan el mínimo y el máximo del número de intervalo, mientras que a_2 y a_3 , el intervalo con más alta probabilidad o posibilidad dependiendo del uso que se quiera dar a los números del intervalo, teniendo en cuenta que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, pero si $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, entonces, el número intervalo es un número exacto. Si $a_2 = a_3$, sería una tripleta, y si $a_1 = a_2$ y $a_3 = a_4$, sería una dupla o un número intervalo.

A continuación, se presentan algunas operaciones básicas con números intervalo. Sean A y B dos triplas, donde $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, entonces:

1. $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
2. $A - B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$
3. $A \times k = (k \times a_1, k \times a_2, k \times a_3)$; para $k > 0$

4. $A \times B = (a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, a_3 \times b_3)$; para \mathbb{R}^+

5. $A \div B = (a_1 \div b_3, a_2 \div b_2, a_3 \div b_1)$; para \mathbb{R}^+

Existen otras operaciones que pueden ser estudiadas (Merigó & Casanovas, 2011a; Moore, 1966; Xu & Da, 2002), pero este artículo solo se enfocará en estas.

2.2. La Media Generalizada Incierta

El *Uncertain Generalized Weighted Average (UGWA)* es un operador de agregación que generaliza el *Uncertain Weighted Average (UWA) Operator*, utilizando medias generalizadas y definiéndolo de la siguiente manera:

Definición 5.1. Sea Ω el conjunto de números intervalo. Un *UGWA Operator* de dimensión n es una función *UGWA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ que cuenta con un vector de ponderación W de dimensión n con $\tilde{w}_i \in [0, 1]$ tal que:

$$UGWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{i=1}^n \tilde{w}_i \tilde{a}_i^\lambda \right)^{1/\lambda} \quad (5.1)$$

donde cada \tilde{a}_i es un número intervalo, y λ es un parámetro, tal que, $\lambda \in [-\infty, \infty] - \{0\}$, incluyendo una amplia gama de casos particulares, tales como: *UWA* (cuando $\lambda = 1$), *Uncertain Weighted Geometric Average (UWGA)* (cuando $\lambda \rightarrow 0$), *Uncertain Weighted Quadratic Average (UWQA)* (cuando $\lambda = 2$) y *Uncertain Weighted Harmonic Average (UWHA)* (cuando $\lambda = -1$).

2.3. La Media Ponderada Probabilística

El *Probabilistic Weighted Averaging (PWA) Operator* (Merigó, 2009) es un operador que unifica la probabilidad y la media ponderada en una misma formulación considerando el grado de importancia que cada concepto tiene en la agregación. Se define de la siguiente manera:

Definición 5.2. Un *PWA Operator* de dimensión n es una función *PWA*: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$PWA(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j a_j \quad (5.2)$$

donde los a_i son los argumentos variables. Cada a_i tiene un ponderación asociada v_i con $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, y una ponderación probabilística p_i con $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_i = \beta p_i + (1 - \beta)v_i$ con $b \in [0, 1]$ y \hat{v}_i es el peso que unifica probabilidades y medias ponderadas en la misma formulación.

Se debe tener en cuenta que si $b = 1$, se obtiene la agregación probabilística y si $b = 0$, la media ponderada.

2.4. La Media Ponderada Probabilística Generalizada

El *Uncertain Generalized Probabilistic Weighted Averaging (UGPWA) Operator* es un operador que unifica la probabilidad y la media ponderada en la misma formulación considerando el grado de importancia que cada concepto tiene en la agregación. Su principal ventaja es que puede utilizarse en entornos inciertos que no pueden ser evaluados con números exactos, pero si se permite el uso de números intervalo, de modo que puede analizarse información imprecisa considerando el resultado mínimo y máximo que suele ocurrir en cada situación. Por otro lado, el *UGPWA Operator* utiliza medias generalizadas para proporcionar una formulación más general que incluye una amplia gama de casos particulares tales como: el *Uncertain PWA (UPWA)*, el *Uncertain Probabilistic Weighted Geometric Average (UPGWA)*, el *Uncertain Probabilistic Weighted Harmonic Average (UPHWA)*, el *Uncertain Probabilistic Weighted Quadratic Average (UPQWA)*, entre otros casos, teniendo en cuenta que en esta agregación se unifica el *UGWA* con el *Uncertain Generalized Probabilistic Aggregation (UGPA)* y puede incluir otras unificaciones como el *Uncertain Weighted Geometric Average (UWGA)* con el *Uncertain Probabilistic Geometric Average (UPGA)* y el *Uncertain Weighted Quadratic Average (UWQA)* con el *Uncertain Probabilistic Quadratic Average (UPQA)*. Se define de la siguiente manera:

Definición 5.3. Sea Ω el conjunto de números intervalo. Un *UGPWA Operator* es una función *UGPWA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n , si cuenta con un vector probabilístico asociado P , con $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1$ y $\tilde{p}_i \in [0, 1]$ y un vector de ponderación V que afecta la media ponderada, con $\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i = 1$ y $\tilde{v}_i \in [0, 1]$, tal que:

$$UGPWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \left(\sum_{j=1}^n \tilde{p}_j \tilde{a}_j^\lambda \right)^{1/\lambda} + (1 - \tilde{\beta}) \left(\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \tilde{a}_i^\sigma \right)^{1/\sigma} \quad (5.3)$$

donde los \tilde{a}_i son las variables de los argumentos, representados en forma de números intervalo, $\tilde{\beta} \in [0, 1]$ λ y σ son parámetros, tales que, $\lambda, \sigma \in (-\infty, \infty) - \{0\}$.

Se debe tener en cuenta que el vector de ponderación de probabilidades o WA es no normalizado, es decir, $P = \sum_{i=1}^n p_i \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^n v_i \neq 1$, entonces el *UGPWA Operator* se expresa de la siguiente manera:

$$UGPWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{P}} \left(\sum_{j=1}^n \tilde{p}_j \tilde{a}_j^\lambda \right)^{1/\lambda} + \frac{(1 - \tilde{\beta})}{\tilde{V}} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \tilde{a}_i^\sigma \right)^{1/\sigma} \quad (5.4)$$

También es posible utilizar una amplia gama de números intervalos en los procesos de agregación, tales como duplas, tripletas o cuádruplos. Sin embargo, muchas veces no está claro como reordenar los números intervalo, siendo necesario establecer un criterio para tal fin. Por simplicidad se recomienda el siguiente método:

- Para duplas se calcula la media aritmética del intervalo con $(a_1 + a_2) / 2$
- Para tripletas se calcula una media ponderada dándole más importancia a los valores centrales, es decir, $(a_1 + 3a_2 + a_3) / 5$
- Para cuádruplos se calcula $(a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4) / 8$
- Y así sucesivamente

En el caso de un empate entre los intervalos se selecciona aquel con la diferencia más baja, es decir, $(a_2 - a_1)$. Para tripletas y tuplas impares superiores se selecciona el intervalo con el mayor valor central. Para el caso de cuádruplas y tuplas superiores pares se puede calcular el promedio de los valores centrales siguiendo el criterio inicial.

El *UGPWA* es acotado, idempotente y monótono. Es acotado porque la agregación *UGPWA* está delimitada entre el mínimo y el máximo, es decir, $Min\{\tilde{a}_j\} \leq UGPWA\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n\} \leq Max\{\tilde{a}_j\}$, es idempotente porque si $\tilde{a}_i = a$, para

todo i , entonces, $UGPWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = a$ y es monótono porque si $\tilde{a}_i \geq u_i$, para todo i , entonces, $UGPWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \geq UGPWA(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Otro tema interesante para analizar son las medidas para caracterizar el vector de ponderación \hat{V} . Por ejemplo la entropía de la dispersión (Merigó & Gil Lafuente, 2009; Shannon, 1948; Yager, 1988) que mide la cantidad de información utilizada en la agregación, definiéndose para el *UGPWA Operator*, así:

$$H(\hat{V}) = - \left(\tilde{\beta} \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \ln(\tilde{v}_i) + (1 - \tilde{\beta}) \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \ln(\tilde{p}_i) \right) \quad (5.5)$$

siendo \tilde{p}_i el i -ésimo peso de la agregación *UGPA* y \tilde{v}_i el i -ésimo peso de la agregación *UGWA* y si $\tilde{\beta} = 1$ o $\tilde{\beta} = 0$, se obtiene la entropía de la dispersión clásica de Shannon [18] utilizando los números intervalo.

El *UGPWA Operator* puede ser además generalizado usando medias cuasi-aritméticas (Fodor *et al.*, 1995; Merigó & Casanovas, 2011a), obteniéndose así el *Uncertain Quasi-Arithmetic PWA (Quasi-UPWA) Operator* que se define de la siguiente forma:

Definición 5.4. Sea Ω el conjunto de números intervalo. Un *Quasi-UPWA Operator* es una función *QUPWA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n , si cuenta con un vector probabilístico asociado P , con $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1$ y $\tilde{p}_i \in [0, 1]$ y un vector de ponderación V que afecta la media ponderada, con $\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i = 1$ y $\tilde{v}_i \in [0, 1]$, tal que:

$$UGPWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} g^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i g(\tilde{a}_i) \right) + (1 - \tilde{\beta}) h^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i h(\tilde{a}_i) \right) \quad (5.6)$$

donde los \tilde{a}_i son los argumentos variables representados en forma de números intervalo, $\tilde{\beta} \in [0, 1]$ y tanto g como h son funciones estrictamente continuas monótonas.

Por otro lado, si $g(a) = a^2$ y $h(a) = a^\sigma$, el *Quasi-UPWA Operator* se convierte en el *UGPWA Operator*.

2.5. Familias de operadores UGPWA

El *UGPWA Operator* incluye una amplia gama de casos particulares que son útiles en algunas situaciones específicas.

- Si $b = 0$, se obtiene el *Uncertain Generalized Weighted Average (UGWA)* y si $\tilde{\beta} = 1$, el *Uncertain Generalized Probabilistic Aggregation (UGPA)*. También se puede considerar casos parciales, tales como $\tilde{\beta} = (0.8, 1)$ donde se obtiene el *UGPA* (o el *UGWA*) para una parte del intervalo, pero no para el resto.
- Si $\tilde{p}_i = 1/n$ y $\tilde{v}_i = 1/n$, para todo i , entonces, se obtiene el *Uncertain Generalized Average (UGA)*. También se puede encontrar el *UGM* si $\tilde{\beta} = 1$ y $\tilde{p}_i = 1/n$, para todo i , y si $\tilde{\beta} = 0$ y $\tilde{v}_i = 1/n$, para todo i .
- Si $\tilde{v}_i = 1/n$, para todo i , se obtiene el *Uncertain Generalized Arithmetic Probabilistic Aggregation (UGA-PA)*.

$$UGA-PA(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{a}_i^\lambda \right)^{1/\lambda} + (1 - \tilde{\beta}) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i^\sigma \right)^{1/\sigma} \quad (5.7)$$

- Si $\tilde{p}_i = 1/n$, para todo i , se obtiene el *Uncertain Generalized Arithmetic WA (UGA-WA)*.

$$UGA-WA(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i^\lambda \right)^{1/\lambda} + (1 - \tilde{\beta}) \left(\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \tilde{a}_i^\sigma \right)^{1/\sigma} \quad (5.8)$$

Teorema. Si los números intervalo se reducen a números exactos, el *UGPWA Operator* se convierte en el *Generalized PWA (GPWA) Operator*.

Demostración. Se asume un cuádruplo (a_1, a_2, a_3, a_4) . Si $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, entonces $(a_1, a_2, a_3, a_4) = a$, por tanto, se obtiene el *GPWA Operator*.

- Si la información disponible se presenta en diferentes tipos de números intervalo, se deben adaptar a la misma estructura. Por lo tanto, se tiene que construir un intervalo que incluya todos los demás, por ejemplo, si se tiene un intervalo con una dupla y otro con tripletas, entonces se convertirán ambos a cuádruplos, de modo que la dupla quedara así: $[a_1, a_2] = [a_1, a_1, a_2, a_2]$ y la tripleta de la siguiente manera: $[a_1, a_2, a_3] = [a_1, a_2, a_2, a_3]$.

Si se analizan diferentes valores del parámetro λ , se obtiene un grupo de casos particulares, tales como: el *UPWA Operator*, el *UPGWA Operator*, el *UPQWA Operator* y el *UPHWA Operator*. De manera que:

- Cuando $\lambda = \sigma = 1$, el *UGPWA Operator* se convierte en el *UPWA Operator*.

$$UGPWA(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{a}_i + (1 - \tilde{\beta}) \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \tilde{a}_i \quad (5.9)$$

donde, si $p_i = 1/n$, para todos los \tilde{a}_i , se obtiene el *Uncertain Arithmetic Weighted Average (UAWA)* y si $v_i = 1/n$, para todo \tilde{a}_i , el *Uncertain Arithmetic Probabilistic Aggregation (UAPA) Operator*.

- Cuando $\lambda \rightarrow 0$ y $\sigma \rightarrow 0$, el *UGPWA Operator* se convierte en el *Uncertain Probabilistic Weighted Geometric Averaging (UPWGA) Operator*.

$$UGPWA(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \prod_{i=1}^n \tilde{a}_i^{\tilde{p}_i} + (1 - \tilde{\beta}) \prod_{i=1}^n \tilde{a}_i^{\tilde{v}_i} \quad (5.10)$$

Si $p_i = 1/n$, para todo \tilde{a}_i , se obtiene el *Uncertain Geometric Averaging Weighted Geometric Average (UGAWGA)* y si $v_i = 1/n$, para todo \tilde{a}_i , será el *Uncertain Geometric Averaging Probabilistic Geometric Average (UGAPGA) Operator*. Por otro lado si $b = 1$, se obtiene el *Uncertain Probabilistic Geometric Aggregation (UPGA)*.

- Cuando $\lambda = \sigma = -1$, se obtiene el *Uncertain Probabilistic Weighted Harmonic Averaging (UPWHA) Operator*.

$$UGPWA(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{a}_i}} + (1 - \tilde{\beta}) \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\tilde{v}_i}{\tilde{a}_i}} \quad (5.11)$$

Si $p_i = 1/n$, para todo \tilde{a}_i , se forma el *Uncertain Harmonic Averaging Weighted Harmonic Average (UHAWHA)* y si $v_i = 1/n$, para todo \tilde{a}_i , el *Uncertain Harmonic Averaging Probabilistic Harmonic Average (UHAPHA) Operator*. Por otro lado, si $b = 1$, se obtiene el *Uncertain Probabilistic Harmonic Aggregation (UPHA)*.

- Cuando $\lambda = \sigma = 2$, se obtiene el *Uncertain Probabilistic Weighted Quadratic Averaging (UPWQA) Operator*.

$$UGPWA(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{a}_i^2 \right)^{1/2} + (1 - \tilde{\beta}) \left(\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \tilde{a}_i^2 \right)^{1/2} \quad (5.12)$$

Si $p_i = 1/n$, para todo \tilde{a}_i , se obtiene el *Uncertain Probabilistic Quadratic Averaging Weighted Quadratic Average (UPQAWQA)* y si $v_i = 1/n$, para todo \tilde{a}_i , se obtiene el *Uncertain Quadratic Averaging Probabilistic Quadratic Average (UQA-PQA) Operator*. Por otro lado, si $b = 1$, se obtiene el *Uncertain Probabilistic Quadratic Aggregation (UPQA)*.

También se puede tener en cuenta situaciones en donde $\lambda \neq \sigma$, para formar por ejemplo los siguientes operadores de agregación:

- Si $\lambda = 1$ y $\sigma = 2$, se obtiene el *Uncertain Probabilistic Quadratic Weighted Averaging (UPQWA) Operator*.

$$f(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{a}_i + (1 - \tilde{\beta}) \left(\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \tilde{a}_i^2 \right)^{1/2} \quad (5.13)$$

- Si $\lambda = 1$ y $\sigma = 3$, se forma el *Uncertain Probabilistic Cubic Weighted Averaging (UPCWA) Operator*.

$$f(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{a}_i + (1 - \tilde{\beta}) \left(\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \tilde{a}_i^3 \right)^{1/3} \quad (5.14)$$

- Si $l = 2$ y $\sigma = 1$, se obtiene el *Uncertain Quadratic Probabilistic Weighted Averaging (UQPWA) Operator*.

$$f(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{a}_i^2 \right)^{1/2} + (1 - \tilde{\beta}) \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \tilde{a}_i \quad (5.15)$$

- Si $l = 2$ y $\sigma = 3$, se obtiene el *Uncertain Quadratic Probabilistic Cubic Weighted Averaging (UQPCWA) Operator*.

$$f(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{a}_i^2 \right)^{1/2} + (1 - \tilde{\beta}) \left(\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \tilde{a}_i^3 \right)^{1/3} \quad (5.16)$$

Otras situaciones se pueden considerar utilizando mezclas de operadores y modelos de agregación (Yager, 2010).

3. APLICACIÓN EN TOMA DE DECISIONES CON LA TEORÍA DE EXPERTONES

A continuación, se desarrolla un problema de toma de decisiones multi-persona incierto mediante el uso de la teoría de la expertones (Kaufmann, 1988; Kaufmann & Gil Aluja, 1993), teniendo en cuenta que un experton es una extensión del concepto de conjunto probabilístico (Hirota, 1981) para entornos inciertos que no pueden ser evaluados con números exactos, pero que es posible el uso de números intervalo, siendo muy útil en problemas de decisiones grupales porque puede tratar la opinión de diferentes expertos en el análisis de una forma más eficiente, al poder evaluar la información mostrando varias particularidades y la tendencia general de la opinión del grupo. En la literatura se pueden encontrar muchos otros métodos de toma de decisiones (Gil Lafuente & Merigó, 2010; Merigó & Casanovas, 2011b; Merigó & Gil Lafuente, 2010).

Suponiendo que un país está analizando su estrategia general en cuanto a su política monetaria para el próximo año y considera las siguientes tres alternativas:

- A_1 : Desarrollar una política monetaria expansiva
- A_2 : No aplicar ningún cambio
- A_3 : Desarrollar una política monetaria contractiva

Para evaluar estas estrategias se cuenta con la opinión de cinco grupos de expertos, quienes consideran que el factor clave para determinar los beneficios esperados para cada política monetaria es la situación económica para el próximo año. Los posibles escenarios planteados son los siguientes:

- S_1 : Mala situación económica
- S_2 : Regular situación económica
- S_3 : Buena situación económica
- S_4 : Muy buena situación económica

Cada grupo de expertos evalúa los beneficios esperados del país de acuerdo con la situación económica para el próximo año, dando su opinión en un intervalo $[0,1]$, donde 0 son los beneficios más bajos (o las pérdidas esperadas más altas) y 1 los más altos beneficios. Como la información disponible es muy incierta, los expertos valoran la información con números intervalo representados en forma de tripletas. Los resultados se muestran en las tablas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5.

Con esta información se construyen los expertones, teniendo en cuenta que cuando se usan tripletas se referirán a ellas como m-expertones. Los resultados se muestran en la tabla 5.6.

Tabla 5.1. Experto 1

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	[0.2, 0.3, 0.4]	[0.6, 0.7, 0.8]	[0.2, 0.3, 0.4]	[0.5, 0.6, 0.7]
A_2	0.5	[0.3, 0.4, 0.5]	[0.4, 0.5, 0.7]	[0.4, 0.5, 0.6]
A_3	[0.1, 0.2, 0.4]	[0.6, 0.8, 0.9]	[0.8, 0.9, 1]	[0.7, 0.8, 0.9]

Tabla 5.2. Experto 2

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	[0.2, 0.3, 0.4]	[0.2, 0.3, 0.5]	[0.3, 0.4, 0.6]	[0.3, 0.5, 0.7]
A_2	[0.7, 0.8, 1]	[0.3, 0.4, 0.6]	[0.1, 0.2, 0.3]	[0.4, 0.6, 0.7]
A_3	[0.6, 0.7, 0.8]	[0.5, 0.6, 0.7]	[0.4, 0.5, 0.6]	[0.2, 0.3, 0.5]

Tabla 5.3. Experto 3

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	[0.2, 0.3, 0.4]	[0.5, 0.6, 0.7]	[0.3, 0.5, 0.6]	[0.4, 0.6, 0.7]
A_2	[0.1, 0.2, 0.4]	0.7	[0.6, 0.7, 0.8]	[0.7, 0.8, 0.9]
A_3	[0.6, 0.8, 0.9]	[0.2, 0.4, 0.6]	[0.4, 0.5, 0.6]	[0.5, 0.6, 0.7]

Tabla 5.4. Experto 4

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	[0.2, 0.3, 0.4]	[0.5, 0.6, 0.7]	[0.2, 0.3, 0.4]	[0.4, 0.6, 0.7]
A_2	[0.2, 0.4, 0.5]	[0.2, 0.3, 0.4]	0.4	[0.7, 0.8, 0.9]
A_3	[0.3, 0.4, 0.6]	0.6	[0.3, 0.4, 0.7]	[0.2, 0.3, 0.6]

Tabla 5.5. Experto 5

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	[0.1, 0.4, 0.5]	[0.6, 0.7, 0.8]	[0.1, 0.3, 0.4]	[0.5, 0.6, 0.8]
A_2	[0.5, 0.6, 0.8]	[0.5, 0.6, 0.8]	[0.2, 0.3, 0.4]	[0.3, 0.4, 0.5]
A_3	[0.3, 0.5, 0.6]	[0.1, 0.2, 0.3]	[0.4, 0.6, 0.7]	[0.5, 0.6, 0.7]

Tabla 5.6. Expertones para cada estrategia y escenario económico

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	0	1 1 1	0	1 1 1
	0.1	1 1 1	0.1	1 1 1
	0.2	0.8 1 1	0.2	0.8 1 1
	0.3	0 1 1	0.3	0.4 1 1
	0.4	0 0.2 1	0.4	0 0.4 1
	0.5	0 0 0.2	0.5	0 0.2 0.4
	0.6	0 0 0	0.6	0 0 0.4
	0.7	0 0 0	0.7	0 0 0
	0.8	0 0 0	0.8	0 0 0
	0.9	0 0 0	0.9	0 0 0
1	0 0 0	1	0 0 0	
A_2	0	1 1 1	0	1 1 1
	0.1	1 1 1	0.1	1 1 1
	0.2	0.8 1 1	0.2	0.8 1 1
	0.3	0.6 0.8 1	0.3	0.6 0.8 1
	0.4	0.6 0.8 1	0.4	0.6 0.6 0.8
	0.5	0.6 0.6 0.8	0.5	0.2 0.4 0.4
	0.6	0.2 0.4 0.4	0.6	0.2 0.2 0.4
	0.7	0.2 0.2 0.4	0.7	0 0.2 0.4
	0.8	0 0.2 0.4	0.8	0 0 0.2
	0.9	0 0 0.2	0.9	0 0 0
1	0 0 0.2	1	0 0 0	
A_3	0	1 1 1	0	1 1 1
	0.1	1 1 1	0.1	1 1 1
	0.2	0.8 1 1	0.2	1 1 1
	0.3	0.8 0.8 1	0.3	1 1 1
	0.4	0.4 0.8 1	0.4	0.8 1 1
	0.5	0.4 0.6 0.8	0.5	0.2 0.8 1
	0.6	0.4 0.4 0.8	0.6	0.2 0.4 1
	0.7	0 0.4 0.4	0.7	0.2 0.2 0.6
	0.8	0 0.2 0.4	0.8	0.2 0.2 0.2
	0.9	0 0 0.2	0.9	0 0.2 0.2
1	0 0 0	1	0 0 0.2	

Tabla 5.7. Expertón para A_1 y S_2

	Frecuencias Absolutas		Frecuencias Relativas		Experton	
A_1	0	0 0 0	0	0 0 0	0	1 1 1
	0.1	0 0 0	0.1	0 0 0	0.1	1 1 1
	0.2	1 0 0	0.2	0.2 0 0	0.2	1 1 1
	0.3	0 1 0	0.3	0 0.2 0	0.3	0.8 1 1
	0.4	0 0 0	0.4	0 0 0	0.4	0.8 0.8 1
	0.5	2 0 1	0.5	0.4 0 0.2	0.5	0.8 0.8 1
	0.6	2 2 0	0.6	0.4 0.4 0	0.6	0.4 0.8 0.8
	0.7	0 2 2	0.7	0 0.4 0.4	0.7	0 0.4 0.8
	0.8	0 0 2	0.8	0 0 0.4	0.8	0 0 0.4
	0.9	0 0 0	0.9	0 0 0	0.9	0 0 0
1	0 0 0	1	0 0 0	1	0 0 0	

Tabla 5.8. Valores esperados de los expertones para cada estrategia y escenario económico

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	[0.18, 0.32, 0.42]	[0.48, 0.58, 0.7]	[0.22, 0.36, 0.48]	[0.42, 0.58, 0.72]
A_2	[0.4, 0.5, 0.6]	[0.4, 0.48, 0.6]	[0.34, 0.42, 0.52]	[0.5, 0.62, 0.72]
A_3	[0.38, 0.52, 0.66]	[0.4, 0.52, 0.62]	[0.46, 0.58, 0.72]	[0.42, 0.52, 0.68]

Tabla 5.9. Resultados agregados

	UA	UPA	UWA	UPWA
A_1	[0.325, 0.46, 0.58]	[0.354, 0.488, 0.612]	[0.324, 0.462, 0.584]	[0.333, 0.4698, 0.5924]
A_2	[0.41, 0.505, 0.61]	[0.412, 0.506, 0.612]	[0.412, 0.508, 0.612]	[0.412, 0.5074, 0.612]
A_3	[0.415, 0.535, 0.67]	[0.422, 0.538, 0.672]	[0.42, 0.538, 0.676]	[0.4206, 0.538, 0.6748]

Para el cálculo de los resultados que se muestran en la tabla 5.6 se emplea la siguiente metodología presentada en la tabla 5.7 para el experto A_1 con S_2 . Primero se calculan las frecuencias absolutas (el número de expertos que opina cada resultado), luego se calculan las frecuencias relativas (se divide la frecuencia absoluta entre el número total de expertos) y finalmente, la frecuencia relativa acumulada de los resultados (se suma desde $\alpha = 1$, las frecuencias relativas de una forma acumulada hasta $\alpha = 0$) [Kaufmann, 1988; Kaufmann & Gil Aluja, 1993]. El mismo procedimiento se lleva a cabo para los demás expertos.

Posteriormente se calcula el valor esperado de los expertos, para ello se suman todos los niveles de membresía α , exceptuando el 0 y se dividen entre 10. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 5.8.

Los resultados de la Tabla 5.8 se utilizan en el proceso de agregación para obtener un único resultado que permite analizar los beneficios esperados para cada alternativa. Para este proceso de agregación se utilizan diferentes casos particulares del *UGPWA Operator*. En este trabajo, se consideran los operadores *UA*, *UWA*, *UPA* y *UPWA*, asumiendo que el *UWA* cuenta con el vector de ponderación $V = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$ con 70% de importancia y el *UPA*: $P = (0.1, 0.3, 0.3, 0.3)$ con un 30% de importancia. Los resultados se muestran en la tabla 5.9.

Como se puede ver, cada tipo particular del *UGPWA Operator* puede conducir a resultados y decisiones diferentes. En este ejemplo se observa que A_3 es la mejor opción.

4. CONCLUSIONES

Se ha presentado el *UGPWA Operator*, el cual es un operador que unifica el *Uncertain Probabilistic Aggregation* y el *UWA Operator* en la misma formulación considerando el grado de importancia que cada concepto tiene en la agregación. Por tanto, es muy útil para entornos inciertos donde la información disponible es imprecisa y no puede ser evaluada con números exactos, pero es posible el uso de números intervalo, observándose que el uso de números intervalo permite representar la información imprecisa de una forma más

completa, utilizando mínimos y máximos que garantizan que la información está contenida dentro de estos límites.

Por otra parte se ha observado mediante el uso de operadores de agregación generalizados que el *UGPWA Operator* incluye una amplia gama de casos particulares de operadores como: el *UPA*, el *UWA*, el *UGPA*, el *UGWA*, el *PWA*, el *GPWA*, el *UGA-PA* y el *UGA-WA Operator*. También se ha generalizado el *UGPWA* utilizando medias cuasi-aritméticas para el obtener el *Quasi-UPWA Operator*.

También se ha estudiado la aplicabilidad del *UGPWA Operator* en un problema de toma de decisiones multi-persona con respecto a la selección de políticas monetarias de un país, utilizando la teoría de expertones en el análisis para representar así la información de una forma más general, donde se consideran las opiniones individuales dentro del grupo y luego se obtiene un resultado representativo final. La principal ventaja del *UGPWA Operator* es que permite considerar una gran variedad de escenarios con distintos casos particulares y seleccionar el más adecuado, de acuerdo con los intereses específicos del decisor.

En investigaciones futuras se esperar desarrollar nuevas aportaciones a este enfoque adicionando más características en el análisis, tales como, el uso del *Ordered Weighted Averaging (OWA) Operator* y los *Unified Aggregation Operators (UAO)*. Por otra parte, también se incorporará otro tipo de información incierta, como números borrosos o variables lingüísticas y otras aplicaciones potenciales, prestando especial atención a la teoría de la decisión y la estadística.

6. DECISIONES DE GRUPO LINGÜÍSTICAS CON OPERADORES DE AGREGACIÓN INDUCIDOS E INFORMACIÓN PROBABILÍSTICA

1. INTRODUCCIÓN

La información disponible en un entorno se puede evaluar de diferentes maneras aunque por lo general las personas tratan de representarla mediante una escala numérica. Sin embargo, este enfoque no puede ser utilizado siempre puesto que existen entornos inciertos, donde la información es muy imprecisa y no es posible representarla forma cuantitativa. Por lo tanto es necesario utilizar otro enfoque como el uso de variables lingüísticas que representan la información de una manera cualitativa. Mediante el uso de la información lingüística se pueden utilizar expresiones tales como alto, bajo, muy alto entre otras. El método clásico para representar la información lingüística mediante el uso de conjuntos difusos (Zadeh, 1965) fue introducido por Zadeh (1975) desde su inicio ha sido estudiado por muchos autores (Herrera & Martínez, 2000; Herrera, et. al., 2008; Xu, 2004). Un enfoque muy útil ha sido introducido por Xu (2004) en el que se extiende el modelo con valores continuos. Por lo tanto es más fácil el tratamiento de los datos sin perder información, especialmente cuando se utilizan operaciones en el análisis.

La información lingüística se ha utilizado en una amplia gama de problemas de toma de decisiones, por ejemplo, (Xu, 2004; 2006) y (Wei, 2009) estudiaron problemas de decisión lingüísticos usando información grupal, Merigó y Casanovas (2010) analizaron un modelo mediante el uso de medidas de distancia que luego extendieron Zeng y Xu (2012). Merigó, Casanovas y Martínez [2010] estudiaron el uso de la estructura de credibilidad Dempster-Shafer. Herrera, et. al. (2008) analizaron un modelo que utiliza información lingüística desba-

lanceada. Xu y Wang (2011) introdujeron un modelo mediante el uso de medias por unidad de tiempo.

Cuando se trata de problemas de selección (Figueira et. al., 2005; Zavadskas & Turskis, 2011), es necesario agregar la información disponible con el fin de tomar decisiones. Un operador de agregación muy útil es la media ponderada ordenada (*OWA*) (Yager, 1988), el cual proporciona una familia parametrizada de operadores de agregación entre el mínimo y el máximo. El proceso de reordenación del operador *OWA* puede generalizarse mediante variables de inducción obteniendo el *Induced (IOWA) Operator* (Yager & Filev, 1999). El *OWA* y el operador *IOWA* también se han estudiado en ambientes lingüísticos que forman el *Linguistic OWA (LOWA) Operator* (Herrera et. al., 1995) y el *Induced LOWA (ILOWA) Operator* (Xu, 2006). Estos operadores se han extendido a través de medias generalizadas y cuasi-aritméticas (Zeng & Su, 2012; Merigó et. al., 2012).

Recientemente, Merigó (2012a) ha introducido el operador *Probabilistic OWA (POWA)*, el cual unifica agregaciones probabilísticas y el operador *OWA* en la misma formulación teniendo en cuenta el grado de importancia que cada concepto tiene en el análisis. Por lo tanto se pueden considerar los problemas de toma de decisiones con probabilidades y con el carácter actitudinal del decisor. Es importante tener en cuenta que algunos estudios previos ya estudiaron el uso del operador *OWA* en la probabilidad, como en el concepto de la probabilidad inmediata (Engemann et. al.; 1996; Merigó, 2010; Yager et. al., 1995). Por otra parte, otros autores han desarrollado enfoques similares utilizando la media ponderada que incluyen el *Probabilistic Weighted Average* (Merigó, 2012b), el *Weighted OWA (WOWA) Operator* (Torra, 1997) y el *Hybrid Average* (Xu & Da, 2003).

El propósito de este trabajo es analizar problemas de toma de decisiones en entornos lingüísticos, en los que se puedan utilizar las probabilidades y el carácter actitudinal del decisor introduciendo el *Induced Linguistic POWA (ILPOWA) Operator*. Se trata de un operador de agregación que unifica el operador *OWA* y la probabilidad en un entorno lingüístico. Algunas de sus principales propiedades y casos particulares se estudian en este artículo como también varias extensiones desarrolladas mediante el uso de medias móviles

para formar el *Induced Linguistic Probabilistic Ordered Weighted Moving Average (ILPOWMA)*. Por otra parte se presenta también el uso de medias de Bonferroni en el *ILPOWA Operator*.

Este enfoque se estudia en un problema de decisiones de grupo multicriterio lingüístico, utilizando operadores de agregación multi-persona. Por lo tanto se forma el *Multi-Person ILPOWA (MP-ILPOWA) Operator*, el cual es un operador de agregación que trata la opinión de varios expertos en el análisis, cuando la información se proporciona en forma de variables lingüísticas. Se estudian diferentes casos que incluyen el *Multi-Person Linguistic Probabilistic Aggregation (MP-LPA)*, el *Multi-Person LOWA (MP-LOWA)* y el *Multi-Person Linguistic Arithmetic Mean (MP-LAM)*. Se presenta también un ejemplo ilustrativo enfocado en una aplicación de toma de decisiones lingüísticas acerca de la selección de estrategias de importación de un país.

El resto del documento está estructurado de la siguiente manera: la sección 2 revisa algunos conceptos preliminares básicos, la sección 3 presenta el operador *ILPOWA* y algunas familias básicas, la sección 4 analiza el enfoque de decisiones de grupo lingüísticas y el operador *MP-ILPOWA*, la sección 5 describe un ejemplo ilustrativo y la sección 6 resume los principales resultados del trabajo.

2. PRELIMINARES

En esta sección se describen brevemente el enfoque lingüístico y algunos operadores de agregación básicos, incluyendo el *OWA*, el *Linguistic OWA*, el *Induced OWA* y el *Probabilistic OWA*.

2.1. El enfoque lingüístico

Por lo general, las personas están acostumbradas a trabajar en un marco cuantitativo, donde la información se expresa por medio de los valores numéricos. Sin embargo muchos aspectos del mundo real no se pueden evaluar de

manera cuantitativa pero si es posible utilizar un enfoque cualitativo, es decir, con el conocimiento vago o impreciso, tales como el uso de evaluaciones lingüísticas en lugar de valores numéricos. Este enfoque representa aspectos cualitativos por medio de variables lingüísticas (Zadeh, 1975).

Los descriptores lingüísticos deben seleccionarse adecuadamente para el conjunto de términos, así como su semántica. Una de las formas de hacerlo es considerar el conjunto de términos en una escala que define un orden total. Por ejemplo: un conjunto de once términos puede expresarse de la siguiente manera:

$$S = \{s_0 = N, s_1 = EB, s_2 = MB, s_3 = B, s_4 = M-B, s_5 = M, s_6 = M-A, s_7 = A, s_8 = MA, s_9 = EA, s_{10} = P\}$$

Teniendo en cuenta que: N = Ninguno, EB = Extremadamente Bajo, MB = Muy Bajo, B = Bajo, $M-B$ = Medio - Bajo, M = Medio, $M-A$ = Medio - Alto, A = Alto, M = Muy Alto, EA = Extremadamente Alto, P = Perfecto. El conjunto de términos lingüísticos debe tener:

- Un operador de negación: $Neg(s_j) = s_i$ tal que $j = g + 1 - i$
- El conjunto cumple una ordenación: $s_i \leq s_j$ si y solo si $i \leq j$
- Un operador máximo: $Max(s_i, s_j) = s_i$ cuando $s_i \geq s_j$
- Un operador mínimo: $Min(s_i, s_j) = s_i$ cuando $s_i \leq s_j$

Diferentes métodos se han desarrollado para el tratamiento de información lingüística (Zadeh, 1975; Herrera, et. al., 2008; Herrera & Martínez, 2000; Xu, 2004), pero en este artículo se siguen los planteamientos de Xu (2004, 2006) que propone para mantener la información lingüística extender el conjunto discreto de términos lingüísticos S a otro conjunto de términos lingüísticos $\hat{S} = \{s_\alpha \mid s_i < s_\alpha \leq s_r, \alpha \in [1, t]\}$, donde si $s_\alpha \in S$ puede llamarse termino lingüístico original, de otra forma s_α se denominara termino lingüístico virtual.

Considerando dos términos lingüísticos cualquiera $s_\alpha, s_\beta \in \hat{S}$, y $\mu, \mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$, se pueden definir algunas leyes operativas, de manera que:[5-6]:

- $\mu S_\alpha = S_{\mu\alpha}$
- $S_\alpha + S_\beta = S_\beta + S_\alpha = S_{\alpha+\beta}$
- $(S_\alpha)^\mu = S_{\alpha\mu}$
- $S_\alpha \times S_\beta = S_\beta \times S_\alpha = S_{\alpha\beta}$

Se debe tener en cuenta que este modelo es muy útil para hacer cálculos con adjetivos, ya que es muy fácil de usar y sigue una metodología similar a la información numérica.

2.2. El OWA Operator

El *OWA Operator* (Yager, 1988) es un operador de agregación que suministra una familia parametrizada de operadores de agregación entre el mínimo y el máximo. Dicho operador es muy útil en la toma de decisiones bajo situaciones de incertidumbre, puesto que permite considerar el grado de optimismo del decisor en el problema. Se define así:

Definición 6.1. Un *OWA Operator* de dimensión n es una función *OWA*: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que cuenta con un vector de ponderación asociado W de dimensión n con $w_j \in [0, 1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, de modo que:

$$OWA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j \quad (6.1)$$

donde b_j es el j -ésimo más grande de los a_i

Con respecto a este operador se pueden estudiar diferentes modalidades, tales como la distinción entre el orden descendente y ascendente, medidas para caracterizar el vector de ponderación y diversas familias de *OWA Operators*. También es importante destacar que dicho operador goza de las propiedades de conmutatividad, monotonía, acotamiento e idempotencia. Para mayor detalle (Beliakov, 2007; Grabisch et. al. 2011; Merigó & Casanovas, 2011b; Yager & Kacprzyk, 1997; Yager et. al, 2011; Zhou et. al., 2012).

2.3. El Linguistic OWA Operator

En la literatura se encuentran una amplia gama de operadores de agregación lingüísticos (Herrera, et. al., 2008; Herrera & Martínez, 2000; Xu, 2004;2006). En este trabajo se considerara el *Linguistic Ordered Weighted Averaging (LOWA) Operator* (Xu, 2004; 2006) que es una extensión del *OWA Operator* donde la información disponible es imprecisa, pero puede ser evaluada con variables lingüísticas. Se define así:

Definición 6.2. Un *LOWA Operator* de dimensión n es una función *LOWA*: $\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$, que tiene un vector de ponderación asociado W con $w_j \in [0, 1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, tal que:

$$LOWA(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}) = \sum_{j=1}^n w_j s_{\beta_j} \quad (6.2)$$

donde s_{β_j} es el j -ésimo más grande de los s_{α_i} .

Téngase en cuenta que es posible distinguir entre el *Descending LOWA (DLOWA)* y el *Ascending LOWA (ALOWA) Operator*. El peso de estos operadores está relacionado por $w_j = w_{n+1-j}^*$ donde w_j es el j -ésimo peso del *DLOWA (o LOWA) Operator* y w_{n+1-j}^* el j -ésimo peso del *ALOWA Operator*.

El *LOWA Operator* suministra una familia parametrizada de operadores de agregación que incluye casos especiales como *Linguistic Average (LA)* y el *Linguistic Weighted Average (LWA)*. El *LA* es obtenido cuando todos los pesos w_j son iguales para todo j . El *LWA* se obtiene si la posición ordenada de los s_{β_j} es la misma que la posición ordenada de los s_{α_i} .

2.4. El Induced OWA Operator

El *IOWA Operator* (Yager & Filev, 1999) es una extensión del operador *OWA*, siendo su principal diferencia que la etapa de reordenamiento no se lleva a cabo con los valores de los argumentos a_j , sino que el paso de reordenación se desarrolla con variables inducidas que reflejan un proceso más complejo. El

IOWA Operator también incluye casos particulares como el máximo, el mínimo y los criterios de la media. Se puede definir de la siguiente manera:

Definición 6.3. Un *IOWA Operator* de dimensión n es una función *IOWA*: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que cuenta con un vector de ponderación W de dimensión n con $W = \sum_{j=1}^n w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$, de modo que:

$$IOWA(\langle u_1, a_1 \rangle, \langle u_2, a_2 \rangle, \dots, \langle u_n, a_n \rangle) = \sum_{j=1}^n w_j b_j \quad (6.3)$$

donde b_j es el valor a_i de la pareja *IOWA* $\langle u_i, a_i \rangle$ que tiene el j -ésimo más grande u_i , u_i es la variable de inducción y a_i es el argumento de la variable.

El *IOWA Operator* es monótono, acotado, idempotente y conmutativo y ha sido estudiado en una gran cantidad de problemas (Chen & Chen, 2003; Merigó & Casanovas, 2011a; Merigó & Gil Lafuente, 2011; Wei, 2010; Yager, 2003).

2.5. El Probabilistic OWA Operator

El *Probabilistic Ordered Weighted Averaging (POWA) Operator* es un operador de agregación que unifica la probabilidad y el *OWA Operator* en la misma formulación, considerando el grado de importancia que cada concepto tiene en el análisis (Merigó, 2011a; 2012a). Se define así:

Definición 6.4. Un *POWA Operator* de dimensión n es una función *POWA*: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que cuenta con un vector de ponderación W de dimensión n tal que $w_j \in [0, 1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$POWA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n \hat{p}_j b_j \quad (6.4)$$

donde b_j es el j -ésimo más grande de los a_i , cada argumento a_i tiene una ponderación asociada (WA) v_i con $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1 - \beta)v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es el peso (WA) v_i ordenado de acuerdo a b_j , es decir, de acuerdo con el j -ésimo más grande de los a_i .

Cuando se eligen diferentes vectores de ponderación se puede obtener una gran cantidad de casos particulares de los *POWA Operators* (Merigó, 2011a; 2012a). Especialmente cuando $\beta = 0$ se obtiene la agregación probabilística y si $\beta = 1$ el *OWA Operator*.

3. EL INDUCED LINGUISTIC PROBABILISTIC OWA OPERATOR

3.1. Conceptos principales

El *Induced Linguistic Probabilistic Ordered Weighted Averaging (ILPOWA)* es un nuevo modelo de agregación que unifica *Linguistic Probabilistic Aggregation (LPA)* y el *Induced LOWA (ILOWA) Operator* en la misma formulación, teniendo en cuenta el grado de importancia que cada concepto tiene en el análisis. Por lo tanto es capaz de tratar con información objetiva representada en forma de probabilidades y con el carácter actitudinal del decisor. Por otro lado, también evalúa la información incierta que no puede ser estimada con valores numéricos, pero es posible el uso variables lingüísticas. El operador *ILPOWA* se puede definir de la siguiente manera:

Definición 6.5. Un *ILPOWA Operator* de dimensión n es una función *ILPOWA*: $S^n \times S^n \rightarrow S$ que tiene un vector de ponderación asociado W de dimensión n , tal que, $w_j \in [0, 1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$ILPOWA(\langle u_1, s_{a1} \rangle, \langle u_2, s_{a2} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{an} \rangle) = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j s_{\beta_j} \quad (6.5)$$

donde s_{β_j} es el s_{a_i} valor lingüístico que tiene el j -ésimo más grande u_i , u_i es la variable de inducción a ordenar. Cada argumento s_{a_i} tiene una probabilidad asociada p_i con $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1 - \beta) p_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y p_j es la probabilidad p_i ordenada de acuerdo al s_{β_j} , que tenga el j -ésimo más grande u_i .

El *ILPOWA Operator* puede formularse separando la parte que afecta el *LPA* y el *ILOWA Operator* de la siguiente manera:

$$ILPOWA(\langle u_1, s_{a1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{an} \rangle) = \beta \sum_{j=1}^n w_j s_{\beta_j} + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n p_i s_{\alpha_i} \quad (6.6)$$

donde s_{β_j} es el s_{α_i} valor lingüístico que tiene el j -ésimo más grande u_i y $\beta \in [0, 1]$.

A continuación se presenta un ejemplo sencillo acerca del proceso de agregación utilizando el *ILPOWA Operator*.

Ejemplo 6.1. Se considera el conjunto de los siete términos lingüísticos explicados en la sección anterior y los siguientes argumentos lingüísticos en un proceso de agregación: $\{s_4, s_2, s_8, s_6\}$, con el vector de ponderación $W = \{0.2, 0.2, 0.3, 0.3\}$, el vector de probabilidad $V = \{0.3, 0.3, 0.2, 0.2\}$ y la variable de inducción $U = \{8, 4, 9, 6\}$. Suponiendo que la información probabilística tiene un grado de importancia del 60% mientras que el vector de ponderación W del *ILOWA Operator* tiene un 40%. Con el fin de agregar la información utilizando el *ILPOWA Operator* se pueden utilizar las ecuaciones (6.5) o (6.6), obteniendo el siguiente resultado con (6.6):

$$ILPOWA = 0.4 \times \{0.2 \times s_8 + 0.2 \times s_4 + 0.3 \times s_6 + 0.3 \times s_2\} + 0.6 \times \{0.3 \times s_4 + 0.3 \times s_2 + 0.2 \times s_8 + 0.2 \times s_6\} = s_{4.68}$$

Se puede distinguir entre el *Descending ILPOWA (DILPOWA)* y el *Ascending ILPOWA (AILPOWA) Operator* utilizando en el *ILOWA* $w_j = w_{n-j+1}^*$, donde w_j es la j -ésima ponderación del *DILPOWA* y w_{n-j+1}^* la j -ésima ponderación del *AILPOWA Operator*.

En caso de que el vector de ponderación no esté normalizado el *ILPOWA Operator* puede expresarse como:

$$ILPOWA(\langle u_1, s_{a1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{an} \rangle) = \frac{1}{\hat{V}} \sum_{j=1}^n \hat{v}_j s_{\beta_j} \quad (6.7)$$

El *ILPOWA* cumple las siguientes propiedades:

- Monotonía: porque si $s_{\alpha_i} \geq s_{\beta_i}$ para todo i , entonces, $ILPOWA \langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle \geq ILPOWA \langle u_1, s_{\beta_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\beta_n} \rangle$.
- Acotamiento: porque la agregación del $ILPOWA$ está delimitada por el mínimo y el máximo, es decir, $Min\{s_{\alpha_i}\} \leq ILPOWA \langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle \leq Max\{s_{\alpha_i}\}$.
- Idempotencia: porque, si $s_{\alpha_i} = s_{\beta_i}$ para todo i , entonces, $ILPOWA \langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle = s_{\alpha}$.
- Otra propiedad interesante que tiene el $ILPOWA$ Operator es la condición de semilimitación basándose en la información probabilística del problema.

Teorema (Condiciones de semilimitación): Asumiendo que f es el $ILPOWA$ Operator, entonces:

$$\begin{aligned} b \times Min\{s_{\alpha_i}\} + (1 - \beta) \times \sum_{i=1}^n p_i s_{\alpha_i} &\leq f \langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle \\ &\leq b \times Max\{s_{\alpha_i}\} + (1 - \beta) \times \sum_{i=1}^n p_i s_{\alpha_i} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Demostración: Sea $max\{s_{\alpha_i}\} = c$, y $min\{s_{\alpha_i}\} = d$, entonces:

$$\begin{aligned} f \langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle &= \beta \sum_{j=1}^n w_j s_{\beta_j} + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n p_i s_{\alpha_i} \leq \beta \sum_{j=1}^n w_j c + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n p_i s_{\alpha_i} \\ &= \beta c \sum_{j=1}^n w_j + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n p_i s_{\alpha_i} \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} f \langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle &= \beta \sum_{j=1}^n w_j s_{\beta_j} + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n p_i s_{\alpha_i} \leq \beta \sum_{j=1}^n w_j d + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n p_i s_{\alpha_i} \\ &= \beta d \sum_{j=1}^n w_j + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n p_i s_{\alpha_i} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Dado que $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, se obtiene:

$$f \langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle \leq \beta c + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n p_i s_{\alpha_i} \quad (6.11)$$

$$f \langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle \geq \beta d + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n p_i s_{\alpha_i} \quad (6.12)$$

Por consiguiente,

$$b \times \text{Min}\{s_{a_i}\} + (1 - \beta) \times \sum_{i=1}^n p_i s_{\alpha_i} \leq f(\langle u_1, s_{a_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{a_n} \rangle) \leq b \times \text{Max}\{s_{a_i}\} + (1 - \beta) \times \sum_{i=1}^n p_i s_{\alpha_i}.$$

Se debe tener en cuenta que si $\beta = 1$ se convierten en condiciones de limitación comunes. Esto es importante porque en algunas ocasiones el máximo y el mínimo pueden formar un intervalo demasiado amplio, siendo necesario obtener información más específica. Por lo tanto la formación de semi-límites basados en la información probabilística puede ser una buena alternativa.

Un tema interesante es el análisis de medidas para la caracterización del vector de ponderación W . Si se sigue una metodología similar a la que ha sido desarrollada para el *IOWA Weighted Average (IOWAWA) Operator* (Merigó, 2011b) se puede formular el orness, la entropía de la dispersión, la divergencia de W y el balance del operador. Por ejemplo, la entropía de la dispersión se formula así:

$$H(\hat{V}) = - \left(\beta \sum_{j=1}^n w_j \ln(w_j) + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n v_i \ln(v_i) \right) \quad (6.13)$$

Obsérvese que si $\beta = 0$ se convierte en la entropía clásica de Shannon (Shannon, 1948), mientras que si $\beta = 1$ se tiene la entropía de la dispersión de Yager usada en la agregación *OWA*.

Cabe resaltar que otros enfoques lingüísticos podrían ser utilizados cuando se trata con el operador *ILPOWA*, tales como el método lingüístico 2-tupla (Herrera & Martínez, 2000) y el modelo lingüístico desbalanceado (Herrera, et. al., 2008). Además se pueden utilizar diferentes técnicas para la representación de las variables lingüísticas. Si se observa la parte interna de la etiqueta lingüística se pueden incluir los números intervalo, números difusos, conjuntos probabilísticos y estructuras más complejas. Otros autores (Larsen, 2012; Liu & Su, 2010) proponen estudiar la perspectiva externa de la etiqueta lingüística utilizando los números intervalo o números difusos.

Es importante resaltar que en el caso de las relaciones en el proceso de reordenamiento de las variables inducidas los resultados agregados finales pueden ser diferentes, dependiendo del argumento lingüístico seleccionado en primer lugar. Este problema aparece debido a que el ordenamiento no depende de los argumentos como en el operador *OWA*. Para solucionarlo se recomienda utilizar el procedimiento explicado por Yager y Filev (1999) que consiste en la sustitución de cada argumento por el promedio. Sin embargo es posible utilizar cualquier operador de agregación desde el mínimo hasta el máximo.

Otro tema interesante es que algunos modelos anteriores ya consideran la posibilidad de utilizar operadores *OWA* y probabilidades en la misma formulación, tales como el concepto de probabilidades inmediatas (Yager et. al., 1995; Engemann et. al., 1996; Merigó, 2010). El uso de este concepto en el *ILPOWA* se convertiría en la probabilidad inmediata lingüística inducida de la siguiente manera:

$$ILPOWA(\langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \langle u_2, s_{\alpha_2} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle) = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j s_{\beta_j} \quad (6.14)$$

donde cada argumento s_{α_i} tiene una probabilidad asociada p_i con $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $p_i \in [0, 1]$, $\hat{p}_j = \left(\frac{w_j p_j}{\sum_{j=1}^n w_j p_j} \right)$ y p_j es la probabilidad p_i ordenada de acuerdo a s_{β_j} , que corresponde al j -ésimo más grande de los u_i .

Por otra parte es posible considerar otros enfoques que unifican el promedio ponderado con el operador *OWA*, ya que la media ponderada también puede ser vista como una probabilidad. Por ejemplo es posible extender el operador *ILPOWA* mediante el uso de medias híbridas (Xu & Da, 2003) y *WOWA Operators* (Torra, 1997). El *Induced Linguistic Hybrid Probabilistic Average ILHPA* se define como sigue:

$$ILHPA(\langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle) = \sum_{j=1}^n w_j s_{\beta_j} \quad (6.15)$$

donde s_{β_j} es el valor \hat{s}_{α_i} ($\hat{s}_{\alpha_i} = n_{\omega_i} s_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$) de la pareja *ILHPA* $\langle u_i, s_{\alpha_i} \rangle$ que tiene el j -ésimo más grande u_i , u_i es la variable inducida de ordenación, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ es el vector de ponderación de los s_{α_i} , con $\omega_i \in [0, 1]$ y $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$.

El *Induced Linguistic WOWA (ILWOWA) Operator* se define así:

$$ILWOWA(\langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle) = \sum_{i=1}^n \omega_i s_{\beta_{\sigma(i)}} \quad (6.16)$$

donde $\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$ es una permutación de $\{1, \dots, n\}$ tal que $u_{\sigma(i-1)} \geq u_{\sigma(i)}$ para todo $i = 2, \dots, n$, y la ponderación ω_i se define como:

$$\omega_i = w^* \left(\sum_{j \leq i} p_{\sigma(j)} \right) - w^* \left(\sum_{j < i} p_{\sigma(j)} \right) \quad (6.17)$$

siendo w^* una función monótona creciente que interpola los puntos $(i/n, \sum_{j \leq i} w_j)$ junto con el punto $(0, 0)$. Es necesario que w^* sea una línea recta para que los puntos se puedan interpolar de esta manera.

3.2. Familias de ILPOWA Operators

A continuación, se analizan una amplia gama de casos particulares de operadores *ILPOWA* siguiendo la metodología utilizada en la literatura *OWA* (Yager, 1993; Merigó & Gil Lafuente, 2009), para ver los diferentes escenarios que pueden ocurrir en el proceso de agregación desde el mínimo hasta el máximo. La principal ventaja de este apartado es que muestra que el *ILPOWA Operator* es muy flexible, ya que puede producir resultados diferentes en función del carácter actitudinal del decisor en cada problema en particular.

En primer lugar se consideran los dos casos principales del *ILPOWA Operator* al analizar el parámetro β . Si $\beta = 0$ se obtiene el *operator Linguistic Probabilistic Aggregation (LPA)*, también conocido como valor esperado lingüístico y si $\beta = 1$ el *ILOWA Operator*. Se puede observar que cuando β aumenta se da más importancia al *ILOWA Operator* y viceversa. Otros ejemplos interesantes son: el *Maximum-LPA*, el *Minimum-LPA* y el *Step-ILPOWA Operator*, como se detalla a continuación:

- El *Maximum-LPA* se encuentra cuando $w_1 = 1$ y $w_j = 0$ para todo $j \neq 1$. El *Minimum-LPA* se forma cuando $w_n = 1$ y $w_j = 0$ para todo $j \neq n$. Por otro lado el *Step-ILPOWA* se forma cuando $w_k = 1$ y $w_j = 0$ para todo $j \neq k$, teniendo en

cuenta que si $k = 1$, el *Step-ILPOWA* se convierte en el *Maximum-LPA*, y si $k = n$, este será el *Minimum-LPA*.

- El *Linguistic Arithmetic-LPA* se obtiene cuando $w_j = 1/n$ para todo j , calculándose de la siguiente forma:

$$LA-LPA(\langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle) = \frac{1}{n} \beta s_{\alpha_1} + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n v_i s_{\alpha_i} \quad (6.18)$$

Este se convierte en el *Linguistic Average* (LA) cuando el LPA es $v_i = 1/n$, para todo i . Otro resultado interesante se obtiene si $v_i = 1/n$, para todo i , al hacer la unificación entre el LA y el *ILOWA Operator*, denominado como el *Linguistic Arithmetic-ILOWA* (LA-ILOWA). El LA-ILOWA Operator se puede calcular así:

$$LA-ILOWA(\langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle) = \beta \sum_{j=1}^n w_j s_{\beta_j} + (1 - \beta) \frac{1}{n} s_{\alpha_i} \quad (6.19)$$

Otras familias relevantes son:

- El *Median-ILPOWA*: si n es impar se asigna $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_{j^*} = 0$ para los demás. Si n es par se asigna, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ y $w_{j^*} = 0$ para el resto
- El *Weighted Median-ILPOWA*: en este se selecciona el argumento b_k que tiene el k -ésimo argumento más grande, de forma tal que la suma de las ponderaciones desde 1 hasta k sea igual o superior a 0.5 y la suma de las ponderaciones 1 hasta $k - 1$ sea menor que 0.5
- El *S-ILPOWA*: $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha)$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta)$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$
- El *Olympic-ILPOWA*: cuando $w_1 = w_n = 0$, y para los demás $w_{j^*} = 1/(n - 2)$
- El *General Olympic-ILPOWA*: si $w_j = 0$ para $j = 1, 2, \dots, k, n, n - 1, \dots, n - k + 1$, y para los demás $w_{j^*} = 1/(n - 2k)$, donde $k < n/2$
- *Centered-ILPOWA*: este operador es simétrico, fuertemente descendente e incluyente. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$, es fuertemente descendente cuando $i < j \leq (n + 1)/2$ entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$ entonces $w_i < w_j$, y es incluyente si $w_j > 0$

También otras familias del *ILPOWA Operators* se pueden estudiar utilizando probabilidades y el *ILOWA Operator*. Además en la literatura sobre los *OWA* se pueden encontrar otras clases de familias para formar las ponderaciones (Yager et. al, 2011; Merigó, 2012a; Zeng et. al., 2012).

4. MEDIAS MÓVILES Y MEDIAS DE BONFERRONI EN EL ILPOWA OPERATOR

Otras extensiones al operador *ILPOWA* se pueden desarrollar utilizando otros operadores de agregación bien conocidos (Beliakov, 2007). Por ejemplo, pueden extenderse mediante el uso de medias móviles (Yager, 2008) y medias de Bonferroni (Yager, 2009).

Las medias móviles son muy útiles para representar información dinámica, como cuando se consideran varios períodos de tiempo en el mismo problema. Mediante el uso de los operadores *OWA* en la media móvil (Yager, 2008) es posible tratar información dinámica desde el mínimo hasta el resultado máximo potencial. En este caso, se forma el *Ordered Weighted Moving Average (OWMA)* que se puede definir como sigue:

$$OWMA(a_{1+t}, a_{2+t}, \dots, a_{m+t}) = \sum_{j=1+t}^{m+t} w_j b_j \quad (6.20)$$

donde b_j es el j -ésimo más grande de los argumentos a_i , m es el total de argumentos considerados en toda la muestra y t indica el cambio realizado en la media desde el análisis inicial.

De una forma más general es posible extender la media móvil a los operadores *OWA* enfocándose en el *ILPOWA Operator* para combinar ambos conceptos y obtener operadores de agregación móviles lingüísticos. Es decir, operadores de agregación que se mueven hacia un conjunto de argumentos imprecisos que pueden ser representados con variables lingüísticas, formándose de esta manera el *Induced Linguistic Probabilistic Ordered Weighted Moving Average (IL-POWMA)*, que se calcula del siguiente modo:

$$ILPOWMA (<u_{1+t}, s_{a_{1+t}}, \dots, u_{n+t}, s_{a_{n+t}}>) = \sum_{j=1+t}^{m+t} \hat{v}_j s_{\beta_j} \quad (6.21)$$

donde s_{β_j} es el valor lingüístico s_{a_i} de la pareja $\langle u_i, s_{a_i} \rangle$ del *ILPOWMA* que tiene el j -ésimo más pequeño u_i . La variable inducida de ordenación es u_i y cada argumento s_{a_i} tiene una probabilidad asociada p_i con $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta)p_j$ con $\beta \in [0, 1]$, w_j es la ponderación *OWMA* con $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$, p_j es la probabilidad p_i ordenada de acuerdo a s_{β_j} , que corresponde al j -ésimo más pequeño u_i , m es el número de argumentos considerados y t indica el movimiento desde el análisis inicial.

Obsérvese que si $\beta = 1$, el *ILPOWMA Operator* se convierte en el *OWMA Operator* y si $\beta = 0$, en el *Linguistic Probabilistic Moving Average*. Además, el *ILPOWMA* cumple propiedades similares al *ILPOWA* incluyendo monotonía, idempotencia y condiciones de acotamiento.

A continuación se muestra el uso del operador *OWA* en la media de Bonferroni, la cual fue introducida por Yager [2009], siguiendo esta metodología para extenderla usando el *ILPOWA Operators*. La media de Bonferroni se define así:

$$B(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{ij=1 \\ i \neq j}}^n a_i^p a_j^q \right)^{\frac{1}{p+q}} \quad (6.22)$$

Reordenando los términos [Beliakov et. al., 2010], se puede expresar como sigue:

$$B(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^p \left(\frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_j^q \right) \right)^{\frac{1}{p+q}} \quad (6.23)$$

En este artículo en lugar de introducir los operadores *OWA* en la media de Bonferroni como lo planteo Yager [46], se hace de la siguiente manera:

$$BON-OWA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\sum_{k=1}^n w_k a_k^p \left(\frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_j^q \right) \right)^{\frac{1}{p+q}} \quad (6.24)$$

donde a_k es el k -ésimo más pequeño de los a_i .

Siguiendo esta metodología, es posible extenderse a un contexto lingüístico formando el *BON-LOWA* como sigue:

$$BON-LOWA(s_{\alpha 1}, s_{\alpha 2}, \dots, s_{\alpha n}) = \left(\sum_{k=1}^n w_k s_{\beta_k}^p \left(\frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n s_{\alpha_j}^q \right) \right)^{\frac{1}{p+q}} \quad (6.25)$$

donde s_{β_k} es el k -ésimo más pequeño de los s_{α_i} .

Puede generalizarse utilizando el *ILPOWA Operator* obteniendo el *BON-ILPOWA Operator* como sigue:

$$BON-ILPOWA(\langle u_1, s_{\alpha 1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha n} \rangle) = \left(\sum_{k=1}^n \hat{v}_k s_{\beta_k}^p \left(\frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n s_{\alpha_j}^q \right) \right)^{\frac{1}{p+q}} \quad (6.26)$$

donde s_{β_k} es el valor lingüístico s_{α_i} que tiene el k -ésimo más pequeño u_i , que es la variable inducida de ordenación; cada argumento s_{α_i} tiene una probabilidad asociada p_i con $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_k = \beta w_k + (1-\beta)p_k$ con $\beta \in [0, 1]$, w_k es la ponderación del *OWA* con $\sum_{k=1}^n w_k = 1$ y $w_k \in [0, 1]$, y p_k es la probabilidad p_i ordenada de acuerdo a s_{β_k} , que corresponde al k -ésimo más pequeño u_i .

5. DECISIONES DE GRUPO CON EL ILPOWA OPERATOR

5.1. Marco teórico

El *ILPOWA Operator* se puede utilizar en una amplia gama de aplicaciones, pero en este trabajo se toma un problema de decisiones de grupo multicriterio con respecto a la gestión de importaciones en el gobierno de un país. La principal ventaja del *ILPOWA Operator* es que se pueden utilizar probabilidades y el carácter actitudinal del decisor en el análisis bajo un entorno impreciso que puede evaluarse con información lingüística, lo cual permite considerar entornos de incertidumbre y de riesgo en la misma formulación, teniendo en cuenta su importancia en el problema considerado. En otras palabras, es posible formar problemas de decisiones lingüísticas bajo riesgo e incertidumbre. En la literatura existen muchos otros métodos para la toma de decisiones (Figueira et. al., 2005; Zavadskas & Turskis, 2011; Xu & Xia, 2012).

El proceso a seguir en la selección de estrategias de importación con el *ILPOWA Operator* se resume de la siguiente forma:

Paso 1. Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto de alternativas finitas, $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ un conjunto de estados de la naturaleza (o atributos), que forman la matriz de pagos $(s_{gi})_{m \times n}$. Esta matriz se forma para cada criterio $CR = (C_{r1}, C_{r2}, \dots, C_{rx})$. Todos estos criterios se agregan a través del vector de ponderación $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ con $\sum_{e=1}^h y_e = 1$ y $y_e \in [0, 1]$

Paso 2. Sea $E = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ un conjunto de expertos finito. Sea $Z = (z_1, z_2, \dots, z_p)$ el vector de ponderación de los expertos, tal que $\sum_{k=1}^p z_k = 1$ y $z_k \in [0, 1]$. Cada experto proporciona su propia matriz de pagos $(s_{gi}^{(k)})_{m \times n}$. Si se utiliza la media ponderada para agregar la información de los expertos E mediante el vector de ponderación Z , se obtiene la matriz de pagos colectiva, $(s_{gi})_{m \times n}$. Por tanto, $s_{gi} = \sum_{k=1}^p z_k s_{gi}^k$

Paso 3. Se calcula el orden de las variables de inducción $(u_{gi})_{m \times n}$ para ser usado en la matriz de pagos para cada alternativa g y estado de la naturaleza i . Por otro lado se define el vector de ponderación W y P para ser usados en el *ILPOWA Operator* y el parámetro β , teniendo en cuenta que $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ tal que $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ tal que $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ y $p_j \in [0, 1]$

Paso 4. Se calculan los resultados agregados usando el *ILPOWA Operator* explicado en la fórmula (6.5). También se pueden aplicar diferentes casos particulares del *ILPOWA* usando las expresiones explicadas en la sección 3.2.

Paso 5. Se adoptan las decisiones de acuerdo con los resultados obtenido en los pasos anteriores, seleccionando la mejor alternativa, estableciendo además un ranking de alternativas desde la más preferida a la menos preferida, para considerarlas en la selección.

El proceso de agregación se puede resumir utilizando el siguiente operador denominado *Multi-criteria Multi-person-ILPOWA (MC-MP-ILPOWA) Operator*.

Definición 6.6. Sea S un conjunto de variables lingüísticas. Un *MC-MP-ILPOWA Operator* de dimensión n es una función *MC-MP-ILPOWA*: $R_n \times S_n \times S_p \times S_h \rightarrow S$, que tiene un vector de ponderación Z de dimensión p con $\sum_{k=1}^p z_k = 1$ y $z_k \in [0, 1]$ y un vector de ponderación W de dimensión n con $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$, tal que:

$$f(\langle u_1, (s_{\alpha_1}^1, \dots, s_{\alpha_1}^p) \rangle, \dots, \langle u_n, (s_{\alpha_n}^1, \dots, s_{\alpha_n}^p) \rangle) = \sum_{j=1}^n \hat{w}_j s_{\beta_j} \quad (6.27)$$

donde s_{β_j} es el valor lingüístico s_{α_i} que tiene el j -ésimo más grande u_i , que es la variable de orden inducida, cada argumento s_{α_i} cuenta con una probabilidad asociada p_i con $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{p}_j = \beta w_j + (1 - \beta) p_j$ con $\beta \in [0, 1]$, p_j es la probabilidad p_i ordenada de acuerdo al s_{β_j} , que tiene el j -ésimo más grande u_i , y $s_{\alpha_i} = \sum_{k=1}^p z_k s_{\alpha_i}^k$, siendo $s_{\alpha_i}^k$ la variable argumento proporcionada por cada experto en forma de variable lingüística, después de considerar los diferentes criterios, $s_{\alpha_i}^k = \sum_{e_k=1}^h y_{e_k} s_{\alpha_i}^{e_k}$, $s_{\alpha_i}^{e_k}$ es el argumento lingüístico suministrado por cada experto para cada criterio. Y es un vector de ponderación de dimensión h con $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ e $y_{e_k} \in [0, 1]$

El *MC-MP-ILPOWA Operator* cumple con propiedades similares a las explicadas en la sección 6.3, además de incluir una amplia variedad de casos particulares siguiendo la metodología explicada en la sección 6.4. Por tanto, se pueden encontrar casos especiales como:

- El *Multi-Criteria-Multi-Person - LPA (MC-MP-LPA) Operator*
- El *Multi-Criteria-Multi-Person - Linguistic Arithmetic Mean (MC-MP-LAM) Operator*
- El *Multi-Criteria-Multi-Person - ILOWA (MC-MP-ILOWA) Operator*
- El *Multi-Criteria-Multi-Person - LOWA (MC-MwP-LOWA) Operator*
- El *Multi-Criteria-Multi-Person - LPOWA (MC-MP-LPOWA) Operator*

Otras situaciones más complejas se pueden considerar utilizando diferentes tipos de operadores en la agregación de opiniones de expertos en lugar del *WA Operator*, como el caso del *ILPOWA Operator*, entre otros.

5.2. Ejemplo ilustrativo

A continuación se desarrolla un ejemplo ilustrativo del nuevo enfoque de decisiones multi-persona multi-criterio lingüístico acerca de la selección de estrategias de importación, en el que se sigue el siguiente proceso:

Paso 1. Suponiendo que un gobierno planea su estrategia de importación para el próximo año, teniendo un producto clave que debe importar de otro país y que después de analizar el mercado se tienen las siguientes seis alternativas posibles:

- A_1 : Importar el producto de China
- A_2 : Importar el producto de India
- A_3 : Importar el producto de Brasil
- A_4 : Importar el producto de Indonesia
- A_5 : Importar el producto de Rusia
- A_6 : Importar el producto de Turquía

El gobierno convoca a un grupo de expertos para evaluar el problema, los cuales después de revisar la información establecer los siguientes dos criterios para determinar la estrategia:

1. Entorno económico del país (interno).
2. Situación económica mundial para el próximo año (externo).

Con ambos criterios se consideran seis posibles escenarios que pueden ocurrir en el próximo periodo:

S_1 : Muy Buena situación económica

S_2 : Buena situación económica

S_3 : Ligeramente buena situación económica

S_4 : Ligeramente mala situación económica

S_5 : Mala situación económica

S_6 : Muy mala situación económica

El grupo de expertos está constituido por tres personas y cada uno emite su opinión sobre los resultados de las estrategia. En las tablas 6.1 y 6.2 se muestran los resultados para el primer experto por criterio.

Tabla 6.1. Experto 1-Criterio 1

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	s_9	s_4	s_2	s_1	s_7	s_7
A_2	s_4	s_4	s_4	s_5	s_4	s_1
A_3	s_9	s_4	s_4	s_4	s_1	s_4
A_4	s_8	s_7	s_5	s_4	s_5	s_7
A_5	s_7	s_8	s_7	s_8	s_4	s_4
A_6	s_4	s_3	s_2	s_7	s_7	s_2

Tabla 6.2. Experto 1-Criterio 2

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	s_7	s_8	s_4	s_3	s_3	s_9
A_2	s_8	s_4	s_4	s_3	s_2	s_3
A_3	s_9	s_8	s_4	s_2	s_5	s_2
A_4	s_4	s_7	s_5	s_2	s_5	s_5
A_5	s_5	s_2	s_5	s_8	s_4	s_4
A_6	s_2	s_5	s_4	s_9	s_9	s_4

Con esta información lingüística se determina una opinión general del primer experto, asumiendo que los dos criterios valorados tienen la misma importancia, es decir, $Y = (0,5, 0,5)$. Los resultados se muestran en la tabla 6.3.

Tabla 6.3. Resultado general esperado del Experto 1

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	s_8	s_4	s_2	s_2	s_5	s_8
A_2	s_7	s_4	s_5	s_4	s_3	s_2
A_3	s_9	s_7	s_5	s_3	s_3	s_3
A_4	s_7	s_7	s_5	s_4	s_5	s_4
A_5	s_4	s_5	s_4	s_8	s_5	s_5
A_6	s_3	s_4	s_3	s_8	s_8	s_4

En el caso de los otros dos expertos se sigue una metodología similar. Las tablas 6.4 y 6.5 presentan los resultados del experto 2 para cada criterio y la tabla 6.6 los resultados generales esperados con base en la agregación de los dos criterios.

Tabla 6.4. Experto 2-Criterio 1

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	s_4	s_8	s_4	s_2	s_7	s_4
A_2	s_5	s_7	s_4	s_4	s_1	s_1
A_3	s_9	s_7	s_4	s_2	s_5	s_3
A_4	s_7	s_4	s_5	s_4	s_3	s_4
A_5	s_4	s_4	s_7	s_3	s_4	s_4
A_6	s_3	s_4	s_6	s_7	s_4	s_4

Tabla 6.5. Experto 2-Criterio 2

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	S_8	S_4	S_4	S_5	S_3	S_4
A_2	S_7	S_7	S_8	S_4	S_7	S_3
A_3	S_9	S_9	S_4	S_4	S_1	S_3
A_4	S_5	S_8	S_5	S_4	S_5	S_8
A_5	S_8	S_8	S_7	S_3	S_4	S_8
A_6	S_5	S_4	S_4	S_3	S_2	S_8

Tabla 6.6. Resultado general esperado del Experto 2

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	S_7	S_7	S_4	S_4	S_5	S_5
A_2	S_4	S_7	S_7	S_4	S_4	S_2
A_3	S_9	S_8	S_5	S_3	S_3	S_3
A_4	S_4	S_7	S_5	S_4	S_4	S_7
A_5	S_7	S_7	S_7	S_3	S_4	S_7
A_6	S_4	S_5	S_5	S_5	S_3	S_4

El mismo método se aplica para el experto 3, donde los resultados esperados para cada criterio se muestran en las tablas 6.7 y 6.8 y se agregan para obtener un resultado general esperado que se puede ver en la tabla 6.9.

Tabla 6.7. Experto 3-Criterio 1

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	S_4	S_7	S_4	S_3	S_7	S_5
A_2	S_5	S_7	S_4	S_7	S_5	S_1
A_3	S_9	S_4	S_3	S_2	S_2	S_4
A_4	S_4	S_7	S_4	S_4	S_4	S_8
A_5	S_4	S_3	S_8	S_4	S_5	S_9
A_6	S_7	S_4	S_7	S_4	S_3	S_4

Tabla 6.8. Experto 3-Criterio 2

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	s_{82}	s_{77}	s_{88}	s_{55}	s_{33}	s_{77}
A_2	s_{99}	s_{55}	s_{44}	s_{55}	s_{33}	s_{33}
A_3	s_{99}	s_{88}	s_{77}	s_{44}	s_{44}	s_{22}
A_4	s_{44}	s_{77}	s_{44}	s_{22}	s_{44}	s_{44}
A_5	s_{22}	s_{55}	s_{88}	s_{88}	s_{77}	s_{55}
A_6	s_{33}	s_{44}	s_{99}	s_{44}	s_{55}	s_{88}

Tabla 6.9. Resultado general esperado del Experto 3

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	s_{77}	s_{77}	s_{44}	s_{44}	s_{55}	s_{44}
A_2	s_{77}	s_{44}	s_{55}	s_{44}	s_{44}	s_{22}
A_3	s_{99}	s_{77}	s_{55}	s_{33}	s_{33}	s_{33}
A_4	s_{55}	s_{77}	s_{55}	s_{44}	s_{44}	s_{44}
A_5	s_{44}	s_{44}	s_{88}	s_{77}	s_{44}	s_{77}
A_6	s_{55}	s_{55}	s_{88}	s_{55}	s_{44}	s_{77}

Paso 2. Las opiniones de los expertos se agregan para obtener unos resultados colectivos utilizando la media ponderada en una matriz, en la que se asume que $Z = (0.3, 0.3, 0.4)$, como se muestra en la tabla 6.10.

Tabla 6.10. Resultados colectivos

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	$s_{7.3}$	$s_{6.7}$	$s_{4.5}$	$s_{3.4}$	s_5	$s_{6.3}$
A_2	$s_{6.7}$	$s_{6.3}$	$s_{5.6}$	$s_{5.4}$	$s_{3.7}$	s_2
A_3	s_9	$s_{7.3}$	s_5	s_3	s_3	s_3
A_4	$s_{5.9}$	s_7	s_5	s_4	$s_{4.3}$	$s_{6.3}$
A_5	$s_{5.5}$	$s_{5.6}$	$s_{7.1}$	$s_{6.1}$	$s_{5.7}$	$s_{6.4}$
A_6	$s_{4.1}$	$s_{6.7}$	$s_{5.6}$	$s_{5.9}$	$s_{4.9}$	$s_{5.8}$

Paso 3. Para analizar el carácter actitudinal del grupo de expertos se considera el uso de variables de inducción, en el proceso de decisión con el vector $U = (14, 18, 10, 8, 15, 17)$. La principal ventaja del uso de dichas variables es que se puede representar un proceso de decisión complejo que incluye factores psicológicos como la presión del tiempo, características personales y otros aspectos relacionados para cada alternativa.

Luego se requiere estimar el parámetro β y los vectores de ponderación W y P . En este caso se asume que $\beta = 0.5$ y los vectores $W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3)$ y $P = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1)$.

Paso 4. Utilizando la información anterior se pueden desarrollar diferentes métodos basados en el *ILPOWA Operator* para la selección de estrategias de importación. El uso de este operador proporciona una visión más completa para al decisor, al poder considerar diferentes escenarios futuros posibles, puesto que debido a la incertidumbre no se conoce el escenario exacto. Por tanto la representación de los diferentes casos que pueden suceder (desde el mínimo hasta el máximo) es útil, para tener una mejor perspectiva de las diferentes situaciones futuras y de esta forma el decisor puede conocer los resultados que se obtienen con cada alternativa, para elegir aquella que más se acerque a sus intereses.

En este ejemplo se consideran el *Maximun Linguistic*, el *Minimun Linguistic*, *Maximum Probabilistic Aggregation (Max-LPA)*, el *Linguistic Minimum Probabilistic Aggregation (Min-LPA)*, el *Linguistic Arithmetic Mean (LAM)*, el *LPA*, el *LOWA*, el *ILOWA* y el *ILPOWA Operator*. Los resultados se muestran en las tablas 6.11 y 6.12.

Tabla 6.11. Resultados agregados 1

	Min	Max	MaxLPA	MinLPA	LAM
A_1	$S_{3.4}$	$S_{7.3}$	$S_{4.29}$	$S_{4.34}$	$S_{5.53}$
A_2	S_2	$S_{4.7}$	$S_{5.88}$	$S_{3.53}$	$S_{4.95}$
A_3	S_3	S_9	$S_{4.93}$	$S_{3.93}$	$S_{5.05}$
A_4	S_4	S_7	$S_{4.14}$	$S_{4.64}$	$S_{5.41}$
A_5	$S_{5.5}$	$S_{7.1}$	$S_{4.59}$	$S_{5.79}$	$S_{4.04}$
A_6	$S_{4.1}$	$S_{5.9}$	$S_{5.55}$	$S_{4.45}$	$S_{5.14}$

Tabla 6.12. Resultados agregados 2

	LPA	LOWA	ILOWA	ILPOWA
A_1	$S_{5,28}$	$S_{4,95}$	$S_{5,18}$	$S_{5,23}$
A_2	$S_{5,07}$	$S_{4,28}$	$S_{5,28}$	$S_{5,17}$
A_3	$S_{4,84}$	$S_{4,23}$	$S_{5,03}$	$S_{4,94}$
A_4	$S_{5,28}$	$S_{4,98}$	$S_{5,14}$	$S_{5,21}$
A_5	$S_{4,09}$	$S_{5,32}$	$S_{4,12}$	$S_{4,10}$
A_6	$S_{5,21}$	$S_{4,47}$	$S_{5,25}$	$S_{5,23}$

Paso 5: Cada enfoque puede concluir en una decisión diferente, aunque en la mayoría de los casos A_5 parece ser la óptima, excepto en el *Max-LPA* y el máximo, en los cuales A_3 es mejor. Por ello es importante establecer una ordenación de las estrategias de importación para considerar otras alternativas, como se muestra en la tabla 6.13.

Tabla 6.13. Ordenación de las estrategias de importación

	Ordenación		Ordenación
Max	$A_3 \uparrow A_1 \uparrow A_5 \uparrow A_4 \uparrow A_2 \uparrow A_6$	LPA	$A_5 \uparrow A_1 = A_4 \uparrow A_6 \uparrow A_2 \uparrow A_3$
Min	$A_5 \uparrow A_6 \uparrow A_4 \uparrow A_1 \uparrow A_3 \uparrow A_2$	LOWA	$A_5 \uparrow A_4 \uparrow A_1 \uparrow A_6 \uparrow A_2 \uparrow A_3$
MaxLPA	$A_3 \uparrow A_5 \uparrow A_1 \uparrow A_4 \uparrow A_2 \uparrow A_6$	ILOWA	$A_5 \uparrow A_2 \uparrow A_6 \uparrow A_1 \uparrow A_4 \uparrow A_3$
MinLPA	$A_5 \uparrow A_6 \uparrow A_4 \uparrow A_1 \uparrow A_3 \uparrow A_2$	ILPOWA	$A_5 \uparrow A_1 = A_6 \uparrow A_4 \uparrow A_2 \uparrow A_3$
LAM	$A_5 \uparrow A_1 \uparrow A_6 \uparrow A_4 \uparrow A_3 \uparrow A_2$		

Dependiendo del tipo de operador de agregación utilizado, los resultados pueden conducir a diferentes decisiones. Por lo tanto, el decisor conoce todos los diferentes escenarios que se pueden producir y así seleccionar el más cercano de acuerdo a sus intereses. Técnicamente estos intereses deben ser representados mediante el operador *ILPOWA*.

6. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un nuevo método para la toma de decisiones de grupo lingüísticas con el *ILPOWA Operator*. Siendo su principal ventaja que se pueden considerar entornos inciertos y arriesgados en la misma formulación, teniendo en cuenta que la información imprecisa puede ser evaluada con variables lingüísticas e incluir operadores de agregación inducidos, para representar características actitudinales complejas. Un tema clave es que el *ILPOWA Operator* incluye una amplia variedad de casos particulares como la media lingüística, el *LOWA Operator* y el valor esperado lingüístico, además de extensiones con medias móviles y medias de Bonferroni.

Este nuevo modelo puede ser implementado en muchos campos, ya que todos los estudios anteriores que utilizan la probabilidad o el operador *OWA* en un marco lingüístico pueden ser revisados y ampliados con este enfoque. Este trabajo se ha centrado en la toma de decisiones multi-personal multi-criterio lingüística con respecto a la selección de la estrategia óptima de importación de un país. Para ello se ha construido el operador *MC-MP-ILPOWA* que permite tratar la opinión de varios expertos y criterios en el análisis, observándose que una de las principales características de este enfoque es la evaluación de problemas de decisión lingüísticos bajo riesgo e incertidumbre en la misma formulación.

En futuras investigaciones se espera diseñar nuevos métodos que incluyan otras características como el uso de medias ponderadas y los operadores de agregación generalizadas, además de estudiar otras aplicaciones en áreas como la teoría de la decisión, la ingeniería y la economía.

7. TOMA DE DECISIONES EN PROCESOS DE TARIFICACIÓN DE SEGUROS NO VIDA UTILIZANDO LÓGICA DIFUSA Y OPERADORES OWA

1. INTRODUCCIÓN

Un proceso de tarificación de seguros no vida, parte del cálculo de la prima pura con métodos estadísticos a los cuales se les agrega un recargo de seguridad para garantizar la solvencia y posteriormente otro recargo por los gastos de gestión tanto interna como externa. Hasta aquí estas decisiones se basan en los costes y pueden variar dependiendo del perfil del riesgo de los asegurados, teniendo en cuenta una segmentación previa. Sin embargo, en el momento de establecer una prima comercial que será la que realmente pagarán los clientes, esta dependerá del margen de beneficios definido por la compañía aseguradora de acuerdo con su estrategia comercial. Este margen por lo general, es un porcentaje sobre la prima pura más los recargos correspondientes, el cual se convierte en un problema de gran complejidad, puesto que el valor de la prima comercial afecta directamente la demanda y por ende los beneficios globales, y mucho más en estos casos cuando se trata del cubrimiento de un riesgo, donde la incertidumbre es mayor, teniendo en cuenta las siguientes situaciones:

- Una prima comercial baja, tiene un margen de beneficio unitario bajo, pero puede ser más atractivo en el mercado haciendo que la demanda aumente y posiblemente los beneficios globales sean mayores.
- Una prima comercial alta, tiene un mayor margen de beneficio, pero hace que el producto sea menos competitivo en el mercado disminuyendo su demanda y posiblemente los beneficios globales.

- Una disminución o aumento elevado de la cartera de asegurados por las dos situaciones anteriores, puede hacer que cambie el perfil de riesgo de los clientes y tener que hacer ajustes posteriores para evitar una posible insolvencia.
- El crecimiento económico puede hacer aumentar la demanda o disminuirla en caso de recesión, como también afectar el comportamiento del consumidor principalmente en los factores precio y calidad.

Por otro lado, no es fácil llegar a un consenso entre los departamentos de marketing y financiero para establecer una política de precios, puesto que los primeros prefieren precios más bajos para que los productos sean más fáciles de vender y los segundos prefieren precios altos que puedan garantizar una mejor solvencia. La clave para decidir una estrategia de precios dependerá en como la demanda afecta los beneficios totales, sin olvidar que al tener un producto segmentado por perfiles de riesgo la situación será diferente en cada uno de ellos.

Todo esto nos lleva a tener en cuenta la gran dificultad de hacer pronósticos sobre la demanda y los beneficios en este problema, por la gran incertidumbre de las diferentes situaciones. En este caso tendremos en cuenta los siguientes factores como los más relevantes:

- Las diferentes situaciones de la economía y su comportamiento esperado en el futuro para un determinado mercado.
- La experiencia de los expertos en cada uno de los segmentos del mercado, hacen que dichas opiniones sean o no relevantes.

El método propuesto pretende que la toma de decisiones con relación a la estrategia de precios para las tarifas de la prima comercial de una cartera de asegurados se haga en dos etapas, con el fin de dar un mejor tratamiento a las opiniones de los expertos utilizando números inciertos y operadores de agregación de información OWA.

2. PRELIMINARES

En este apartado se explican los principales conceptos de lógica difusa y operadores de agregación de información *OWA* utilizados en la metodología propuesta.

2.1. Lógica difusa

La lógica difusa (*Fuzzy Logic* en Inglés) fue introducida por Lofti Zadeh (1965) como una forma de tratar la información ambigua, imprecisa o incompleta, al permitir trabajar con valores intermedios que pueden ser expresados en un intervalo o función de pertenencia. Desde su introducción, han recibido mucha atención por parte de la comunidad científica y en la actualidad hay decenas de miles de investigadores que estudian aspectos relacionados con esta metodología. Para obtener una visión general de esta teoría, véase por ejemplo Dubois y Prade (1980), Kaufmann y Gupta (1985) y Kaufmann y Gil-Aluja (1987). En la actualidad, se han diseñado una amplia gama de extensiones y generalizaciones a este concepto y una gran variedad de aplicaciones en muchas disciplinas científicas entre las que se puede mencionar la toma de decisiones (Merigó y Casanovas, 2010), la ingeniería, la estadística, las finanzas (Merigó y Casanovas, 2011a) y la gestión estratégica.

2.2. Números inciertos

Fueron introducidos por Moore (1966), con el propósito de valorar la incertidumbre a través de intervalos de confianza, en los cuales se tiene un extremo inferior, un extremo superior y un valor o intervalo de máxima presunción así:

- Intervalo de confianza $[a_1, a_2]$: Corresponde a un conjunto de valores superiores o iguales a a_1 e inferiores o iguales a a_2 .
- Tripletta de confianza $[a_1, a_2, a_3]$: Corresponde a un conjunto de valores superiores o iguales a a_1 e inferiores o iguales a a_3 , pero principalmente se considera muy probable que sea cercano a a_2 .

- Cuádruplo de confianza $[a_1, a_2, a_3, a_4]$: Corresponde a un conjunto de valores superiores o iguales a a_1 e inferiores o iguales a a_4 , pero lo más probable es que se encuentre en un subintervalo de máxima presunción $[a_2, a_3]$.

Con los números inciertos también se puede llevar a cabo operaciones básicas así:

Sean $A = [a_1, a_2, a_3]$ y $B = [b_1, b_2, b_3]$, entonces:

- $A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$
- $A - B = [a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1]$
- $A \times k = [k a_1, k a_2, k a_3]$, siendo $k > 0$
- $A \times B = [a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3]$
- $A \div B = [a_1 \div b_1, a_2 \div b_2, a_3 \div b_3]$

2.3. Operador de Agregación de Información OWA

Definición 7.1. Un operador *OWA* se define como una función de dimensión n $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a la que se asocia un vector W de dimensión n $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$, que cumple las siguientes condiciones:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j$$

La esencia de los *OWA* (Yager, 1988) es el reordenamiento de los elementos o argumentos, haciendo que en la agregación los a_j no estén asociados con una ponderación w_j , pero los w_j si estarán asociados con la posición en el orden para la agregación.

2.4. Operador de Agregación Ascending OWA (AOWA)

Definición 7.2. Un operador *AOWA* se define como una función de dimensión n , $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a la que se asocia un vector W de dimensión n $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$, que cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}w_j &\in [0, 1] \\ \sum_{j=1}^n w_j &= 1 \\ f(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j\end{aligned}$$

Donde b_j , es el j -ésimo más pequeño de los a_j , o sea, que $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, diferenciándose así de los OWA, donde $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$.

Como se puede notar la diferencia entre el operador *OWA* (*Descending OWA*) y el *Ascending OWA* es la forma en que se hace la ordenación de los argumentos, bien sea en forma descendente el primero o ascendente el segundo y que dependerá de la actitud optimista o pesimista del decisor.

2.5. Extensiones de los operadores OWA

Una de las principales características de estos operadores es la flexibilidad que tienen para adaptarse a diferentes circunstancias para tratar problemas de diversa índole y combinarlos con otras herramientas para la toma de decisiones. De modo que, muchos autores han venido desarrollando múltiples extensiones donde se integra los *OWA* con lógica difusa, medidas de distancia, probabilidades y otras técnicas que mejoran el proceso decisorial. Por su extensión, en este artículo se explican solamente aquellas que se relacionan directamente con la metodología a trabajar.

2.5.1. Uncertain OWA Operator

El operador *Uncertain OWA (UOWA)*, fue propuesto por Xu y Da (2002) para situaciones de incertidumbre en las cuales se utilizan intervalos de confianza para presentar la información. Dichos intervalos se puede presentar de diferentes formas: cuádruplos de confianza, cuando estos se componen de 4-tuplas (a, b, c, d), donde, a es el mínimo, d el máximo; b y c el intervalo de máxima presunción, tripletas de confianza, cuando b y c son iguales, e intervalos de confianza cuando b y c no son conocidos.

Definición 7.3. Un operador *UOWA* se define como una función $F: \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n , con un vector asociado $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, tal que:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

con

$$UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j^* \quad (7.1)$$

donde b_j^* es el j -ésimo más grande de los \tilde{a}_i , \tilde{a}_i ($i \in \mathbb{N}$) son los intervalos de confianzas ya sean definidos como simples, tripletas o cuádruplos.

Una de las dificultades de este método es la ordenación de los intervalos de confianza donde no siempre es claro que uno sea superior a otro, teniendo que recurrir a otros criterios subjetivos como el valor medio, y en otros casos el de mayor extremo superior para los más optimistas, o el de mayor extremo inferior para los más pesimistas, o un valor medio ponderado, como por ejemplo $(a_1 + 4a_2 + 4a_3 + a_4) / 10$ en el caso de un cuádruplo de confianza.

En este método el operador *Ascending UOWA (AUOWA)*, corresponde a una ordenación ascendente se define como una función $F: \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n , con un vector asociado $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, tal que:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

con,

$$AUOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j^* \quad (7.2)$$

donde b_j^* es el j -ésimo más pequeño de los \tilde{a}_i , \tilde{a}_i ($i \in \mathbb{N}$) son los intervalos de confianzas. El operador $UOWA$ puede ser extendido y generalizado mediante diferentes contextos incluyendo el use de medias generalizadas (Merigó y Casanovas, 2011a) y cuasi-aritméticas (Merigó y Casanovas, 2011b).

2.5.2. Uncertain Probabilistic OWA Operator

Definición 7.4. Un operador $UPOWA$ (Merigó y Wei, 2011) se define como una función $F: \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n , que tiene un vector de ponderaciones W asociado $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ tal que, $w_j \in [0, 1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, y un vector de probabilidades $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$, tal que, $v_i \in [0, 1]$ y $\sum_{i=1}^n v_i = 1$, siendo:

$$UPOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \beta \sum_{j=1}^n w_j b_j^* + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n v_i \tilde{a}_i \quad (7.3)$$

donde b_j^* es el j -ésimo más grande de los \tilde{a}_i , \tilde{a}_i ($i \in \mathbb{N}$) son los intervalos de confianzas ya sean definidos como simples, tripletas o cuádruplos.

En el caso del operador *Ascending Uncertain Probabilistic OWA (AUPOWA)* se define como una función $F: \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n , que tiene un vector de ponderaciones W asociado $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ tal que, $w_j \in [0, 1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, y un vector de probabilidades $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$, tal que, $v_i \in [0, 1]$ y $\sum_{i=1}^n v_i = 1$, siendo:

$$AUPOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \beta \sum_{j=1}^n w_j b_j^* + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n v_i \tilde{a}_i \quad (7.4)$$

donde b_j^* es el j -ésimo más pequeño de los \tilde{a}_i , \tilde{a}_i ($i \in \mathbb{N}$) son los intervalos de confianzas ya sean definidos como simples, tripletas o cuádruplos. Cabe destacar que el *UPOWA Operator* puede ser extendido mediante el uso de medidas de distancia (Merigó *et al.*, 2013; Zeng *et al.*, 2013).

2.5.3. Heavy OWA Operator

Estos operadores fueron propuestos por Yager (2002), siendo su característica principal que la suma de las ponderaciones no es igual a 1, sino que se encuentra entre 1 y n . La importancia de este operador es su aplicación en situaciones que son independientes entre sí, o sea, que los resultados se pueden producir simultáneamente.

Definición 7.5. Un operador *HOWA* se define como una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de dimensión n , con un vector asociado W , tal que:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$1 \leq \sum_{j=1}^n w_j \leq n$$

y,

$$HOWA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j \quad (7.5)$$

donde, b_j es j -ésimo más grande los a_i .

En el caso del *Ascending HOWA (AHOWA) Operator* que corresponde a la ordenación ascendente de los argumentos se puede definir como una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de dimensión n , con un vector asociado W , tal que:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$1 \leq \sum_{j=1}^n w_j \leq n$$

y,

$$AHOWA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j \quad (7.6)$$

donde, b_j es j -ésimo más pequeños los a_j . Obsérvese que el operador *HOWA* ha sido extendido y generalizado por muchos estudios incluyendo el *Uncertain Induced HOWA Operator* (Merigó y Casanovas, 2011c) y el *Induced Heavy OWA Distance Operator* (Merigó y Casanovas, 2010).

3. METODOLOGÍA PROPUESTA

Como se mencionó anteriormente existen diferentes situaciones que crean incertidumbre en relación con el problema expuesto, lo cual conlleva a que se tenga que recurrir a información subjetiva de la opinión de expertos para determinar cuál puede ser la mejor alternativa de margen de beneficios en función de obtener unos mejores beneficios totales, para esto se propone el siguiente proceso:

Etapa I. Calculo de beneficios esperados por perfiles de riesgo y niveles de beneficio

Los beneficios esperados son la clave para tomar decisiones sobre cada una de las estrategias de precios, en este caso, estos son calculados teniendo en cuenta la opinión de expertos para cada uno de los segmentos, a través de los siguientes pasos:

Paso 1. Selección de expertos: Para poder contar con opiniones de expertos que se ajusten a la realidad se seleccionará un experto para cada segmento o perfil de riesgo, asumiendo que cada uno por su experiencia tendrá más conocimiento de una parte del mercado que del resto, de modo que el experto 1 le corresponderá la predicción del segmento del perfil de riesgo 1, al experto 2 el del perfil 2 y así sucesivamente.

Paso 2. Selección del instrumento de predicción: Para emitir una opinión sobre beneficios futuros teniendo en cuenta que es un valor subjetivo que se establece en un entorno incierto existen alternativas para presentar los pronósticos tales como:

- Un valor único: está ha sido la forma más tradicional de hacerlo, aunque es muy difícil de establecer y mucho menos acertar en él.
- Números inciertos: en este caso no se conoce con exactitud la predicción, pero se puede establecer un intervalo $A = [a_1, a_2]$, el cual contendrá el valor que se sabe que será mayor que a_1 y menor que a_2 . También se pueden utilizar tripletas de confianza $A = [a_1, a_2, a_3]$ en donde el valor del pronóstico será cercano a a_2 , siendo mayor que a_1 y menor que a_3 o cuádruplos de confianza $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]$, donde la predicción se sabe que será mayor que a_1 y menos que a_4 , pero lo más posible es que se encuentre entre a_2 y a_3 .

Paso 3. Juicio de expertos: Los expertos deben dar su pronóstico de beneficios para diferentes escenarios económicos y estrategias de precios. Estos resultados se presentarán en una matriz $A B$, donde $A = (a_1, a_2, \dots, a_i)$ son las diferentes estrategias de precios y $B = (b_1, b_2, \dots, b_j)$ son los escenarios económicos que se pueden presentar en el futuro.

Paso 4. Agregación de resultados: Las opiniones sobre beneficios esperados para cada alternativa se agregaran para las diferentes situaciones de la economía y teniendo en cuenta criterios como: el mínimo, el máximo, la media aritmética, la media ponderada y diferentes operadores de agregación de información *OWA*.

Paso 5. Resumen de resultados: Los resultados se presentarán resumidos para cada uno de los criterios incluyendo todos los segmentos en una matriz que contendrá las alternativas de precios y los diferentes perfiles de riesgo.

Etapa II. Agregación total de resultados con Heavy OWA (HOWA) Operators

Los resultados obtenidos sirven para tomar una decisión sobre la estrategia de precios a seguir para cada perfil, pero es importante destacar que los pronósticos analizados en la anterior etapa son independientes entre sí, o sea, que pueden ocurrir simultáneamente, por tanto, para analizar la información se debe hacer una agregación total, si se quiere tener un criterio general para

todo el mercado, siendo los operadores *Heavy OWA* los más adecuados, siguiendo los siguientes pasos:

Paso 6. Selección del pronóstico: En los resúmenes del paso 5 se presentan los pronósticos de beneficios utilizando diferentes criterios (máximo, mínimo, media aritmética, media ponderada y operadores *OWA*), de estos se debe elegir uno, que a juicio de los expertos es el que más se ajusta a la realidad y que será el punto de partida en esta segunda etapa.

Paso 7. Calculo de valores representativos: En la etapa anterior para los pronósticos se decidió utilizar valores inciertos a través de intervalos, triplas o cuádruplos de confianza, los cuales ahora se definirán como un valor representativo por ejemplo: para el intervalo se puede tomar el valor medio de los extremos, para las triplas se puede establecer como una media ponderada $(a_1 + 2a_2 + a_3) / 4$, o $(2a_1 + 4a_2 + 2a_3) / 8$, y para los cuádruplos como $(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) / 6$, o $(a_1 + 4a_2 + 4a_3 + a_4) / 10$. Esto para facilitar el proceso de agregación teniendo en cuenta que dicho valor ya tiene incluida la incertidumbre.

Paso 8. Agregación de resultados: Los valores obtenidos anteriormente son independientes entre sí, o sea que se producen simultáneamente, de modo que no tiene sentido el cálculo de valores medios para tomar una decisión, sino que se hace necesario hacer una agregación total de los resultados, a través de los operadores *Heavy OWA*.

Paso 9. Selección de la alternativa optima: A partir de los resultados del paso anterior se establecerá un ranking de alternativas en orden descendente para cada uno de los criterios y a partir de estos datos tomar la decisión que puede ser el máximo o más optimista, el mínimo o más pesimista o un valor más conservador que corresponde a valores intermedios en la ordenación.

4. APLICACIÓN ILUSTRATIVA

Con el fin de establecer el valor de la prima comercial de póliza de seguros segmentada en cinco perfiles de riesgo, se le ha solicitado a un grupo de expertos, donde cada uno conoce mejor que los demás cada segmento del mercado, que emita un pronóstico para el perfil que le corresponde de los beneficios esperados para diferentes alternativas de precio teniendo en cuenta distintas situaciones de alternativas de recargo y escenarios económicos así:

Alternativas de recargo para el precio:

Alternativa 1. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 10%

Alternativa 2. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 15%

Alternativa 3. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 20%

Alternativa 4. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 25%

Alternativa 5. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 30%

Escenarios económicos:

Situación 1. Fuerte crecimiento económico

Situación 2. Moderado crecimiento económico

Situación 3. Economía estable

Situación 4. Ligera recesión económica

Situación 5. Fuerte recesión económica

Los perfiles de riesgo corresponden a las características que son identificables en cada segmento y que influyen en la frecuencia y/o el coste de las reclamaciones por siniestros, como por ejemplo:

Tabla 7.1. Ejemplo de perfiles de riesgo

Segmentos	Genero	Edad	Gama del Vehículo
Perfil 1	Hombre	18 - 30	Media
Perfil 2	Hombre	31 - 50	Media
Perfil 3	Hombre	18 - 30	Alta
Perfil 4	Hombre	31 - 50	Alta
Perfil 5	Mujer	18 - 30	Media
Perfil 6	Mujer	31 - 50	Media
Perfil 7	Mujer	18 - 30	Alta
Perfil 8	Mujer	31 - 50	Alta

Para esta aplicación se han tomado cinco de los segmentos de la tabla anterior definidos de la siguiente forma:

Tabla 7.2. Perfiles de riesgo para la aplicación

Segmentos	Genero	Edad	Gama del vehículo
Perfil 1	Hombre	18 - 30	Media
Perfil 2	Hombre	31 - 50	Media
Perfil 3	Mujer	31 - 50	Alta
Perfil 4	Hombre	18 - 30	Alta
Perfil 5	Mujer	18 - 30	Alta

Los pronósticos de los expertos se presentan a continuación:

Tabla 7.3. Pronóstico del Experto 1 para el Perfil 1

Alternativas	Situación 1		Situación 2		Situación 3		Situación 4		Situación 5	
Alternativa 1	680	720	600	650	500	540	450	500	380	420
Alternativa 2	700	750	650	680	530	570	470	510	400	450
Alternativa 3	760	800	660	700	550	600	420	470	310	350
Alternativa 4	780	820	620	660	500	550	400	450	250	300
Alternativa 5	800	850	610	660	470	530	350	400	200	250

Tabla 7.4. Pronóstico del Experto 2 para el Perfil 2

Alternativas	Situación 1		Situación 2		Situación 3		Situación 4		Situación 5	
Alternativa 1	800	850	760	800	700	750	700	750	650	700
Alternativa 2	840	880	790	830	750	800	660	710	630	670
Alternativa 3	910	960	870	910	790	840	650	700	610	650
Alternativa 4	930	980	870	920	760	820	620	680	550	610
Alternativa 5	920	970	860	900	740	800	600	650	520	570

Tabla 7.5. Pronóstico del Experto 3 para el Perfil 3

Alternativas	Situación 1		Situación 2		Situación 3		Situación 4		Situación 5	
Alternativa 1	580	630	550	600	450	500	420	480	410	450
Alternativa 2	600	650	570	630	470	510	440	490	390	440
Alternativa 3	620	660	600	650	480	530	400	450	300	350
Alternativa 4	610	640	580	620	460	500	350	400	260	310
Alternativa 5	600	640	560	600	400	440	300	360	200	240

Tabla 7.6. Pronóstico del Experto 4 para el Perfil 4

Alternativas	Situación 1		Situación 2		Situación 3		Situación 4		Situación 5	
Alternativa 1	980	1050	950	1000	920	960	870	900	800	850
Alternativa 2	1090	1140	990	1050	890	940	810	850	650	750
Alternativa 3	1160	1200	960	1010	880	930	800	850	580	630
Alternativa 4	1170	1220	940	1000	800	850	700	740	410	470
Alternativa 5	1190	1250	900	950	650	700	600	650	300	340

Tabla 7.7. Pronóstico del Experto 5 para el Perfil 5

Alternativas	Situación 1		Situación 2		Situación 3		Situación 4		Situación 5	
Alternativa 1	300	350	280	330	250	300	240	280	230	270
Alternativa 2	400	450	300	350	280	320	250	300	200	250
Alternativa 3	480	520	410	450	320	360	230	270	180	230
Alternativa 4	500	540	430	480	300	350	210	250	170	210
Alternativa 5	510	550	420	460	270	310	190	220	110	150

Los expertos también han definido los vectores de ponderación

$$P = (0.1, 0.2, 0.3, 0.3, 0.1)$$

$$W = (0.1, 0.15, 0.25, 0.2, 0.3)$$

que corresponden a la probabilidad subjetiva de cada una de las situaciones y a la actitud optimista o pesimista respectivamente, según sea el caso para agregar la información y un parámetro $\beta = 0.4$ que representa la importancia relativa de la información subjetiva frente a la actitud del decisor reflejados en los vectores P y W . Con el fin de poder calcular de los siguientes criterios:

- $UMax$: corresponde al intervalo de confianza de mayor valor o el más optimista.
- $UMin$: corresponde al intervalo de confianza de menor valor o el más pesimista.

- *UAM*: corresponde a la media aritmética de los intervalos de confianza de cada una de las alternativas.
- *UPA*: corresponde a la media aritmética ponderada de los intervalos de confianza de cada una de las alternativas con el vector de ponderación *P*.
- *UOWA*: corresponde a la agregación de la ordenación descendente de los intervalos de confianza de las alternativas utilizando el vector de ponderación *W*.
- *AUOWA*: corresponde a la agregación de la ordenación ascendente de los intervalos de confianza de las alternativas utilizando el vector de ponderación *W*.
- *UPOWA*: es la agregación utilizando el factor β para el *UOWA* y $(1 - \beta)$ para el *UPA*.

Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Tabla 7.8. Resultados agregados del Perfil 1

Alternativas	U-Max		U-Min		UAM		UWA		UOWA		AUOWA		UPOWA	
Alternativa 1	680	720	380	420	522	566	511	556	487	531	555	598	501	546
Alternativa 2	700	750	400	450	550	592	540	580	514	557	583	625	530	571
Alternativa 3	760	800	310	350	540	584	530	576	490	534	592	636	514	559
Alternativa 4	780	820	250	300	510	556	497	544	451	499	568	613	479	526
Alternativa 5	800	850	200	250	486	538	468	521	419	472	552	605	448	501

Tabla 7.9. Resultados agregados del Perfil 2

Alternativas	U-Max		U-Min		UAM		UWA		UOWA		AUOWA		UPOWA	
Alternativa 1	800	850	650	700	722	770	717	765	704	753	737	785	712	760
Alternativa 2	840	880	630	670	734	778	728	774	711	756	760	804	721	767
Alternativa 3	910	960	610	650	766	812	758	805	732	778	803	850	748	794
Alternativa 4	930	980	550	610	746	802	736	793	703	760	791	846	723	780
Alternativa 5	920	970	520	570	728	778	718	769	682	733	775	826	704	755

Tabla 7.10. Resultados agregados del Perfil 3

Alternativas	U-Max		U-Min		UAM		UWA		UOWA		AUOWA		UPOWA	
Alternativa 1	580	630	410	450	482	532	470	522	460	509	501	551	466	517
Alternativa 2	600	650	390	440	494	544	486	535	468	517	517	566	479	528
Alternativa 3	620	660	300	350	480	528	476	525	442	491	516	563	462	511
Alternativa 4	610	640	260	310	452	494	446	489	411	455	493	532	432	475
Alternativa 5	600	640	200	240	412	456	402	448	364	408	457	500	387	432

Tabla 7.11. Resultados agregados del Perfil 4

Alternativas	U-Max		U-Min		UAM		UWA		UOWA		AUOWA		UPOWA	
Alternativa 1	980	1050	800	850	904	952	905	948	885	930	925	975	897	941
Alternativa 2	1090	1140	650	750	886	946	882	936	837	902	934	990	864	922
Alternativa 3	1160	1200	580	630	876	924	870	919	814	863	938	985	848	897
Alternativa 4	1170	1220	410	470	804	856	796	846	721	774	885	937	766	817
Alternativa 5	1190	1250	300	340	728	778	704	754	627	675	820	872	673	722

Tabla 7.12. Resultados agregados del Perfil 5

Alternativas	U-Max		U-Min		UAM		UWA		UOWA		AUOWA		UPOWA	
Alternativa 1	300	350	230	270	260	306	256	302	252	297	268	315	254	300
Alternativa 2	400	450	200	250	286	334	279	326	265	313	308	355	273	321
Alternativa 3	480	520	180	230	324	366	313	354	290	333	359	400	304	345
Alternativa 4	500	540	170	210	322	366	306	351	283	327	360	404	297	341
Alternativa 5	510	550	110	150	300	338	284	321	253	291	344	383	271	309

Todos estos criterios son válidos para tomar una decisión sobre la estrategia a seguir, siendo posible elegir una alternativa para cada perfil si se toma por ejemplo el mayor valor con una actitud optimista o el menor valor con una actitud pesimista, como se detalla en los siguientes resúmenes.

Tabla 7.13. Resumen de resultados máximos

Alternativas	Perfil 1		Perfil 2		Perfil 3		Perfil 4		Perfil 5	
Alternativa 1	680	720	800	850	580	630	980	1050	300	350
Alternativa 2	700	750	840	880	600	650	1090	1140	400	450
Alternativa 3	760	800	910	960	620	660	1160	1200	480	520
Alternativa 4	780	820	930	980	610	640	1170	1220	500	540
Alternativa 5	800	850	920	970	600	640	1190	1250	510	550

Tabla 7.14. Resumen de resultados mínimos

Alternativas	Perfil 1		Perfil 2		Perfil 3		Perfil 4		Perfil 5	
Alternativa 1	380	420	650	700	410	450	800	850	230	270
Alternativa 2	400	450	630	670	390	440	650	750	200	250
Alternativa 3	310	350	610	650	300	350	580	630	180	230
Alternativa 4	250	300	550	610	260	310	410	470	170	210
Alternativa 5	200	250	520	570	200	240	300	340	110	150

Tabla 7.15. Resumen de resultados con media aritmética

Alternativas	Perfil 1		Perfil 2		Perfil 3		Perfil 4		Perfil 5	
Alternativa 1	522	566	722	770	482	532	904	952	260	306
Alternativa 2	550	592	734	778	494	544	886	946	286	334
Alternativa 3	540	584	766	812	480	528	876	924	324	366
Alternativa 4	510	556	746	802	452	494	804	856	322	366
Alternativa 5	486	538	728	778	412	456	728	778	300	338

Tabla 7.16. Resumen de resultados con media ponderada

Alternativas	Perfil 1		Perfil 2		Perfil 3		Perfil 4		Perfil 5	
Alternativa 1	511	556	717	765	470	522	905	948	256	302
Alternativa 2	540	580	728	774	486	535	882	936	279	326
Alternativa 3	530	576	758	805	476	525	870	919	313	354
Alternativa 4	497	544	736	793	446	489	796	846	306	351
Alternativa 5	468	521	718	769	402	448	704	754	284	321

Tabla 7.17. Resumen de resultados con operadores UOWA

Alternativas	Perfil 1		Perfil 2		Perfil 3		Perfil 4		Perfil 5	
Alternativa 1	487	531	704	753	460	509	885	930	252	297
Alternativa 2	514	557	711	756	468	517	837	902	265	313
Alternativa 3	490	534	732	778	442	491	814	863	290	333
Alternativa 4	451	499	703	760	411	455	721	774	283	327
Alternativa 5	419	472	682	733	364	408	627	675	253	291

Tabla 7.18. Resumen de resultados con operadores AUOWA

Alternativas	Perfil 1		Perfil 2		Perfil 3		Perfil 4		Perfil 5	
Alternativa 1	555	598	737	785	501	551	925	975	268	315
Alternativa 2	583	625	760	804	517	566	934	990	308	355
Alternativa 3	592	636	803	850	516	563	938	985	359	400
Alternativa 4	568	613	791	846	493	532	885	937	360	404
Alternativa 5	552	605	775	826	457	500	820	872	344	383

Tabla 7.19. Resumen de resultados con operadores UPOWA

Alternativas	Perfil 1		Perfil 2		Perfil 3		Perfil 4		Perfil 5	
Alternativa 1	501	546	712	760	466	517	897	941	254	300
Alternativa 2	530	571	721	767	479	528	864	922	273	321
Alternativa 3	514	559	748	794	462	511	848	897	304	345
Alternativa 4	479	526	723	780	432	475	766	817	297	341
Alternativa 5	448	501	704	755	387	432	673	722	271	309

Es importante destacar, que si se desea tener la misma política de precios en relación con los márgenes de beneficio, los criterios anteriores conllevan seleccionar alternativas diferentes para cada perfil. En tal caso, es necesario hacer una agregación total de los resultados utilizando operadores *Heavy OWA*.

Para este ejemplo utilizaremos los datos de los resultados obtenidos con el operador *UPOWA* (Tabla 7.19), pero se puede tomar otro dependiendo del criterio del decisor. En este caso se trabaja con un valor representativo que corresponde al valor medio de los extremos de cada uno de los intervalos de confianza como se muestra a continuación:

Tabla 7.20. Valores representativos del operador UPOWA

Alternativas	Perfil 1	Perfil 2	Perfil 3	Perfil 4	Perfil 5
Alternativa 1	524	736	491	919	277
Alternativa 2	550	744	503	893	297
Alternativa 3	537	771	487	872	325
Alternativa 4	502	751	454	792	319
Alternativa 5	475	729	409	698	290

Las predicciones de beneficios de cada una de las alternativas de recargo por beneficios para los diferentes perfiles son independientes, ya que ocurren simultáneamente. Por consiguiente, su tratamiento se puede hacer con los *Heavy OWA*, para los cuales la principal diferencia con los otros tipos de operadores *OWA* es que la suma de las ponderaciones es superior a 1 ($1 \leq \sum_{j=1}^n w_j \leq n$). Para este caso utilizaremos los siguientes dos vectores:

- $W = (1,1,1,1,1)$, donde $\sum_{j=1}^n w_j = 5$ de modo que obtendremos una agregación total, en el cual se considera que los pronósticos se cumplirán en su totalidad.
- $W = (1,0.9,0.9,0.8,0.7)$, donde $\sum_{j=1}^n w_j = 4.4$, que se utilizará en para obtener el *Heavy OWA (HOWA)*, con actitud optimista, al dárseles una mayor ponderación a los valores más altos y para el *Ascending Heavy OWA (AHOWA)* una actitud pesimista, donde se le da la ponderación más alta a los valores menores.

- $P = (0.9, 0.7, 0.8, 0.9, 0.8)$ que corresponde a la probabilidad subjetiva del cumplimiento de los pronósticos y se utilizará en el cálculo de la media ponderada (HPA).
- También se utilizará el parámetro $\beta = 0.5$ para obtener el operador *Heavy Probabilistic OWA (HPOWA)*, donde se combina la probabilidad subjetiva con la actitud optimista o pesimista así: $HPOWA = \beta(HOWA) + (1-\beta)HPA$.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla 7.21. Resultados agregados con Heavy OWA

Alternativas	HOWA-Total	HPA	HOWA	A-HOWA	HPOWA
Alternativa 1	2947	2428	2639	2422	2534
Alternativa 2	2987	2460	2668	2465	2564
Alternativa 3	2991	2456	2665	2473	2561
Alternativa 4	2818	2308	2506	2334	2407
Alternativa 5	2601	2125	2312	2157	2218

Si ordenamos las alternativas en orden descendente para cada criterio obtenemos el siguiente ranking, que servirá para tomar una decisión, la cual dependerá de la actitud que asuma la empresa o quienes decidan la estrategia de precios.

Tabla 7.22. Ranking de alternativas

Criterio	Ordenación
HOWA - Total	$A3 > A2 > A1 > A4 > A5$
HPA	$A2 > A3 > A1 > A4 > A5$
HOWA	$A2 > A3 > A1 > A4 > A5$
A-HOWA	$A3 > A2 > A1 > A4 > A5$
HPOWA	$A2 > A3 > A1 > A4 > A5$

En este caso, para establecer el valor de la prima comercial, si se tiene un criterio optimista se tomaría la alternativa de mayor valor, es decir, se elegiría la 3 (margen de beneficio del 20%) con el HOWA-Total y A-HOWA; y la alternativa 2 (margen de beneficio del 15%) con el HPA, HOWA y HPOWA. Un criterio pesimista conduciría a elegir el menor valor que corresponde a la alternativa 5 (margen de beneficio del 30%) con cualquiera de los criterios. Sin embargo, con una actitud más conservadora se podría elegir uno de los valores intermedios (2º, 3º o 4º lugar) en la ordenación.

Es importante destacar la poca diferencia de los resultados entre las alternativas 2 y 3, reflejándose también en las ordenaciones de los criterios y que dificultan la elección entre estas opciones. Siendo lo más recomendable en este caso usar como criterio el *HPOWA* ($\beta = 0.5$) que combina en un mismo operador el *HPA* y el *HOWA* con igual ponderación como una forma de decidir el empate técnico entre alternativas.

5. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado una nueva metodología para establecer tarifas de seguros desde un modelo que no se basa solamente en aumentar un margen de beneficios a partir de la estructura de costes, sino también, teniendo en cuenta una visión estratégica representada por las opiniones de expertos. De este modo, se establece una determinada estrategia de precios, la cual incidirá en la demanda a partir de diferentes escenarios económicos, teniendo así una mejor perspectiva sobre los beneficios globales y no solo sobre los beneficios unitarios de cada póliza.

La utilización de número inciertos a través de intervalos de confianza facilita el trabajo de los expertos, en el momento de valorar cada una de las alternativas, puesto que no es fácil definir un valor preciso en situaciones de mucha incertidumbre.

El proceso metodológico en dos etapas permite que se pueda establecer una estrategia de precios independiente para cada perfil a través de cualquiera

de los criterios utilizados en la primera etapa, o que en una segunda fase se determine una estrategia general para todos los segmentos mediante los operadores de agregación Heavy OWA.

La agregación de información para obtener un valor global con los operadores *Heavy OWA*, permite que cada uno de los expertos emita un juicio sobre el perfil o segmento que mejor conoce o tiene más experiencia, y evitar de esta manera, las distorsiones que se presentan cuando se opina sin suficiente información o experiencia.

Finalmente, se puede destacar que esta metodología propuesta facilita un procedimiento formal para la toma de decisiones de tarificación, ayudando a eliminar las decisiones políticas y poniendo el acento en los temas de carácter puramente económicos, ya sean, endógenos o exógenos a la empresa. De esta manera, se tiende a homogenizar criterios de decisión para todos los perfiles, con la finalidad de optimizar el beneficio global.

PARTE TERCERA

APLICACIONES DE LOS OPERADORES OWA A LA TARIFICACIÓN EN SEGUROS

Uno de los propósitos de este trabajo ha sido el desarrollo de nuevas extensiones de los operadores de agregación de información OWA, lo cual se ha logrado cumplir con el desarrollo de los tres artículos que se presentan en este documento en los capítulos 4, 5 y 6. En esta tercera parte se muestra la aplicabilidad que pueden tener dichos operadores en el sector asegurador y particularmente en la tarificación de seguros no vida en el ramo del automóvil, presentándose así una serie de aplicaciones ilustrativas en dos capítulos:

Capítulo 8. Aplicaciones de los Operadores de Agregación OWA a Procesos de Tarificación en Seguros Ramo Automóvil. En este capítulo se desarrollan ejemplos relacionados con el ajuste de la prima pura, que puede verse afectadas por hechos futuros pero que los cálculos estadísticos no pueden reflejar, por no contar con antecedentes en la información histórica. En este caso en particular se analiza cómo puede afectar un cambio en la norma legislativa de tránsito, referente al límite de velocidad permitido en carreteras, lo cual afecta el valor de la prima pura bien sea directamente o a través de cada uno de sus componentes (frecuencia y coste de siniestralidad). Otro ejemplo busca obtener un valor del recargo de seguridad donde se agrega la información obtenida por tres métodos sin decidir entre ellos, sino obteniendo un solo valor con la agregación de información. Y por último se analiza las posibles estrategias de precio de la prima comercial teniendo en cuenta diferentes escenarios económicos.

Capítulo 9. Aplicaciones de los Operadores de Agregación OWA con Lógica Difusa en Procesos de Tarificación. En este capítulo se desarrollan tres ejemplos, en los que se combinan los operadores OWA con herramientas de lógica difusa y que buscan mostrar la aplicabilidad al sector asegurador de las nuevas extensiones de dichos operadores desarrolladas en este proyecto. Es así como se presentan aplicaciones ilustrativas con los operadores OWA, utilizando herramientas como: números borrosos, teoría de expertones y variables lingüísticas. Las tres aplicaciones corresponden así a la uso del FGPOWA *Operator*, el ILPOWA *Operator* y el UGPWA *Operator*.

8. APLICACIONES DE LOS OPERADORES DE AGREGACIÓN OWA A PROCESOS DE TARIFICACIÓN EN SEGUROS RAMO AUTOMÓVIL

El cálculo de las tarifas de seguros no vida es un problema bastante complejo, ya que generalmente para establecer el precio de un producto o servicio el componente principal son los costes asociados al mismo, pero en el sector asegurador es imposible saber con certeza cuál va a ser el comportamiento de un asegurado durante el período que cubre la póliza. Sin embargo, el uso de técnicas estadísticas ha sido fundamental para poder tener estimaciones cercanas que puedan garantizar la solvencia y rentabilidad de la empresa aseguradora. Pero por otro lado, a pesar de las bondades de las técnicas actuariales, existen hechos futuros que pueden provocar un cambio de tendencia tanto en la frecuencia como en el coste de los siniestros y que no es posible reflejarlo a partir de los datos históricos disponibles.

Al hablar de tarifas de seguros es importante recordar que la base de la misma es la prima pura que tiene dos componentes que son dados por la esperanza matemática tanto de la frecuencia como de la siniestralidad que cuentan con una incertidumbre asociada que puede afectar a ambos componentes a las vez o a uno de ellos. Veamos algunos hechos futuros que pueden provocar incertidumbre en el proceso de tarificación:

- La crisis económica: las dificultades de empresas y particulares para generar ingresos puede provocar un incremento en el comportamiento fraudulento de los asegurados. Por ejemplo, a través de incendios, autorrobos, o accidentes intencionales que afecta la frecuencia y por otro lado el coste de las reclamaciones al exagerar las pérdidas para obtener un mayor beneficio de la póliza.

- Cambios en la legislación: una nueva normativa puede también afectar también los cálculos, por ejemplo una disminución o incremento en el límite de velocidad permitido puede afectar tanto la frecuencia como el coste de las reclamaciones de accidentes de tráfico.
- Los cambios en el comportamiento del consumidor, por ejemplo por la incorporación de nuevas tecnologías que procuran automóviles más seguros, pero también puede aumentar el nivel de riesgo en algunos perfiles.

Una práctica muy común en los procesos de tarificación en seguros es ajustar las primas a posteriori, teniendo en cuenta la información de siniestralidad individual de los asegurados y de toda la cartera, a través de la teoría de la credibilidad. Sin embargo cuando no se tiene experiencia previa, no se cuenta con información para aplicar dicha teoría.

En esta investigación se propone aplicar un modelo donde combina la siniestralidad de la cartera con la opinión de expertos. Para el desarrollo de este modelo se tienen las siguientes dos alternativas:

- Aplicarlo directamente sobre el valor de la prima pura.
- Aplicarlo sobre los componentes de frecuencia y severidad por separado y posteriormente hacer la estimación global de la prima pura ajustada, o

Uno de los problemas de utilizar la opinión de expertos es que es muy costoso. Sin embargo en algunos casos es justificable recurrir a ellos, especialmente en situaciones como:

- Los datos históricos no son suficientes o poco confiables.
- Cuando se va a lanzar un nuevo producto y no se cuenta con estadísticas para medir su comportamiento, y no se tiene total confianza en los datos obtenidos externamente.
- Cuando se trata de pólizas que por su alto coste o frecuencia de siniestralidad, pueden ocasionar problemas de solvencia a la empresa aseguradora.

1. EJEMPLO ILUSTRATIVO: APLICACIÓN A LA PRIMA PURA DE UNA PÓLIZA

Una empresa aseguradora ofrece una línea de pólizas de seguros para accidentes de coche, para lo cual tiene segmentado su mercado en 5 perfiles de riesgo diferentes, a los cuales se les ha asignado un valor de prima diferente, en función del riesgo asociado a cada uno. La base para calcular la tarifa corresponde a la prima pura que resulta de multiplicar la esperanza matemática de la frecuencia de siniestralidad por el coste medio de reclamaciones. En este caso los datos se muestran en la tabla 8.1.

Tabla 8.1. Siniestralidad por segmentos

Segmentos	Frecuencia de Siniestralidad	Coste Medio de Reclamaciones	Prima Pura
Perfil 1	4,52%	2200	99,44
Perfil 2	3,27%	5200	170,04
Perfil 3	1,71%	3700	63,27
Perfil 4	1,93%	4500	86,85
Perfil 5	6,35%	3800	241,3

Las estimaciones obtenidas estadísticamente siempre ha sido las más útiles en los procesos de tarificación, sin embargo hay situaciones que pueden afectar tanto la frecuencia como el coste y por ende la prima pura, pero no que no se refleja en los datos históricos al ser cambios o circunstancias que se pueden presentar en el futuro. Por ejemplo si se introducen cambios en las normas de tránsito en cuanto a la velocidad máxima permitida en autopistas (actualmente 120 km/h), inevitablemente se verá afectada la siniestralidad, en este caso se prevén por ejemplo las siguientes cuatro situaciones:

Situación 1. Velocidad máxima 110 km/h

Situación 2. Velocidad máxima 120 km/h

Situación 3. Velocidad máxima 130 km/h

Situación 4. Velocidad máxima 140 km/h

Un comité de expertos ha valorado como podría cambiar la prima pura en cada una de estas situaciones:

Tabla 8.2. Matriz de cambios en la prima pura

Segmentos	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4
Perfil 1	95	100	105	105
Perfil 2	160	170	175	180
Perfil 3	62	64	68	70
Perfil 4	80	87	95	100
Perfil 5	230	242	250	260

En este caso el grupo de expertos ha definido un vector de ponderaciones $W = (0.10, 0.15, 0.35, 0.4)$ que refleja la actitud de los decisores (optimista o pesimista) según sea el caso.

Se han empleado diferentes criterios para analizar el posible ajuste de la prima pura y poderlos comparar, tales como:

- Mínimo o valor más pesimista equivalente a un vector de ponderaciones $W = (0, 0, 0, 1)$
- Máximo o valor más pesimista equivalente a un vector de ponderaciones $W = (1, 0, 0, 0)$
- Media aritmética equivalente a un vector de ponderaciones $W = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$
- Media ponderada, para este caso el vector de ponderaciones corresponde a la importancia de cada situación (probabilidad subjetiva).
- *OWA*, corresponde a la actitud del decisor de acuerdo a una ordenación descendente, siendo más importante los últimos valores (actitud pesimista).

- *AOWA*, corresponde a la actitud del decisor de acuerdo a una ordenación en orden ascendente, siendo más importante los últimos valores (actitud optimista)

Obteniéndose las siguientes agregaciones:

Tabla 8.3. Matriz de resultados agregados

Segmentos	Max	Min	AM	WA	OWA	AOWA
Perfil 1	105	95	101,25	103,25	99,25	103,25
Perfil 2	180	160	171,25	174,75	167,75	174,75
Perfil 3	70	62	66	67,6	64,4	67,6
Perfil 4	100	80	90,5	94,3	86,7	94,3
Perfil 5	260	230	245,5	250,8	240,2	250,8

Como se puede observar cada criterio nos ofrece una alternativa para ajustar la prima frente a los escenarios planteados.

Obsérvese que al obtenerse valores de la prima con la media aritmética, media ponderada, operadores OWA y AOWA estos fluctúan entre el mínimo y el máximo, por tanto, el elegir un criterio depende de una actitud particular frente al problema.

En el caso de los OWA también se puede utilizar otros criterios como las familias explicadas en el capítulo 3. En este caso se utiliza los siguientes:

- Step-OWA ($k = 3$), corresponde al 3 valor en orden descendente.
- Mediana, se refiere al valor central de los datos ordenados de menor a mayor.
- Olympic-OWA, en este caso se le da más importancia a los valores intermedios excluyendo los valores mínimo y máximo y haciendo una media aritmética con los demás.

- S-OR-OWA ($\alpha = 0.4$), en este caso se le da mayor peso al valor máximo y se agrega a la media aritmética del resto de argumentos.
- S-AND-OWA ($\beta = 0.4$), en este caso se le da mayor peso al valor mínimo y se agrega a la media aritmética del resto de argumentos.
- EZ-OWA ($k = 3$), se presentan dos clases una donde se le da más importancia según el orden a la media aritmética de los k primeros valores y la otra a la media aritmética de los valores restantes en la ordenación.

Los resultados obtenidos con estos otros tipos de operadores son:

Tabla 8.4. Matriz de resultados familias OWA

Segmentos	Step	Mediana	Olympic	S-OR	S-AND	EZ-1	EZ-2
Perfil 1	100,0	102,5	102,5	102,8	98,8	103,3	100,0
Perfil 2	170,0	172,5	172,5	174,8	166,8	175,0	168,3
Perfil 3	64,0	66,0	66,0	67,6	64,4	67,3	64,7
Perfil 4	87,0	91,0	91,0	94,3	86,3	94,0	87,3
Perfil 5	242,0	246,0	246,0	251,3	239,3	250,7	240,7

Con estos resultados, se puede contrastar los posibles ajustes de la prima pura, que se pueden utilizar en función de la actitud pesimista u optimista del decisor.

2. EJEMPLO ILUSTRATIVO: APLICACIÓN A LA FRECUENCIA DE SINIESTRALIDAD

Tomando como punto de partida los datos del ejemplo anterior se aplicaran los operadores de agregación OWA solamente a la frecuencia de siniestralidad, ya que puede resultar complejo hacer valoraciones para ajustar el valor global de la prima pura puede ser mejor ajustar sus componentes por separado. En este caso los expertos han valorado los posibles cambios en la frecuencia de siniestros para los siguientes casos:

Situación 1. Velocidad máxima 110 km/h

Situación 2. Velocidad máxima 120 km/h

Situación 3. Velocidad máxima 130 km/h

Situación 4. Velocidad máxima 140 km/h

Tabla 8.5. Matriz de cambios en la frecuencia de siniestralidad

Segmentos	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4
Perfil 1	4,20%	4,50%	5,00%	5,50%
Perfil 2	3,00%	3,20%	3,60%	4,00%
Perfil 3	1,60%	1,70%	2,10%	2,60%
Perfil 4	1,90%	1,90%	2,30%	3,00%
Perfil 5	5,50%	6,30%	6,80%	7,50%

Los expertos ha definido el mismo vector de ponderaciones $W = (0.10, 0.15, 0.35, 0.4)$ utilizado en el ejemplo 1. Utilizando los criterios clásicos y los operadores media ponderada (WA), OWA y AOWA obtenemos los siguientes resultados:

Tabla 8.6. Matriz de resultados agregados

Segmentos	Max	Min	AM	WA	OWA	AOWA
Perfil 1	5,5%	4,2%	4,8%	5,0%	4,6%	5,0%
Perfil 2	4,0%	3,0%	3,5%	3,6%	3,3%	3,6%
Perfil 3	2,6%	1,6%	2,0%	2,2%	1,8%	2,2%
Perfil 4	3,0%	1,9%	2,3%	2,5%	2,1%	2,5%
Perfil 5	7,5%	5,5%	6,5%	6,9%	6,2%	6,9%

Utilizando las siguientes familias de operadores OWA:

- Step-OWA ($k = 3$)
- Mediana-OWA

- Olympic-OWA
- S-OR-OWA ($\alpha = 0.4$)
- S-AND-OWA ($\beta = 0.4$)
- EZ-OWA ($k = 3$)

Se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 8.7 en la siguiente página.

Tabla 8.7. Matriz de resultados familias OWA

Segmentos	Step	Mediana	Olympic	S-OR	S-AND	EZ-1	EZ-2
Perfil 1	4,5%	4,8%	4,8%	5,1%	4,6%	5,0%	4,6%
Perfil 2	3,2%	3,4%	3,4%	3,7%	3,3%	3,6%	3,3%
Perfil 3	1,7%	1,9%	1,9%	2,2%	1,8%	2,1%	1,8%
Perfil 4	1,9%	2,1%	2,1%	2,6%	2,1%	2,4%	2,0%
Perfil 5	6,3%	6,6%	6,6%	6,9%	6,1%	6,9%	6,2%

3. EJEMPLO ILUSTRATIVO: APLICACIÓN AL COSTE DE RECLAMACIONES

Al igual que con la frecuencia de siniestralidad se ha analizado el coste medio de reclamaciones de forma independiente, utilizando los datos del ejemplo 1. Obteniendo las siguientes valoraciones del comité de expertos para los siguientes casos:

Situación 1: Velocidad máxima 110 km/h

Situación 2: Velocidad máxima 120 km/h

Situación 3: Velocidad máxima 130 km/h

Situación 4: Velocidad máxima 140 km/h

Tabla 8.8. Cambios en el coste medio de reclamaciones

Segmentos	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4
Perfil 1	2150	2200	2350	2500
Perfil 2	5100	5200	5500	6000
Perfil 3	3550	3700	3900	4300
Perfil 4	4400	4500	4750	5000
Perfil 5	3750	3800	3900	4000

En este caso se ha definido un vector de ponderaciones $W = [0.10, 0.15, 0.35, 0.4]$. Utilizando los criterios clásicos y los operadores OWA y AOWA obtenemos los resultados que se muestran en la tabla 8.9.

Tabla 8.9. Matriz de resultados agregados

Segmentos	Max	Min	AM	WA	OWA	AOWA
Perfil 1	2500	2150	2300	2368	2233	2368
Perfil 2	6000	5100	5450	5615	5285	5615
Perfil 3	4300	3550	3863	3995	3730	3995
Perfil 4	5000	4400	4663	4778	4548	4778
Perfil 5	4000	3750	3863	3910	3815	3910

Utilizando las siguientes familias de operadores OWA:

- Step-OWA ($k = 3$)
- Mediana-OWA
- Olympic-OWA
- S-OR-OWA ($\alpha = 0.4$)
- S-AND-OWA ($\beta = 0.4$)
- EZ-OWA ($k = 3$)

Se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 8.10. Matriz de resultados familias OWA

Segmentos	Step	Mediana	Olympic	S-OR	S-AND	EZ-1	EZ-2
Perfil 1	2200	2275	2275	2380	2240	2350	2233
Perfil 2	5200	5350	5350	5670	5310	5567	5267
Perfil 3	3700	3800	3800	4038	3738	3967	3717
Perfil 4	4500	4625	4625	4798	4558	4750	4550
Perfil 5	3800	3850	3850	3918	3818	3900	3817

La realización de las valoraciones de expertos por separado tiene la ventaja de aplicar diferentes criterios a cada situación, ya que por ejemplo las situaciones planteadas anteriormente puede afectar en mayor o menor medida la frecuencia o el coste de uno u otro perfil así:

- La frecuencia de siniestralidad puede variar más o menos con el límite de velocidad dependiendo del género o la edad del asegurado.
- El coste del siniestro afecta en mayor o medida, dependiendo del modelo y la gama del vehículo.

Por tanto los operadores OWA nos ofrecen un abanico muy amplio de criterios que se pueden adaptar a diferentes situaciones, teniendo el decisor la flexibilidad de utilizar diferentes operadores, asumiendo una actitud general del problema o particular a cada perfil, puesto que los datos son independientes entre sí. Por ejemplo:

1. Utilizar el EZ-2-OWA para la frecuencia y el OWA clásico para el coste, obteniéndose el siguiente ajuste para la prima pura:

Tabla 8.11. Ajuste de la prima pura

Segmentos	Prima Pura Inicial	Frecuencia Ajustada EZ-2-OWA	Coste Ajustado OWA	Prima Pura Ajustada
Perfil 1	99,44	4,6%	2233	102
Perfil 2	170,04	3,3%	5285	173
Perfil 3	63,27	1,8%	3730	67
Perfil 4	86,85	2,0%	4548	92
Perfil 5	241,3	6,2%	3815	237

2. Utilizar Olympic-OWA para la frecuencia y S-AND-OWA para el coste, obteniéndose el siguiente ajuste para la prima pura:

Tabla 8.12. Ajuste de la prima pura

Segmentos	Prima Pura Inicial	Frecuencia Ajustada Olympic-OWA	Coste Ajustado S-AND-OWA	Prima Pura Ajustada
Perfil 1	99,44	4,8%	2240	106
Perfil 2	170,04	3,4%	5310	181
Perfil 3	63,27	1,9%	3738	71
Perfil 4	86,85	2,1%	4558	96
Perfil 5	241,3	6,6%	3818	250

3. Utilizar un criterio diferente tanto de frecuencia como de coste diferente para cada perfil así: el OWA clásico para la frecuencia de los perfiles 1, 2, 5 y el coste del perfil 3, el S-OR-OWA para la frecuencia de los perfiles 3 y 4 y el coste de los perfiles 1 y 2; y el olympic-OWA para el coste de los perfiles 4 y 5. Obteniéndose los siguientes ajustes de la prima pura:

Tabla 8.13. Ajuste de la prima pura

Segmentos	Prima Pura Inicial	Frecuencia Ajustada	Coste Ajustado	Prima Pura Ajustada
Perfil 1	99,44	4,6%	2380	108
Perfil 2	170,04	3,3%	5670	185
Perfil 3	63,27	2,2%	3730	84
Perfil 4	86,85	2,6%	4625	119
Perfil 5	241,3	6,2%	3850	238

Por otro lado, si multiplicamos las valoraciones de expertos de frecuencia de siniestralidad por las de coste medio de reclamaciones, obtenemos los siguientes valores de prima pura para cada perfil y situación:

Tabla 8.14. Cambios en la prima pura

Segmentos	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4
Perfil 1	90	99	118	138
Perfil 2	153	166	198	240
Perfil 3	57	63	82	112
Perfil 4	84	86	109	150
Perfil 5	206	239	265	300

En este caso se ha definido el mismo vector de ponderaciones $W = (0.10, 0.15, 0.35, 0.4)$ para aplicar los operadores OWA y AOWA junto con los criterios clásicos como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 8.15. Matriz de resultados agregados

Segmentos	Max	Min	AM	WA	OWA	AOWA
Perfil 1	138	90	111	120	102	120
Perfil 2	240	153	189	206	173	206
Perfil 3	112	57	78	89	68	89
Perfil 4	150	84	107	119	95	119
Perfil 5	300	206	253	269	236	269

Utilizando las siguientes familias de operadores OWA:

- Step-OWA ($k = 3$)
- Mediana-OWA
- Olympic-OWA
- S-OR-OWA ($\alpha=0.4$)
- S-AND-OWA ($\beta = 0.4$)
- EZ-OWA ($k=3$)

Se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 8.16. Matriz de resultados familias OWA

Segmentos	Step	Mediana	Olympic	S-OR	S-AND	EZ-1	EZ-2
Perfil 1	99,0	108,3	108,3	121,6	102,8	118,0	102,3
Perfil 2	166,4	182,2	182,2	209,6	174,8	201,5	172,5
Perfil 3	62,9	72,4	72,4	91,7	69,7	85,5	67,2
Perfil 4	85,5	97,4	97,4	124,3	97,7	114,9	92,8
Perfil 5	239,4	252,3	252,3	271,6	234,1	268,2	237,0

4. EJEMPLO ILUSTRATIVO: APLICACIÓN AL RECARGO DE SEGURIDAD

Cuando se calcula la prima pura, esta debería ser suficiente para cubrir los gastos de siniestralidad de una cartera, sin embargo, como la información es a veces insuficiente, no se puede tener una confiabilidad total sobre esta estimación, es por eso que se hace necesario añadir un recargo de seguridad que permita cubrir las desviaciones de frecuencia y coste de siniestros, para evitar la insolvencia de la empresa aseguradora. En este ejemplo usaremos como punto de partida la prima pura para cinco perfiles de riesgo de pólizas

de accidente de coches estudiadas en el punto anterior, como se muestra en la tabla 8.17 en la página siguiente.

Tabla 8.17. Siniestralidad por segmentos

Segmentos	Frecuencia de Siniestralidad	Coste Medio de Reclamaciones	Prima Pura
Perfil 1	4,52%	2200	99,44
Perfil 2	3,27%	5200	170,04
Perfil 3	1,71%	3700	63,27
Perfil 4	1,93%	4500	86,85
Perfil 5	6,35%	3800	241,3

Entre los métodos aplicados para el cálculo del recargo de seguridad se encuentran los siguientes:

- Varianza
- Semi-varianza
- Desviación estándar
- Percentil
- Máxima pérdida
- Esperanza de la utilidad nula

En este caso se pretende utilizar los operadores OWA para combinar estos métodos probabilísticos que son más objetivos, sin tener necesariamente que decidirse por uno de ellos y poderlos agregar en función de una actitud pesimista u optimista del decisor.

Para este ejemplo utilizaremos los siguientes tres criterios:

Alternativa 1. Agregar un recargo correspondiente a la varianza

Alternativa 2. Agregar un recargo correspondiente a dos desviaciones estándar

Alternativa 3. Agregar un recargo correspondiente a la máxima pérdida

Obteniéndose los resultados que se muestran en la tabla 8.18 en la página siguiente.

Tabla 8.18. Recargos de seguridad

Segmentos	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3
Perfil 1	57	15,1	21
Perfil 2	75	17,3	35
Perfil 3	41	12,8	24
Perfil 4	36	12,0	18
Perfil 5	150	24,5	52

Para estas tres alternativas se ha definido el siguiente vector de ponderaciones $W = (0.2, 0.4, 0.4)$, para aplicar los operadores OWA y AOWA junto con otros criterios de decisión clásicos así:

Tabla 8.19. Matriz de resultados agregados

Segmentos	Max	Min	AM	WA	OWA	AOWA
Perfil 1	57	15,1	31,0	26,4	25,8	34,2
Perfil 2	75	17,3	42,4	37,7	35,9	47,5
Perfil 3	41	12,8	25,9	24,0	22,9	28,6
Perfil 4	36	12,0	22,0	19,8	19,2	24,0
Perfil 5	150	24,5	75,5	63,3	60,6	85,7

Utilizando las siguientes familias de operadores OWA:

- Step-OWA ($k = 2$)
- Olympic-OWA
- S-OR-OWA ($\alpha = 0.3$)

- S-AND-OWA ($\beta = 0.3$)
- EZ-OWA ($k = 2$)

Se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 8.20 en la página siguiente.

Tabla 8.20. Matriz de resultados familias OWA

Segmentos	Step	Olympic	S-OR	S-AND	EZ-1	EZ-2
Perfil 1	21	21	39	26	18	39
Perfil 2	35	35	52	35	26	55
Perfil 3	24	24	30	22	18	33
Perfil 4	18	18	26	19	15	27
Perfil 5	52	52	98	60	38	101

5. EJEMPLO ILUSTRATIVO: APLICACIÓN SOBRE LA PRIMA COMERCIAL

La prima comercial se obtiene, como es sabido agregando a la prima pura un recargo de seguridad, los gastos de gestión y el beneficio. Por consiguiente, el precio final que se cobrará a los asegurados dependerá principalmente de la estrategia de marketing a seguir. Dicha estrategia influirá tanto en los gastos de gestión externos, como en el beneficio esperado. Pero a su vez la demanda se verá afectada inevitablemente por el valor de la póliza, siendo la mejor forma de valorar las alternativas estimando el beneficio total en diferentes escenarios. En este caso, los expertos han valorado el beneficio total en miles de euros en función de la estrategia de precio y la estimación de aumento o disminución de la demanda, para cada perfil de riesgo, de acuerdo con las siguientes alternativas:

Alternativa 1. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 5%

Alternativa 2. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 8%

Alternativa 3. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 10%

Alternativa 4. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 15%

Alternativa 5. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 20%

Los expertos también han considerado que los resultados de estas alternativas dependen de muchos factores externos, pero principalmente del crecimiento de la economía, por eso las alternativas propuestas anteriormente se han valorado para cada perfil, en los siguientes cinco escenarios:

Situación 1. Fuerte crecimiento económico

Situación 2. Moderado crecimiento económico

Situación 3. Economía estable

Situación 4. Ligera recesión económica

Situación 5. Fuerte recesión económica

Los resultados de beneficios económicos para cada alternativa y situación de los diferentes perfiles se presentan a continuación:

Tabla 8.21. Beneficios esperados en el Perfil 1

Alternativas	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4	Situación 5
Alternativa 1	600	600	500	450	350
Alternativa 2	700	650	550	400	350
Alternativa 3	700	600	500	460	420
Alternativa 4	650	550	450	400	300
Alternativa 5	500	400	350	300	200

Tabla 8.22. Beneficios esperados en el Perfil 2

Alternativas	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4	Situación 5
Alternativa 1	800	750	700	650	600
Alternativa 2	750	700	670	600	680
Alternativa 3	780	720	680	640	600
Alternativa 4	560	530	500	450	400
Alternativa 5	420	410	400	380	360

Tabla 8.23. Beneficios esperados en el Perfil 3

Alternativas	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4	Situación 5
Alternativa 1	600	550	500	450	400
Alternativa 2	550	500	450	400	350
Alternativa 3	500	460	420	400	360
Alternativa 4	400	380	350	320	300
Alternativa 5	320	310	300	290	270

Tabla 8.24. Beneficios esperados en el Perfil 4

Alternativas	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4	Situación 5
Alternativa 1	1000	950	900	850	800
Alternativa 2	1100	1000	900	800	700
Alternativa 3	950	900	830	800	850
Alternativa 4	720	680	700	650	620
Alternativa 5	530	520	500	480	450

Tabla 8.25. Beneficios esperados en el Perfil 5

Alternativas	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4	Situación 5
Alternativa 1	300	250	220	200	250
Alternativa 2	400	350	280	250	200
Alternativa 3	400	360	340	300	250
Alternativa 4	200	170	150	130	100
Alternativa 5	120	110	100	90	50

Cada una de las alternativas en los diferentes perfiles se analiza utilizando los siguientes criterios de decisión:

- Mínimo o valor más pesimista
- Máximo o valor más pesimista
- Media aritmética
- Media ponderada con probabilidades subjetivas
- Operador OWA
- Operador AOWA
- Operador POWA

El operador POWA que se utilizará como criterio de decisión en estos casos se define como una función POWA: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de dimensión n , que tiene un vector de ponderaciones W asociado con $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ y $w_j \in [0,1]$ y un vector de probabilidades V , con $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ y $v_i \in [0,1]$, tal que:

$$POWA(a_1, \dots, a_n) = \beta \sum_{j=1}^n w_j b_j + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n v_i a_i \quad (8.1)$$

donde b_j es j-ésimo más grande de los argumentos a_i y $\beta \in [0,1]$.

Obteniéndose un valor ponderado entre el operador OWA y la media ponderada WA, de modo que si $\beta = 0$ se obtiene la media ponderada y si $\beta = 1$ corresponde al operador OWA. En este problema se ha definido un valor $\beta = 0.5$, de modo que tanto la media ponderada como el operador OWA tienen igual importancia.

Los expertos han establecido los siguientes vectores para las ponderaciones:

- Para el caso de la media ponderada, la probabilidad subjetiva de que ocurra cada una de las cinco situaciones de la economía dependerá del vector $V = (0.1, 0.2, 0.3, 0.3, 0.1)$, donde se puede observar que se espera que la economía principalmente se mantendrá estable o tienda a una ligera recesión.

- Para el caso de los operadores de agregación el vector de ponderaciones $W = [0.1, 0.15, 0.25, 0.20, 0.30]$ que en el caso de los OWA corresponderá a una actitud pesimista al tener mayor peso los valores menores y para los AOWA una actitud optimista al tener mayor peso los valores mayores.

A continuación se presentan los resultados de cada uno de los perfiles de acuerdo con los criterios de decisión establecidos.

Tabla 8.26. Criterios de decisión para el Perfil 1

Alternativas	Max	Min	AM	WA	OWA	AOWA	POWA
Alternativa 1	600	350	500	500	470	528	485
Alternativa 2	700	350	530	520	490	573	505
Alternativa 3	700	420	536	520	503	566	512
Alternativa 4	650	300	470	460	430	508	445
Alternativa 5	500	200	350	345	318	383	331

Tabla 8.27. Criterios de decisión para el Perfil 2

Alternativas	Max	Min	AM	WA	OWA	AOWA	POWA
Alternativa 1	800	600	700	695	678	723	686
Alternativa 2	750	600	680	664	672	691	668
Alternativa 3	780	600	684	678	664	704	671
Alternativa 4	560	400	488	487	471	507	479
Alternativa 5	420	360	394	394	388	401	391

Tabla 8.28. Criterios de decisión para el Perfil 3

Alternativas	Max	Min	AM	WA	OWA	AOWA	POWA
Alternativa 1	600	400	500	495	478	523	486
Alternativa 2	550	350	450	445	428	473	436
Alternativa 3	500	360	428	424	412	443	418
Alternativa 4	400	300	350	347	339	362	343
Alternativa 5	320	270	298	298	293	304	295

Tabla 8.29. Criterios de decisión para el Perfil 4

Alternativas	Max	Min	AM	WA	OWA	AOWA	POWA
Alternativa 1	1000	800	900	895	878	923	886
Alternativa 2	1100	700	900	890	855	945	873
Alternativa 3	950	800	866	849	853	878	851
Alternativa 4	720	620	674	675	665	687	670
Alternativa 5	530	450	496	496	487	505	492

Tabla 8.30. Criterios de decisión para el Perfil 5

Alternativas	Max	Min	AM	WA	OWA	AOWA	POWA
Alternativa 1	300	200	244	231	238	250	234
Alternativa 2	400	200	296	289	273	318	281
Alternativa 3	400	250	330	329	314	347	322
Alternativa 4	200	100	150	148	139	161	144
Alternativa 5	120	50	94	96	87	102	91

También se muestran los resúmenes de las diferentes alternativas en cada uno de los perfiles cuando se aplican los criterios de decisión mencionados anteriormente:

Tabla 8.31. Alternativas de decisión máximas por perfil

Segmentos	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	Alternativa 5
Perfil 1	600	700	700	650	500
Perfil 2	800	750	780	560	420
Perfil 3	600	550	500	400	320
Perfil 4	1000	1100	950	720	530
Perfil 5	300	400	400	200	120

Obsérvese que estos valores al ser los más optimistas coinciden con la situación de un fuerte crecimiento económico que proporcionaría los mejores beneficios.

Tabla 8.32. Alternativas de decisión mínimas por perfil

Segmentos	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	Alternativa 5
Perfil 1	350	350	420	300	200
Perfil 2	600	600	600	400	360
Perfil 3	400	350	360	300	270
Perfil 4	800	700	800	620	450
Perfil 5	200	200	250	100	50

En este caso, se puede notar que al ser los mínimos los valores más pesimistas coinciden con las estimaciones de una situación de fuerte recesión económica en cada alternativa.

Los otros resultados corresponden a los demás criterios de decisión que son valores intermedios entre los mínimos y máximos de cada alternativa, así:

Tabla 8.33. Alternativas de decisión con media aritmética por perfil

Segmentos	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	Alternativa 5
Perfil 1	500	530	536	470	350
Perfil 2	700	680	684	488	394
Perfil 3	500	450	428	350	298
Perfil 4	900	900	866	674	496
Perfil 5	244	296	330	150	94

Tabla 8.34. Alternativas de decisión con media ponderada por perfil

Segmentos	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	Alternativa 5
Perfil 1	500	520	520	460	345
Perfil 2	695	664	678	487	394
Perfil 3	495	445	678	347	298
Perfil 4	895	890	849	675	496
Perfil 5	231	289	329	148	96

Aunque las ponderaciones son diferentes, puesto que en la media aritmética todos los valores tienen el mismo peso, mientras que en la media ponderada, cada valor tiene asociada una probabilidad subjetiva establecida según previsiones de que se produzca cada una de las situaciones de la economía, los resultados no varían mucho entre un criterio u otro.

Tabla 8.35. Alternativas de decisión con operadores OWA por perfil

Segmentos	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	Alternativa 5
Perfil 1	470	490	503	430	318
Perfil 2	678	672	664	471	388
Perfil 3	478	428	412	339	293
Perfil 4	878	855	853	665	487
Perfil 5	238	273	314	139	87

Tabla 8.36. Alternativas de decisión con operadores AOWA por perfil

Segmentos	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	Alternativa 5
Perfil 1	528	573	566	508	383
Perfil 2	723	691	704	507	401
Perfil 3	523	473	443	362	304
Perfil 4	923	945	878	687	505
Perfil 5	250	318	347	161	102

Al analizar los valores de las alternativas en los operadores OWA y AOWA se pueden notar una gran diferencia, ya que en el OWA el criterio de decisión es pesimista y en el AOWA optimista

Tabla 8.37. Alternativas de decisión con operadores POWA por perfil

Segmentos	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	Alternativa 5
Perfil 1	485	505	512	445	331
Perfil 2	686	668	671	479	391
Perfil 3	486	436	418	343	295
Perfil 4	886	873	851	670	492
Perfil 5	234	281	322	144	91

El operador de agregación POWA, es una buena alternativa de decisión que combina la media ponderada que tiene en cuenta la probabilidad subjetiva de cada situación y el operador OWA que incluye la actitud pesimista del decisor, que en este caso coincide con las ponderaciones más altas a la economía estable y de ligera recesión.

Por tanto se ha elegido el operador POWA como criterio de decisión para elegir la mejor alternativa, de cual presentamos ahora los valores máximos, mínimos y la media aritmética:

Tabla 8.38. Resultados POWA

Segmentos	Máximo	Mínimo	Media Aritmética
Perfil 1	512	331	456
Perfil 2	686	391	579
Perfil 3	486	295	396
Perfil 4	886	492	754
Perfil 5	322	91	214

Si ordenamos las alternativas en orden descendentes para cada perfil según el POWA estas quedarán así:

Tabla 8.39. Ranking de alternativas

Segmentos	Ordenaciones
Perfil 1	$A3 > A2 > A1 > A4 > A5$
Perfil 2	$A1 > A3 > A2 > A4 > A5$
Perfil 3	$A1 > A2 > A3 > A4 > A5$
Perfil 4	$A1 > A2 > A3 > A4 > A5$
Perfil 5	$A3 > A2 > A1 > A4 > A5$

Ahora la elección de cada alternativa se hace para cada perfil en función de la actitud del decisor así:

Con una actitud optimista se deberían elegir los valores máximos de los operadores POWA quedando establecidos de la siguiente manera:

Tabla 8.40. Criterio optimista POWA

Segmentos	Máximo	Alternativa	Margen
Perfil 1	512	3	10%
Perfil 2	686	1	5%
Perfil 3	486	1	5%
Perfil 4	886	1	5%
Perfil 5	322	3	10%

El beneficio total con este criterio es de 2.892.

Con una actitud pesimista se deberían elegir los valores mínimos de los operadores POWA, quedando establecidos de la siguiente manera.

Tabla 8.41. Criterio pesimista POWA

Segmentos	Mínimo	Alternativa	Margen
Perfil 1	331	5	20%
Perfil 2	391	5	20%
Perfil 3	295	5	20%
Perfil 4	492	5	20%
Perfil 5	91	5	20%

El beneficio total con este criterio es de 1.600

Con una actitud más conservadora se deberían elegir valores intermedios para lo cual se puede utilizar el Step-POWA, seleccionando la alternativa que le corresponde el valor k en la ordenación. Por ejemplo:

- a. Si $k = 2$, se tiene:

Tabla 8.42. Criterio Step-POWA

Segmentos	Valor ($k=2$)	Alternativa	Margen
Perfil 1	505	2	8%
Perfil 2	671	3	10%
Perfil 3	436	2	8%
Perfil 4	873	2	8%
Perfil 5	281	2	8%

El beneficio total con este criterio es de 2.766.

- b. Si $k = 3$, se tiene:

Tabla 8.43. Criterio Step-POWA

Segmentos	Valor ($k=3$)	Alternativa	Margen
Perfil 1	485	1	5%
Perfil 2	668	2	8%
Perfil 3	418	3	10%
Perfil 4	851	3	10%
Perfil 5	234	1	5%

El beneficio total con este criterio es de 2.656.

- c. Si $k = 4$, se tiene:

Tabla 8.44. Criterio Step-POWA

Segmentos	Valor ($k=4$)	Alternativa	Margen
Perfil 1	445	4	15%
Perfil 2	479	4	15%
Perfil 3	343	4	15%
Perfil 4	670	4	15%
Perfil 5	144	4	15%

El beneficio total con este criterio es de 2.081.

Si se utiliza el Step-POWA con $k = 1$ se obtiene el máximo y con $k = 5$ el mínimo.

Cabe también recordar que los perfiles son independientes entre sí, por tanto el criterio para elegir la alternativa no necesariamente tiene que ser el mismo y se puede establecer uno diferente para los distintos perfiles.

Obsérvese que debido a la incertidumbre se desconoce la respuesta correcta, puesto que no se puede predecir el futuro al 100%. Por tanto, los métodos presentados en este trabajo tienen como objetivo asesorar de la forma más eficiente posible al decisor (empresa), según la actitud que presente, ya sea optimista o pesimista.

9. APLICACIONES DE LOS OPERADORES DE AGREGACIÓN OWA CON LÓGICA DIFUSA EN PROCESOS DE TARIFICACIÓN

En el capítulo octavo de esta investigación se ha ilustrado la utilización de los operadores de agregación OWA en diferentes etapas del proceso de tarificación, tal como el cálculo de la prima pura, el recargo de seguridad y el cálculo de beneficios para la establecer la prima comercial; contrastándolo con otros criterios clásicos como el máximo, el mínimo, la media aritmética o la media ponderada, en los cuales se ha podido evidenciar las bondades de estos métodos en la toma de decisiones en incertidumbre. Sin embargo, uno de los inconvenientes de los pronósticos en incertidumbre es la falta de información para hacer una estimación en el futuro, siendo muy complicado para los expertos establecer un valor exacto, acerca de lo que consideran que sucederá en un periodo de tiempo. En este capítulo se pretende ir más allá de los operadores OWA utilizados comúnmente y adentrarse con nuevas aplicaciones, a partir de las metodologías propuestas por los autores de este trabajo. Dichas metodologías corresponden a nuevas extensiones de los operadores y, que están en vía de ser publicados en revistas científicas. Estos artículos están plasmados en este documento en los capítulos 4,5 y 6.

Las aplicaciones propuestas se presentan a través de tres ejemplos ilustrativos utilizando diferentes herramientas de la lógica difusa donde se aborda el mismo problema con tres formas diferentes de hacer pronósticos con datos inciertos (números borrosos, expertones y variables lingüísticas). En estos ejemplos se utilizará el mismo caso para definir la estrategia de la prima comercial de capítulo anterior, aunque sólo se desarrollara para un perfil de una cartera de asegurados, ya que el procedimiento es el mismo si se quiere utilizar en los demás.

1. EJEMPLO ILUSTRATIVO: APLICACIÓN CON FGPOWA OPERATOR

Uno de los problemas en la toma de decisiones de tarifas en seguros es la gran diferencia entre los resultados pronosticados por los expertos de marketing y finanzas en cuanto al beneficio que se puede obtener con uno u otro perfil, siendo difícil llegar a un consenso general en gran parte de los casos. En este ejemplo, a través de los operadores de agregación OWA se presenta una metodología que permita tener en cuenta opiniones diferentes. Para lo cual, se les ha pedido a tres expertos que presenten un pronóstico de beneficios esperados utilizando números borrosos triangulares, para un determinado perfil de asegurados a una póliza del ramo automóvil, teniendo en consideración las siguientes alternativas:

Alternativa 1: estipular un margen de utilidad (beneficio) del 5%

Alternativa 2: estipular un margen de utilidad (beneficio) del 8%

Alternativa 3: estipular un margen de utilidad (beneficio) del 10%

Alternativa 4: estipular un margen de utilidad (beneficio) del 15%

Alternativa 5: estipular un margen de utilidad (beneficio) del 20%

También se tiene en consideración las siguientes situaciones de la economía que se pueden presentar en un futuro y que incidirán directamente en los resultados:

Situación 1: Fuerte crecimiento económico

Situación 2: Moderado crecimiento económico

Situación 3: Economía estable

Situación 4: Ligera recesión económica

Situación 5: Fuerte recesión económica

Los expertos presentaran sus estimaciones con números borrosos triangulares donde:

- El primer número corresponde al valor mínimo que se puede obtener en el caso más pesimista.
- El segundo número, corresponde al valor que tiene la probabilidad más alta de ser resultante.
- El tercer número, corresponde al valor máximo que se puede obtener en el caso más optimista.

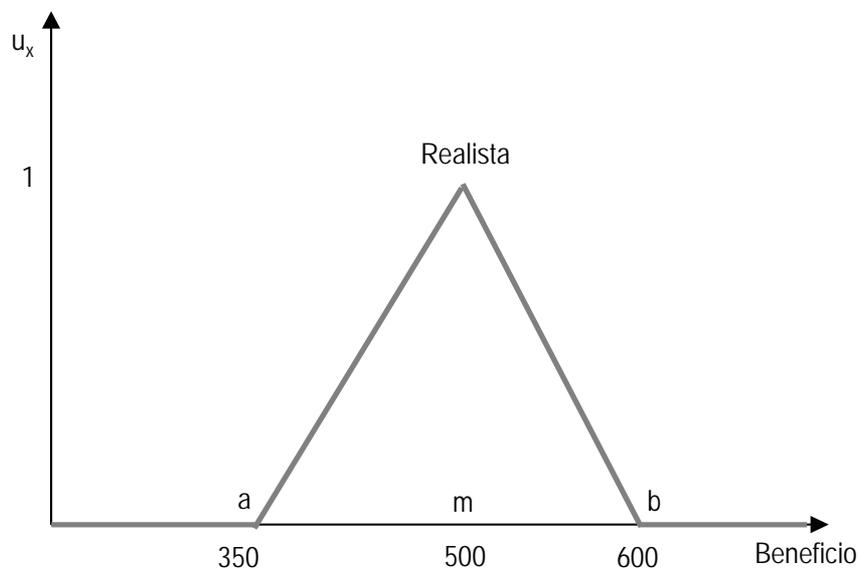


Figura 9.1. Ejemplo de un número borroso triangular

Visto gráficamente con un ejemplo, una valoración de $[350, 500, 600]$ sería representada como se muestra en la anterior figura 9.1.

En este caso se espera un beneficio esperado que puede variar entre 350 u.m. en el caso más pesimista y 600 u.m. en el caso más optimista, pero lo más probable es que se sitúe alrededor de 500 u.m. que es el valor establecido como más realista.

La estimación de cada uno de los expertos se presenta a continuación:

Tabla 9.1. Predicción Experto 1

Alternativas	Situación 1			Situación 2			Situación 3			Situación 4			Situación 5		
Alternativa 1	550	600	650	550	600	650	450	500	550	400	450	500	300	350	400
Alternativa 2	650	700	750	600	650	700	500	550	600	350	400	450	300	350	400
Alternativa 3	700	760	810	600	630	670	450	500	550	400	460	500	360	420	460
Alternativa 4	600	640	690	500	550	600	400	450	500	350	390	450	250	300	350
Alternativa 5	450	500	550	350	400	450	300	350	400	250	300	350	150	200	250

Tabla 9.2. Predicción Experto 2

Alternativas	Situación 1			Situación 2			Situación 3			Situación 4			Situación 5		
Alternativa 1	650	700	750	560	620	680	500	550	600	450	500	550	400	440	500
Alternativa 2	680	720	760	650	700	750	550	600	650	400	450	500	350	400	450
Alternativa 3	760	800	840	630	680	730	550	580	620	390	430	480	300	350	400
Alternativa 4	610	660	710	520	570	610	450	500	550	300	350	400	260	320	380
Alternativa 5	500	550	600	480	420	460	350	400	450	250	300	350	200	250	300

Tabla 9.3. Predicción Experto 3

Alternativas	Situación 1			Situación 2			Situación 3			Situación 4			Situación 5		
Alternativa 1	580	620	660	550	600	650	510	550	580	430	480	530	350	400	450
Alternativa 2	650	710	750	620	670	700	500	530	570	400	450	500	320	370	410
Alternativa 3	600	650	700	610	650	690	450	500	550	400	440	500	300	350	400
Alternativa 4	500	550	600	450	500	550	390	430	480	300	350	400	220	270	320
Alternativa 5	450	480	550	400	450	500	340	370	300	250	290	350	180	220	260

Para la agregación de las opiniones de los tres expertos se definió un vector de ponderación $U = (0.25, 0.4, 0.35)$, obteniéndose los siguientes resultados:

Tabla 9.4. Resultados colectivos

Alternativas	Situación 1			Situación 2			Situación 3			Situación 4			Situación 5		
Alternativa 1	601	647	694	554	608	662	491	538	581	431	481	531	358	404	458
Alternativa 2	662	712	754	627	677	720	520	563	610	388	438	488	327	377	424
Alternativa 3	689	738	784	616	657	701	490	532	578	396	441	492	315	368	415
Alternativa 4	569	617	667	491	541	587	417	463	513	313	360	413	244	298	352
Alternativa 5	470	513	570	420	426	472	334	377	385	250	297	350	181	227	274

Los expertos también han definidos los vectores de ponderación $P = (0.1, 0.2, 0.3, 0.3, 0.1)$ y $W = (0.4, 0.25, 0.15, 0.1, 0.1)$ y un parámetro $\beta = 0.4$ para el cálculo de los siguientes criterios:

- FAM: corresponde a la media aritmética de las tripletas de cada una de las alternativas.
- FPA: corresponde a la media aritmética ponderada de las tripletas de cada una de las alternativas con el vector de ponderación P .
- FOWA: corresponde a la agregación de la ordenación descendente de las tripletas de las alternativas utilizando el vector de ponderación W .
- AFOWA: corresponde a la agregación de la ordenación ascendente de las tripletas de las alternativas utilizando el vector de ponderación W .
- FPOWA: es la agregación utilizando el factor β para el FOWA y $(1 - \beta)$ para el FPA.

Los resultados obtenidos se muestran en las tablas 9.5 y 9.6.

Tabla 9.5. Resultados agregados

Alternativas	F-MÍNIMO			F-MÁXIMO			FAM			FPA		
Alternativa 1	358	404	458	601	647	694	487	535	585	483	532	581
Alternativa 2	327	377	424	662	712	754	505	553	599	497	544	591
Alternativa 3	315	368	415	689	738	784	501	547	594	489	534	581
Alternativa 4	244	298	352	569	617	667	406	456	506	398	446	497
Alternativa 5	181	227	274	470	513	570	331	368	410	324	361	399

Tabla 9.6. Resultados agregados

Alternativas	FOWA			AFOWA			FPOWA			A-FPOWA		
Alternativa 1	531	580	629	440	488	538	502	551	600	466	514	564
Alternativa 2	571	620	664	435	483	530	526	575	620	472	520	567
Alternativa 3	574	620	666	429	477	524	523	568	615	465	511	558
Alternativa 4	468	517	567	344	394	446	426	475	525	376	426	476
Alternativa 5	386	420	466	274	315	359	349	385	426	304	343	383

Luego si se establece un ranking de las alternativas, según los criterios de agregación utilizados obtenemos:

Tabla 9.7. Ranking de estrategias

Criterio	Ordenación
FAM	$A2 > A3 > A1 > A4 > A5$
FPA	$A2 > A3 > A1 > A4 > A5$
FOWA	$A3 > A2 > A1 > A4 > A5$
AFOWA	$A1 > A2 > A3 > A4 > A5$
FPOWA	$A2 > A3 > A1 > A4 > A5$
A-FPOWA	$A2 > A1 > A3 > A4 > A5$

El criterio para ordenar las alternativas consiste en seleccionar el valor central en orden descendente. En caso de empate, como en el FOWA, se asumió como segundo criterio darle prioridad al que tenga mayor valor en el primer número de la tripleta.

2. EJEMPLO ILUSTRATIVO: APLICACIÓN CON UGPWA OPERATOR

Al igual que en el ejemplo anterior la opinión de expertos es fundamental para hacer predicciones. Sin embargo, en ocasiones cuando no se tiene suficiente información es bastante difícil obtener un valor aproximado de los beneficios. Por ello se propone que las personas no emitan una estimación para cada caso, sino que valoren sobre una misma escala las diferentes alternativas. En este problema se pretende valorar los beneficios esperados para un perfil de asegurados del sector del automóvil, teniendo en cuenta las siguientes alternativas:

Alternativa 1. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 5%

Alternativa 2. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 8%

Alternativa 3. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 10%

Alternativa 4. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 15%

Alternativa 5. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 20%

Para dichas alternativas se prevé que se pueden presentar los siguientes entornos económicos:

Situación 1. Fuerte crecimiento económico

Situación 2. Moderado crecimiento económico

Situación 3. Economía estable

Situación 4. Ligera recesión económica

Situación 5. Fuerte recesión económica

A continuación, los expertos valoran cada alternativa en los diferentes escenarios de la economía, dando su opinión en el intervalo $[0,1]$, donde 0 corresponde al más bajo y 1 al más alto de los beneficios esperados. Teniendo en cuenta la incertidumbre de la situación y de la información disponible se presentan las predicciones con números borrosos en forma de tripletas. Los resultados obtenidos se presentan en las tablas 9.8, 9.9, 9.10, 9.11 y 9.12.

Tabla 9.8. Predicción Experto 1

Alternativas	Situación 1			Situación 2			Situación 3			Situación 4			Situación 5		
Alternativa 1	0,6	0,8	0,9	0,6	0,8	0,9	0,6	0,6	0,6	0,4	0,5	0,6	0,3	0,4	0,5
Alternativa 2	0,5	0,7	0,8	0,7	0,9	1,0	0,6	0,7	0,8	0,3	0,4	0,5	0,2	0,4	0,5
Alternativa 3	0,8	0,9	1,0	0,7	0,8	0,9	0,5	0,6	0,7	0,2	0,4	0,5	0,2	0,3	0,4
Alternativa 4	0,6	0,7	0,9	0,5	0,6	0,7	0,4	0,5	0,6	0,3	0,3	0,3	0,1	0,3	0,4
Alternativa 5	0,5	0,6	0,8	0,4	0,5	0,7	0,3	0,4	0,5	0,1	0,3	0,4	0,2	0,2	0,2

Tabla 9.9. Predicción Experto 2

Alternativas	Situación 1			Situación 2			Situación 3			Situación 4			Situación 5		
Alternativa 1	0,6	0,7	0,9	0,6	0,7	0,8	0,6	0,6	0,6	0,5	0,6	0,7	0,4	0,5	0,6
Alternativa 2	0,5	0,7	0,8	0,7	0,7	0,9	0,6	0,7	0,8	0,4	0,5	0,6	0,3	0,4	0,5
Alternativa 3	0,6	0,8	0,9	0,6	0,8	0,9	0,5	0,7	0,9	0,4	0,5	0,7	0,3	0,4	0,6
Alternativa 4	0,5	0,6	0,8	0,5	0,6	0,8	0,4	0,5	0,6	0,3	0,5	0,6	0,2	0,3	0,4
Alternativa 5	0,6	0,6	0,6	0,5	0,6	0,7	0,3	0,5	0,6	0,3	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3

Tabla 9.10. Predicción Experto 3

Alternativas	Situación 1			Situación 2			Situación 3			Situación 4			Situación 5		
Alternativa 1	0,5	0,7	0,8	0,5	0,7	0,8	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,4	0,6	0,7
Alternativa 2	0,6	0,7	0,9	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,8	0,4	0,6	0,7	0,4	0,5	0,6
Alternativa 3	0,7	0,8	0,9	0,6	0,8	0,9	0,6	0,7	0,9	0,4	0,7	0,8	0,3	0,5	0,6
Alternativa 4	0,7	0,9	1,0	0,7	0,8	0,9	0,6	0,6	0,6	0,4	0,5	0,6	0,3	0,4	0,5
Alternativa 5	0,8	0,9	1,0	0,8	0,9	1,0	0,5	0,6	0,7	0,4	0,5	0,6	0,2	0,3	0,4

Tabla 9.11. Predicción Experto 4

Alternativas	Situación 1			Situación 2			Situación 3			Situación 4			Situación 5		
Alternativa 1	0,6	0,7	0,8	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,5	0,6	0,7	0,6	0,7	0,8
Alternativa 2	0,7	0,8	0,9	0,6	0,7	0,8	0,6	0,6	0,7	0,5	0,6	0,8	0,6	0,7	0,8
Alternativa 3	0,7	0,9	1,0	0,8	0,9	1,0	0,5	0,7	0,8	0,6	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7
Alternativa 4	0,8	0,9	1,0	0,7	0,8	0,9	0,6	0,7	0,8	0,4	0,5	0,7	0,5	0,5	0,5
Alternativa 5	0,7	0,8	0,9	0,7	0,8	0,9	0,5	0,6	0,7	0,4	0,5	0,6	0,4	0,4	0,4

Tabla 9.12. Predicción Experto 5

Alternativas	Situación 1			Situación 2			Situación 3			Situación 4			Situación 5		
Alternativa 1	0,5	0,6	0,7	0,6	0,7	0,8	0,5	0,7	0,8	0,5	0,6	0,7	0,5	0,6	0,7
Alternativa 2	0,6	0,7	0,9	0,6	0,8	0,9	0,6	0,7	0,8	0,4	0,6	0,7	0,4	0,5	0,6
Alternativa 3	0,7	0,8	0,9	0,7	0,8	0,9	0,6	0,8	0,9	0,4	0,7	0,8	0,4	0,5	0,7
Alternativa 4	0,8	0,9	1	0,7	0,9	1	0,5	0,6	0,7	0,4	0,5	0,6	0,2	0,3	0,4
Alternativa 5	0,8	0,9	1	0,8	0,9	1	0,5	0,6	0,8	0,5	0,5	0,5	0,1	0,2	0,3

A partir de estos valores se construyen los expertones como se muestra a manera de ejemplo, para la alternativa 1 en la situación 1. En primer lugar se calculan primero las frecuencias absolutas, definidas como el número de veces que los expertos han dado una opinión; luego se obtienen las frecuencias relativas dividiendo las frecuencias absolutas entre el número de expertos. Y por último se calcula la frecuencia relativa acumulada sumando las frecuencias relativas de una forma acumulada, desde $\alpha = 1$ hasta $\alpha = 0$. Dicho proceso puede verse con detalle en la siguiente tabla:

Tabla 9.13. Experton para la Alternativa 1 y Situación 1

	Frecuencia Absoluta					Frecuencia Relativa					Frecuencia Relativa Acumulada			
	Situación 1					Situación 1					Situación 1			
Alternativa 1	0,0	0	0	0	→	0,0	0	0	0	→	0,0	1	1	1
	0,1	0	0	0		0,1	0	0	0		0,1	1	1	1
	0,2	0	0	0		0,2	0	0	0		0,2	1	1	1
	0,3	0	0	0		0,3	0	0	0		0,3	1	1	1
	0,4	0	0	0		0,4	0	0	0		0,4	1	1	1
	0,5	2	0	0	→	0,5	0,4	0	0	→	0,5	1	1	1
	0,6	3	1	0		0,6	0,6	0,2	0		0,6	0,6	1	1
	0,7	0	3	1		0,7	0	0,6	0,2		0,7	0	0,8	1
	0,8	0	1	2		0,8	0	0,2	0,4		0,8	0	0,2	0,8
	0,9	0	0	2		0,9	0	0	0,4		0,9	0	0	0,4
	1,0	0	0	0		1	0	0	0		1	0	0	0

El mismo procedimiento se aplicó para los demás expertones como se muestra en la tabla 9.14.

Tabla 9.14. Expertones para cada alternativa y situación

		Situación 1			Situación 2			Situación 3			Situación 4			Situación 5		
Alternativa 1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0,1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0,2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0,3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0,4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,8	1	1
	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,8	1	1	0,4	0,8	1
	0,6	0,6	1	1	0,8	1	1	0,6	1	1	0	0,8	1	0,2	0,6	0,8
	0,7	0	0,8	1	0	1	1	0	0,4	0,6	0	0	0,8	0	0,2	0,6
	0,8	0	0,2	0,8	0	0,2	1	0	0	0,4	0	0	0	0	0	0,2
	0,9	0	0	0,4	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Alternativa 2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0,1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0,2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0,3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,8	1	1
	0,4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,8	1	1	0,6	1	1
	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,2	0,8	1	0,2	0,6	1
	0,6	0,6	1	1	1	1	1	0,8	1	1	0	0,6	0,8	0,2	0,2	0,6
	0,7	0,2	1	1	0,4	1	1	0	0,6	1	0	0	0,6	0	0,2	0,2
	0,8	0	0,2	1	0	0,4	1	0	0	0,8	0	0	0,2	0	0	0,2
	0,9	0	0	0,6	0	0,2	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Alternativa 3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0,1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0,2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0,3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,8	1	1	0,8	1	1
	0,4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,8	1	1	0,4	0,8	1
	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,2	0,8	1	0,2	0,6	0,8
	0,6	1	1	1	1	1	1	0,4	1	1	0,2	0,6	0,8	0	0,2	0,8
	0,7	0,8	1	1	0,6	1	1	0	0,8	1	0	0,6	0,8	0	0	0,4
	0,8	0,2	1	1	0,2	1	1	0	0,2	0,8	0	0	0,6	0	0	0
	0,9	0	0,4	1	0	0,2	1	0	0	0,6	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0,4	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 9.14. Expertones para cada alternativa y situación (cont.)

		Situación 1			Situación 2			Situación 3			Situación 4			Situación 5		
Alternativa 4	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0,1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0,2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,8	1	1	
	0,3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,4	1	1	
	0,4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,6	0,8	0,8	0,2	0,4	1
	0,5	1	1	1	1	1	1	0,6	1	1	0	0,8	0,8	0,2	0,2	0,4
	0,6	0,8	1	1	0,6	1	1	0,4	0,6	1	0	0	0,8	0	0	0
	0,7	0,6	0,8	1	0,6	0,6	1	0	0,2	0,4	0	0	0,2	0	0	0
	0,8	0,4	0,6	1	0	0,6	0,8	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0
	0,9	0	0,6	0,8	0	0,2	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0,6	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Alternativa 5	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0,1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	0,2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,8	1	1	0,6	1	1
	0,3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,8	1	1	0,2	0,4	0,8
	0,4	1	1	1	1	1	1	0,6	1	1	0,6	0,8	1	0,2	0,2	0,4
	0,5	1	1	1	0,8	1	1	0,6	0,8	1	0,2	0,6	0,8	0	0	0
	0,6	0,8	1	1	0,6	0,8	1	0	0,6	0,8	0	0	0,4	0	0	0
	0,7	0,6	0,6	0,8	0,6	0,6	1	0	0	0,6	0	0	0	0	0	0
	0,8	0,4	0,6	0,8	0,4	0,6	0,6	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0
	0,9	0	0,4	0,6	0	0,4	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0,4	0	0	0,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Posteriormente se calcula el valor esperado de los expertones para cada alternativa y situación. Para ello se suman los niveles de pertenencia α , exceptuando $e = 0$ y dividiendo el resultado entre 10, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 9.15. Valor esperado de los expertones para cada alternativa y situación

Alternativas	Situación 1			Situación 2			Situación 3			Situación 4			Situación 5		
Alternativa 1	0,56	0,7	0,82	0,58	0,72	0,82	0,56	0,64	0,7	0,48	0,58	0,68	0,44	0,56	0,66
Alternativa 2	0,58	0,72	0,86	0,64	0,76	0,88	0,58	0,66	0,78	0,4	0,54	0,66	0,38	0,5	0,6
Alternativa 3	0,7	0,84	0,94	0,68	0,82	0,92	0,54	0,7	0,84	0,4	0,6	0,72	0,34	0,46	0,6
Alternativa 4	0,68	0,8	0,94	0,62	0,74	0,86	0,5	0,58	0,66	0,36	0,46	0,56	0,26	0,36	0,44
Alternativa 5	0,68	0,76	0,86	0,64	0,74	0,86	0,42	0,54	0,66	0,34	0,44	0,52	0,2	0,26	0,32

Los resultados obtenidos son utilizados de forma agregada para obtener la valoración de los beneficios esperados de cada una de las alternativas, teniendo en cuenta las diferentes situaciones de la economía en conjunto, a través de UA, UPA, UWA y el UPWA. Para el UWA se asume un vector de ponderación $V = (0.3, 0.2, 0.2, 0.15, 0.15)$ con una importancia del 30% y para el UPA $P = (0.1, 0.2, 0.3, 0.3, 0.1)$ con una importancia del 70%. De esta manera se obtienen los siguientes resultados agregados.

Tabla 9.16. Resultado agregados

Alternativas	UA			UPA			UWA			UPWA		
Alternativa 1	0,524	0,640	0,736	0,528	0,636	0,726	0,534	0,653	0,751	0,530	0,641	0,734
Alternativa 2	0,516	0,636	0,756	0,518	0,634	0,754	0,535	0,656	0,779	0,523	0,641	0,762
Alternativa 3	0,532	0,684	0,804	0,522	0,684	0,806	0,565	0,715	0,832	0,535	0,693	0,814
Alternativa 4	0,484	0,588	0,692	0,476	0,576	0,676	0,521	0,627	0,736	0,490	0,591	0,694
Alternativa 5	0,456	0,548	0,644	0,444	0,544	0,644	0,497	0,589	0,688	0,460	0,558	0,657

Tal como puede verse en la tabla anterior, cada uno de estos operadores proporciona diferentes resultados y decisiones como se muestra en la tabla 9.17 del ranking de alternativas en la página siguiente; siendo la número 3 la que obtendría los mejores beneficios. Se puede apreciar que dicha alternativa es la preferente en los cuatro criterios analizados.

Tabla 9.17. Ranking de estrategias

Criterio	Ordenación
UA	$A3 > A1 > A2 > A4 > A5$
UPA	$A3 > A1 > A2 > A4 > A5$
UWA	$A3 > A2 > A1 > A4 > A5$
UPWA	$A3 > A1 > A2 > A4 > A5$

3. EJEMPLO ILUSTRATIVO: APLICACIÓN CON ILPOWA OPERATOR

Uno de los problemas al hacer pronósticos es que en muchos casos es muy complicado establecer un valor numérico sobre lo que sucederá en el futuro. En algunas situaciones se soluciona en parte utilizando números borrosos, como en los dos ejemplos anteriores; en los cuales no se predice un valor único, sino un intervalo en el cual se espera acertar en la estimación. Sin embargo, una forma que facilita a los expertos emitir juicios sobre todo cuando no se tiene suficiente información y tiempo, es el uso de variables lingüísticas en las cuales en lugar de dar cantidades se utilizan adjetivos, que aunque no estiman un valor sobre lo que va a suceder, si hacen más fácil el proceso decisorio. Para ilustrarlo, se va utilizar el mismo ejemplo, en el que se pretende valorar los beneficios esperados para un perfil de asegurados del sector del automóvil, teniendo en cuenta las siguientes alternativas:

Alternativa 1. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 5%

Alternativa 2. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 8%

Alternativa 3. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 10%

Alternativa 4. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 15%

Alternativa 5. Estipular un margen de utilidad (beneficio) del 20%

Donde los posibles escenarios de la economía pueden ser:

Situación 1. Fuerte crecimiento económico

Situación 2. Moderado crecimiento económico

Situación 3. Economía estable

Situación 4. Ligera recesión económica

Situación 5. Fuerte recesión económica

El objetivo es que los expertos den su opinión para cada alternativa y situación de acuerdo con la siguiente escala de valores lingüísticos:

S0: Ninguno

S1: Extremadamente bajo

S2: Muy bajo

S3: Bajo

S4: Medio bajo

S5: Medio

S6: Medio alto

S7: Alto

S8: Muy alto

S9: Extremadamente alto

S10: Óptimo

Los juicios emitidos por tres expertos se presentan a continuación en las tablas 9.18, 9.19 y 9.20:

Tabla 9.18. Predicción Experto 1

Alternativas	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4	Situación 5
Alternativa 1	S8	S7	S5	S5	S4
Alternativa 2	S8	S7	S7	S6	S4
Alternativa 3	S9	S8	S8	S5	S5
Alternativa 4	S8	S7	S6	S5	S3
Alternativa 5	S7	S6	S6	S4	S2

Tabla 9.19. Predicción Experto 2

Alternativas	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4	Situación 5
Alternativa 1	S7	S6	S6	S7	S6
Alternativa 2	S7	S6	S6	S7	S5
Alternativa 3	S8	S8	S7	S5	S4
Alternativa 4	S9	S8	S8	S4	S3
Alternativa 5	S10	S9	S9	S4	S2

Tabla 9.20. Predicción Experto 3

Alternativas	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4	Situación 5
Alternativa 1	S7	S7	S6	S5	S5
Alternativa 2	S9	S9	S7	S6	S4
Alternativa 3	S9	S8	S8	S4	S3
Alternativa 4	S8	S8	S7	S4	S3
Alternativa 5	S8	S7	S6	S3	S2

Estos valores se han agregado para obtener una valoración global, utilizando un vector de ponderación $U = (0.25, 0.4, 0.35)$, obteniéndose los siguientes resultados:

Tabla 9.21. Resultados colectivos

Alternativas	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4	Situación 5
Alternativa 1	S7,3	S6,6	S5,8	S5,8	S5,2
Alternativa 2	S8,0	S7,3	S6,6	S6,4	S4,4
Alternativa 3	S8,6	S8,0	S7,6	S4,7	S3,9
Alternativa 4	S8,4	S7,8	S7,2	S4,3	S3,0
Alternativa 5	S8,6	S7,6	S7,2	S3,7	S2,0

También los expertos han definido los vectores de ponderación: $P = (0.1, 0.3, 0.3, 0.2, 0.1)$ y $W = (0.3, 0.2, 0.2, 0.15, 0.15)$, además de un parámetro $\beta = 0.5$ para el cálculo de los siguientes criterios:

- L-Máximo: corresponde al valor máximo o valor más optimista de todas las situaciones para cada alternativa.
- L-Mínimo: corresponde al valor mínimo o valor más pesimista de todas las situaciones para cada alternativa.
- LAM: es la media aritmética de las variables lingüísticas para cada alternativa.
- LPA: es la media aritmética ponderada de las alternativas utilizando el vector de ponderación P .
- LOWA: corresponde a la agregación de la ordenación descendente de las variables lingüísticas de las alternativas utilizando el vector de ponderación W .
- ILOWA: es la agregación de las alternativas utilizando el vector de ponderación W , pero teniendo como criterio de ordenación descendente un vector de inducción $U = \{6, 7, 10, 8, 12\}$. Este vector de inducción corresponde a una valoración de los expertos sobre los factores psicológicos que afectan la relación precio-calidad en cada una de las situaciones económicas.
- LPOWA: es la agregación utilizando el factor β para el LOWA y $(1 - \beta)$ para el LPA.
- ILPOWA: es la agregación utilizando el factor β para el ILOWA y $(1 - \beta)$ para el LPA.

Los resultados agregados obtenidos se muestran en la tabla 9.22:

Tabla 9.22. Resultados agregados

Alternativas	L-Máximo	L-Mínimo	LAM	LPA	LOWA	ILOWA	LPOWA	ILPOWA
Alternativa 1	S7,25	S5,15	S6,11	S6,11	S6,29	S5,93	S6,20	S6,11
Alternativa 2	S7,95	S4,40	S6,53	S6,69	S6,79	S6,21	S6,74	S6,50
Alternativa 3	S8,60	S3,90	S6,55	S6,86	S6,92	S6,11	S6,89	S6,52
Alternativa 4	S8,40	S3,00	S6,11	S6,46	S6,59	S5,60	S6,52	S6,10
Alternativa 5	S8,55	S2,00	S5,79	S6,21	S6,36	S5,19	S6,29	S5,77

Los resultados agregados se ordenan en orden descendente como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 9.23. Ranking de estrategias

Criterio	Ordenación
L-Máximo	$A3 > A5 > A4 > A2 > A1$
L-Mínimo	$A5 > A4 > A3 > A2 > A1$
LAM	$A3 > A2 > A4 = A1 > A5$
LPA	$A3 > A2 > A1 > A4 > A5$
LOWA	$A3 > A2 > A1 > A4 > A5$
ILOWA	$A2 > A3 > A1 > A4 > A5$
LPOWA	$A3 > A2 > A1 > A4 > A5$
ILPOWA	$A3 > A2 > A1 > A4 > A5$

Como se puede observar cada uno de los criterios u operadores anteriores puede llevar a tomar una decisión diferente que depende principalmente de la actitud del decisor. Sin embargo, la más favorable es la alternativa 3 y la menos favorable la alternativa 5 según el ranking de alternativas por criterio.

PARTE CUARTA

CONCLUSIONES

Este proyecto forma parte de un programa de investigación en el campo de la inteligencia computacional, en el que los autores vienen trabajando en los últimos años con resultados muy positivos. Dichos resultados se ven reflejados en el desarrollo de nuevos conocimientos en la línea de los operadores de agregación información OWA, a través de la publicación, hasta mayo de 2014, de alrededor de 100 artículos y ponencias de congreso, de gran impacto e indexados en la ISI Web Of Knowledge.

La problemática de la tarificación es un punto clave en las compañías aseguradoras, tanto desde el punto de vista de su competitividad como de su solvencia.

Los resultados en aplicaciones de operadores OWA en procesos de tarificación en seguros no vida, ramo automóvil, ofrecen una amplia visión sobre las múltiples bondades de los conocimientos teóricos desarrollados para el tratamiento de la incertidumbre. Dicha incertidumbre está asociada a los problemas económicos en general, y en particular como en este caso, al hecho de que un determinado nivel de tarifas puede verse afectado por las diferentes situaciones que atraviesa el mercado, o por cambios en la normativa legislativa. A continuación se presentan las conclusiones a nivel de cada uno de los capítulos.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 1

En este capítulo se presenta un resumen de los conocimientos teóricos sobre los métodos estadísticos para el cálculo de las primas. El objetivo del mismo es facilitar el conocimiento de la evolución de las técnicas utilizadas hasta el momento, las cuales sirven de base para el desarrollo de las aplicaciones

propuestas. De manera que al establecer un precio para una póliza de seguros debe seguirse un proceso complejo, ya que se trata de un riesgo, en el que es incierto saber con exactitud los costes que se deberán cubrir a futuro por los siniestros ocurridos. Asimismo, llegar a establecer tarifas justas tampoco es nada fácil, puesto que todos los asegurados no tienen el mismo nivel de riesgo. Sin embargo, estas situaciones se han podido controlar en gran medida con la ayuda de herramientas estadísticas, que permiten establecer predicciones confiables sobre el comportamiento de la frecuencia y el coste de los siniestros de una cartera de asegurados. Dicha cartera puede ser segmentada en función del nivel de riesgo de cada grupo de asegurados, definidos como perfiles de riesgo, y de esta forma acercarse a las previsiones.

También es importante señalar que cuando se establece una póliza de seguros con las correspondientes coberturas de riesgos, desde el punto de vista de los clientes, el producto es el mismo. Pero desde el punto de vista de la empresa aseguradora se considera el mismo producto a clientes que representan riesgos muy diferentes. Y por consiguiente pueden resultar más o menos costosos, debido a la heterogeneidad que hace que el riesgo no sea el mismo para todos.

El problema que hace tan complejo el proceso de tarificación es llegar a una tarifa justa, en la que aquellos que no ocasionan siniestros paguen un precio menor que aquellos que si los ocasionan. La forma en la que se ha tratado este problema es a través de una adecuada segmentación, donde a partir de unas características comunes de los asegurados, se establecen grupos en los cuales el comportamiento de la frecuencia y la severidad son similares entre ellos, pero muy diferenciado entre los grupos. De modo que, cada cliente en función de sus características pueda ser clasificado en uno de los segmentos, y así poder cobrarle una prima justa en función del nivel de riesgo que represente.

Los métodos actuariales presentan un amplio abanico de alternativas para tratar los diferentes problemas, de modo que la información obtenida en el cálculo de la prima pura sea lo más confiable posible. Ello se enmarca en dos sistemas: uno "a priori" y otro "a posteriori" que demuestran la alta incertidumbre que se presenta. En el sistema "a priori" se define un valor de la prima pura basado en la información histórica, la cual ofrece una primera

aproximación del comportamiento futuro del tenedor de una póliza. Habitualmente esto se realiza a través de técnicas de predicción que buscan encontrar variables que expliquen tanto la frecuencia como el coste de siniestralidad en un determinado perfil de riesgo. Tal es el caso de los modelos de regresión, aunque también se utilizan técnicas de segmentación de mercados. Dichas técnicas clasifican un grupo de individuos en pequeños subgrupos, con unas características comunes que conllevan a tener un comportamiento similar. Sin embargo, estos métodos no siempre aciertan en sus predicciones causando un desequilibrio en los precios pagados por los diferentes colectivos, siendo en muchos casos bastante injustos. Por tanto, es necesario recurrir a un segundo sistema denominado “a posteriori”, en el que después de transcurrido un determinado periodo de tiempo, de más de un año por lo general, se puedan corregir las desviaciones y ajustar la primera valoración. En este caso en el ajuste se incluye la experiencia de siniestralidad del asegurado, siendo el método más conocido y utilizado el sistema bonus-malus. En este sistema se bonifica el buen comportamiento con descuentos en las tarifas y se penaliza la siniestralidad observada con un incremento en la prima.

Por otra parte, el cálculo de una prima pura se obtiene de un valor medio estimado de los costes por siniestralidad de una póliza. Dicho cálculo se realiza basándose en información estadística histórica y por tanto, se tendrán desviaciones que de llegar a ser muy superiores al valor estimado inicialmente pueden poner en riesgo la solvencia de la empresa y en algunos casos llevarla a tener pérdidas catastróficas o una quiebra. La forma de prevenir este tipo de situaciones ha sido agregar a la prima pura un recargo de seguridad, que pretende mitigar el impacto que puedan tener las posibles desviaciones sobre los ingresos.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 2

Al estudiar los diferentes métodos estadísticos y sus aplicaciones en los procesos de tarificación de seguros no vida es importante resaltar los grandes avances de la ciencia actuarial en este campo. Pero a pesar de ello, la incertidumbre de diferentes situaciones del entorno hace que muchos aspectos no

se puedan predecir con la información histórica, al no presentarse con anterioridad o por lo menos de una forma regular. Tal es el caso de un cambio en la normativa o en el ciclo económico, los cuales puede afectar los resultados en el futuro, pero no se pueden evidenciar con datos históricos. Los efectos de dichos cambios forman parte de una valoración subjetiva por parte de un experto o grupo de expertos, que contribuyen a poder acercar los datos a un escenario diferente al pasado o actual. En el campo de la inteligencia computacional se viene avanzando a grandes pasos en los últimos años, a partir de cuatro técnicas:

Algoritmos Genéticos

En este método, las soluciones a los problemas van evolucionando como si fueran cromosomas, a través de iteraciones que desencadenan en nuevas generaciones de soluciones, logrando que se pueda operar con varias de ellas simultáneamente, sin tener demasiados conocimientos sobre el problema.

Redes Neuronales Artificiales

En esta técnica inspirada en las redes neuronales del cerebro humano. Se puede destacar principalmente el proceso de aprendizaje, haciendo que el modelo se adapte a los cambios del entorno, a través de un proceso muy efectivo especialmente en problemas no lineales.

Lógica Difusa o Borrosa

Esta metodología se basa en la forma de pensar del ser humano, la cual presenta alternativas para trabajar con datos vagos, imprecisos o inciertos, que permiten involucrar el juicio de expertos para ajustar la información obtenida por métodos estadísticos. O bien, en casos en los que no se cuenta con una información histórica suficiente o confiable, como en el lanzamiento de un nuevo producto, la aparición de un nuevo factor de riesgo, o cambios en el entorno que afecten sensiblemente la información utilizada tradicionalmente.

Máquinas de Vectores Soporte

Su aplicación en problemas de clasificación binarios, para el tratamiento de información que no es separable linealmente es de mucha utilidad. Tal es el caso de la segmentación de una cartera por perfiles de riesgo para el ramo de los seguros no vida.

Desde el punto de vista de la inteligencia computacional las aportaciones de esta investigación se han desarrollado a partir de las técnicas de lógica difusa. En dicha técnica es importante destacar sus bondades para la utilización del juicio de expertos y probabilidades subjetivas ante situaciones inciertas o desconocidas. Asimismo también permite considerar la actitud del decisor, bien sea optimista o pesimista en el proceso de toma de decisiones.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 3

Los métodos estadísticos son los más adecuados para determinar el valor de una prima pura y los recargos, con el fin de garantizar la solvencia de una entidad. Sin embargo, no se puede dejar de lado la incertidumbre que involucra establecer una estructura de costes para una póliza de seguros en la que el azar juega un papel preponderante. Ello hace que los procesos de toma de decisiones sean bastante complejos, teniendo en cuenta que los consensos por mayoría en muchas ocasiones han demostrado no ser muy efectivos.

Los criterios para tomar decisiones clásicos (optimista, pesimista, de Hurwicz o de Laplace), han servido para elegir alternativas cuando no se cuenta con una probabilidad objetiva o los resultados finales son difícilmente predecibles. Sin embargo, estos criterios son insuficientes en la medida que los problemas se vuelven más complejos y es necesario valorar la información y agregarla desde diferentes perspectivas. En este capítulo se hace una introducción teórica sobre los operadores de agregación OWA, mostrando su gran utilidad en la toma de decisiones. En el mismo se explica la definición básica, sus propiedades y las medidas que caracterizan el vector de ponderaciones. También se presentan las diferentes familias de operadores que permiten una gran flexibilidad para definir

el vector de pesos para la agregación de información mostrando los progresos en esta metodología. Se resaltan las aportaciones realizadas anteriormente para definir múltiples ponderaciones como:

- Máxima Entropía ME OWA (O'Hagan 1987,1988)
- Step-OWA (Yager, 1993)
- Window OWA (Yager, 1993)
- S-OWA (Yager, 1994)
- EZ-OWA (Yager, 2003)

Por otro lado los operadores OWA se han venido perfeccionando con el desarrollo de extensiones de diferentes niveles que le permiten adaptarse a diversos problemas y formas de valorar y presentar la información. Esto hace que estas técnicas tengan cada vez más importancia en los procesos de toma de decisiones. En este capítulo se destacan las siguientes extensiones de primer nivel:

- Induced OWA Operator (IOWA) (Yager y Filev, 1999)
- Linguistic OWA Operator (LOWA) ((Herrera, *et. al.*, 1995; Bordogna y Pasi, 1995; Herrera y Martínez, 2000; Xu, 2004)
- Heavy OWA Operator (Yager, 2002)
- Hybrid Averaging (Xu, 2006)
- Uncertain OWA Operator (UOWA) (Xu y Da, 2002)
- Fuzzy OWA Operator (FOWA) (Yager, 1998; Mitchel y Estrakh, 1998; Merigó y Casanovas, 2010; Chen *et al.*, 2011)

A partir de estas extensiones se han desarrollado muchas otras de niveles 2, 3 o 4, como también generalizaciones en la noción de media y otros operadores en la noción de distancia, probabilidad, media ponderada e índices de selección. Asimismo se ha avanzado en unificación entre operadores OWA, media ponderada y probabilidades. En este sentido es importante destacar la aportación a esta línea de investigación de los autores de este proyecto, a través

de los artículos publicados en los últimos años en la ISI Web Of Science, cuyo resumen se muestra en el cuadro de publicaciones siguiente.

**Publicaciones Montserrat Casanovas
y/o Josep María Merigó
en ISI Web of Science**

Año	Documentos Publicados
2007	1
2008	6
2009	10
2010	22
2011	24
2012	16
2013	18
2014	3
Total	100

Estas aportaciones de los investigadores de este proyecto han sido de gran relevancia en el campo científico, lo cual se evidencia con un total de 1.157 citas en diferentes documentos también publicados en la ISI Web of Science, según reporte de citas hasta mayo de 2014.

Los resultados de este proyecto corresponden a nuevas extensiones de los operadores de agregación de información OWA, utilizando lógica difusa, probabilidades, etiquetas lingüísticas y teoría de expertos, los cuales representan nuevos desarrollos teóricos que pueden ser aplicados no solo en la tarificación en seguros, sino también en otros problemas en el campo de economía y empresa. Asimismo se ha desarrollado una metodología en dos etapas, donde se utilizan diferentes herramientas de operadores OWA y lógica difusa para establecer una estrategia de precios. Todo esto se presenta en cuatro artículos enviados a revistas científicas para su publicación y que corresponden a los capítulos 4, 5, 6, y 7, de los cuales se pueden extraer las conclusiones que se indican a continuación.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 4

En este capítulo se presenta el trabajo titulado “Decisiones de Grupo con Operadores OWA Generalizados Probabilísticos y Lógica Difusa”, en el cual se propone una nueva técnica para las decisiones en grupo, combinando números borrosos, operadores OWA y medias ponderadas. Se trata de una herramienta que permite canalizar las opiniones de varios expertos en la toma de decisiones. Sus características principales son:

Decisiones de grupo

Se utiliza el juicio de diferentes expertos para analizar el problema, los cuales son agregados con una ponderación que depende de la relevancia que tiene cada uno de los expertos en la decisión, bien sea por la experiencia, información disponible u otros factores importantes.

Números borrosos

En este caso se ha trabajado con números borrosos triangulares, pero el método se adapta a otro tipo de números borrosos. El uso de estos números permiten mayor flexibilidad a los expertos para emitir opiniones, puesto que no sólo se define un rango con unos valores mínimo y máximo que contendrá el pronóstico sino que además se establece un valor intermedio, que se presume será más cercano a la predicción, en el caso de números triangulares o un intervalo de máxima presunción para los números trapezoidales.

Generalización de operadores

Se incluyen medias generalizadas en los operadores, que permite ampliar la gama de casos particulares de los operadores, permitiendo que se adapten mejor a cada caso y tener mejores argumentos para las decisiones.

Unificación de operadores

Se ha unificado el FGPA (*Fuzzy Generalized Probabilistic Average*) y el FGOWA (*Fuzzy Generalized Ordered Weighted Average*) en un mismo operador, asignándoles un grado de importancia, el cual depende del decisor, de manera que se aprovechan las bondades de cada uno, principalmente en el uso probabilidades subjetivas y actitud optimista/pesimista en el análisis.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 5

En este capítulo se presenta el trabajo denominado “Decisiones de Grupo Inciertas con Expertones y Operadores de Agregación Ponderados, Probabilísticos y Generalizados” es una nueva extensión de los operadores de agregación de información que unifica la probabilidad y la media ponderada utilizando lógica difusa, a través de números inciertos. Se trata de un nuevo operador muy flexible que ofrece múltiples herramientas para el tratamiento de problemas en situaciones de mucha incertidumbre. De modo que:

1. Los números inciertos permiten representar la información de una manera más completa, a través de intervalos que garantizan que la información estará contenida entre unos límites mínimo y máximo, en un juicio emitido por parte de los expertos. Su gran utilidad radica en aquellos casos en los que se desconoce con exactitud el posible resultado de una determinada situación.
- El uso de expertones en procesos de toma de decisiones de grupo da lugar a tener en cuenta las opiniones individuales dentro del grupo y obtener finalmente un resultado representativo. El uso de esta técnica es mejor que los consensos por mayoría o la media aritmética simple.
 - El operador UGPWA (*Uncertain Generalized Probabilistic Weighted Averaging*), incluye una amplia gama de operadores como: el UPA (*Uncertain Probabilistic Aggregation*), el UWA (*Uncertain Weighted Average*), el UGPA (*Uncertain Generalized Probabilistic Aggregation*), el UGWA (*Uncertain Generalized Weighted Average*), el PWA (*Probabilistic Weighted Average*), el

GPWA (*Generalized Probabilistic Weighted Average*) el UGA-PA (*Uncertain Generalized Average-Probabilistic Average*) y el UGA-WA (*Uncertain Generalized Average-Weighted Average*). Con lo cual el amplio abanico de casos y situaciones que se cubren es muy diverso.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 6

En este capítulo se presenta el trabajo denominado “Decisiones de Grupo Lingüísticas con Operadores de Agregación Inducidos e Información Probabilística”. Este nuevo operador de agregación de información se ha desarrollado principalmente para aplicarlo en la toma de decisiones a problemas en entornos muy inciertos y arriesgados. En dichos casos es muy complejo valorar las alternativas con la información disponible y más difícil aún llegar a cuantificarlas. Las principales características de dicho operador se refieren a:

Etiquetas lingüísticas

Utilizadas para valorar la información sin establecer un valor numérico al pronóstico, sino que se define a través de valores cualitativos (ninguno, bajo, medio, alto, muy alto, etc.), que facilitan la opinión de los expertos cuando no se cuenta con información suficiente o confiable para definirlo cuantitativamente.

Valoración multicriterio

Cuando se tiene un entorno muy incierto las opiniones de los expertos pueden variar mucho entre uno y otro, en función del criterio que tenga cada uno para valorar la información. Se pretende en dichos casos definir varios criterios y valorar cada alternativa a partir de cada uno de ellos, y agregarlos posteriormente en función de la importancia que el decisor le dé a cada uno de ellos.

Valoración multipersona

Se utiliza el juicio de varios expertos de forma independiente, lo cual permite en parte mitigar el impacto que tienen las valoraciones subjetivas, al tener en cuenta los diferentes puntos de vista que cada uno puede aportar.

Variables de Inducción

La ordenación de los argumentos, utilizando una variable de inducción y no a partir de su valor propio, permite que se puedan incluir otros factores importantes para valorar la información, con el propósito de mejorar la asertividad de las decisiones, más allá de la probabilidad subjetiva y la actitud del decisor.

La combinación de los elementos mencionados anteriormente con probabilidades permite obtener un operador con múltiples bondades, en el que de una forma ordenada se puede valorar una situación de una alta complejidad y llegar a establecer criterios de decisión bastante consensuados, cuando hay mucha incertidumbre y divergencia de opiniones.

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 7

En este capítulo se presenta el trabajo denominado “Toma de Decisiones en Procesos de Tarificación de Seguros No Vida utilizando Lógica Difusa y Operadores OWA”, en el que a partir de los nuevos desarrollos teóricos, resultado de este proyecto y de otras investigaciones en las que han participado los autores, se propone una metodología para aplicarla en la definición de una estrategia de precios, de la prima comercial de una póliza de seguros. Siendo importante destacar:

Las herramientas de lógica difusa

En este caso se utilizan intervalos de confianza para establecer diferentes niveles de beneficios, los cuales dependen de la situación de la economía y permiten una mayor flexibilidad a los expertos para emitir opiniones que se adapten mejor a las situaciones específicas.

La estrategia de precios

Se valora a partir de los posibles márgenes de beneficios globales y no unitarios, adaptándose mejor a la estrategia global de la empresa y no a la situación particular de cada producto.

Segmentación de la cartera

En el caso de las pólizas de seguros es necesario segmentar la cartera por perfiles de riesgo, en los que se establece el nivel de riesgo de los asegurados.

Flexibilidad

Este método en dos etapas es totalmente flexible, ya que en una primera etapa se puede definir una estrategia de precios individual para cada uno de los segmentos y/o en una segunda etapa agregar la información con operadores Heavy OWA para tener un criterio único.

Contribución a la optimización del beneficio de la compañía

Con este método propuesto las decisiones sobre la estrategia de precios se centran en factores económicos, buscando mejorar los beneficios globales de la compañía, al lograr establecer un criterio general para toda la cartera de asegurados, con la finalidad de obtener unos resultados corporativos óptimos de acuerdo con las situaciones del mercado y la economía.

CONCLUSIONES DE LOS CAPÍTULOS 8 Y 9

Con los nuevos conocimientos propuestos en los capítulos 4, 5, 6 y 7 se pueden evidenciar las nuevas aportaciones de los autores en el campo de la inteligencia computacional, al proponer nuevas extensiones de los operadores de agregación de información OWA y una metodología que permite aprovechar las

múltiples bondades para tratar el problema de la tarificación en un entorno incierto. En este último capítulo, se refuerzan todos estos planteamientos con el desarrollo de aplicaciones ilustrativas que muestran el potencial que tienen las propuestas de esta investigación, para aplicarlos en el campo de la tarificación de seguros no vida. No se pretende cambiar las técnicas actuariales que han demostrado una alta efectividad en el cálculo de la prima pura, sino complementarlas para ajustar los datos, a situaciones de incertidumbre como en los siguientes casos:

- Ante cambios en la situación económica, la normativa legislativa o en los hábitos de consumo, los cuales no se ven reflejados en la información histórica por no tener precedentes, pero que al tener evidencias de que afectaran la tarifa en el futuro se deben gestionar de algún modo, a pesar de su subjetividad.
- Los recargos adicionales a la prima pura como: de seguridad, gestión interna y externa, y margen de beneficio, para obtener el valor de una prima comercial. Aunque se utilicen datos estadísticos, estos cuentan con un mayor nivel de incertidumbre, lo cual conduce a la toma de decisiones de una forma más subjetiva.
- Las diferencias de enfoques, en algunos casos, entre los departamentos de marketing y financiero-actuarial para establecer niveles de tarifa, hacen que se requieran otras técnicas diferentes a los consensos por mayoría.

Por consiguiente, se han desarrollado varios ejemplos en el capítulo 8, en los que se combinan diferentes situaciones con alternativas, que afectan de una u otra manera cada uno de los perfiles de riesgo, en uno de los sectores más dinámicos del campo asegurador como es el del automóvil. De manera que:

- El primer ejemplo plantea una situación en la que se ajusta la prima pura, establecida con métodos estadísticos. Dicha prima puede ser afectada ante un cambio en la velocidad máxima permitida en autopistas, aplicado en las normas de conducción. Sabiendo que este hecho puede alterar tanto la frecuencia como la severidad de la siniestralidad en el sector au-

tomovilístico se ajustan los datos de forma subjetiva, utilizando los operadores de agregación de información OWA clásicos.

- En el segundo y tercer ejemplo, utilizando también los OWA clásicos, se valora la situación del primer caso pero tratando separadamente la frecuencia y la severidad para el posterior ajuste de la prima pura.
- En el cuarto ejemplo se trabaja sobre el recargo de seguridad, de modo que se combina la información estadística de métodos como: la varianza, desviación estándar y la máxima pérdida. En el mismo se propone, que en lugar de elegir uno de ellos se agreguen utilizando los operadores OWA.
- El quinto ejemplo es el de mayor aplicabilidad ya que se busca llegar a tener una estrategia adecuada de precios. En este caso se parte de la sensibilidad del mercado a las situaciones de la economía y del nivel de precios, con el fin de no basarse en márgenes de beneficio unitarios sino en los resultados globales, para ser más competitivos en el mercado a corto y largo plazo. De este modo, los expertos han pronosticado un margen de beneficio total, teniendo en cuenta cada una de las alternativas de precio y las posibles situaciones del entorno económico. Dichas valoraciones se hacen independientemente para cada perfil, y son evaluadas agregando la información con criterios de decisión clásicos y los operadores OWA, incluyendo además el operador POWA. Este operador combina probabilidades subjetivas con la actitud optimista/pesimista del decisor, asignando una ponderación relativa de la media ponderada frente al OWA. Cualquiera de estos criterios analizados permite establecer cuál es la estrategia de precios más adecuada para obtener los mejores beneficios globales.

En el capítulo 9 se profundiza sobre los nuevos desarrollos teóricos resultado de esta investigación, ya que siguiendo la línea del último ejemplo se plantean tres aplicaciones que complementan el trabajo de los capítulos 4, 5 y 6. De manera que:

- En primer lugar utilizando el operador FGPOWA se plantea un ejemplo en el que tres expertos pronostican los beneficios globales para un determinado perfil de riesgo, utilizando números borrosos triangulares. La importancia de este caso reside en la utilización de la lógica difusa, la cual hace

más flexible el proceso. Además al incluir generalizaciones de la media, probabilidades subjetivas y los OWA lo convierte en una herramienta muy completa, para problemas con altos niveles de incertidumbre.

- En segundo lugar, utilizando el operador UGPWA el ejemplo se enfoca en valorar los beneficios esperados de un perfil de riesgo, en una escala de $[0,1]$ siendo 0 el peor resultado y 1 el mejor, a partir de un número borroso triangular. La novedad en este caso reside en la utilización de la teoría de expertones para agregar las valoraciones de los expertos. Y posteriormente utilizar como operador de agregación la media ponderada y no el OWA. En esta aplicación no se pronostican los beneficios esperados, pero permite elegir la mejor alternativa, siendo una herramienta adecuada cuando no se tiene la suficiente información, para llevar a cabo una predicción de las ganancias futuras.
- Por último, se utiliza el operador ILPOWA en un ejemplo en el que las valoraciones se hacen utilizando etiquetas lingüísticas, a las cuales se les ha asignado un valor numérico, para facilitar la agregación y evaluación de las alternativas. Es importante resaltar en este operador que la ordenación no se lleva a cabo teniendo en cuenta los argumentos, sino que se incluye una variable de inducción que será la que defina la relevancia de los mismos. Dicha variable se establece como un vector asociado a los argumentos y es definido por los expertos, en el que dependiendo de la situación de la economía el comportamiento del consumidor se ve afectado por la relación precio-calidad.

CONCLUSIONES GENERALES

El objetivo de este proyecto ha sido analizar la problemática de la tarificación en seguros no vida. Dicha problemática goza de una gran complejidad, al tener que conciliar diferentes objetivos que de cierta manera pueden estar en contradicción como son: cobrar tarifas justas, mantener la solvencia de la empresa y ser competitivos en el mercado. Llegar a obtener un equilibrio entre estos tres factores no es una tarea fácil, aunque con la ayuda de las herramientas estadísticas se ha logrado obtener buenos resultados, al proporcionar estas un alto grado

de objetividad producto de los experimentos realizados. Sin embargo, esta información basada en probabilidades es representativa y no se puede garantizar que sea totalmente correcta ya que el pasado no se repite. A partir de ahí se ha asumido que dicha información debe contar con otros elementos, que permitan una mayor flexibilidad y ajustarse a las circunstancias del entorno cambiante. Siendo posible además sobrevalorar o infravalorar las estimaciones obtenidas, al involucrar la actitud optimista o pesimista, de quienes tomen las decisiones o dirijan el proceso de tarificación.

Desde la inteligencia computacional son muchas las herramientas que se pueden utilizar para tratar este tipo de problemas, en los cuales el nivel de incertidumbre es alto y/o se cuenta con información vaga o imprecisa. En particular se ha utilizado los operadores de agregación de información OWA, no sólo por las ventajas que ofrecen sino también por ser una línea de investigación en la cual los autores del proyecto han logrado tener muchos avances, ampliamente reconocidos en el mundo académico. Por tanto, se han desarrollado nuevas extensiones de estos operadores las cuales además de su aplicación en el sector asegurador, se convierten también en nuevos desarrollos teóricos, que podrán ser aplicados a diferentes campos de la investigación.

Los cuatro trabajos enviados a revistas científicas y las aplicaciones planteadas, permitirán a las empresas aseguradoras tener una visión más amplia del problema de tarificación y gestionar mejor la información, incluso en el caso de que esta sea escasa o inexistente. Asimismo los resultados pueden ser más efectivos al poder llevar a cabo análisis en diferentes escenarios e involucrar diferentes grados de optimismo/pesimismo.

En el contexto actual el entorno es altamente cambiante siendo necesario ir más allá de las herramientas estadísticas, para que las soluciones se ajusten mejor a la realidad. Es importante resaltar en las herramientas desarrolladas, su direccionamiento hacia las decisiones de grupo, como una forma de gestionar la incertidumbre y la subjetividad que conlleva la utilización del juicio de expertos en los procesos de toma de decisiones.

Los avances de esta investigación quedan evidenciados con los artículos enviados a revistas de alto prestigio científico indexadas en la ISI Web Of Knowledge. Sin embargo, se hace necesaria la integración de estos nuevos conocimientos en los procesos de tarificación con datos reales, para demostrar su pragmatismo y perfeccionar los operadores, especialmente en lo que hace referencia al establecimiento de los vectores de ponderación, con la ayuda de la opinión de expertos de la compañía.

Las nuevas herramientas propuestas, en las cuales se incluyen lógica difusa, probabilidades, expertones y etiquetas lingüísticas entre otros, con operadores de agregación OWA y la metodología en dos etapas, representan diferentes formas de tratar el mismo problema. Su implementación permitirá establecer las situaciones a las que mejor se adapta cada una de ellas y que en este trabajo se han establecido de forma intuitiva.

Esta investigación representa una aportación relevante para el conocimiento científico en el campo de la inteligencia computacional que complementa el trabajo previo realizado por los autores en el desarrollo de nuevas extensiones OWA, en las cuales también se pueden encontrar otros conocimientos que pueden resultar adecuados para aplicarlos a la gestión del riesgo asegurador.

Finalmente es importante señalar que estos nuevos conocimientos pueden ser incluidos en técnicas de inteligencia computacional que involucren otras herramientas, tales como las redes neuronales o los algoritmos genéticos entre otros, para mejorar los resultados obtenidos y desarrollar programas computacionales que soporten mejor las decisiones empresariales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDELWAHED, T., & AMIR, E. (2005). *New evolutionary bankruptcy forecasting model based on genetic algorithms and neural networks*. Los Alamitos, Calif.: IEEE Computer Society Press.
- AGGOUR, K., BONISSONE, P., CHEETHAM, W., & MESSMER, R. (2006). "Automating the underwriting of insurance applications". *The AI Magazine*, 27(3), 36-50.
- AHN, H., & KIM, K. (2009). "Bankruptcy prediction modeling with hybrid case-based reasoning and genetic algorithms approach". *Applied Soft Computing*, 9(2), 599-607.
- AHN, H., LEE, K., & KIM, K. (2006). "Global optimization of support vector machines using genetic algorithms for bankruptcy prediction". *Lecture Notes in Computer Science*, 4234, 420-429.
- ANTONIO, K., & BEIRLANT, J. (2007). "Actuarial statistics with generalized linear mixed models". *Insurance. Mathematics Economics*, 40(1), 58-76.
- ANTONIO, K., & VALDEZ, E. (2012). "Statistical concepts of and risk classification in insurance". *ASTA. Advances in Statistical Analysis*, 96(2), 187-224.
- AVILA, C. A. (1997). *Una alternativa al análisis de segmentación basada en el análisis de hipótesis de independencia condicionada*. Universidad de Salamanca.
- BELIAKOV, G.; PRADERA, A. and CALVO, T. (2007). *Aggregation functions: A guide for practitioners*. Berlin: Springer-Verlag.
- BELIAKOV, G.; JAMES, S.; MORDELOVÁ, J.; RÜCKSCHLOSŠOVÁ, T. & YAGER, R.R. (2010). Generalized Bonferroni mean operators in multi-criteria aggregation, *Fuzzy Sets and Systems* 161: 2227-2242.

- BERMÚDEZ, L., & KARLIS, D. (2011). "Bayesian multivariate poisson models for insurance ratemaking". *Insurance. Mathematics Economics*, 48(2), 226-236.
- BERRY STOELZLE, T., KOISSI, M., & SHAPIRO, A. (2010). "Detecting fuzzy relationships in regression models: The case of insurer solvency surveillance in Germany". *Insurance. Mathematics Economics*, 46(3), 554-567.
- BOJ DEL VAL, E. (2004). "Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación". *Cuadernos de la Fundación*, (88), 1-425.
- BOJ DEL VAL, E. (2006). "Tarificación del seguro del automóvil: métodos de análisis multivariante". *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 22-31.
- BOJ DEL VAL, E., CLARAMUNT BIELSA, M., & FORTIANA GREGORI, J. (2001). "Herramientas estadísticas para el estudio de perfiles de riesgo". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 59-90.
- BOJ DEL VAL, E., CLARAMUNT BIELSA, M. M., & FORTIANA, J. (2007). "Selection of predictors in distance-based regression". *Communications in Statistics. Simulation and Computation*, 36(1), 87-98.
- BOOKER, L., GOLDBERG, D., & HOLLAND, J. (1989). "Classifier System and Genetic Algorithms". *Artificial Intelligence*, 40(1-3), 235-282. 52
- BORDOGNA G., P. G. (1995). "Linguistic aggregation operators of selection criteria in fuzzy information retrieval". *International Journal of Intelligent Systems*, 10, 233.
- BOUSOÑO CALZÓN, C., HERAS, A., TOLMOS RODRÍGUEZ-PIÑERO, P. (2008). *Factores de riesgo y cálculo de primas mediante técnicas de aprendizaje*. Madrid: FUNDACIÓN MAPFRE.
- BROUHNS, N., GUILLEN, M., DENUIT, M., & PINQUET, J. (2003). "Bonus-malus scales in segmented tariffs with stochastic migration between segments". *The Journal of Risk and Insurance*, 70(4), 577-599.
- CALVO, T.; MAYOR, G. and MESIAR, R. (2002). *Aggregation Operators: New trends and applications*. New York: Physica-Verlag.

- CASANOVAS, M., & MERIGO, J. (2012). "Fuzzy aggregation operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure". *Expert Systems with Applications*, 39(8), 7138-7149.
- CHANG, S.S.L. and ZADEH, L.A. (1972). "On fuzzy mapping and control", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 2, nº 1, 30-34.
- CHEN, N., RIBEIRO, B., VIEIRA, A., DUARTE, J., & NEVES, J. (2011). "A genetic algorithm-based approach to cost-sensitive bankruptcy prediction". *Expert Systems with Applications*, 38(10), 12939-12945.
- CHEN, S. & NIOU, S. (2011). "Fuzzy multiple attributes group decision-making based on fuzzy induced OWA operators". *Expert Systems with Applications*, 38(4), 4097-4108.
- CHEN, S.J. and CHEN, S.M. (2003). "A new method for handling multi-criteria fuzzy decisión making problems using FN-IOWA Operators", *Cybernetics and Systems*, vol. 34, nº 2, 109-137.
- CHENG, M., PENG, H., WU, Y., & LIAO, Y. (2011). "Decision making for contractor insurance deductible using the evolutionary support vector machines inference model". *Expert Systems with Applications*, 38(6), 6547-6555.
- CUADRAS, C., ARENAS, C., & FORTIANA, J. (1996). "Some computational aspects of a distancebased model for prediction". *Communications in Statistics Simulation and Computation*, 25(3), 593-609.
- DAROONEH, A. (2004). "Non-life insurance pricing: Multi-agent model". *The European Physical Journal. B*, 42(1), 119-122.
- DELGADO GÓMEZ, D., AGUADO, D., LÓPEZ CASTROMÁN, J., SANTACRUZ, C., & ARTES RODRÍGUEZ, A. (2011). "Improving sale performance prediction using support vector machines". *Expert Systems with Applications*, 38(5), 5129-5132.
- DENG, Q., PU, Z., & WEN, H. (2010). *Financial warning for listed insurance companies based on radial basis function neural network*. Irvin: Sci. Res. Publ., INC-SRP.

- DENUIT, M., & LANG, S. (2004). "Non-life rate-making with bayesian GAMs". *Insurance. Mathematics Economics*, 35(3), 627-647.
- DIONNE, G., & VANASSE, C. (1992). "Automobile insurance ratemaking in the presence of asymmetrical information". *Journal of Applied Econometrics*, 7(2), 149-165.
- DIVSALAR, M., JAVID, M., GANDOMI, A., SOOFI, J., & MAHMOOD, M. (2011). "Hybrid genetic programming-based search algorithms for enterprise bankruptcy prediction". *Applied Artificial Intelligence*, 25(8), 669-692.
- DUBOIS, D. and PRADE, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. New York: Academic Press.
- EMMS, P. (2011). "Pricing general insurance in a reactive and competitive market". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(6), 1314-1332.
- ENGEMANN, K.J.; FILEV, D.P. and YAGER, R.R. (1996). "Modelling decision making using immediate probabilities", *International Journal of General Systems*, vol. 24, nº 3, 281-294.
- ESCOBAR, M., & CENTRO DE INVESTIGACIONES SOCIOLOGICAS (2007). *El análisis de segmentación: técnicas y aplicaciones de los árboles de clasificación*. Madrid: Centro de Investigaciones Sociológicas.
- FODOR, J.; MARICHAL, J.L. and ROUBENS, M. (1995). "Characterization of the ordered weighted averaging Operators", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 3, nº 2, 236-240.
- FORTIANA GREGORI, J., CUADRAS, C. M., & UNIVERSITAT DE BARCELONA (2009). *Enfoque basado en distancias de algunos métodos estadísticos multivariantes*. Barcelona: Universitat de Barcelona. Retrieved from <http://www.tdx.cat/TDX-1028109-114440/>
- FIGUEIRA, J.; GRECO, S. and EHRGOTT, M. (2005). *Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys*. Boston: Springer.

- FURLAN, S., VASILECAS, O., & BAJEC, M. (2011). "Method for selection of motor insurance fraud management components bases on business performance". *Ükio Technoginis Ir Ekonominis Vystymas*, 17(3), 535-561.
- GARKAZ, M., & ABDOLLAHI, A. (2011). *The investigation of possibility of the use of genetic algorithm in predicting companies' bankruptcy*. Singapore: Int. Assoc. Computer Science Information, Technology Press-IACSIT.
- GÓMEZ DÉNIZ, E., & VÁZQUEZ POLO, F. (2005). "Modelling uncertainty in insurance bonusmalus premium principles by using a bayesian robustness approach". *Journal of Applied Statistics*, 32(7), 771-784.
- GÓMEZ DÉNIZ, E., VÁZQUEZ-POLO, F. J., & PEREZ, J. M. (2006). "A note on computing bonusmalus insurance premiums using a hierarchical bayesian framework". *Test*, 15(2), 345-359.
- GÓMEZ DÉNIZ, E., SARABIA ALZAGA, J. M. (2008). *Teoría de la Credibilidad. Desarrollo y aplicaciones en primas de seguros y riesgos operacionales*. Madrid: Fundación Mapfre.
- GIL-LAFUENTE, A.M. & MERIGÓ, J.M. (2010). *Computational Intelligence in Business and Economics*, World Scientific, Singapore.
- GRABISCH, M.; MARICHAL, J.L.; MESIAR, R. & PAP, E. (2011). "Aggregation functions: Means", *Information Sciences*, 181: 1-22.
- GUILLÉN, M. (2005). *El seguro de automóviles: estado actual y perspectiva de la técnica actuarial*. Madrid: Fundación MAPFRE Estudios.
- HABERMAN, S., & RENSHAW, A. (1996). "Generalized linear models and actuarial science". *Statistician*, 45(4), 407-436.
- HERAS, A., VILAR, J., & GIL, J. (2002). "Asymptotic fairness of bonus-malus systems and optimal scales of premiums". *The GENEVA Papers on Risk and Insurance Theory*, 27(1), 61-82.

- HERAS, A., TOLMOS RODRÍGUEZ-PIÑERO, P., & HERNÁNDEZ MARCH, J. (2010). "Un análisis comparativo de una svm y un modelo logit en un problema de clasificación de asegurados". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, (16), 85-110.
- HERRERA, F.; HERRERA-VIEDMA, E. & VERDEGAY, J.L. (1995). A sequential selection process in group decision making with a linguistic assessment approach, *Information Sciences*, 85: 223-239.
- HERRERA, F.; HERRERA-VIEDMA, E. & MARTÍNEZ, L. (2008). A fuzzy linguistic methodology to deal with unbalanced linguistic term sets, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16: 354-370.
- HERRERA, F. & MARTÍNEZ, L. (2000). A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8: 746-752.
- HIROTA, K. (1981). "Concept of probabilistic sets", *Fuzzy Sets and Systems*, 5: 31-46.
- HOLLAND, J. H. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*.
- ILLICHEVSKIY, S. O. (2011). Combination of actuarial models and artificial neural networks for estimation of financial risks and bankruptcy probabilities for insurance companies. *Aktual'ni Problemi Ekonomiki*, (115), 253-258.
- KALUSZKA, M., & KRZESZOWIEC, M. (2012). "Pricing insurance contracts under cumulative prospect theory". *Insurance. Mathematics Economics*, 50(1), 159-166.
- KAO, C. (2009). "Efficiency decomposition in network data envelopment analysis: A relational model". *European Journal of Operational Research*, 192(3), 949-962.
- KAUFMANN, A. (1988). "Theory of expertons and fuzzy logic", *Fuzzy Sets and Systems*, 28: 295-304.
- KAUFMANN, A., & GIL ALUJA, J. (1987). *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*. Barcelona: Hispano-Europea.

- KAUFMANN, A. & GIL-ALUJA, J. (1993). *Special techniques for the management of experts* (In Spanish), Ed. Milladoiro, Vigo.
- KAUFMANN, A. & GUPTA, M. M. (1985). *Introduction to fuzzy arithmetic*. Reinhold: Publications Van Nostrand.
- KAUFMANN, A., & GUPTA, M. M. (1991). *Introduction to fuzzy arithmetic: Theory and applications*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- KIM, M., & KANG, D. (2012). "Classifiers selection in ensembles using genetic algorithms for bankruptcy prediction". *Expert Systems with Applications*, 39(10), 9308-9314.
- LAI, L. (2011). "Effects of insurance premium and deductible on production. Nonlinear Analysis", *Real World Applications*, 12(3), 1354-1358.
- LARSEN, H.L. (2012). "Importance weighting and andness control in De Morgan dual power means and OWA operators", *Fuzzy Sets and Systems*, 196: 17-32.
- LEMAIRE, J. (1995). *Bonus-malus systems in automobile insurance*. Norwell Mass.: Kluwer Scademic Publishers.
- LIN, C. (2009). "Using neural networks as a support tool in the decision making for insurance industry". *Expert Systems with Applications*, 36(3), 6914-6917.
- LIU, P. (2011). "A weighted aggregation operators multi-attribute group decision-making method based on interval-valued trapezoidal fuzzy numbers", *Expert Systems with Applications*, vol. 38, n° 2, 1053-1060.
- LIU, P.D. & SU, Y. (2010). "The multiple attribute decision making method based on the TFLHOWA operator", *Computers and Mathematics with Applications*, 60: 2609-2615.
- MERIGÓ, J.M. (2008). *New extensions to the OWA operator and its application in business decision making*. PhD Thesis, Department of Business Administration, Universitat de Barcelona.

- MERIGÓ, J.M. (2009). "The probabilistic weighted averaging operator and its application in decision making", in: *Operations Systems Research & Security of Information*, Canada, 55-58.
- MERIGÓ, J.M. (2010). "Fuzzy decision making with immediate probabilities", *Computers & Industrial Engineering*, vol. 58, nº 4, 651-657.
- MERIGÓ, J.M. (2011b). "A unified model between the weighted average and the induced OWA operator", *Expert Systems with Applications*, 38:11560-11572.
- MERIGÓ, J.M. (2011a). "Fuzzy multi-person decision making with fuzzy probabilistic aggregation operators", *International Journal of Fuzzy Systems*, 13: 163-174.
- MERIGÓ, J.M. (2011). "The uncertain probabilistic weighted average and its application in the theory of expertons". *African Journal of Business Management*, 5(15), 6092-6102.
- MERIGÓ, J.M. (2012a). "Probabilities with OWA operators", *Expert Systems with Applications*, 39: 11456-11467.
- MERIGÓ, J.M. (2012b). "The probabilistic weighted average and its application in multi-person decision making", *International Journal of Intelligent Systems*, 27: 457-476.
- MERIGÓ, J. & CASANOVAS, M. (2008). *The generalized hybrid averaging operator and its application in financial decision making*. Setubal: INSTICC-INST Syst. Technologies Information Control Communication.
- MERIGÓ, J. M. & CASANOVAS, M. (2009). "Induced aggregation operators in decision making with the Dempster-Shafer belief structure". *International Journal of Intelligent Systems*, 24(8), 934-954.
- MERIGÓ, J. & CASANOVAS, M. (2010a). "Decision making with distance measures and linguistic aggregation operators". *Int j Fuzzy Syst*, 12(3), 190-198.

- MERIGÓ, J.M. & CASANOVAS, M. (2010a). "Fuzzy generalized hybrid aggregation operators and its application in decision making", *International Journal of Fuzzy Systems*, 12(1), 15-24.
- MERIGÓ, J. & CASANOVAS, M. (2010d). "Induced and heavy aggregation operators with distance measures". *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 21(3), 431-439.
- MERIGÓ, J.M. & CASANOVAS, M. (2010c). "The fuzzy generalized OWA operator and its application in strategic decision making", *Cybernetics & Systems*, 41(5), 359-370.
- MERIGÓ, J.M. & CASANOVAS, M. (2011b). "Decision making with distance measures and induced aggregation operators", *Computers & Industrial Engineering*, 60(1): 66-76.
- MERIGÓ, J.M. & CASANOVAS, M. (2011a) (2011b). "The uncertain induced quasi-arithmetic OWA operator", *International Journal of Intelligent Systems*, 26(1), 1-24.
- MERIGÓ, J. M. & CASANOVAS, M. (2011a). "The uncertain induced quasi-arithmetic OWA operator introduction". *International Journal of Intelligent Systems*, 26, 1-24.
- MERIGÓ, J. & CASANOVAS, M. (2011b). "Decision-making with distance measures and induced aggregation operators". *Computers Industrial Engineering*, 60(1), 66-76.
- MERIGÓ, J. & CASANOVAS, M. (2011c). "Generalized aggregation operators in decision making with dempster-shafer belief structure". *Information*, 14(8), 2711-2732.
- MERIGÓ, J. & CASANOVAS, M. (2011d). "Induced aggregation operators in the euclidean distance and its application in financial decision making". *Expert Systems with Applications*, 38(6), 7603-7608.
- MERIGÓ, J. & CASANOVAS, M. (2011c) (2011e). "Induced and uncertain heavy OWA operators". *Computers Industrial Engineering*, 60(1), 106-116.

- MERIGÓ, J. & CASANOVAS, M. (2011f). "A new Minkowski distance based on induced aggregation operators". *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 4(2), 123-133.
- MERIGÓ, J. & CASANOVAS, M. (2011g). "The uncertain generalized owa operator and its application to financial decision making". *International Journal of Information Technology Decision Making*, 10(2), 211-230.
- MERIGÓ, J., & CASANOVAS, M. (2011h). *The uncertain generalized probabilistic weighted average and its application in the theory of expertons*. Paris: Atlantis Press.
- MERIGÓ, J. & CASANOVAS, M. (2012a). "Decision-making with uncertain aggregation operators using the dempster-shafer belief structure". *International Journal of Innovative Computing, Information Control*, 8(2), 1037-1061.
- MERIGÓ, J. & CASANOVAS, M. (2012b). *Linguistic decision making with probabilistic information and induced aggregation operators*. New York: IEEE.
- MERIGÓ, J., CASANOVAS, M. & ENGEMANN, K. (2012c). "Group decision-making with generalized and probabilistic aggregation operators". *International Journal of Innovative Computing, Information Control*, 8(7A), 4823-4835.
- MERIGÓ, J. M., CASANOVAS, M. & MARTINEZ, L. (2010e). "Linguistic aggregation operators for linguistic decision making based on the dempster-shafer theory of evidence". *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 18(3), 287-304.
- MERIGÓ, J., CASANOVAS, M., VANHOOF, K., RUAN, D. & LI, T. (2010f). *Dealing with uncertain information in the induced probabilistic owa operator*. ATHENS: WSPC.
- MERIGÓ, J., CASANOVAS, M., VANHOOF, K., RUAN, D. & LI, T. (2010g). *Using distance measures in heavy aggregation operators*. ATHENS: WSPC
- MERIGÓ, J.M. & GIL-LAFUENTE, A.M. (2009). "The induced generalized OWA operator", *Information Sciences*, 179(8), 729-741.

- MERIGÓ, J.M. & GIL-LAFUENTE, A.M. (2010). "New decision making techniques and their application in the selection of financial products", *Information Sciences*, 180 (11): 2085-2094.
- MERIGÓ, J.M. & GIL-LAFUENTE, A.M. (2011). "Fuzzy induced generalized aggregation operators and its application in multi-person decision making", *Expert Systems with Applications*, 38: 9761-9772.
- MERIGÓ, J.M.; GIL-LAFUENTE, A.M.; ZHOU, L.G. & CHEN, H.Y. (2012). "Induced and linguistic generalized aggregation operators and their application in linguistic group decision making", *Group Decision and Negotiation* 21: 531-549.
- MERIGÓ, J., GIL-LAFUENTE, A., & MARTORELL, O. (2012). "Uncertain induced aggregation operators and its application in tourism management". *Expert Systems with Applications*, 39(1), 869-880.
- MERIGÓ, J., & WEI, G. (2011). "Probabilistic aggregation operators and their application in uncertain multi-person decision-making". *Technological and Economic Development of Economy*, 17(2), 335-351.
- MERIGÓ, J., XU, Y., & ZENG, S. (2013). "Group decision making with distance measures and probabilistic information". *Knowledge-Based Systems*, 40, 81-87.
- MIN, S., LEE, J., & HAN, I. (2006). "Hybrid genetic algorithms and support vector machines for bankruptcy prediction". *Expert Systems with Applications*, 31(3), 652-660.
- MITCHELL, H. & ESTRAKH, D. (1998). "An OWA operator with fuzzy ranks". *International Journal of Intelligent Systems*, 13(1), 69-81.
- MOORE, R. E. (1966). *Interval analysis*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc.
- MOORE, R.E. (1966). *Interval Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- MORENO, M. T., & RAMOS, L. (2003). *Aplicación de modelos de credibilidad para el cálculo de primas en el seguro de automóviles*, en Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (Ed.). México.

- MORILLO, & BERMÚDEZ, L. (2003). "Bonus-malus system using an exponential loss function with an inverse gaussian distribution". *Insurance. Mathematics Economics*, 33(1), 49-57.
- NEUHAUS, W. (1988). "A Bonus Malus System in Automobile Insurance". *Insurance. Mathematics Economics*, 7(2), 103-112.
- O'HAGAN, M. (1990). *Using maximum entropy-ordered weighted averaging to construct a fuzzy neuron*. Proceedings of the 24th Annual IEEE Asilomar Conference on Signals, Systems and Computing; Pacific Grove, California.
- OHLSSON, E. (2008). "Combining generalized linear models and credibility models in practice". *Scandinavian Actuarial Journal*, (4), 301-314.
- PONS CARDELL, M. À. *Teoría de la credibilidad y su aplicación a los seguros colectivos*. Universitat de Barcelona. Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial. Retrieved from TDX/TDR database.
- PONS CARDELL, M. À., & UNIVERSITAT DE BARCELONA (1995). *Introducción a la teoría de la credibilidad* (2a ed. rev.). Barcelona: La autora.
- SALCEDO SANZ, S., FERNÁNDEZ VILLACAÑAS, J., SEGOVIA VARGAS, M., & BOUSOÑO CALZÓN, C. (2005). "Genetic programming for the prediction of insolvency in non-life insurance companies". *Computers Operations Research*, 32(4), 749-765.
- SÁNCHEZ, M. (1997). *Segmentación de carteras. Aplicación al seguro de responsabilidad civil del automóvil*. <http://www.Actuarios.org/espa/revista14/19-Art-8.Pdf>, 14, 62-65.
- SANCHIS, A., SEGOVIA, M. J., GIL, J. A., HERAS, A., & VILAR, J. L. (2007). "Rough sets and the role of the monetary policy in financial stability (macroeconomic problem) and the prediction of insolvency in insurance sector (microeconomic problem)". *European Journal of Operational Research*, 181(3), 1554-1573.
- SHANNON, C.E. (1948). "A mathematical theory of communication", *Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 379-423.

- SHANNON, C.E. (1948). "A mathematical theory of communication", *Bell Systems Technical Journal*, 27: 379-423, 623-656.
- SHAPIRO, A. (2002). *Insurance applications of soft computing technologies*. Berlin: Springer.
- SHAPIRO, A. (2002). "The merging of neural networks, fuzzy logic, and genetic algorithms". *Insurance. Mathematics Economics*, 31(1), 115-131.
- SHAPIRO, A. (2004). "Fuzzy logic in insurance". *Insurance. Mathematics Economics*, 35(2), 399-424.
- SHAPIRO, A. (2005). *An overview of insurance uses of fuzzy logic*. DURHAM: Joint Conference Information Sciences.
- SHAPIRO, A. (2007). *An overview of insurance uses of fuzzy logic*.
- SUBELJ, L., FURLAN, S., & BAJEC, M. (2011). "An expert system for detecting automobile insurance fraud using social network analysis". *Expert Systems with Applications*, 38(1), 1039-1052.
- SUNG, K. C. J., YAM, S. C. P., YUNG, S. P., & ZHOU, J. H. (2011). "Behavioral optimal insurance". *Insurance. Mathematics Economics*, 49(3), 418-428.
- TORRA, V. (1997). "The weighted OWA operator", *International Journal of Intelligent Systems*, 12: 153-166.
- ULM, E. (2012). "Insurance pricing, reserving, and performance evaluation under external constraints on capitalization and return on equity". *The Journal of Risk and Insurance*, 79(2), 541-566.
- VANDEBROEK, M. (1993). "Bonus-malus system or partial coverage to oppose moral hazard problems". *Insurance. Mathematics Economics*, 13(1), 1-5.
- VARETTO, F. (1998). Genetic algorithms applications in the analysis of insolvency risk. *Journal of Banking Finance*, 22(10-11), 1421-1439.

- VIAENE, S., DERRIG, R., BAESENS, B., & DEDENE, G. (2002). "A comparison of state-of-the-art classification techniques for expert automobile insurance claim fraud detection". *The Journal of Risk and Insurance*, 69(3), 373-421.
- WANG, Y.M. and LUO, Y. (2009). "Generalised fuzzy weighted mean and its applications", *International Journal of General Systems*, vol. 38, n° 5, 533-546.
- WEI, G.W. (2009). "Uncertain linguistic hybrid geometric mean operator and its application to group decision making under uncertain linguistic environment", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 17, 251-267.
- WEI, G.W. (2010). "Some induced geometric aggregation operators with intuitionistic fuzzy information and their application to group decision making", *Applied Soft Computing*, 10: 423-431.
- WEI, G.W. (2011). "FIOHWM operator and its application to multiple attribute group decision making", *Expert Systems with Applications*, vol. 38, n° 4, 2984-2989.
- WEI, G.W.; ZHAO, X. and LIN, R. (2010). "Some induced aggregating operators with fuzzy number intuitionistic fuzzy information and their applications to group decision making", *International Journal of Computational Intelligence Systems*, vol. 3, n° 1, 84-95.
- WU, C., TZENG, G., GOO, Y., & FANG, W. (2007). "A real-valued genetic algorithm to optimize the parameters of support vector machine for predicting bankruptcy". *Expert Systems with Applications*, 32(2), 397-408.
- XU, C. (2004). *OWA operator of linguistic label vague set and its application*. New York: IEEE.
- XU, Z. (2006). "A note on linguistic hybrid arithmetic averaging operator in multiple attribute group decision making with linguistic information". *Group Decision and Negotiation*, 15(6), 593-604.

- XU, Z.S. & DA, Q.L. (2002). "The uncertain OWA operator", *International Journal of Intelligent Systems*, 17: 569-575.
- XU, Z.S. & DA, Q.L. (2003). "An overview of operators for aggregating information", *International Journal of Intelligent Systems*, 18: 953-969.
- XU, Y.J. & WANG, H. (2011). "Approaches based on 2-tuple linguistic power aggregation operators for multiple attribute group decision making under linguistic environment", *Applied Soft Computing*, 11: 3988-3997.
- XU, Z.S. & XIA, M.M. (2012). "Identifying and eliminating dominated alternatives in multi-attribute decision making with intuitionistic fuzzy information", *Applied Soft Computing*, 12: 1451-1456.
- YAGER, R. (1992). "Applications and extensions of OWA aggregations". *International Journal of Man-Machine Studies*, 37(1), 103-132.
- YAGER, R. (1993). "Families of OWA operators". *Fuzzy Sets and Systems*, 59(2), 125-148.
- YAGER, R. (1994). "On weighted median aggregation. International Journal of Uncertainty", *Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 4, 401.
- YAGER, R. (1996). "Quantifier guided aggregation using OWA operators". *International Journal of Intelligent Systems*, 11(1), 49-73.
- YAGER, R. (1998). "Including importances in OWA aggregations using fuzzy systems modeling". *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2), 286-294.
- YAGER, R. (2002). "Heavy OWA operators". *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 379-397.
- YAGER R. (2003). *E-Z OWA weights*. Proceedings of the 10th IFSA World Congress, Istanbul, Turkey, 39-43.

- YAGER, R.R. (1988). "On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, vol. 18, n° 1, pp. 183-190.
- YAGER, R.R. (1993). "Families of OWA operators", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 59, n° 2, pp. 125-148.
- YAGER, R.R. (1998). "Including importances in OWA aggregation using fuzzy systems modelling", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6: 286-294.
- YAGER, R.R. (1999). "Including decision attitude in probabilistic decision making", *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 21, n° 1, pp. 1-21.
- YAGER, R.R. (2003). "Induced aggregation operators", *Fuzzy Sets and Systems*, 137: 59-69.
- YAGER, R.R. (2004). "Generalized OWA aggregation operators", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, vol. 3, n° 1, pp. 93-107.
- YAGER, R.R. (2008). "Times series smoothing and OWA aggregation", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16: 994-1007.
- YAGER, R.R. (2009). "On generalized Bonferroni mean operators for multi-criteria aggregation", *International Journal of Approximate Reasoning*, 50: 1279-1286.
- YAGER, R.R. (2009). "Weighted maximum entropy OWA aggregation with applications to decision making under risk", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics A*, vol. 39, n° 3, pp. 555-564.
- YAGER, R.R. (2010). "Norms induced from OWA operators", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18: 57-66.
- YAGER, R.R.; ENGEMANN, K.J. AND FILEV, D.P. (1995). "On the concept of immediate probabilities", *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 10, n° 4, pp. 373-397.

- YAGER, R.R. & FILEV, D.P. (1999). "Induced ordered weighted averaging operators". *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, 29: 141-150.
- YAGER, R.R. & KACPRZYK, J. (1997). *The ordered weighted averaging operators: Theory and applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.
- YAGER, R.R.; KACPRZYK, J. & BELIAKOV, G. (2011). *Recent developments on the ordered weighted averaging operators: Theory and practice*, Springer-Verlag, Berlin.
- YEO, A., SMITH, K., WILLIS, R., & BROOKS, M. (2001). "Modelling the effect of premium changes on motor insurance customer retention rates using neural networks". *Lecture Notes in Computer Science*, 2074, 390-399.
- YOUNG, V. (1996). "Insurance rate changing: A fuzzy logic approach". *The Journal of Risk and Insurance*, 63(3), 461-484.
- ZADEH, L.A. (1965). "Fuzzy sets", *Information and Control*, vol. 8, n° 3, pp. 338-353.
- ZADEH, L.A. (1975). "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part 1", *Information Sciences*, vol. 8, n° 2, pp. 199-249; "Part 2", *Information Sciences*, vol. 8, n° 4, pp. 301-357; "Part 3", *Information Sciences*, vol. 9, n° 1, pp. 43-80.
- ZADEH, L.A. (1994). "Soft Computing and Fuzzy Logic". *IEEE Software*, 11(6), 48-56.
- ZAVADSKAS, E.K. & Z. TURSKIS, Z. (2011). "Multiple criteria decision making (MCDM) methods: An overview", *Technological and Economic Development of Economy*, 17: 397-427.
- ZHAO, H.; XU, Z.S.; NI, M. AND LIU, S. (2010). "Generalized aggregation operators for intuitionistic fuzzy sets", *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 25, n° 1, pp. 1-30.
- ZHANG, Y., & WU, L. (2011). *Bankruptcy prediction by genetic ant colony algorithm..*

- ZENG, S., MERIGÓ, J. M., & SU, W. (2013). "The uncertain probabilistic OWA distance operator and its application in group decision making". *Applied Mathematical Modelling*, 37(9), 6266-6275.
- ZENG, S.Z. & SU, W. (2012). "Linguistic induced generalized aggregation distance operators and their application to decision making", *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, 46: 155-172.
- ZENG, S.Z., SU, W. LE, A. (2012). "Fuzzy generalized ordered weighted averaging distance operator and its application to decision making", *International Journal of Fuzzy Systems*, 14: 402-412.
- ZHOU, L.G., & CHEN, H.Y. (2010). "Generalized ordered weighted logarithm aggregation operators and their applications to group decision making". *International Journal of Intelligent Systems*, 25: 683-707.
- ZHOU, L.G., CHEN, H.Y., LIU, J. (2012). "Generalized power aggregation operators and their applications in group decision making", *Computers & Industrial Engineering*, 62: 989-999.
- ZHOU, L., CHEN, H., MERIGÓ, J., & GIL LAFUENTE, A. (2012). "Uncertain generalized aggregation operators". *Expert Systems with Applications*, 39(1), 1105-1117
- ZURICH-UETIKON: Scitec Publications. www.scientific.net/AMR.186.459

COLECCIÓN “CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN” Área de Seguro y Previsión Social

Para cualquier información sobre nuestras publicaciones puede encontrarnos en:

www.fundacionmapfre.org

201. Inteligencia computacional en la gestión del riesgo asegurador: operadores de agregación OWA en procesos de tarificación. 2014
200. El componente transfronterizo de las relaciones aseguradoras. 2014
199. El seguro basado en el uso (*Usage Based Insurance*). 2014
198. El seguro de decesos en la normativa aseguradora. Su encaje en Solvencia II. 2014
197. El seguro de responsabilidad civil en el arbitraje. 2014
196. La reputación corporativa en empresas aseguradoras: análisis y evaluación de factores explicativos. 2014
195. La acción directa del perjudicado en el ordenamiento jurídico comunitario. 2013
194. Investigaciones en Seguros y Gestión del Riesgo: RIESGO 2013
193. Viability of Patent Insurance in Spain. 2013
192. Viabilidad del seguro de patentes en España. 2013
191. Determinación de zonas homogéneas de riesgo para los rendimientos de distintos cultivos de la región pampeana en Argentina. 2013
190. Género y promoción en los sectores financiero y asegurador. 2013

189. An Introduction to Reinsurance. 2013
188. El control interno y la responsabilidad penal en la mediación de seguros privados. 2013
187. Una introducción al gobierno corporativo en la industria aseguradora en América Latina. 2013
186. Mortalidad de jóvenes en accidentes de tráfico. 2012
185. Las reclamaciones derivadas de accidentes de circulación por carretera transfronterizos. 2012
184. Efecto disuasorio del tipo de contrato sobre el fraude. 2012
183. Claves del Seguro Español: una aproximación a la Historia del Seguro en España. 2012
182. La responsabilidad civil del asegurador de asistencia sanitaria. 2012
181. Colaboración en el contrato de Reaseguro: el pago de reasegurador. 2012
180. Origen, situación actual y futuro del seguro de Protección Jurídica. 2012
179. Experiencias de microseguros en Colombia, Perú y Brasil. Modelo socio agente. 2012
178. El agente de seguros y su Responsabilidad Civil. 2012
177. Riesgo operacional en el marco de Solvencia II. 2012
176. Un siglo de seguros marítimos barceloneses en el comercio con América (1770-1870). 2012
175. El seguro de Caución. 2012

174. La contabilidad de los corredores de seguros y los planes y fondos de pensiones. 2012
173. El seguro de Vida en América Latina. 2011
172. Gerencia de riesgos sostenibles y Responsabilidad Social Empresarial en la entidad aseguradora. 2011
171. Investigaciones en Seguros y Gerencia de Riesgos. 2011
170. Introdução ao Resseguro. 2011
169. La salud y su aseguramiento en Argentina, Chile, Colombia y España. 2011
168. Diferencias de sexo en conductas de riesgo y tasa de mortalidad diferencial entre hombres y mujeres. 2011
167. Movilización y rescate de los compromisos por pensiones garantizados mediante contrato de seguros. 2011
166. Embedded Value aplicado al ramo No Vida. 2011
165. Las sociedades cautivas de Reaseguro. 2011
164. Daños del amianto: litigación, aseguramiento de riesgos y fondos de compensación. 2011
163. El riesgo de tipo de interés: experiencia española y Solvencia II. 2011
162. I Congreso sobre las Nuevas Tecnologías y sus repercusiones en el Seguro: Internet, Biotecnología y Nanotecnología. 2011
161. La incertidumbre bioactuarial en el riesgo de la longevidad. Reflexiones bioéticas. 2011

160. Actividad aseguradora y defensa de la competencia. La exención antitrust del sector asegurador. 2011
159. Estudio empírico sobre la tributación de los seguros de vida. 2010
158. Métodos estocásticos de estimación de las provisiones técnicas en el marco de Solvencia II. 2010
157. Introducción al Reaseguro. 2010
156. Encuentro Internacional sobre la Historia del Seguro. 2010
155. Los sistemas de salud en Latinoamérica y el papel del seguro privado. 2010
154. El Seguro de Crédito en Chile. 2010
153. El análisis financiero dinámico como herramienta para el desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II. 2010
152. Características sociodemográficas de las personas con doble cobertura sanitaria. Un estudio empírico. 2010
151. Solidaridad impropia y seguro de Responsabilidad Civil. 2010
150. La prevención del blanqueo de capitales en las entidades aseguradoras, las gestoras y los corredores de seguros. 2010
149. Fondos de aseguramiento agropecuario y rural: la experiencia mexicana en el mutualismo agropecuario y sus organizaciones superiores. 2010
148. Avaliação das Provisões de Sinistro sob o Enfoque das Novas Regras de Solvência do Brasil. 2010
147. El principio de igualdad sexual en el Seguro de Salud. Análisis actuarial de su impacto y alcance. 2010

146. Investigaciones históricas sobre el Seguro español. 2010
145. Perspectivas y análisis económico de la futura reforma del sistema español de valoración del daño corporal. 2009
144. Contabilidad y Análisis de Cuentas Anuales de Entidades Aseguradoras (Plan contable 24 de julio de 2008). 2009
143. Mudanças Climáticas e Análise de Risco da Indústria de Petróleo no Litoral Brasileiro. 2009
142. Bases técnicas dinámicas del Seguro de Dependencia en España. Una aproximación en campo discreto. 2009
141. Transferencia Alternativa de Riesgos en el seguro de Vida: Titulización de Riesgos. 2009
140. Riesgo de negocio ante asegurados con múltiples contratos. 2009
139. Optimización económica del Reaseguro cedido. Modelos de decisión. 2009
138. Inversiones en el Seguro de Vida en la actualidad y perspectivas de futuro. 2009
137. El Seguro de Vida en España. Factores que influyen en su progreso. 2009
136. Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos. RIESGO 2009
135. Análisis e interpretación de la gestión del fondo de maniobra en entidades aseguradoras de incendio y lucro cesante en grandes riesgos industriales. 2009
134. Gestión integral de Riesgos Corporativos como fuente de ventaja competitiva: cultura positiva del riesgo y reorganización estructural. 2009

133. La designación de la pareja de hecho como beneficiaria en los seguros de vida. 2009
132. Aproximación a la Responsabilidad Social de la empresa: reflexiones y propuesta de un modelo. 2009
131. La cobertura pública en el seguro de crédito a la exportación en España: cuestiones prácticas-jurídicas. 2009
130. La mediación en seguros privados: análisis de un complejo proceso de cambio legislativo. 2009
129. Temas relevantes del Derecho de Seguros contemporáneo. 2009
128. Cuestiones sobre la cláusula *cut through*. Transferencia y reconstrucción. 2008
127. La responsabilidad derivada de la utilización de organismos genéticamente modificados y la redistribución del riesgo a través del seguro. 2008
126. Ponencias de las Jornadas Internacionales sobre Catástrofes Naturales. 2008
125. La seguridad jurídica de las tecnologías de la información en el sector asegurador. 2008
124. Predicción de tablas de mortalidad dinámicas mediante un procedimiento *bootstrap*. 2008
123. Las compañías aseguradoras en los procesos penal y contencioso-administrativo. 2008
122. Factores de riesgo y cálculo de primas mediante técnicas de aprendizaje. 2008

121. La solicitud de seguro en la Ley 50/1980, de 8 de octubre, de Contrato de Seguro. 2008
120. Propuestas para un sistema de cobertura de enfermedades catastróficas en Argentina. 2008
119. Análisis del riesgo en seguros en el marco de Solvencia II: Técnicas estadísticas avanzadas Monte Carlo y *Bootstrapping*. 2008
118. Los planes de pensiones y los planes de previsión asegurados: su inclusión en el caudal hereditario. 2007
117. Evolução de resultados técnicos e financeiros no mercado segurador iberoamericano. 2007
116. Análisis de la Ley 26/2006 de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2007
115. Sistemas de cofinanciación de la dependencia: seguro privado frente a hipoteca inversa. 2007
114. El sector asegurador ante el cambio climático: riesgos y oportunidades. 2007
113. Responsabilidade social empresarial no mercado de seguros brasileiro. Influências culturais e implicações relacionais. 2007
112. Contabilidad y análisis de cuentas anuales de entidades aseguradoras. 2007
111. Fundamentos actuariales de primas y reservas de fianzas. 2007
110. El Fair Value de las provisiones técnicas de los seguros de Vida. 2007
109. El Seguro como instrumento de gestión de los M.E.R. (Materiales Especificados de Riesgo). 2006

108. Mercados de absorción de riesgos. 2006
107. La exteriorización de los compromisos por pensiones en la negociación colectiva. 2006
106. La utilización de datos médicos y genéticos en el ámbito de las compañías aseguradoras. 2006
105. Los seguros contra incendios forestales y su aplicación en Galicia. 2006
104. Fiscalidad del seguro en América Latina. 2006
103. Las NIC y su relación con el Plan Contable de Entidades Aseguradoras. 2006
102. Naturaleza jurídica del Seguro de Asistencia en Viaje. 2006
101. El Seguro de Automóviles en Iberoamérica. 2006
100. El nuevo perfil productivo y los seguros agropecuarios en Argentina. 2006
99. Modelos alternativos de transferencia y financiación de riesgos "ART": situación actual y perspectivas futuras. 2005
98. Disciplina de mercado en la industria de seguros en América Latina. 2005
97. Aplicación de métodos de inteligencia artificial para el análisis de la solvencia en entidades aseguradoras. 2005
96. El Sistema ABC-ABM: su aplicación en las entidades aseguradoras. 2005
95. Papel del docente universitario: ¿enseñar o ayudar a aprender? 2005
94. La renovación del Pacto de Toledo y la reforma del sistema de pensiones: ¿es suficiente el pacto político? 2005

92. Medición de la esperanza de vida residual según niveles de dependencia en España y costes de cuidados de larga duración. 2005
91. Problemática de la reforma de la Ley de Contrato de Seguro. 2005
90. Centros de atención telefónica del sector asegurador. 2005
89. Mercados aseguradores en el área mediterránea y cooperación para su desarrollo. 2005
88. Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación. 2004
87. Dependencia en el modelo individual, aplicación al riesgo de crédito. 2004
86. El margen de solvencia de las entidades aseguradoras en Iberoamérica. 2004
85. La matriz valor-fidelidad en el análisis de los asegurados en el ramo del automóvil. 2004
84. Estudio de la estructura de una cartera de pólizas y de la eficacia de un Bonus-Malus. 2004
83. La teoría del valor extremo: fundamentos y aplicación al seguro, ramo de responsabilidad civil autos. 2004
81. El Seguro de Dependencia: una visión general. 2004
80. Los planes y fondos de pensiones en el contexto europeo: la necesidad de una armonización. 2004
79. La actividad de las compañías aseguradoras de vida en el marco de la gestión integral de activos y pasivos. 2003
78. Nuevas perspectivas de la educación universitaria a distancia. 2003

77. El coste de los riesgos en la empresa española: 2001
76. La incorporación de los sistemas privados de pensiones en las pequeñas y medianas empresas. 2003
75. Incidencia de la nueva Ley de Enjuiciamiento Civil en los procesos de responsabilidad civil derivada del uso de vehículos a motor. 2002
74. Estructuras de propiedad, organización y canales de distribución de las empresas aseguradoras en el mercado español. 2002
73. Financiación del capital-riesgo mediante el seguro. 2002
72. Análisis del proceso de exteriorización de los compromisos por pensiones. 2002
71. Gestión de activos y pasivos en la cartera de un fondo de pensiones. 2002
70. El cuadro de mando integral para las entidades aseguradoras. 2002
69. Provisiones para prestaciones a la luz del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados; métodos estadísticos de cálculo. 2002
68. Los seguros de crédito y de caución en Iberoamérica. 2001
67. Gestión directiva en la internacionalización de la empresa. 2001
65. Ética empresarial y globalización. 2001
64. Fundamentos técnicos de la regulación del margen de solvencia. 2001
63. Análisis de la repercusión fiscal del seguro de vida y los planes de pensiones. Instrumentos de previsión social individual y empresarial. 2001

62. Seguridad Social: temas generales y régimen de clases pasivas del Estado. 2001
61. Sistemas Bonus-Malus generalizados con inclusión de los costes de los siniestros. 2001
60. Análisis técnico y económico del conjunto de las empresas aseguradoras de la Unión Europea. 2001
59. Estudio sobre el euro y el seguro. 2000
58. Problemática contable de las operaciones de reaseguro. 2000
56. Análisis económico y estadístico de los factores determinantes de la demanda de los seguros privados en España. 2000
54. El corredor de reaseguros y su legislación específica en América y Europa. 2000
53. Habilidades directivas: estudio de sesgo de género en instrumentos de evaluación. 2000
52. La estructura financiera de las entidades de seguros, S.A. 2000
50. Mixturas de distribuciones: aplicación a las variables más relevantes que modelan la siniestralidad en la empresa aseguradora. 1999
49. Solvencia y estabilidad financiera en la empresa de seguros: metodología y evaluación empírica mediante análisis multivariante. 1999
48. Matemática Actuarial no vida con MapleV. 1999
47. El fraude en el Seguro de Automóvil: cómo detectarlo. 1999
46. Evolución y predicción de las tablas de mortalidad dinámicas para la población española. 1999

45. Los Impuestos en una economía global. 1999
42. La Responsabilidad Civil por contaminación del entorno y su aseguramiento. 1998
41. De Maastricht a Amsterdam: un paso más en la integración europea. 1998
39. Perspectiva histórica de los documentos estadístico-contables del órgano de control: aspectos jurídicos, formalización y explotación. 1997
38. Legislación y estadísticas del mercado de seguros en la comunidad iberoamericana. 1997
37. La responsabilidad civil por accidente de circulación. Puntual comparación de los derechos francés y español. 1997
36. Cláusulas limitativas de los derechos de los asegurados y cláusulas delimitadoras del riesgo cubierto: las cláusulas de limitación temporal de la cobertura en el Seguro de Responsabilidad Civil. 1997
35. El control de riesgos en fraudes informáticos. 1997
34. El coste de los riesgos en la empresa española: 1995
33. La función del derecho en la economía. 1997
32. Decisiones racionales en reaseguro. 1996
31. Tipos estratégicos, orientación al mercado y resultados económicos: análisis empírico del sector asegurador español. 1996
30. El tiempo del directivo. 1996
29. Ruina y Seguro de Responsabilidad Civil Decenal. 1996
28. La naturaleza jurídica del Seguro de Responsabilidad Civil. 1995

27. La calidad total como factor para elevar la cuota de mercado en empresas de seguros. 1995
26. El coste de los riesgos en la empresa española: 1993
25. El reaseguro financiero. 1995
24. El seguro: expresión de solidaridad desde la perspectiva del derecho. 1995
23. Análisis de la demanda del seguro sanitario privado. 1993
22. Rentabilidad y productividad de entidades aseguradoras. 1994
21. La nueva regulación de las provisiones técnicas en la Directiva de Cuentas de la C.E.E. 1994
20. El Reaseguro en los procesos de integración económica. 1994
19. Una teoría de la educación. 1994
18. El Seguro de Crédito a la exportación en los países de la OCDE (evaluación de los resultados de los aseguradores públicos). 1994
16. La legislación española de seguros y su adaptación a la normativa comunitaria. 1993
15. El coste de los riesgos en la empresa española: 1991
14. El Reaseguro de exceso de pérdidas 1993
12. Los seguros de salud y la sanidad privada. 1993
10. Desarrollo directivo: una inversión estratégica. 1992
9. Técnicas de trabajo intelectual. 1992

8. La implantación de un sistema de controlling estratégico en la empresa. 1992
7. Los seguros de responsabilidad civil y su obligatoriedad de aseguramiento. 1992
6. Elementos de dirección estratégica de la empresa. 1992
5. La distribución comercial del seguro: sus estrategias y riesgos. 1991
4. Los seguros en una Europa cambiante: 1990-95. 1991
2. Resultados de la encuesta sobre la formación superior para los profesionales de entidades aseguradoras (A.P.S.). 1991
1. Filosofía empresarial: selección de artículos y ejemplos prácticos. 1991

ÚLTIMOS LIBROS PUBLICADOS

El riesgo de longevidad y su aplicación práctica a Solvencia II. 2014

Historia del Seguro en España. 2014

Actas del III Congreso Internacional de Nuevas Tecnologías: sus repercusiones en el seguro: internet, biotecnología y nanotecnología: 12 y 13 de noviembre de 2012, Santiago de Chile. 2013

Emergencia y reconstrucción: el antes y después del terremoto y tsunami del 27F en Chile. 2012

Riesgo sistémico y actividad aseguradora. 2012

La historia del seguro en Chile (1810-2010). 2012

Modelo de proyección de carteras de seguros para el ramo de decesos. 2011

Desarrollo comercial del seguro colectivo de dependencia en España. 2010

La mediación de seguros en España: análisis de la Ley 26/2006, de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2010

Museo del Seguro. Catálogo. 2010

Diccionario MAPFRE de Seguros. 2008

Teoría de la credibilidad: desarrollo y aplicaciones en primas de seguros y riesgos operacionales. 2008

El seguro de caución: una aproximación práctica. 2007

El seguro de pensiones. 2007

Las cargas del acreedor en el seguro de responsabilidad civil. 2006

Diccionario bilingüe de expresiones y términos de seguros: inglés-español, español-inglés. 2006

El seguro de riesgos catastróficos: reaseguro tradicional y transferencia alternativa de riesgos. 2005

La liquidación administrativa de entidades aseguradoras. 2005

INFORMES Y RANKINGS

Desde 1994 se publican anualmente estudios que presentan una panorámica concreta de los mercados aseguradores europeos, de España e Iberoamérica y que pueden consultarse en formato electrónico desde la página Web: www.fundacionmapfre.org

Mercado español de seguros

Mercado asegurador de Iberoamérica

Ranking de grupos aseguradores europeos
Ranking de grupos aseguradores iberoamericanos
Evolución del mercado asegurador latinoamericano 2003-2013
Informe de predicción de la actividad aseguradora en España. 2014
La percepción social del seguro en España 2014
La internacionalización de la empresa española: riesgos y oportunidades. 2014
El seguro en la sociedad y la economía españolas. 2013
Papel del seguro en el desarrollo sostenible. ICEA, 2013
Emprender en momentos de crisis: riesgos y factores de éxito. 2012
La percepción social del seguro en España 2012