

# Generación de escenarios económicos para la medición de riesgos de mercado en Solvencia II a través de modelos de series temporales

Pablo Durán Santomil  
Luis A. Otero González

FUNDACIÓN **MAPFRE**

Área de Seguro y Previsión Social



Área de Seguro y Previsión Social

**Generación de escenarios  
económicos para la medición de  
riesgos de mercado en Solvencia II  
a través de modelos  
de series temporales:  
Modelos actuariales avanzados  
para su gestión**

Pablo Durán Santomil  
Luis A. Otero González

FUNDACIÓN **MAPFRE**

FUNDACIÓN MAPFRE no se hace responsable del contenido de esta obra, ni el hecho de publicarla implica conformidad o identificación con la opinión del autor o autores.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin el permiso escrito del autor o del editor.

© 2014, FUNDACIÓN MAPFRE  
Paseo de Recoletos, 23  
28004 Madrid (España)

[www.fundacionmapfre.org](http://www.fundacionmapfre.org)  
[publicaciones.ics@fundacionmapfre.org](mailto:publicaciones.ics@fundacionmapfre.org)

ISBN: 978-84-9844-475-9  
Depósito Legal: M-35940-2014  
Maquetación y producción editorial: Cyan, Proyectos Editoriales, S.A.

## PRESENTACIÓN

Desde 1975, FUNDACIÓN MAPFRE desarrolla actividades de interés general para la sociedad en distintos ámbitos profesionales y culturales, así como acciones destinadas a la mejora de las condiciones económicas y sociales de las personas y sectores menos favorecidos de la sociedad. En este marco, el Área de Seguro y Previsión Social de FUNDACIÓN MAPFRE promueve y desarrolla actividades educativas y de investigación en los campos del seguro y de la previsión social.

En el ámbito educativo, su actuación abarca la formación académica de postgrado y especialización, desarrollada en colaboración con la Universidad Pontificia de Salamanca, así como cursos y seminarios para profesionales, impartidos en España e Iberoamérica. Estas tareas se extienden hacia otros ámbitos geográficos mediante la colaboración con instituciones españolas e internacionales, así como a través de un programa de formación en Internet.

Esta área promueve ayudas a la investigación en las áreas científicas del riesgo y del seguro y mantiene un Centro de Documentación especializado en seguros y gerencia de riesgos, que da soporte a sus actividades.

Dentro de estas actividades se encuadra la publicación de este libro, resultado de la “Ayuda a la Investigación en Seguros” que concedió FUNDACIÓN MAPFRE a los autores Pablo Durán Santomil y Luis A. Otero González en la convocatoria de 2010. El trabajo fue tutorizado por Luigi Lubelli, Subdirector General de Riesgos y Mercados de Capitales de MAPFRE, S.A. y por Juan José Zahonero, Subdirector de Cuantificación de Riesgos de MAPFRE, S.A.

Desde hace unos años, Internet es el medio por el que se desarrollan mayoritariamente nuestras actividades, ofreciendo a los usuarios de todo el mundo la posibilidad de acceder a las mismas de una manera rápida y eficaz mediante soportes Web de última generación a través de [www.fundacionmapfre.org](http://www.fundacionmapfre.org).

Área de Seguro y Previsión Social  
FUNDACIÓN MAPFRE

**Pablo Durán Santomil** es Licenciado en Administración y Dirección de Empresas, en Economía y Doctor en Finanzas, con la tesis “El análisis financiero dinámico como herramienta para el desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II”. Sus principales áreas de investigación son la gestión del riesgo y las finanzas internacionales, campos en los que es autor de diversas publicaciones. Como docente ha realizado su labor en la Universidad de Santiago de Compostela, actualmente como profesor ayudante doctor.

**Luis Otero González** es profesor titular del Departamento de Economía Financiera y Contabilidad de la Universidad de Santiago de Compostela. Su actividad docente se inicia en 1995 y es Doctor desde 2001 con la tesis “La actividad de las compañías aseguradoras de vida en el marco de la gestión integral de activos y pasivos”. Sus principales áreas de investigación son la gestión del riesgo de instituciones financieras y aseguradoras, finanzas internacionales y emprendimiento. Es autor de numerosos artículos de investigación y libros.

# ÍNDICE

<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>Capítulo 1. Modelos de series temporales univariantes</b>	<b>13</b>
1.1. Introducción a las series univariantes de rendimientos	13
1.1.1. Rendimientos financieros de un activo y características de los mismos	14
1.1.2. Conceptos previos para el análisis de series temporales	22
1.2. Modelos incondicionales para los rendimientos univariantes	38
1.3. Modelos de series temporales para la distribución condicional de los rendimientos univariantes	42
1.3.1. Modelos ARMA	45
1.3.2. Modelos de heterocedasticidad condicional (GARCH y SV)	75
1.3.3. Modelos de cambio de régimen	119
<b>Capítulo 2. Modelos para las series temporales multivariantes</b>	<b>137</b>
2.1. Introducción a las series multivariantes	137
2.2. Distribuciones multivariantes procedentes de la teoría de cópulas	147
2.2.1. Estimación de cópulas	151

2.2.2. Simulación o generación de variables correlacionadas mediante cópulas	162
2.3. Modelos VARMA	177
2.3.1. Modelos VaR	177
2.3.2. Modelos VMA	180
2.3.3. Modelos VARMA	181
2.3.4. Modelos VECM ( <i>Vector Error Correction Model</i> )	184
2.4. Modelos multivariantes MGARCH	187
2.4.1. Modelo VEC	190
2.4.2. Modelo EWMA	193
2.4.3. Modelo BEEK	194
2.4.4. Modelo CCC GARCH	196
2.4.5. Modelos DCC GARCH	199
2.4.6. Estimación modelos MGARCH	203
2.5. Otros modelos multivariantes para la volatilidad	207
<b>Capítulo 3. Métodos de comparación y selección de modelos</b>	<b>211</b>
3.1. El <i>backtesting</i> de los modelos VaR	211
3.1.1. Revisión de la literatura	212

3.1.2. Cobertura incondicional, independencia y función de fallos	214
3.1.3. Test de cobertura incondicional	220
3.1.4. Test de independencia	232
3.1.5. Test conjuntos	238
3.1.6. Test basados en múltiples niveles ( $\alpha$ ) VaR	239
3.1.7. Test basados en la función de pérdidas	253
3.1.8. Otras pruebas	255
3.1.9. Conclusiones	259
3.2. Criterios tradicionales de selección de modelos	260
3.2.1. Criterios basados en la función de verosimilitud	260
3.2.2. Test basados en el análisis de los residuos	264
<b>Capítulo 4. Adecuación de los modelos previos al análisis de diferentes riesgos de mercado: análisis empírico</b>	<b>293</b>
4.1. Análisis del riesgo de renta variable	293
4.1.1. Introducción y revisión teórica	293
4.1.2. Análisis empírico, <i>backtesting</i> y simulación	303
4.2. Análisis del riesgo de inmuebles	317
4.2.1. Introducción y revisión teórica	317

4.2.2. Causas del suavizado y técnicas de “des-suavizado”	325
4.2.3. Análisis empírico de la serie de rendimientos suavizada y “des-suavizada”	334
4.3. Análisis del riesgo de tipos de cambio	345
4.3.1. Introducción y revisión teórica	345
4.3.2. Análisis empírico, <i>backtesting</i> y simulación	350
4.4. Análisis del riesgo de <i>spread</i>	369
4.4.1. Introducción y revisión teórica	369
4.4.2. Análisis empírico, <i>backtesting</i> y simulación	375
<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>391</b>
<b>Colección de Cuadernos de la Fundación</b>	<b>423</b>

## INTRODUCCIÓN

La Directiva 2012/23 del Parlamento Europeo y del Consejo de 12 de septiembre de 2012 modifica la Directiva 2009/138/CE (Solvencia II) por lo que se refiere a la fecha de transposición, la fecha de aplicación y la fecha de derogación de determinadas Directivas. La Directiva 2009/138/CE establecía el 31 de octubre de 2012 como fecha de transposición y el 1 de noviembre de 2012 como fecha de aplicación de Solvencia II, por lo que esa sería la fecha de derogación de las Directivas de seguros y de re-seguros en vigor (Solvencia I). El 19 de enero de 2011, la Comisión adoptó la denominada propuesta Ómnibus II de modificación, entre otras, de la Directiva de Solvencia II, a fin de tener en cuenta la nueva estructura de supervisión para el seguro, concretamente, la creación de la Autoridad Europea de Supervisión (EIOPA). Habida cuenta de la complejidad de la propuesta Ómnibus II, la Directiva 2012/23 decide posponer la fecha de entrada en vigor del 31 de octubre de 2012 al 30 de junio de 2013 y la aplicación de Solvencia II a partir del 1 de enero de 2014, fecha en la que quedaría derogada Solvencia I. La entrada en vigor de la Directiva de Solvencia II sufrirá un nuevo retraso como consecuencia de la falta de acuerdo para la aprobación de la Directiva Ómnibus II y las divergencias en el sector sobre el tratamiento de determinados riesgos, especialmente los productos con garantías a largo plazo.

En julio de 2012 el Parlamento Europeo, el Consejo y la Comisión Europea recomiendan resolver las discrepancias respecto al tratamiento de los productos con garantías a largo plazo. El resultado de estas discusiones es el estudio que tiene por título "Análisis de las garantías a largo plazo" (*Long Term Guarantees Assessment, LTGA*) que se completa con la participación de un gran número de las empresas europeas durante 2013 y cuyos resultados son presentados en junio. Dado que las negociaciones legislativas están todavía en curso, siendo muy poco probable que las negociaciones sobre Omnibus II se concluyan y se publique la Directiva en el Diario Oficial antes de la fecha de aplicación de la Directiva 2012/23/EU, la Comisión el 2 de octubre 2013 presentó una propuesta de Directiva que aplaza la fecha de aplicación de la Directiva de Solvencia II al 1 de enero de 2016.

Solvencia II supone la revisión de las normas de evaluación de la situación financiera con el objetivo de mejorar la medición y el control del riesgo. Se pretende que las compañías de seguros dispongan de un nivel de recursos propios, denominado *Solvency Capital Requirement* (SCR)<sup>1</sup>, ajustado al riesgo realmente asumido. El cálculo de las necesidades de capital podrá realizarse a través de una fórmula estándar o, alternativamente, mediante modelos internos aprobados por el organismo regulador. En cuanto a la segunda opción, se permitirá la implantación de modelos parciales que no incluyan todos los riesgos a los que hace frente un asegurador. En ambos casos, la cuantía obtenida deberá corresponderse con el capital económico que han de poseer las compañías aseguradoras para limitar la probabilidad de ruina al 0,5% a un horizonte de un año (1 ruina cada 200 años). O dicho en términos financieros, una cantidad equivalente al valor en riesgo (VaR) con un nivel de confianza del 99,5%. La EIOPA, que ha sustituido a partir del 1 de enero de 2011 al CEIOPS<sup>2</sup>, es el actual encargado de desarrollar el modelo estándar. Para realizar dicha tarea se proponen fórmulas de cálculo del capital para los diferentes riesgos y se realizan estudios de impacto cuantitativo, los denominados *Quantitative Impact Studies* (QIS), sobre las compañías aseguradoras europeas que sirven para ver en que medida la calibración del modelo estándar es adecuada.

Este trabajo tiene por objeto establecer distintas alternativas para la generación de escenarios económicos para varios riesgos de mercado mediante modelos internos y la validación de los mismos a través de diversas técnicas de *backtesting*. En los primeros dos capítulos se abordan los posibles modelos a emplear, tanto para series univariantes como para series multivariantes. Mediante los modelos analizados podremos proyectar escenarios económicos hacia el futuro obteniendo su

---

<sup>1</sup> Solvencia II establecerá dos cantidades de capital: el capital económico (SCR) que es la cantidad asociada al riesgo realmente soportado por el asegurador y el capital legal o mínimo (MCR) que es la cantidad mínima que la compañía debe disponer en cada momento.

<sup>2</sup> La EIOPA es parte del Sistema Europeo de Supervisores Financieros que se encuentra conformado por tres Autoridades Europeas de Supervisión (ESA), divididas por sector: sector bancario (EU *Banking Authority* - EBA), sector del mercado de valores (EU *Securities and Markets Authority* - ESMA) y sector de seguros y pensiones de jubilación (EU *Insurance and Occupational Pensions Authority*-EIOPA). La EIOPA ha sido creado a partir de las reformas que se dieron sobre la supervisión del sector financiero en lo que respecta a la UE, viéndose ayudadas estas por la crisis financiera que comenzó en 2007. El denominado Comité de Supervisores Europeos de Seguros y Planes de Pensiones (*Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors* - CEIOPS) fue un organismo creado en el año 2003 por la Comisión Europea para gestionar el Proyecto Solvencia II.

distribución total a partir de la cual se podrían calcular las cargas de capital de los activos y pasivos vinculados a esos factores de riesgo. Los escenarios simulados deben ser generados a partir de modelos y parámetros calibrados para intentar recoger las regularidades estadísticas en los datos históricos.

En el capítulo 3 se aborda el *backtesting*, que es una técnica de validación que permite evaluar las discrepancias entre los modelos y las realizaciones reales. Desde un punto de vista regulador, la validación de los modelos es necesaria ya que en caso contrario las empresas aseguradoras podrían estar trabajando con modelos internos inadecuadamente calibrados. De esta forma la validación de un modelo es importante, ya que demuestra que funciona según lo previsto. El *backtesting* intenta mejorar la calidad de un modelo interno, mediante la identificación y análisis de las razones de las desviaciones entre los valores reales y los previstos por un modelo. Hemos detectado que pueden existir dificultades para llevar a cabo el *backtesting* de los modelos desarrollados por las entidades aseguradoras, que surgen principalmente debido al horizonte de tiempo considerado en Solvencia II y la falta de datos adecuados. Finalmente, el capítulo 4 está destinado a analizar distintas técnicas y herramientas para la simulación de escenarios económicos, con el objetivo de medir las cargas de capital necesarias para el riesgo de renta variable, riesgo de *spreads*, riesgo de inmuebles y riesgo de tipos de cambio de una compañía aseguradora en Solvencia II.

Finalmente queremos agradecer la ayuda recibida de la FUNDACIÓN MAPFRE para la elaboración de este trabajo de investigación, y en especial a Juan José Zahonero, Jaimie Villanueva y Luigi Lubelli por la atención prestada. No obstante, todos los errores o fallos que pudiera contener son responsabilidad única de los autores.



# **CAPÍTULO 1. MODELOS DE SERIES TEMPORALES UNIVARIANTES**

El objetivo general de este trabajo de investigación, consiste en analizar el proceso de construcción de modelos internos de medición de riesgos de mercado mediante el análisis de series temporales. En concreto, una parte fundamental de este trabajo se destina a describir y analizar los modelos adecuados para representar el comportamiento de los diversos riesgos financieros. En este sentido se abordan diferentes alternativas que intentan recoger las distintas características empíricas observadas en las series analizadas. Entre ellos destacamos los modelos autorregresivos, modelos de heterocedasticidad condicional y modelos de cambio de régimen, tanto en sus versiones univariantes como multivariantes. Dada la dificultad y relativa novedad de estos modelos en el ámbito actuarial se pretende elaborar una guía de la metodología adecuada para su implantación en Solvencia II. El enfoque de este trabajo combina la descripción teórica detallada de los modelos con un enfoque práctico empleando diverso *software* disponible en el mercado (Eviews, TSM, R). A efectos de facilitar el aprendizaje y la comprensión de dicho proceso se emplean diversos ejemplos que pueden ser fácilmente implantados en una hoja de cálculo como Excel.

En este primer apartado del trabajo estableceremos los principales modelos de series temporales univariantes que se aplicarán posteriormente a la medición del riesgo de renta variable, inmuebles, tipos de cambio y *spreads*. Sin embargo, antes de describir tales modelos resulta interesante comenzar realizando una introducción a las series de rendimientos financieros univariantes.

## **1.1. INTRODUCCIÓN A LAS SERIES UNIVARIANTES DE RENDIMIENTOS**

En este apartado realizaremos una introducción de las características de las series de rendimientos financieros. En este sentido este primer epígrafe se divide en los siguientes dos sub apartados. El primero establece la forma de cálculo, estadísticas y principales características de los rendimientos financieros de un activo. El segundo

establece conceptos previos necesarios para el análisis de las series temporales de rendimientos.

### 1.1.1. Rendimientos financieros de un activo y características de los mismos

Una serie temporal financiera univariante está compuesta por una serie de sucesivas observaciones del valor de un índice bursátil, cotización de una acción, tipo de cambio, etc. a lo largo de un horizonte temporal. Generalmente, en el campo financiero en vez de operar con los valores de la serie originales se emplean los rendimientos para obtener una serie estacionaria. Sea el precio de un activo en los momentos  $t$  y  $t-1$  respectivamente  $P_t$  y  $P_{t-1}$ , se define el rendimiento aritmético como:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

El rendimiento logarítmico vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln P_t - \ln P_{t-1}$$

El rendimiento suele ser expresado frecuentemente en tanto por ciento, por lo que los rendimientos logarítmicos que emplearemos posteriormente para la modelización de las series financieras vendrán dados en general por la siguiente expresión:

$$r_t = 100 \% \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = 100 \% [\ln P_t - \ln P_{t-1}]$$

La diferencia entre las tasas de rendimiento aritmético y logarítmico es normalmente pequeña. La relación existente entre ambas viene dada por:

$$r_t = \ln(1 + R_t) \\ R_t = e^{r_t} - 1$$

Las anteriores fórmulas posibilitan el cálculo de la rentabilidad de un periodo  $t$ . Para el cálculo de la rentabilidad de un activo a lo largo de varios periodos o rentabilidad

multi-periodo se emplea la agregación temporal de los rendimientos. Dicha agregación es útil cuando por ejemplo tenemos rendimientos mensuales y queremos calcular el rendimiento anual. En el caso de emplear rendimientos aritméticos se define el rendimiento multi-periodo aritmético como:

$$R_t(k) = (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1}) - 1$$

En el caso de emplear rendimientos logarítmicos se obtiene la siguiente expresión:

$$r_t(k) = r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1}$$

**Ejemplo.** Considérese la siguiente senda para el precio de un activo a lo largo de 5 periodos temporales

Tiempo ( $t$ )	1	2	3	4	5
Precio ( $P_t$ )	100	103	105	104	105

Los rendimientos simples y compuestos de dicho activo serán:

Tiempo ( $t$ )	1	2	3	4	5
$R_t$		3,00%	1,94%	-0,95%	0,96%
$r_t$		2,96%	1,92%	-0,96%	0,96%

De esta forma podemos afirmar que el rendimiento aritmético entre el momento temporal 1 y 2 es de 0,03 o 3,00%, calculado mediante  $R_2 = 103/100 - 1$ . El rendimiento logarítmico para dicho periodo es de 2,96%, calculado como  $\ln(103/100)$ .

Podemos calcular también a partir de la anterior senda de precios cualquier rendimiento multi-periodo. Por ejemplo, el rendimiento aritmético entre el momento temporal 1 y 5 es de 0,05 o 5,00%. Se puede obtener como  $105/100 - 1$  o aplicando la fórmula de la agregación temporal de rendimientos como  $(1+R_2)(1+R_3)(1+R_4)(1+R_5) - 1$ . El rendimiento logarítmico entre el momento temporal 1 y 5 es de 4,88%. Las alternativas para su cálculo son  $\ln(105) - \ln(100)$  o de forma alternativa como  $r_2 + r_3 + r_4 + r_5$ .

Además de la agregación de los rendimientos a través del tiempo también debemos establecer la denominada agregación de los rendimientos en una cartera. Consideremos una cartera formada por activos donde el peso o ponderación del activo en la cartera es de  $w_i$  ( $i=1, \dots, n$ ). Si representamos por  $R_i$  y  $r_i$  el rendimiento aritmético y logarítmico de cada activo, si el valor inicial de la cartera es  $P_0$  el valor de la cartera un periodo después con rendimientos logarítmicos es:

$$P_1 = \sum_{i=1}^n w_i P_0 e^{r_i}$$

Por ejemplo, en el caso de 3 activos obtenemos:

$$P_1 = w_1 P_0 e^{r_1} + w_2 P_0 e^{r_2} + w_3 P_0 e^{r_3}$$

Por lo que el rendimiento logarítmico de la cartera  $r_c = \ln(P_1/P_0)$  viene dado por:

$$r_c = \ln(w_1 e^{r_1} + w_2 e^{r_2} + w_3 e^{r_3})$$

Mediante los rendimientos aritméticos se establece la igualdad:

$$P_1 = \sum_{i=1}^n w_i P_0 (1 + R_i)$$

Por ejemplo, en el caso de 3 activos:

$$P_1 = w_1 P_0 (1 + R_1) + w_2 P_0 (1 + R_2) + w_3 P_0 (1 + R_3)$$

Por lo que el rendimiento aritmético de la cartera  $R_c = (P_1 - P_0)/P_0$  viene dado por:

$$R_c = w_1 R_1 + w_2 R_2 + w_3 R_3$$

**Ejemplo.** Considérese la siguiente senda para el precio de dos activos a lo largo de 5 periodos temporales. Suponemos que tenemos una cartera formada al 50% por cada uno de dichos activos ( $w_1 = w_2 = 0,5$ ).

Tiempo ( $t$ )	1	2	3	4	5
Activo 1 ( $P_{1t}$ )	100	103	105	104	105
Activo 2 ( $P_{2t}$ )	100	998	97	95	98

Los rendimientos simples y compuestos de dicho activo serán:

Tiempo ( $t$ )	1	2	3	4	5
$R_{1t}$		3,00%	1,94%	-0,95%	0,96%
$R_{2t}$		-2,00%	-1,02%	-2,06%	3,16%
$R_{ct}$		0,50%	0,46%	-1,51%	2,06%

Por ejemplo, para el Activo 2 el rendimientos en el periodo 2 viene dado por  $R_{22} = 98/100 - 1$ . El rendimiento para la cartera en el periodo 2 viene dado por  $R_{c,2} = w_1 R_{12} + w_2 R_{22} = 0,5 \cdot 3,00\% + 0,5 \cdot (-2,00\%) = 0,50\%$ .

Los rendimientos logarítmicos de dichos activos y de la cartera serán:

Tiempo ( $t$ )	1	2	3	4	5
$r_{1t}$		2,96%	1,92%	-0,96%	0,96%
$r_{2t}$		-2,02%	-1,03%	-2,08%	3,11%
$r_{ct}$		0,50%	0,46%	-1,52%	2,04%

Por ejemplo, para el Activo 2 el rendimientos en el periodo 2 viene dado por  $r_{22} = \ln(98/100)$ . El rendimiento para la cartera en el periodo 2 viene dado por  $r_{c,2} = \ln(w_1 e^{r_{12}} + w_2 e^{r_{22}}) = \ln(0,5 \exp(2,96\%) + 0,5 \exp(-2,02\%)) = 0,50\%$ . Se puede comprobar como  $r_{c,2} \neq w_1 r_{1t} + w_2 r_{2t} = 0,5 \cdot 2,96\% + 0,5 \cdot (-2,02\%) = 0,47\%$ . Sin embargo, a veces se asume que el rendimiento de la cartera es la media ponderada de los rendimientos logarítmicos<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Por ejemplo, esta hipótesis es empleada por Riskmetrics (1996).

Los precios de la hipotética cartera se pueden calcular mediante tres procedimientos. El primero consistiría en ponderar el precio de cada activo por su peso. A modo de ejemplo  $P_{c2} = 0,5 \cdot 103 + 0,5 \cdot 98 = 100,50$ .

El segundo método consiste en emplear los rendimientos aritméticos, por ejemplo,  $P_{c2} = 0,5 \cdot 100(1 + 3,00\%) + 0,5 \cdot 100(1 - 2,00\%) = 100,50$ .

Finalmente, se pueden emplear los rendimientos logarítmicos, por ejemplo,  $P_{c2} = 0,5 \cdot 100 \exp(2,96\%) + 0,5 \cdot 100 \exp(-2,02\%) = 100,50$ .

Tiempo $t$	1	2	3	4	5
Cartera ( $P_{ct}$ )	100,00	100,50	101,00	99,50	101,50

Para la agregación temporal es más conveniente trabajar con rendimientos logarítmicos mientras que para la agregación de los rendimientos de la cartera los rendimientos aritméticos ofrecen una expresión más sencilla.

### **Momentos de los rendimientos**

Dada una serie temporal de rendimientos  $\{r_1, r_2, \dots, r_T\}$  donde  $T$  es el número de observaciones de la serie podemos definir los momentos de los rendimientos. La media muestral o primer momento se define como:

$$\hat{\mu}_r = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$$

La varianza muestral vendrá dada por:

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu}_r)^2$$

De esta forma si la mayoría de los valores  $r_t$  están próximos a la media muestral  $\hat{\mu}_r$ , la varianza muestral  $\hat{\sigma}_r^2$  resultante será pequeña. La desviación típica muestral se obtiene como  $\hat{\sigma}_r = \sqrt{\hat{\sigma}_r^2}$ , siendo una medida de dispersión que muestra la ventaja que su resultado se encuentra expresado en las mismas unidades de la variable que se examina, y no en valores elevados al cuadrado como lo hace la varianza.

La asimetría o grado de sesgo se calcula generalmente mediante la siguiente fórmula:

$$\hat{S}_r = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_r^3} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu}_r)^3$$

El sesgo o coeficiente de asimetría  $\hat{S}_r$  es una medida de la simetría de una serie sobre su media. De esta forma si el coeficiente tiene un valor positivo (negativo) se dice que la distribución de los rendimientos es sesgada a derecha (izquierda) o que tiene sesgo positivo (negativo) Si el coeficiente de asimetría tiene un valor 0 se dice que la distribución es simétrica o que tiene sesgo nulo.

El coeficiente de curtosis muestral es una medida del apuntamiento o achatamiento de una distribución. Se calcula como:

$$\hat{K}_r = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_r^4} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu}_r)^4$$

El valor del coeficiente de curtosis<sup>4</sup> de la distribución normal es 3. Si  $\hat{K}_r$  excede del valor de 3 se dice que la distribución es leptocúrtica o relativamente elevada respecto a la normal, lo que implicará una mayor probabilidad de que la variable analizada tome valores extremos. Si el coeficiente de curtosis es menor a 3 se dice que la distribución es platicúrtica. Finalmente si el coeficiente de curtosis es igual a 3 se dice que la distribución es mesocúrtica.

Bajo la hipótesis de que los rendimientos están distribuidos normalmente y para suficientemente grande  $\hat{S}_r \sim N(0; 6/T)$  y  $\hat{K}_r - 3 \sim N(0; 24/T)$ . De esta forma es fácil establecer los siguientes test sobre los rendimientos: simetría, curtosis y normalidad de Jarque-Bera.

- Test de simetría. Tomando las propiedades expuestas anteriormente, se define el estadístico  $S$  como  $S = \frac{\hat{S}_r}{\sqrt{6/T}} \sim N(0; 1)$  bajo la hipótesis nula de normalidad. La regla de decisión es rechazar la hipótesis nula  $H_0$  de distribución simétrica si  $|S| > Z_{\alpha/2}$  o de forma análoga si el p-valor es menor que  $\alpha$ .

---

<sup>4</sup> También es común restarle a la fórmula anterior el valor 3 y afirmar que la curtosis de la normal es cero. De esta forma si supera el valor de cero la distribución será leptocúrtica.

- Test de curtosis. Se define el estadístico  $S$  como  $K = \frac{\bar{R}_t - 3}{\sqrt{24/T}} \sim N(0; 1)$  bajo la hipótesis nula de normalidad. La regla de decisión es rechazar la hipótesis nula  $H_0$  de distribución con colas normales si  $|S| > Z_{\alpha/2}$  o de forma análoga si el  $p$ -valor es menor que  $\alpha$ .
- Test de Jarque-Bera (Jarque y Bera, 1980, 1987) emplea el coeficiente de simetría  $S$  y curtosis  $K$  de una serie para verificar su normalidad:  $Q = K^2 + S^2 = \frac{n}{6} \left( \hat{s}_r^2 + \frac{(\bar{R}_t - 3)^2}{4} \right)$ . Bajo la hipótesis de que los rendimientos son normales el estadístico  $Q$  tiene una distribución  $\chi^2$  con dos grados de libertad. La regla de decisión es rechazar la hipótesis nula  $H_0$  de distribución normal si  $|Q| > \chi^2_2(\alpha)$  o de forma análoga si el  $p$ -valor es menor que  $\alpha$ .

**Ejemplo.** Dada la siguiente serie de precios, calcúlese los estadísticos descriptivos de los rendimientos aritméticos y logarítmicos.

$t$	Precio	$R_t$	$r_t$
1	100		
2	102	2,00%	1,98%
3	103	0,98%	0,98%
4	105	1,94%	1,92%
5	106	0,95%	0,95%
6	104	-1,89%	-1,90%
7	105	0,96%	0,96%
8	106	0,95%	0,95%
9	105	-0,94%	-0,95%
10	108	2,86%	2,82%
11	106	-1,85%	-1,87%
12	109	2,83%	2,79%

Los estadísticos descriptivos para los rendimientos aritméticos y logarítmicos y los test de normalidad anteriormente descritos se muestran a continuación<sup>5</sup>:

<sup>5</sup> En Excel se calcula el coeficiente de asimetría mediante =COEFICIENTE.ASIMETRIA(), la curtosis como =CURTOSIS(). Para calcular el  $p$ -valor del test de asimetría y curtosis se emplea la función =2\*DISTR.NORM.ESTAND[Test asimetría] y =2\*DISTR.NORM.ESTAND[Test curtosis], mientras que para el  $p$ -valor del test de JB se emplea =DISTR.CHI[Test JB;2]

	$R_t$	$r_t$
T	11	11
Media	0,0080	0,0078
Varianza	0,0003	0,0003
Asimetría	-0,5842	-0,6057
Curtosis	-0,7923	-0,7780
Test asimetría	-0,7910	-0,8201
p-valor	0,4290	0,4122
Test curtosis <sup>6</sup>	-0,5364	-0,5267
p-valor	0,5917	0,5984
Test JB	0,9134	0,9500
p-valor	0,6334	0,6219

Para un nivel de significatividad  $\alpha$  de 0,05 o nivel de confianza del 95% se acepta la hipótesis nula  $H_0$  de que la distribución de los rendimientos aritméticos y logarítmicos es simétrica y con colas normales, y mediante el test conjunto de Jarque Bera la hipótesis de normalidad.

En general, se observa que las series financieras temporales presentan características relevantes, como son:

- Exceso de curtosis (*excess kurtosis*) o colas gordas (*fat tails*). Por tanto la distribución de probabilidad de los rendimientos financieros posee colas gordas mayores que la normal o gaussiana (distribuciones leptocúrticas). Esta característica, es mencionada por primera vez por Mandebrot (1963) y Fama (1963, 1965).
- Los rendimientos suelen tener una distribución de rendimientos bastante simétrica, pero frecuentemente se obtienen distribuciones ligeramente asimétricas negativas.
- En caso de analizar series financieras de baja frecuencia (por ejemplo diarias) existe una correlación de los rendimientos a lo largo del tiempo (autocorrelación serial). Sin embargo en las series financieras de alta frecuencia (por ejemplo

<sup>6</sup> Debe advertirse que la fórmula CURTOSIS() de Excel devuelve la curtosis de un conjunto de datos comparada con la distribución normal a la que proporciona un valor de 0.

mensuales) se suele encontrar una ausencia o reducida estructura regular dinámica en la media. Los modelos de series temporales ARMA que veremos posteriormente modelizan de forma adecuada la posible dependencia en la media de los rendimientos.

- Existencia de periodos de agrupamiento, persistencia o conglomerados de volatilidad (*volatility clusters o persistence*), lo cual se reflejará en las funciones de autocorrelación de los cuadrados de la serie. Si la volatilidad es elevada (baja) en un periodo, tiende a seguir siendo elevada (baja) en los periodos siguientes (Engle, 1982), por lo que los efectos de un *shock* tardan en desaparecer. Distintos modelos de series temporales son capaces de reproducir este fenómeno, destacando los modelos tipo GARCH.
- De manera ocasional se pueden producir valores muy altos de volatilidad en determinados momentos, lo que se conoce como saltos discontinuos en los precios de los índices (Figlewski, 1997). Esto motivaría la introducción de modelos no lineales, como por ejemplo los modelos de cambio de régimen de Markov.
- Comportamiento asimétrico de las series temporales o efecto apalancamiento. Puede suceder que el comportamiento de las series de volatilidades es diferente según lleguen al mercado buenas o malas noticias (Campbell y Hentschel, 1992). Dado que las noticias no tienen el mismo impacto en el mercado se justifica el empleo de modelos asimétricos de volatilidad. Los modelos GARCH asimétricos, entre otros, son capaces de recoger esta propiedad.
- Movimientos conjuntos de volatilidad entre mercados. Los movimientos bruscos entre distintos mercados están fuertemente relacionados, lo que justifica la utilidad de los modelos multivariantes para series temporales, pues permiten analizar estas relaciones cruzadas. Entre los tipos de modelos multivariantes más empleados destacan los modelos GARCH multivariantes.

### **1.1.2. Conceptos previos para el análisis de series temporales**

En este apartado del trabajo se introducen algunos conceptos claves en el análisis de las series temporales como son el proceso estocástico estacionario, el proceso

de ruido blanco, el paseo aleatorio, las funciones de autocovarianzas y autocorrelaciones y la función de máxima verosimilitud.

### **Proceso estocástico estacionario**

Un proceso estocástico es un conjunto o sucesión de variables aleatorias  $\{r_t\}$  donde el subíndice toma valores en un cierto conjunto que se corresponde a los instantes temporales de observación (días, meses, etc.). De esta forma podemos definir una serie temporal como una realización de un proceso estocástico. Por tanto, una serie de  $T$  datos  $(r_1, r_2, \dots, r_T)$  es una muestra de tamaño uno del vector de  $T$  variables aleatorias ordenadas en el tiempo en los momentos  $t=1, 2, \dots, T$  y la serie observada se considera una realización o trayectoria del proceso estocástico.

Se dice que un proceso es estricta o fuertemente estacionario (*strict* o *strong stationarity*) si la distribución de probabilidad de cualquier subconjunto de variables del mismo es constante en el tiempo. Formalmente equivale a decir que para cualquier número entero positivo  $k$ , para los  $k$  puntos temporales  $t_1, \dots, t_k$  y el retardo temporal  $h$ , los vectores  $(r_{t_1}, r_{t_2}, \dots, r_{t_k})$  y  $(r_{t_1+h}, r_{t_2+h}, \dots, r_{t_k+h})$  tienen la misma distribución conjunta<sup>7</sup>.

La estacionariedad en sentido estricto es una condición muy fuerte, por lo que en la práctica se emplea la definición de estacionariedad en sentido débil<sup>8</sup>. Se dice que un proceso es débilmente estacionario o estacionario en sentido amplio (*weak, wide-sense* o *second-order stationarity*) si todas las varianzas del proceso son finitas y la media y las covarianzas son independientes de  $t$ . Esto implica la estabilidad de la media, la varianza y la estructura de covarianzas a lo largo del tiempo<sup>9</sup>. En términos

---

<sup>7</sup> Que la distribución conjunta de cualquier conjunto de variables no se modifica si trasladamos las variables en el tiempo implica dos condiciones. La primera que las distribuciones marginales de todas las variables son idénticas, lo que establece que la media y la varianza (y también los coeficientes de curtosis y asimetría) para todas las variables son las mismas, ya que las distribuciones son las mismas para todos los retardos. La segunda, que las distribuciones finito-dimensionales de cualquier conjunto de variables sólo dependen de los retardos entre ellas, lo que impone que la dependencia entre las variables sólo depende de sus retardos.

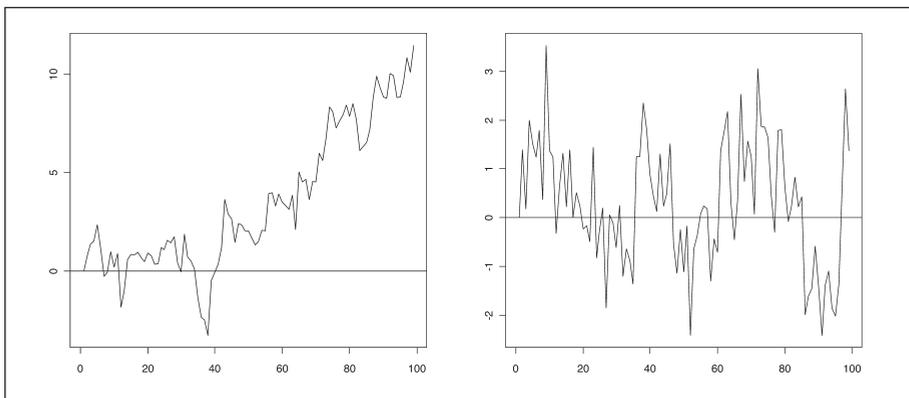
<sup>8</sup> Un proceso estacionario en sentido estricto es también un proceso estacionario en sentido débil, pero lo inverso no es cierto.

<sup>9</sup> La media de un proceso estocástico es el valor constante en el tiempo que mide el nivel alrededor del cual evoluciona dicho proceso. La varianza es el valor que mide la dispersión o la variabilidad de

prácticos, que el proceso sea estacionario en sentido débil implica que la media y la varianza son constantes y las covarianzas entre dos variables sólo depende de su separación o retardo entre las observaciones.

Para analizar si un proceso es o no es estacionario, debemos observar que una característica básica de un proceso no estacionario es que su gráfico de evolución temporal no cruza su valor medio muestral con frecuencia, es decir, existen tendencias (crecientes o decrecientes), y tiene una varianza que generalmente aumenta al transcurrir el tiempo<sup>10</sup>. Por contra, un proceso estacionario tiene un gráfico de evolución temporal que cruza su valor medio muestral y tiene una varianza finita<sup>11</sup>.

Para ilustrar las propiedades de una serie no estacionaria empleamos el modelo de paseo aleatorio para simular 100 periodos. El modelo empleado es  $P_t = \mu + P_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$  con  $P_0 = 0, \mu = 0,01$  y  $\sigma = 1$ . El gráfico inferior representa una simulación de dicho proceso en donde se observa que el proceso no fluctúa alrededor de su media sino que tiene un comportamiento explosivo. Por contra el modelo  $P_t = \mu + 0,5P_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$  con  $P_0 = 0, \mu = 0,01$  y  $\sigma = 1$  representado en el gráfico de la derecha si que es estacionario fluctuando en torno a un valor medio, por lo que se dice que son procesos que revierten a la media.



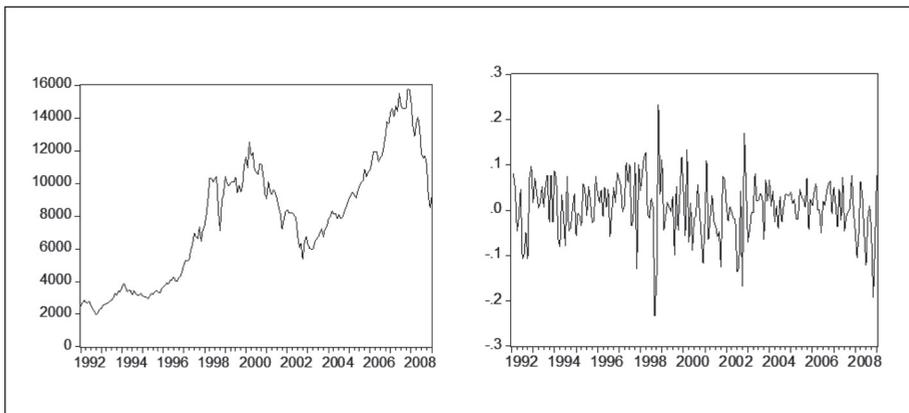
la evolución temporal de un proceso estocástico alrededor de su media. Las autocorrelaciones son los valores que miden el grado de asociación o dependencia lineal entre cada par de componentes de un proceso estocástico estacionario separados por distintos intervalos temporales o retardos.

<sup>10</sup> Además, como veremos posteriormente, su función de autocorrelación simple no tiende a cero rápidamente, lo que es contrario a lo que ocurre con un proceso estacionario.

<sup>11</sup> Además sus funciones de autocorrelación simple y parcial tienden a cero rápidamente.

En la práctica se necesita que los procesos estocásticos sean estacionarios para una adecuada modelización. Para transformar un proceso no estacionario en estacionario se aplican transformaciones sobre la serie original. Por eso es común el análisis de los rendimientos logarítmicos  $r_t$  de la serie en vez de emplear los valores de la serie originaria (índices, cotizaciones, tipos de cambio, etc.). Esto es debido a que en teoría, aplicando una diferencia sobre la serie y posteriormente tomando logaritmos, logramos eliminar la tendencia de la serie<sup>12</sup> y reducir su variabilidad<sup>13</sup>.

A modo de ejemplo se muestra la serie temporal originada por el índice Ibex 35 con frecuencia mensual desde el 2 de enero de 1992 al 31 de diciembre de 2008, lo que proporciona 205 observaciones de rendimientos (206 del índice). Como se aprecia en el gráfico inferior izquierdo la serie es claramente no estacionaria, por lo que se procede a calcular los rendimientos logarítmicos (gráfico derecha).



Los rendimientos logarítmicos son estacionarios en media, pero se observa que han existido periodos en los que la dispersión de los rendimientos o volatilidad es mayor (véase los rendimientos entorno a 1999) y otros en los que la dispersión es menor.

<sup>12</sup> Las tendencias o cambios de nivel de las series financieras, que provocan que estas no sean estacionarias, implica que sea necesario aplicar diferencias para convertirlas en estacionarias.

<sup>13</sup> Al analizar series financieras reales es común que la variabilidad sea mayor cuando la serie toma valores altos que cuando toma valores bajos. En estos caso se transforma la serie original aplicando logaritmos para conseguir una serie con variabilidad constante. Además existen series heterocedásticas donde la varianza cambia sin relación con el nivel. Este comportamiento es tratado en los modelos tipo GARCH o los de volatilidad estocástica (SV).

De aquí en adelante y como es habitual en los manuales, se empleará la expresión proceso estacionario para referirnos a un proceso estacionario en sentido débil.

### **Proceso ruido blanco**

Un proceso estacionario muy importante es el proceso ruido blanco (*white noise*). Un ruido blanco es una sucesión de variables aleatorias independientes en el tiempo definido por las siguientes tres condiciones<sup>14</sup>:

- La esperanza es igual a cero.
- La varianza es constante.
- Las covarianzas para cualquier retardo son cero, lo que implica que las variables del proceso están incorrelacionadas para todos los retardos.

Se dice que una serie temporal sigue un modelo de ruido blanco si es una secuencia de variables aleatorias iid con media 0 y varianza constante. Un proceso ruido blanco normal o gaussiano resulta cuando además las variables tienen distribución normal<sup>15</sup>. Siguiendo esta nomenclatura, el modelo de precios lognormal o modelo normal de rendimientos es simplemente la suma de una constante (rentabilidad media) a un proceso ruido blanco normal. Es decir, el rendimiento logarítmico se puede simular en cada periodo mediante la siguiente ecuación:

$$r_t = \mu + Z_t$$

Donde  $Z_t \sim N(0, \sigma)$  y  $\mu$  es la rentabilidad media.

---

<sup>14</sup> Un proceso ruido blanco no es necesariamente estacionario en sentido estricto ya que la definición dada sólo exige la incorrelación. Sin embargo, si lo será en el caso de que imponemos la condición adicional de que las variables del proceso son independientes.

<sup>15</sup> El proceso ruido blanco normal si es estacionario en sentido estricto. Sin embargo, se pueden tener procesos de ruido blanco estricto con variables que tienen distribuciones no normales (t de Student, normal asimétrica, etc.). Para una serie de ruido blanco, toda la función de autocorrelación deben mostrar valores (aproximadamente) iguales a cero.

## El paseo aleatorio

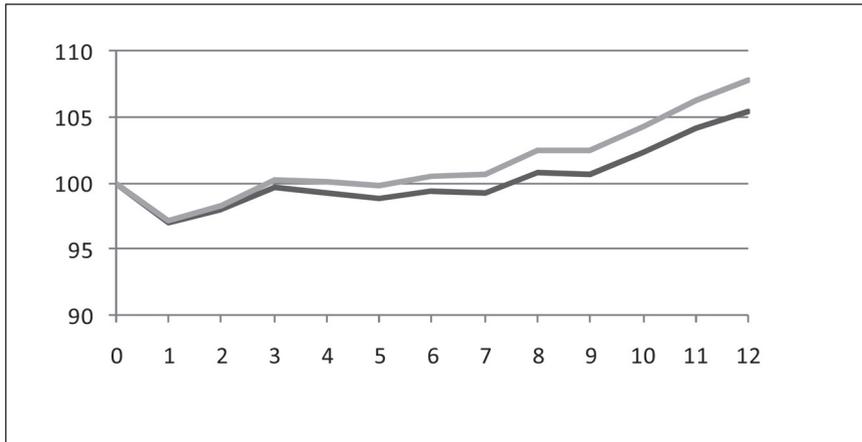
Anteriormente hemos introducido ya este concepto por lo que ahora pasaremos a definirlo formalmente. Un paseo o camino aleatorio (*random walk*)<sup>16</sup> es un proceso estocástico cuyas primeras diferencias constituyen un ruido blanco. Por lo tanto puede escribirse como:  $x_t = \phi_0 + x_{t-1} + \varepsilon_t$ , donde  $\phi_0$  es una constante y  $\varepsilon_t$  es un proceso ruido blanco de media cero y con desviación típica  $\sigma_\varepsilon$  constante. En términos económicos, que una variable siga un paseo aleatorio indica que los cambios discretos en dicha variable están normalmente distribuidos, es decir  $x_t - x_{t-1} \sim (N \phi_0, \sigma_\varepsilon)$ .

**Ejemplo.** Simular a lo largo de un horizonte temporal de 12 periodos un paseo aleatorio sin deriva ( $\phi_0 = 0$ ) y con deriva ( $\phi_0 = 0,2$ ), con un valor inicial  $x_0 = 100$  y con desviación típica  $= 1$ .

Se ha empleado la misma simulación del proceso ruido blanco en los dos casos. La representación gráfica del proceso con deriva viene dada por la línea gris y la del camino sin deriva por la línea negra. Obsérvese como la deriva aumenta la diferencia entre las dos series a medida que nos desplazamos en el tiempo.

t	$\varepsilon_t$	Sin deriva		Con deriva	
		$x_{t-1}$	$x_t$	$x_{t-1}$	$x_t$
0			100		100
1	-2,98	100,00	97,02	100,00	97,22
2	0,92	97,02	97,94	97,22	98,34
3	1,72	97,94	99,66	98,34	100,26
4	-0,35	99,66	99,31	100,26	100,11
5	-0,44	99,31	98,87	100,11	99,87
6	0,51	98,87	99,38	99,87	100,58
7	-0,05	99,38	99,33	100,58	100,73
8	1,53	99,33	100,86	100,73	102,46
9	-0,17	100,86	100,69	102,46	102,49
10	1,62	100,69	102,31	102,49	104,31
11	1,81	102,31	104,12	104,31	106,32
12	1,33	104,12	105,45	106,32	107,85

<sup>16</sup> Un paseo aleatorio es un modelo AR(1) con  $\phi = 1$ , es decir, un modelo AR(1) no estacionario ( $|\phi| < 1$ ) pero tampoco explosivo ( $|\phi| < 1$ ). Y por tanto,  $\nabla x_t - x_{t-1} = \phi_0 + \varepsilon_t$ .



### **Las funciones de autocorrelación**

Las funciones de autocorrelación simple (FAS o ACF) y la función de autocorrelación parcial (FAP o PACF) son muy útiles para identificar el tipo de proceso que sigue una serie temporal. Por lo tanto es necesario introducir estos conceptos, además de la función de autocovarianzas de la que proviene la ACF.

### **Función de autocovarianzas**

La información sobre la dependencia lineal entre las variables de una serie temporal generada por un proceso estacionario se encuentra en la función de autocovarianzas. Se denomina  $\gamma_k$  a la covarianza entre observaciones separadas por periodos o autocovarianza de orden  $k$  (*lag-k autocovariance*) Es decir:

$$\gamma_k = cov(r_t, r_{t-k})$$

### **Función de autocorrelación simple (FAS o ACF)**

Las autocorrelaciones contienen la misma información que las autocovarianzas, con la ventaja de que no dependen de las unidades de medida. Por tanto, se dice que la función de autocorrelación (*autocorrelation function* o ACF) mide la dependencia

lineal o correlación existente entre los periodos de un proceso. La función de autocorrelación simple viene dada por:

$$\rho_k = \text{corr}(r_t, r_{t-k}) = \frac{\text{cov}(r_t, r_{t-k})}{\sqrt{\text{var}(r_t)}\sqrt{\text{var}(r_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\sqrt{\text{var}(r_t)}\sqrt{\text{var}(r_{t-k})}}$$

Por lo que una serie no estará correlacionada si los valores de su función ACF es igual o cercana a 0. Es común realizar dos test, uno individual y otro conjunto, para ver si las correlaciones seriales son estadísticamente distintas de cero:

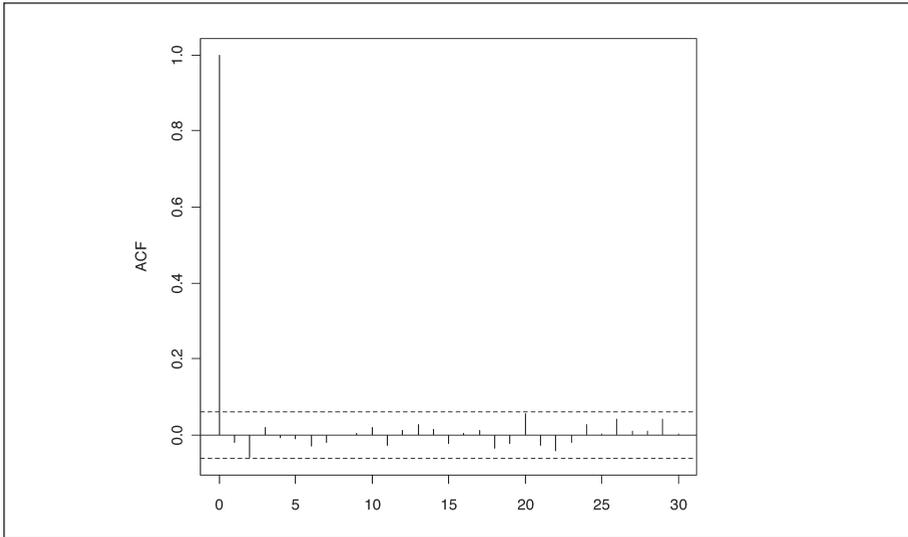
Para realizar un test individual sobre  $\rho_k$  se define el estadístico  $t$  para un coeficiente de autocorrelación simple  $\rho_k$  como:

$$t = \frac{\hat{\rho}_k}{\sqrt{1/T}} = \hat{\rho}_k \sqrt{T} \sim N(0; 1)$$

Bajo la hipótesis nula de  $\rho_k=0$ . La regla de decisión es rechazar la hipótesis nula  $H_0$  de  $\rho_k=0$  si  $|t| > Z_{\alpha/2}$  o de forma análoga si el p-valor es menor que  $\alpha$ . Esta hipótesis se suele testar de forma visual en el correlograma (gráfico ACF) en el que además de representarse los coeficientes estimados  $\rho_k$  se muestran dos líneas paralelas al eje  $x$  a la altura de  $\pm 1,96/\sqrt{T}$ , o a veces por simplificar se emplea  $\pm 2/\sqrt{T}$ . De esta forma los coeficientes significativos serán los que sobrepasen dichos límites. Debe advertirse que dichas bandas recogen un intervalo del 95% de probabilidad donde deberían estar los coeficientes muestrales, de forma que es de esperar que de cada 100 coeficientes 5 salgan fuera de las bandas. En el gráfico inferior se muestra la función de autocorrelación simple de una serie ruido blanco simulada. En el eje de las  $x$  se muestran los retardos  $k$  y en el eje de las  $y$  el valor de  $\rho_k$ . Se observa como ningún  $\rho_k$  resulta significativo al no sobrepasar las bandas paralelas (exceptuando obviamente  $\rho_0=1$ ).

Un test conjunto frecuentemente empleado es la Q de Ljung y Box (1979). La hipótesis nula del test para el retardo  $k$  es que no existe autocorrelación para órdenes no superiores a  $m$ , es decir la hipótesis nula  $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$ . El estadístico se define como:

$$Q(m) = T(T + 2) \sum_{j=1}^m \frac{\hat{\rho}_j^2}{T - j}$$



$Q$  está asintóticamente distribuido como una  $\chi^2$  con grados de libertad igual al número de autocorrelaciones  $m$ . Otro test similar al anterior es el test de Box-Pierce (1970) basado en el siguiente estadístico:  $Q(m) = T \sum_{j=1}^m \hat{\rho}_j^2$ . Si el modelo ajustado es correcto la  $Q \sim \chi^2_m$ .

### ***Función de autocorrelación parcial (FAP)***

La función de autocorrelación parcial es una función que para cada número entero toma un valor igual a la correlación entre  $x_t$  y  $x_{t-k}$  corregida del efecto común de los retardos intermedios  $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k+1}$ . Formalmente el coeficiente de autocorrelación parcial de orden  $k$ ,  $\rho_{k,p}$ , es el coeficiente de correlación entre observaciones separadas  $k$  periodos, cuando eliminamos de la relación entre las dos variables la dependencia lineal debida a los valores intermedios. Por lo tanto, la función de autocorrelación parcial (*partial autocorrelation function* o PACF) es la representación gráfica de los coeficientes de autocorrelación parcial en función de los distintos retardos.

### ***Función de máxima verosimilitud de los rendimientos $r_t$***

Sean  $x$  e  $y$  dos variables aleatorias continuas. Su función de densidad conjunta es el producto de su función de densidad condicional por su función de densidad marginal (función de probabilidad de cada variable), es decir:

$$f(x, y) = f(x|y)f(y)$$

Lo anterior sigue siendo cierto si todas las funciones de densidad van condicionadas a otra variable  $Z$ :

$$f(x, y|z) = f(x|y, z)f(y|z)$$

Sea  $r_t$  el rendimiento logarítmico del mes, para dos rendimientos consecutivos  $r_1$  y  $r_2$ :

$$f(r_2, r_1) = f(r_2|r_1)f(r_1)$$

En el caso de tres rendimientos  $r_1, r_2, \dots, r_3$ :

$$f(r_3, r_2, r_1) = f(r_3|r_2, r_1)f(r_2, r_1) = f(r_3|r_2, r_1)f(r_2|r_1)f(r_1)$$

En el caso general de  $r_t$  para  $1, 2, \dots, T$ :

$$f(r_T, r_{T-1}, \dots, r_2, r_1) = f(r_T|r_{T-1}, \dots, r_1)f(r_{T-1}, r_1) = \dots = \left[ \prod_{t=2}^T f(r_t|r_{t-1}, \dots, r_1) \right] f(r_1)$$

Si  $r_t | r_{t-1}, \dots, r_1$  es normal con media  $\mu_t$  y varianza  $\sigma_t^2$ , la función de verosimilitud es:

$$f(r_T, r_{T-1}, \dots, r_2, r_1) = \left[ \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{\left( -\frac{(r_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2} \right)} \right] f(r_1)$$

Para simplificar se ignora  $f(r_1)$  o función de verosimilitud marginal, por lo que la función de verosimilitud se convierte en lo que se denomina función de verosimilitud condicional:

$$f(r_T, r_{T-1}, \dots, r_2, r_1) = \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{\left( -\frac{(r_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2} \right)}$$

En la práctica se suele emplear la función logaritmo de la función de verosimilitud condicional, dicha función viene dada por:

$$\begin{aligned} \ln f(r_T, r_{T-1}, \dots, r_2, r_1) &= \prod_{t=2}^T \ln \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(r_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left[ \ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) + \frac{(r_t - \mu_t)^2}{\sigma_t^2} \right] \end{aligned}$$

En el caso de la distribución normal la media  $\mu$  y la varianza  $\sigma_t^2$  son constantes a lo largo del tiempo, por lo que pueden ser representadas como  $\mu$  y  $\sigma^2$  obteniendo finalmente:

$$\ln f(r_T, r_{T-1}, \dots, r_2, r_1) = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left[ \ln(2\pi) + \ln(\sigma^2) + \frac{(r_t - \mu)^2}{\sigma^2} \right]$$

Que es la función de log-verosimilitud de los rendimientos bajo la hipótesis de normalidad. Sin embargo, como veremos posteriormente, en los modelos de series temporales se establecen distintas funciones para la ecuación de la media  $\mu_t$  y de la varianza  $\sigma_t^2$  de forma que pueden variar a lo largo del tiempo.

El método de estimación de máxima verosimilitud (EMV) puede emplearse en situaciones donde existen varios parámetros desconocidos que es necesario estimar. En dicho caso, la función de verosimilitud es una función de los parámetros desconocidos y se denominan estimadores de máxima verosimilitud a los parámetros que maximizan dicha función. En ocasiones basta con igualar a cero las derivadas parciales de la función con respecto a cada parámetro, pero en otras es necesario emplear un procedimiento iterativo de optimización.

Teóricamente para encontrar el máximo de la función de verosimilitud, deberíamos derivar la función de verosimilitud o su logaritmo respecto a cada uno de los parámetros del modelo e igualar a cero cada una de dichas derivadas (condiciones de primer orden), obteniendo valores numéricos para cada parámetro. Si se cumplen las condiciones de segundo orden (hessiano del logaritmo de la función

de verosimilitud definido positivo) podríamos afirmar que hemos hallado un máximo local, debiendo verificar que la función de verosimilitud es globalmente cóncava para asegurar la existencia de un máximo global. Sin embargo en los modelos más complejos el sistema de condiciones de primer orden no tiene solución analítica, haciendo imprescindible el empleo de un algoritmo numérico de optimización.

La maximización de la función de log-verosimilitud de los modelos más complejos se suele realizar por un procedimiento iterativo, en el cual es importante comenzar de buenas condiciones iniciales (valores a priori de los parámetros). Cuando el algoritmo iterativo ha convergido se detiene el procedimiento de estimación proporcionándose los valores de los parámetros alcanzados. Normalmente el algoritmo se detiene cuando el valor numérico de la función de verosimilitud o la variación en el vector de parámetros estimados es inferior a cierto límite establecido previamente, o de forma alternativa se ha alcanzado el número máximo de iteraciones establecidas.

El procedimiento iterativo para la estimación de parámetros puede ser problemática dado que la función de máxima verosimilitud puede tener multitud de máximos locales que alcanzan un valor cercano al máximo global. Esto tiene como consecuencia que la función tome valores muy próximos para distintos conjuntos de parámetros, muchos de los cuales pueden ser muy diferentes. Por ello es necesario repetir la estimación a partir de distintas condiciones iniciales (valor de los parámetros) con el objetivo de analizar si se produce la convergencia de la función para el mismo valor. Este problema aparece con frecuencia en la estimación de los modelos más complejos (modelos univariantes de cambio de régimen tipo GARCH y modelos multivariantes GARCH, entre otros).

---

**Ejemplo.** La EMV consiste en obtener el vector de parámetros tal que maximicen la función de log-verosimilitud. A continuación exponemos el proceso de estimación por máxima verosimilitud en el caso de asumir un comportamiento normal de los rendimientos logarítmicos. Supóngase una senda dada de precios (columna segunda) a partir de la cual calculamos sus rendimientos logarítmicos (columna tercera).

$t$	Precio	$r_t$	log-verosimilitud
1	100		
2	102	1,98%	2,936
3	103	0,98%	3,207
4	105	1,92%	2,961
5	106	0,95%	3,209
6	104	-1,90%	1,809
7	105	0,96%	3,208
8	106	0,95%	3,209
9	105	-0,95%	2,631
10	108	2,82%	2,410
11	106	-1,87%	1,846
12	109	2,79%	2,430
Total			29,855

En la cuarta columna se calcula la función de log-verosimilitud para cada valor de  $r_t$ , en función de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , que son las variables a determinar. Dado que a priori desconocemos los valores que optimizan el valor de la función, partiremos de unos valores iniciales cualquiera. La búsqueda del valor de los parámetros se puede realizar mediante la herramienta Solver de Excel. Se trata de maximizar el valor de la función cambiando las dos celdas en las que tenemos nuestros parámetros  $\Theta = \{\mu, \sigma\}$ , sujeto a la restricción  $\sigma > 0$ .

En este ejemplo, si tomamos como valores de partida la media y la desviación típica de los rendimientos ( $\mu = 0,783\%$  y  $\sigma = 1,603\%$ ), que son los estimadores por el método de los momentos y máximo-verosímiles, Solver devuelve esos mismos valores como los que maximizan la función. El valor de la función de log-verosimilitud para la observación  $t = 2$  toma el valor:

$$-\frac{1}{2} \left[ \ln(2\pi) + \ln(\sigma^2) + \frac{(r_t - \mu)^2}{\sigma^2} \right] = -\frac{1}{2} \left[ \ln(2\pi) + \ln(1,603\%^2) + \frac{(1,98\% - 0,783\%)^2}{1,603\%^2} \right] = 2,936$$

De forma alternativa en Excel podemos emplear la función =LN(DISTR.NORM (1,98%; 0,783%; 1,603%;0)).

El valor de la función de log-verosimilitud será la suma del valor de función en cada punto (29,855), que se calcula como  $-\frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left[ \ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) + \frac{(r_t - \mu)^2}{\sigma_t^2} \right]$  en nuestro ejemplo 2,936+3,207+...+1,846+2,430.

El método de EMV para la distribución  $t$  de Student estandarizada consiste en estimar los grados de libertad. Para ello se estandariza la serie de rendimientos substrayéndole a cada observación la media muestral y dividiéndose por su desviación estándar, es decir  $\tilde{r}_t = \frac{r_t - \bar{r}}{\hat{\sigma}}$  de forma que  $\tilde{r}_t \sim t_{\nu}(0,1)$ . El procedimiento de máxima verosimilitud consiste en obtener el valor de  $\nu$  que maximiza la función de verosimilitud:

$$f(\nu) = \prod_t \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{\tilde{r}_t^2}{(\nu-2)}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$$

Resultante más manejable maximizar la función de log-verosimilitud:

$$\ln f(\nu) = \sum_t \left( \ln \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{\nu+1}{2} \ln \left(1 + \frac{\tilde{r}_t^2}{(\nu-2)}\right) - \frac{1}{2} \ln(\pi(\nu-2)) \right)$$

En Excel para obtener la EMV de la distribución  $t$  de Student estandarizada introduciríamos la función de log-verosimilitud de cada observación como:

$$=\text{GAMMA.LN}((\nu+1)/2)-\text{GAMMA.LN}(\nu/2)-((\nu+1)/2)*\text{LN}(1+\tilde{r}_t^2/(\nu-2))-0,5*\text{LN}(\pi*(\nu-2))$$

Posteriormente sumaríamos todas las observaciones en una celda y maximizaríamos su valor sujeto a la restricción de que  $\nu > 2$ . Generalmente se le pone un límite superior a  $\nu$  entorno a 50, ya que para  $\nu$  elevado la  $t$  de Student converge a la distribución normal.

La mixtura de distribuciones es una alternativa propuesta para captar la mayor curtosis observada en los rendimientos de los activos financieros, siendo la más habitual la combinación de dos normales. El empleo de la mixtura de dos normales supone que los rendimientos se comportan con una probabilidad  $p$  como una distribución normal de parámetros  $\mu_1$  y  $\sigma_1^2$  y con una probabilidad  $(1-p)$  como otra distribución de parámetros  $\mu_2$  y  $\sigma_2^2$ , es decir:

$$r_t \sim pN(\mu_1, \sigma_1) + (1-p)N(\mu_2, \sigma_2)$$

Por lo tanto para simular los rendimientos a partir del anterior modelo se emplearía la ecuación:

$$r_t = p(\mu_1 + \sigma_1 Z_{1t}) + (1-p)(\mu_2 + \sigma_2 Z_{2t})$$

Además, se permite la mixtura de normales con la misma desviación típica y media distinta o misma media y desviación típica distinta, es decir:

$$\begin{aligned} r_t &\sim pN(\mu, \sigma_1) + (1-p)N(\mu, \sigma_2) \\ r_t &\sim pN(\mu_1, \sigma) + (1-p)N(\mu_2, \sigma) \end{aligned}$$

El procedimiento de máxima verosimilitud consiste en obtener el valor de los parámetros  $(p, \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2)$  que maximizan la función de log-verosimilitud:

$$\ln f(r_T, r_{T-1}, \dots, r_2, r_1) = \ln \sum_{t=2}^T \left[ p \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + (1-p) \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \right]$$

**Ejemplo.** A continuación exponemos el proceso de estimación por máxima verosimilitud en el caso de asumir que los rendimientos logarítmicos se modelizan mediante una mixtura de normales<sup>17</sup>. En la columna segunda se muestran los rendimientos logarítmicos  $r_t$ .

La columna tercera (A) calcula la función de verosimilitud de cada observación bajo la  $N(\mu_1, \sigma_1)$ , mientras que la columna cuarta calcula su valor bajo la  $N(\mu_2, \sigma_2)$ . Es decir la verosimilitud para cada observación se calcula como  $\frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$  para la columna A y como  $\frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$  para la columna B.

La quinta columna (C) pondera para cada observación la función de verosimilitud por la probabilidad  $(p)$ , es decir  $p \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$ . De forma análoga, la sexta columna (D) pondera para cada observación la función de verosimilitud por la probabilidad  $(1-p)$ , es decir  $(1-p) \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$ . La columna E es la suma de las dos anteriores (C+D), formalmente  $p \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + (1-p) \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$ .

<sup>17</sup> Para estimar los parámetros de la mixtura de normales la maximización de la función de verosimilitud conduce a problemas de inestabilidad y no convergencia. El empleo del método de los momentos se vuelve inmanejable para mixturas de más de dos normales, además incluso en el caso de dos normales se necesitan estimar cinco parámetros por lo que se necesitan las ecuaciones de los primeros cinco momentos dificultándose también la obtención de una solución. Por ello, la estimación de mixturas de normales se puede realizar por máxima verosimilitud empleando el algoritmo EM (Dempster, Laird, y Rubin 1977). Véase McLachlan y Krishnan (1997) y McLachlan y Peel (2000) para una revisión de dicho algoritmo. Para la estimación de una mixtura de normales se recomienda emplear el paquete de R mixtools, que contiene por ejemplo para la estimación de una mixtura de dos normales univariantes la fórmula `normalmixEM2comp()`.

Las columnas F y G calculan probabilidades posteriores de las observaciones. La columna F será resultado de dividir C entre E, es decir

$$\left[ p \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \right] / \left[ p \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + (1-p) \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \right]$$

De forma análoga, la columna G resulta de dividir D entre E.

Finalmente en la última columna (H) se calcula la función de log-verosimilitud para cada observación, es decir el logaritmo neperiano de la columna E o mediante la fórmula

$$\ln \left[ p \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + (1-p) \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \right]$$

t	r <sub>t</sub>	A	B	C	D	E	F	G	H
1									
2	0,02	0,00	47,09	0,00	34,32	34,32	0,00	1,00	3,54
3	0,01	0,00	34,71	0,00	25,2	25,29	0,00	1,00	3,23
4	0,02	0,00	48,39	0,00	35,26	35,26	0,00	1,00	3,56
5	0,01	0,00	33,62	0,00	24,50	24,50	0,00	1,00	3,20
6	-0,02	6,58	0,00	18,61	0,00	18,61	1,00	0,00	2,92
7	0,01	0,00	33,98	0,00	24,76	24,76	0,00	1,00	3,21
8	0,01	0,00	33,62	0,00	24,50	24,50	0,00	1,00	3,20
9	-0,01	32,75	0,19	8,89	0,14	9,02	0,98	0,02	2,20
10	0,03	0,00	17,09	0,00	12,45	12,45	0,00	1,00	2,52
11	-0,02	72,57	0,00	19,69	0,00	19,69	1,00	0,00	2,98
12	0,03	0,00	17,95	0,00	13,08	13,08	0,00	1,00	2,57
								Total	33,13

A partir de unos valores iniciales para los parámetros  $\Theta = \{\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2\}$  sujeto a las restricciones  $\sigma_1, \sigma_2 > 0$  se trata de maximizar el valor de la función cambiando dichos parámetros. Los valores que maximizan la función son  $\mu_1 = -1,58\%$ ,  $\sigma_1 = 0,44\%$ ,  $\mu_2 = 1,66\%$  y  $\sigma_2 = 0,78\%$  y  $p$  toma el valor de 0,73. El valor de la función de log-verosimilitud será la suma del valor de función en cada punto {33,132}.

## 1.2. MODELOS INCONDICIONALES PARA LOS RENDIMIENTOS UNIVARIANTES

En la literatura económica se han propuesto distintas distribuciones para modelizar los rendimientos. Una hipótesis frecuente sobre los rendimientos aritméticos de un activo  $R_t$  es suponer que estos se distribuyen normalmente. Formalmente equivale a decir que el precio de un activo sigue lo que se denomina un camino aleatorio:

$$P_t = P_{t-1} + (\mu + \sigma \varepsilon_t)$$

Por lo que:

$$P_t - P_{t-1} = \mu + \sigma \varepsilon_t$$

Donde  $\varepsilon_t$  está independiente e idénticamente distribuida (iid) como una normal estándar. Sin embargo esta hipótesis presenta tres inconvenientes. En primer lugar, el límite inferior del rendimiento aritmético<sup>18</sup> es de -1, sin embargo la distribución normal puede tomar cualquier valor entre los números reales lo que puede provocar que el precio de los activos pudiera llegar ser negativo. En segundo lugar, que  $R_t$  esté normalmente distribuido provoca que el rendimiento multi-periodo  $R_t(k)$  no lo esté, al ser el producto de los rendimientos de cada periodo. Finalmente, diversos trabajos proporcionan evidencia de que la distribución empírica de los rendimientos aritméticos no es normal.

Una hipótesis sobre los rendimientos logarítmicos  $r_t$  es que estén iid como una normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Formalmente:

$$P_t = P_{t-1} \exp(\mu + \sigma \varepsilon_t)$$

Dado que  $P_{t-1}$  y  $\exp(\mu + \sigma \varepsilon_t)$  nunca serán negativos el modelo garantiza la no negatividad de los precios. Además dado que  $\varepsilon_t$  está distribuido normalmente  $P_t$  está lognormalmente distribuido.

De esta forma los rendimientos aritméticos estarían distribuidos lognormalmente con media y varianza dados por (véase Tsay, 2005):

$$E(R_t) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) - 1$$
$$Var(R_t) = \exp(2\mu + \sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1]$$

---

<sup>18</sup> En términos del rendimiento el precio evolucionará de acuerdo con la siguiente ecuación  $P_{t-1}(1 + R_t)$ , de modo que para valores inferiores a -1, el precio sería inferior a cero.

De forma inversa si  $R_t$  es lognormal con media  $\mu_y$  y varianza  $\sigma_y^2$  entonces el rendimiento  $r_t$  es normal con media y varianza:

$$E(r_t) = \ln \left[ \frac{1 + \mu_y}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_y^2}{(1 + \mu_y)^2}}} \right]$$

$$Var(r_t) = \ln \left( 1 + \frac{\sigma_y^2}{(1 + \mu_y)^2} \right)$$

Una ventaja de suponer que los rendimientos logarítmicos  $r_t$  distribuidos normalmente proviene de que el rendimiento logarítmico multi-periodo  $r_t(k)$  también está normalmente distribuido. Además, no hay límite inferior para  $r_t$  pero se satisface el límite de -1 para  $R_t$  ya que  $R_t = e^{r_t} - 1$ , lo que provoca que el precio de un activo no pueda ser negativo.

Una propiedad muy importante del modelo lognormal de precios es la invarianza ante cambios de escala que implica que si  $\ln \frac{P_t}{P_0} \sim N(\mu; \sigma^2)$  para  $t=2, \dots, 12$  entonces  $\ln \frac{P_{12}}{P_0} \sim N(12\mu; 12\sigma^2)$  lo que convierte el modelo en muy manejable matemáticamente. Por ejemplo, en el modelo lognormal independiente el  $\ln \left( \frac{P_n}{P_0} \right)$  se distribuye como una normal con media  $n\mu$  y desviación típica  $\sqrt{n}\sigma$ , podemos afirmar que el valor en riesgo o VaR(99,5%) para la distribución normal se calcula mediante el inverso de la distribución lognormal con una probabilidad del 0,5% y la media y desviación especificadas. Por lo que el VaR analítico toma el siguiente valor  $e^{(n\mu + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{n}\sigma)} - 1$  donde  $\Phi^{-1}$  es la inversa de la normal con probabilidad  $\alpha$  y media cero. Sin embargo la distribución normal para los rendimientos logarítmicos  $r_t$  tampoco satisface algunas de las características históricas de los rendimientos.

---

**Ejemplo.** Supóngase que el rendimiento logarítmico mensual de un activo está distribuido normalmente con  $\mu=0,04$  y  $\sigma=0,06$ . Calcúlese la media y varianza del rendimiento simple, el rendimiento esperado a un año (12 meses) y el VaR (99,5%) del activo a un año

$$E(R_t) = \exp\left(0,04 + \frac{0,06^2}{2}\right) - 1 = 0,041$$

$$Var(R_t) = \exp(2(0,04) + 0,06^2) [\exp(0,06^2) - 1] = 0,063$$

$$E(R_{12}) = \exp\left[12\left(0,04 + \frac{0,06^2}{2}\right)\right] - 1 = \exp\left(0,04 + \frac{0,06^2}{2}\right)^{12} - 1 = 65,14\%$$

$$VaR(99,5\%) = e^{(12 \cdot 4\% + \Phi^{-1}(0,05)(\sqrt{12} \cdot 6\%))} - 1 = -5,39\% \quad ^{19}$$


---

Dado que la distribución normal puede no ser adecuada para modelizar los rendimientos de algunos activos, los investigadores han propuesto otras funciones de distribución. En general estos modelos optan por utilizar funciones de distribución con colas más pesadas para incorporar movimientos más extremos que no son capturados por la distribución normal.

Es decir, dado que son numerosos los estudios que advierten que la distribución empírica de los rendimientos suele tener una mayor curtosis que la proporcionada por la distribución normal, surgen nuevas propuestas que optan por el uso de distribuciones alternativas. Entre otros destacan los trabajos de Mandelbrot (1963) y Fama (1963, 1965), quienes consideraron la familia de distribuciones estables y la distribución  $t$  de Student, propuesta por Praetz (1972) y Blattberg y Gonedes (1974). Posteriormente, Smith (1981) sugirió la distribución logística, Gray y French (1990) la distribución de error generalizada (*generalized error distribution* o GED) y Eberlein y Keller (1995) la distribución hiperbólica (*hyperbolic distribution*). También se ha recurrido a la mixtura de distribuciones, donde el modelo más empleado es la mixtura discreta de dos distribuciones normales (Ball y Torous, 1983)<sup>20</sup>. A continuación nos centraremos en la distribución  $t$  de Student y la mixtura de normales por ser generalmente las más empleadas.

---

<sup>19</sup> En Excel podríamos emplear para el cálculo del VaR(99,5%) la función =DISTR.LOG.INV(0,005;  $n\mu$ ; RAIZ( $n$ )\*  $\sigma$ )-1 o alternativamente =EXP( $n\mu$ +DISTR.NORM.INV(0,005;0;  $\sigma$ \*RAIZ( $n$ ))-1.

<sup>20</sup> Otra familia popular de distribuciones son las distribuciones provenientes de la teoría de valor extremo: la distribución generalizada de Pareto y la distribución generalizada de valor extremo. La principal diferencia de las distribuciones de valor extremo respecto a las anteriores, es que las primeras sólo emplean para su ajuste un conjunto limitado de datos que son los máximos de bloque o los valores que superen un determinado umbral.

La función de densidad de la distribución de Student viene dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}}$$

Donde  $\Gamma$  es la función Gamma. La media de la anterior función es cero y tiene como varianza  $\frac{v}{v-2}$ . La distribución  $t$  de Student estandarizada (varianza unitaria) viene dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(v-2)} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{v-2}\right)^{\frac{v+1}{2}}}$$

El empleo de la mixtura de dos normales supone que los rendimientos se comportan con una probabilidad  $p$  como una distribución normal de determinados parámetros  $\mu_1$  y  $\sigma_1^2$  y con una probabilidad  $(1-p)$  mediante otra distribución normal de parámetros  $\mu_2$  y  $\sigma_2^2$ . Formalmente:

$$f(x) = p \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + (1-p) \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

En los casos límites en que  $p=0$  ó  $p=1$  (valores extremos) o cuando coinciden esperanzas y varianzas ( $\mu_1 = \mu_2$  y  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ) se obtiene la distribución normal. Además el modelo de mixturas de dos normales es bastante flexible siendo capaz de proporcionar distribuciones simétricas (cuando las esperanzas son iguales  $\mu_1 = \mu_2$  o si  $p = 0.5$  y además  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ), asimétricas, unimodales o bimodales. La media y la varianza de la mixtura de la distribución son:

$$\begin{aligned} \mu_m &= p\mu_1 + (1-p)\mu_2 \\ \sigma_m^2 &= p[(\mu_1 - \mu_m)^2 + \sigma_1^2] + (1-p)[(\mu_2 - \mu_m)^2 + \sigma_2^2] \end{aligned}$$

### 1.3. MODELOS DE SERIES TEMPORALES PARA LA DISTRIBUCIÓN CONDICIONAL DE LOS RENDIMIENTOS UNIVARIANTES

Los modelos para la distribución incondicional de los rendimientos suponen que estos son independientes del tiempo, es decir están idénticamente distribuidos mientras que los modelos para la distribución condicional de los rendimientos suponen que estos son dependientes del tiempo. El modelo de rendimientos logarítmicos normales es un modelo independiente del tiempo, ya que el cambio en precios tiene una media y una varianza constante o invariable respecto al tiempo, recordemos que  $P_t = P_{t-1} \exp(\mu + \sigma \varepsilon_t)$ . Los modelos de series temporales que analizamos en este apartado relajan esta hipótesis que no se cumple empíricamente. De esta forma se puede permitir que la media y la varianza varíe con el tiempo a través de un modelo del tipo  $P_t = P_{t-1} \exp(\mu_t + \sigma_t \varepsilon_t)$ .

Los modelos empleados para la distribución condicional de los rendimientos, surgen de la evidencia de rechazar la hipótesis de que los rendimientos están idéntica e independientemente distribuidos. Dentro de este grupo destacan, entre otros, los modelos GARCH que tratan la volatilidad  $\sigma_t$  como una función del tiempo.

El análisis de las series temporales es la parte de la estadística donde las observaciones son recogidas secuencialmente en el tiempo y trata de analizar y entender las relaciones de dependencia entre dichas observaciones. Si una serie temporal es el resultado de observar los valores de una variable a lo largo del tiempo en intervalos regulares (días, semanas, meses, etc.), el análisis de series temporales trata de encontrar un modelo matemático que describa la dependencia temporal de dichos datos. Una vez ajustado el modelo, éste se emplea para la predicción o simulación de los siguientes valores. En el contexto de la gestión y medición del riesgo de una entidad aseguradora, estos modelos son útiles para simular posibles sendas de las series objeto de interés, de forma que obtengamos una distribución de sus valores futuros que servirá para tomar decisiones como la determinación y asignación de capital, entre otras. Es decir, los modelos de series temporales que describiremos pueden valer, por ejemplo, para construir modelos internos y determinar el riesgo de renta variable, *spreads*, tipos de cambio e inmuebles bajo Solvencia II.

De forma genérica se establece que los modelos para analizar las series temporales se pueden clasificar en tres grandes clases (Peña, 2005):

- Modelos univariantes: representan la evolución temporal de una serie en función de sus propios valores pasados para predecir su comportamiento futuro.
- Modelos multivariantes: representan conjuntamente la evolución temporal de una serie temporal multivariante en función de sus propios valores pasados para predecir su comportamiento futuro de forma simultánea.
- Modelos de regresión dinámica o modelos econométricos dinámicos: representan la evolución temporal de una serie en función de sus propios valores pasados y de la relación de dependencia dinámica entre dichos valores y un grupo de variables explicativas.

Estos tres tipos de modelos pueden ser empleados en la modelización de los riesgos a los que se enfrenta una compañía aseguradora. En este apartado se establecen los principales modelos univariantes. En el capítulo 2 se establecerán los modelos multivariantes.

La finalidad de los modelos univariantes de series temporales es analizar una serie temporal univariante para prever o simular su evolución futura utilizando tan sólo información sobre sus valores pasados. Por lo tanto los objetivos son dos: elaborar un modelo estadístico que describa el comportamiento de la serie temporal e inferir su comportamiento futuro. Los principales modelos univariantes que analizaremos en este trabajo son: los modelos ARMA, los modelos tipo GARCH, los modelos de volatilidad estocástica o SV, modelos de cambio de régimen de Markov y otros modelos no lineales (TAR, SETAR, etc.)

Dada una serie temporal de rendimientos queremos establecer un modelo que establezca el valor del rendimiento en el momento  $t$ , es decir,  $r_t$ . De esta forma podemos decir que  $\{r_1, r_2, \dots, r_{t-1}\} \equiv F_{t-1}$  es la información disponible en el momento  $t$  y que el rendimiento se va a descomponer en dos partes: parte predecible ( $\mu_t$ ) que será una función de los elementos de  $F_{t-1}$  y una parte impredecible o *shock* ( $a_t$ ). De esta forma:

$$r_t = \mu_t + a_t = E(r_t | F_{t-1}) + \sigma_t \varepsilon_t$$

Donde  $\mu_t$  es la media condicional de  $r_t$ ,  $a_t$  es el *shock* o innovación en el momento  $t$ ,  $\varepsilon_t$  es una serie de variables independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza uno y  $\sigma_t$  es la desviación típica condicional o volatilidad.

Los modelos univariantes para las series temporales se podrían dividir en dos grandes clases<sup>21</sup>: modelos para la media condicional  $\mu_t$  o ecuación de la media, como por ejemplo los modelos ARMA, y modelos para la desviación típica condicional  $\sigma_t$  o ecuación de la volatilidad o varianza, como por ejemplo los modelos GARCH.

Los modelos también se pueden clasificar en modelos lineales y modelos no lineales. Se dice que un modelo es lineal si cumple dos condiciones:

- Que la parte predecible sea una función de la información contenida hasta ese momento  $\{r_1, r_2, \dots, r_{t-1}\} \equiv F_{t-1}$ .
- El conjunto de innovaciones o *shocks*  $\{a_t\}$  sea una secuencia de variables iid con media cero y distribución bien definida.

Si la relación entre los rendimientos financieros en dos periodos es distinta cuando los rendimientos son altos que cuando los rendimientos son bajos un modelo no lineal podría mejorar los resultados. Otro ejemplo sería que la variabilidad o volatilidad de los rendimientos financieros en un instante dependiera de la volatilidad de los periodos anteriores. De esta forma puede haber modelos lineales o no lineales en media o en varianza. Para analizar la linealidad o no de una serie de rendimientos existen distintas pruebas. Si  $\rho_t^2$  denota la autocorrelación de orden  $t$  de la serie de rendimientos al cuadrado  $r_t^2$  y  $r_t$  es un proceso lineal se puede demostrar que  $\rho_k^2 = (\rho_k)^2$  (Maravall, 1983), por lo que se puede emplear la ACF de  $r_t^2$  como contraste de linealidad. En este sentido, si las distintas observaciones de la serie son independientes entre sí debiéramos encontrar que  $\rho_k^2 = 0$  para  $k \geq 1$ . El test propuesto por McLeod y Li (1983) prueba que el estadístico de Box-Ljung de orden  $m$  para las autocorrelaciones muestrales de  $r_t^2$ ,  $Q(m)$ , se distribuye como una  $\chi^2$  con grados de libertad igual al número de autocorrelaciones  $m$ .

---

<sup>21</sup> Recuérdese que la distribución normal de rendimientos suponía que  $\mu_t = \mu$  y  $\sigma_t = \sigma$ .

La identificación de la no linealidad de la serie se realiza mediante diversos test paramétricos y no paramétricos. El test más frecuentemente empleado es el test BDS (Brock et ál., 1996) que es un contraste no paramétrico que se basa en la relación no lineal de los residuos provenientes de un ajuste lineal. Otros test empleados son el test de rachas (*runs test*), el *RESET test*, etc<sup>22</sup>. Sin embargo, como la no linealidad puede ocurrir de diversas formas no existe un test que domine a los demás recomendándose el empleo de varios test. Una revisión de distintos test de linealidad es efectuada en Granger y Teräsvirta (1992). Cao y Tsay (1992) y Franses y van Dijk (2000) muestran que las volatilidades de las series de rendimientos no son lineales. En general se observa en las series de rendimientos que los valores extremos no suelen ser independientes sino que tienden a ocurrir en grupos. Lo anterior implica que las series de volatilidad evolucionan de forma no lineal ya que los periodos de rendimientos negativos son seguidos por periodos de volatilidad elevada.

### 1.3.1. Modelos ARMA

Los modelos ARMA son el primer tipo de modelos univariantes que vamos a considerar. Por lo tanto, los modelos ARMA representan mediante una única ecuación la evolución dinámica de una variable  $r_t$  en cada momento de tiempo. Los factores explicativos del valor de la variable de rendimientos  $r_t$  serán: sus propios valores pasados ( $r_{t-k}$ ,  $k > 1$ ), y los valores actual y pasados de su innovación ( $\varepsilon_t$ )<sup>23</sup>. Los modelos ARMA engloban los modelos AR o autorregresivos y los modelos MA o de medias móvil, siendo modelos lineales empleados para modelizar la ecuación de la media de los rendimientos.

Como ya hemos mencionado en el estudio de las series temporales a menudo nos encontramos con procesos no estacionarios. Los procesos no estacionarios más relevantes son los procesos integrados ARIMA ( $p, d, q$ ), que tienen la propiedad de que al diferenciarlos se obtienen procesos estacionarios. La mayoría de las series financieras (índices bursátiles, cotizaciones de divisas, etc.) no son estacionarias presentando tendencias. Sin embargo, en general, es suficiente con tomar la primera diferencia en logaritmos, para volver una serie en estacionaria. Es decir, basta

---

<sup>22</sup> El paquete `fNonlinear` de R contiene cuatro test de no linealidad.

<sup>23</sup> Las variables  $\varepsilon_t$  se conocen como innovaciones, ya que representan la nueva información que se le añade al proceso en cada instante temporal.

con tomar los rendimientos continuos de la serie y no la serie de precios o cotizaciones para tener una serie estacionaria. En este caso se dice que la serie original es integrada de orden uno, ya que hace falta una diferencia para obtener un proceso estacionario. Formalmente, se dice que un proceso es integrado de orden  $h$ ,  $I(h)$ , cuando al diferenciarlo  $h$  veces se obtiene un proceso estacionario. Por tanto, los rendimientos de las series financieras suelen ser estacionarias y buscaremos un modelo ARMA en dicha diferencia de la serie original, constituyendo los denominados modelos ARIMA (*Autorregresive Integrated Moving Average models*).

### 1.3.1.1. Procesos autorregresivos (AR)

Los modelos más simples de los procesos estacionarios para representar la dependencia de los valores de una serie temporal en función de los valores pasados son los modelos autorregresivos. Los modelos autorregresivos o modelos AR presuponen una regresión lineal de la variable  $r_t$  sobre los valores que dicha variable tomó en los  $p$  periodos anteriores. Empezaremos introduciendo el proceso autorregresivo de primer orden o AR(1) que regresa la dependencia lineal entre la variable  $r_t$  con su valor precedente  $r_{t-1}$ .

#### *El proceso autorregresivo de primer orden AR(1)*

Se dice que una serie sigue un proceso autorregresivo de primer orden o un AR(1) si ha sido generada por la siguiente ecuación:

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donde  $\phi_0$  es el término independiente de la regresión y  $-1 < \phi_1 < 1$ <sup>24</sup> son las constantes a determinar<sup>25</sup>, y  $\varepsilon_t$  es un proceso ruido blanco de media cero y con varianza constante. A continuación describiremos la esperanza y varianza de este proceso y cómo son sus funciones de autocorrelación simple y parcial teóricas (ACF y PACF), ya que nos ayudará a la identificación de este proceso cuando nos enfrentemos a datos reales de mercado.

<sup>24</sup> Cuando  $-1 < \phi_1 < 1$  el valor de  $r_{t-1}$  es útil para modelar el valor de  $r_t$ . Si  $\phi_1 = 0$  la serie de datos es ruido blanco mientras que si  $\phi_1 = 1$  es un camino o paseo aleatorio.

<sup>25</sup> El valor de  $\phi_0$  representa el valor del incremento/decremento medio mientras que la restricción  $-1 < \phi_1 < 1$  es necesaria para que el proceso sea estacionario.

### Esperanza y varianza

Tomando esperanzas en  $r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$  y dado que  $-1 < \phi_1 < 1$  de manera que  $E[r_t] = E[r_{t-1}] = \mu$  se obtiene que:  $\mu = \phi_0 + \phi_1 \mu$ . Por lo que:

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}$$

Esto implica que la media de  $r_t$  existe si  $\phi_1 \neq 0$  y que la media es cero si y sólo si  $\phi_0 = 0$ . Si sustituimos  $\phi_0$  por su equivalente  $\mu(1 - \phi_1)$ , el proceso AR(1) puede escribirse en desviaciones respecto a su media:  $r_t - \mu = \phi_1(r_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$ .

Por lo que llamando a  $\tilde{r}_t = r_t - E[r_t] = r_t - \mu$  se obtiene la siguiente expresión del proceso AR(1), muy empleada en la práctica:

$$\tilde{r}_t = \phi_1 \tilde{r}_{t-1} + \varepsilon_t$$

La varianza del proceso se obtiene mediante la siguiente fórmula<sup>26</sup>:

$$\sigma_r^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$$

De esta forma se aprecia que para un valor dado de la varianza de la innovación, la varianza del proceso es mayor cuanto mayor sea  $\phi_1^2$ .

---

<sup>26</sup> La varianza se obtiene elevando al cuadrado la expresión anterior y tomando esperanzas, es decir:

$$E(\tilde{r}_t^2) = \phi_1^2 E(\tilde{r}_{t-1}^2) + 2\phi_1 E(\tilde{r}_{t-1}\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t^2)$$

Llamando  $\sigma_x^2$  a la varianza del proceso estacionario  $E(\tilde{r}_t^2)$ , y  $\sigma_\varepsilon^2$ , a la varianza de la innovación  $E(\varepsilon_t^2)$ , por lo que obtenemos, aplicando que el valor de  $2\phi_1 E(\tilde{r}_{t-1}\varepsilon_t)$  es igual a cero ya que  $\tilde{r}_{t-1}$  y  $\varepsilon_t$  son independientes, y por tanto la esperanza de su producto es el producto de las esperanzas que en ambos casos es nulo, por lo que:  $\sigma_x^2 = \phi_1^2 \sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2$ . Finalmente, obtenemos que la varianza del proceso estacionario  $\tilde{r}_t$  es:  $\sigma_r^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$ .

### *Función de autocovarianzas*

En un AR(1) las autocovarianzas vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \sigma_r^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \\ \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Estas fórmulas indican que la dependencia entre observaciones se amortigua exponencialmente al aumentar el retardo.

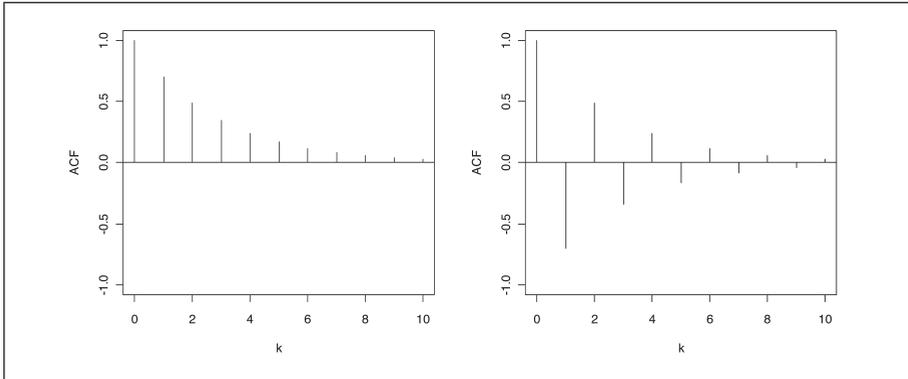
### *Función de autocorrelación simple (ACF)*

Sea  $\rho_k$  la correlación entre las observaciones separadas por  $k$  periodos o autocorrelación de orden  $k$ , definida por:

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$$

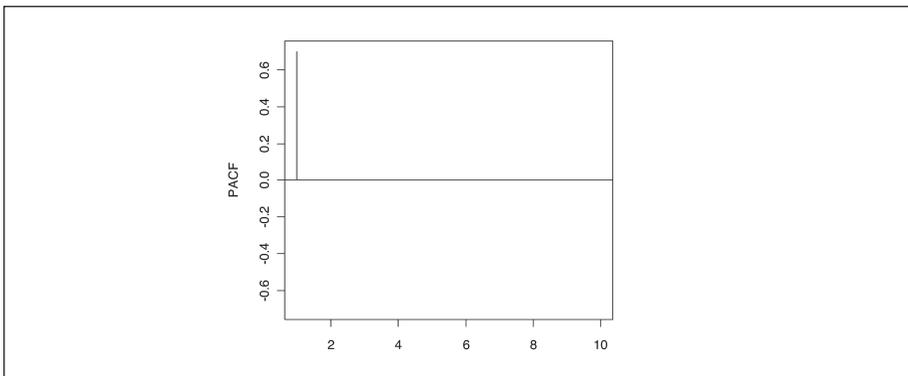
Empleando que  $\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}$  obtenemos que  $\rho_k = \phi_1 \gamma_{k-1} / \gamma_k = \phi_1 \rho_{k-1}$ . Y como  $\rho_k = \phi_1$  se obtiene finalmente que:  $\rho_k = \phi_1^k$ , por lo que a medida que  $k$  es grande  $\rho_k$  tiende a cero. La expresión  $\rho_k = \phi_1^k$  muestra que la función de autocorrelación simple de un proceso AR(1) decrece geométricamente hacia cero.

Para un valor  $\phi_1$  positivo el gráfico de ACF muestra un decaimiento exponencial hacia cero con todos los valores positivos, mientras que para un valor  $\phi_1$  negativo el gráfico de ACF muestra un decaimiento exponencial con los valores que van alternando de signo (la dependencia es positiva para los retardos pares y negativa para los impares). A continuación se muestra la ACF teórica para  $\phi_1=0,7$  (gráfico izquierda) y  $\phi_1=-0,7$  (gráfico derecha).



### *Función autocorrelación parcial (PACF)*

La función de autocorrelación parcial de un proceso AR(1) tiene un primer valor igual a  $\phi_1$  (y por tanto puede ser positivo o negativo), y todos los demás iguales a cero. A continuación se muestra la PACF teórica para  $\phi_1=0,7$



### *Simulación del modelo*

En el análisis de series temporales suele hacerse referencia en el estudio de los modelos a la predicción (*forecast*) de los valores de los mismos. En este sentido normalmente se distingue en primer lugar entre la predicción a un periodo, a dos periodos y multi-periodo. En segundo lugar también se distingue entre predicción puntual (un único valor) o por intervalos. Finalmente también queremos distinguir

entre lo que se denomina predicción condicional, o aquella que no considera la incertidumbre asociada al valor de los parámetros estimados, de la predicción incondicional. Sin embargo, en el campo que nos ocupa nos parece más oportuno tratar el tema de la simulación de los rendimientos logarítmicos a partir de distintos modelos para posteriormente poder calcular el valor en riesgo (VaR) al horizonte temporal deseado de forma más flexible.

La simulación de un modelo AR(1) se realiza a partir de los parámetros estimados  $\hat{\phi}_0$ ,  $\hat{\phi}_1$  y  $\hat{\sigma}_\varepsilon$  del modelo (se detalla posteriormente para el caso general de un AR de orden  $p$ ) y de la última observación de rendimientos muestral. Es decir, suponemos que hemos estimado un modelo que ajusta a los rendimientos  $r_t$  para  $t = 1, \dots, T$  y el origen de la simulación es el primer periodo a partir del cual no tenemos datos muestrales ( $T+1$ ). Dado  $r_t$  la simulación o proyección de un posible valor para  $r_{t+1}$  se realiza como:

$$\hat{r}_{T+1} = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 r_T + \hat{\varepsilon}_{T+1} = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 r_T + \hat{\sigma}_\varepsilon N(0,1)$$

En donde  $N(0,1)$  hace referencia a una muestra o simulación de la normal estándar. La simulación para el periodo 2 se realiza a partir del valor simulado en el periodo uno, es decir:

$$\hat{r}_{T+2} = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 \hat{r}_{T+1} + \hat{\varepsilon}_{T+2} = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 \hat{r}_{T+1} + \hat{\sigma}_\varepsilon N(0,1)$$

Por lo que podemos referirnos a la simulación del valor en el periodo  $h$  u horizonte de simulación como:

$$\hat{r}_{T+h} = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 \hat{r}_{T+h-1} + \hat{\varepsilon}_{T+h} = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 \hat{r}_{T+h-1} + \hat{\sigma}_\varepsilon N(0,1)$$

En el caso general de un modelo AR( $p$ ) la simulación del valor en el periodo  $h$  (siempre y cuando  $h > p$ , en caso contrario podrían intervenir los propios valores de la serie) se realizaría a partir de los valores simulados en los periodos previos como:

$$\hat{r}_{T+h} = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 \hat{r}_{T+h-1} + \hat{\phi}_2 \hat{r}_{T+h-2} + \dots + \hat{\phi}_p \hat{r}_{T+h-p} + \hat{\sigma}_\varepsilon N(0,1)$$

**Ejemplo.** Calcular los momentos, la ACF, la PACF y realiza una simulación para los próximos 12 periodos del siguiente proceso AR(1):  $\phi_0=0,05; \phi_1=0,25$  y  $\sigma_\varepsilon=0,1$ <sup>27</sup>.

Los momentos (media y varianza) del anterior proceso son:

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1} = \frac{0,05}{1 - 0,25} = 0,067$$

Por lo tanto este proceso puede ser expresado como:  $r_t = 0,05 + 0,25 r_{t-1} + \varepsilon_t$  o de forma alternativa como  $\tilde{r}_t = 0,25\tilde{r}_{t-1} + \varepsilon_t$  siendo  $\tilde{r}_t = r_t - 0,067$ . La varianza del proceso se calcularía como:

$$\sigma_r^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} = \frac{0,1^2}{1 - 0,25^2} = 0,011$$

La ACF y PACF del proceso vienen dados por los siguientes valores:

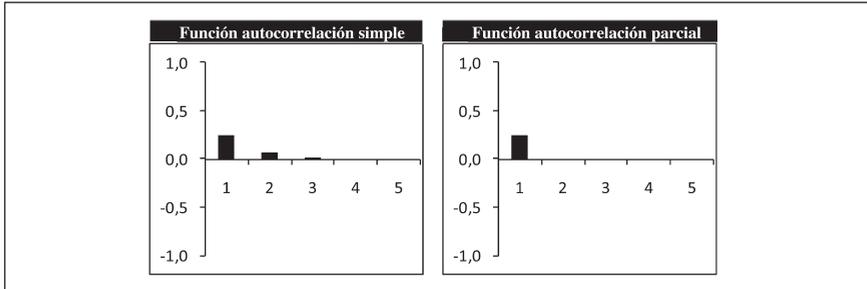
k	F. autocovarianzas	ACF	PACF
0	0,011		
1	0,003	0,250	0,250
2	0,001	0,063	0,000
3	0,000	0,016	0,000
4	0,000	0,004	0,000
5	0,000	0,001	0,000

A modo de ejemplo las dos primeras autocovarianzas vienen dadas por:  $\gamma_0 = \sigma_r^2 = 0,011$  e  $\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 = 0,25\gamma_0 = 0,003$ . Las dos primeras autocorrelaciones se calcularían  $\rho_1 = \phi_1 = \gamma_1/\gamma_0 = 0,003/0,011 = 0,25$  y  $\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{0,001}{0,011} = 0,063$ . En la ACF tendremos un primer coeficiente igual a  $\rho_1 = \phi_1$ . Por lo que las representaciones gráficas del

<sup>27</sup> Este modelo podría ser simulado y visualizado en R mediante el siguiente código:

```
n=12
et=rnorm(n)
r=double(n)
r[1]=0
for (i in 2:n)
{
r[i]=0.05+0.25*r[i-1]+0.1*et[i]
}
rt=ts(r[1:12])
ts.plot(rt)
```

correlograma son una ACF que decrece suavemente desde el valor  $\phi_1$  y una PACF con un único valor en el primer retardo que es igual a  $\phi_1$ .<sup>28</sup>



Y los valores de la serie simulada a partir del valor 0 serán<sup>29</sup>:

$h$	$\hat{\varepsilon}_{T+h}$ <sup>30</sup>	$\phi_0$	$\phi_1 \hat{\varepsilon}_{T+h-1}$	$\hat{\varepsilon}_{T+h}$
0				0
1	0,025	0,05	0,00	0,075
2	0,103	0,05	0,02	0,172
3	-0,029	0,05	0,04	0,064
4	0,024	0,05	0,02	0,090
5	-0,200	0,05	0,02	-0,128
6	-0,095	0,05	-0,03	-0,077
7	-0,005	0,05	-0,02	0,026
8	-0,062	0,05	0,01	-0,005
9	0,047	0,05	0,00	0,096
10	0,069	0,05	0,02	0,143
11	0,044	0,05	0,04	0,130
12	-0,003	0,05	0,03	0,079

<sup>28</sup> En R las funciones ACF y PACF empíricas se calculan, entre otras, con las funciones `acf()` y `pacf()` del paquete `stats`, por ejemplo para una serie temporal `y`:

```
acf(y)
pacf(y)
```

Para calcular las funciones ACF y PACF teóricas se puede emplear el paquete `fArma` de `Rmetrics`, por ejemplo para un modelo `AR(1)` cuyo parámetro  $\phi_1$  toma el valor 0,25 haríamos:

```
model = list(ar = c(0.25))
armaTrueacf(model,type = c("correlation"),lag.max =5)
armaTrueacf(model,type = c("partial"),lag.max =5)
```

<sup>29</sup> En R se puede emplear, por ejemplo, la función `armaSim()` del paquete `fArma`.

<sup>30</sup> Se genera como una sucesión de  $\mathcal{N}(0; \sigma_\varepsilon) = \mathcal{N}(0; 0,1)$ .

### *El proceso autorregresivo de segundo orden AR(2)<sup>31</sup>*

La dependencia entre los valores presentes y pasados de una variable que establece el proceso AR(1) puede generalizarse permitiendo que  $r_t$  dependa no sólo de  $r_{t-1}$  sino también de  $r_{t-2}$ . De esta forma el proceso AR(2) viene dado por la siguiente expresión:

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + \varepsilon_t$$

Donde  $\phi_0$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son constantes y  $\varepsilon_t$  es un proceso ruido blanco con varianza  $\sigma_\varepsilon^2$  constante. Como realizamos en el caso del AR(1) es útil describir las expresiones de la esperanza de este proceso y cómo es su correlograma teórico.

#### *Esperanza*

Tomando esperanzas en la ecuación del proceso resulta:  $E(r_t) = \mu = \phi_0 + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu$ . Lo que implica que<sup>32</sup>:

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2}$$

Si sustituimos  $\phi_0$  por su equivalente  $\mu (1 - \phi_1 - \phi_2)$ , el proceso AR(2) puede escribirse en desviaciones respecto a su media:  $r_t - \mu = \phi_1 (r_{t-1} - \mu) + \phi_2 (r_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t$ . Por lo que llamando a  $\tilde{r}_t = r_t - E[r_t] = r_t - \mu$  se obtiene la siguiente expresión del proceso AR(2):

$$\tilde{r}_t = \phi_1 \tilde{r}_{t-1} + \phi_2 \tilde{r}_{t-2} + \varepsilon_t$$

---

<sup>31</sup> Una característica importante del proceso AR(2) es que puede generar ciclos si su parámetro  $\phi_1 > 0$  (véase Tsay, 2005:37). Esta característica de un proceso AR(2) puede ser empleada para generar ciclos aseguradores en un contexto DFA.

<sup>32</sup> Por lo que una condición que tienen que verificar los parámetros para que el proceso tenga media finita, lo que es indispensable para que sea estacionario, es  $1 - \phi_1 - \phi_2 \neq 0$ .

### *Función de autocovarianzas*

Se puede demostrar que la fórmula para las autocovarianzas para un AR(2) viene dada por :

$$\gamma_0 = \frac{(1 - \phi_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1 + \phi_2)(1 + \phi_1 - \phi_2)(1 - \phi_1 - \phi_2)}$$

$$\gamma_1 = \frac{\phi_1\gamma_0}{1 - \phi_2}$$

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots$$

### *Función de autocorrelación simple*

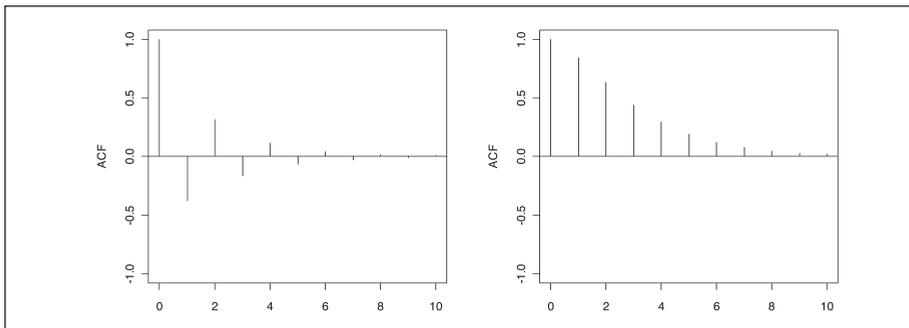
La relación entre los coeficientes de autocorrelación vienen dados por:

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots$$

En el caso particular de  $k=0$   $\rho_0=1$ , para  $k=1$  se obtiene que:  $\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$ .

Y para  $k=2$  se obtiene que:  $\rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2$

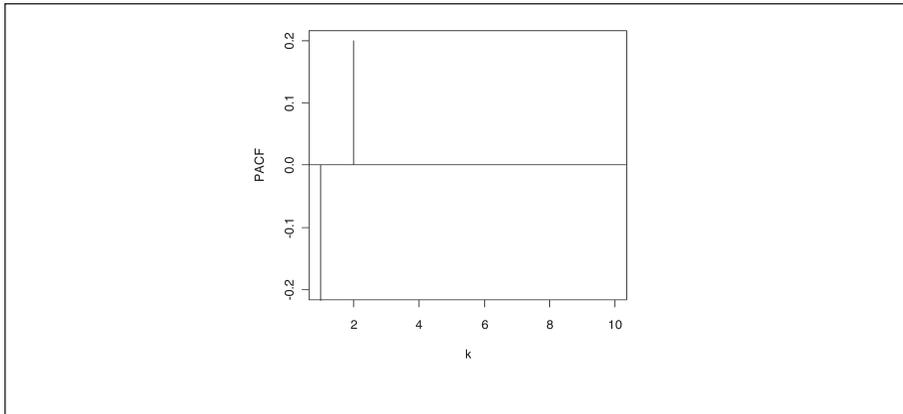
A continuación se muestra la ACF teórica para un AR(2) con parámetros  $\phi_1=-0,3$  y  $\phi_2=0,2$  (gráfico izquierda) y para  $\phi_1=1,1$  y  $\phi_2=-0,3$  (gráfico derecha). Se observa que los coeficientes teóricos decaen exponencialmente hasta cero a medida que crece el retardo. Los valores de los coeficientes pueden ser todos positivos, todos negativos o ir alternando de signo.



### La función de autocorrelación parcial

Un modelo AR(2) tiene únicamente sus dos primeros valores no nulos, siendo el primer coeficiente igual al de la ACF. El segundo coeficiente puede calcularse como la división del determinante matricial de:  $\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}^{33}$ .

A continuación se muestra la ACF teórica para un AR(2) con parámetros  $\phi_1 = -0,3$  y  $\phi_2 = 0,2$



---

**Ejemplo.** Calcular la media, la función de autocovarianzas, la FAS, la FAP y realiza una simulación para los próximos 12 periodos del siguiente proceso AR(2):  $\phi_0 = 0,05$ ;  $\phi_1 = 0,1$ ;  $\phi_2 = 0,06$  y  $\sigma_\varepsilon = 0,1$

La media del proceso anterior es:

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2} = \frac{0,05}{1 - 0,1 - 0,06} = 0,06$$

---

<sup>33</sup> Debemos advertir que en un AR(2) pueden ser los dos coeficientes positivos, negativos o que alternen de signo.

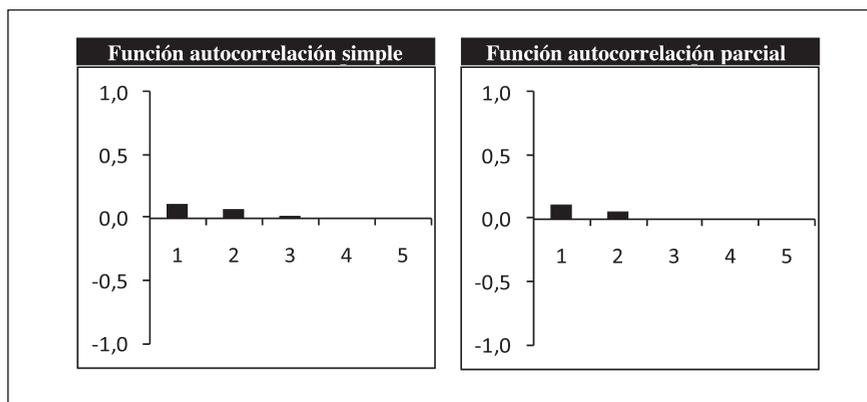
La función de autocovarianzas, FAS y FAP del proceso vienen dados por los siguientes valores:

k	F. autocovarianzas	ACF	PACF
0	0,010		
1	0,001	0,106	0,106
2	0,001	0,071	0,060
3	0,000	0,013	0,000
4	0,000	0,006	0,000
5	0,000	0,001	0,000

A modo de ejemplo las dos primeras autocovarianzas vienen dadas por:

$$\gamma_0 = \frac{(1-0,06)0,1^2}{(1+0,06)(1+0,1-0,06)(1-0,1-0,06)} = 0,010 \text{ e } \gamma_1 = \gamma_1 = \frac{0,1\gamma_0}{1-0,06} = 0,001$$

Las dos primeras autocorrelaciones se calcularían  $\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} = \gamma_1/\gamma_0 = 0,001/0,010 = 0,106$  y  $\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{0,001}{0,011} = 0,071$ . En la PACF tendremos dos coeficiente distintos de cero, el primer coeficiente será igual a  $\rho_1 = 0,106$  y el segundo se calcula como la división del determinante matricial de:  $\begin{vmatrix} 1 & 0,106 \\ 0,106 & 1 \end{vmatrix}$ . Por lo que las representaciones gráficas del correlograma son una FAS que decrece suavemente a partir del primer valor  $\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$  hacia el valor cero y una FAP con dos únicos valores no nulos.



Los valores de la serie simulada serán:

$h$	$\varepsilon_{T+h}$	$\phi_o$	$\phi_1 r_{T+h-1}$	$\phi_2 r_{T+h-2}$	$r_{T+h}$
0					0
1	-0,159	0,05	0,00	0,00	-0,109
2	0,073	0,05	-0,01	0,00	0,112
3	-0,072	0,05	0,01	-0,01	-0,017
4	0,093	0,05	0,00	0,01	0,148
5	0,064	0,05	0,01	0,00	0,128
6	0,058	0,05	0,01	0,01	0,130
7	0,137	0,05	0,01	0,01	0,208
8	-0,112	0,05	0,02	0,01	-0,034
9	-0,077	0,05	0,00	0,01	-0,018
10	0,108	0,05	0,00	0,00	0,154
11	0,087	0,05	0,02	0,00	0,151
12	-0,076	0,05	0,02	0,01	-0,002

### *El proceso autorregresivo de orden $p$ , $AR(p)$*

La dependencia entre los valores presentes y pasados de una variable puede generalizarse permitiendo que  $r_t$  dependa de sus  $p$  valores pasados. De esta forma el proceso  $AR(p)$  viene dado por la siguiente expresión:

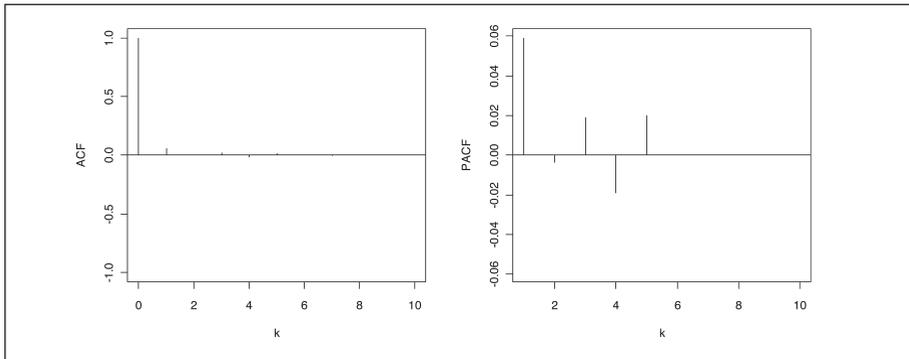
$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + \dots + \phi_p r_{t-p} + \varepsilon_t$$

Donde  $\phi_i$  son constantes y  $\varepsilon_t$  es un proceso ruido blanco con varianza  $\sigma_\varepsilon^2$  constante.

### *La función de autocorrelación simple y parcial*

Determinar el orden a partir de la función de autocorrelación simple es difícil para un proceso  $AR(p)$ , por lo que se recurre a la función de autocorrelación parcial. Un proceso  $AR(p)$  tendrá los  $p$  primeros coeficientes de autocorrelación parcial distintos de cero. Por lo tanto, el número de coeficientes distintos de cero en la PACF indica el orden del proceso  $AR$ .

A continuación se muestra la ACF teórica (izquierda) y PACF teórica (derecha) para un modelo AR(5) donde se aprecia que la PACF tiene 5 coeficientes distintos de cero<sup>34</sup>.



### Estimación de modelos AR(p)

Existen dos principales métodos fundamentales para la estimación de modelos AR(p): el método de mínimos cuadrados (MCO) y el método de máxima verosimilitud (EMV). Dado un modelo AR(p):

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + \dots + \phi_p r_{t-p} + \varepsilon_t$$

El método MCO realiza una regresión lineal empezando en la observación  $(p+1)$ , en donde se denota la estimación de los parámetros  $\phi_1, \dots, \phi_p$  por  $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p$ . El modelo ajustado es:

$$\hat{r}_t = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 r_{t-1} + \hat{\phi}_2 r_{t-2} + \dots + \hat{\phi}_p r_{t-p}$$

Y los residuos asociados al modelo se calculan como:

$$\hat{\varepsilon}_t = r_t - \hat{r}_t$$

<sup>34</sup> Los parámetros empleados del AR(5) en el gráfico han sido AR(1)=0,06; AR(2)=-0,005; AR(3)=0,02; AR(4)=-0,02 y AR(5)=0,02

Por lo que a  $\{\hat{\varepsilon}_t\}$  se le denomina serie de residuos a partir de la cual se obtiene la varianza del error como:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=p+1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{T - 2p - 1}$$

El método de máxima verosimilitud (EMV) proporciona los parámetros que maximizan la función de verosimilitud condicional. Recuérdese que para una distribución normal:

$$\ln f(r_T, r_{T-1}, \dots, r_2, r_1) = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left[ \ln(2\Pi) + \ln(\sigma^2) + \frac{(r_t - \mu)^2}{\sigma^2} \right]$$

Si sustituimos en  $\mu$  la ecuación de la media para el modelo AR(p)  $\hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 r_{t-1} + \hat{\phi}_2 r_{t-2} + \dots + \hat{\phi}_p r_{t-p}$  obtenemos la función de verosimilitud condicional de un AR(p)<sup>35</sup>:

$$-\frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left[ \ln(2\Pi) + \ln(\sigma_t^2) + \frac{(r_t - [\hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 r_{t-1} + \hat{\phi}_2 r_{t-2} + \dots + \hat{\phi}_p r_{t-p}])^2}{\sigma^2} \right]$$

**Ejemplo.** Estimar los parámetros del modelo AR(1) por MCO y EMV para la siguiente serie de rendimientos  $r_t$ .

La estimación MCO consistiría en regresar la columna (A) como variable dependiente que son los  $r_t$  para  $t=2, \dots, 11$  frente a la variable independiente formada por la columna B compuesta por  $r_{t-1}$ . La ecuación del modelo estimada es:

$$\hat{r}_t = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 r_{t-1} = 0,010 - 0,629 r_{t-1}$$

<sup>35</sup> La función de verosimilitud marginal para un modelo AR(1) viene dada por:

$$-\frac{1}{2} \ln(2\Pi) - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \right) - \frac{1 - \phi_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \left( r_1 - \frac{\phi_0}{1 - \phi_1} \right)$$

Por lo tanto la función de verosimilitud exacta para un AR(1) será:

$$-\frac{1}{2} \ln(2\Pi) - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \right) - \frac{1 - \phi_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \left( r_1 - \frac{\phi_0}{1 - \phi_1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left[ \ln(2\Pi) + \ln(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{(r_t - [\phi_0 + \phi_1 r_{t-1}])^2}{\sigma_\varepsilon^2} \right]$$

En la columna C se calcula el valor de la función de log-verosimilitud para cada observación. Por ejemplo para t=2 obtenemos que:

$$-\frac{1}{2} \left[ \ln(2\pi) + \ln(0,017^2) + \frac{(r_t - 0,010 - 0,629r_{t-1})^2}{0,017^2} \right] = 2,90$$

Por lo tanto el valor de la función de log-verosimilitud del modelo es la suma del valor para cada observación  $2,90 + \dots + 3,09 = 28,52$ . Puede comprobarse como la EMV que partiría de unos valores iniciales de  $\phi_0$  y  $\phi_1$  alcanza los mismos parámetros  $\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1$ .

t	r <sub>t</sub>	A	B	C	D	E	F
1	1,98%						
2	0,98%	0,98%	1,98%	2,90	-0,22%	1,19%	0,01%
3	1,92%	1,92%	0,98%	2,76	0,42%	1,51%	0,02%
4	0,95%	0,95%	1,92%	2,93	-0,18%	1,13%	0,01%
5	-1,90%	-1,90%	0,95%	2,22	0,43%	-2,34%	0,05%
6	0,96%	0,96%	-1,90%	2,87	2,23%	-1,27%	0,02%
7	0,95%	0,95%	0,96%	3,10	0,43%	0,52%	0,00%
8	-0,95%	-0,95%	0,95%	2,82	0,43%	-1,38%	0,02%
9	2,82%	2,82%	-0,95%	2,90	1,63%	1,19%	0,01%
10	-1,87%	-1,87%	2,82%	2,93	-0,74%	-1,13%	0,01%
11	2,79%	2,79%	-1,87%	3,09	2,21%	0,58%	0,00%
Total				28,52			

En la columna D se calculan los valores estimados de  $\hat{r}_t$ . A modo de ejemplo para t=2  $\hat{r}_2 = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 r_1 = 0,010 - 0,629 \cdot 1,98\% = -0,22\%$ . Los residuos asociados al modelo (E) se calculan como  $\hat{\varepsilon}_t = r_t - \hat{r}_t$ , por ejemplo,  $\hat{\varepsilon}_2 = r_2 - \hat{r}_2 = 0,98\% - (-0,22\%) = 1,19\%$ . En la última columna (F) se calculan los errores al cuadrado del modelo  $\hat{\varepsilon}_t^2 = (\hat{\varepsilon}_t)^2$ . Por lo que  $\hat{\varepsilon}_2^2 = (1,19\%)^2 = 0,01\%$ . La varianza del error se obtiene como  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=p+1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{11-2-1} = 0,02\%$  por lo que la desviación estándar de los errores es de 1,47%.

### Modelos AR no lineales (TAR)

Los modelos ARMA son modelos lineales ya que se construyen mediante combinaciones lineales de los valores pasados de la serie de rendimientos y de sus perturbaciones. En general suelen ser lo suficientemente flexibles como para

modelizar las variables. Sin embargo, si la relación entre el valor de la serie y su pasado no es una función lineal dichos modelos no son adecuados. La ventaja de un modelo no lineal es que permite capturar las asimetrías y saltos de nivel que son características en algunas series financieras temporales. En este sentido, Franses y Van Dijk (2000) investigan la aplicación de los modelos no lineales a las finanzas.

Los modelos autorregresivos por umbrales (*Threshold AutoRegressive* o TAR) son un tipo de modelos no lineales que permiten simplificar/aproximar la estructura no lineal que relaciona los valores presentes y pasados mediante funciones lineales por tramos, es decir, establece regímenes lineales dependiendo del valor que toma en el pasado una variable de estado respecto a un parámetro umbral. Por lo tanto, un modelo TAR<sup>36</sup> es un modelo lineal autorregresivo por tramos definido por una determinada variable. Por ejemplo, un modelo AR(1) con un umbral se escribiría mediante las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} r_t &= \phi_0^{(1)} + \phi_1^{(1)} r_{t-1} + \varepsilon_t^{(1)} \text{ si } r_{t-1} \leq u_1 \\ r_t &= \phi_0^{(2)} + \phi_1^{(2)} r_{t-1} + \varepsilon_t^{(2)} \text{ si } r_{t-1} > u_1 \end{aligned}$$

Donde  $\varepsilon_t^{(i)}$  para  $i=1,2$  es un ruido blanco con distribución  $N(0, \sigma_{\varepsilon_i}^2)$  y  $u_i$  es el umbral. Este modelo autorregresivo por umbrales equivale a una especificación de un modelo lineal distinto para distintos valores de la variable  $r_{t-1}$ . El modelo TAR generaliza el modelo anterior permitiendo  $k$  estados donde para cada estado se establece un modelo lineal autorregresivo, es decir:

$$\begin{aligned} r_t &= \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{p_1} \phi_i^{(1)} r_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} \text{ si } r_{t-d} \leq u_1 \\ r_t &= \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{p_2} \phi_i^{(2)} r_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} \text{ si } u_1 < r_{t-d} < u_2 \\ r_t &= \phi_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{p_k} \phi_i^{(k)} r_{t-i} + \varepsilon_t^{(k)} \text{ si } u_{k-1} < r_{t-d} \end{aligned}$$

<sup>36</sup> También existen modelos TARCH y TGARCH para recoger el distinto comportamiento de volatilidad de una serie en función del umbral o *threshold*.

Donde  $k$  es el número de regímenes del modelo,  $d$  es un número entero conocido como el parámetro de retardo, retardo del umbral o *delay*,  $p_i$  es el orden autorregresivo en el régimen  $i$ -ésimo del modelo. Además el conjunto de los parámetros de umbral (*thresholds*) deben satisfacer la restricción  $-\infty < u_1 < u_2 < \dots < u_{k-1} < \infty$ . En cada posible estado se tendrán distintos parámetros tanto para la constante  $\phi_0^{(s)}$ , los coeficientes del modelo AR  $\phi_i^{(s)}$ , como para la varianza  $\sigma_{\varepsilon_i}^2$  de las innovaciones  $\varepsilon_t^{(s)}$  (sin embargo, en el caso de que se suponga homocedasticidad entre los regímenes  $\sigma_{\varepsilon_1}^2 = \sigma_{\varepsilon_2}^2 = \dots = \sigma_{\varepsilon_S}^2$ ). Además, dado que la variable de umbral que condiciona los distintos regímenes es la variable explicada  $r_{t-d}$ , este modelo también se denomina SETAR (*Self-Exciting Threshold AutoRegresive*). Estos modelos se suelen escribir como SETAR  $[k, p_1, p_2, \dots, p_k]$ , de forma que para referirnos a un modelo SETAR con dos regímenes donde el primero sigue un proceso AR(1) y el segundo un AR(2) equivale a un SETAR(2,1,2)<sup>37</sup>.

---

<sup>37</sup> Tong (1990) y Tsay (1989) propusieron alternativas para ajustar los datos provenientes de procesos no lineales a modelos SETAR. Fundamentalmente tratan de localizar los umbrales para ajustar modelos autorregresivos en cada régimen. En particular, Tsay (1989) propone la aplicación de autorregresiones sobre los datos ordenados para localizar umbrales. Tong (1990) propone un método consistente en tomar determinados cuantiles de la serie como candidatas a umbrales. Posteriormente realiza un procedimiento iterativo alternando combinaciones de posibles umbrales y de ordenes autorregresivos en cada uno de los regímenes, eligiendo el modelo que minimice el criterio de AIC normalizado (NAIC).

La estimación de un modelo TAR de dos regímenes en R se puede realizar mediante la función `tar()` del paquete TSA que permite el método de minimizar el AIC "MAIC" y de mínimos cuadrados condicionales "CLS". A modo de ejemplo podemos generar un proceso con la función `tar.sim()` y luego ajustarlo con la función `tar()` como se muestra a continuación:

```
library(TSA)
y=tar.sim(n=10000,ntransient =0, Phi1=c(0.25,0.5), Phi2=c(0.1,-0.5), p=1, d=1, sigma1=0.5^0.5,
thd=1, sigma2=1 ,xstart=0)$y
tar(y, 1, 1, 1, is.constant1 = TRUE, is.constant2 = TRUE, estimate.thd = TRUE, method = c("MAIC"),
a = 0.05, b = 0.95, order.select = TRUE, print = TRUE)
```

**Ejemplo. Simular un modelo SETAR (2,1,1)<sup>38</sup>:**

El régimen 1 viene dado por la siguiente ecuación:  $r_t = 0,25 + 0,5r_{t-1} + \varepsilon_t^{(1)}$  si  $r_{t-1} \leq 1$  donde  $\sigma_{\varepsilon_1}^2 = 0,5$ . El régimen 2 viene dado por:  $r_t = 0,1 - 0,5r_{t-1} + \varepsilon_t^{(2)}$  si  $r_{t-1} > 1$  donde  $\sigma_{\varepsilon_2}^2 = 1$ .

El valor que tome  $r_{t-1}$  (el umbral toma el valor 1) determina el régimen en el que en cada periodo nos encontramos, y por tanto los parámetros del modelo AR(1) que emplearemos en la simulación. Es decir, si  $r_{t-1}$  toma valores inferiores o iguales a 1 se emplea la expresión del régimen 1 y cuando toma valores superiores utilizamos la expresión del régimen 2. Posteriormente podríamos simular una uniforme entre 0 y 1 la cual se emplea como la probabilidad de la inversa de la distribución normal, con los parámetros correspondientes al régimen oportuno, para así obtener las innovaciones. Una vez obtenido el valor de las innovaciones ya podemos calcular el valor de  $r_t$ .

t	$r_{t-1}$	Régimen	U(0;1)	$\varepsilon_t^{(k)}$	$r_t$
0					0
1	0,00	1	0,699	0,370	0,620
2	0,62	1	0,878	0,823	1,383
3	1,38	2	0,595	0,239	-0,352
4	-0,35	1	0,791	0,573	0,647
5	0,65	1	0,723	0,418	0,991
6	0,99	1	0,851	0,736	1,481
7	1,48	2	0,62	0,324	-0,317
8	-0,32	1	0,514	0,025	0,117
9	0,12	1	0,388	-0,200	0,108
10	0,11	1	0,358	-0,257	0,047
11	0,05	1	0,920	0,993	1,266
12	1,27	2	0,618	0,301	-0,232

<sup>38</sup> Es por tanto un modelo de dos regímenes donde cada uno sigue un proceso AR(1), el umbral se establece en el valor de 1, el retardo del umbral es también igual a 1 y se supone suponga heterocedasticidad entre los regímenes. Un resultado similar, ya que habría que emplear los mismos números uniformes para que fuese idéntico mediante la función `set.seed()`, puede obtenerse usando el software R mediante el paquete TSA: `x=tar.sim( n=12, ntransient =0, Phi1=c(0.25,0.5), Phi2=c(0.1,-0.5), p=1, d=1, sigma1=0.5^0.5, thd=1, sigma2=1 ,xstart=0)`

Y la representación gráfica la realizaremos mediante: `plot(y=x$y, x=1:12, type="l", xlab="t", ylab=expression(x[t]))`

El modelo SETAR asume que los movimientos de  $r_t$  entre un régimen y otro están controlados por un cambio o salto brusco, por lo que una crítica que generalmente reciben estos modelos es que la ecuación de la media condicional no es continua. En respuesta a esta crítica se han propuesto otro tipo de modelos no lineales, los STAR (*Smooth Threshold AutoRegresive*) (Chan y Tong, 1986 y Teräsvirta, 1994) que permiten una transición suave entre los regímenes, siendo por lo tanto una generalización de los modelos TAR. Esta transición suave se consigue reemplazando la función indicador o de distribución, que tiene un salto al llegar al punto del umbral, por una función continua suave que toma valores en  $[0, 1]$ , siendo muy empleada la función logística o exponencial.

### **1.3.1.2. Procesos de medias móviles (MA)**

Hasta este momento hemos analizado el primer tipo de procesos ARMA, los procesos autorregresivos o AR. El segundo tipo de procesos son los modelos de media móvil que tratan de explicar el comportamiento de una variable no en función de sus valores pasados (modelos AR), sino a través de los errores cometidos a la hora de estimar el valor de la variable en los periodos anteriores. Por tanto, un proceso de medias móviles (*moving average*) o MA es una función de un número finito de las innovaciones pasadas. Se dice que los modelos MA tienen memoria finita porque, por ejemplo, para un MA(1) no se recuerda lo que sucedió dos periodos atrás<sup>39</sup>.

#### *El proceso de media móvil de orden uno MA(1)*

El proceso de media móvil de orden uno es un proceso ruido blanco al que se le ha añadido una dependencia del valor actual de la serie de la última innovación ocurrida. Por lo tanto, el proceso MA(1) es una combinación lineal de las dos últimas innovaciones (innovación actual  $\varepsilon_t$  y la del periodo previo  $\varepsilon_{t-1}$ ), por lo que se obtiene

---

<sup>39</sup> Los procesos AR se caracterizan por tener una función de autocorrelación simple (FAS) que decrece de forma lenta (tiene muchos coeficientes distintos de cero que decrecen con el retardo). Se dice por tanto que los procesos autorregresivos tienen memoria relativamente larga, ya que el valor actual está correlacionada con todos los anteriores aunque con coeficientes decrecientes. Los procesos AR no pueden representar series de memoria muy corta en donde el valor de la serie sólo está correlacionado con un número pequeño de valores pasados, de forma que la FAS tan sólo tenga unas pocas autocorrelaciones distintas de cero. Los procesos MA por el contrario tienen la propiedad de memoria muy corta o finita.

la siguiente expresión:

$$r_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Donde  $\theta_0$  y  $\theta_1$  son constantes y  $\varepsilon_t$  un ruido blanco con varianza  $\sigma_\varepsilon^2$ <sup>40</sup>.

### Esperanza y varianza

La esperanza de un MA(1) es:  $E(r_t) = \theta_0$ . Su varianza es:  $var(r_t) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2)$ .

### La función de covarianzas, autocorrelación simple y autocorrelación parcial

Las covarianzas de un proceso MA(1) vienen dadas por la siguiente expresión<sup>41</sup>:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= (1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 &= -\theta_1\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

Para el resto de covarianzas  $\gamma_j = 0, j > 1$ <sup>42</sup>.

Dividiendo las autocovarianzas por la varianza del proceso se obtienen los coeficientes de autocorrelación de un proceso MA(1), que verifican que:  $\rho_0 = 1, \rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$  y para  $k > 1 \rho_k = 0$ . Así se puede afirmar que la función de autocorrelación simple de un MA(1) tendrá un valor distinto de cero en el primer retardo siendo nulos el

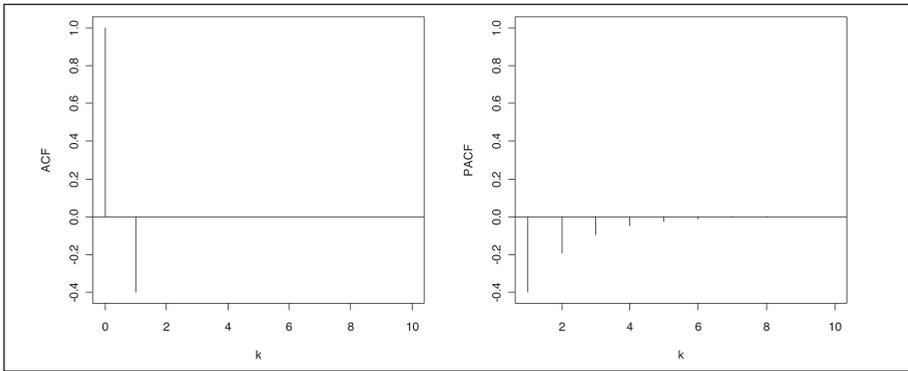
<sup>40</sup> El proceso MA(1) es la suma de dos procesos estacionarios  $\varepsilon_t$  y  $-\theta_1 \varepsilon_{t-1}$ , y por tanto, para cualquier valor de  $\theta_1$  es estacionario. Sin embargo, normalmente se supone que la innovación pasada tienen menos peso que la presente, es decir,  $-1 < \theta_1 < 1$ . En este caso se dice que el proceso es invertible. La invertibilidad de los procesos MA implica que, mediante sustitución reiterada, un modelo MA(1) puede expresarse como un proceso AR de orden infinito, en el que los coeficientes no son sino las potencias del parámetro del modelo MA(1).

<sup>41</sup> Las covarianzas de un proceso MA(1) se obtienen multiplicando la ecuación del proceso  $\tilde{r}_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$  por  $\tilde{r}_{t-1}$  y tomando esperanzas, de esta forma:  
 $\gamma_1 = E(\tilde{r}_t \tilde{r}_{t-1}) = E(\varepsilon_t \tilde{r}_{t-1}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} \tilde{r}_{t-1})$

En la anterior expresión el primer término es cero ya que  $\tilde{r}_{t-1}$  no depende de la innovación  $\varepsilon_t$ . El segundo término se calcula a partir de  $E(\varepsilon_{t-1} \tilde{r}_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1}(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2})) = \sigma_\varepsilon^2$ .

<sup>42</sup> Por ejemplo, la autocovarianza de orden dos es  $\gamma_2 = E(\tilde{r}_t \tilde{r}_{t-2}) = E(\varepsilon_t \tilde{r}_{t-2}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} \tilde{r}_{t-2}) = 0$ , dado que al estar la serie incorrelada con las innovaciones futuras los dos términos son cero.

resto<sup>43</sup>. Este resultado muestra que la función de autocorrelación simple de un proceso MA(1) tienen las mismas propiedades que la función de autocorrelación parcial de un proceso AR(1), es decir, existe un primer coeficiente distinto de cero siendo todos los demás nulos. Al analizar la función de autocorrelación parcial de un MA(1)<sup>44</sup> se observa que tendrá los coeficientes distintos de cero y que decrecen geométricamente con el retardo  $k$ . En el gráfico inferior se representa en la izquierda la ACF y en la derecha la PACF para un proceso MA(1) con  $\theta_1 = 0,5$ .



De forma análoga, un proceso MA(2) tienen una FAS con las mismas propiedades que la FAP de un proceso AR(2), es decir, existe dos coeficientes distintos de cero siendo todos los demás nulos. Al analizar la FAP de un MA(2) se observa que tendrá muchos coeficientes distintos de cero y que decrecen geométricamente con el retardo.

<sup>43</sup> La explicación es debido a la presencia común en  $r_t$  y en  $r_{t-1}$  del término  $\varepsilon_{t-1}$ . Sin embargo, entre  $r_t$  e  $r_{t-k}$  para  $k > 1$  no hay ningún término común. Además nótese que como si el proceso es invertible [ $-1 < \theta_1 < 1$ ] el valor del coeficiente de autocorrelación en un MA(1) es siempre menor que 0,5 en valor absoluto.

<sup>44</sup> Los cálculos de los coeficientes de la FAP de un proceso MA se realizan de la siguiente forma: el primer coeficiente es igual al primer coeficiente de la FAS al igual que pasaba con el proceso MA(1), y los siguientes coeficientes se obtienen por división del determinante de matrices. Por ejemplo, el

segundo coeficiente se calcula como:  $\frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$ , el tercero como  $\frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$ , el cuarto como  $\frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$ , el

quinto como  $\frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_1 & \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_1 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$ , y así sucesivamente.

## Simulación

La simulación de un modelo MA(1) se realiza a partir de los parámetros estimados  $\hat{\theta}_0$ ,  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\sigma}_\varepsilon$  del modelo (se detalla posteriormente para el caso general de un MA de orden  $q$ ) y del error cometido por el modelo en la última observación de rendimientos muestral  $\hat{\varepsilon}_T$ . Es decir, suponemos que hemos estimado un modelo que ajusta a los rendimientos  $r_t$  para  $t = 1, \dots, T$  y el origen de la simulación es el primer periodo a partir del cual no tenemos datos muestrales ( $T + 1$ ). Dado el error cometido en la estimación del modelo para el último periodo muestral  $\hat{\varepsilon}_T$  la simulación o proyección de un posible valor para  $r_{T+1}$  se realiza como:

$$\hat{r}_{T+1} = \hat{\theta}_0 + \hat{\varepsilon}_{T+1} - \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_T$$

Donde  $\hat{\varepsilon}_{T+1}$  será una muestra de una normal estándar multiplicada por  $\hat{\sigma}_\varepsilon$ . La simulación para el periodo 2 se realiza a partir del valor simulado en el periodo uno, es decir:

$$\hat{r}_{T+2} = \hat{\phi}_0 + \hat{\varepsilon}_{T+2} - \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_{T+1}$$

Por lo que podemos referirnos a la simulación del valor en el periodo  $h$  u horizonte de simulación como:

$$\hat{r}_{T+h} = \hat{\phi}_0 + \hat{\varepsilon}_{T+h} - \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_{T+h-1}$$

En el caso general de un modelo MA( $q$ ) la simulación del valor en el periodo  $h$  (siempre y cuando  $h > q$ , en caso contrario podrían intervenir los valores de los errores estimados en el periodo muestral) se realizaría a partir de los valores simulados de las perturbaciones como:

$$\hat{r}_{T+h} = \hat{\phi}_0 + \hat{\varepsilon}_{T+h} - \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_{T+h-1} + \dots + \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{T+h-q}$$

**Ejemplo.** Calcula los momentos, ACF, PACF, y realiza una simulación para los próximos 12 periodos del siguiente proceso MA(1):  $\theta_0 = 0,05$ ;  $\theta_1 = -0,25$  y  $\sigma_\varepsilon^2 = 0,01$ .

La media es igual a:  $E(r_t) = \theta_0 = 0,05$

La varianza se calcula como:  $\sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2) = 0,011$

La función de autocovarianzas, FAS y FAP del proceso vienen dados por los siguientes valores:

Retardo	F. autocovarianzas	ACF	PACF
0	0,011		
1	0,003	0,235	0,235
2	0,000	0,000	-0,059
3	0,000	0,000	0,015
4	0,000	0,000	-0,004
5	0,000	0,000	0,001

A modo de ejemplo, las dos primeras autocovarianzas vienen dadas por:

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2 = (1 + 0,05^2)0,011 \text{ e } \gamma_1 = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2 = -(-0,25)0,01 = 0,003$$

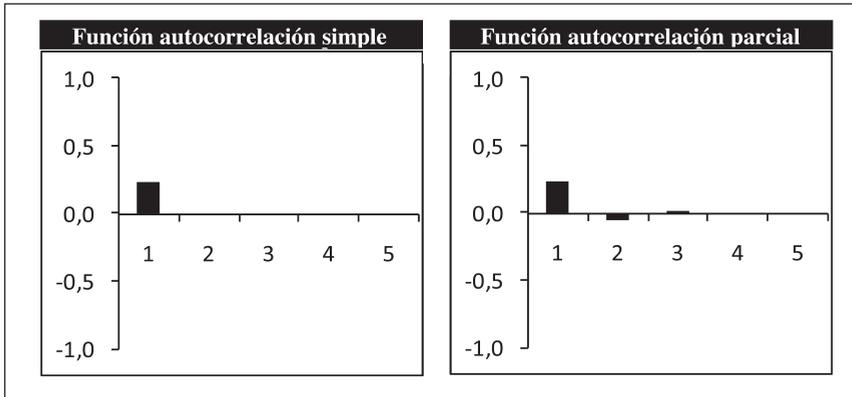
La primera autocorrelación se calcularía como  $\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} = \gamma_1/\gamma_0 = 0,003/0,011 = 0,235$  ya que el resto toma el valor cero.

En la FAP tendremos que el primer coeficiente será igual a  $\rho_1 = 0,235$  y el segundo se calcula como la división del determinante matricial de:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0,235 \\ 0,235 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0,235 \\ 0,235 & 1 \end{vmatrix}$$

Por lo que las representaciones gráficas del correlograma son una FAS que tiene un único valor no nulo y la FAP decrece suavemente con coeficientes que alternan de signo a partir de un primer valor que es igual a la FAS.

La representación gráfica de la ACF y PACF viene dada por:



Los valores de la serie simulada serán:

Periodo	$\varepsilon_t$	$\theta_0$	$\theta_0 \varepsilon_{t-1}$	$r_t$
0				0
1	0,057	0,05	0,00	0,107
2	-0,062	0,05	-0,01	0,002
3	-0,080	0,05	0,02	-0,046
4	-0,021	0,05	0,02	0,009
5	0,050	0,05	0,01	0,095
6	-0,091	0,05	-0,01	-0,028
7	0,191	0,05	0,02	0,219
8	0,111	0,05	-0,05	0,209
9	0,158	0,05	-0,03	0,236
10	-0,048	0,05	-0,04	0,042
11	-0,039	0,05	0,01	-0,001
12	0,034	0,05	0,01	0,074

*El proceso de media móvil de orden q, MA(q)*

Un proceso MA(q) generaliza el proceso MA(1) de forma que el valor actual de la serie depende no sólo de la última innovación, sino de las q anteriores. Por tanto, la expresión de un proceso MA(q) viene dada por<sup>45</sup>:

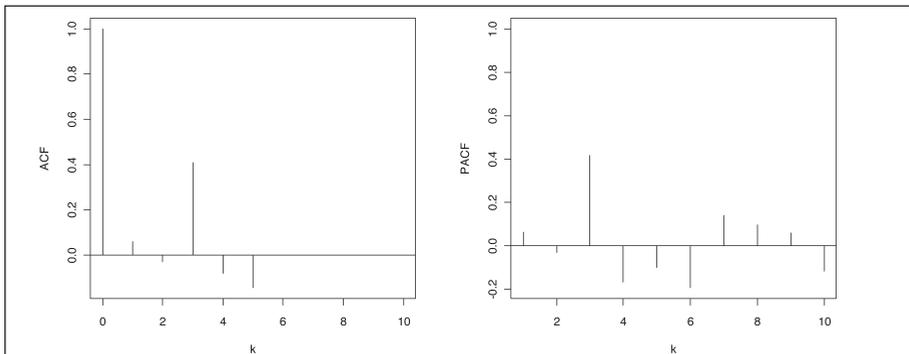
$$r_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

Este proceso tiene las siguientes autocovarianzas:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma^2 \\ \gamma_k &= (-\theta_q + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q)\sigma^2 \quad k = 1, \dots, q \\ \gamma_k &= 0 \quad k > q \end{aligned}$$

Los coeficientes de la FAS se obtienen dividiendo las covarianzas por  $\gamma_0$ , por lo que se obtiene que  $\rho_k = 0$  para  $k > q$ . Por lo que la FAS de un MA(q) tendrá q coeficientes distintos de cero siendo los demás nulos. La FAP de un MA será no nula para cualquier retardo, teniendo pues la misma estructura que la FAS de un proceso AR del mismo orden. Por tanto se dice que existe una dualidad entre los procesos AR y MA, de forma que la FAP de un MA(q) tiene la estructura de la FAS de un AR(q), y la FAS de un MA(q) tiene la estructura de la FAP de un AR(q).

En el gráfico inferior se muestra la ACF(izquierda) y PACF(derecha) de un modelo MA(5). Se observa que la ACF tiene 5 coeficientes distintos de cero (sin contar  $\rho_0 = 1$ ) y en la PACF todos los coeficientes son distintos que cero.



<sup>45</sup> Lo que equivale a  $\tilde{r}_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$ .

A continuación se resumen las principales propiedades de los modelos AR y MA:

- Para los modelos MA(q) la ACF es útil en especificar el orden dado que tendrá q coeficientes distintos de cero.
- Para los modelos AR(p) la PACF es útil en especificar el orden dado que tendrá p coeficientes distintos de cero.

### Estimación de modelos MA

Para la estimación de los parámetros de un modelo MA se suele recurrir al método de máxima verosimilitud (EMV). Dado un modelo MA(q):

$$\tilde{r}_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

El método de máxima verosimilitud (EMV) condicional proporciona los parámetros que maximizan la función de verosimilitud condicional. Si sustituimos en la ecuación de verosimilitud del modelo normal  $\mu_t$  por la ecuación de la media  $\hat{\theta}_0 + \varepsilon_t - \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1} - \hat{\theta}_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \hat{\theta}_q \varepsilon_{t-q}$  obtenemos:

$$-\frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left[ \ln(2\Pi) + \ln(\sigma_t^2) + \frac{(r_t - [\hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 \varepsilon_{t-1} - \hat{\theta}_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \hat{\theta}_q \varepsilon_{t-q}])^2}{\sigma_t^2} \right]$$

O lo que es igual:

$$-\frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left[ \ln(2\Pi) + \ln(\sigma_t^2) + \frac{(\hat{\varepsilon}_t)^2}{\sigma_t^2} \right]$$

Definiéndose nuevamente los residuos asociados al modelo como:  $\hat{\varepsilon}_t = r_t - \hat{r}_t$ .

### 1.3.1.3. El proceso ARMA

Los procesos ARMA combinan las propiedades de los procesos autorregresivos (AR) y de medias móviles (MA)<sup>46</sup>.

<sup>46</sup> Esto implica que sus funciones de autocorrelación tienen unas características relativamente complejas, dificultando la identificación de estos procesos.

### El proceso ARMA(1, 1)

El proceso ARMA más simple es el ARMA(1, 1) cuya ecuación es la siguiente<sup>47</sup>:

$$r_t = \delta + \phi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

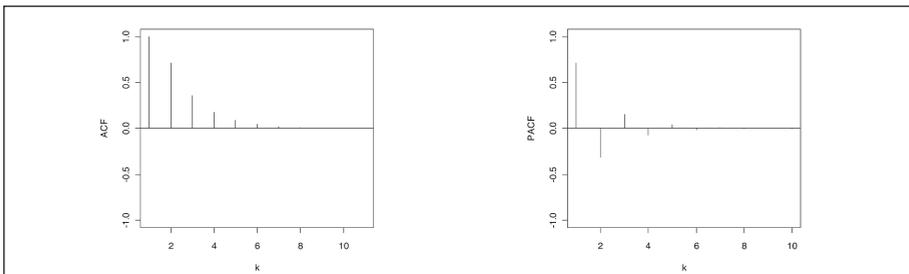
En donde  $\delta$  es una constante y es necesario que  $|\phi_1| < 1$  para que el proceso sea estacionario y  $|\theta_1| < 1$  para que sea invertible. Se puede demostrar que las autocovarianzas de este proceso son:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1}, \quad k > 1 \\ \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_0 &= \sigma_\varepsilon^2 \frac{1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2} \end{aligned}$$

Los coeficientes de autocorrelación de un proceso ARMA(1, 1) vienen dados por:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1 \theta_1)}{1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2} \\ \rho_k &= \phi_1 \rho_{k-1}, \quad k > 1 \end{aligned}$$

Esto indica a partir coeficiente la FAS de un proceso ARMA(1, 1) tiene un decrecimiento determinado por el parámetro  $\phi_1$  (parte AR del proceso). Al mismo tiempo, se puede demostrar que la FAP de un proceso ARMA(1, 1) tendrá un decrecimiento geométrico a partir de un valor inicial<sup>48</sup>. Por lo tanto, podemos concluir que un proceso ARMA(1, 1) tanto la FAS como la FAP tienen una estructura similar dada por un valor inicial distinto de cero seguido de un decrecimiento lento. Se muestra en el gráfico de la izquierda la ACF de un proceso ARMA(1, 1) con coeficiente 0,5 y -0,5 y en la derecha la PACF.



<sup>47</sup> Lo que equivale a  $\tilde{r}_t = \phi_1 \tilde{r}_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ .

<sup>48</sup> Su cálculo se realiza mediante la división del determinante matricial de forma análoga a la FAP de un proceso MA.

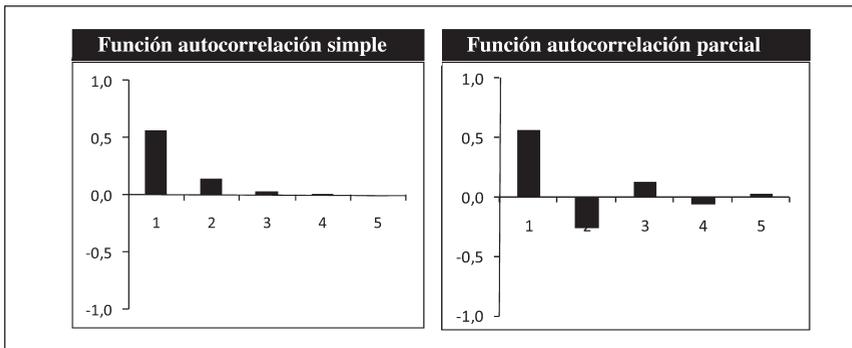
Ejemplo. Calcula la media, autocovarianzas, la FAS, la FAP, y realiza una simulación para los próximos 12 periodos del siguiente proceso ARMA(1,1):  $r_t = 0,05 + 0,25 r_{t-1} + \varepsilon_t + 0,5 \varepsilon_{t-1}$  con  $\sigma_\varepsilon^2 = 0,01$  ( $\sigma_\varepsilon = 0,1$ )

La media es igual a:  $E(r_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1} = 0,067$

La función de autocovarianzas, FAS y FAP del proceso vienen dados por los siguientes valores:

Retardo	F. autocovarianzas	FAS	FAP
0	0,016		
1	0,009	0,563	0,563
2	0,002	0,141	-0,257
3	0,001	0,035	0,126
4	0,000	0,009	-0,063
5	0,000	0,002	0,031

Por lo que la representación gráfica del correlograma es:



Por lo que se aprecia que la FAS y la FAP tienen muchos coeficientes no nulos que decrecen con el retardo.

Los valores de la serie simulada serán:

Periodo	$\varepsilon_t$	$\delta$	$\theta_1 \varepsilon_{t-1}$	$\phi_1 r_{t-1}$	$r_t$
0					0
1	-0,142	0,05	0,00	0,00	-0,092
2	0,028	0,05	0,07	-0,02	-0,016
3	0,054	0,05	-0,01	0,00	0,114
4	0,152	0,05	-0,03	0,03	0,258
5	0,023	0,05	-0,08	0,06	0,213
6	0,090	0,05	-0,01	0,05	0,205
7	-0,035	0,05	-0,05	0,05	0,111
8	-0,201	0,05	0,02	0,03	-0,141
9	0,174	0,05	0,10	-0,04	0,088
10	0,001	0,05	-0,09	0,02	0,160
11	-0,120	0,05	0,00	0,04	-0,029
12	-0,091	0,05	0,06	-0,01	-0,108

### Procesos ARMA(p, q)

Un proceso ARMA(p, q) viene dado por la siguiente ecuación:

$$\tilde{r}_t = \phi_1 \tilde{r}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{r}_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

La ACF y la PACF de los procesos ARMA(p, q) es el resultado de la superposición de las propiedades de los procesos AR(p) y MA(q). Esta estructura compleja hace que en la práctica sea difícil identificar un proceso ARMA(p, q). Sin embargo, es frecuente que las series temporales financieras tengan poca estructura en media pudiendo generalmente ser bien ajustadas por procesos de bajo orden. Para la identificación de los modelos ARMA se emplean generalmente dos métodos:

- La selección automática del orden  $p$  y  $q$  empleando un criterio de selección de modelos como el criterio AIC o BIC.
- El empleo de la función de autocorrelación extendida (EACF) propuesto por Tsay y Tiao (1984). El *output* de la EACF<sup>49</sup> es una tabla en la que las filas se

<sup>49</sup> El paquete TSA de R contiene la función `eacf()` que calcula la tabla empírica.

corresponden con el orden  $p$  AR y las columnas con el orden  $q$  MA. La tabla inferior muestra la versión teórica EACF de un modelo ARMA(1,1) en donde se aprecia que contiene un triángulo de 0 cuyo vértice superior izquierdo está en el orden (1,1). En general, para identificar un proceso ARMA( $p, q$ ) se observará el vértice superior izquierdo del triángulo de 0 y ese será el orden ( $p, q$ ).

		MA				
AR	0	1	2	3	4	5
0	X	X	X	X	X	X
1	X	0	0	0	0	0
2	*	X	0	0	0	0
3	*	*	X	0	0	0
4	*	*	*	X	0	0
5	*	*	*	*	X	0

En el cuadro inferior se resumen las principales características de la FAS y la FAP de los procesos AR( $p$ ), MA( $q$ ) y ARMA( $p, q$ ).

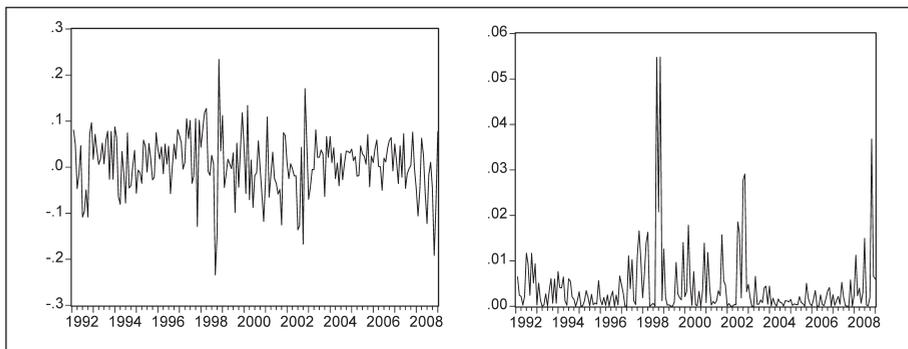
	FAS	FAP
AR( $p$ )	Muchos coeficientes no nulos	Primeros $p$ no nulos, resto 0
MA( $q$ )	Primeros $q$ no nulos, resto 0	Muchos coeficientes no nulos
ARMA( $p, q$ )	Muchos coeficientes no nulos	Muchos coeficientes no nulos

### 1.3.2. Modelos de heterocedasticidad condicional (GARCH y SV)

En un proceso ARMA tanto la varianza marginal o incondicional  $var(r_t)$  como la varianza condicional o condicionada  $var(r_t | r_{t-1}, \dots)$  son constantes, lo que se conoce como supuesto de homoscedasticidad<sup>50</sup>. Los modelos de heterocedasticidad condicional son procesos estacionarios no lineales en la varianza, ya que su varianza condicionada no es constante, aunque sí lo es su varianza marginal, por lo que se dice que son incondicionalmente homocedásticos. En el gráfico siguiente se recoge la evolución de rendimientos logarítmicos mensuales del Ibx-35 para el periodo Enero de 1992 a Diciembre de 2008. Los rendimientos son estacionarios en media, pero presentan volatilidades que cambian con el tiempo y *clusters* o agrupamientos

<sup>50</sup> Es decir, igual (homos) dispersión (cedasticidad).

de volatilidad. Esta característica también se aprecia en el gráfico del cuadrado de los rendimientos logarítmicos. La importancia de emplear un modelo que recoja el comportamiento de la volatilidad es fundamental en la medición del riesgo.



Los modelos de heterocedasticidad condicional fueron propuestos para explicar ciertas propiedades que no se podían explicar por los modelos ARMA y que aparecen con frecuencia en series temporales de rendimientos financieros, como son la volatilidad no constante en el tiempo (heterocedasticidad), la persistencia o conglomerados de volatilidad y el exceso de curtosis de las series de rendimientos. Los principales modelos de heterocedasticidad condicional son los modelos GARCH (*Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity*) y modelos de volatilidad estocástica (*Stochastic Volatility* o SV). Estos procesos modelizan de forma dinámica la propia varianza condicional en función de los valores pasados de la propia variable.

El modelo ARCH (*AutoRegressive Conditional Heteroscedastic*) fue el primer modelo de heterocedasticidad condicional. Fue propuesto por Engle (1982) en un artículo sobre la inflación en el Reino Unido, y supone que la varianza condicional de una serie temporal depende del pasado con una estructura autorregresiva. Los modelos GARCH introducidos por Bollerslev (1986) generalizan a los anteriores al incorporar en la dependencia de la varianza condicional en términos de media móvil. Los modelos de volatilidad estocástica introducidos por Taylor (1986) suponen que la varianza condicional depende de valores no observados y son por tanto más flexibles. Bollerslev et ál. (1992) y Bera y Higgins (1993) revisan los modelos GARCH, mientras que los modelos SV son revisados en Broto y Ruiz (2004) o Shephard (2005). Ruiz

[1993] compara las propiedades de los modelos ARCH y los modelos SV. Todos estos modelos suponen efectos simétricos, por tanto la dependencia de la varianza condicional se establece en función de las magnitudes observadas pasadas pero no dependen de su signo. En la práctica los rendimientos de las series temporales financieras pueden responder de diferente forma a cambios positivos o negativos, por lo que posteriormente introduciremos otro tipo de modelos que no suponen esta restricción, los denominados GARCH asimétricos.

### 1.3.2.1. Modelos ARCH

Supongamos una serie  $r_t$ , al principio supondremos que la serie es un ruido blanco pero como veremos en los modelos ARMA(p, q)-GARCH(r, s) pueden ser la serie de residuos de un modelo ARMA. El modelo ARCH permite que tengamos procesos ruidos blanco formados por variables dependientes.

#### Test para efectos ARCH

Sea  $\varepsilon_t = r_t - \mu_t$  los residuos de la ecuación de la media de un modelo. Se emplea la serie de los cuadrados  $\varepsilon_t^2$  para verificar si la serie es homocedástica.

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r \varepsilon_{t-r}^2$$

Existen dos test frecuentemente empleados:

- Aplicar el estadístico  $Q(m)$  a la serie  $\varepsilon_t^2$  cuya hipótesis nula es que los primeros  $m$  retardos de la función ACF de la serie  $\varepsilon_t^2$  son cero.
- El test ARCH-LM cuya hipótesis nula es que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$ . La regla de decisión es rechazar la hipótesis nula (no hay efectos ARCH ya que sólo  $\alpha_0$  puede ser positivo) si el p-valor asociado al estadístico es menor que  $\alpha$ .

#### Modelo ARCH (1)

La idea básica del modelo ARCH(1) es que el *shock*  $\varepsilon_t$  del rendimiento de un activo está incorrelacionado serialmente pero que es dependiente, y dicha dependencia

puede ser descrita mediante una función cuadrática de su valor retardado. El modelo ARCH(1) supone que la varianza condicional del proceso  $r_t$  ( $\sigma_t^2$ ) no es constante, sino que tiene una estructura similar a un AR(1), ya que depende sólo del último valor observado mediante dos ecuaciones. La primera representa el modo en que la esperanza condicional del proceso cambia en el tiempo, mientras que la segunda muestra el comportamiento de la varianza condicional:

$$r_t = \varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$E(\varepsilon_t^2 | \varepsilon_{t-1}) = E(r_t^2 | r_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_{t-1} z_{t-1})^2$$

$r_t$  está distribuido como una Normal(0,  $\sigma_t$ ) ya que es frecuente asumir que  $z_t$  está distribuida como Normal(0,1)<sup>51</sup>, además  $\alpha_0 > 0$  y  $\alpha_1 \geq 0$  para asegurar que la varianza condicional sea positiva. La ecuación establece que si el valor de  $r_{t-1}^2$  es elevado, la varianza  $\sigma_t^2$  de la siguiente observación condicionada a este valor de  $r_{t-1}^2$  será también elevada, lo que hace más probable que el valor  $r_t^2$  sea elevado. Además puede demostrarse que para un ARCH (1) la varianza marginal o incondicional es constante e igual a:  $\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$ . Un modelo ARCH(1), con hipótesis de normalidad de  $z_t$ , conducirá a distribuciones con colas pesadas ya que el coeficiente de curtosis viene dado por:  $3 \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}$ . Dado que  $\alpha_1 > 0$  el coeficiente de curtosis es siempre superior al de una distribución normal (3).

Las ventajas de este modelo son su relativa sencillez al establecer una dependencia de tipo AR(1) entre los cuadrados de las observaciones, y la capacidad de generar *clusters* de volatilidad y distribuciones con colas gordas. Sin embargo las desventajas son que es un modelo bastante restrictivo y que supone simetría entre los *shocks* positivos y negativos de los rendimientos.

Las características que se observan en una serie de rendimientos que sigue un proceso ARCH(1) son: en el gráfico de evolución temporal de los rendimientos deben apreciarse periodos de alta volatilidad y otros de menor volatilidad, en el histograma de los rendimientos se debe observar que la distribución tenga una alta curtosis, la ACF y la PACF de la serie de los rendimientos debe ser ruido blanco, finalmente, la ACF y la PACF de los rendimientos al cuadrado debe mostrar el patrón de un AR(1).

<sup>51</sup> También es frecuente el empleo de la distribución t de Student o la distribución del error generalizado (GED).

## Simulación

La simulación de un modelo ARCH (1) se realiza a partir de los parámetros estimados  $\hat{\alpha}_0$ ,  $\hat{\alpha}_1$  y del error cometido en la estimación del modelo para el último periodo muestral  $\hat{\varepsilon}_T$ , que dado que no tenemos modelo en la media coincide con  $r_T$ . Es decir, suponemos que hemos estimado un modelo que ajusta a los rendimientos  $r_t$  para  $t = 1, \dots, T$  y el origen de la simulación es el primer periodo a partir del cual no tenemos datos muestrales ( $T + 1$ ). Dado el último valor de los rendimientos de la serie muestral  $r_T$ , la simulación o proyección de un posible valor para  $r_{T+1}$  se realiza como:

$$\hat{r}_{T+1} = \hat{z}_{T+1} \sqrt{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 (r_T)^2}$$

Donde  $\hat{z}_{T+1}$  será una muestra de una normal estándar, u otra distribución alternativa (t de Student, GED, etc.). La simulación para el periodo 2 se realiza a partir del valor simulado en el periodo uno, es decir:

$$\hat{r}_{T+2} = \hat{z}_{T+2} \sqrt{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 (\hat{r}_{T+1})^2}$$

Por lo que podemos referirnos a la simulación del valor en el periodo  $h$  u horizonte de simulación como:

$$\hat{r}_{T+h} = \hat{z}_{T+h} \sqrt{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 (\hat{r}_{T+h-1})^2}$$

---

Ejemplo. Simular para los siguientes 12 periodos el siguiente modelo ARCH (1):  $\alpha_0 = 0,001$  y  $\alpha_1 = 0,05$ <sup>52</sup>.

t	$Z_t$	$\sigma_t$	$r_t$
0			0
1	0,558	0,032	0,0176
2	-0,385	0,039	-0,0131
3	0,568	0,036	0,0187
4	-1,594	0,040	-0,0546
5	-0,79	0,078	-0,0394
6	-1,269	0,059	-0,0535
7	0,986	0,076	0,0486
8	-1,368	0,068	-0,0639
9	-0,361	0,086	-0,0199
10	-0,156	0,039	-0,0054
11	0,161	0,032	0,0051
12	-0,935	0,032	-0,0298

Simulamos  $Z_t$  que suponemos que es un ruido blanco normal estandarizado. Posteriormente calculamos  $\sigma_t$  mediante la siguiente fórmula  $\sigma_t = \sqrt{0,001 + 0,05r_{t-1}^2}$  y posteriormente se obtiene  $r_t = \varepsilon_t = \sigma_t$ .

A modo de ejemplo para  $t=1$   $\sigma_1 = \sqrt{0,001 + 0,05 \cdot 0} = 0,032$  lo que multiplicada por la realización de la normal  $z_1$  {0,558} proporciona un valor del rendimiento de  $r_1 = 0,558 \cdot 0,032 = 0,0176$ .

---

<sup>52</sup> La simulación de los modelos GARCH puede realizarse mediante R empleando, por ejemplo, el paquete fGarch desarrollado por la Fundación Rmetrics. De esta forma se puede realizar este ejemplo mediante:

```
modelo = garchSpec(model = list(omega=0.001, alpha = c(0.05), beta = 0))
garchSim(modelo, n = 12, n.start = 0, extended = TRUE)
```

### El modelo ARCH (r)

El modelo ARCH(r) generaliza el ARCH(1) para permitir una dependencia de la varianza condicional con  $r$  retardos. De esta forma el proceso ARCH(r) vendrá dado por las siguientes dos ecuaciones<sup>53</sup>:

$$\begin{aligned} r_t &= \varepsilon_t = z_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r \varepsilon_{t-r}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r r_{t-r}^2 \end{aligned}$$

Este tipo de modelos establece una dependencia de tipo AR(r) entre los cuadrados de las observaciones, y tiene las mismas ventajas y desventajas que el modelo ARCH(1). Las características que se observan en una serie de rendimientos que sigue un proceso ARCH(r) son idénticas al caso del ARCH(1) excepto en que la ACF y la PACF de los rendimientos al cuadrado debe mostrar el patrón de un AR(r). En las series financieras es común necesitar un modelo ARCH de orden elevado para ajustar los datos, lo que ha llevado generalmente al empleo de los modelos GARCH.

### El modelo ARMA(p, q)- ARCH(r)

El proceso ARCH(r) carece de autocorrelación serial, característica que puede ser encontrada en las series temporales financieras. Sin embargo, en caso de que se detecte que los propios retardos de la variable  $r_t$  o de las innovaciones  $\varepsilon_t$  pueden explicar su comportamiento deben ser incorporados a la ecuación de la media. En este caso  $\sigma_t^2$  pasa a ser la varianza condicional del término de error del modelo que explica el comportamiento de  $r_t$ <sup>54</sup>. Es decir, para un AR(1)-ARCH(1) tendremos tres ecuaciones, donde la primera modeliza la media del proceso  $r_t$  como un proceso autorregresivo de primer orden:

<sup>53</sup> El modelo ARCH(1) supone que la ecuación primera o de la media carece de autocorrelación lo que vendría dado por ejemplo por los modelos AR(r)- ARCH(1). Al mismo tiempo que supone la imposibilidad de utilizar otras variables explicativas para su evolución temporal como los denominados modelos ARCHX.

<sup>54</sup> Lo mismo ocurre en el caso de incorporar otras variables explicativas como regresores. En este caso estaríamos hablando de modelos de regresión dinámica lineal con efectos ARCH(m) para  $k$  regresores  $\{x_k\}$  que pueden incluir retardos de la variable dependiente  $\{y_t\}$ , cuyas ecuaciones vendrían dadas por:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_k x_{t-k} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= z_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 \end{aligned}$$

De esta forma se obtiene lo que se denomina un modelo ARMAX-ARCH.

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1})^2$$

Donde el supuesto de que  $|\phi_1| < 1$  garantiza que el proceso es estacionario en media, mientras que su varianza condicional es positiva en todos los periodos mediante  $\alpha_0 > 0$  y  $\alpha_1 \geq 0$ .

Las características que se observan en una serie de rendimientos que sigue un proceso AR(1)-ARCH(1) son: en el gráfico de evolución temporal de los rendimientos deben apreciarse periodos de alta volatilidad y otros de menor volatilidad, en el histograma de los rendimientos se debe observar que la distribución tenga una alta curtosis, la ACF y la PACF de la serie de los rendimientos debe corresponderse con la de un AR(1), finalmente, la ACF y la PACF de los residuos al cuadrado del modelo después del ajuste AR debe mostrar el patrón semejante al de un AR(1).

El anterior modelo puede generalizarse a cualquier modelo de la familia ARMA, de forma que el modelo AR(p)-ARCH(r) vendría dado por:

$$r_t = \delta + \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_p r_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_r \varepsilon_{t-r}^2$$

---

**Ejemplo. Simular para los siguientes 12 periodos el siguiente modelo AR(1)-ARCH(1):**  
 $\delta = 0,1$ ;  $\phi_1 = 0,5$ ;  $\alpha_0 = 0,1$  y  $\alpha_1 = 0,5$ <sup>55</sup>.

Simulamos  $z_t$  que suponemos que es un ruido blanco normal estandarizado. Posteriormente calculamos  $\sigma_t$  mediante la siguiente fórmula  $\sigma_t = \sqrt{0,1 + 0,5(\sigma_{t-1} z_{t-1})^2}$  y posteriormente se obtiene  $r_t = 0,1 + 0,5 r_{t-1} + \varepsilon_t$ .

A modo de ejemplo para  $t=1$   $\sigma_1 = \sqrt{0,1 + 0,05 \cdot (0 \cdot 0)^2} = 0,316$  lo que multiplicado por la realización de la normal  $z_1$  (-0,334) proporciona un valor del error de  $\varepsilon_1 = -0,334 \cdot 0,316 = -0,109$ . Finalmente para calcular el rendimiento empleamos  $r_1 = 0,1 + 0,5 \cdot 0 + (-0,109) = -0,009$ .

---

<sup>55</sup> La simulación de modelos ARMA-GARCH puede realizarse en R mediante la función `garchSim` del paquete `fGarch` de `Rmetrics`.

t	$z_t$	$\sigma_t$	$r_t$
0			0
1	-0,344	0,316	-0,009
2	0,604	0,325	0,292
3	1,713	0,345	0,838
4	0,195	0,520	0,621
5	-0,495	0,324	0,250
6	1,177	0,336	0,620
7	0,531	0,422	0,634
8	0,744	0,354	0,680
9	0,822	0,367	0,742
10	-0,041	0,381	0,455
11	0,005	0,316	0,329
12	-0,415	0,316	0,133

### 1.3.2.2. El modelo GARCH

En las series financieras reales es frecuente que la especificación ARCH precise de un orden elevado para ajustar la estructura de autocorrelación en la varianza. Para evitar la estimación de este alto número de coeficientes que pueden conducir a una pérdida de precisión, se ha propuesto el empleo de los modelos GARCH. Un modelo GARCH o ARCH generalizado supone un proceso ARMA para los cuadrados de las observaciones.

#### *El modelo GARCH(1,1)*

El modelo GARCH(1,1) establece una estructura de dependencia ARMA(1,1) entre los cuadrados de las observaciones, y viene dado por dos ecuaciones. La primera hace depender a la variable  $r_t$  del valor de su volatilidad multiplicada por un cierto término aleatorio que es ruido blanco. La segunda, en donde además del término constante  $\alpha_0$ , se hace depender el valor actual de la varianza en el periodo  $t$  ( $\sigma_t^2$ ) de los valores que esta haya tenido en el momento anterior  $(t-1)$  (término GARCH) y de la fluctuación aleatoria (o rendimiento) en el momento anterior  $(t-1)$  (término ARCH). Por tanto, el modelo ARCH(1), puede verse como una simplificación del

modelo GARCH, es decir, sería un GARCH(1,0)<sup>56</sup>. Formalmente las ecuaciones del modelo GARCH(1,1) se escriben como:

$$r_t = \varepsilon_t = Z_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Siendo  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  coeficientes positivos y  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ . Debe apreciarse que en el caso de que el ruido blanco sea normal  $Z_t \sim N(0,1)$  y  $r_t \sim N(0, \sigma_t)$ . Esto es debido a que puede demostrarse que para un GARCH(1,1) la varianza marginal o incondicional es constante e igual a:  $\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$ . Lo que implica para que el proceso sea estacionario que  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ , siendo común para algunas series de rendimientos financieros que dicha suma denominada persistencia sea cercana a la unidad. En estas circunstancias se puede establecer el modelo IGARCH(1,1) o GARCH(1,1) integrado en donde  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$  lo que hace que un *shock* de la varianza condicional sea permanente.

El modelo GARCH(1,1) supone que un valor elevado de  $r_{t-1}^2$  da lugar a una mayor varianza en el periodo siguiente y el término  $\beta_1$  implica que la varianza cambie con cierta inercia, lo que produce rachas de mayor y menor variabilidad. Las ventajas de este modelo son su relativa sencillez (establece una dependencia de tipo ARMA(1,1) entre los cuadrados de las observaciones), y la capacidad de generar *clusters* de volatilidad y distribuciones con colas gordas. El modelo GARCH(1,1) conducirá a distribuciones con colas pesadas ya que el coeficiente de curtosis viene dado por  $\frac{3(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2)}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2}$ , lo que da valores superiores a 3. Sin embargo, tiene como desventaja que supone simetría entre los *shocks* positivos y negativos de los rendimientos.

Las características que se observan en una serie de rendimientos que sigue un proceso GARCH(1,1) son: en el gráfico de evolución temporal de los rendimientos deben apreciarse periodos de alta volatilidad y otros de menor volatilidad, en el histograma de los rendimientos se debe observar que la distribución tenga una alta curtosis, la ACF y la PACF de la serie de los rendimientos debe ser ruido blanco,

<sup>56</sup> En otros manuales se dice que es un GARCH(0,1). Aquí se emplea la notación empleada en la función `garchFit()` del paquete `fGarch` de R que actualmente emplea el término ARCH en primer lugar, de forma que un ARCH(1) será un GARCH(1,0).

finalmente, la ACF y la PACF de los rendimientos al cuadrado debe mostrar el patrón de un ARMA(1,1)<sup>57</sup>.

### Simulación

La simulación de un modelo GARCH(1,1) se realiza a partir de los parámetros estimados  $\hat{\alpha}_0$ ,  $\hat{\alpha}_1$  y  $\hat{\beta}_1$ , del error cometido en la estimación del modelo para el último periodo muestral  $\hat{\varepsilon}_T$ , que coincide con  $r_T$ , y de la volatilidad estimada por el modelo  $\hat{\sigma}_T$ . Es decir, suponemos que hemos estimado un modelo que ajusta a los rendimientos  $r_t$  para  $t = 1, \dots, T$  y el origen de la simulación es el primer periodo a partir del cual no tenemos datos muestrales ( $T + 1$ ). Dado el último valor de los rendimientos de la serie muestral  $r_T$ , y de  $\hat{\sigma}_T$ , la simulación o proyección de un posible valor para  $r_{T+1}$  se realiza como:

$$\hat{r}_{T+1} = \hat{z}_{T+1} \sqrt{\hat{\sigma}_{T+1}^2} = \hat{z}_{T+1} \sqrt{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 (r_T)^2 + \hat{\beta}_1 \hat{\sigma}_T^2}$$

Donde  $\hat{z}_{T+1}$  será una muestra de una normal estándar, u otra distribución alternativa (t de Student, GED, etc). La simulación para el periodo 2 se realiza a partir del valor simulado para el rendimiento y la volatilidad en el periodo uno, es decir:

$$\hat{r}_{T+2} = \hat{z}_{T+2} \sqrt{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 (\hat{r}_{T+1})^2 + \hat{\beta}_1 \hat{\sigma}_{T+1}^2}$$

Por lo que podemos referirnos a la simulación del valor en el periodo  $h$  u horizonte de simulación como:

$$\hat{r}_{T+h} = \hat{z}_{T+h} \sqrt{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 (\hat{r}_{T+h-1})^2 + \hat{\beta}_1 \hat{\sigma}_{T+h-1}^2}$$

---

<sup>57</sup> El modelo GARCH(1,1) puede escribirse como:  $r_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)r_{t-1}^2 - \beta_1(r_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) + (r_t^2 - \sigma_t^2)$ . Donde los dos últimos términos tienen esperanza condicional nula, por lo que este modelo es similar al ARMA(1,1). Esto lleva al hecho de identificar una estructura GARCH(1,1) es porque la ACF y la PACF de los cuadrados de los rendimientos  $\{r_t^2\}$  son las correspondientes a un proceso ARMA(1,1).

**Ejemplo. Simular para los siguientes 12 periodos el siguiente modelo GARCH(1,1):**

$$\alpha_0 = 0,001; \alpha_1 = 0,5 \text{ y } \beta_1 = 0,4.$$

Simulamos  $Z_t$  que suponemos que es un ruido blanco normal estandarizado. Posteriormente calculamos  $\sigma_t$  mediante la siguiente fórmula  $\sigma_t = \sqrt{0,001 + 0,5(\sigma_{t-1}z_{t-1})^2 + 0,4\sigma_{t-1}^2}$  y posteriormente se obtiene  $r_t = \sigma_t Z_t$ .

A modo de ejemplo para  $t=1$   $\sigma_1 = \sqrt{0,001 + 0,5 \cdot (0 \cdot 0)^2 + 0,4 \cdot 0} = 0,032$  lo que multiplicada por la realización de la normal  $Z_1$   $(-0,801)$  proporciona un valor del rendimiento de  $r_1 = -0,801 \cdot 0,032 = -0,025$ .

t	$z_t$	$\sigma_t$	$r_t$
0			0
1	-0,801	0,032	-0,025
2	0,568	0,041	0,024
3	-0,543	0,044	-0,024
4	1,000	0,046	0,046
5	-1,727	0,054	-0,092
6	0,479	0,080	0,038
7	0,501	0,066	0,033
8	0,516	0,057	0,029
9	0,281	0,052	0,010
10	-2,419	0,047	0,114
11	-0,036	0,091	-0,003
12	-1,335	0,066	-0,088

### El modelo GARCH(r, s)

El modelo GARCH(r, s) generaliza el modelo anterior estableciendo una estructura de dependencia ARMA(r, s) en los cuadrados de las observaciones de la serie. Este modelo viene dado por las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} r_t &= \varepsilon_t = z_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r r_{t-r}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_s \sigma_{t-s}^2 \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned}$$

Con las siguientes restricciones para que la varianza sea positiva  $\alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0, \sum_{i=1}^{\max(r,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ . En la práctica es difícil identificar estos procesos ya que la ACF y la PACF de los residuos al cuadrado del modelo deben mostrar un patrón semejante al de un ARMA(r, s). Sin embargo, es común que en la práctica un modelo de bajo orden proporcione un buen ajuste.

### Estimación GARCH(r,s)

La estimación de los modelos GARCH a una serie temporal univariante se realiza maximizando la función de verosimilitud mediante un proceso iterativo. La estimación de los modelos GARCH se realiza normalmente empleando el método de máxima verosimilitud condicional. Para ello se debe establecer un modelo para la media condicional (constantes, ARMA, etc.) y una especificación para la varianza. La función de densidad de un modelo GARCH en función del conjunto de parámetros a estimar y bajo la hipótesis base de que  $Z_t$  se distribuye normalmente, y dado que  $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ , es:

$$f(\boldsymbol{\theta}) = \prod_t \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right) = \prod_t \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{z_t^2}{2}\right)$$

Donde  $\sigma_t^2$  se evalúa recursivamente. Maximizar la función de verosimilitud es equivalente a maximizar su función logarítmica que vienen dada por:

$$\ln f(\boldsymbol{\theta}) = \sum_t \left( -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right) = -\frac{1}{2} \sum_t (\ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) + z_t^2)$$

Dado que el primer término no implica ningún parámetro a veces se maximiza la función:

$$\ln f(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_t \left( +\frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right) = -\frac{1}{2} \sum_t (\ln(\sigma_t^2) + z_t^2)$$

Donde  $\theta$  recoge a todos los parámetros que deben ser estimados iterativamente y  $t$  cada momento temporal. Normalmente se establecen como valores iniciales para

empezar la estimación los siguientes:  $\sigma_0^2$  como la varianza incondicional de la serie de rendimientos y para un GARCH(1,1)  $\alpha_1$  en 0,1,  $\beta_1$  en 0,8 y  $\alpha_0 = \sigma_0^2(1 - \alpha_1 - \beta_1)$ .

**Ejemplo.** A continuación se muestra un ejemplo de cómo se efectuaría la estimación de un modelo GARCH(1,1) para una hipotética serie de precios de un índice representada en la primera columna [A]. En la segunda [B] se calculan los rendimientos logarítmicos  $r_t$  a partir de la serie de precios, mientras que en la tercera [C] se elevan dichos rendimientos al cuadrado,  $r_t^2 = \varepsilon_t^2$ . En la cuarta [D], se especifica la fórmula de la varianza de un modelo GARCH(1,1), mientras que en la quinta [E] se establece el valor de  $\ln f(\theta)$  para cada observación.

El primer valor de la varianza de un modelo GARCH(1,1) 0,03% se establece generalmente a partir de la varianza incondicional de  $\varepsilon_t$  (columna B). La EMV calcula los valores de los parámetros  $\hat{\alpha}_0$ ,  $\hat{\alpha}_1$  y  $\hat{\beta}_1$  que maximizan la suma del valor de la columna E para todas las observaciones muestrales. Las restricciones a imponer en la maximización son que todos los parámetros sean mayores que cero y que la persistencia del modelo inferior a la unidad ( $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ ). La estimación del modelo IGARCH(1,1) sería idéntica fijando como restricción  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ .

[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
	$\text{LN}[A/A(-1)]$	$B^2$	$\alpha_0 + \alpha_1 * C(-1) + \beta_1 * D(-1)$	$-0.5 * (\text{LN}[2 * \pi] + \text{LN}(D) + C/D)$
100				
102	1,98%	0,04%	0,03%	2,47
103	0,98%	0,01%	0,03%	2,98
105	1,92%	0,04%	0,03%	2,52
106	0,95%	0,01%	0,03%	2,97
104	-1,90%	0,04%	0,03%	2,54
105	0,96%	0,01%	0,03%	2,94
106	0,95%	0,01%	0,04%	2,93
05	-0,95%	0,01%	0,04%	2,91
108	2,82%	0,08%	0,04%	1,97
106	-1,87%	0,03%	0,04%	2,56
109	2,79%	0,08%	0,04%	2,02
			Total	28,82

En aplicaciones prácticas, puede ser más apropiado asumir que  $Z_t$  siga distribuciones con colas más pesadas que la distribución normal. De esta forma, es común el empleo de la distribución estandarizada t de Student y la distribución GED.

La distribución t de Student puede ser obtenida por mixtura cuando la varianza de la distribución normal sigue una distribución gamma invertida. Sea  $x_v$  una distribución t de Student con  $\nu$  grados de libertad, también denominado parámetro de forma. De esta forma  $var(x_v) = \nu / (\nu - 2)$  para  $\nu > 2$  (necesario para que la distribución tenga media y desviación estándar). La función de densidad de la distribución t de Student estandarizada para  $z_t = x_v / \sqrt{\nu / (\nu - 2)}$  viene dada por<sup>58</sup>:

$$f(z_t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{z_t^2}{\nu-2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

Empleando que  $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ , obtenemos la distribución condicional de  $\varepsilon_t$  como:

$$f(\theta) = \prod_t \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{1}{\sigma_t} \left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

Finalmente se puede suponer que  $Z_t$  sigue una distribución GED cuya función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \frac{\nu}{\lambda_\nu 2^{1+1/\nu} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} e^{-\frac{1}{2}\left|\frac{x}{\lambda_\nu}\right|^\nu} \text{ con } \lambda_\nu = \left(\frac{2^{(-2/\nu)}\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)}\right)^{1/2}$$

donde  $0 < \nu \leq \infty$  es el denominado parámetro de forma de la distribución. La distribución GED se reduce a la distribución de Laplace para  $\nu = 1$ , para  $\nu = 2$  a la normal y para  $\nu \rightarrow \infty$  a la uniforme. En el caso de que  $\nu > 2$  la distribución GED tiene mayores colas que la distribución normal.

---

<sup>58</sup> Fijando el parámetro de localización en  $\mu = 0$  y de escala  $\sigma = \sqrt{\nu / (\nu - 2)}$  se obtiene la expresión de la distribución t de Student de un sólo parámetro. En la actualidad también se emplea la distribución t de Student asimétrica, que incorpora un parámetro de asimetría.

*El modelo ARMA(p, q)- GARCH(r, s)*

El proceso GARCH(r, s) carece de autocorrelación serial. Sin embargo, en caso de que se detecte que los propios retardos de la variable  $r_t$  o de las innovaciones  $\varepsilon_t$  pueden explicar su comportamiento deben ser incorporados a la ecuación de la media. En este caso  $\sigma_t^2$  pasa a ser la varianza condicional del término de error del modelo que explica el comportamiento de  $r_t$ <sup>59</sup>. Es decir, para un AR(1)-GARCH(1,1) tendremos tres ecuaciones, donde la primera modeliza la media del proceso  $r_t$  como un proceso autorregresivo de primer orden:

$$\begin{aligned} r_t &= \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= z_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Las características que se observan en una serie de rendimientos que sigue un proceso AR(1)-GARCH(1,1) son: en el gráfico de evolución temporal de los rendimientos deben apreciarse periodos de alta volatilidad y otros de menor volatilidad, en el histograma de los rendimientos se debe observar que la distribución tenga una alta curtosis, la ACF y la PACF de la serie de los rendimientos debe ser un AR(1), finalmente, la ACF y la PACF de los residuos al cuadrado del modelo después del ajuste en media debe mostrar un patrón semejante al de un ARMA(1,1).

El anterior modelo puede generalizarse a cualquier modelo de la familia ARMA(p, q) Por ejemplo, el modelo AR(p)-GARCH(r, s) vendría dado por:

$$\begin{aligned} r_t &= \delta + \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_p r_{t-p} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= z_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_r \varepsilon_{t-r}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_s \sigma_{t-s}^2 \end{aligned}$$

<sup>59</sup> Lo mismo ocurre en el caso de incorporar otras variables explicativas como regresores. En este caso estaríamos hablando de modelos de regresión dinámica lineal con efectos ARCH(m) para k regresores  $(x_k)$  que pueden incluir retardos de la variable dependiente  $(y_t)$ , cuyas ecuaciones vendrían dadas por:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 \end{aligned}$$

De esta forma se obtiene lo que se denomina un modelo ARMAX-ARCH.

**Ejemplo. Simular para los siguientes 12 periodos el siguiente modelo AR(1)-GARCH(1,1):**  
 $\delta = 0,001$ ;  $\phi_1 = 0,5$ ;  $\alpha_1 = 0,001$ ,  $\alpha_2 = 0,5$  y  $\beta_1 = 0,4$ .

Simulamos  $z_t$  que suponemos que es un ruido blanco normal estandarizado. Posteriormente calculamos  $\sigma_t$  mediante la siguiente fórmula  $\sigma_t = \sqrt{0,001 + 0,5(\sigma_{t-1}z_{t-1})^2 + 0,4\sigma_{t-1}^2}$  y finalmente se obtiene  $r_t = 0,001 + 0,5 r_{t-1} + \varepsilon_t$ .

A modo de ejemplo para  $t=1$   $\sigma_1 = \sqrt{0,001 + 0,05 \cdot (0 \cdot 0)^2 + 0,4 \cdot 0} = 0,032$  lo que multiplicada por la realización de la normal  $z_1(1,181)$  proporciona un valor de  $\varepsilon_1 = 0,038$ . Posteriormente se obtiene el rendimiento mediante  $r_1 = 0,001 + 0,05 \cdot 0 + 0,038 = 0,038$ .

t	$z_t$	$\sigma_t$	$r_t$
0			0
1	1,181	0,032	0,038
2	-2,173	0,046	-0,079
3	-0,997	0,082	-0,121
4	0,000	0,084	-0,059
5	0,026	0,062	-0,027
6	0,668	0,050	0,021
7	-0,480	0,051	-0,013
8	0,190	0,048	0,004
9	-0,401	0,044	-0,015
10	-0,329	0,044	-0,021
11	0,910	0,043	0,030
12	0,745	0,050	0,054

### 1.3.2.3. Modelos de volatilidad estocástica (SV)

Un procedimiento alternativo al de los modelos GARCH para modelizar la heterocedasticidad es suponer que la varianza condicional depende de valores no observados, dando como resultado los modelos de volatilidad estocástica o SV (*Stochastic Volatility*). Los modelos SV son modelos en los cuales hay un proceso no observado conocido como volatilidad que influencia directamente a la varianza de las series observadas. La ecuación estructural o de la media de estos modelos es idéntica a

los GARCH  $r_t = \varepsilon_t = \sigma_t z_t$  siendo  $z_t$  los errores que se distribuyen iid como una normal estándar. Sin embargo, a diferencia de los GARCH en donde la varianza depende de factores observables en los modelos SV depende de valores no observados, siguiendo habitualmente un proceso estocástico autorregresivo. En este sentido, en los modelos SV autorregresivos se supone que los logaritmos de las varianzas condicionadas siguen un proceso AR(p)<sup>60</sup>:

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \ln(\sigma_{t-i}^2) + \eta_t$$

Donde el término de error en este modelo  $\eta_t$  es iid  $N(0, \sigma_\eta^2)$  e independiente de  $Z_t$ , siendo  $\alpha_0$  una constante<sup>61</sup>. De esta forma el modelo SV(1) autorregresivo supone que los logaritmos de las varianzas condicionadas siguen un proceso AR(1), es decir:

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + \eta_t$$

De esta forma, llamando  $h_t = \ln \sigma_t^2$  la dinámica del modelo puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} r_t &= \exp(h_t/2)z_t \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \eta_t \end{aligned}$$

Donde  $h_t$  está normalmente distribuido (ya que si  $\eta_t$  es Normal  $\exp(h_t)$  es lognormal) y en múltiples aplicaciones empíricas se ha encontrado que  $\alpha_1$  está próximo a 1. Se puede demostrar que la curtosis de  $r_t$  viene dada por  $3\exp \sigma_h^2$  y como  $h_t$  es un proceso AR(1), su media viene dada por  $\alpha_0 / (1-\alpha_1)$  y su varianza por  $\sigma_h^2 = \frac{\sigma_\eta^2}{1-(\alpha_1)^2}$ , por lo que al igual que los modelos GARCH generan mayor curtosis que la distribución normal. La principal diferencia entre los modelos GARCH y SV es que los últimos tiene términos de error en la ecuación de la media y la varianza,  $z_t$  y  $\eta_t$ , lo cual impide la observación directa del proceso de varianza. Los modelos GARCH son deterministas en el sentido de que la ecuación de la media tiene un sólo término de perturbación y que su variación se modeliza en forma condicional sobre la información conocida en  $t-1$ , por lo que se puede observar en el tiempo  $t$ .

<sup>60</sup> Este es el tipo de modelos SV más conocidos y que se denominan modelo SV lognormal.

<sup>61</sup> La Academia Americana de Actuarios (AAA, 2005) ha propuesto un modelo de volatilidad estocástica lognormal (*Stochastic Log-Volatility o SLV*) para un determinar el capital basado en el riesgo de las compañías aseguradoras de vida.

### Estimación y simulación modelos SV

La menor popularidad de los modelos SV respecto a los GARCH deriva de la dificultad de estimación de los parámetros de estos modelos, dado que  $r_t$  depende no linealmente de  $h_t$ . Esto ocasiona que los modelos no puedan ser estimados por máxima verosimilitud como los modelos GARCH sino que deben emplearse métodos como: cuasi-máximo verosimilitud, máximo verosimilitud simulada, etc. Bos (2011) proporciona una revisión de los distintos métodos para la estimación de los modelos SV.

**Ejemplo. Simular el modelo SVAR(1) dado por los siguiente parámetros  $\alpha_0 = 0,001$ ;  $\alpha_1 = 0,95$  y  $\sigma_\eta^2 = 0,05$ .**

En primer lugar simulamos dos series de normales independientes donde  $z_t$  es  $N(0,1)$  y  $\eta_t$  es  $N(0, \sigma_\eta^2)$ . Posteriormente se calcula  $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \eta_t$  y finalmente  $r_t = \exp(h_t/2)z_t$ .

A modo de ejemplo para  $t=1$  y dadas las realizaciones de la normal  $z_1 (0,826)$  y  $\eta_1 (0,025)$  se calcula  $h_1 = 0,001 + 0,95 \cdot 0 + 0,025 = 0,026$ , por lo que finalmente  $r_1 = \exp(0,026/2) \cdot 0,826$ .

t	$z_t$	$\eta_t$	$h_t$	$\exp(h_t/2)$	$r_t$
0					0,000
1	0,826	0,025	0,026	1,013	0,837
2	-0,005	0,314	0,340	1,186	-0,006
3	-1,521	-0,006	0,319	1,173	-1,783
4	-0,216	-0,109	0,194	1,102	-0,238
5	-0,201	0,096	0,282	1,151	-0,232
6	1,528	0,119	0,388	1,214	1,855
7	1,417	0,189	0,559	1,322	1,873
8	0,827	-0,092	0,440	1,246	1,030
9	-0,559	-0,553	-0,134	0,935	-0,523
10	0,770	-0,219	-0,346	0,841	0,648
11	2,092	-0,301	-0,628	0,731	1,529
12	-0,561	0,303	-0,293	0,864	-0,485

### 1.3.3.4. Otros modelos de heterocedasticidad condicional

Los modelos GARCH y SV recogen adecuadamente los agrupamientos de volatilidades y la curtosis de la distribución de los rendimientos financieros, pero tienen como desventaja que son simétricos. De esta forma la varianza condicional depende del tamaño de las innovaciones retardadas pero no de su signo. Para incorporar los denominados efectos apalancamiento (*leverage effect*) observados en la series financieras se han propuesto una amplia gama de modelos asimétricos. En este apartado realizamos una revisión de otros modelos de heterocedasticidad condicional entre los que se encuentran muchos modelos asimétricos. Una revisión más exhaustiva es proporcionada por de Arce (2004).

#### *Modelo ARCH en media o ARCH-M y modelos SV en media*

Este modelo se plantea para comprobar si los rendimientos financieros dependen o no de la varianza heterocedástica ( $\sigma_t^2$ )<sup>62</sup>, lo que sugeriría que la rentabilidad aumenta con el nivel de riesgo. A modo de ejemplo, la ecuación para un GARCH(1,1)-M vendría dada por:

$$\begin{aligned}r_t &= \phi_0 + \delta\sigma_t^2 + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= z_t\sigma_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2\end{aligned}$$

Como se aprecia en la primera ecuación anterior se incluye  $\sigma_t^2$  en la ecuación de la media como variable explicativa y se analiza si su parámetro  $\delta$  es estadísticamente significativo o no. En el caso de que sea significativo, la volatilidad condicionada del proceso influye sobre los rendimientos. Los modelos ARCH en media pueden ser aplicados a cualquier clase de modelos GARCH (simétricos y asimétricos). Koopman y Uspensky (2002) proponen el modelo de volatilidad estocástica en media (SVM) que incorpora la volatilidad inobservada como uno de los determinantes de la media, por lo que se considera como el modelo SV equivalente al modelo ARCH-M de Engle et ál. (1987).

---

<sup>62</sup> Se puede establecer que sea la varianza, la desviación típica o el logaritmo de la varianza las que influyan sobre la media. En la expresión empleada en este texto hemos optado por la varianza.

### *Modelo GARCH exponencial o EGARCH*

El modelo EGARCH propuesto por Nelson (1991) es uno de los modelos de heterocedasticidad condicional asimétricos más empleado. En este modelo la varianza condicional es una función asimétrica de las perturbaciones retardadas. A modo de ejemplo, el modelo EGARCH (1,1) viene dado frecuentemente por la siguiente expresión:

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \left( \theta \frac{|z_{t-1}^2|}{\sigma_{t-1}} - E \left( \frac{|z_{t-1}^2|}{\sigma_{t-1}} \right) \right) + \beta_1 \ln \sigma_{t-1}^2$$

El modelo general EGARCH(p, q) establece que el  $\ln \sigma_t^2$  sigue un proceso ARMA (p,q).

### *Modelo GJR-GARCH*

El modelo GJR- GARCH (Glosten et ál., 1993) implica:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 (|\varepsilon_{t-1}| - \gamma_1 \varepsilon_{t-1})^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Existe una amplia gama de modelos GARCH asimétricos como los modelos TS-GARCH, NARCH o ARCH no lineal, AGARCH, QARCH o ARCH cuadrático, NAGARCH o GARCH no lineal asimétrico, TARCH o Threshold ARCH, GJR-GARCH o el APARCH (*Asymmetric Power Arch*). Además se han producido desarrollos en las mezclas de modelos ARCH (MARCH) o en los modelos ARCH de cambio de régimen (*Regimen Switching* ARCH o RS ARCH) donde los parámetros del modelo ARCH cambian a partir de una matriz de “estado” o “régimen” de Markov.

### *Modelos tipo GARCH implantados en R, Eviews y TSM*

El paquete egarch de R proporciona funciones para la estimación y simulación de modelos EGARCH(p, q) con distribuciones normal o GED para los errores. El paquete fGarch de R desarrollado por Rmetrics incorpora los modelos APARCH. Los

modelos APARCH, introducidos por Ding et ál. (1993) generalizan o incluyen los modelos ARCH y GARCH y otras extensiones como casos especiales: el modelo TS-GARCH de Taylor (1986) y Schwert (1989), el GJR-GARCH de Glosten et ál. (1993), el T-ARCH de Rabemananjara y Zakoian (1993), el N-ARCH de Higgins y Bera (1992) y el modelo Log-ARCH de Geweke (1986) y Pentula (1986). Otro paquete recomendado es el rugarch.

El modelo APARCH añade flexibilidad de forma que permite variar el exponente  $\delta$  con un coeficiente asimétrico que considera el efecto apalancamiento:

$$r_t = \varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|r_{t-i}| - \gamma_i r_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta$$

En el siguiente cuadro se recogen las simplificaciones realizadas por cada modelo sobre el modelo APARCH y la forma de estimación en R empleando el paquete fGarch.

Se supone que “r” recoge nuestra serie de rendimientos  $r_t = \varepsilon_t$ . Sin embargo, dicho paquete permite realizar la estimación de un modelo ARMA-APARCH. Por ejemplo, en el caso de que “r” sea nuestra serie de rendimientos para la estimación de un modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) realizaríamos simplemente:

```
garchFit(~arma(1,1)+garch(1,1), r)
```

Modelo	$\delta$ (delta)	$\gamma_i$ (leverage)	$\beta_i$	R
ARCH(p)	2	0	0	garchFit( ~garch(p,0), r) o bien garchFit( ~aparch(p,0), r,delta = 2, include.delta = FALSE, leverage = FALSE)
GARCH(p, q)	2	0		garchFit( ~garch(p,q), r) o bien garchFit( ~aparch(p,q), r,delta = 2, include.delta = FALSE, leverage = F LSE)
TS-GARCH(p, q)	1	0		garchFit( ~aparch(p,q), r,delta = 1, include.delta = FALSE, leverage = FALSE)
GJR-GARCH(p, q)	2			garchFit( ~aparch(p,q), r,delta = 2, include.delta = FALSE)
T-ARCH(p, q)	1			garchFit( ~aparch(p,q), r,delta = 1, include.delta = FALSE)
N-ARCH(p)		0	0	garchFit( ~aparch(p,0), r, leverage = FALSE)

Estas funciones permiten incorporar modelos ARMA en la media, pero no así regresores exógenos. Además permite múltiples funciones de distribución para las perturbaciones (normal, t de Student, GED, etc.). Otro paquete útil para la estimación de este tipo de modelos es el *rugarch*.

El *software* Eviews permite actualmente la estimación de modelos GARCH, TARCH, PARCH y EGARCH con distribuciones para las perturbaciones normal, t de Student y GED. El *software* TSM permite la estimación de modelos GARCH, APARCH y EGARCH con distribuciones para las perturbaciones normal, t de Student (simétrica y asimétrica) y GED.

A continuación analizaremos una serie temporal con distintos programas estadísticos, para analizar las principales funcionalidades de los mismos.

---

## Ejemplo del análisis de series temporales en R

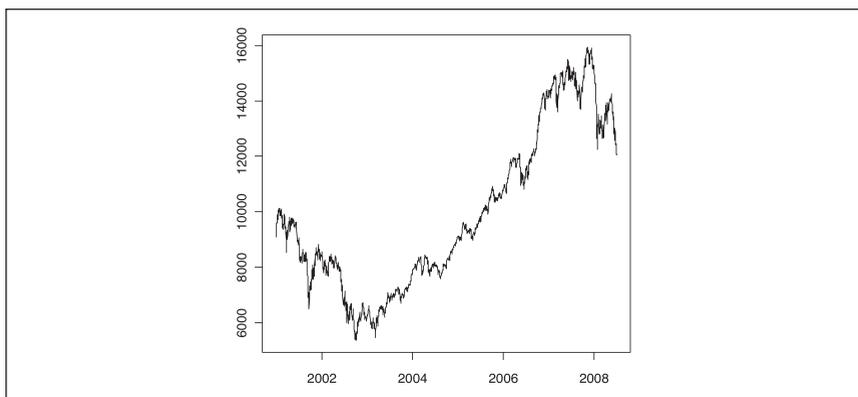
A continuación se analiza la serie histórica diaria de los precios de cierre del IBEX35 desde 01/01/2001 a 30/06/2008 empleando el *software* estadístico R con fuente <http://es.finance.yahoo.com/>. Esta base de datos ha sido empleada porque el paquete *tseries* permite la descarga de datos a partir de la función `get.hist.quote()`. Es decir cargaremos el paquete en la consola de R y llamaremos a dicha función:

```
library(tseries)
```

```
x <- get.hist.quote(instrument = "^IBEX", quote = c("AdjClose"),compression="d", start =  
"2001-01-01", "2008-06-30")
```

Si quisiésemos emplear datos mensuales pondríamos `compression="m"`. En caso de querer cargar unos datos que tenemos en un fichero de texto, Excel, Access o similar, la tarea se realiza fácilmente con el R Commander mediante Datos- Importar Datos seleccionando el tipo de archivo y su localización. A continuación realizamos un gráfico de evolución temporal del índice:

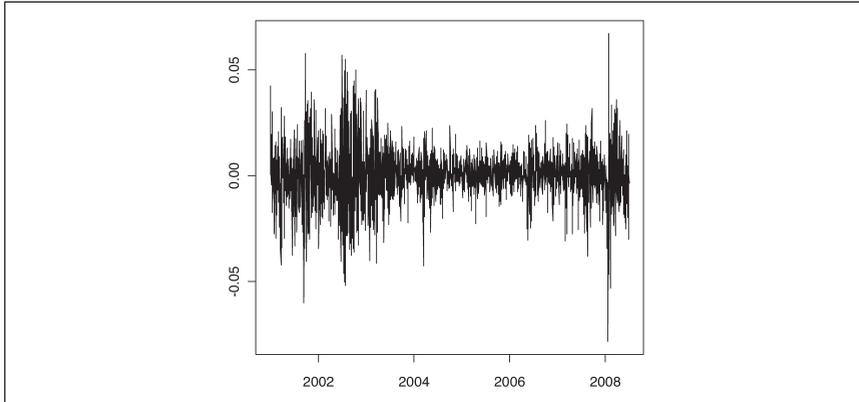
```
plot(x,xlab=" ",ylab=" ")
```



Como la serie inicial no es estacionaria se procede a aplicar la primera diferencia del logaritmo para conseguir los rendimientos logarítmicos  $r_t$  o aplicar la función `returns()` del paquete *fSeries*.

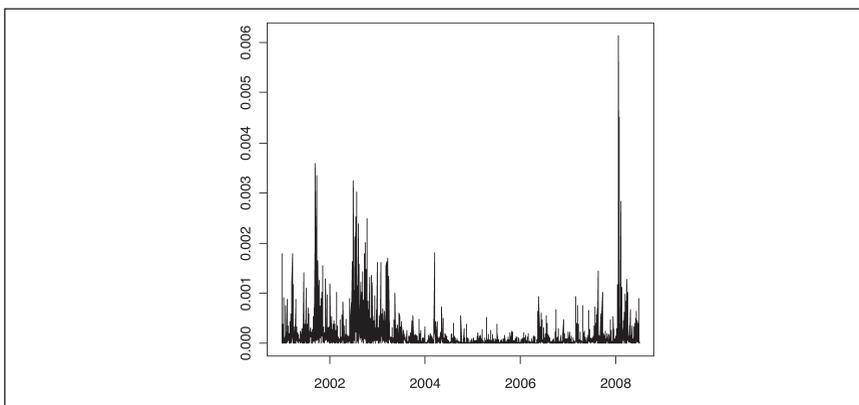
$r = \text{diff}(\log(x))$

`plot(r,xlab="",ylab="",t="l")`



Analizando la evolución temporal del IBEX35 a lo largo de este periodo se observa que los rendimientos son estacionarios en media, pero presentan clusters o agrupamientos de volatilidad. Es decir, han existido periodos en los que la dispersión de los rendimientos o volatilidad es mayor y otros en los que la dispersión es menor. Por esta razón, es importante determinar cuál es el modelo que mejor se ajusta al comportamiento de la varianza a lo largo del tiempo. Las mismas conclusiones se obtienen del gráfico de los rendimientos logarítmicos al cuadrado:

`plot(r^2,t="l",xlab="",ylab="")`



Es útil observar los principales estadísticos descriptivos de la serie para ello el paquete fBasics contiene la basicStats().

*library(fBasics)*

*basicStats(r)*

	AdjClose
nobs	1888.000000
NAs	0.000000
Minimum	-0.078393
Maximum	0.067222
1, Quartile	-0.006298
3, Quartile	0.006813
Mean	0.000150
Median	0.000749
Sum	0.282653
SE Mean	0.000299
LCL Mean	-0.000437
UCL Mean	0.000736
Variance	0.000169
Stdev	0.013000
Skewness	-0.101800
Kurtosis	3.060783

Como se observa el valor medio de la rentabilidad es de 0,01% diaria con una desviación típica del 1,30%. Los rendimientos muestran una asimetría negativa (-0,102) y un exceso de curtosis (3,061 frente al valor de 0 que asignaría esta función a la distribución normal). Podemos analizar la normalidad de los rendimientos mediante el test de Jarque Bera.

*jarqueberaTest(r)*

*Test Results:*

*STATISTIC:*

*X-squared: 743.3441*

*P VALUE:*

*Asymptotic p Value: < 2.2e-16*

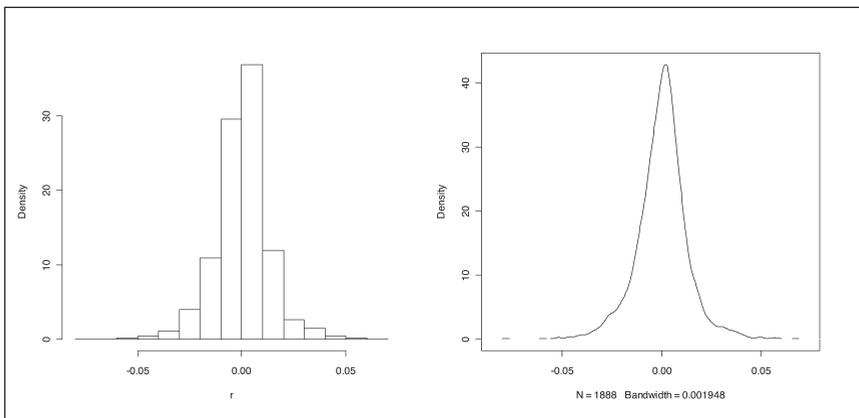
Debemos recordar que la regla de decisión de dicho test es rechazar la hipótesis nula  $H_0$  de distribución normal si  $|Q| > \chi_2^2(\alpha)$  o de forma análoga si el p-valor es menor que  $\alpha$ . Para un nivel  $\alpha$  de 0,05 o nivel de confianza del 95% se rechaza la hipótesis nula  $H_0$  de normalidad.

El paquete fBasics proporciona un amplio conjunto de test para verificar la normalidad o no de la serie. Dichas funciones y una breve explicación de las mismas se proporciona en la siguiente tabla:

ksnormTest	Test de Kolmogorov-Smirnov
shapiroTest	Test de Shapiro-Wilk
dagoTest	Test de D'Agostino
adTest	Test de Anderson-Darling
cvmTest	Test de Cramer-von Mises
lillieTest	Test de Lilliefors
pchiTest	Test Chi cuadrado
sfTest	Test de Shapiro-Francia

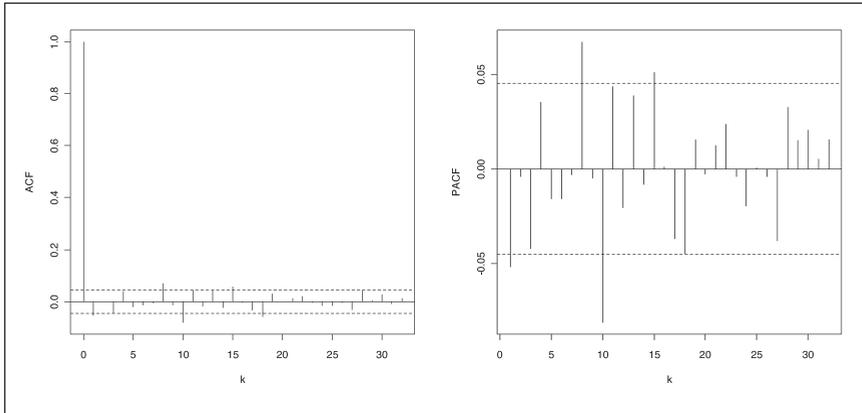
Una prueba visual para confirmar que los rendimientos no son normales podríamos hacer el histograma de los rendimientos y el gráfico de densidad.

```
r=ts(r)
hist(r;freq=FALSE,main="")
plot(density(r),main="")
```



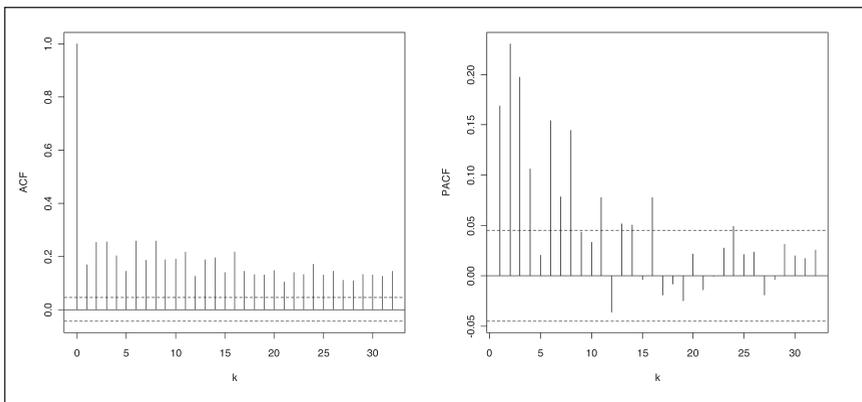
La ACF y la PACF de los rendimientos muestra cierta estructura existiendo varios coeficientes estadísticamente distintos de cero:

```
acf(r,main="",xlab="k")
pacf(r,main="",ylab="PACF",xlab="k")
```



La ACF y la PACF de los rendimientos al cuadrado muestran una fuerte estructura de dependencia (muchos coeficientes distintos de cero)

```
acf(r^2,main="",xlab="k")
pacf(r^2,main="",ylab="PACF",xlab="k")
```



De este análisis gráfico deducimos que:

- Los rendimientos logarítmicos son una serie estacionaria en media sin embargo, se producen agrupamientos o concentraciones de volatilidad, es decir, momentos del tiempo con alta volatilidad y otros donde la volatilidad es menor.
- En la ACF y PACF de las rentabilidades se observa cierta estructura entre las observaciones de las rentabilidades del Ibex 35 en los diferentes desfases o retardos temporales.
- Observando las ACF y PACF de los cuadrados de las rentabilidades se aprecian valores significativos, lo que implica dependencia en la varianza.

Los modelos de heterocedasticidad condicional GARCH suponen que, aunque la varianza incondicional es constante, la varianza condicionada a los valores pasados de la serie no es constante ya que depende de los valores previos. Dichos modelos son buenos candidatos para modelizar la anterior serie.

Podemos realizar el test ARCH-LM para detectar la posible presencia de procesos ARCH. Para ello podemos emplear la función `ArchTest ()` del paquete `FinTS`.

```
library(FinTS)
```

```
ArchTest (r,1)
```

```
ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects
```

```
data: r
```

```
Chi-squared = 53.7158, df = 1, p-value = 2.317e-13
```

El test ARCH-LM para un retardo detecta la presencia de un proceso ARCH(1) ya que el p-valor asociado al estadístico es menor que  $\alpha$ . En caso de testar retardos mayores el test también rechaza la hipótesis nula, por lo que parece apropiado el ajuste de la serie un modelo GARCH. En el cuadro inferior se muestran las fórmulas que emplea el paquete `fGarch` para los modelos ARCH y GARCH.

ARCH	garchFit( ~garch(p,0), r)
	garchFit( ~aparch(p,0), r,delta = 2, include.delta = FALSE, leverage = FALSE)
GARCH	garchFit( ~garch(p,q), r)
	garchFit( ~aparch(p,q), r,delta = 2, include.delta = FALSE, leverage = FALSE)

Además se le pueden añadir efectos ARMA. A modo de ejemplo, ajustaremos un modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) a la serie de rendimientos del Ibex y realizaremos un diagnóstico del mismo empleando la función `summary()`.

```
library(fGarch)
ec1=garchFit(~arma(1,1)+garch(1,1), r)
summary(ec1)
```

*Error Analysis:*

	<i>Estimate</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t value</i>	<i>Pr(&gt; t )</i>
<i>Mu</i>	1,20E-01	7,30E-02	1.648	0.099414
<i>ar1</i>	8,33E+02	8,96E+01	9.296	< 2e-16 ***
<i>ma1</i>	-8,49E+02	8,58E+01	-9.899	< 2e-16 ***
<i>Omega</i>	2,12E-03	6,11E-04	3.463	0.000534 ***
<i>alpha1</i>	9,81E+01	1,58E+01	6.230	4.67e-10 ***
<i>beta1</i>	8,90E+02	1,71E+01	52.031	< 2e-16 ***

*Signif. codes:* 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

*Log Likelihood:*

5840.644 *normalized:* 3.093561

*Standardised Residuals Tests:*

			<i>Static</i>	<i>p-Value</i>
<i>Jarque-Bera Test</i>	<i>R</i>	<i>Chi^2</i>	2.675.226	0
<i>Shapiro-Wilk Test</i>	<i>R</i>	<i>W</i>	0.9849462	3,41E-07
<i>Ljung-Box Test</i>	<i>R</i>	<i>Q(10)</i>	1.252.434	0.2514948
<i>Ljung-Box Test</i>	<i>R</i>	<i>Q(15)</i>	2.038.642	0.1576049
<i>Ljung-Box Test</i>	<i>R</i>	<i>Q(20)</i>	2.301.979	0.2878241
<i>Ljung-Box Test</i>	<i>R^2</i>	<i>Q(10)</i>	2.330.774	0.009665931
<i>Ljung-Box Test</i>	<i>R^2</i>	<i>Q(15)</i>	3.021.466	0.01117055
<i>Ljung-Box Test</i>	<i>R^2</i>	<i>Q(20)</i>	3.611.158	0.01492306
<i>LM ARCH Test</i>	<i>R</i>	<i>TR^2</i>	2.635.097	0.009570725

*Information Criterion Statistics:*

<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>SIC</i>	<i>HQIC</i>
-6.180767	-6.163151	-6.180787	-6.174280

La función `summary(garchFit)` nos proporciona diversa información:

- La significatividad de los parámetros de la ecuación a partir del estadístico *t* y el *p*-valor asociado al mismo. Se aprecia como el término constante en la ecuación de la media (denominado por el programa *Mu*) no es significativo al 95% de confianza.
- El valor de la función de log verosimilitud y su valor normalizado que se obtiene dividiendo el anterior por el número de observaciones (en nuestro ejemplo 1.888).
- El test de Jarque-Bera y Shapiro-Wilk para verificar la normalidad de los residuos. Ambos test rechazan la hipótesis nula de normalidad de los residuos por lo que el modelo está infra especificado. Las posibles soluciones serían probar con otras especificaciones del modelo o suponer que el ruido blanco del proceso no es normal y ajustarlo por ejemplo a una distribución GED.
- El test Ljung-Box para verificar si los residuos y sus cuadrados tienen autocorrelaciones significativas o no. Se acepta la hipótesis nula del test para los retardos 10, 15 y 20 de que no existe autocorrelación para órdenes no superiores a *m* en el caso de los residuos, pero se rechaza para los residuos al cuadrado. Esto indicaría que no se están recogiendo bien los efectos en la varianza condicional.
- El test ARCH-LM, que sirve para comprobar si los residuos tienen heterocedasticidad condicional o no, detecta la presencia de procesos ARCH en los residuos.
- Los principales criterios de información basados en la función de verosimilitud.

Además se puede producir salidas gráficas con la función `plot(garchFit)` que en función del número que introduzcamos nos permite hacer diversos gráficos: la ACF de los residuos estandarizados y su cuadrado, o el gráfico QQ de los residuos, entre otros.

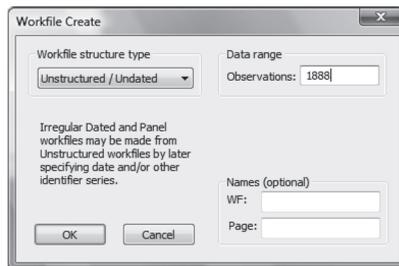
*plot(ec1)*

---

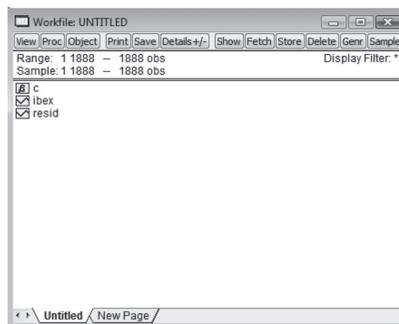
---

## Ejemplo del análisis de series temporales en Eviews 6.0

Se analiza nuevamente la misma serie histórica diaria de los precios de cierre del IBEX35 desde 01/01/2001 a 30/06/2008. Para ello debemos crear un nuevo archivo (*File-New-Workfile*) y seleccionaremos dentro del tipo de estructura del archivo (Undated) e introduciremos las 1.888 observaciones que tiene la serie. De forma alternativa podríamos especificar que es una serie temporal diaria con 5 observaciones semanales, pero posteriormente tendríamos que haber tratado los festivos.

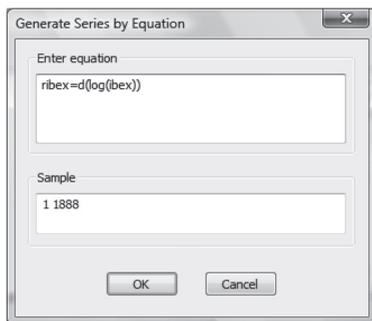


Posteriormente importamos los datos desde el tipo de extensión en la que tengamos guardado los datos (*File-Import*) especificando la ubicación del archivo. A la serie de precios le ponemos el nombre *ibex*, por lo tanto en el archivo debemos tener las siguientes series: *c*, *ibex* y *resid*.

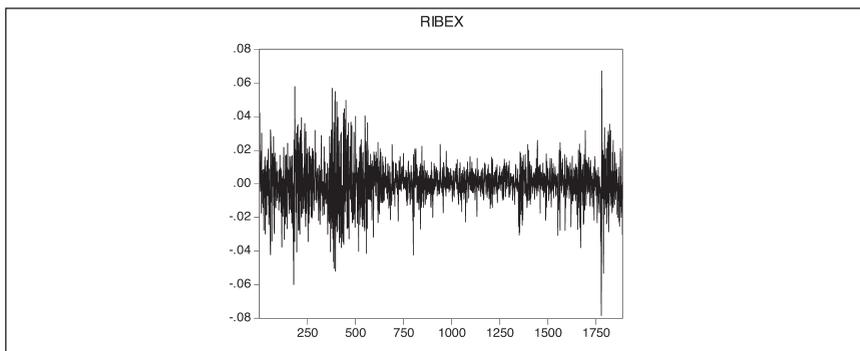


Para obtener los rendimientos logarítmicos debemos ir a Genr e introducir la siguiente ecuación:

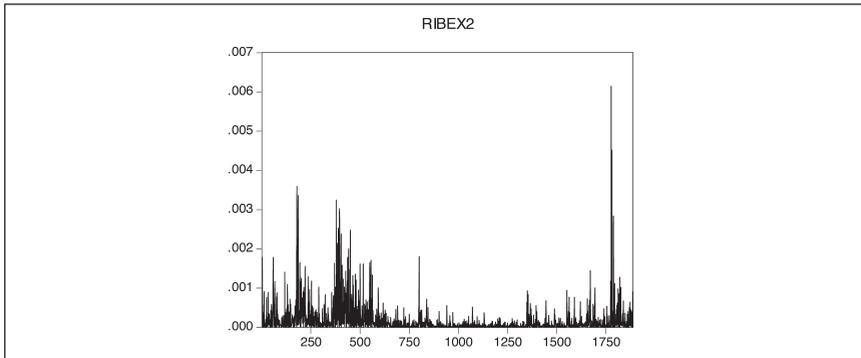
$$ribex=d(\log(ibex))$$



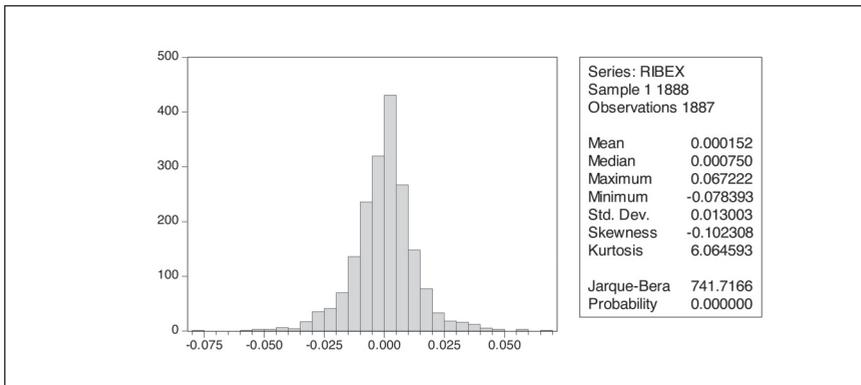
Apareciendo ahora en la pantalla del archivo la nueva serie de rendimientos logarítmicos. Para hacer un gráfico temporal se realiza doble clic sobre la serie ribex y se selecciona (*View-Graf*) con las opciones deseadas. Para realizar un gráfico de evolución temporal debe seleccionarse *Line & Symbol* (opción marcada por defecto), pero pudiera realizarse otro tipo de gráficos como por ejemplo un gráfico QQ (*Quantile-Quantile*).



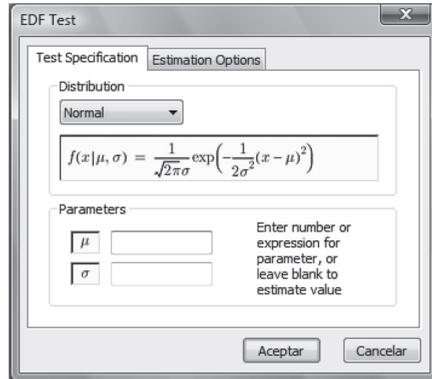
Para obtener el gráfico de los rendimientos logarítmicos al cuadrado es útil generar, como ya se explicó anteriormente con *Genr*, la serie  $ribex2=ribex^2$ . El gráfico se obtendría nuevamente mediante *View-Graf*.



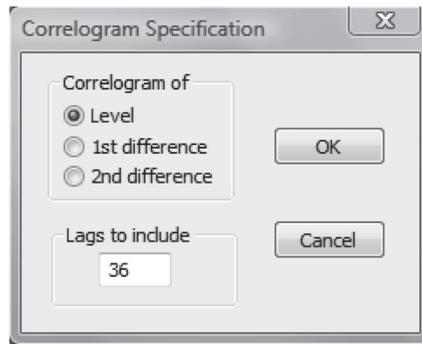
Los estadísticos descriptivos de la serie y el histograma se obtendrían seleccionando la serie ribex (*View-Descriptive Stats & Test-Histogram and Stats*). Los resultados se muestran a continuación:



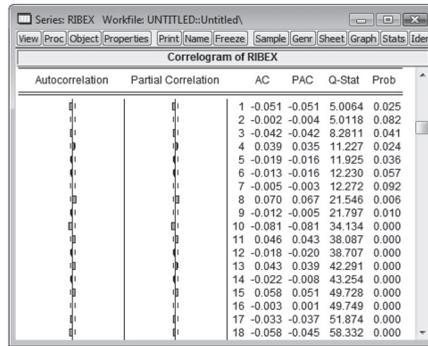
Además pueden realizarse otros test para verificar la normalidad o no de la serie. Para ello acudimos a *View-Descriptive Stats & Test- Empirical Distribution Test* y seleccionamos la distribución Normal dejando en blanco los parámetros de media y desviación que son calculados automáticamente por el programa. Los test empleados son el Test de Lilliefors, Cramer-von Mises, Watson y Anderson-Darling.



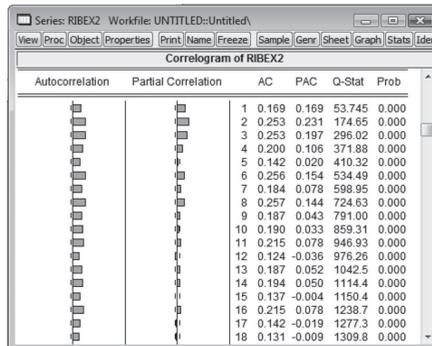
La ACF y la PACF se obtiene para los rendimientos seleccionando la serie ribex (View-Correlogram) seleccionándose la opción en niveles y el número de retardos deseados.



A continuación se muestra la salida del programa, en donde se aprecia el valor de la ACF y PACF, el valor del estadístico Q y su p-valor para cada uno de los retardos.



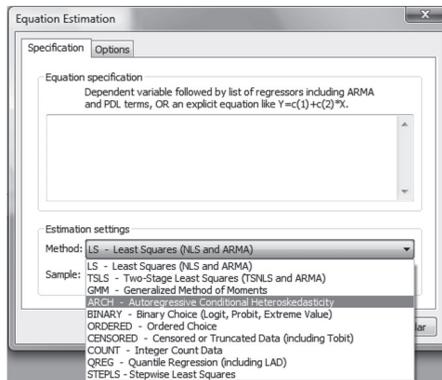
La ACF y la PACF de los rendimientos al cuadrado se obtiene seleccionando la serie *ribex2* (*View-Correlogram*).



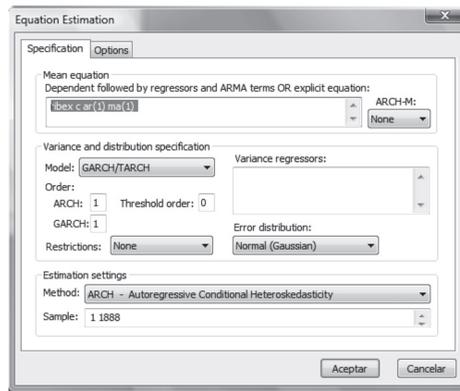
Para la estimación de cualquier modelo en Eviews debe seleccionarse *Quick-Estimate Equation*. Nuevamente ajustaremos un modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) a la serie de rendimientos del Ibx. Para ello debemos seleccionar en método de estimación la opción ARCH e introducir en la ecuación de la media:

*ribex c ar(1) ma(1)*

Donde *ribex* hace referencia a la serie que queremos estimar, *c* al término de constante en el modelo y *ar(1) ma(1)* a que el modelo deseado es un ARMA(1,1).



Posteriormente se seleccionará el modelo para la varianza y el tipo de distribución para los términos de error (el modelo GARCH(1,1) y la hipótesis de normalidad se muestran por defecto).

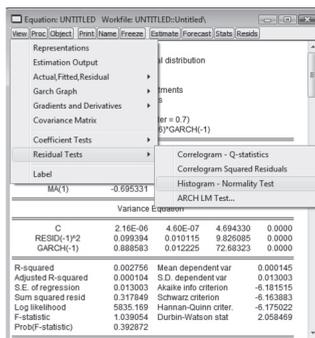


Los resultados obtenidos se muestran a continuación, siendo similares a la función fGarch de R. La diferencia en la notación es que R llama alpha1 a lo que Eviews llama parámetro asociado a GARCH(-1) y beta1 al parámetro asociado a RESID(-1)^2.

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000722	0.000218	3.310646	0.0009
AR(1)	0.673021	0.283422	2.374623	0.0176
MA(1)	-0.695331	0.274031	-2.537419	0.0112
Variance Equation				
C	2.16E-06	4.60E-07	4.694330	0.0000
RESID(-1)^2	0.099394	0.010115	9.826085	0.0000
GARCH(-1)	0.888583	0.012225	72.68323	0.0000
R-squared	0.002756	Mean dependent var	0.000145	
Adjusted R-squared	0.000104	S.D. dependent var	0.013003	
S.E. of regression	0.013003	Akaike info criterion	-6.181515	
Sum squared resid	0.317849	Schwarz criterion	-6.163883	
Log likelihood	5835.169	Hannan-Quinn criter.	-6.175022	
F-statistic	1.039054	Durbin-Watson stat	2.058469	
Prob(F-statistic)	0.392872			

El diagnóstico del modelo se realiza desde la propia ecuación en la pestaña *View*. En donde realizar, entre otros:

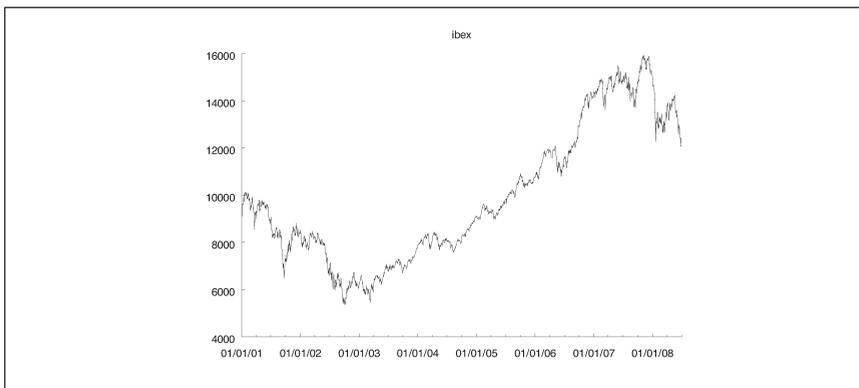
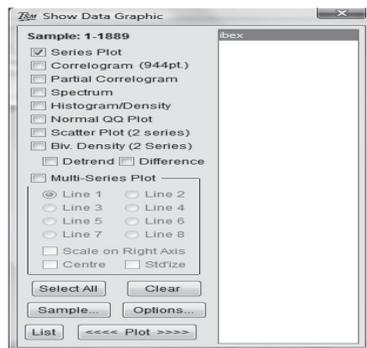
- Análisis de los residuos en *Actual, Fitted, Residual*.
- Gráficos de la varianza o volatilidad GARCH en cada periodo en GARCH Graf.
- Test de los residuos en *Residual Test* (Correlograma de los residuos y de sus cuadrados, histograma y normalidad de los mismos, test ARCH LM). En el gráfico inferior se muestran estas cuatro opciones.



---

### Ejemplo del análisis de series temporales en Time Series Modelling 4.32<sup>63</sup>

A continuación se analiza la serie histórica diaria de los precios de cierre del Ibex 35 desde 01/01/2001 a 30/06/2008 empleando el *software* Time Series Modelling 4.32. Para cargar los datos debemos ir a la pestaña *File- Data- Open* y seleccionar la ubicación del archivo. Para mostrar el gráfico de evolución temporal debemos ir a la pestaña *Graphics- Show Data Grafic*, seleccionar la serie *ibex* y la opción *Series Plot*.

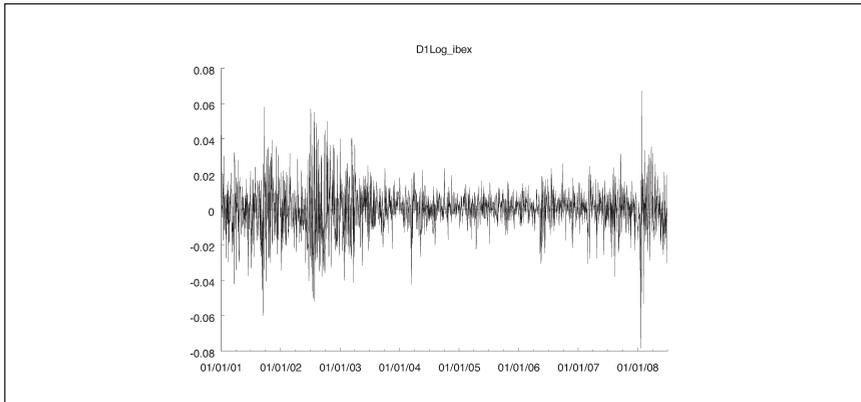


Para obtener los rendimientos logarítmicos  $r_t$  debemos ir a *Setup- Data Transformation and Editing*. Una vez seleccionada la serie *ibex* debe transformarse mediante *Transform* y seleccionar *Log-Difference*, seleccionándole por defecto a la misma el nombre *D1Log\_*

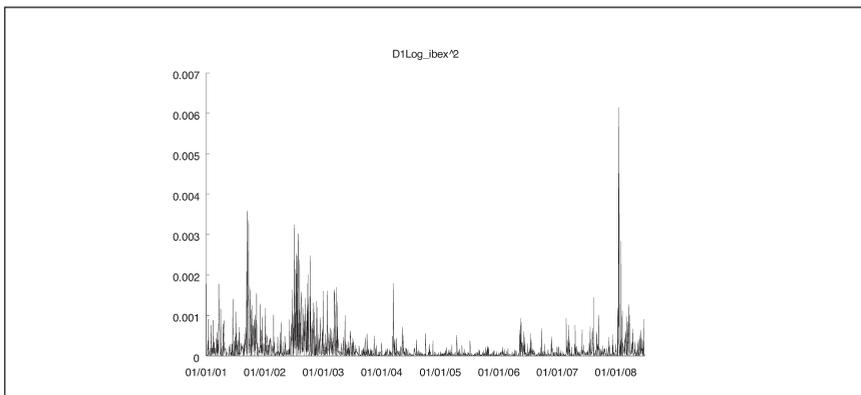
---

<sup>63</sup> Time Series Modelling (TSM) es un programa creado por James Davidson que funciona bajo un entorno Ox. Véase <http://www.timeseriesmodelling.com/>

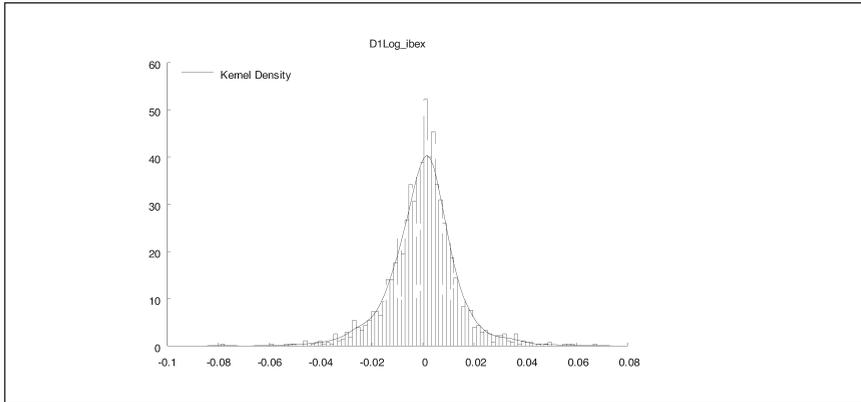
*ibex*. Para hacer un gráfico temporal se realiza doble clic sobre la serie de rendimientos acudimos nuevamente a *Graphics-Show Data Grafic*, seleccionar la serie *D1Log\_ibex* y la opción *Series Plot*.



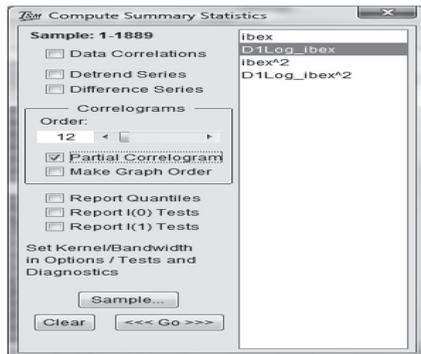
Para obtener el gráfico de los rendimientos logarítmicos al cuadrado debemos ir a *Setup- Data Transformation and Editing*. Una vez seleccionada la serie *D1Log\_ibex* debe transformarse mediante *Transform* y seleccionar *Power* introduciendo el valor 2. La nueva serie se denomina por defecto *D1Log\_ibex^2*, el gráfico se obtendría nuevamente mediante *View-Graf*.



El histograma y la estimación kernel se obtendrían seleccionando la opción *Histogram/Density* en *View-Graf*.



Los estadísticos descriptivos de la serie de rendimientos se proporcionan en la pestaña *Setup – Compute Summary Statics*. Se le puede pedir que calcule la ACF tanto de la serie original como de sus cuadrados (se selecciona la opción *Correlogram* con el número de retardos seleccionados) o marcar la opción de *Partial Correlogram* que calcula la PACF.



\*\*\* *Summary Statistics for D1Log\_ibex* \*\*\*

*Using 1889 observations (1-1889(dates 2001-01-02 to 2008-06-30))*

*Minimum = -0.0783927 at obs. 1778*

*Maximum = 0.0672222 at obs. 1781*

*Mean = 0.000149631*

*Median = 0.000747907*

*Standard Deviation = 0.0129967*

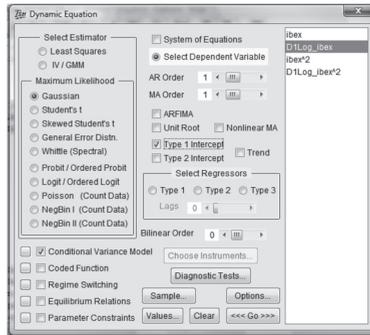
*Skewness* = -0.10189  
*Kurtosis* = 6.07042  
*Jarque-Bera statistic* = 745.289

*Partial Autocorrelations:*

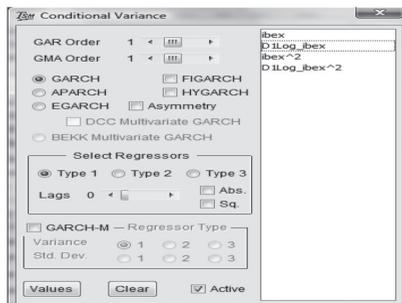
<i>Order</i>	<i>Series</i>	<i>Squared Series</i>
0	1	1
1	-0.051482	0.16869
2	-0.0040053	0.22947
3	-0.042184	0.19755
4	0.035446	0.10651
5	-0.015762	0.021059
6	-0.015769	0.15428
7	-0.0031522	0.078059
8	0.067225	0.14422
9	-0.0046538	0.043649
10	-0.081081	0.033349
11	0.043424	0.077319
12	-0.020435	-0.036114

En el caso de haber solicitado el cálculo de la ACF, se calcula tanto para la serie como para su cuadrado mostrándose por defecto el test de Box-Pierce.

Para la estimación de cualquier modelo de series temporales en TSM debe seleccionarse *Model-Dynamic Equation*. Nuevamente ajustaremos un modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) a la serie de rendimientos del Ibex. Para ello debemos seleccionar la serie de rendimientos *D1Log\_ibex*, el orden del proceso AR y MA, la distribución deseada para el término de error (*Gaussian*) y la constante en la media (*Type 1 Intercept*). Posteriormente se selecciona *Conditional Variance Model*.



Al seleccionar *Conditional Variance Model* se abre una nueva ventana donde se debe especificar el modelo seleccionado. En nuestro ejemplo *GAR Order=1* y *GMA Order=1* para estimar el modelo GARCH(1,1).

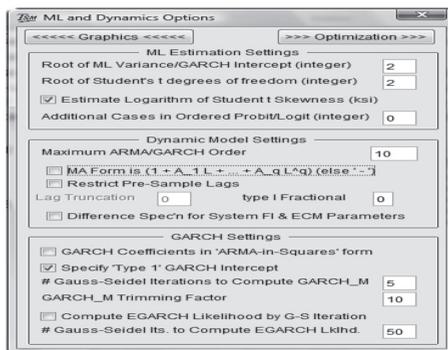


Para que el programa comience a calcular el modelo debe volverse a la ventana de *Dynamic Equation* y seleccionar *Go*. Se proporciona información sobre la significatividad de los parámetros, valor de la función de log-verosimilitud obtenido, los principales criterios de información y un análisis sobre los residuos (normalidad y estadístico Q para los residuos y su cuadrado).

Para obtener unos parámetros en una especificación similar a la empleada en este manual, y semejante a R y Eviews es necesario en la pestaña *Options* seleccionar *ML and Dynamics*. Allí se debe desmarcar las opciones:

MA form is  $1 - A_1 L - \dots - A_q L^q$ .

GARCH Coefficients in "ARMA in Squares" form.



Se observa que los parámetros mostrados difieren levemente de los obtenidos por los otros programas. En lo referente a la notación TSM llama GARCH Beta1 a lo que en R se llama alpha1 y en Eviews parámetro asociado a GARCH(-1), GARCH Alpha1 a lo que en R se denomina beta1 y en Eviews parámetro asociado a RESID(-1)^2. Además, en vez de calcular el valor de la constante del proceso de la varianza condicional proporciona su raíz cuadrada [GARCH Intercept^(1/2)].

	<i>Estimate</i>	<i>Std. Err.</i>	<i>t Ratio</i>	<i>p-Value</i>
<i>Intercept</i>	0.00078	0.00022	3.567	0
<i>AR1</i>	0.29332	0.42975	0.683	0.495
<i>MA1</i>	-0.31837	0.42323	-0.752	0.452
<i>GARCH Intercept^(1/2)</i>	0.00519	0.0006	-----	-----
<i>GARCH Alpha1</i>	0.11907	0.03239	3.676	0
<i>GARCH Beta1</i>	0.85911	0.03484	-24.659	0

*Log Likelihood = 5821.19*

*Schwarz Criterion = 5798.56*

*Hannan-Quinn Criterion = 5809.07*

*Akaike Criterion = 5815.19*

*Sum of Squares = 0.3191*

$R\text{-Squared} = 0.0027$

$R\text{-Bar-Squared} = 0.0001$

$\text{Residual SD} = 0.013$

$\text{Residual Skewness} = -0.49$

$\text{Residual Kurtosis} = 5.1088$

$\text{Jarque-Bera Test} = 425.392 \{0\}$

$\text{Ljung-Box (residuals): } Q(10) = 14.2268 \{0.163\}$

$\text{Ljung-Box (squared residuals): } Q(12) = 16.7128 \{0.161\}$

El diagnóstico del modelo se realiza desde *Grafics*. En donde ahora aparecen activos los gráficos para el análisis de los residuos (correlogramas, histograma, gráfico QQ, etc.).

### 1.3.3. Modelos de cambio de régimen

Los modelos autorregresivos por umbrales (TAR) y sus variantes, que vimos anteriormente, eran un tipo de modelos no lineales que permitían aproximar la estructura no lineal que relaciona los valores presentes y pasados mediante funciones lineales por tramos. Otro método para conseguir la transición entre regímenes es, en vez de emplear umbrales, mediante un enfoque probabilístico<sup>64</sup>. El comportamiento dinámico de una serie temporal depende del régimen existente en cada momento de tiempo, lo que se conoce como “*state-dependent dynamic behavior*”, de forma que ciertas características de la serie (media, varianza, autocorrelación, etc.) son diferentes en distintos regímenes. De esta forma la transición entre los distintos regímenes o estados de la economía pueden venir dados por una matriz de transición donde se establecen las probabilidades de continuar en el mismo estado o de cambiar a otros estados.

Hamilton (1989) introduce los modelos autorregresivos de cambios de régimen de Markov (*Markov Switching AutoRegressive* o MSA). LeBaron (1992) muestra que las autocorrelaciones de los rendimientos de las acciones están relacionadas a la volatilidad de los rendimientos. El autor encuentra que las autocorrelaciones

---

<sup>64</sup> Por lo tanto, los modelos TAR, SETAR, STAR y modelos de cambio de régimen de Markov se engloban, entre otros, en lo que se conoce como modelos de cambio de régimen (*Regime Switching Model* o RSM).

tienden a ser mayores durante periodos de baja volatilidad y menores durante periodos de alta volatilidad. Los periodos de alta y baja volatilidad pueden ser vistos como distintos regímenes. Hamilton y Susmel (1994)<sup>65</sup> analizan múltiples modelos de cambio de régimen en los que varían el número de regímenes y la forma funcional del modelo en cada régimen. Harris (1997)<sup>66</sup> aplica los modelos MSA mediante modelos de vectores autorregresivos o VAR con cambio de régimen, lo que se conoce como modelo RS-VAR (*Regime Switching Vector Autoregression*). De esta forma se establecen  $R$  regímenes discretos caracterizados por un sistema distinto de parámetros y están sujetos a cambios discretos probabilísticos en los parámetros mediante un proceso de Markov que dicta las probabilidades de transición entre los regímenes<sup>67</sup>. Dentro de cada régimen el proceso del vector se asume estable, y es por lo tanto linealmente estacionario. El efecto de los cambios discretos de régimen es hacer el proceso total no linealmente estacionario. Whitten y Thomas (1999) introducen la dependencia entre regímenes en el modelo de Wilkie (1995).

La principal ventaja de los modelos de cambio de régimen es que describen el efecto en los datos de periodos con diferentes parámetros. Además, de forma general, más que modelizar las colas gordas en los datos también modelizan la probabilidad de que un evento de la cola pueda venir seguido por otro. Por lo tanto en un modelo de cambio de régimen, en principio, es más probable encontrarse con eventos extremos. Además proporcionan una manera sencilla de incorporar la volatilidad estocástica al asumir que la volatilidad toma distintos valores, uno por cada uno de los regímenes empleados.

---

<sup>65</sup> Los autores emplean esta técnica para modelar series temporales desde 1962 a 1987 de frecuencia semanal. Asumiendo modelos tipo ARCH dentro de cada régimen encuentran evidencia de la aplicación de tres regímenes.

<sup>66</sup> Harris (1997) desarrolla un modelo de cambio de régimen multivariante autorregresivo (RSVAR) para un uso actuarial ajustado a los datos cuatrimestrales financieros de Australia. El autor encuentra dos regímenes bien diferenciados. El primero está caracterizado por una inflación y unos tipos de interés estables, y un crecimiento estable en el precio de las acciones. El segundo régimen está caracterizado por una inflación y tipos de interés volátiles, y un mercado de renta variable volátil generalmente con rentabilidad negativa. El régimen de alta volatilidad es inestable y tiene una duración esperada de sólo 6 meses. Este régimen de alta volatilidad es capaz de capturar los eventos extremos en los mercados que bajo otras técnicas podrían ser catalogados de *outliers*.

<sup>67</sup> El estado inicial se puede representar como conocido en uno de los regímenes o mediante una función de probabilidad.

Un modelo sencillo pero a la vez capaz de capturar las principales características empíricas de las series de rendimientos es el modelo RSLN (*Regime-Switching Lognormal model*), modelo de cambio de régimen de Markov lognormal en precios, conocido en el ámbito asegurador como modelo de Hardy. Hardy (1999, 2001, 2003) propuso para modelizar el rendimiento de la renta variable para las compañías aseguradoras un modelo de cambio de régimen con dos regímenes lognormales independientes<sup>68</sup>. El modelo se caracteriza por una cadena de Markov  $p = \{p_t, t = 1, 2, \dots\}$  que representa la evolución del estado de la economía, que puede estar en  $t$  posibles estados denominados regímenes<sup>69</sup>. En cada uno de los regímenes los rendimientos siguen un modelo normal independiente donde los parámetros son distintos para cada régimen  $p_t$ , es decir:

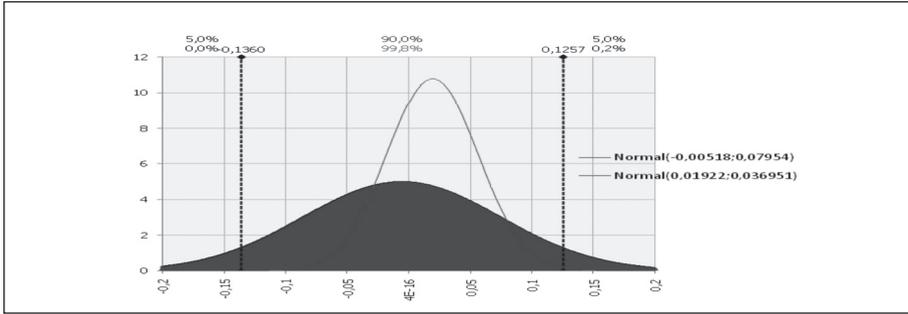
$$r_t = \mu_{p_t} + \sigma_{p_t} Z_t \quad (p_t = 1, 2, \dots)$$

Donde  $Z_t \sim N(0,1)$  para  $t = 1, 2, \dots$  y  $p_t$  representa cada uno de los estados, Hardy (2001) considera adecuado en base a las series utilizadas del TSE 300 y del S&P 500 emplear 2 regímenes. Los regímenes se denominan de acuerdo a su varianza como régimen 1 o de baja volatilidad y régimen 2 o de alta volatilidad. Los resultados alcanzados por Hardy (2001) muestran que la deriva o rendimiento medio esperado en el régimen 1 es positivo mientras que en el régimen de alta volatilidad es negativo. En el gráfico inferior se representa la combinación de las dos distribuciones ajustadas a la serie del índice Ibex 35 con frecuencia mensual desde el 2 de enero de 1992 al 31 de diciembre de 2008. Como podemos comprobar el mercado puede estar en un régimen con un rendimiento esperado positivo y de baja volatilidad, o bien, en un estado de mayor inestabilidad, con una media negativa y una volatilidad mayor.

---

<sup>68</sup> Este modelo está en la actualidad ampliamente difundido en Estados Unidos y Canadá para determinar el capital necesario por las compañías de seguros, principalmente de vida. Esto es debido a que el modelo semeja adecuado para horizontes temporales lejanos. Sin embargo, el modelo no tiene reversión a la media por lo que a largo plazo puede conducir a cargas más elevadas de capital que modelos con esta hipótesis.

<sup>69</sup> De esta forma, si  $p_t = 2$  entonces la economía permanece en el régimen 2 durante el intervalo  $[t, t + 1]$ .



La cadena de Markov se define en términos de la matriz de transición  $P$ , la cual viene dada por:

$$\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$$

Donde cada elemento de la matriz de transición  $P$ , denominados probabilidades de transición o  $p_{a,b}$ , viene dado formalmente por  $p_{a,b} = p_r [p_t = b | p_{t-1} = a]$  para  $t = 1, 2, \dots N$ .

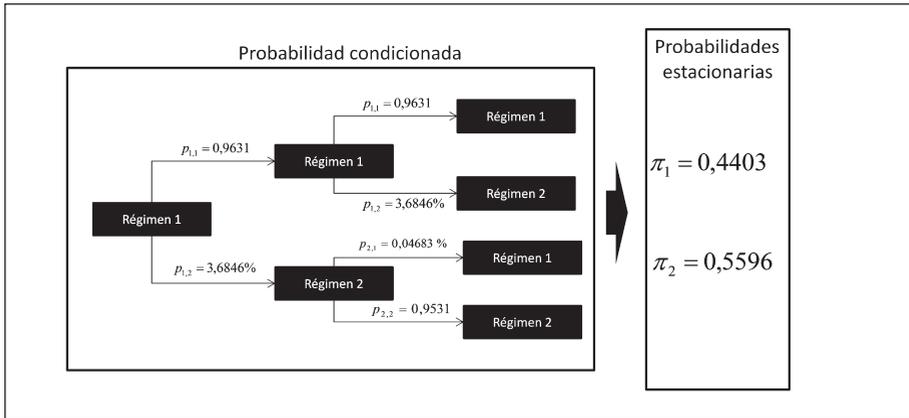
La distribución estacionaria de la cadena de Markov<sup>70</sup> se obtiene resolviendo la siguiente ecuación donde  $\pi$  es la distribución invariante:

$$(\pi_1 \quad \pi_2) \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} = (\pi_1 \quad \pi_2)$$

Donde  $\pi_a$  es la probabilidad estacionaria de estar en el régimen  $a$ . La solución a  $\pi P = \pi$  es  $\pi_1 p_{1,1} + \pi_2 p_{2,1} = \pi_1$  y  $\pi_1 p_{1,2} + \pi_2 p_{2,2} = \pi_2$ . Por lo que dado que  $p_{1,1} + p_{1,2} = 1$  se obtienen las siguientes soluciones:  $\pi_1 = \frac{p_{2,1}}{p_{1,2} + p_{2,1}}$  y  $\pi_2 = 1 - \pi_1 = \frac{p_{1,2}}{p_{1,2} + p_{2,1}}$ .

En el gráfico siguiente podemos ver un esquema de la evolución de un régimen a otro y las probabilidades condicionadas al régimen del periodo anterior, estimadas a partir de la serie del IBEX-35 mencionada anteriormente. Como se puede comprobar, si el régimen en el que se encuentra la economía es el de baja volatilidad (régimen 1), la probabilidad de que se mantenga dentro de ese nivel en el periodo siguiente es del 96,31% y sólo hay una probabilidad de un 3,6846% de cambiar al régimen de alta volatilidad.

<sup>70</sup> Esta distribución es empleada para estimar los parámetros cuando no se conoce las probabilidades del régimen actual.



Por tanto, en el ejemplo anterior, la probabilidad estacionaria de estar en el régimen de alta volatilidad, 55,96%, supera a la de estar en el régimen de baja volatilidad. Eso significa que si simulamos una secuencia de rendimientos para un número suficientemente amplio de periodos encontraríamos que en un 44,03% de los casos el régimen sería el 1 y en un 55,96% el 2.

La distribución incondicional de los rendimientos a un periodo pasa de ser una normal<sup>71</sup> a convertirse en una mixtura de normales con proporciones  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , por lo que tiene una función de densidad dada por:

$$f_{y_t}(x) = \pi_1 \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \pi_2 \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

<sup>71</sup> Recuérdese que la función de densidad de una distribución normal viene dada por  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  donde  $\mu$  y  $\sigma^2$  son la media y la varianza de dicha distribución.

---

**Ejemplo. Simular un modelo de cambio de régimen lognormal para 12 periodos para un índice donde la rentabilidad en cada estado viene dada por:**

Régimen inferior o 1:  $\mu_1 = 0,01$  y  $\sigma_1 = 0,02$ .

Régimen intermedio o 2:  $\mu_2 = -0,01$  y  $\sigma_2 = 0,04$ .

Y las probabilidades de transición de un régimen a otro vienen dadas por  $p_{1,1} = 0,95$  y  $p_{2,2} = 0,9$ , por lo que se obtiene la siguiente matriz de transición<sup>72</sup>.

	Régimen 1	Régimen 2
Régimen 1	95%	5%
Régimen 2	10%	90%

Supongamos que el régimen inicial ( $t = 0$ ) es el régimen 1. Se debe simular una uniforme para determinar el régimen en el que en cada periodo nos encontramos, de forma que si la probabilidad acumulada de un régimen es menor que dicho valor de la uniforme entonces se salta a ese estado. Posteriormente, se simula otra uniforme la cual se emplea como la probabilidad de la inversa de la distribución normal con los parámetros correspondientes a ese régimen.

A modo de ejemplo, partiendo de que en  $t=0$  estamos en el régimen 1, la probabilidad de que en  $t=1$  se permanezca en el régimen 1 es de  $p_{1,1} = 0,95$ . Si el valor de la uniforme es mayor a 0,95 habremos saltado al régimen 2, en caso contrario permaneceremos en el régimen 1. Dado que para  $t=1$  el valor simulado de la uniforme es de 0,325 el régimen aplicable es el 1, por lo que a partir de los parámetros  $\mu_1 = 0,01$  y  $\sigma_1 = 0,02$  calcularemos el valor de la función normal inversa para una probabilidad dada por la simulación de otra uniforme (0,793).

---

<sup>72</sup> Si denotamos por  $i$  a las filas de la matriz y  $j$  las columnas, cada celda de la matriz muestran la probabilidad de estando en el régimen  $i$  pasar al régimen  $j$ .

$t$	U(0,1)	Probabilidades acumuladas de estar en el régimen		Régimen	U(0,1)	$r_t$
		Régimen 1	Régimen 2			
0				1		
1	0,325	95,00%	100,00%	1	0,793	2,63%
2	0,490	95,00%	100,00%	1	0,496	0,98%
3	0,503	95,00%	100,00%	1	0,002	-4,74%
4	0,627	95,00%	100,00%	1	0,981	5,14%
5	0,976	95,00%	100,00%	2	0,069	-6,95%
6	0,762	10,00%	100,00%	2	0,144	-5,26%
7	0,400	10,00%	100,00%	2	0,381	-2,21%
8	0,987	10,00%	100,00%	2	0,440	-1,60%
9	0,225	10,00%	100,00%	2	0,329	-2,77%
10	0,554	10,00%	100,00%	2	0,778	2,06%
11	0,593	10,00%	100,00%	2	0,248	-3,72%
12	0,758	10,00%	100,00%	2	0,737	1,54%

El modelo RSLN3 supondría la existencia de 3 regímenes distintos en los cuales dentro de cada uno la rentabilidad se comportaría como una normal. La media y desviación típica entre los distintos regímenes puede ser distinta, por lo cual a priori se deben estimar 12 parámetros: las tres medias  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , la tres volatilidades  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  y seis probabilidades de transición entre regímenes, dado que las otras tres se calculan a partir de las anteriores.

La distribución estacionaria de la cadena de Markov se obtiene resolviendo la siguiente ecuación donde  $\pi$  es la distribución invariante:

$$(\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3) \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$$

Donde  $\pi_\alpha$  es la probabilidad estacionaria de estar en el régimen  $\alpha$ . La solución a la ecuación anterior  $\pi p = \pi$  proporciona las siguientes soluciones:

$$\pi_1 = \frac{p_{2,1}(1 - p_{3,3}) + p_{2,3}p_{3,1}}{a}$$

$$\pi_2 = \frac{p_{1,2}(1 - p_{3,3}) + p_{1,3}p_{3,2}}{a}$$

$$\pi_3 = \frac{p_{1,3}(1 - p_{2,2}) + p_{1,2}p_{2,3}}{a}$$

$$a = p_{2,1}(1 - p_{3,3}) + p_{2,3}p_{3,1} + p_{1,2}(1 - p_{3,3}) + p_{1,3}p_{3,2} + p_{1,3}(1 - p_{2,2}) + p_{1,2}p_{2,3}$$

De forma semejante al modelo RSLN2 la distribución incondicional de los rendimientos a un periodo se convierte en una mixtura de normales con proporciones  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  y  $\pi_3$  por lo que tiene una función de densidad dada por:

$$f_{y_t}(x) = \pi_1 \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \pi_2 \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} + \pi_3 \frac{1}{\sigma_3 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_3)^2}{2\sigma_3^2}}$$

---

**Ejemplo. Simular un modelo de cambio de régimen lognormal para 12 periodos para un índice donde la rentabilidad en cada estado viene dada por:**

Régimen inferior o 1  $\mu_1 = 0,05$  y  $\sigma_1 = 0,1$ .

Régimen intermedio o 2  $\mu_2 = 0,08$  y  $\sigma_2 = 0,15$ .

Régimen superior o 3  $\mu_3 = 0,1$  y  $\sigma_3 = 0,2$ .

Y las probabilidades de transición de un régimen a otro vienen dadas por la siguiente matriz de transición<sup>73</sup>.

	Régimen 1	Régimen 2	Régimen 3
Régimen 1	80%	15%	5%
Régimen 2	10%	70%	20%
Régimen 3	10%	15%	75%

<sup>73</sup> Si denotamos por  $i$  a las filas de la matriz y  $j$  las columnas, cada celda de la matriz muestran la probabilidad de estando en el régimen  $i$  pasar al régimen  $j$ .

Siendo el régimen inicial ( $t = 0$ ) el régimen 1.

Se debe simular una uniforme para determinar el régimen en el que en cada periodo nos encontramos, de forma que si la probabilidad acumulada de un régimen es menor que dicho valor de la uniforme entonces se salta a ese estado. Posteriormente se simula otra uniforme la cual se emplea como la probabilidad de la inversa de la distribución normal con los parámetros correspondientes a ese régimen.

t	U(0;1)	Probabilidades acumuladas de estar en el régimen			Régimen	U(0;1)	$r_t$
		Régimen 1	Régimen 2	Régimen 3			
0					1		
1	0,806	80%	95%	100%	2	0,946	32,1%
2	0,117	10%	80%	100%	2	0,092	-11,9%
3	0,888	10%	80%	100%	3	0,056	-21,7%
4	0,112	10%	25%	100%	2	0,075	-13,6%
5	0,851	10%	80%	100%	3	0,651	17,7%
6	0,900	10%	25%	100%	3	0,238	4,2%
7	0,505	10%	25%	100%	3	0,542	12,1%
8	0,873	10%	25%	100%	3	0,477	8,8%
9	0,383	10%	25%	100%	3	0,430	6,5%
10	0,689	10%	25%	100%	3	0,068	-19,8%
11	0,075	10%	25%	100%	1	0,284	-0,7%
12	0,963	80%	95%	100%	3	0,248	-3,6%

### Estimación modelo RSLN

Hardy (2001) describe como ajustar los parámetros del modelo RSLN2 mediante máximo verosimilitud (MLE). Sea  $r_t$  el rendimiento logarítmico del mes  $t + 1$ , la función de verosimilitud de las observaciones  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  es:

$$L(\Theta) = f(r_1|\Theta)f(r_2|\Theta, r_1) \dots f(r_n|\Theta, r_1, \dots, r_{n-1})$$

Donde  $f$  es la función de probabilidad de  $r$ . De esta forma la contribución de la observación  $i$ -ésima a la función de log-verosimilitud viene dada por:

$$\ln f(r_i|r_{i-1}, r_{i-2}, \dots, r_1, \Theta)$$

Por lo tanto, la función de máximo verosimilitud logarítmica viene dada por:

$$l(\Theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(r_i | r_{i-1}, r_{i-2}, \dots, r_1, \Theta)$$

La dependencia de un rendimiento en función de los anteriores viene dada por la probabilidad de estar en el régimen 1 o 2. Existen cuatro posibles situaciones para el régimen actual y previo derivados de las combinaciones entre  $p_i = 1, 2$  y  $p_{i-1} = 1, 2$ . Estas situaciones son estando en el régimen 1 permanecer en él, estando en el régimen 1 moverse al 2, estando en el régimen 2 permanecer en él, o finalmente, estando en el régimen 2 moverse al 1. Estas cuatro situaciones determinan la función de densidad o probabilidad para un rendimiento observado, que viene dada por:

$$f(r_i | r_{i-1}, \dots, r_1, \Theta) = \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 f(p_i = a, p_{i-1} = b, r_i | r_{i-1}, \dots, r_1, \Theta)$$

Donde la probabilidad de estar en el régimen  $p_{i-1}$  en el periodo anterior y moverse a (o permanecer en)  $p$  en el periodo actual para observar el rendimiento  $r_i$  considerando toda la información disponible (los rendimientos previos) viene dada por el producto de cada componente: la probabilidad de estar en el régimen  $p_{i-1}$  considerando toda la información disponible, la probabilidad de transición del régimen y la función de densidad asociada con el rendimiento observado en un régimen específico:

$$f(p_i, p_{i-1}, r_i | r_{i-1}, \dots, r_1, \Theta) = \Pr(p_{i-1} | r_{i-1}, \dots, r_1, \Theta) \Pr(p_{i-1} | p_{i-1}, \Theta) f(r_i | p_i, \Theta)$$

La probabilidad de estar en el régimen  $p_{i-1}$  considerando toda la información disponible se obtiene recursivamente como:

$$\Pr(p_{i-1} | r_{i-1}, \dots, r_1, \Theta) = \frac{\sum_{a=1}^2 f(p_{i-1}, p_{i-2} = a, r_{i-1} | r_{i-2}, \dots, r_1, \Theta)}{f(r_i | r_{i-1}, \dots, r_1, \Theta)}$$

Y la función de densidad asociada con el rendimiento observado y un régimen especificado viene dado por:

$$f(r_i|p_i, \Theta) = \frac{1}{\sigma_{p_i}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - \mu_{p_i})^2}{2\sigma_{p_i}^2}}$$

Dado que el régimen inicial es desconocido, las probabilidades estacionarias se usan para establecer las probabilidades iniciales de estar en el régimen 1 y 2, es decir:  $\Pr(p_0 = 1|\Theta) = \pi_1$  y  $\Pr(p_0 = 2|\Theta) = \pi_2$ . Por lo tanto mediante este procedimiento iterativo se estiman los seis parámetros  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{1,2}, p_{2,1}$  del modelo RSLN.

**Ejemplo.** A continuación se muestra como se calcula la función de verosimilitud para cada observación bajo el modelo RSLN<sup>74</sup>. Dicha función será una función condicionada a estar en un determinado régimen, por lo que habrá que multiplicar el valor de la función de verosimilitud de la distribución normal, por la probabilidad de que en ese momento se esté en ese régimen:

$$L(\Theta)_i = (p_{1,t-1}p_{1,1} + p_{2,t-1}p_{2,1})L(\Theta)_{i,1} + (p_{1,t-1}p_{1,2} + p_{2,t-1}p_{2,2})L(\Theta)_{i,2}$$

Siendo  $L(\Theta)_{ri} = \frac{1}{\sigma_{ri}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}((y - \mu_{ri})/\sigma_{ri})^2}$  la función de verosimilitud de un determinado rendimiento en el régimen i. En este caso los cálculos se realizan sobre la función de verosimilitud y una vez que se dispone del valor en cada punto se calcula el logaritmo de la suma, que será el valor que se pretende maximizar.

En la columna primera [A] se muestra una hipotética serie de rendimientos. La columna [B] calcula el valor de la función de densidad de la distribución normal suponiendo que el proceso está en el régimen 1, es decir empleando  $\mu_1$  (1,13%) y  $\sigma_1$  (2,06%) obtendríamos para la primera observación  $\frac{1}{2,06\%\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-0,5\frac{(-0,35\% - 1,13\%)^2}{2,06\%^2})}{2}} = 14,92$ . La columna [C] realiza el mismo cálculo suponiendo que el proceso está en el régimen 2,  $\mu_2$  (-0,52%) y  $\sigma_2$  (5,17%).

<sup>74</sup> Para cualquier modelo de cambio de régimen de Markov se procede de forma semejante realizando los ajustes pertinentes en la función de verosimilitud concreta.

La columna [D] pondera la columna [B] por lo probabilidad de que el proceso se encuentre en el régimen 1. Es la función de verosimilitud condicionada a estar en el régimen 1. Dicha probabilidad viene dada por la suma de que el proceso esté en el régimen 1 en el periodo anterior y permanezca en él más la probabilidad de que esté en el régimen 2 en el periodo anterior y cambie a 1. Es decir, para la primera observación tenemos una probabilidad de  $(\pi_1 p_{1,1} + \pi_2 p_{2,1})$  mientras que para el resto se emplea en vez de las probabilidades incondicionales  $\pi_1$  y  $\pi_2$  las probabilidades condicionales de pertenecer a cada régimen (columnas H e I). Para la primera observación dados los valores  $\pi_1 = 58,41\%$ ,  $\pi_2 = 41,79\%$ ,  $p_{1,1} = 96,33\%$  y  $p_{2,1} = 5,12\%$  obtenemos el primer valor de la columna [D] como  $((58,41\% \cdot 96,33\% + 41,79\% \cdot 5,12\%) \cdot 14,92 = 8,62)$ . El segundo valor se obtendría como  $(0,73 \cdot 96,33\% + 0,27 \cdot 5,12\%) \cdot 0,28 = 0,20$ .

La columna [E] pondera la columna [C] por lo probabilidad de que el proceso se encuentre en el régimen 2. Es la función de verosimilitud condicionada a estar en el régimen 2. Es decir, para la primera observación tenemos una probabilidad de  $(\pi_2 p_{1,2} + \pi_1 p_{2,2})$  mientras que para el resto se emplea en vez de las probabilidades incondicionales  $\pi_1$  y  $\pi_2$  las probabilidades condicionales de pertenecer a cada régimen (columnas H e I). Para la primera observación dados los valores  $p_{1,2} = 3,67\%$  y  $p_{2,2} = 94,88\%$  obtenemos el primer valor de la columna [E] como  $((58,41\% \cdot 3,67\% + 41,79\% \cdot 94,88\%) \cdot 7,72 = 3,23)$ . El segundo valor se obtendría como  $(0,73 \cdot 3,67\% + 0,27 \cdot 94,88\%) \cdot 5,41 = 1,54$ .

[A]	[B]	[C]	[D]	[E]	[F]	[G]	[H]	[I]
-0,35%	14,92	7,72	8,68	3,23	11,91	2,48	0,73	0,27
-4,88%	0,28	5,41	0,20	1,54	1,74	0,55	0,12	0,88
8,41%	0,04	1,74	0,01	1,46	1,47	0,39	0,00	1,00
2,00%	17,70	6,86	0,97	6,48	7,46	2,01	0,13	0,87
-7,13%	0,01	3,40	0,00	2,82	2,82	1,04	0,00	1,00
-4,94%	0,26	5,35	0,01	5,08	5,09	1,63	0,00	1,00
-3,69%	1,26	6,39	0,07	6,05	6,12	1,81	0,01	0,99
9,89%	0,00	1,01	0,00	0,95	0,95	-0,05	0,00	1,00
4,04%	7,15	5,23	0,37	4,96	5,33	1,67	0,07	0,93
...	...	...	...	...	...	...	...	...

La columna [F] simplemente suma las dos anteriores ([D]+[E]). Es por tanto la función de verosimilitud para cada observación bajo el modelo RSLN. La columna [G] calcula el logaritmo neperiano de la anterior, siendo está la función de log-verosimilitud. La suma de

esta columna sujeta a las restricciones oportunas sobre las desviaciones típicas y probabilidades es la que debemos maximizar.

Las columnas [H] e [I] representan las probabilidades condicionales de que el proceso esté en cada momento en el régimen 1 y 2 respectivamente. Sus valores vienen dados por [D]/[F] para la primera y [E]/[F].

---

Panneton (2003, 2005, 2006) ha propuesto una extensión del modelo lognormal de cambio de régimen (RSLN) de Hardy para tener en cuenta las características de reversión a la media de los rendimientos, el denominado modelo RSDD (*Regime-Switching Draw-Down*). Este modelo establece una reversión a la media basada en la distancia entre la situación del mercado actual y el último máximo alcanzado por el mercado, lo que posibilita observar la curtosis de los rendimientos a corto plazo pero que no lo extiende a los rendimientos a largo plazo.

De esta forma este modelo RSDD le añade al modelo de Hardy un término adicional, que considera la reversión a la media en relación a los rendimientos acumulados en un periodo, mediante una autorregresión en función de una medida de la caída experimentada en el mercado (*draw-down metric*) desde el último máximo alcanzado por el índice considerado. Por lo tanto, el modelo establece una mayor rentabilidad esperada para el siguiente periodo en la medida en que el rendimiento de los periodos anteriores hayan estado por debajo del rendimiento medio.

La medida de la caída experimentada se emplea para calcular la distancia entre el último máximo del mercado y su nivel actual, de forma que representa el rendimiento acumulado desde que se alcanzó el último máximo. Formalmente viene dada por:

$$D_t = \min(0, D_{t-1} + r_t)$$

De esta forma  $D_t$  será negativo o cero (en el caso de que el mercado esté en un máximo o en el momento inicial). Por tanto, el modelo de Panneton puede escribirse formalmente como:

$$r_t = \mu_{p_t} + k_{p_t} D_{t-1} + \sigma_{p_t} Z_t \quad (p_t = 1, 2)$$

Donde es de esperar que los parámetros  $k_a$  sean negativos para que se produzca la recuperación del mercado.

En el cuadro siguiente se muestra una comparación de las principales características de los modelos lognormal independiente (*Independent Lognormal* o ILN) la mixtura de normales, el modelo RSLN de 2 y 3 regímenes y el modelo RSDD.

Modelo	Características
ILN	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El rendimiento logarítmico en periodos de tiempo no coincidentes es independiente y normalmente distribuido. Por lo tanto es un modelo donde los rendimientos se generan de forma independiente a la senda seguida y al estado de la economía (<i>path and state independent</i>).</li> <li>- Es un modelo muy empleado debido a su sencillez y manejabilidad (escalable) a pesar de sus limitaciones (no recoge la asimetría ni curtosis, etc.).</li> </ul>
Mixtura	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El rendimiento logarítmico en periodos de tiempo no coincidentes es independiente estando distribuido mediante una mixtura de normales, por lo tanto los rendimientos se generan de forma independiente a la senda y al estado de la economía.</li> <li>- Es un modelo menos empleado al reducirse la sencillez, pero supera algunas de las limitaciones del modelo de rendimientos normales (especialmente recoge un mayor riesgo en la cola).</li> </ul>
RSLN (2 regímenes)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El rendimiento logarítmico está normalmente distribuido. Por lo tanto es un modelo donde los rendimientos se generan de forma independiente a la senda seguida (<i>path independent</i>) pero no al estado de la economía (<i>state dependent</i>) ya que se basan en la matriz de probabilidades de transición.</li> <li>- Al existir dos regímenes (baja y alta volatilidad), se reduce la sencillez del modelo pero es capaz de recoger volatilidades variantes a lo largo del tiempo, superando a los modelos anteriores.</li> </ul>
RSLN (3 regímenes)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Al existir tres regímenes (baja, media y alta volatilidad), se reduce enormemente la sencillez del modelo recogiendo volatilidades variantes a lo largo del tiempo.</li> <li>- Frecuentemente este modelo no supera (en base a los tradicionales criterios de parsimonia) al modelo de dos regímenes para datos mensuales, pero sí en el caso de emplear datos diarios.</li> </ul>
RSDD (2 regímenes)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Los rendimientos logarítmicos no son independientes a la senda seguida, la razón es el componente autorregresivo del modelo. Al igual que el modelo RLSN tampoco es independiente al estado de la economía (<i>path and state dependent</i>).</li> <li>- Al existir dos regímenes (baja y alta volatilidad) y un componente autorregresivo, se reduce enormemente la simpleza del modelo. Sin embargo, tiene la virtud de recoger volatilidades variantes a lo largo del tiempo y reversión a la media cuando el índice objeto de estudio está por debajo de su último valor máximo.</li> </ul>

### Otros modelos de cambio de régimen de Markov

Los modelos de cambio de régimen de Markov proporcionan un marco flexible para la modelización de los rendimientos al permitir comportamientos no lineales y capturar características de los datos financieros como las volatilidades variantes a lo largo del tiempo, la asimetría y la curtosis. En la actualidad existe una amplia gama de modelos de Markov en base a los modelos normal, autorregresivos y GARCH, por lo que podríamos hablar de un modelo de cambio de régimen lognormal autorregresivo o MS AR(1), un modelo de cambio de régimen GARCH o MSGARCH, etc. Engel y Hamilton (1990) emplean modelos de cambio de régimen para los tipos de cambio, Gray (1996) para los tipos de interés y Pagan y Schwert (1990) para la renta variable.

A continuación estableceremos dos modelos de cambio de régimen de Markov para dar una idea al lector del amplio abanico de modelos que pueden ser construidos mediante esta metodología: el modelo RSAR(1) y el modelo RSGARCH(1,1).

El modelo RSAR(1) es un modelo similar al modelo RSDD, sin embargo en vez de regresar sobre el denominado *draw down* la regresión se establece sobre el valor del rendimiento anterior. De esta forma el modelo de RSAR(1) puede escribirse formalmente como:

$$r_t = \mu_{p_t} + \phi_{p_t} r_{t-1} + \sigma_{p_t} Z_t$$

Donde  $\phi_{p_t}$  es el parámetro autorregresivo y  $p_t = 1, 2$  en el caso de que se establezcan dos regímenes. De esta forma el modelo RSAR(1) con dos regímenes tiene 8 parámetros a estimar, los seis parámetros característicos del modelo RSLN  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{1,2}, p_{2,1}$  más los parámetros autorregresivos  $\phi_1$  y  $\phi_2$ .

El modelo RSGARCH(1,1) combina un modelo de cambio de régimen con una especificación para la volatilidad GARCH(1,1). De esta forma el modelo puede escribirse formalmente como:

$$r_t = \mu_{p_t} + \varepsilon_{p_t} = \mu_{p_t} + \sigma_{p_t,t} Z_t$$
$$\sigma_{p_t,t}^2 = \alpha_{0,p_t} + \alpha_{1,p_t} \varepsilon_{p_t,t-1}^2 + \beta_{1,p_t} \sigma_{p_t,t-1}^2$$

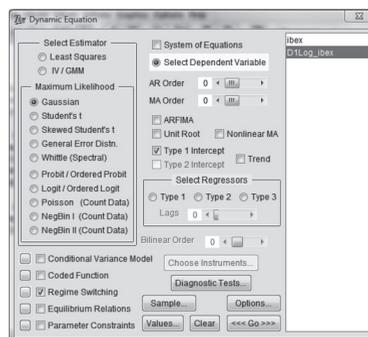
Este modelo proporciona en general un muy buen ajuste a las series financieras. Sin embargo el problema reside en la estimación debido al alto número de parámetros a estimar (10 en caso de dos regímenes  $\mu_1, \mu_2, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,2}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \beta_{11}, \beta_{12}, \rho_{1,2}, \rho_{2,1}$ ), lo que provoca el problema ya mencionado de convergencia del algoritmo iterativo y de los máximos locales.

Las posibilidades de los modelos de cambio de régimen de Markov se extienden a cualquier modelo ARMA, GARCH simétrico o asimétrico o modelos de volatilidad estocástica (SV) al mismo tiempo que permiten tanto distribuciones normales para los términos de error como las ya mencionadas  $t$  de Student, GED, etc.

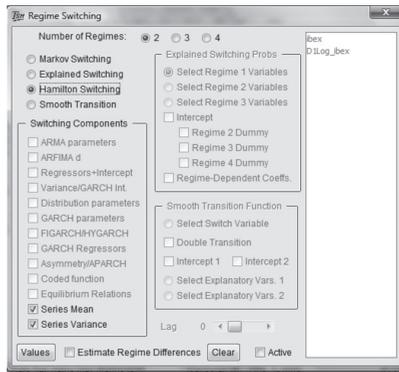
### *Modelos de cambio de régimen en Time Series Modelling<sup>75</sup>*

Para estimar los modelos de cambio de régimen de Markov tenemos que ir a *Model-Dynamic Equation* y seleccionar *Regimen Switching*.

Posteriormente debemos seleccionar el número de regímenes (de 2 a 4) y si se desea que tanto las medias como varianzas sean distintas en cada régimen. Por ejemplo en el gráfico inferior se muestra cómo se estimaría el modelo RSLN. Un modelo RSAR(1) se estimaría seleccionando a mayores en el paso anterior *AR Order 1*, y el modelo RSGARCH seleccionando los órdenes deseados en *Conditional Variance Model*. Finalmente, en *Maximum Likelihood* podemos asumir en vez de un ruido blanco normal, una  $t$  de Student o GED.



<sup>75</sup> A nuestro conocimiento, en la fecha de elaboración de este trabajo R y Eviews carecen de estos modelos de forma predeterminada teniendo que ser programados por el usuario.



En este primer gran apartado del trabajo hemos analizados los principales modelos de series univariantes, válidos para explicar y predecir los valores de una única serie de rendimientos. A continuación nos adentraremos en los modelos multivariantes.



## CAPÍTULO 2. MODELOS PARA LAS SERIES TEMPORALES MULTIVARIANTES

En este apartado introduciremos los principales modelos aplicables para las series temporales multivariantes. Así, se describe desde las distribuciones multivariantes más sencillas como la normal, aquellas formadas mediante cópulas y modelos de series temporales más complejos como los modelos MGARCH. Antes de proceder a describir tales modelos, y de forma análoga a cómo realizamos en el campo univariante, resulta útil introducir unos conceptos clave.

### 2.1. INTRODUCCIÓN A LAS SERIES MULTIVARIANTES

Los modelos multivariantes intentan mejorar el análisis de la relación dinámica de una serie multivariante y superar las predicciones. Una serie temporal multivariante  $k$ -dimensional vienen dada por:

$$\mathbf{r}_t = (r_{1t}, \dots, r_{kt})^t = \begin{bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \\ \dots \\ r_{kt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & \dots & r_{kT} \end{bmatrix}$$

donde cada serie univariante es observada en momentos temporales igualmente espaciados. En primer lugar extenderemos algunos de los conceptos básicos del campo univariante al multivariante.

La estacionariedad se puede establecer al igual que en el caso univariante en sentido débil y en sentido amplio. En sentido fuerte implica que las distribuciones sean invariantes a lo largo del tiempo, mientras que en sentido débil que los primeros dos momentos sean invariantes a lo largo del tiempo. En la práctica el término estacionario se emplea para describir una serie estacionaria en sentido débil, al igual que en el caso univariante. De esta forma se dice que un proceso vectorial es estacionario si el vector de medias es constante  $E(\mathbf{r}_t) = \boldsymbol{\mu}$ , y su matriz de autocovarianzas  $\boldsymbol{\Gamma}_l$  sólo depende del retardo.

Las herramientas aplicadas en el caso univariante son extendidas al caso multivariante. Para una serie estacionaria se puede definir su media como:

$$\boldsymbol{\mu}_r = E(\mathbf{r}_t)$$

Por lo que dado un vector de  $k$  series temporales se define su esperanza como el vector obtenido tomando las esperanzas en cada uno de sus componentes.

La matriz de autocovarianzas  $\boldsymbol{\Gamma}_l$  de  $\mathbf{r}_t$  es una matriz cuadrada de orden  $k$  compuesta por los elementos  $\gamma_{ij}(l)$ , donde en la diagonal se encuentran las varianzas de orden  $l$  y fuera de la diagonal, las covarianzas cruzadas de orden  $l$ . Formalmente:

$$\boldsymbol{\Gamma}_l = \text{Cov}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_{t-l}) = E[(\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu}_r)(\mathbf{r}_{t-l} - \boldsymbol{\mu}_r)^t] = \{\gamma_{ij}(l)\}$$

En donde  $\boldsymbol{\Gamma}_0$  es la matriz de covarianzas de  $\mathbf{r}_t$  y se cumple que  $\boldsymbol{\Gamma}_{-l} = \boldsymbol{\Gamma}_l^t$ , el elemento  $i, j$  de la matriz  $\boldsymbol{\Gamma}_l$ ,  $\gamma_{ij}(l)$ , denota la dependencia lineal incondicional de  $\mathbf{r}_i$  sobre  $\mathbf{r}_{j,t-l}$ .

Las matrices de autocorrelaciones generalizan las autocorrelaciones al caso vectorial y son matrices de orden  $k$ , formadas por los elementos:

$$\rho_{ij}(l) = \frac{\gamma_{ij}(l)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)}}$$

Así, la matriz de autocorrelaciones  $\boldsymbol{\rho}(l)$  se define como  $\boldsymbol{\rho}(l) = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_l\mathbf{D}^{-1}$  siendo  $\mathbf{D}$  la matriz diagonal formada por las desviaciones estándar de los componentes de  $\mathbf{r}_t$ .  $\boldsymbol{\rho}(l)$  o la matriz de correlaciones incondicional de la serie multivariante es simétrica, pero en general  $\boldsymbol{\rho}(l)$  no lo es para  $l \neq 0$ .

La linealidad de una serie multivariante implica que  $\mathbf{r}_t$  es una función lineal de vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos.

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{c} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}$$

Donde  $\mathbf{c}$  es una constante,  $\boldsymbol{\psi}_0 = \mathbf{I}$  (la matriz identidad),  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_j\}$  es la secuencia de vectores aleatorios iid con media cero y matriz de covarianzas definida positiva  $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ .

El proceso ruido blanco vectorial  $\varepsilon_t$  es un proceso de media cero de variables incorreladas con matriz de varianzas y covarianzas instantáneas definida positiva. Además, como en el caso univariante, las variables pueden seguir una distribución normal (en este caso multivariante), por lo que tenemos un proceso ruido blanco normal. Para analizar si un ruido blanco vectorial  $\varepsilon_t$  sigue una distribución normal se puede aplicar, por ejemplo, el test de jarque bera en su versión multivariante.

### Momentos muestrales

Dada una muestra  $\mathbf{r}_t = (r_t, \dots, r_t)^t$  se define la media muestral y la matriz de covarianza muestral como:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_r = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{r}_t$$

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (\mathbf{r}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_r)(\mathbf{r}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_r)^t$$

La matriz de covarianza muestral para el retardo  $l$  se define como:

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l = \frac{1}{n-1} \sum_{t=l+1}^n (\mathbf{r}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_r)(\mathbf{r}_{t-l} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_r)^t$$

Las matrices de autocorrelación muestral del retardo  $l$  viene dada por  $\hat{\boldsymbol{\rho}}_l = \hat{\mathbf{D}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l \hat{\mathbf{D}}^{-1}$ , en donde  $\hat{\mathbf{D}}^{-1} = \text{diag}\{\hat{\Gamma}_{0,11}^{0,5}, \dots, \hat{\Gamma}_{0,kk}^{0,5}\}$  siendo  $\hat{\Gamma}_{0,ii}^{0,5}$  el elemento  $(i,i)$ -ésimo de  $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0$ .

Para testar la hipótesis nula de que  $\boldsymbol{\rho}(1) = \dots = \boldsymbol{\rho}(m) = 0$  frente a la hipótesis alternativa de que  $\boldsymbol{\rho}(i) \neq 0$  para algún  $1 \leq i \leq m$ , donde  $m$  es un número entero positivo, se pueden emplear las matrices de autocorrelación para generalizar el estadístico Ljung-Box al campo multivariante (*multivariate Portmanteau test*):

$$Q_k(m) = n^2 \sum_{l=1}^m \frac{1}{n-l} \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l^t \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{-1} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{-1})$$

Donde  $tr(A)$  es la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada  $A$  (traza de la matriz). Bajo la hipótesis nula de que no existen correlaciones seriales  $Q_k(m)$  se distribuye como una Chi-cuadrado con  $mk^2$  grados de libertad, es decir,  $\chi_{mk^2}^2$ .

Los modelos multivariantes, al igual que en el caso univariante, se pueden clasificar en modelos condicionales e incondicionales o aquellos que suponen que la serie de rendimientos multivariante está independiente e idénticamente distribuida, donde nuevamente la hipótesis más empleada es la de normalidad. Dentro de los modelos condicionales nuevamente se diferencia entre modelos para la media y modelos para las volatilidades. Dentro del primer tipo de modelos los modelos VARMA son la extensión al campo multivariante de los modelos ARMA. En los modelos de volatilidad los modelos GARCH, SV y de cambio de régimen de Markov también se extienden al campo multivariante dando lugar a los denominados MGARCH, MSV y los modelos multivariante de cambio de régimen. Estos tres últimos modelos especifican la dinámica de covarianzas o correlaciones de una serie multivariante. Es por eso, que estos modelos multivariantes estudian las relaciones entre las volatilidades y co-volatilidades entre distintos activos. Algunos de estos modelos también pretenden analizar si las correlaciones entre los rendimientos de los activos cambian con el tiempo. Los modelos multivariantes de volatilidad intentan dar respuesta a varias preguntas (Bauwens et ál., 2006):

- ¿Es la volatilidad de un mercado la que lidera o conduce la volatilidad de otros mercados?
- ¿Se transmite la volatilidad de un activo a otros activos directamente (a través de su varianza condicional) o indirectamente (a través de su covarianza condicional)?
- ¿Un *shock* en un mercado aumenta la volatilidad en otros mercados, y en qué magnitud?
- ¿Es el impacto en la volatilidad igual para los *shocks* negativos y positivos de la misma amplitud?

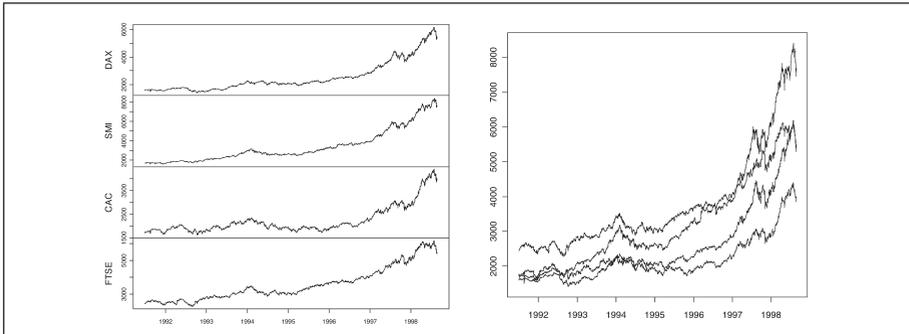
- ¿Es más alta la correlación entre mercados durante los periodos de mayor volatilidad (a veces asociados con crisis financieras)?
- ¿Es cada vez mayor la correlación entre mercados, tal vez debido a la globalización financiera?

Antes de introducir los modelos condicionales empezaremos con los modelos incondicionales o aquellos que suponen que la serie de rendimientos multivariante está independiente e idénticamente distribuida. La distribución normal multivariante es la extensión al campo multivariante de la distribución normal. Una distribución normal multivariante viene determinada por el vector de medias  $\mu$  y la matriz de varianzas covarianzas  $\Sigma$ . A continuación se muestra una serie temporal multivariante compuesta por los precios de cierre diarios de los índices europeos DAX, SMI, CAC y FTSE<sup>76</sup>. En el gráfico de la izquierda se representa cada serie de forma individual. Las series tiene una tendencia creciente y parecen tener un comportamiento muy similar. Este comportamiento se aprecia mejor en el gráfico de la derecha donde las series se representan superpuestas.

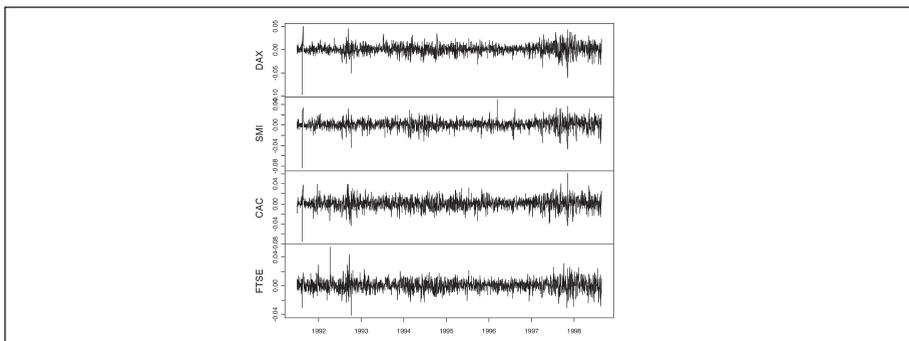
---

<sup>76</sup> La serie se encuentra en el paquete datasets de R y es proporcionada por Erste Bank AG. Si representamos nuestra serie temporal multivariante de rendimientos en una matriz con  $k$  columnas compuestas por los distintos índices (DAX, SMI, CAC y FTSE) y  $T$  filas compuesta por las distintas observaciones temporales (1.860 observaciones diarias) la estimación de la distribución normal multivariante consistiría simplemente en la estimación de la media por columnas (índices) y de la matriz de varianzas-covarianzas entre las  $k$  series temporales. Por ejemplo, para la estimación de la distribución normal multivariante y su posterior simulación podemos efectuarla simplemente mediante las funciones `assetsFit()` y `assetsSim()` del paquete `fAssets` de `Rmetrics`:

```
library(fAssets)
data(EuStockMarkets)
x=returns(EuStockMarkets)
x=na.omit(x)
fit=print(assetsFit(x, method = c("norm")))
Para simular una posible senda a un año:
y=assetsSim(n = 252, dim = 4, model = fit@model)
```



Como se observa, los anteriores índices no son estacionarios por lo que calculamos los rendimientos logarítmicos que se muestran en el gráfico inferior. Los rendimientos son estacionarios y parece que su comportamiento está muy relacionado, existiendo co-movimientos entre los distintos mercados.



De esta forma podemos calcular la matriz  $\hat{\rho}_0$  formada por los coeficientes de correlación incondicionales entre las series. En la tabla inferior se muestran dichos coeficientes, la mayor relación lineal se aprecia entre el índice CAC y el DAX mientras que la menor entre el FTSE y el SMI.

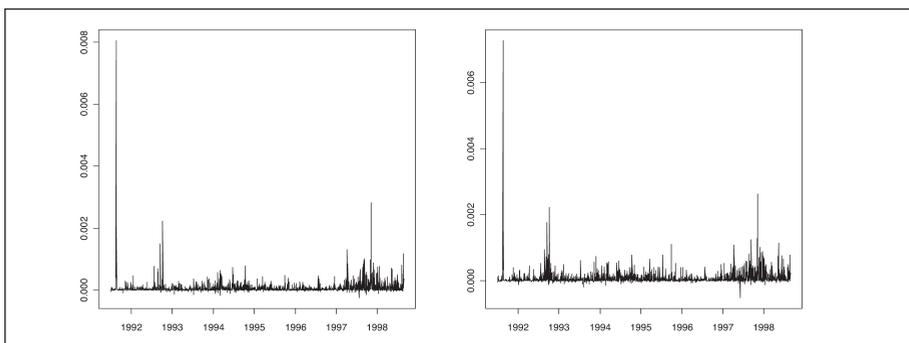
	DAX	SMI	CAC	FTSE
DAX	1	0,703	0,734	0,639
SMI	0,703	1	0,616	0,585
CAC	0,734	0,616	1	0,649
FTSE	0,639	0,585	0,649	1

En el caso univariante hemos analizado si las varianzas de los rendimientos varían con el tiempo y están autocorrelacionadas. En el campo multivariante se realiza el estudio de las propiedades de correlación entre las series, o más precisamente, la covarianza. Investigamos si las covarianzas varían con el tiempo y están autocorrelacionadas. La covarianza entre dos rendimientos para la serie  $i$  y la serie  $j$  viene dada por:

$$\sigma_{ij,t} = E\{[r_{it} - E(r_{it})][r_{jt} - E(r_{jt})]\} = E(r_{it}, r_{jt}) - E(r_{it})E(r_{jt})$$

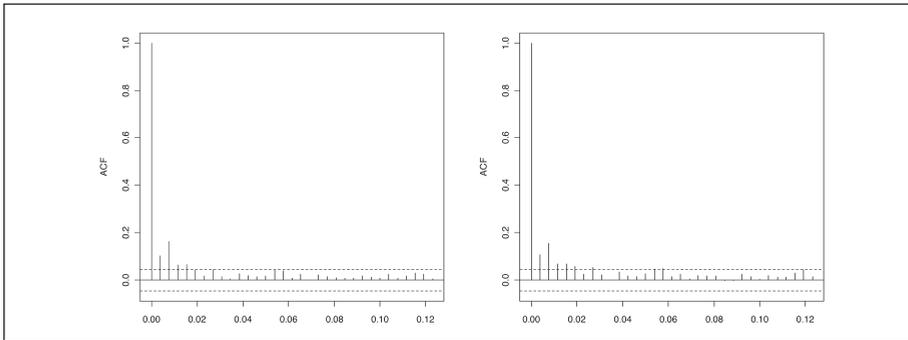
La anterior ecuación afirma que la covarianza entre dos rendimientos es la expectativa de los productos cruzados menos el producto de las expectativas. Por lo que si supusiéramos que la media de los rendimientos es cero para ambas series de rendimientos tendríamos que  $\sigma_{ij,t} = E(r_{it}, r_{jt})$ . De esta forma los productos cruzados de los rendimientos se pueden justificar como una aproximación a las covarianzas.

El gráfico inferior izquierdo muestra la covarianza  $\sigma_{ij,t} = E(r_{it}, r_{jt})$  entre los rendimientos para DAX y SMI mientras que el derecho entre DAX y CAC. Se aprecia como las anteriores covarianzas son positivas para casi todos los periodos de la muestra y muestran un patrón de comportamiento muy similar. Dichos gráficos nos ofrecen una visión de la dinámica temporal de la correlación y podría ser utilizado para determinar la estabilidad de las correlaciones en el tiempo.



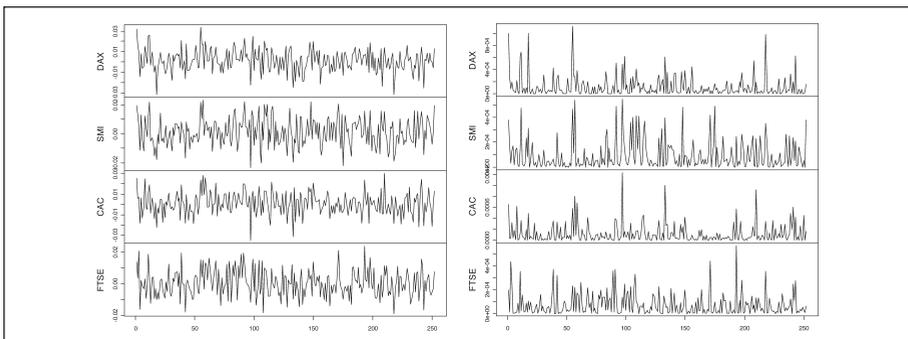
Al igual que en una serie univariante se puede emplear el correlograma de los rendimientos al cuadrado para analizar si la varianza de la misma está autocorrelacionada, en el campo multivariante se puede emplear el correlograma del producto vectorial de los rendimientos de dos series para determinar si la covarianza de

estas dos series está autocorrelacionada. El gráfico inferior izquierdo muestra la autocorrelación de los productos cruzados de la covarianza entre los rendimientos para DAX y SMI mientras que el derecho entre DAX y CAC. Se observan como los primeros coeficientes son significativos y muestran nuevamente un patrón similar.



Las anteriores apreciaciones pueden llevar a considerar modelos de volatilidad para modelizar el comportamiento de las anteriores series. Sin embargo, antes de introducir tales modelos continuemos suponiendo la hipótesis base de que los rendimientos logarítmicos siguen una distribución normal multivariante.

Mediante la distribución normal multivariante ajustada a la serie histórica podemos realizar una simulación de los rendimientos de dichos índices a lo largo del próximo año. En el primero de los gráficos se muestra una posible senda de los rendimientos, mientras que en el segundo se muestra la evolución de los rendimientos al cuadrado.



Como se observa en los anteriores gráficos la simulación de los rendimientos mediante la distribución normal multivariante permite que los rendimientos estén correlacionados. De esta forma los valores máximos y mínimos tienden a aparecer de forma conjunta en todas las series. La distribución normal multivariante no permite ni que los rendimientos de cada serie se vean afectados por su comportamiento pasado ni el de las otras series, ni en media ni en volatilidad.

La simulación de los rendimientos de una cartera a través de la distribución normal multivariante la podemos realizar mediante el siguiente procedimiento<sup>77</sup>:

- Generar una matriz de muestras de variables uniformes (0,1), cuyas dimensiones son el número de índices que hay en la cartera y el número de puntos temporales que se desea efectuar (ejemplo 12 para datos mensuales y una simulación a un año)<sup>78</sup>. Mediante la inversa de la función de distribuciones normal estándar obtener una matriz de muestras de la normal estándar.
- Correlacionar las normales estándar empleando la matriz de correlaciones histórica, por ejemplo empleando la descomposición de Cholesky.
- A partir de la media y la desviación estándar de cada índice calcular el rendimiento de cada índice<sup>79</sup>.
- Una vez obtenidos los rendimientos correlacionados de cada índice ponderar por el peso que cada uno de ellos tiene en la cartera para obtener el rendimiento de ésta.
- Este procedimiento obtiene una posible senda de rendimientos (y por lo tanto de precios) para cada uno de los índices. Repetir los pasos anteriores el número de veces deseada para obtener distintos caminos y así poder elaborar un gráfico de evolución temporal, calcular medidas de riesgo (VaR, TVaR, etc.).

---

<sup>77</sup> La explicación de este procedimiento ha sido pensada para un usuario que emplee Excel o R. En el caso de emplear en Excel el complemento *@risk* dicho procedimiento se simplifica, de forma que en vez de trabajar con matrices simplemente trabajaremos con vectores.

<sup>78</sup> En el caso de emplear datos diarios es frecuente suponer 250, 252 o 260 días de negociación al año.

<sup>79</sup> Se obtiene simplemente como la media más la multiplicación de la desviación estándar por la normal estándar correlacionada para cada uno de los índices.

Ejemplo. Dados los siguientes datos para la rentabilidad diaria de los índices DAX, SMI, CAC y FTSE y sabiendo que las ponderaciones en la cartera son del 20%, 15%, 25% y 40% realizar una simulación de la rentabilidad de la cartera para los próximos 10 días.

Índice	Pesos	Rendimiento	Desviación	Matriz de correlaciones			
DAX	20%	0,07%	0,81%	1	0,703	0,734	0,639
SMI	15%	0,08%	0,72%	0,703	1	0,616	0,585
CAC	25%	0,04%	0,90%	0,734	0,616	1	0,649
FTSE	40%	0,04%	0,67%	0,639	0,585	0,649	1

Una vez generados los rendimientos normales para cada índice y correlacionados calculamos la rentabilidad de la cartera mediante la ponderación de las cuantías invertidas en cada índice<sup>80</sup>.

DAX	SMI	CAC	FTSE	Cartera
-0,16%	-0,32%	-0,48%	0,17%	-0,13%
-1,27%	0,32%	-1,16%	-0,02%	-0,50%
0,45%	0,53%	0,41%	0,40%	0,43%
1,12%	0,64%	0,97%	0,75%	0,86%
-1,14%	0,24%	-1,01%	0,19%	-0,37%
0,09%	-0,18%	0,32%	-0,17%	0,00%
-1,30%	-1,40%	-1,65%	0,36%	-0,74%
0,71%	0,01%	0,29%	-0,17%	0,15%
0,59%	0,54%	1,18%	1,22%	0,99%
0,68%	1,10%	-0,14%	-0,16%	0,20%
0,41%	-0,79%	-0,44%	0,60%	0,09%
1,66%	1,16%	1,37%	0,16%	0,91%

<sup>80</sup> El ejercicio se ha resuelto suponiendo rendimientos aritméticos. La inversión en una cartera compuesta por varios índices proporciona una menor volatilidad en los rendimientos que la inversión total en índices individuales.

Con anterioridad hemos visto que en el caso univariante se han propuesto distribuciones alternativas a la distribución normal para recoger las características empíricas observadas en los rendimientos. De forma análoga, en el campo multivariante también se extienden algunas de las distribuciones empleadas en el campo univariante que ponen un mayor énfasis en las colas. La principal distribución multivariante alternativa a la distribución normal, al igual que en el campo univariante, es la distribución  $t$  de Student, que proporciona mayores colas que las de la distribución normal multivariante y la distribución normal multivariante asimétrica (*skew-Normal*)<sup>81</sup>. Otra posibilidad es la mixtura de distribuciones, donde una vez más la principal solución empleada es la mixtura discreta de dos distribuciones normales multivariantes. La última alternativa en el caso multivariante es recurrir a la teoría de cópulas.

## 2.2. DISTRIBUCIONES MULTIVARIANTES PROCEDENTES DE LA TEORÍA DE CÓPULAS

La teoría de cópulas establece que cualquier función de distribución conjunta puede ser descompuesta en sus  $N$  distribuciones marginales y la función cópula que describe completamente la dependencia entre las  $N$  variables. Para la mayor parte de las distribuciones univariantes es simplemente imposible especificar su extensión multivariante que permita que su estructura de dependencia sea calculada, por lo que los modelos basados en cópulas son especialmente útiles en aquellas situaciones en los que no se satisface la hipótesis de normalidad.

Una distribución multivariante está compuesta por dos componentes: las distribuciones marginales univariantes que caracterizan a cada una de las series y la estructura de dependencia entre cada una de las variables. La estructura de dependencia entre variables es lo que se conoce como cópula, y a través de la combinación

---

<sup>81</sup> La estimación y simulación de la distribución  $t$  de Student multivariante asimétrica (*skew-Student-t distribution*) puede realizarse de nuevo las funciones `assetsFit()` y `assetsSim()` del paquete `fAssets` de `Rmetrics` a partir de la serie multivariante `x` de rendimientos. Siguiendo con el ejemplo anterior:

```
fit=print(assetsFit(x, method = c("st")))  
y=assetsSim(n = 252, dim = 4, model = fit@model)
```

La estimación y simulación de la distribución normal multivariante asimétrica se realizaría mediante:

```
fit=print(assetsFit(x, method = c("snorm")))  
y=assetsSim(n = 252, dim = 4, model = fit@model)
```

de distintas cópulas con distintas distribuciones marginales podemos construir un elevado número de distribuciones multivariantes distintas.

Para proyectar los rendimientos de  $k$  series temporales  $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ , se requiere la generación de  $k$  variables aleatorias uniformes para por el método de la inversa obtener la distribución marginal que mejor se ajuste a los datos de cada serie. Como los rendimientos son dependientes, debemos generar las uniformes de forma dependiente. Por lo tanto, para un conjunto de distribuciones marginales dadas, la estructura de dependencia entre las variables  $(r_1, r_2, \dots, r_k)$  está determinada completamente por la estructura de las variables uniformes de las que proceden. La estructura de dependencia se relaciona con una función específica que describe por completo la relación entre las variables aleatorias, y que se denomina cópula.

Formalmente sean  $u_1, u_2, \dots, u_k$   $n$  realizaciones de una distribución uniforme. La relación que se establece entre ellas se describe a través de la función de distribución conjunta o función cópula  $C$ :

$$C(U) = C(u_1, u_2, \dots, u_k) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_k \leq u_k)$$

Donde:  $C(U)$  es una función de distribución multivariante.

Alternativamente podemos definir una cópula bivalente como cualquier función  $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  con las siguientes propiedades:

- $C(u, v)$  es un componente creciente de  $u$ .
- $C(u, 1) = u$  y  $C(1, v) = v$  para  $\forall u, v \in [0,1]$ .
- $C(u_1, u_2) - C(u_1, v_2) - C(v_1, v_2) \geq 0$

Las cópulas más empleadas son las arquimedianas (Gumbel, Frank y Clayton principalmente) y las elípticas (Gaussiana o normal, y la cópula  $t$  de Student). Introduciremos brevemente estas cópulas para centrarnos posteriormente en su aplicación al campo que nos ocupa.

La familia de cópulas de Gumbel, Gumbel-Hougaard o logística (Gumbel, 1960 y Hougaard, 1986) permite dependencia en la cola derecha. Para el caso n-dimensional la cópula tiene la expresión:

$$C_{\alpha}(U) = \exp\{-[(-\ln u_1)^{\alpha} + \dots + (-\ln u_n)^{\alpha}]^{\frac{1}{\alpha}}\}$$

La familia de cópulas de Frank (1979) es radialmente simétrica, lo que supone que la distribución de los eventos aleatorios del lado superior es equivalente a la distribución de los eventos del lado inferior. Para el caso n-dimensional la cópula tiene la expresión:

$$C_{\alpha}(U) = \frac{-1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1) \dots (e^{-\alpha u_n} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)} \right)$$

El parámetro característico de la cópula  $\alpha$  puede tomar cualquier valor menos 0, en cuyo caso tenemos la cópula independiente.

La cópula de Clayton es una cópula asimétrica que exhibe dependencia en la cola izquierda. Para el caso n-dimensional la cópula viene dada por:

$$C(U) = \left( 1 - n + \sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha} \right)^{-1/\alpha}$$

Las cópulas Gaussiana o Normal y la cópula t de Student pertenecen a la familia de cópulas elípticas que están basadas en las distribuciones multivariantes elípticas<sup>82</sup>. Las cópulas elípticas son simétricas y sólo pueden existir cuando el coeficiente de correlación lineal no es igual a la unidad<sup>83</sup>. Las cópulas elípticas tienen como ventajas, su relativa sencillez de implantación, fácil parametrización a través del coeficiente de

<sup>82</sup> Sea X un vector n-dimensional aleatorio y  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz semi-definida positiva simétrica. El vector aleatorio X se dice que tiene una distribución elíptica con parámetros  $\mu$  y  $\Sigma$  si tiene como función generadora o característica  $\phi(t) = \Phi(t^T \Sigma t)$  para la variable aleatoria t. La cópula C para el vector aleatorio X es una cópula elíptica si y sólo si es la cópula de una distribución elíptica. Las cópulas elípticas están únicamente determinadas por su matriz de correlación y el conocimiento de su tipo o clase.

<sup>83</sup> Por tanto, el coeficiente de correlación lineal debe tomar valores en el rango [-1,1], siendo imposible simular una cópula elíptica n-dimensional cuando todos los coeficientes de correlación lineal de la matriz de correlaciones son iguales a uno.

correlación lineal y su rapidez de simulación. Además, proporcionan una cierta flexibilidad para la modelización de dependencias en las colas<sup>84</sup>.

La cópula normal es muy empleada en la práctica por su facilidad de empleo y porque su estructura de dependencia está completamente descrita por su matriz de correlación. Debe destacarse sin embargo, que la familia de cópulas normales no presenta dependencia en la cola, lo cual puede conducir a una infravaloración del riesgo realmente asumido. La cópula Normal  $n$ -dimensional se define formalmente como sigue. Sea  $X$  un vector  $n$ -dimensional con una distribución normal multivariante con vector de medias cero y matriz de correlación lineal  $\Sigma$ ,  $C_{\Sigma}(U) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1) \dots \Phi^{-1}(u_n))$  es la cópula normal donde  $\Phi_{\Sigma}$  es la función de distribución conjunta de  $n$  variables normales estandarizadas con matriz de correlaciones  $\Sigma$  y  $\Phi^{-1}$  es la inversa de la función de distribución normal estándar univariante.

A semejanza de las cópulas normales, las cópulas  $t$  de Student son cópulas simétricas y elípticas cuya estructura de dependencia está completamente descrita por la matriz de correlaciones entre las variables. Sin embargo, en contraste con la cópula de Gauss, la cópula  $t$  de Student presenta dependencia en ambas colas. Dicha dependencia será más elevada cuanto menor sea el número de grados de libertad. Además, debe resaltarse que la cópula normal es una cópula  $t$  de Student con infinitos grados de libertad. Por eso, se dice que los grados de libertad de una cópula  $t$  de Student se pueden emplear para calibrar la cópula a las medidas de dependencia en la cola. Sea  $X$  un vector  $n$ -dimensional con una distribución  $t$  de Student multivariante con  $\nu$  grados de libertad, vector de medias cero y matriz de correlación lineal  $\Sigma$ ,  $C_{\Sigma}(U) = t_{\nu, \Sigma}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n))$  donde  $t_{\nu, \Sigma}$  es la función de distribución conjunta de  $n$  variables  $t$  de Student estandarizadas con  $\nu$  grados de libertad y matriz de correlaciones  $\Sigma$ , y  $t_{\nu}^{-1}$  es la inversa de la función de distribución  $t$  de Student estándar univariante con  $\nu$  grados de libertad.

---

<sup>84</sup> Como veremos posteriormente la cópula  $t$  de Student permite el ajuste de la dependencia en las colas a través del número de grados de libertad. Así, cuanto mayor sea el número de grados de libertad menor será la dependencia en ambas colas.

### 2.2.1. Estimación de cópulas

Antes de generar variables correlacionadas mediante cópulas debemos estimar los parámetros de las distribuciones marginales de mejor ajuste a los datos univariantes, y los parámetros de la cópula que mejor representen la estructura de dependencia empírica entre las variables. Para estimar los parámetros de las cópulas existen principalmente dos métodos: el método de máxima verosimilitud (MLE) y la inferencia de funciones para las marginales (IFM). En los trabajos de Genest y Rivest (1993), Joe (1997), Frees y Valdez (1998), Klugman y Parsa (1999), Durrleman et ál. (2000), De Matteis (2001) y Cherubini et ál. (2004) se aborda la estimación de las cópulas.

Los métodos MLE e IFM maximizan las funciones de máximo verosimilitud. El método MLE estima los parámetros de las cópulas y de las funciones de distribución marginales de forma simultánea. Por contra, el método IFM<sup>85</sup> es un proceso en dos etapas, en una primera etapa maximiza la función de máximo verosimilitud de las funciones marginales y, en la segunda etapa utiliza estos parámetros estimados para maximizar la función de máximo verosimilitud de la cópula, obteniendo así sus parámetros. A continuación nos centraremos en la estimación por el método IFM para las cinco cópulas analizadas.

El método IFM (*Inference Functions for Margins*) es un método en dos etapas en el que la estimación de los parámetros de las distribuciones marginales se realiza en la etapa primera, mientras que la estimación de los parámetros de dependencia de la cópula se realiza en la segunda. La ventaja de este método sobre el método MLE, es que al dividir el proceso en dos etapas se consigue generalmente estimar los parámetros en un menor tiempo. En el caso  $n$ -dimensional donde los parámetros de la distribución marginal para la variable  $i$ -ésima se denota por  $\theta_i$  y el vector de parámetros de dependencia para la cópula se denota como  $\theta_d$ . La función de densidad multivariante es  $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \theta_d)$ , esta función puede ser escrita en términos de la cópula como:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(F_1(x_1, \theta_1), \dots, F_n(x_n, \theta_n); \theta_d) \prod_{i=1}^n f_i(x_i, \theta_i)$$

<sup>85</sup> Su nombre proviene de McLeish y Small (1988). Véase también Joe y Xu (1996).

Siendo  $f_i$  la función de densidad de  $F_i$  y  $C$  la función de densidad de la cópula que viene dada por la expresión:

$$\frac{d C(u_1, \dots, u_n; \theta_d)}{d u_1, \dots, u_n}$$

En el caso de  $K$  observaciones independientes de  $n$  variables aleatorias  $(x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t)$  para  $t = 1, 2, \dots, K$  la función de máxima verosimilitud viene dada por la expresión:

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \theta_d; x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t) = \sum_{t=1}^T f(x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t)$$

Por lo que el logaritmo de la función de máxima verosimilitud es:

$$\begin{aligned} \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \theta_d; x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t) \\ = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln(f_i(x_i^t, \theta_i)) + \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t, \theta_1), \dots, F_n(x_n^t, \theta_n); \theta_d) \end{aligned}$$

Donde el conjunto de parámetros de las distribuciones marginales univariantes y de la cópula es  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \theta_d\}$ . Dicha función está formada por la suma dos componentes. El primer término  $\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln(f_i(x_i^t, \theta_i))$  se refiere sólo a los parámetros de las distribuciones marginales univariantes ( $\theta_i$ ). El segundo término  $\sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t, \theta_1), \dots, F_n(x_n^t, \theta_n); \theta_d)$  implica tanto los parámetros de dependencia de la cópula  $\theta_d$  como los parámetros de las distribuciones marginales univariantes ( $\theta_i$ ).

Por lo tanto, el método IFM realiza las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros  $\theta_i$ ,  $\hat{\theta}_i$ , maximizando el primer término de la función de log-máxima verosimilitud, es decir<sup>86</sup>:

$$\hat{\theta}_{1,2,\dots,n} = \arg \max_{\theta_i} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln(f_i(x_i^t, \theta_i))$$

<sup>86</sup> Estos parámetros también son útiles en el caso de una estimación conjunta mediante MLE como valores iniciales en una rutina de optimización.

En la segunda etapa se maximiza el segundo término de la función de log-máxima verosimilitud, obteniendo así el parámetro de dependencia de la cópula. Para realizar esta maximización se toma como datos los  $\hat{\theta}_{1,2,\dots,n}$  estimados en la etapa anterior, es decir:

$$\hat{\theta}_d = \arg \max_{\theta_d} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t, \hat{\theta}_1), \dots, F_n(x_n^t, \hat{\theta}_n); \theta_d)$$

A continuación estableceremos la estimación de la cópula Normal por ser la hipótesis que emplea la distribución normal multivariante para unir las distribuciones normales univariantes. Para el ajuste por IFM de la cópula normal a una serie multivariante de rendimientos procederemos de la siguiente manera:

- En primer lugar ajustaremos cada distribución univariante  $F_i$  a cada una de las series univariantes de rendimientos  $r_{i,t}$  empleando el método de máxima verosimilitud.
- Posteriormente calcularemos para cada una de las series de rendimientos y cada observación de las mismas  $u_{i,t} = F_i(r_{i,t})$ .
- Obtenemos  $\zeta_{i,t} = \Phi^{-1}(u_{i,t})$
- Finalmente estimamos la matriz de correlación  $\Sigma$  maximizando:

$$\ln L = \sum_{t=1}^T \ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta_t^t(\Sigma^{-1} - \mathbf{I}_n)\zeta_t}}{\sqrt{|\Sigma|}} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [\zeta_t^t(\Sigma^{-1} - \mathbf{I}_n)\zeta_t + \ln|\Sigma|]$$

---

**Ejemplo.** Supongamos que tenemos los rendimientos logarítmicos  $r_i$  de 3 activos (A, B y C) a lo largo de 12 periodos temporales. Deseamos realizar el ajuste de una cópula Normal.

El primer paso es el ajuste de los parámetros de cada distribución marginal para la serie de rendimientos de cada activo. Como ya sabemos las principales distribuciones son la normal, la t de Student y la mixtura de normales. Para mantener el ejemplo sencillo supongamos que ajustamos a una distribución normal cada serie de rendimientos. En teoría debiéramos emplear la distribución de mejor ajuste a cada una de las series lo que

podiera dar lugar a emplear distribuciones distintas para cada una de ellas. En nuestro ejemplo, los parámetros para la media y desviación estimados para cada serie son:  $\mu_A = 0,12\%$ ,  $\sigma_A = 1,14\%$ ,  $\mu_B = 0,19\%$ ,  $\sigma_B = 1,92\%$ ,  $\mu_C = 0,19\%$  y  $\sigma_C = 0,72\%$ .

El segundo paso, consiste en calcular  $F_i(r_{i,t})$ . Dada la hipótesis de normalidad, la función acumulativa normal para la media y desviación típica estimadas en el paso anterior. En nuestro ejemplo, para  $t = 1$  y el activo A simplemente pondríamos en Excel =DISTR.NORM(-2,82%;0,12%;1,14%;1)=0,49%. Para el activo B =DISTR.NORM(0,07%;0,19%;1,92%;1)=47,45% y así sucesivamente.

Posteriormente debemos obtener el vector formado por  $\zeta_{i,t} = \Phi^{-1}(u_{i,t})$ . En nuestro ejemplo, para  $t = 1$  y el activo A, simplemente emplearíamos en Excel la fórmula =DISTR.NORM.ESTAND.INV(0,49%), para el activo B DISTR.NORM.ESTAND.INV(47,45%) y así sucesivamente.

t	$r_{i,t}$			$F_i(r_{i,t})$			$\zeta_{i,t} = \left(\Phi^{-1}(u_{i,t})\right)^t$			ln L
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	
1	-2,82%	0,07%	0,46%	0,49%	47,45%	64,80%	-258,59%	-6,39%	38,00%	-0,11
2	-0,07%	-2,81%	-0,45%	43,50%	5,87%	19,01%	-16,37%	-156,58%	-87,74%	0,03
3	0,99%	3,15%	-0,92%	77,93%	93,85%	6,34%	77,00%	154,24%	-152,68%	0,34
4	1,44%	0,83%	-0,33%	87,83%	63,02%	23,84%	116,63%	33,25%	-71,16%	0,18
5	1,53%	1,83%	0,71%	89,35%	80,34%	76,59%	124,56%	85,40%	72,54%	0,17
6	-0,49%	-0,61%	-0,33%	29,68%	33,78%	23,84%	-53,36%	-41,85%	-71,16%	0,05
7	0,41%	2,76%	0,37%	60,22%	90,97%	60,09%	25,91%	133,90%	25,56%	0,07
8	-0,71%	-1,15%	-0,71%	23,35%	24,19%	10,81%	-72,74%	-70,01%	-123,66%	0,06
9	0,95%	0,47%	0,07%	76,88%	55,75%	43,69%	73,47%	14,47%	-15,89%	0,06
10	0,09%	-1,45%	1,37%	49,09%	19,58%	94,92%	-2,28%	-85,66%	163,73%	-0,03
11	0,51%	-2,71%	0,65%	63,58%	6,51%	73,97%	34,72%	-151,37%	64,25%	-0,27
12	-0,44%	1,93%	1,33%	31,22%	81,76%	94,32%	-48,96%	90,61%	158,20%	-0,02
									Total	0,55

Finalmente, en la última columna se muestra el valor de la función de log-verosimilitud para cada observación. Por ejemplo, el valor calculado para  $t = 1$  se obtiene como<sup>87</sup>:

<sup>87</sup> En Excel podríamos haber empleado =LN(1/RAIZ(MDETERM(SI)\*EXP(-0,5\*MMULT(SI; MMULT(MINVERSA(SI)- [I, TRANSPONER(SI) ])))) y dado que es una fórmula con operaciones matriciales CTRL+MAYÚS+ENTRAR.

$$\ln \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi_t^t(\Sigma^{-1}-\mathbf{I}_n)\xi_t}}{\sqrt{|\Sigma|}} = \ln \frac{e^{-\frac{1}{2}(-258,59\% \quad -6,39\% \quad 38,00\%)(\Sigma^{-1}-\mathbf{I}_n)\begin{pmatrix} -258,59\% \\ -6,39\% \\ 38,00\% \end{pmatrix}}}{\sqrt{|\Sigma|}}$$

Donde  $\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , y la matriz  $\Sigma$  es simétrica de orden 3 y con unos en la diagonal. Debemos maximizar la suma del valor alcanzado en cada observación sujeto a las restricciones oportunas sobre la matriz  $\Sigma$ . El valor máximo alcanzado en nuestro ejemplo se corresponde con el valor de 0,55 que se obtiene utilizando la siguiente matriz de correlación:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,27 & -0,11 \\ 0,27 & 1 & -0,01 \\ -0,11 & -0,01 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que hemos considerado distribuciones marginales normales para cada serie de rendimientos esta matriz coincide con la matriz de correlaciones entre dichas series. Es decir, al emplear distribuciones marginales normales y estructura determinada por la cópula normal hemos obtenido la distribución normal multivariante.

La densidad de la cópula n-dimensional t de Student con  $\nu$  grados de libertad y matriz de correlación no singular  $\Sigma$  viene dada por:

$$\frac{d^n C_{(u_1, \dots, u_n)}}{du_1 \cdot \dots \cdot du_n} = \frac{f_{\nu, \Sigma}(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n))}{\prod_{i=1}^n f_\nu(t_\nu^{-1}(u_i))}$$

Donde  $t_\nu^{-1}(u_i)$  es la inversa de la función de distribución de la t de Student con  $\nu$  grados de libertad,  $f_\nu$  es la función de densidad de la distribución univariante y  $f_{\nu, \Sigma}$  es la función de densidad conjunta de un vector aleatorio distribuido como una t de Student. La anterior función de densidad se puede expresar como:

$$\frac{d^n C_{(u_1, \dots, u_n)}}{du_1 \cdot \dots \cdot du_n} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)^n \sqrt{|\Sigma|}} \left( \prod_{i=1}^n (1 + s_i^2/\nu) \right)^{-(\nu+1)/2} (1 + \mathbf{s}^t \Sigma^{-1} \mathbf{s} / \nu)^{-(\nu+n)/2}$$

Siendo  $s_i = t_v^{-1}(u_i)$  y  $s^t$  el vector  $(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n))$ . En el caso bivalente la expresión de la densidad de la cópula t de Student toma la siguiente expresión:

$$\frac{d^n C_{(u_1, u_2)}}{du_1 du_2} = 0,5 \left( \frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+v}{2}\right)} \right)^2 v \sqrt{(1-\rho^2)} [(1+s_1^2/v)(1+s_2^2/v)]^{(v+1)/2} \left[ 1 + (s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2) / ((1-\rho^2)v) \right]^{-(v+2)/2}$$

Donde  $s_1 = t_v^{-1}(u_1)$  y  $s_2 = t_v^{-1}(u_2)$ .

#### Ejemplo. Estimación cópula t de Student bivalente.

A partir de los valores de las uniformes  $u_1$  y  $u_2$ <sup>88</sup> y para unos valores iniciales  $v=3,5$  y  $\rho=0,60$ , el valor del logaritmo de la función de densidad toma para la primera observación el siguiente valor:

$$\ln \left[ 0,5 \left( \frac{\Gamma\left(\frac{3,5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+3,5}{2}\right)} \right)^2 3,5 \sqrt{(1-0,6^2)} [(1+s_1^2/3,5)(1+s_2^2/3,5)]^{(3,5+1)/2} \left[ 1 + (s_1^2 - 2 \cdot 0,6 s_1 s_2 + s_2^2) / ((1-0,6^2)3,5) \right]^{-(3,5+2)/2} \right]$$

Para calcular en Excel  $\Gamma\left(\frac{3,5}{2}\right)$  se emplea =EXP[GAMMA.LN()], a modo de ejemplo  $\Gamma\left(\frac{3,5}{2}\right)$  es =EXP[GAMMA.LN(1,75)]=0,92.

Para el cálculo de  $s_1 = t_v^{-1}(u_1)$  se puede emplear en Excel esta función (Venter, 2003):

$$=\text{SIGNO}(u_j-0,5)*v^0,5*(-1+1/\text{DISTR.BETA.INV}(\text{ABS}(2*u_j-1);0,5;v/2))^{(-0,5)}$$

Por ejemplo, para la primera observación  $S_1$  toma el valor:

$$=\text{SIGNO}(0,06-0,5)*3,5^0,5*(-1+1/\text{DISTR.BETA.INV}(\text{ABS}(2*0,06-1);0,5;3,5/2))^{(-0,5)}=-2,05$$

<sup>88</sup> Provenirían del ajuste a los datos de partida a la marginal deseada (distribución univariante normal, t de Student, etc.).

Obs.	$u_1$	$u_2$	$s_1$	$s_2$	Ln t Student
1	0,06	0,09	-2,05	-1,67	1,18
2	0,99	0,99	4,06	4,06	2,90
3	0,95	0,96	2,22	2,44	1,60
4	0,74	0,73	0,71	0,68	0,51
5	0,67	0,35	0,48	-0,42	-0,08
6	0,68	0,43	0,51	-0,19	0,08
7	0,87	0,77	1,34	0,83	0,56
8	0,12	0,02	-1,41	-3,19	0,62
9	0,09	0,08	-1,67	-1,78	1,14
10	0,26	0,72	-0,71	0,64	-0,47
11	0,27	0,08	-0,68	-1,78	0,22
12	0,67	0,75	0,48	0,75	0,43
				Total	8,69

Debemos sumar el valor de la función de densidad para las distintas observaciones y maximizar sujeto a las oportunas restricciones (coeficiente de correlación entre -1 y 1 y grados de libertad positivos). Los valores que maximizan la función son  $\rho = 0,78$  y  $\nu = 1,95$  que proporcionan un valor de la función de log-verosimilitud de 9,96.

La cópula de Clayton se emplea frecuentemente en el ámbito financiero dado que al presentar dependencia en la cola inferior, es una buena candidata para recoger los acontecimientos extremos conjuntos en un mercado. Para el ajuste por IFM de la cópula de Clayton a una serie multivariante de rendimientos procederemos de la siguiente manera:

- En primer lugar ajustaremos cada distribución univariante  $F_i$  a cada una de las series univariantes de rendimientos  $r_{i,t}$  empleando el método de máxima verosimilitud.
- Posteriormente calcularemos para cada una de las series de rendimientos y cada observación de las mismas  $u_{i,t} = F_i(r_{i,t})$ .

- Finalmente estimamos el parámetro  $\alpha$  característico de la cópula de Clayton maximizando la función de log-verosimilitud:

$$\ln L = \sum_{t=1}^T \left[ \left( 1 - n + \sum_{i=1}^n u_{i,t}^{-\alpha} \right)^{-n-\frac{1}{\alpha}} \prod_{j=1}^n u_{j,t}^{-1-\alpha} [(j-1)\alpha + 1] \right]$$

**Ejemplo.** Supongamos que tenemos nuevamente los rendimientos logarítmicos  $r_{i,t}$  de 3 activos (A, B y C) a lo largo de 12 periodos temporales. Deseamos realizar el ajuste de una cópula de Clayton.

El primer paso es el ajuste de los parámetros de cada distribución marginal para la serie de rendimientos de cada activo. Nuevamente por mantener el ejemplo lo más sencillo posible supondremos que ajustamos cada serie a una distribución normal univariante, El segundo paso consiste en calcular  $F_i(r_{i,t})$  dada la hipótesis de normalidad.

Finalmente, estimamos el parámetro  $\alpha$  característico de la cópula de Clayton maximizando la función de log-verosimilitud. Por ejemplo, dado que  $n = 3$  el valor calculado para  $t = 1$  se obtiene como<sup>89</sup>:

$$\ln \left[ (1 - 3 + 0,49\%^{-\alpha} + 47,45\%^{-\alpha} + 64,80\%^{-\alpha})^{-3-\frac{1}{\alpha}} (0,49\%^{-1-\alpha})(47,45\%^{-1-\alpha})(64,80\%^{-1-\alpha})(\alpha + 1)(2\alpha + 1) \right]$$

En la última columna se muestra el valor de la función de log-verosimilitud para cada observación para el siguiente valor inicial de  $\alpha = 0,5$ .

<sup>89</sup> Para los datos empleados en este ejemplo no se consigue optimizar el valor de dicha función.

t	r <sub>i,t</sub>			F <sub>i</sub> (r <sub>i,t</sub> )			Ln t
	A	B	C	A	B	C	
1	-2,82%	0,07%	0,46%	0,49%	47,45%	64,80%	-2,70
2	-0,07%	-2,81%	-0,45%	43,50%	5,87%	19,01%	0,18
3	0,99%	3,15%	-0,92%	77,93%	93,85%	6,34%	-1,39
4	1,44%	0,83%	-0,33%	87,83%	63,02%	23,84%	-0,19
5	1,53%	1,83%	0,71%	89,35%	80,34%	76,59%	0,62
6	-0,49%	-0,61%	-0,33%	29,68%	33,78%	23,84%	0,29
7	0,41%	2,76%	0,37%	60,22%	90,97%	60,09%	0,33
8	-0,71%	-1,15%	-0,71%	23,35%	24,19%	10,81%	0,56
9	0,95%	0,47%	0,07%	76,88%	55,75%	43,69%	0,16
10	0,09%	-1,45%	1,37%	49,09%	19,58%	94,92%	-0,30
11	0,51%	-2,71%	0,65%	63,58%	6,51%	73,97%	-1,01
12	-0,44%	1,93%	1,33%	31,22%	81,76%	94,32%	-0,04
						Total	-3,48

Es decir, para la estimación por máxima verosimilitud de la cópula Clayton es necesario obtener la función de densidad de probabilidad. Esta se calcula como la derivada parcial de la cópula con respecto a sus parámetros ( $u_1$  y  $u_2$  en el caso bivariente). A continuación describiremos las funciones de densidad de las cópulas de Clayton, Gumbel y Frank en el caso bivariente.

La cópula de Clayton para el caso de 2 dimensiones la cópula viene dada por:

$$C(U) = (-1 + u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha})^{-1/\alpha}$$

La primera derivada viene dada por:

$$\frac{dC(u_1, u_2)}{du_1} = u_1^{-1-\alpha} (-1 + u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha})^{-1-\frac{1}{\alpha}}$$

Derivando respecto a  $u_2$  obtenemos:

$$\frac{d^2 C(u_1, u_2)}{du_1 du_2} = (1 + \alpha) u_1^{-1-\alpha} u_2^{-1-\alpha} (-1 + u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha})^{-2-1/\alpha}$$

Se optimiza dicha función o su logaritmo para valores de  $\alpha$  mayores que 1.

La cópula de Frank para el caso bivalente tiene la expresión:

$$C_{\alpha}(U) = \frac{-1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)} \right)$$

La primera derivada viene dada por:

$$\frac{dC_{(u_1, u_2)}}{du_1} = \frac{\exp(-\alpha u_1)}{\frac{1 - \exp(-\alpha)}{1 - \exp(-\alpha u_2)} + \exp(-\alpha u_1) - 1}$$

Derivando respecto a  $u_2$  obtenemos:

$$\frac{d^2 C_{(u_1, u_2)}}{du_1 du_2} = \frac{\alpha \exp(-\alpha u_1) \exp(-\alpha u_2) (1 - \exp(-\alpha))}{[\exp(-\alpha) - 1 + (\exp(-\alpha u_1) - 1)(\exp(-\alpha u_2) - 1)]^2}$$

El parámetro característico de la cópula  $\alpha$  puede tomar cualquier valor menos 0, en cuyo caso tendríamos la cópula independiente.

La cópula de Gumbel para el caso de dos-dimensiones tiene la expresión:

$$C_{\alpha}(U) = \exp\{-[(-\ln u_1)^{\alpha} + (-\ln u_2)^{\alpha}]^{\frac{1}{\alpha}}\}$$

La primera derivada viene dada por:

$$\frac{dC_{(u_1, u_2)}}{du_1} = \exp\{-[(-\ln u_1)^{\alpha} + (-\ln u_2)^{\alpha}]^{\frac{1}{\alpha}}\} \left( \frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}}{u_1} \right) [(-\ln u_1)^{\alpha} + (-\ln u_2)^{\alpha}]^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

Derivando respecto a  $u_2$  obtenemos:

$$\frac{d^2 C_{(u_1, u_2)}}{du_1 du_2} = \frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}}{u_1} \frac{(-\ln u_2)^{\alpha-1}}{u_2} \exp(-A^{1/\alpha}) [A^{-2(\alpha-1)/\alpha} + (\alpha - 1)A^{-(2\alpha-1)/\alpha}]$$

Donde  $A = (-\ln u_1)^{\alpha} + (-\ln u_2)^{\alpha}$

El parámetro característico de la cópula  $\alpha$  puede tomar cualquier valor positivo.

---

### Ejemplo. Estimación cópulas arquimedianas bivariantes

A partir de unos datos observados ajustamos cada serie univariante a la marginal deseada, de esta forma obtenemos nuestra serie de uniformes  $\{u_1 \text{ y } u_2\}$  que cogemos en este ejemplo como datos de partida. El valor de la función de log-verosimilitud para la cópula de Clayton para  $\alpha = 1,78$  y la primera observación es de:

$$\ln[(1 + 1,78)0,55^{-1-1,78}0,61^{-1-1,78}(-1 + 0,55^{-1,78} + 0,61^{-1,78})^{-2-1/1,78}] = 0,32$$

El valor de la función de log-verosimilitud para la cópula de Frank para  $\alpha = 10,49$  y la primera observación es de:

$$\ln \left[ \frac{10,49 \cdot \exp(-10,49 \cdot 0,55) \exp(-10,49 \cdot 0,61) (1 - \exp(-10,49))}{[\exp(-10,49) - 1 + (\exp(-10,49 \cdot 0,55) - 1)(\exp(-10,49 \cdot 0,61) - 1)]^2} \right] = 0,88$$

El valor de la función de log-verosimilitud para la cópula de Gumbel para  $\alpha = 2,76$  y la primera observación, calculado a partir del valor de A, es de:

$$A = (-\ln 0,55)^{2,76} + (-\ln 0,61)^{2,76} = 0,38$$
$$\ln \left[ \frac{(-\ln 0,55)^{2,76-1}}{0,55} \frac{(-\ln 0,61)^{2,76-1}}{0,61} \exp(-A^{1/2,76}) [A^{-2(2,76-1)/2,76} + (2,76 - 1)A^{-(2 \cdot 2,76-1)/2,76}] \right] = 0,71$$

Posteriormente calcularíamos el máximo de la suma de los valores de log-verosimilitud para cada cópula sujetos a las oportunas restricciones acerca del parámetro  $\alpha$ . De esta forma obtenemos un valor de 5,45 para la cópula de Clayton, 8,60 para la cópula de Frank y 8,37 para la cópula de Gumbel producidos por los parámetros anteriormente citados.

Obs.	$u_1$	$u_2$	Ln Clayton	Ln Frank	Ln Gumbel	A
1	0,55	0,61	0,32	0,88	0,71	0,38
2	0,59	0,61	0,33	0,97	0,77	0,32
3	0,91	0,88	0,71	1,31	1,70	0,00
4	0,96	0,86	0,71	1,07	0,38	0,01
5	0,06	0,02	1,52	1,71	1,64	62,91
6	0,75	0,44	-0,01	-0,99	-0,53	0,61
7	0,06	0,33	-1,09	-0,56	-0,26	19,64
8	0,10	0,14	1,26	1,20	1,07	16,77
9	0,78	0,65	0,36	0,59	0,58	0,12
10	0,44	0,28	0,28	0,33	0,40	2,55
11	0,95	0,89	0,76	1,30	1,21	0,00
12	0,58	0,67	0,32	0,79	0,69	0,27
Total			5,45	8,60	8,37	

### 2.2.2. Simulación o generación de variables correlacionadas mediante cópulas

La utilización de cópulas requiere de la aplicación de un algoritmo que permita replicar cualquier estructura de dependencia entre las variables aleatorias del mismo. Así, para la cópula Normal y t de Student dicho algoritmo realiza la siguiente secuencia de acciones:

- Simular variables aleatorias uniformes  $u_{i,T}$  para los  $T$  periodos deseados y los  $i$  activos.
- Transformar las uniformes en variables aleatorias independientes distribuidas como una normal estándar  $\zeta_{i,T} = \Phi^{-1}(u_{i,T})$
- Correlacionar las variables normal estándar aplicando la matriz de correlación  $\Sigma$  mediante el método de Cholesky,  $\xi_{i,T}^*$
- Transformar las variables normal estándar correlacionadas en simulaciones de la cópula normal aplicando la función de distribución normal estándar  $y_{i,T} = \Phi(\xi_{i,T}^*)$

- Transformar las simulaciones de la cópula normal en simulaciones de las marginales con cópula normal aplicando el método de la inversa  $r_{i,T} = F_i^{-1}(y_{i,T})$

**Ejemplo.** Continuando con el ejemplo de la cópula Normal en el que teníamos como distribuciones marginales para los rendimientos logarítmicos la normal, con parámetros para la media y desviación estimados:  $\mu_A = 0,12\%$ ,  $\sigma_A = 1,14\%$ ,  $\mu_B = 0,19\%$ ,  $\sigma_B = 1,92\%$ ,  $\mu_C = 0,19\%$  y  $\sigma_C = A 0,72\%$ . Y la matriz de correlaciones estimada era:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,27 & -0,11 \\ 0,27 & 1 & -0,01 \\ -0,11 & -0,01 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizaremos una simulación para  $T = 12$  para los rendimientos logarítmicos. En primer lugar simulamos 3 variables aleatorias uniformes para los 12 periodos deseados. En Excel emplearemos la función =ALEATORIO(). Posteriormente transformamos las anteriores uniformes en variables aleatorias independientes distribuidas como una normal estándar. Por ejemplo, para el activo A y el primer periodo simulado  $\xi_{A,1} = \Phi^{-1}(0,94) = 1,55$ . En Excel emplearemos la función =DISTR.NORM.ESTAND.INV(0,94).

Posteriormente correlacionamos las variables normal estándar empleando la matriz de Cholesky. En nuestro ejemplo la matriz inferior de Cholesky es:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,27 & 0,96 & 0 \\ 0,11 & 0,02 & 0,99 \end{bmatrix}$$

Por lo que podemos obtener  $\xi_{i,T}^* = \xi_{i,T} C^t$ <sup>90</sup>. Por ejemplo para el primer periodo temporal

$$\begin{bmatrix} 1,55 & -2,93 & -0,19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,27 & 0,11 \\ 0 & 0,96 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0,99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,55 & -2,39 & -0,43 \end{bmatrix}$$

<sup>90</sup> En Excel para obtener  $\xi_{i,T}^*$  emplearemos la función =MMULT( $\xi_{i,T}^*$ ;TRANSPONER(C))

T	$u_{i,T}$			$\xi_{i,T}$			$\xi_{i,T}^*$		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	0,94	0,00	0,42	1,55	-2,93	-0,19	1,55	-2,39	-0,43
2	0,82	0,93	0,36	0,93	1,48	-0,36	0,93	1,68	-0,42
3	0,33	0,23	0,65	-0,43	-0,74	0,37	-0,43	-0,83	0,40
4	0,67	0,83	0,09	0,43	0,95	-1,33	0,43	1,04	-1,35
5	0,57	0,42	0,15	0,19	-0,20	-1,04	0,19	-0,14	-1,06
6	0,62	0,12	0,92	0,31	-1,16	1,41	0,31	-1,03	1,34
7	0,87	0,19	0,26	1,13	-0,88	-0,64	1,13	-0,53	-0,78
8	0,46	0,04	0,08	-0,10	-1,80	-1,42	-0,10	-1,75	-1,44
9	0,34	0,10	0,25	-0,41	-1,31	-0,66	-0,41	-1,37	-0,64
10	0,12	0,08	0,94	-1,18	-1,39	1,54	-1,18	-1,66	1,63
11	0,08	0,51	0,83	-1,40	0,04	0,97	-1,40	-0,35	1,11
12	0,84	0,11	0,47	0,99	-1,22	-0,08	0,99	-0,90	-0,21

Posteriormente transformamos las variables normal estándar correlacionadas en simulaciones de la cópula normal aplicando la función de distribución normal estándar. Por ejemplo, para la primera observación y el activo A y  $u_{A,1} = \Phi(\xi_{A,1}^*) = \Phi(1,55) = 0,94$ . En Excel emplearemos la función =DISTR.NORM.ESTAND(1,55).

Finalmente transformamos las simulaciones de la cópula normal en simulaciones de las marginales aplicando el método de la inversa. En nuestro ejemplo todas las distribuciones marginales son normales. En el caso del Activo A calcularíamos su rendimiento simulado para el primer periodo temporal como  $r_{A,1} = F_A^{-1}(y_{A,1}) = F_A^{-1}(0,94) = 1,88$  donde  $F_A^{-1}$  es la inversa de la distribución normal con parámetros  $\mu_A = 0,12\%$ ,  $\sigma_A = 1,14\%$ . En Excel =DISTR.NORM.INV(0,94;0,12%;1,14%).

<i>t</i>	<i>y<sub>it</sub></i>			<i>r<sub>i,T</sub></i>		
	A	B	C	A	B	C
1	0,94	0,01	0,33	1,88%	-4,39%	-0,13%
2	0,82	0,95	0,34	1,18%	3,42%	-0,12%
3	0,33	0,20	0,66	-0,38%	-1,40%	0,47%
4	0,67	0,85	0,09	0,60%	2,18%	-0,79%
5	0,57	0,44	0,14	0,33%	-0,08%	-0,58%
6	0,62	0,15	0,91	0,47%	-1,78%	1,15%
7	0,87	0,30	0,22	1,40%	-0,83%	-0,38%
8	0,46	0,04	0,07	0,00%	-3,17%	-0,86%
9	0,34	0,09	0,26	-0,35%	-2,44%	-0,28%
10	0,12	0,05	0,95	-1,23%	-2,99%	1,36%
11	0,08	0,36	0,87	-1,47%	-0,48%	0,99%
12	0,84	0,18	0,42	1,24%	-1,54%	0,03%

A continuación realizaremos un ejemplo de la simulación de la cópula t de Student biva-riante a partir del coeficiente de correlación lineal  $\rho_{12} = 0,85$  y el número de grados de libertad  $\nu = 4,5$ . Dada la matriz de correlación entre las dos variables, la matriz inferior de Cholesky es:

100%	0%
85,00%	52,68%

De forma semejante que en el caso de la distribución normal simulamos dos uniformes independientes =ALEATORIO(), a partir de las cuales por el método de la inversa obtenemos las normales incorrelacionadas = DISTR.NORM.INV(U(0,1);0;1).

Las normales correlacionadas se calculan por multiplicación de la matriz de Cholesky y la de las normales incorrelacionadas. En este ejemplo para la primera simulación la segunda normal toma el valor =85,00%\*0,56+52,68%\*(-0,29)=0,32, mientras que la primera toma el valor de la normal sin correlacionar (0,56).

Sim.	U(0,1)	U(0,1)	N(0,1)	N(0,1)	CorrN(0,1)	CorrN(0,1)
1	0,71	0,39	0,56	-0,29	0,56	0,32
2	0,68	0,53	0,47	0,08	0,47	0,44
3	0,04	0,27	-1,72	-0,62	-1,72	-1,78
4	0,67	0,14	0,45	-1,06	0,45	-0,18
5	0,69	0,07	0,50	-1,47	0,50	-0,35
6	0,15	0,30	-1,04	-0,52	-1,04	-1,16
7	0,54	0,26	0,10	-0,66	0,10	-0,26
8	0,49	0,81	-0,02	0,88	-0,02	0,45
9	0,74	0,93	0,63	1,44	0,63	1,30
10	0,04	0,49	-1,77	-0,02	-1,77	-1,52
11	0,90	0,50	1,31	0,01	1,31	1,11
12	0,86	0,95	1,06	1,66	1,06	1,77

La diferencia entre la simulación de la cópula normal y t procede a continuación. Dado que  $t(v) = \frac{N(0,1)}{\sqrt{X/v}}$  tenemos que simular una distribución Chi cuadrado con 4,5 grados de libertad, para lo cual debemos simular una nueva serie de uniformes U(0,1). Dicha distribución se puede simular en Excel, mediante = PRUEBA.CHI.INV(U(0,1); grados de libertad), en nuestro ejemplo para la primera observación toma el valor = PRUEBA.CHI.INV(0,47; 4,5)=3,56. Las t de Student correlacionadas vienen dadas para la primera simulación por = (0,56)\* RAIZ(4,5/3,56)=0,62 y = (0,32)\* RAIZ(4,5/3,56)=0,36.

Para obtener las uniformes correlacionadas se emplea la distribución =0,5\*DISTR.T(-0,62;4,5;2)=0,72. La función no permite valores negativos por lo que cuando  $x < 0$  (en la tabla representa los valores negativos de CorrT(0,1)), debe tenerse en cuenta que  $DISTR.T(-x; \text{grados de libertad}; 2) = 1 - DISTR.T(x; \text{grados de libertad}; 2)$ .

Sim.	U(0,1)	Chi2	CorrT(0,1)	CorrT(0,1)	$u_1^* = \text{CorrU}(0,1)$	$u_2^* = \text{CorrU}(0,1)$
1	0,47	3,56	0,62	0,36	0,72	0,63
2	0,26	5,26	0,44	0,41	0,66	0,65
3	0,96	0,66	-4,48	-4,66	0,01	0,00
4	0,06	9,09	0,32	-0,12	0,62	0,45
5	0,47	3,56	0,57	-0,39	0,70	0,36
6	0,19	6,18	-0,89	-0,99	0,21	0,19
7	0,51	3,29	0,12	-0,30	0,55	0,39
8	0,78	1,78	-0,03	0,71	0,49	0,74
9	0,94	0,81	1,49	3,06	0,90	0,98
10	0,88	1,20	-3,42	-2,93	0,01	0,02
11	0,91	1,00	2,77	2,37	0,97	0,96
12	0,06	9,02	0,75	1,25	0,75	0,86

Para simular variables aleatorias de una distribución conjunta definida por una cópula no elíptica; como son la cópula de Clayton, Frank y Gumbel; necesitamos la distribución condicionada de la cópula (véase Bouyé et ál., 2000):

$$C_{(u_1, \dots, u_{n-1})}(u_n) = P[U_n < u_n | (U_1, \dots, U_{n-1}) = (u_1, \dots, u_{n-1})] \\ = \frac{\frac{d^{n-1} C_{(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n, 1, \dots, 1)}}{du_1, \dots, du_{n-1}}}{\frac{d^{n-1} C_{(u_1, \dots, u_{n-1}, 1, \dots, 1)}}{du_1, \dots, du_{n-1}}}$$

A partir de la distribución condicionada de una cópula podemos definir la distribución condicionada inversa de una cópula:

$$C_{(u_1, \dots, u_{n-1})}(u_n) = q \Leftrightarrow u_n = C_{(u_1, \dots, u_{n-1})}^{-1}(q)$$

El algoritmo para simular una cópula no elíptica es el siguiente:

- Simular variables aleatorias uniformes  $u_i \{u_1, \dots, u_n\}$  para los cada uno de los  $T$  periodos deseados.
- Fijar  $\{u_1^*, \dots, u_n^*\}$  y aplicar la cópula condicional inversa para obtener  $u_2^* = C_{(u_1^*)}^{-1}(u_2)$

- Repetir recursivamente el paso anterior determinando  $\{u_1^*, \dots, u_n^*\}$  como  $u_n^* = C_{(u_1^*, \dots, u_{n-1}^*)}^{-1}(u_n)$ .
- Transformar las simulaciones de la cópula deseada en simulaciones de las marginales con cópula normal aplicando el método de la inversa  $r_{i,T} = \{F_1^{-1}(u_1^*), \dots, F_n^{-1}(u_n^*)\}$ , donde  $F_i$  es la distribución marginal ajustada a los rendimientos.

**Ejemplo.** Vamos a aplicar el algoritmo anterior para una cópula de Clayton de tres variables

Sustituyendo  $n=3$  en la expresión general de la cópula de Clayton viene dada por:

$$C(U) = (1 - n + \sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha})^{-1/\alpha} = (-2 + u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + u_3^{-\alpha})^{-1/\alpha}$$

La primera derivada viene dada por:

$$\frac{dC_{(u_1, u_2, u_3)}}{du_1} = u_1^{-1-\alpha} (-2 + u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + u_3^{-\alpha})^{-1-1/\alpha}$$

Derivando respecto a  $u_2$  obtenemos:

$$\frac{dC_{(u_1, u_2, u_3)}}{du_1 du_2} = (1 + \alpha) u_1^{-1-\alpha} u_2^{-1-\alpha} (-2 + u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + u_3^{-\alpha})^{-2-1/\alpha}.$$

De esta forma obtenemos que:

$$\begin{aligned} C_{(u_1)}(u_2) &= \frac{\frac{dC_{(u_1, u_2, u_3)}}{du_1}}{\frac{dC_{(u_1, 1, 1)}}{du_1}} = \frac{u_1^{-1-\alpha} (-2 + u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + 1^{-\alpha})^{-1-1/\alpha}}{u_1^{-1-\alpha} (-2 + u_1^{-\alpha} + 1^{-\alpha} + 1^{-\alpha})^{-1-1/\alpha}} \\ &= \left( \frac{-1 + u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha}}{u_1^{-\alpha}} \right)^{-1-1/\alpha} \\ C_{(u_1, u_2)}(u_3) &= \frac{\frac{dC_{(u_1, u_2, u_3)}}{du_1 du_2}}{\frac{dC_{(u_1, u_2, 1)}}{du_1 du_2}} \\ &= \frac{(1 + \alpha) u_1^{-1-\alpha} u_2^{-1-\alpha} (-2 + u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + u_3^{-\alpha})^{-2-1/\alpha}}{(1 + \alpha) u_1^{-1-\alpha} u_2^{-1-\alpha} (-2 + u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + 1^{-\alpha})^{-2-1/\alpha}} \\ &= \left( \frac{-2 + u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + u_3^{-\alpha}}{-1 + u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha}} \right)^{-2-1/\alpha} \end{aligned}$$

Por lo que finalmente se despeja el valor de  $u_2^*$  como:

$$C_{(u_1^*)}(u_2^*) = u_2 \Leftrightarrow u_2 = \left( \frac{-1 + u_1^{*-\alpha} + u_2^{*-\alpha}}{u_1^{*-\alpha}} \right)^{-1 - \frac{1}{\alpha}} \Leftrightarrow$$

$$u_2^* = \left( u_2^{-\alpha/(1+\alpha)} u_1^{*-\alpha} - u_1^{*-\alpha} + 1 \right)^{-1/\alpha} = C_{(u_1^*)}^{-1}(u_2)$$

Y de  $u_3^*$  mediante:

$$C_{(u_1^*, u_2^*)}(u_3^*) = u_3 \Leftrightarrow u_3 = \left( \frac{-2 + u_1^{*-\alpha} + u_2^{*-\alpha} + u_3^{*-\alpha}}{-1 + u_1^{*-\alpha} + u_2^{*-\alpha}} \right)^{-2 - \frac{1}{\alpha}} \Leftrightarrow$$

$$u_3^* = \left( u_3^{-\alpha/(1+2\alpha)} (-1 + u_1^{*-\alpha} + u_2^{*-\alpha}) - u_1^{*-\alpha} - u_2^{*-\alpha} + 2 \right)^{-1/\alpha} = C_{(u_1^*, u_2^*)}^{-1}(u_3)$$

Una vez deducidas las fórmulas a aplicar en el algoritmo para el caso concreto de la cópula de Clayton de 3 variables procederemos a simular para los 12 próximos periodos los rendimientos de los tres activos A, B y C anteriores. En primer lugar simularemos las variables aleatorias uniformes  $u_i$  para los cada uno de los  $T$  periodos deseados. En este ejemplo hemos aplicado los mismos números que en el caso de la cópula normal, y dado que las distribuciones marginales serán nuevamente normales la diferencia entre los resultados de los rendimientos obtenidos provendrá únicamente de la diferente forma funcional de la cópula.

$T$	$u_{i,T}$			$u_{i,T}^*$			$r_{i,T}$		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	0,94	0,00	0,42	0,94	0,01	0,10	1,88%	-4,06%	-0,72%
2	0,82	0,93	0,36	0,82	0,95	0,57	1,18%	3,31%	0,31%
3	0,33	0,23	0,65	0,33	0,23	0,57	-0,38%	-1,25%	0,32%
4	0,67	0,83	0,09	0,67	0,86	0,23	0,60%	2,26%	-0,34%
5	0,57	0,42	0,15	0,57	0,48	0,23	0,33%	0,09%	-0,34%
6	0,62	0,12	0,92	0,62	0,19	0,90	0,47%	-1,51%	1,11%
7	0,87	0,19	0,26	0,87	0,31	0,33	1,40%	-0,76%	-0,13%
8	0,46	0,04	0,08	0,46	0,07	0,04	0,00%	-2,67%	-1,04%
9	0,34	0,10	0,25	0,34	0,11	0,16	-0,35%	-2,14%	-0,54%
10	0,12	0,08	0,94	0,12	0,04	0,82	-1,23%	-3,10%	0,85%
11	0,08	0,51	0,83	0,08	0,28	0,68	-1,47%	-0,93%	0,53%
12	0,84	0,11	0,47	0,84	0,21	0,46	1,24%	-1,36%	0,12%

Posteriormente, calcularemos el valor de las uniformes con la estructura de dependencia dada por una cópula de Clayton con  $\alpha = 0,5$ . Fijamos  $u_1^* = u_1$ , es decir para el activo A los números uniformes simulados inicialmente. Para calcular las uniformes  $u_2^*$  se emplea  $(u_2^{-\alpha/(1+\alpha)} u_1^{*\alpha} - u_1^{*\alpha} + 1)^{-1/\alpha}$ , a modo de ejemplo para el segundo periodo de la simulación  $u_2^* = (0,93^{-0,5/(1,5)} (0,82)^{-0,5} - (0,82)^{-0,5} + 1)^{-1/0,5} = 0,95$ . Para calcular  $u_3^* = (u_3^{-\alpha/(1+2\alpha)} (-1 + u_1^{*\alpha} + u_2^{*\alpha}) - u_1^{*\alpha} - u_2^{*\alpha} + 2)^{-1/\alpha}$ , por lo que para el segundo periodo de la simulación  $u_3^* = (0,36^{-0,5/(1+1)} (-1 + 0,82^{-0,5} + 0,95^{-0,5}) - 0,82^{-0,5} - 0,95^{-0,5} + 2)^{-1/0,5} = 0,57$

Finalmente obtenemos los rendimientos simulados aplicando la inversa de la distribución normal con los parámetros estimados, dado que en nuestro ejemplo todas las distribuciones marginales son normales. En el caso del Activo A calcularíamos su rendimiento simulado para el primer periodo temporal como  $r_{A,1} = F_A^{-1}(y_{A,1}) = F_A^{-1}(0,94) = 1,88\%$  donde  $F_A^{-1}$  es la inversa de la distribución normal con parámetros  $\mu_A = 0,12\%$ ,  $\sigma_A = 1,14\%$ .

Se observa como principal diferencia en los rendimientos generados mediante la cópula normal y la de Clayton que, cuando el rendimiento de  $r_{A,T}$  es negativo existe una probabilidad más elevada en la cópula de Clayton de que los rendimientos de los activos B y C sean también negativos, generando una dependencia en la cola izquierda.

### Ejemplo. Cópula de Frank bivalente

La cópula de Frank para dos variables tiene la siguiente expresión:

$$C(U) = \exp\{-[(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha]^{1/\alpha}\}$$

La primera derivada o derivada parcial de la cópula respecto a su primer término viene dada por:

$$\frac{dC_{(u_1, u_2)}}{du_1} = \frac{\exp(-\alpha u_1)}{1 - \exp(-\alpha) + \exp(-\alpha u_2) - 1}$$

La función que representa la inversa de la primera derivada respecto a su primer elemento y que nos proporciona el valor de  $u_2^*$  es:

$$C_{(u_1^*)}^{-1}(u_2) = u_2^* = -\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 - \frac{1 - \exp(-\alpha)}{1 + \exp(-\alpha u_1^*)(1/u_2 - 1)} \right)$$

Calcularemos el valor de las uniformes con la estructura de dependencia dada por una cópula de Frank con  $\alpha = 0,5$ . Primero, simulamos dos variables uniformes independientes  $u_1$  y  $u_2$ . Fijamos  $u_1^* = u_1$ , es decir para la primera secuencia los números uniformes simulados inicialmente. Para calcular las uniformes  $u_2^*$  se emplea  $C_{(u_1^*)}^{-1}(u_2) = u_2^*$ , a modo de ejemplo para el primer periodo de la simulación  $u_2^* = -\frac{1}{0,5} \ln \left( 1 - \frac{1 - \exp(-0,5)}{1 + \exp(-0,5 \cdot 0,5)(1/0,22 - 1)} \right) = 0,22$ .

Finalmente obtenemos los rendimientos simulados aplicando la inversa de la distribución normal con los parámetros estimados, dado que en nuestro ejemplo todas las distribuciones marginales son normales. En el caso del Activo A calcularíamos su rendimiento simulado para el primer periodo temporal como  $r_{A,1} = F_A^{-1}(y_{A,1}) = F_A^{-1}$  donde  $F_A^{-1}$  es la inversa de la distribución normal con parámetros  $\mu_A = 0,12\%$ ,  $\sigma_A = 1,14$ .

T	$u_{i,T}$		$u_{i,T}^*$		$r_{i,T}$	
	A	B	A	B	A	B
1	0,50	0,22	0,50	0,22	0,12%	-1,26%
2	0,19	0,46	0,19	0,42	-0,89%	-0,20%
3	0,63	0,96	0,63	0,96	0,49%	3,55%
4	0,44	0,41	0,44	0,40	-0,05%	-0,29%
5	0,55	0,51	0,55	0,52	0,26%	0,27%
6	0,97	0,67	0,97	0,72	2,28%	1,29%
7	0,97	0,22	0,97	0,26	2,33%	-1,05%
8	0,19	0,59	0,19	0,55	-0,86%	0,44%
9	0,93	0,45	0,93	0,50	1,82%	0,19%
10	0,35	0,48	0,35	0,46	-0,31%	0,02%
11	0,26	0,53	0,26	0,50	-0,62%	0,19%
12	0,80	0,37	0,80	0,40	1,09%	-0,28%

La copula de Gumbel no puede ser simulada a partir del método anterior dado que no es posible despejar el valor de la inversa de la primera derivada. Embrechts et ál. (2002) proporcionan un algoritmo<sup>91</sup> para la simulación de cópulas arquimedianas a partir de la función generadora de cópula  $\varphi(t)$  y su inversa  $\varphi^{-1}(s)$ :

- Simular dos variables uniformes independientes  $a$  y  $b$ .
- Fijar  $p = K_c^{-1}(b)$ , donde  $k_c$  es la función de distribución de la cópula  $C(U;V)$ .
- Fijar  $u = \varphi^{-1}(a\varphi(p))$  y  $w = \varphi^{-1}((1-a)\varphi(p))$ .

En el caso concreto de la cópula de Gumbel dado que  $\varphi(t) = (-\ln t)^\alpha$  y  $\varphi^{-1}(s) = \exp(-s^{1/\alpha})$ , resulta a fijar  $u_1^* = u = \exp(-(s(-\ln p)^\alpha)^{1/\alpha})$  y  $u_2^* = \exp(-((1-s)(-\ln p)^\alpha)^{1/\alpha})$ . Las anteriores expresiones se pueden simplificar en  $u = p^{(a^{1/\alpha})}$  y  $w = p^{((1-a)^{1/\alpha})}$ .

### Ejemplo. Cópula de Gumbel bivariente

Dado que la copula de Gumbel no se puede invertir se obtiene mediante iteración numérica. Se trata de encontrar el valor de la función  $K_c = p \ln(p) / a-b$  más próximo a cero, lo que equivale a encontrar el valor de  $p$  que iguala  $p \ln(p)m = a(p-b)$ . En Excel procederíamos de la siguiente forma para cada periodo temporal:

- Simulamos dos variables uniformes independientes  $a$  y  $b$ , mediante la función =ALEATORIO().
- Para cada simulación de las uniformes debemos calcular el valor de  $p$  adecuado.
- Obtener las variables uniformes con dependencia dada por la cópula de Gumbel, por ejemplo para la primera simulación  $w = p^{((1-a)^{1/\alpha})} = 0,054^{(0,24^{1/0,5})}$  y  $w = p^{((1-a)^{1/\alpha})} = 0,054^{((1-0,24)^{1/0,5})}$ .
- Posteriormente por el método de la inversa podríamos obtener la simulación de la distribución deseada, por ejemplo la normal como realizamos en el caso de la cópula Normal y de Frank.

<sup>91</sup> Algoritmo 6.1 en el artículo original.

Sim.	$a=u_1$	$b=u_2$	$p$	$u=u_2^*$	$w=u_1^*$
1	0,24	0,37	0,054	0,840	0,188
2	0,60	0,55	0,098	0,435	0,688
3	0,20	0,65	0,127	0,921	0,267
4	0,80	0,92	0,237	0,396	0,945
5	0,20	0,16	0,017	0,855	0,072
6	0,51	0,76	0,165	0,625	0,651
7	0,27	0,28	0,037	0,789	0,169
8	0,84	0,57	0,103	0,201	0,943
9	0,42	0,62	0,118	0,690	0,484
10	0,82	0,33	0,047	0,128	0,905
11	0,49	0,68	0,137	0,618	0,598
12	0,99	0,02	0,002	0,002	0,999

La generación de la mayoría de las copulas n-dimensionales puede ser generada por el procedimiento descrito anteriormente, que consiste despejar el valor de la inversa de las derivadas parciales. Sin embargo, para las copulas arquimedianas más conocidas existen algoritmos más sencillos y rápidos para el caso n-dimensional. Esto ocurre cuando la función inversa de la función generadora es conocida por ser una transformada de Laplace de alguna variable aleatoria positiva a la que se denomina variable *frailty* (Frees y Valdez, 1998), donde  $\gamma$  es una realización de dicha variable. Las distribuciones *frailty* para las tres copulas arquimedianas presentadas en este trabajo son conocidas: Gamma para la copula de Clayton, la Estable positiva para la de Gumbel y la distribución log-series para la de Frank (Frees y Valdez, 1998). El algoritmo de generación es el siguiente (véase Frees y Valdez, 1998):

1. Generar una variable latente  $\gamma$  cuya transformada de Laplace  $\mathcal{L}$  e es la inversa de la función generadora  $\varphi^{-1}$ .
2. Generar variables aleatorias uniformes para la dimensión  $n$  deseada,  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .
3. Calcular las uniformes con la estructura de dependencia deseada como  $u_i = \mathcal{L}(-\gamma^{-1} \ln v_i)$  para  $i = 1, \dots, p$ .

La tabla inferior muestra la función generadora, su inversa y la distribución *frailty* empleadas en la generación de números aleatorios de las cópulas Clayton, Frank y Gumbel. La ventaja de este método es su rapidez para el caso de más de dos dimensiones, la desventaja es que requiere la simulación de una variable adicional, para el caso bidimensional (tridimensional) supone generar un 50% (33%) más de variables uniformes.

Cópula	Generadora $\varphi(t)$	Inversa generadora $\varphi^{-1}(s)$	Distribución <i>frailty</i> <sup>92</sup>
Clayton	$t^{-\alpha} - 1$	$(1 + s)^{-1/\alpha}$	Gamma
Frank	$\ln \frac{\exp(\alpha t) - 1}{\exp(\alpha) - 1}$	$\alpha^{-1} \ln(1 + \exp(s) (\exp(\alpha) - 1))$	Log-series
Gumbel	$(-\ln t)^\alpha$	$\exp(-s^{1/\alpha})$	Estable positiva

---

#### Ejemplo. Generar una cópula de Gumbel de cinco dimensiones.

La simulación se realizará a partir su distribución *frailty*, de esta forma las uniformes con la estructura de dependencia deseada vendrán dadas por la función:

$$u_i = \mathcal{L}(-\gamma^{-1} \ln v_i) = \exp[-(-\gamma^{-1} \ln v_i)^{1/\alpha}]$$

El método para implantar el algoritmo en Excel es el siguiente:

1.  $\gamma$  es una simulación de la distribución estable positiva<sup>93</sup>.
2. En las columnas  $v_i$  para  $i = 1, \dots, 5$  se generan uniformes independientes mediante =ALEATORIO().
3. Las uniformes con estructura dada por la cópula de Gumbel ( $u_i$  para  $i = 1, \dots, 5$ ) finalmente se obtienen =EXP(-[(-1/\gamma)\*LN(ALEATORIO())]^(1/\alpha)). Posteriormente se invertirían estas uniformes para obtener la distribución deseada.

---

<sup>92</sup> Para la cópula de Clayton la distribución *frailty* es la Gamma con parámetros  $Ga(1/\alpha, 1)$  (que se puede simular en Excel como =DISTR.GAMMA.INV(ALEATORIO());1/\alpha;1), para la cópula de Gumbel la distribución estable positiva  $St(1/\alpha, 1, \gamma, 0)$  con  $\gamma = (\cos(\pi/2/\alpha))^\alpha$  y  $\alpha > 1$  para la cópula de Frank la función discreta log-series  $(1 - \exp^{-k})^k / (k\alpha)$  para  $k = 1, 2, \dots$  Esta alternativa de simulación es una de las opciones empleadas en el paquete copula de R.

<sup>93</sup> En este ejemplo sus valores se toman como datos. Dicha función no existe en Excel, por lo que podríamos programarla o importar sus valores desde, por ejemplo, R.

	$\gamma$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$
1	0,375	0,59	0,49	0,85	0,73	0,45	0,30	0,25	0,52	0,40	0,23
2	0,394	0,18	0,43	0,90	0,09	0,75	0,12	0,23	0,60	0,08	0,43
3	4,585	0,68	0,98	0,68	0,56	0,52	0,75	0,94	0,75	0,70	0,69
4	0,227	0,55	0,05	0,26	0,57	0,57	0,20	0,03	0,09	0,21	0,21
5	0,825	0,70	0,39	0,71	0,21	0,88	0,52	0,34	0,53	0,25	0,67
6	1,018	0,24	0,41	0,65	0,94	0,53	0,30	0,39	0,52	0,77	0,46
7	0,300	0,49	0,28	0,06	0,22	0,49	0,21	0,13	0,05	0,10	0,21
8	1,455	0,95	0,73	0,16	0,16	0,52	0,84	0,63	0,33	0,32	0,51
9	1,650	0,92	0,84	0,74	0,73	0,42	0,80	0,72	0,65	0,65	0,48
10	1,420	0,51	0,66	0,56	0,61	0,15	0,50	0,58	0,53	0,56	0,32
11	0,127	0,63	0,22	0,73	0,27	0,47	0,15	0,03	0,21	0,04	0,09
12	1,285	0,61	0,87	0,43	0,36	0,22	0,54	0,72	0,44	0,41	0,34

## Estimación y simulación de cópulas con R

Los anteriores ejemplos han sido pensados para mejorar la comprensión de las cópulas en Excel, sin embargo existen otros entornos de trabajo que simplifican notoriamente su manejo al estar las anteriores funciones ya programadas. En R existen varios paquetes para trabajar con cópulas, quizás el más completo en la actualidad sea el paquete *copula*. Por ejemplo, podemos definir una cópula normal de 3 dimensiones y matriz de correlación con coeficientes 0,5 entre las tres variables mediante:

```
copnormal <- normalCopula(c(0.5,0.5, 0.5),dim=3,dispstr="un")
```

Una vez definida podemos realizar, por ejemplo, 1.000 simulaciones como:

```
copsim <- rcopula(copnormal, n=1000)
```

Que devuelve una matriz de 1.000 filas y tres columnas compuestas por las uniformes simuladas. A partir de las uniformes simuladas su estimación por el método de máxima verosimilitud se realizaría mediante la siguiente función:

*fitCopula(copnormal, copsim, method="ml")*

Que proporciona la estimación de los coeficientes de correlación, su significatividad y el valor de la función de log- verosimilitud

	Estimate	Std. Error	Z value	Pr(> z )
rho.1	0.5838241	0.01843786	31.66442	0
rho.2	0.3660652	0.02550262	14.35402	0
rho.3	0.6104138	0.01737517	35.13140	0
<i>The maximized loglikelihood is 404.596</i>				

El paquete incluye las cópulas elípticas (Normal y t de Student) y arquimedianas (Clayton, Gumbel, Frank) descritas en este trabajo y otras. Además de la generación de números aleatorios y su ajuste se proporcionan test de independencia y de bondad de ajuste, entre otros.

Hasta este punto, en este trabajo hemos comentado las distribuciones multivariantes más importantes para la modelación de datos financieros multivariantes. A semejanza del caso univariante dichas distribuciones generan rendimientos independientes idénticamente distribuidos a lo largo del tiempo, y en función de la distribución empleada menores o mayores colas. Otra opción que puede ser empleada es el ajuste de una serie de rendimientos multivariantes a la distribución univariante que proporcione mejor ajuste (normal, t de Student, etc.) y posteriormente establecer su dependencia mediante alguna cópula (Clayton, Normal, etc.). Esta metodología basada en la teoría de cópulas es más flexible, ya que permite establecer un amplio abanico de distribuciones multivariantes, pero adolece de los mismos problemas que la metodología anterior.

En el caso de que los rendimientos entre periodos no coincidentes no se consideren independientes puede ser adecuado introducir modelos multivariantes de series temporales de forma que se permita autocorrelación serial, heterocedasticidad o incluso correlaciones entre los distintos rendimientos variantes en función del momento de tiempo. Por lo tanto, además de la correlación incondicional (que es capaz de recoger por ejemplo la distribución normal multivariante por Cholesky a través de la matriz de varianzas covarianzas), los mercados están correlacionados condicionalmente, de forma que la correlación entre mercados es mayor ante

periodos de alta volatilidad o caídas bruscas en los mercados, véase Longin y Solnik (1995), Karolyi y Stulz (1996) y Ang y Chen (2002).

Desde un punto de vista práctico en la gestión del riesgo de una compañía puede ser útil simular varias series de manera conjunta puesto que pueden estar relacionadas entre sí<sup>94</sup>. De esta forma, los rendimientos en un mercado no solo dependen como en el caso univariante de sus valores y errores pasados (metodología ARMA) o de su volatilidad (metodología GARCH y SV), sino que también depende de los rendimientos de otros mercados. De esta forma para la modelización de una serie de rendimientos multivariantes se han propuesto distintos modelos: modelos VARMA, GARCH multivariantes, SV multivariantes, modelos de cambio de régimen multivariantes, etc. que modelan conjuntamente la relación entre varias series temporales, es decir, entre los componentes de un vector de series temporales. A continuación se introducen los principales modelos multivariantes.

### **2.3. MODELOS VARMA**

Los modelos VARMA o de vectores autorregresivos de media móvil son la extensión de los modelos ARMA al campo de las series temporales multivariantes. Por tanto, a semejanza del ámbito univariante, los modelos VARMA agrupan los modelos VAR y los modelos VMA. Los modelos VMA incorporan un componente de medias móviles sobre la perturbación aleatoria. A continuación ilustraremos el funcionamiento de los modelos VAR, que generalmente son los más empleados.

#### **2.3.1. Modelos VaR**

Un modelo VaR, de vectores autorregresivos o autorregresivo vectorial es un sistema de ecuaciones (tantas ecuaciones como series o variables tengamos) donde cada serie es explicada por los retardos de sí misma y por los retardos de las demás

---

<sup>94</sup> Este procedimiento implica simular cada serie de forma correlacionada para posteriormente, y mediante las proporciones de cartera invertida en cada una de ellas, obtener la serie de rendimientos de nuestra cartera. Otra alternativa menos elegante consiste en obtener una serie univariante a partir de las series multivariantes mediante las proporciones de cartera y, simular así el comportamiento de esta última.

variables, es decir, un sistema de ecuaciones autorregresivas<sup>95</sup>. Por lo tanto, podemos definir un modelo VAR como un modelo multivariante en donde cada variable viene explicada por sus propios valores pasados y los valores pasados de las otras variables del sistema.

Supongamos que deseamos modelizar el comportamiento conjunto de  $k$  variables. De esta forma sea un vector de  $k$  series temporales,

$$\mathbf{r}_t = \begin{bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \\ \dots \\ r_{kt} \end{bmatrix}$$

un modelo de vectores autorregresivos (VAR) vendría dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i \mathbf{r}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Donde  $\phi_0$  es un vector de constantes y  $\phi_i$  son matrices cuadradas de orden  $k$ . En el caso de un modelo VAR(1) tenemos la siguiente expresión

$$\mathbf{r}_t = \begin{bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \\ \dots \\ r_{kt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{10} \\ \phi_{20} \\ \dots \\ \phi_{k0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_{k1} & \dots & \phi_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,t-1} \\ r_{2,t-1} \\ \dots \\ r_{k,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \dots \\ \varepsilon_{kt} \end{bmatrix} = \phi_0 + \phi_1 \mathbf{r}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Si suponemos que la serie de rendimientos es bivalente, en el modelo VAR(1) tendremos dos ecuaciones, en las que intervienen dos variables  $r_{1t}$  y  $r_{2t}$ , explicadas en función de un único retardo. El modelo se puede expresar como:

$$\mathbf{r}_t = \begin{bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{10} \\ \phi_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,t-1} \\ r_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

O de forma desarrolla como:

$$\begin{aligned} r_{1t} &= \phi_{10} + \phi_{11}r_{1,t-1} + \phi_{12}r_{2,t-1} + \varepsilon_{1t} \\ r_{2t} &= \phi_{20} + \phi_{21}r_{1,t-1} + \phi_{22}r_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} \end{aligned}$$

<sup>95</sup> Los modelos VAR fueron elaborados de forma pionera por Sims (1980) para reflejar las regularidades empíricas e interacciones entre las distintas variables de series multivariantes, surgiendo como alternativa a la alta subjetividad de la especificación de los modelos de ecuaciones simultáneas o estructurales. Una revisión de los modelos VAR puede realizarse en Stock y Watson (2001).

Donde el primer subíndice de los parámetros  $\phi$  hace referencia a la ecuación, y el segundo al parámetro al regresor. Se dice que  $\phi_{12}$  es el impacto de  $r_{2,t-1}$  en  $r_{1t}$  dada la presencia de  $r_{1,t-1}$ .

Los modelos VAR pueden ser estimados por mínimos cuadrados ordinarios o por máxima verosimilitud y la elección del número óptimo de retardos se puede basar en los criterios clásicos de selección de modelos basados en el valor de la función de log- verosimilitud: AIC, BIC, HQC o la ratio o razón de máximo verosimilitud. Sin embargo, con frecuencia se critican los modelos VAR en que son ateóricos y por tanto se concentran en la simulación a horizontes temporales no de largo plazo, puesto que no distinguen entre variables endógenas y exógenas, además de que pueden presentar problemas de grados de libertad<sup>96</sup>.

---

**Ejemplo. Estimar por MCO los parámetros de un modelo VAR(1) para la siguiente serie de rendimientos bivalente  $r_{1t}$  y  $r_{2t}$ .**

$t$	$r_{1t}$	$r_{2t}$	$r_{1,t-1}$	$r_{2,t-1}$	$\hat{\epsilon}_{1t}$	$\hat{\epsilon}_{2t}$
1	1,98%	1,60%				
2	0,98%	1,43%	1,98%	1,60%	1,09%	0,02%
3	1,92%	1,36%	0,98%	1,43%	1,21%	-0,11%
4	0,95%	1,70%	1,92%	1,36%	0,46%	0,25%
5	-1,90%	1,33%	0,95%	1,70%	-1,97%	-0,12%
6	0,96%	1,95%	-1,90%	1,33%	-1,25%	0,33%
7	0,95%	1,58%	0,96%	1,95%	1,51%	0,17%
8	-0,95%	1,18%	0,95%	1,58%	-1,32%	-0,28%
9	2,82%	1,51%	-0,95%	1,18%	0,65%	-0,08%
10	-1,87%	1,36%	2,82%	1,51%	-1,60%	-0,02%
11	2,79%	1,43%	-1,87%	1,36%	0,69%	-0,18%
12	0,48%	1,43%	2,79%	1,43%	0,52%	0,03%

---

<sup>96</sup> Este problema se produce cuando el tamaño de la muestra no es lo suficientemente amplio como para estimar modelos con un número elevado de retardos y de variables.

La estimación por MCO del sistema simplemente consistiría en regresar  $r_{1t}$  frente a  $r_{1,t-1}$  y  $r_{2,t-1}$ , y por otro lado  $r_{2t}$  frente a  $r_{1,t-1}$  y  $r_{2,t-1}$ . En Excel simplemente realizaríamos seleccionando el rango temporal de 2 a 12 =ESTIMACION.LINEAL( $r_{1,t}; r_{1,t-1}; r_{2,t-1}; 1$ ) y =ESTIMACION.LINEAL( $r_{2,t}; r_{1,t-1}; r_{2,t-1}; 1$ ). Los resultados, seleccionando tres celdas contiguas en horizontal y pulsando Ctrl+Mayús+Enter tal y cómo se mostrarían en Excel son:

Ecuación (i)	$\hat{\phi}_{i2}$	$\hat{\phi}_{i1}$	$\hat{\phi}_{i0}$
1	-2,495	-0,426	0,047
2	-0,146	-0,043	0,017

Por lo tanto para la ecuación estimada para la primer serie será  $\hat{r}_{1t} = 0,047 - 0,426r_{1,t-1} - 2,495r_{2,t-1}$ . A partir de los anteriores parámetros podemos calcular los errores cometidos en la estimación. A modo de ejemplo, para  $t = 2$ ,  $\hat{\varepsilon}_{1t} = r_{1t} - \hat{r}_{1t} = 0,98\% - (0,047 - 0,426 \cdot 1,98\% - 2,495 \cdot 1,60\%) = 1,09\%$ . De esta forma podemos calcular la matriz de varianzas-covarianzas de los errores. Dada la varianza de cada error y la correlación entre ambos se simulará fácilmente el comportamiento futuro en base a este modelo.

En la actualidad existen múltiples versiones de modelos VAR donde destaca entre otros el modelo de cambio de régimen de Markov (Markov Switching VAR o MSVAR) introducido por Engely y Hamilton (1990)<sup>97</sup> y los modelos VAR estructurales (*Structural VAR* o SVAR).

### 2.3.2. Modelos VMA

Se dice que una serie multivariante  $r_t$  sigue un modelo VMA (*vector moving-average*) de orden  $q$  si:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

<sup>97</sup> Los modelos MSVAR permiten la modelización de series multivariantes mediante distintos regímenes, donde los parámetros en cada régimen pueden ser distintos y se establece una matriz de transición entre los distintos regímenes.

Donde  $\mu$  es un vector de constantes que denota la media de  $r_t$  y  $\theta_i$  son matrices cuadradas de orden  $k$ .

Si suponemos que la serie de rendimientos es bivalente, en el modelo VMA(1) tendremos dos ecuaciones que se pueden expresar como

$$r_t = \begin{bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{bmatrix}$$

O de forma desarrolla como:

$$\begin{aligned} r_{1t} &= \mu_1 + \varepsilon_{1t} - \theta_{11}\varepsilon_{1,t-1} - \theta_{12}\varepsilon_{2,t-1} \\ r_{2t} &= \mu_2 + \varepsilon_{2t} - \theta_{21}\varepsilon_{1,t-1} - \theta_{22}\varepsilon_{2,t-1} \end{aligned}$$

Siendo  $\theta_{12}$  el impacto de  $\varepsilon_{2,t-1}$  sobre  $r_{1t}$  en presencia de  $\varepsilon_{1,t-1}$ . La estimación de estos modelos se realiza por máxima verosimilitud.

### 2.3.3. Modelos VARMA

Se dice que una serie multivariante  $r_t$  sigue un modelo VARMA de orden  $p, q$  si:

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

**Ejemplo. Simular a lo largo de 12 periodos el siguiente modelo VAR(1):**

$$\begin{aligned} r_{1t} &= 0,6r_{1,t-1} + 0,4r_{2,t-1} + \varepsilon_{1t} \\ r_{2t} &= -0,3r_{1,t-1} - 0,3r_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} \end{aligned}$$

Con  $\varepsilon_{1t}$  y  $\varepsilon_{2t}$  siendo, en este ejemplo, ruidos blancos normales incorrelacionados con  $\sigma_{\varepsilon_1} = \sigma_{\varepsilon_2} = 1$  y  $r_{10} = r_{20} = 0$

A modo de ejemplo, a partir de la simulación de  $\varepsilon_{1t}$  y  $\varepsilon_{2t}$ , calcularíamos  $r_{12} = 0,60 \cdot 21 + 0,4 \cdot 1,89 - 0,45$  y  $r_{22} = -0,3 \cdot 0,21 - 0,3 \cdot 1,89 - 0,42$ .

$t$	$\varepsilon_{1t}$	$\varepsilon_{2t}$	$r_{1t}$	$r_{2t}$
0			0	0
1	0,21	1,89	0,21	1,89
2	-0,45	-0,42	0,77	-1,05
3	0,34	0,89	0,02	0,97
4	0,73	0,57	1,32	0,27
5	0,18	1,47	0,87	0,99
6	0,20	0,35	1,15	-0,21
7	-1,77	0,67	-1,44	0,39
8	-0,27	-1,04	-0,62	-0,73
9	-0,04	-1,76	-0,72	-1,36
10	0,91	-0,23	-0,20	0,40
11	0,10	-2,94	0,26	-3,00
12	-0,36	0,77	-2,06	1,60

---

#### Estimación modelos VARMA (software)

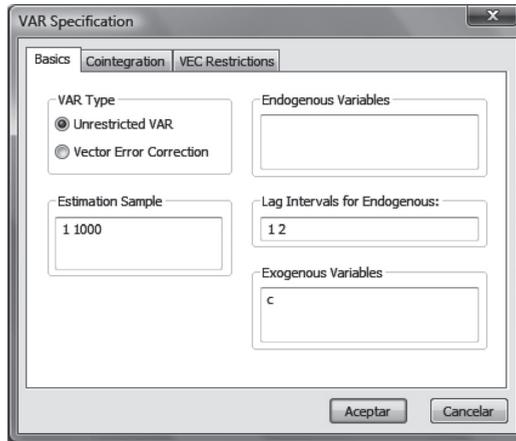
Los modelos VAR pueden ser estimados por mínimos cuadrados ordinarios en R mediante la función VAR() del paquete vars. Los modelos SVAR pueden ser estimados en R mediante la función SVAR() del paquete vars. El paquete MSVAR<sup>98</sup> de R proporciona la estimación por máxima verosimilitud de modelos de cambio de régimen de vectores autorregresivos. Para la estimación del modelo VMA(1) puede emplearse un *script* desarrollado por el profesor Ruey Tsay<sup>99</sup>.

En Eviews la estimación de modelos VAR se realiza en *Quick-Estimate VAR*. Posteriormente debemos indicar como tipo de modelo *Unrestricted VAR*, las variables endógenas, el número de retardos a incluir en cada variable y si queremos que el modelo tenga o no variables exógenas (constante u otras variables explicativas).

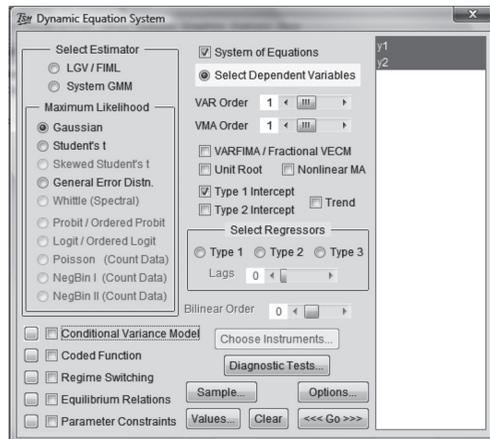
---

<sup>98</sup> En el mismo paquete se proporcionan la serie de datos del artículo original de Engel y Hamilton (1990) para los tipos de cambio franco /dólar y los diferenciales del tipo de interés entre las dos monedas.

<sup>99</sup> Dicho *script*, además de otros relacionados con los modelos VARMA y VECM, pueden encontrarse en la página web <http://faculty.chicagobooth.edu/ruey.tsay/teaching/mts/sp2011/> [consultado 1 de mayo de 2011].



En TSM para estimar un modelo VARMA debemos ir a *Model-Dinamic Equation* y seleccionar *System of Equations* para así especificar el orden del modelo VAR y VMA. A modo de ejemplo para un modelo VARMA(1,1) seleccionaremos *VAR Order=1* *VMA Order=1*. El término constante lo seleccionaremos en *Type 1 Intercept*.



### 2.3.4. Modelos VECM (*Vector Error Correction Model*)

La mayoría de las series temporales macroeconómicas (tipos de interés, tasas de inflación, etc.) tienen una raíz unitaria y por tanto no son estacionarias. Sin embargo, suponga que tenemos dos series, es posible que una de ellas explique el comportamiento no estacionario de la otra. Esto ha provocado el desarrollo de la teoría de la cointegración para el análisis de series temporales no estacionarias<sup>100</sup>. En este sentido Engle y Granger (1987) señalaron que la combinación lineal de dos o más series no estacionarias puede ser estacionaria, en cuyo caso se dice que las series están cointegradas. La combinación lineal se denomina ecuación de cointegración y se puede interpretar como una relación de equilibrio a largo plazo entre las variables.

La cointegración se refiere a variables que tienden a moverse de forma conjunta en una relación de equilibrio a lo largo del tiempo. La presencia de cointegración<sup>101</sup> sienta la base para una especificación tipo VEC, y por lo tanto los modelos VAR cointegrados o modelos VEC son la aplicación de la teoría de cointegración de series al campo de los modelos VAR<sup>102</sup>. Imaginemos dos paseos aleatorios sin deriva para las variables  $y_1$  y  $y_2$ :

$$\begin{aligned}y_{1t} &= y_{1t-1} + \varepsilon_{1t} \\y_{2t} &= y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}\end{aligned}$$

La cointegración se refiere a que podemos escribir las variables  $y_1$  e  $y_2$  relacionadas de alguna forma. Supongamos que la relación entre las variables a lo largo del tiempo es estable. Esta relación se puede representar mediante una nueva variable  $z$  que es la diferencia entre las series ( $z_t = y_1 - y_2$ ), y que es relativamente estable a lo largo del tiempo fluctuando alrededor de un valor. Esto representa un sencillo ejemplo de relación de cointegración donde la diferencia de dos series no estacionarias

---

<sup>100</sup> En la práctica cuando se analizan muchas series temporales es frecuente encontrar que la falta de estacionariedad es debida a algún componente/s. Cuando existan relaciones de cointegración o combinaciones lineales estacionarias entre las series debemos representar la dinámica no estacionaria mediante pocas raíces unitarias o factores comunes [ $r$ ] siendo el resto de variables [ $k-r$ ] combinaciones lineales de éstas.

<sup>101</sup> Para determinar si un grupo de series no estacionarias están cointegradas se han desarrollado los test de cointegración.

<sup>102</sup> Estos modelos pueden ser analizados en R mediante el paquete *urca*.

es estacionaria. La relación de cointegración es la combinación lineal estacionaria entre las variables y puede ser representada mediante un vector  $\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$  que se denomina vector de cointegración, en este caso  $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Dada una combinación lineal está no es única ya que cualquier relación del tipo  $\begin{bmatrix} c\alpha_1 \\ c\alpha_2 \end{bmatrix}$  es también de cointegración para cualquier  $c \neq 0$ .

Cuando existe una relación de cointegración, una de las variables explica parte de la tendencia de la otra, y por tanto el comportamiento de las variables puede ser representado mediante un modelo VEC. De esta forma, en un modelo VEC los incrementos de un conjunto de series no estacionarias se representan como una función lineal de los valores pasados de la combinación lineal estacionaria entre las variables más un ruido blanco, es decir:

$$\begin{aligned} y_{1t} - y_{1t-1} &= \alpha_1 z_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} - y_{2t-1} &= \alpha_2 z_{t-1} + \varepsilon_{2t} \end{aligned}$$

---

**Ejemplo.** Supongamos que tenemos dos series financieras  $y_{1t}$  e  $y_{2t}$ . El comportamiento de cada serie puede modelizarse como un camino aleatorio sin deriva. Sin embargo las series están cointegradas de forma que una serie es una combinación lineal de la otra. Supongamos que dicha relación lineal es perfecta ( $y_{1t} = a + by_{2t}$ , con  $a = 0$  y  $b = 0$ ). Simular el comportamiento de las dos series suponiendo cointegración y no cointegración.

En el caso de simular las series de forma cointegrada se establece una relación a largo plazo lineal  $y_{1t} = a + by_{2t}$  entre las dos series. Dicha relación puede ser estimada por mínimos cuadrados ordinarios y comprobar que los residuos de la anterior ecuación son estacionarios. En nuestro ejemplo la relación estable viene dada por:  $y_{1t} = y_{2t}$  por lo que esta relación se puede representar mediante una nueva variable  $z_t$  que es la diferencia entre las series ( $z_t = y_{1t} - y_{2t}$ ).

Una vez estimados la relación estable entre las variables tenemos que estimar los coeficientes de cada ecuación es decir:

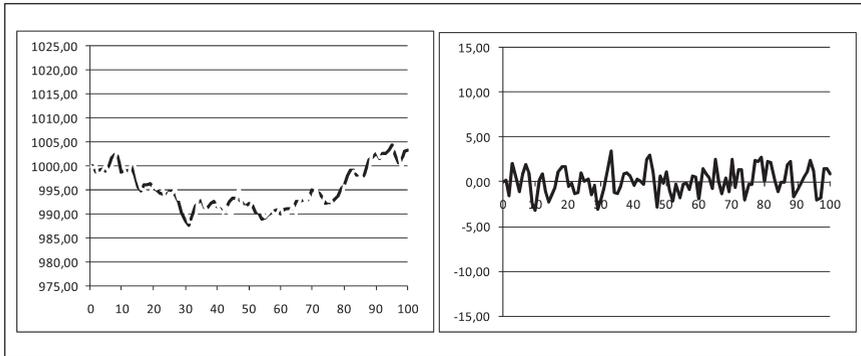
$$\begin{aligned} y_{1t} &= \alpha_{10} + \alpha_{11}y_{1t-1} + \alpha_{12}y_{2t-1} + \alpha_{13}z_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} &= \alpha_{20} + \alpha_{21}y_{2t-1} + \alpha_{22}y_{1t-1} + \alpha_{23}z_{t-1} + \varepsilon_{2t} \end{aligned}$$

Ya que las variables se pueden modelizar como un camino aleatorio sin deriva podemos simplificar las anteriores ecuaciones obteniendo que  $y_{1t} = y_{1t-1} + \alpha_{13}z_{t-1} + \varepsilon_{1t}$  e  $y_{2t} = y_{2t-1} + \alpha_{23}z_{t-1} + \varepsilon_{2t}$ . Suponemos que los dos ruidos blancos son normales estandarizados, que los coeficientes  $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0,1$  y que los valores iniciales de las series son  $y_{10} = y_{20} = 1000$ .

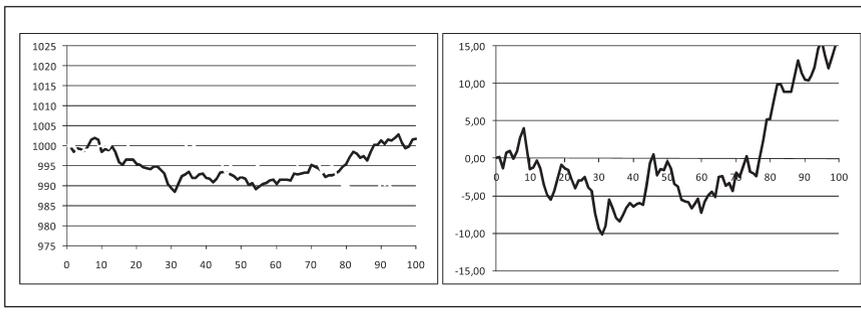
<i>t</i>	Números aleatorios		Series cointegradas			Series no cointegradas		
	$\varepsilon_{1t}$	$\varepsilon_{2t}$	$y_{1t}$	$y_{2t}$	$z_t$	$y_{1t}$	$y_{2t}$	$z_t$
0			1000	1000	0	1000	1000	0
1	-0,06	-0,24	999,94	999,76	0,18	999,94	999,76	0,18
2	-1,35	0,20	998,61	1000,15	-1,55	998,59	999,96	-1,37
3	0,75	-1,33	999,20	997,12	2,08	999,34	998,63	0,71
4	-0,06	-0,37	999,35	999,05	0,30	999,28	998,27	1,01
5	-0,46	0,65	998,92	1000,03	-1,11	998,82	998,91	-0,10
6	0,99	0,03	999,80	998,84	0,96	999,81	998,95	0,86
7	1,91	-0,10	1001,80	999,80	2,00	1001,72	998,85	2,87
8	0,43	-0,64	1002,43	1001,36	1,07	1002,14	998,20	3,94
9	-0,57	1,72	1001,96	1004,26	-2,29	1001,57	999,92	1,65
10	-3,07	0,10	998,67	1001,83	-3,17	998,50	1000,02	-1,52

El cuadro superior muestra las trayectorias simuladas de  $y_{1t}$  e  $y_{2t}$  y su diferencia ( $z_t$ ) suponiendo en el primer caso cointegración de las series y en el segundo las series sin cointegrar. Para evitar el efecto de los términos de error, se ha empleado la misma generación de números aleatorios, de forma que las diferencias provienen únicamente del efecto de la corrección de errores de la relación estable a largo plazo. En los gráficos inferiores se muestran los anteriores procesos para una simulación a lo largo de 100 periodos. De esta forma se muestra que la distancia entre las series de los caminos aleatorios se incrementa conforme avanza el tiempo, mientras que la distancia de las series cointegradas no lo hacen ya que es estacionaria.

En los siguientes gráficos se muestran las series simuladas de las series cointegradas (izquierda), y como la distancia entre las series cointegradas es estacionaria (derecha).



En los dos siguientes gráficos se muestran las series simuladas de las series no cointegradas [izquierda], y como la distancia entre las series cointegradas no es estacionaria [gráfico derecha].



## 2.4. MODELOS MULTIVARIANTES MGARCH

De forma análoga al caso univariante, dada una serie temporal de rendimientos multivariantes  $\mathbf{r}_t$ , podemos decir que  $\{\mathbf{r}_{1,t-1}, \mathbf{r}_{2,t-1}, \dots, \mathbf{r}_{k,t-1}\} = F_{t-1}$  es la información disponible en el momento y que el rendimiento se va a descomponer en dos partes: parte predecible ( $\boldsymbol{\mu}_t$ ) que será una función de los elementos de  $F_{t-1}$  y una parte impredecible o *shock* ( $\boldsymbol{\alpha}_t$ ). De esta forma:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\alpha}_t = E(\mathbf{r}_t | F_{t-1}) + \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{Z}_t$$

Donde:  $\boldsymbol{\mu}_t$  es la media condicional de  $\mathbf{r}_t$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_t$  o  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  es el *shock* o innovación en el momento  $t$ ,  $\mathbf{Z}_t$  es una serie de variables independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza  $\mathbf{I}_N$ , siendo  $\mathbf{I}_N$  la matriz identidad,  $\mathbf{H}_t$  es la matriz de varianzas covarianzas de  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ . A modo de ejemplo, para el caso bivalente  $\mathbf{H}_t = \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t | F_{t-1}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11t} & \sigma_{12t} \\ \sigma_{21t} & \sigma_{22t} \end{bmatrix}$ .

Los modelos multivariantes para las series temporales se podrían dividir en dos grandes clases: modelos para la media condicional  $\boldsymbol{\mu}_t$  o ecuación de la media, como por ejemplo los modelos VARMA, y modelos para la matriz de varianzas covarianzas  $\mathbf{H}_t$ , como por ejemplo los modelos MGARCH.

Existe una amplia gama de modelos GARCH multivariantes. Bauwens et ál. (2006) realiza una extensa revisión de los modelos GARCH multivariantes. Siguiendo a estos autores se pueden distinguir tres grandes técnicas para construir modelos GARCH multivariantes en función de las distintas especificaciones que emplean para la matriz de varianzas covarianzas  $\mathbf{H}_t$ :

- Directamente generalizando el modelo univariante GARCH. Dentro de esta técnica destacan los modelos VEC y BEKK, entre otros.
- Mediante combinaciones lineales de modelos GARCH univariantes.
- Mediante combinaciones no lineales de modelos GARCH univariantes, en donde destacan los modelos CCC, DCC y cópula-GARCH.

Formalmente un modelo GARCH multivariante para la serie multivariante  $\mathbf{r}_t$  (vector  $N \times 1$ ) puede expresarse como:

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{U} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Donde  $\mathbf{U}$  es la media condicional del proceso, que puede venir dado por un vector de constantes, un modelo VARMA o cualquier otro modelo multivariante y  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  es el vector de residuos que viene dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{Z}_t$$

$\mathbf{H}_t^{1/2}$  es una matriz definida positiva de dimensión  $N \times N$  y  $\mathbf{Z}_t$  es un vector aleatorio  $N \times 1$  de variables independientes e idénticamente distribuidas con  $E(\mathbf{Z}_t) = 0$  y  $Var(\mathbf{Z}_t) = \mathbf{I}_N$ , donde  $\mathbf{I}_N$  es la matriz identidad de dimensión  $N \times N$ . Como en el caso de los modelos GARCH univariante, la hipótesis sobre la normalidad condicional multivariante no suele modelar las colas gordas que se producen en las series financieras temporales. Por lo tanto, se ha propuesto al igual que en el caso univariante el uso de la distribución t-Student o de las distribuciones asimétricas para la distribución de  $\mathbf{Z}_t$ .

La matriz  $\mathbf{H}_t$  es la matriz de varianzas-covarianzas del proceso de residuos  $\varepsilon_t$ . Los distintos modelos imponen diversas estructuras sobre la matriz  $\mathbf{H}_t$ . El principal problema que afecta a los modelos GARCH multivariantes es el gran número de parámetros a estimar. Esto no debería ser un problema, en teoría, si tenemos un tamaño de muestra suficientemente grande. Sin embargo, la estimación eficiente de estos modelos se realiza por máxima verosimilitud y es difícil, en muchos casos, obtener la convergencia de los algoritmos de optimización. Además, se deben imponer restricciones en los parámetros del modelo con el fin de garantizar la no negatividad de las varianzas condicionales en las series individuales. Esto implica que la matriz  $\mathbf{H}_t$  sea definida positiva y, en la práctica, esto no es fácil de conseguir. Que la matriz sea definida positiva es el equivalente a decir que la varianza debe ser positiva en el campo univariante.

Antes de empezar a describir los principales modelos GARCH multivariantes estableceremos unos conceptos básicos acerca de la matriz de covarianzas de los rendimientos (en caso de no tener modelo para la media)  $\mathbf{H}_t$ . En primer lugar debe decirse que  $\mathbf{H}_t$  es simétrica, lo que quiere decir que si tenemos dos series  $\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} \end{bmatrix}$  por lo que  $\sigma_{12,t} = \sigma_{21,t}$ . Si la serie multivariante está compuesta por los rendimientos de  $k$  activos  $\mathbf{H}_t$  tiene  $K(K + 1) / 2$  variables. Finalmente  $\mathbf{H}_t$  debe ser positiva para todo  $t$ , lo que implica en el caso bivariante  $\sigma_{11,t} > 0$ ,  $\sigma_{22,t} > 0$  y  $\sigma_{11,t}\sigma_{22,t} - \sigma_{12,t}^2 > 0$  y  $\sigma_{11,t}\sigma_{22,t} - \sigma_{12,t}^2 > 0$ . Además a partir de esta matriz se definen los coeficientes de correlación dinámica. En el caso de una serie bivariante el coeficiente de correlación dinámica entre  $r_1$  y  $r_2$  viene dado por  $\rho_{12,t} = \frac{\sigma_{12,t}}{\sqrt{\sigma_{11,t}\sigma_{22,t}}}$ .

A continuación expondremos los principales modelos. Bollerslev et ál. (1988) propusieron de forma pionera una formulación muy general del modelo GARCH

multivariante o MGARCH, el denominado modelo VEC o modelo sin restricciones a partir del cual se han ido desarrollando diversas variantes. Bollerslev et ál. (1988) también propusieron el modelo VEC diagonal que reduce el número de parámetros a estimar (*Diagonal VEC* o DVECH), y que todavía se reduce más con las versiones escalares (*Scalar VEC* o SVECH). Los modelos BEEK desarrollados en Engle y Kroner (1995) son otra variante del modelo VEC, dicho modelo nuevamente cuenta con versiones escalares y diagonales. Finalmente analizaremos el modelo CCC de Bollerslev (1990), el modelo DCC de Engle (2002) y expondremos brevemente otros modelos, como los modelos cópula-GARCH, GO-GARCH, etc. Estos modelos GARCH multivariantes permiten estudiar las co-volatilidades entre las distintas series financieras temporales.

Empezaremos describiendo los modelos VEC y BEEK, que en terminología de Bauwens et ál. (2006) son modelos MGARCH que se obtiene directamente al generalizar el modelo univariante GARCH.

### 2.4.1. Modelo VEC

El modelo VEC o VEC es una formulación muy general del modelo GARCH multivariante o MGARCH propuesto en Bollerslev et ál. (1988). El modelo VEC es un modelo sin restricciones a partir del cual se han ido desarrollando diversas variantes. En el modelo general VEC la matriz  $\mathbf{H}_t$  es una función lineal de los errores retardados al cuadrado y del producto cruzado de los errores y los valores retardados de los elementos de  $\mathbf{H}_t$ . El modelo VEC ( $m, s$ ) se puede escribir como:

$$vech(\mathbf{H}_t) = vech(\mathbf{C}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i vech(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^t) + \sum_{i=1}^s \mathbf{B}_i vech(\mathbf{H}_{t-1})$$

Donde  $vech(\bullet)$  denota el operador que apila la parte triangular de una matriz  $N \times N$  como un vector  $N(N+1)/2 \times 1$ , es decir, aplicado a una matriz simétrica coloca cada elemento de la matriz inferior en una columna.  $\mathbf{A}_i$  y  $\mathbf{B}_i$  son matrices cuadradas de parámetros de orden  $(N+1)N/2$ ,  $\mathbf{C}$  es un vector de parámetros  $(N+1)N/2 \times 1$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}$  son los errores asociados a la ecuación de la media de la serie de rendimientos. Por

ejemplo, en el caso de un modelo bivalente ( $N = 2$ ) GARCH(1,1) la representación completa sería:

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

Siendo  $h_{11,t}$  (o de forma equivalente  $\sigma_{11,t}$ ) la varianza condicional de los términos de error correspondiente a la serie 1,  $h_{22,t}$  ( $\sigma_{22,t}$ ) la varianza condicional de los términos de error correspondiente a la serie 2 y  $h_{12,t}$  ( $\sigma_{12,t}$ ) la covarianza condicional entre errores. El número de parámetros del modelo anterior es de  $N(N+1)(N(N+1)+1)/2$ , lo que reduce la utilidad de este modelo. En el caso bivalente tenemos que estimar 21 parámetros y para  $N = 3$  el número de parámetros a estimar es de 78. Por eso se han impuesto otras estructuras que reduzcan el número de parámetros.

### **Modelo VEC diagonal (DVEC)**

Bollerslev et ál. (1988) sugieren el modelo VEC diagonal (DVEC) en el cual las matrices  $A$  y  $B$  son diagonales. De esta forma cada varianza y covarianza condicional o elemento de la matriz  $H$ ,  $h_{ij}$ , depende sólo de su valor pasado y del valor previo de los residuos retardados al cuadrado. Lo que equivale a que no haya efectos colaterales directos en la volatilidad desde una serie a otra. Esta restricción reduce el número de parámetros a  $N(N+5)/2$  por lo que para el caso bivalente el número de parámetros se reduce a 9 y para  $N = 3$  el número de parámetros a estimar es de 12. Aún a pesar de la diagonalización, en el caso de mayores sistemas el modelo es muy difícil de estimar en la práctica. En el caso de un modelo bivalente ( $N = 2$ ) GARCH(1,1), la representación de este modelo viene dada por:

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & & \\ & b_{22} & \\ & & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

Se deben establecer condiciones sobre los parámetros para garantizar que las matrices de varianzas condicionales en los modelos DVEC sean definidas positivas. Se puede expresar el modelo en términos de productos Hadamard (denotados por  $\odot$ ).

De esta forma podemos definir las matrices simétricas  $N \times N$   $\mathbf{C}^\circ$ ,  $\mathbf{A}^\circ$  y  $\mathbf{B}^\circ$  a partir de  $\mathbf{C} = \text{diag} [\text{vech}(\mathbf{C}^\circ)]$ ,  $\mathbf{A} = \text{diag} [\text{vech}(\mathbf{A}^\circ)]$  y  $\mathbf{B} = \text{diag} [\text{vech}(\mathbf{B}^\circ)]$ . La función  $\text{diag}(\bullet)$  produce una matriz diagonal con sus elementos en la diagonal principal. De esta forma el modelo diagonal puede ser escrito como:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}^\circ + \mathbf{A}^\circ \odot (\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^t) + \mathbf{B}^\circ \odot \mathbf{H}_{t-1}.$$

En el caso del modelo VEC( $m, s$ ) o DVEC( $m, s$ ) la ecuación anterior se convertiría en:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}^\circ + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i^\circ \odot (\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^t) + \sum_{j=1}^s \mathbf{B}_j^\circ \odot \mathbf{H}_{t-1}$$

Volviendo al caso del modelo DVEC(1,1) en el caso bivalente tenemos el modelo en términos de productos Hadamard:

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} & \\ h_{21,t} & h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11,0} & \\ A_{21,0} & A_{22,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11,1} & \\ A_{21,1} & A_{22,1} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \\ \varepsilon_{2,t-1} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} B_{11,1} & \\ B_{21,1} & B_{22,1} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} h_{11,t-1} & \\ h_{21,t-1} & h_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

Donde sólo se muestra la parte triangular inferior del modelo. Realizando las operaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned} h_{11,t} &= A_{11,0} + A_{11,1} \varepsilon_{1,t-1}^2 + B_{11,1} h_{11,t-1} \\ h_{21,t} &= A_{21,0} + A_{21,1} \varepsilon_{2,t-1} \varepsilon_{1,t-1} + B_{21,1} h_{21,t-1} \\ h_{22,t} &= A_{22,0} + A_{22,1} \varepsilon_{2,t-1}^2 + B_{22,1} h_{22,t-1} \end{aligned}$$

De esta forma se demuestra que en esta especificación cada elemento de la matriz  $H_t$  depende sólo de sus valores pasados y del correspondiente producto de términos de  $\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}^t$ .

## 2.4.2. Modelo EWMA

Riskmetrics (véase por ejemplo J. P. Morgan y Reuters, 1996) emplea el modelo EWMA (*exponentially weighted moving average model*) para predecir las varianzas-covarianzas. En términos del modelo VEC, este modelo IGARCH se convertiría en:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{c} + (1 - \lambda)\boldsymbol{\varepsilon}_{i,t-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{j,t-1} + \lambda \mathbf{H}_{t-1}$$

Que es un modelo VEC escalar en donde el factor  $\lambda$  propuesto es de 0,94 para datos diarios y 0,97 para mensuales.

**Ejemplo.** Dada una serie de rendimientos establecer la matriz de varianzas -covarianzas de un modelo EWMA con factor  $\lambda = 0,97$  y sin constante.

En las columnas 2 a 4 se muestra la hipotética serie de rendimientos a partir de las cuales se establece el modelo  $H_t = (1 - 0,97) \varepsilon_{it} \varepsilon_{jt} + 0,97 H_{t-1}$ , donde:

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} & h_{13,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} & h_{23,t} \\ h_{31,t} & h_{32,t} & h_{33,t} \end{bmatrix}$$

Para  $t=1$  se han empleado la matriz de varianzas-covarianzas incondicional<sup>103</sup>. Para el resto de observaciones se emplea:

$$\begin{aligned} h_{11,t} &= (1 - 0,97)\varepsilon_{1,t-1}^2 + 0,97h_{11,t-1} \\ h_{21,t} &= (1 - 0,97)\varepsilon_{2,t-1}\varepsilon_{1,t-1} + 0,97h_{21,t-1} \\ h_{31,t} &= (1 - 0,97)\varepsilon_{3,t-1}\varepsilon_{1,t-1} + 0,97h_{31,t-1} \\ h_{22,t} &= (1 - 0,97)\varepsilon_{2,t-1}^2 + 0,97h_{22,t-1} \\ h_{32,t} &= (1 - 0,97)\varepsilon_{3,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + 0,97h_{32,t-1} \\ h_{33,t} &= (1 - 0,97)\varepsilon_{3,t-1}^2 + 0,97h_{33,t-1} \end{aligned}$$

Y dado que no tenemos modelo multivariante para la media, se establece  $r_{it} = \varepsilon_{it}$ . A modo de ejemplo  $h_{21,t}$  lo fijamos como covar  $(r_{2t}, r_{1t}) = 0,063\%$ , mientras que  $h_{21,2} = (1 - 0,97)3,17\% \cdot 2,15\% + 0,97 \cdot 0,063\% = 0,061\%$ .

<sup>103</sup> El efecto de los valores iniciales se elimina a medida que aumenta  $t$ .

De esta forma podemos afirmar que la matriz de covarianzas a un periodo ( $t=1$ ) será:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0,072\% & 0,063\% & 0,055\% \\ 0,063\% & 0,064\% & 0,055\% \\ 0,055\% & 0,055\% & 0,060\% \end{bmatrix}$$

$t$	$r_{1t}$	$r_{2t}$	$r_{3t}$	$h_{11,t}$	$h_{21,t}$	$h_{31,t}$	$h_{22,t}$	$h_{32,t}$	$h_{33,t}$
1	2,15%	3,17%	2,87%	0,072%	0,063%	0,055%	0,064%	0,055%	0,060%
2	0,86%	1,02%	1,04%	0,070%	0,061%	0,054%	0,062%	0,054%	0,059%
3	1,29%	-0,93%	-0,39%	0,068%	0,060%	0,052%	0,061%	0,053%	0,057%
4	-1,25%	-1,34%	0,26%	0,067%	0,058%	0,051%	0,059%	0,051%	0,055%
5	-2,80%	-2,01%	-0,85%	0,067%	0,058%	0,050%	0,059%	0,050%	0,054%
6	-3,77%	-3,50%	-4,07%	0,069%	0,060%	0,053%	0,061%	0,053%	0,057%
7	1,40%	1,68%	0,97%	0,068%	0,059%	0,052%	0,060%	0,052%	0,056%
8	-1,46%	-0,96%	-0,27%	0,067%	0,058%	0,050%	0,058%	0,050%	0,054%
9	-0,24%	0,02%	0,15%	0,065%	0,056%	0,049%	0,056%	0,049%	0,052%
10	5,25%	5,62%	6,48%	0,071%	0,063%	0,058%	0,064%	0,058%	0,063%
11	1,75%	1,35%	-0,17%	0,070%	0,062%	0,056%	0,063%	0,056%	0,062%
12	3,95%	3,29%	2,26%	0,072%	0,064%	0,057%	0,064%	0,057%	0,061%

### 2.4.3. Modelo BEEK

Desarrollado en Engle y Kroner (1995) proponen una nueva parametrización para  $H_t$ . En el caso del modelo BEEK(m, s) la ecuación propuesta es:

$$H_t = C^* C^{*t} + \sum_{i=1}^m A_i^* (\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}^t) A_i^{*t} + \sum_{j=1}^s B_j^* H_{t-1} B_j^{*t}$$

Donde  $C^*$ ,  $A_i^*$  y  $B_j^*$  son matrices  $N \times N$ , siendo  $C^*$  inferior triangular. En el caso del modelo BEEK(1,1) bivalente tenemos:

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11,0} & 0 \\ A_{21,0} & A_{22,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11,0} & A_{21,0} \\ 0 & A_{22,0} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} A_{11,1} & A_{12,1} \\ A_{21,1} & A_{22,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11,1} & A_{21,1} \\ A_{12,1} & A_{22,1} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} B_{11,1} & B_{12,1} \\ B_{21,1} & B_{22,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} & h_{12,t-1} \\ h_{21,t-1} & h_{22,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11,1} & B_{21,1} \\ B_{12,1} & B_{22,1} \end{bmatrix}$$

El número de parámetros a estimar en el modelo BEKK(1,1) es de  $N(5N+1)/2$ , por lo que para el caso bivalente tendríamos 11 parámetros. Para reducir el número de parámetros se puede imponer que  $\mathbf{A}_i^*$  y  $\mathbf{B}_j^*$  sean matrices diagonales obteniendo un modelo BEKK diagonal. Este sería un modelo DVEC menos general, ya que el modelo bivalente DVEC contiene 9 parámetros mientras que este modelo BEEK contendría sólo 7. El modelo BEKK(1,1) diagonal para el caso bivalente vendría dado por:

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11,0} & 0 \\ A_{21,0} & A_{22,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11,0} & A_{21,0} \\ 0 & A_{22,0} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} A_{11,1} & 0 \\ 0 & A_{22,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}\varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11,1} & 0 \\ 0 & A_{22,1} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} B_{11,1} & 0 \\ 0 & B_{22,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} & h_{12,t-1} \\ h_{21,t-1} & h_{22,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11,1} & 0 \\ 0 & B_{22,1} \end{bmatrix}$$

Otra forma de reducir el número de parámetros a estimar es emplear un modelo BEEK escalar. En este modelo se impone que sean las matrices  $\mathbf{A}_i^*$  y  $\mathbf{B}_j^*$  sean iguales a un escalar multiplicado por la matriz identidad. Es decir,  $\mathbf{A}_i^* = a\mathbf{I}_N$  y  $\mathbf{B}_i^* = b\mathbf{I}_N$  siendo  $a$  y  $b$  números escalares.

El segundo tipo de modelos que analizaremos son los que Bauwens et ál. (2006) clasifican como modelos GARCH construidos a partir de combinaciones no lineales de modelos GARCH univariantes. En este sentido, un método alternativo para reducir el número de parámetros en un modelo MGARCH es requerir que las correlaciones entre los errores, y por tanto entre los rendimientos, se fijen a lo largo del tiempo. En este apartado se describen los modelos GARCH multivariantes que pueden ser analizados como combinaciones no lineales de modelos GARCH univariantes. Esto permite que los modelos puedan ser especificados de forma separada en base a sus varianzas condicionales individuales y a una medida de dependencia entre las series individuales. Como medida de dependencia se puede emplear tanto la matriz de correlación condicional como cópulas. La principal ventaja de este tipo de modelos es que, en general, reducen el número de parámetros de los presentados en la categoría anterior por lo que son más fácilmente estimados.

#### 2.4.4. Modelo CCC GARCH

La matriz de varianzas condicional para este tipo de modelos se especifica en dos etapas. En primer lugar, se opta por un modelo GARCH que pueden ser de distinto tipo (GARCH, EGARCH, GJR-GARCH, etc. o de orden distinto dentro de cada clase) para cada varianza condicional. En segundo lugar, en base a los modelos para las varianzas condicionales se establece un modelo para la matriz de correlación condicional (imponiendo que sea definida positiva para todo  $t$ ).

Bollerslev (1990) propone una clase de modelos MGARCH en el que las correlaciones condicionales son constantes y por lo tanto las covarianzas condicionales son proporcionales a su producto por la correspondiente desviación estándar condicional. Esta restricción reduce el número de parámetros a estimar. El modelo CCC GARCH general viene dado por:

$$\mathbf{H}_t = (\rho_{ij} \sqrt{h_{iit} h_{jtt}}) = \mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t \text{ para } i, j = 1, \dots, N$$

Donde  $\mathbf{D}_t = \text{diag}(h_{11t}^{0.5}, \dots, h_{NNt}^{0.5})$ ,  $h_{iit}$  puede ser definido a partir de cualquier modelo GARCH univariante y la matriz  $\mathbf{R} = (\rho_{ij})$  es simétrica y definida positiva con  $\rho_{ii} = 1$  para todo  $i$ . Es decir  $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & & \rho_{1N} \\ & \ddots & \\ \rho_{N1} & & 1 \end{bmatrix}$  y sus elementos, los coeficientes de correlación condicional constantes, vienen dados por:

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}_{t-1}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt})}{\sqrt{\text{var}_{t-1}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt})}} = \frac{h_{ijt}}{\sqrt{h_{iit} h_{jtt}}}$$

El modelo CCC original supone que los modelos univariantes se modelizan mediante un GARCH(1,1). Para un modelo bivariante se puede establecer el modelo general como:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t = \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22t}} \end{bmatrix}$$

Donde las varianzas individuales  $h_{11t}$  y  $h_{22t}$  se obtienen a través del modelo GARCH(1,1). De esta forma resulta la siguiente expresión para cada varianza condicional en  $\mathbf{D}_t$  y para  $i = 1, \dots, N$

$$h_{iit} = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta_1 h_{iit-1}$$

Donde  $\varepsilon_{i,t-1}^2$  es un vector dado por  $(\varepsilon_{1,t-1}^2, \varepsilon_{2,t-1}^2)$ , y  $\alpha_0$  y  $\beta_1$  son matrices  $2 \times 2$  no definidas negativas. De esta forma el modelo puede ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

Esta es el denominado ECCC-GARCH o modelo GARCH multivariante de correlación constante extendido, que realizando las operaciones anteriores resulta en:

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10} + \alpha_{11}\varepsilon_{1,t-1}^2 + \alpha_{12}\varepsilon_{2,t-1}^2 + \beta_{11}h_{11,t-1} + \beta_{12}h_{22,t-1} \\ \alpha_{20} + \alpha_{21}\varepsilon_{1,t-1}^2 + \alpha_{22}\varepsilon_{2,t-1}^2 + \beta_{21}h_{11,t-1} + \beta_{22}h_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

Frente a este modelo también se emplea la versión diagonal del modelo CCC-GARCH que viene dada por:

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 \\ 0 & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

O de forma alternativa por:

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10} + \alpha_{11}\varepsilon_{1,t-1}^2 + \beta_{11}h_{11,t-1} \\ \alpha_{20} + \alpha_{22}\varepsilon_{2,t-1}^2 + \beta_{22}h_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

Las diferencias en el número de parámetros a estimar es importante, mientras para el caso bivariante el modelo ECCC con modelos GARCH(1,1) estima 11 parámetros el modelo CCC diagonal estima 7. De esta forma el modelo ECCC contiene en el caso general  $N(N+5)/2$  parámetros. El problema del modelo CCC GARCH es que la hipótesis de que las correlaciones condicionales son constantes parece no real a la vista de varias aplicaciones empíricas, de forma que los coeficientes tienden a cambiar con el tiempo. Una aplicación de este modelo puede verse en Bollerslev (1990) para tipos de cambio.

**Ejemplo.** Dada una serie de rendimientos multivariante establecer la matriz de varianzas-covarianzas de un modelo CCC-GARCH.

Supongamos que tenemos dos series  $r_{1t}$  y  $r_{2t}$ . A partir de los parámetros estimados del modelo, estableceríamos la matriz  $H_t$ . Supongamos que:

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2425 \\ 0,0435 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0613 & 0 \\ 0 & 0,0131 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,9092 & 0 \\ 0 & 0,9798 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

Nuevamente debiéramos fijar  $h_{11,0}$  y  $h_{22,0}$  como las varianzas incondicionales. A modo de ejemplo  $h_{11,2} = 0,2425 + 0,0613 \cdot (-2,80\%)^2 + 0,9092 \cdot 8,08 = 7,59$ , ya que al no existir ecuación en la media  $r_{1t} = \varepsilon_{1t}$ . Finalmente podemos calcular los errores estandarizados mediante  $\varepsilon_{it}/\sqrt{h_{ii,t}}$ . Por ejemplo para  $t = 1$ ,  $\varepsilon_{1t}/\sqrt{h_{11,t}} = -2,80\%/\sqrt{8,08} = -0,98\%$ . Finalmente la matriz  $R$  vendría dada por  $\rho_{12} = \text{corr}(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$ .

$t$	$r_{1t}$	$r_{2t}$	$h_{11,t}$	$h_{22,t}$	$\varepsilon_{1t}/\sqrt{h_{11,t}}$	$\varepsilon_{2t}/\sqrt{h_{22,t}}$
1	-2,80%	-0,16%	8,08	6,06	-0,98%	-0,06%
2	-4,34%	-0,16%	7,59	5,98	-1,58%	-0,06%
3	-3,28%	0,49%	7,14	5,90	-1,23%	0,20%
4	-2,74%	-1,13%	6,74	5,83	-1,06%	-0,47%
5	3,45%	-1,14%	6,37	5,75	1,37%	-0,47%
6	-0,86%	0,83%	6,03	5,68	-0,35%	0,35%
7	0,96%	0,82%	5,72	5,61	0,40%	0,34%
8	-1,47%	2,39%	5,45	5,54	-0,63%	1,02%
9	0,96%	-0,79%	5,20	5,47	0,42%	-0,34%
10	7,00%	2,03%	4,97	5,40	3,14%	0,88%
11	4,40%	4,09%	4,76	5,34	2,02%	1,77%
12	4,44%	-0,45%	4,57	5,27	2,08%	-0,20%
...	...	...	...	...	...	...

## 2.4.5. Modelos DCC GARCH

Christodoulakis y Satchell (2002), Engle (2002) y Tse y Tsui (2002) generalizan el modelo CCC permitiendo que la matriz de correlación condicional dependa con el tiempo en lo que se denomina modelo DCC (*dynamic conditional correlation*). El modelo de Christodoulakis y Satchell (2002) es sólo válido para el caso bidimensional mientras que los modelos de Engle (2002) y Tse y Tsui (2002) pueden ser aplicados a series de mayor dimensión. Nos centraremos en estas dos últimas especificaciones.

El modelo DCC de Tse y Tsui (2002) se caracteriza por:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t$$

Donde  $\mathbf{D}_t = \text{diag}(h_{11t}^{0.5}, \dots, h_{NNt}^{0.5})$ ,  $h_{ii}$  puede ser definido a partir de cualquier modelo GARCH univariante y la matriz de correlación condicional  $\mathbf{R}_t$  viene ahora dada por:

$$\mathbf{R}_t = (1 - \theta_1 - \theta_2) \mathbf{R} + \theta_1 \boldsymbol{\Psi}_{t-1} + \theta_2 \mathbf{R}_{t-1}$$

Donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los parámetros escalares no negativos a estimar que satisfacen  $\theta_1 + \theta_2 < 1$ ,  $\mathbf{R}$  es una matriz  $N \times N$  simétrica y con unos en la diagonal ( $\rho_{ii} = 1$ ) y  $\boldsymbol{\Psi}_{t-1}$  es una matriz de correlaciones  $N \times N$  para los *shocks*  $\varepsilon_{it}$  para  $t-m, \dots, t-1$  para un  $m$  preestablecido. Los elementos de la matriz  $\boldsymbol{\Psi}_{t-1}$  vienen dados por:

$$\Psi_{ij,t-1} = \frac{\sum_{m=1}^M u_{i,t-m} u_{j,t-m}}{\sqrt{(\sum_{m=1}^M u_{i,t-m}^2)(\sum_{m=1}^M u_{j,t-m}^2)}}$$

Donde  $u_{i,t} = \varepsilon_{it} / \sqrt{h_{iit}}$ , es decir los residuos estandarizados.

Engle (2002) propone un modelo DCC diferente y quizás más conocido que el anterior. El modelo DCC de Engle se define como:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t$$

Donde  $\mathbf{D}_t = \text{diag}(h_{11t}^{0.5}, \dots, h_{NNt}^{0.5})$ , y la matriz de correlación condicional  $\mathbf{R}_t$  viene ahora dada por:

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{J}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{J}_t = \text{diag}(q_{11,t}^{-0.5}, \dots, q_{NN,t}^{-0.5}) \mathbf{Q}_t \text{diag}(q_{11,t}^{-0.5}, \dots, q_{NN,t}^{-0.5})$$

Donde  $\mathbf{Q}_t$  es una matriz simétrica definida positiva  $\mathbf{Q}_t = (q_{ij,t})$  que viene dada por<sup>104</sup>:

$$\mathbf{Q}_t = (1 - \alpha - \beta)\bar{\mathbf{Q}} + \alpha \mathbf{u}_{t-1} \mathbf{u}_{t-1}^t + \beta \mathbf{Q}_{t-1}$$

Donde  $\mathbf{u}_t$  es nuevamente el vector de innovaciones estandarizadas cuyos elementos son  $u_{i,t} = \varepsilon_{it}/\sqrt{h_{iit}}$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}$  es la matriz de varianzas covarianzas incondicionales de  $\mathbf{u}_t$ , y  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros escalares no negativos que satisfacen que  $0 < \alpha + \beta < 1$ . La matriz  $\mathbf{J}_t$  es una matriz normalizada para garantizar que  $\mathbf{R}_t$  es una verdadera matriz de correlaciones. La correlación condicional se puede escribir también mediante  $\rho_{ij,t} = \frac{q_{ij,t}}{\sqrt{q_{ii,t}}\sqrt{q_{jj,t}}}$ . Los parámetros de persistencia de las correlaciones ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) son los mismos para cualquier par de activos, pero no los niveles de correlación. Tampoco la persistencia en correlación será igual a la persistencia en volatilidad dada por los parámetros de cada modelo GARCH univariante. Para dos activos resulta:

$$\begin{bmatrix} q_{11,t} & q_{12,t} \\ q_{12,t} & q_{22,t} \end{bmatrix} = (1 - \alpha - \beta) \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} u_{1,t-1}^2 & u_{1,t-1}u_{2,t-1} \\ u_{1,t-1}u_{2,t-1} & u_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \\ + \beta \begin{bmatrix} q_{11,t-1} & q_{12,t-1} \\ q_{12,t-1} & q_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

Con correlación condicional  $\rho_{12,t} = \frac{q_{12,t}}{\sqrt{q_{11,t}}\sqrt{q_{22,t}}}$ .

A continuación mostraremos las diferencias de los coeficientes de correlación para el caso de un modelo DCC bivalente para los dos modelos anteriores. En el caso del modelo de Tse y Tsui (2002):

$$\rho_{12,t} = (1 - \theta_1 - \theta_2)\rho_{12} + \theta_1 \frac{\sum_{m=1}^M u_{i,t-m} u_{j,t-m}}{\sqrt{(\sum_{m=1}^M u_{i,t-m}^2)(\sum_{m=1}^M u_{j,t-m}^2)}} + \theta_2 \rho_{12,t-1}$$

Para el modelo Engle (2002):

$$\rho_{12,t} = \frac{(1 - \alpha - \beta)\bar{q}_{12} + \alpha u_{1,t-1} u_{2,t-1} + \beta q_{12,t-1}}{\sqrt{\left((1 - \alpha - \beta)\bar{q}_{11} + \alpha u_{1,t-1}^2 + \beta q_{11,t-1}\right)\left((1 - \alpha - \beta)\bar{q}_{22} + \alpha u_{2,t-1}^2 + \beta q_{22,t-1}\right)}}$$

<sup>104</sup> Este modelo permite reversión a la media en las correlaciones condicionales, ya que podemos escribir  $q_{ij,t} = \rho_{ij} + \alpha(u_{i,t}u_{j,t} - \rho_{ij}) + \beta(q_{ij,t-1} - \rho_{ij})$ .

Para ambos modelos se puede testar la hipótesis de que  $\alpha = \beta = 0$  y  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  para comprobar si empíricamente la correlación condicional es constante. Una desventaja de estos dos modelos es que tanto los parámetros  $\alpha, \beta$  como  $\theta_1, \theta_2$  son escalares de forma que todas las correlaciones condicionales obedecen a la misma dinámica. Lo que en el caso de que la dimensión de la serie analizada sea elevada parece difícilmente justificable.

**Ejemplo.** En el cuadro inferior se muestran unos hipotéticos datos de una serie de rendimientos logarítmicos para dos activos ( $r_{1,t}$  y  $r_{2,t}$ ). Mediante la estimación de un modelo GARCH obtendríamos la volatilidad condicional (raíz de la varianza condicional) para cada una de las series ( $\sigma_{1,t}$  y  $\sigma_{2,t}$ ). Suponiendo que no tenemos ecuación de la media en el modelo ( $\varepsilon_{it} = r_{it}$  para  $i = 1, 2$ ). La división entre cada rendimiento y su volatilidad condicional proporciona los rendimientos estandarizados ( $u_{1,t} = \frac{r_{1,t}}{\sigma_{1,t}}$  y  $u_{2,t} = \frac{r_{2,t}}{\sigma_{2,t}}$ ). Finalmente la última columna es el producto de los rendimientos estandarizados.

t	$r_{1,t}$	$r_{2,t}$	$\sigma_{1,t}$	$\sigma_{2,t}$	$u_{1,t}$	$u_{2,t}$	$u_{1,t}u_{2,t}$
0							
1	1,50%	0,70%	1,26%	1,35%	1,1905	0,5185	0,6173
2	-0,25%	0,40%	1,28%	1,30%	-0,1953	0,3077	-0,0601
3	0,80%	1,00%	1,22%	1,25%	0,6557	0,8000	0,5246
4	-0,80%	0,10%	1,18%	1,23%	-0,6780	0,0813	-0,0551
5	0,90%	0,60%	1,15%	1,18%	0,7826	0,5085	0,3979
6	0,60%	0,70%	1,13%	1,16%	0,5310	0,6034	0,3204
7	1,00%	0,30%	1,10%	1,13%	0,9091	0,2655	0,2414
8	1,25%	0,60%	1,10%	1,10%	1,1364	0,5423	0,6162
9	-0,20%	-0,90%	1,12%	1,08%	-0,1786	-0,8333	0,1488
10	0,40%	0,20%	1,07%	1,05%	0,3738	0,1905	0,0712
11	0,90%	0,60%	1,04%	1,02%	0,8654	0,5882	0,5090
12	0,05%	-0,15%	1,04%	1,01%	0,0481	-0,1485	-0,0071
...	...	...	...	...	...	...	.....

El modelo DCC de Engle para dos activos venía dado por:

$$\begin{bmatrix} q_{11,t} & q_{12,t} \\ q_{12,t} & q_{22,t} \end{bmatrix} = (1 - \alpha - \beta) \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} u_{1,t-1}^2 & u_{1,t-1}u_{2,t-1} \\ u_{1,t-1}u_{2,t-1} & u_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} q_{11,t-1} & q_{12,t-1} \\ q_{12,t-1} & q_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

En el siguiente cuadro se muestra en las primeras columnas los valores de la matriz  $Q$ . El término  $q_{11,t}$  y  $q_{22,t}$  se fijan igual a la unidad, mientras que  $q_{12,t}$  sería el promedio de la última columna del cuadro anterior ( $q_{12,1} = T^{-1} \sum_{t=1}^T u_{A,t} u_{B,t}$ ). Posteriormente emplearíamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} q_{11,t} &= (1 - \alpha - \beta) + \alpha u_{1,t-1}^2 + \beta q_{11,t-1} \\ q_{22,t} &= (1 - \alpha - \beta) + \alpha u_{2,t-1}^2 + \beta q_{22,t-1} \\ q_{12,t} &= (1 - \alpha - \beta) \rho_{12} + \alpha u_{1,t-1} u_{2,t-1} + \beta q_{12,t-1} \end{aligned}$$

A modo de ejemplo, suponiendo que  $\rho_{12} = 69,9\%$ ,  $\alpha = 9,90\%$  y  $\beta = 90\%$ :

$$\begin{aligned} q_{11,t} &= (1 - 0,1\%) + 9,90\% \cdot 1,1905^2 + 90\% \cdot 1,0000 \\ q_{22,t} &= (1 - 0,1\%) + 9,90\% \cdot 0,5185^2 + 90\% \cdot 1,0000 \\ q_{12,t} &= (1 - 0,1\%) 69,9\% + 9,90\% \cdot 0,6173 + 90\% \cdot 0,6961 \end{aligned}$$

De esta forma, empleando la expresión  $\rho_{12,t} = \frac{q_{12,t}}{\sqrt{q_{11,t}} \sqrt{q_{22,t}}}$  obtenemos por ejemplo que  $\rho_{12,2} = \frac{0,6882}{\sqrt{1,0417} \sqrt{0,9269}} = 0,70003$ .

$t$	$q_{11,t}$	$q_{22,t}$	$q_{12,t}$	$\rho_{12,t}$
0				
1	1,0000	1,0000	0,6961	0,6961
2	1,0417	0,9269	0,6882	0,7003
3	0,9414	0,8437	0,6134	0,6883
4	0,8902	0,8233	0,6045	0,7061
5	0,8472	0,7416	0,5385	0,6794
6	0,8237	0,6933	0,5245	0,6940
7	0,7695	0,6604	0,5041	0,7071
8	0,7752	0,6014	0,4778	0,6997
9	0,8268	0,5707	0,4916	0,7157
10	0,7473	0,5831	0,4573	0,6928
11	0,6866	0,5284	0,4187	0,6952
12	0,6928	0,5101	0,4278	0,7195
...	...	...	...	...

### 2.4.6. Estimación modelos MGARCH

La estimación de los modelos MGARCH se realiza generalmente en dos fases. En la primera, se estima la posible ecuación para la media condicional y se obtienen los residuos. En la segunda, se estiman los parámetros asociados a la matriz de covarianza condicional de los modelos MGARCH empleando el método de máxima verosimilitud condicional. Como resultado del elevado número de parámetros a estimar y, en los modelos más complejos, la interrelación entre ecuaciones se puede encontrar problemas de estimación a lo largo del proceso, generalmente valores no permitidos en los parámetros o falta de convergencia del proceso iterativo. Tomando la hipótesis de que los errores son distribuidos como una normal multivariante, la función de máxima verosimilitud logarítmica para una observación puede ser escrita como:

$$\ln f(\theta) = -\frac{1}{2} \ln(2\Pi) - \frac{1}{2} \ln|\mathbf{H}_t| - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_t^t \mathbf{H}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Donde  $\theta$  recoge a todos los parámetros que deben ser estimados iterativamente,  $N$  el número de ecuaciones y  $t$  cada momento temporal. De esta forma la matriz  $\mathbf{H}_t$  tiene que ser invertida para cada  $t$  en cada iteración, lo que provoca que el tiempo de iteración de estos modelos sea elevado cuando el número de observaciones sea elevado y  $N$  no sea pequeño.

De esta forma condicionado a unos valores iniciales de  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  y  $\mathbf{H}_0$  la función logarítmica de versosimilitud muestral puede ser escrita como:

$$\ln f(\theta) = -\frac{TN}{2} \ln(2\Pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln|\mathbf{H}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_t^t \mathbf{H}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Los valores iniciales para  $\mathbf{H}_0$  normalmente se estiman como la matriz de covarianzas incondicionales.

Para tener en cuenta la asimetría y el exceso de curtosis de los rendimientos los modelos MGARCH pueden emplear otras distribuciones multivariantes para los términos de error. Las distribuciones empleadas generalmente es distribución t de Student, pero también han sido empleadas las versiones asimétricas de la normal y la t de Student, la mixtura de distribuciones normales multivariantes o la distribución

hiperbólica generalizada, entre otras. Incluso si los errores no siguen una distribución normal multivariante, la estimación de los modelos se suele obtener por la maximización de esta función logarítmica de probabilidad. Este es el método de cuasi-máxima verosimilitud QLM en el que se asume que los errores son gaussianos cuando se deriva la función de verosimilitud y se desecha posteriormente dicha hipótesis.

Si el número de parámetros a estimar de un modelo MGARCH es muy elevado la estimación anterior o en una etapa no es práctica. Por eso se ha desarrollado el método de estimación secuencial o en dos etapas para los modelos DCC (Engle y Sheppard, 2001). En una primera etapa se ajustan los modelos GARCH univariantes a cada componente de la serie para obtener los residuos. En la segunda etapa se estiman los parámetros correspondientes a la dinámica de la correlación condicional a partir de los residuos transformados durante la primera etapa.

La función de log verosimilitud es la suma de las funciones de verosimilitud en la primera y segunda etapa:

$$\ln f_1(\theta) = \ln f_1(\theta) + \ln f_2(\theta)$$

La función de log verosimilitud de la primera etapa es la simple suma de las funciones de verosimilitud GARCH individuales para cada activo:

$$\ln f_1(\theta) = -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \sum_{t=1}^T \ln(h_{it}) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \sum_{t=1}^T \varepsilon_{it}/h_{it}$$

La función de log verosimilitud de la segunda etapa se obtiene generalmente como (excluyendo términos constantes):

$$\ln f_2(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln|\mathbf{R}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{u}_t^t \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{u}_t$$

Donde  $\mathbf{u}_t$  son los errores o innovaciones estandarizadas. En el caso bivalente se simplifica como:

$$\ln f_2(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ \ln(1 - \rho_{12,t}^2) + \frac{u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2 - 2\rho_{12,t}u_{1,t}u_{2,t}}{1 - \rho_{12,t}^2} \right]$$

**Ejemplo.** En el siguiente cuadro se muestra nuevamente los datos obtenidos para el modelo DCC. Supongamos que ya hemos realizado la estimación de las funciones de verosimilitud GARCH individuales para cada activo por lo que podemos obtener las rentabilidades estandarizadas  $u_{i,t}$ . Obtenemos  $\rho_{12,t} = \frac{q_{12,t}}{\sqrt{q_{11,t}}\sqrt{q_{22,t}}}$  sujeto a unos valores iniciales de  $\alpha$  y  $\beta$ . La función de log verosimilitud para cada observación se obtiene como  $-\frac{1}{2} \left( \ln(1 - \rho_{12,t}^2) + \frac{u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2 - 2\rho_{12,t}u_{1,t}u_{2,t}}{1 - \rho_{12,t}^2} \right)$ , por lo que para  $t = 1$  obtendríamos  $-\frac{1}{2} \left( \ln(1 - 0,6961^2) + \frac{1,1905^2 + 0,5185^2 - 2 \cdot 0,6961 \cdot 0,6173}{1 - 0,6961^2} \right) = -0,4706$ . Tendríamos que optimizar el valor de la función de log-verosimilitud para todo el periodo temporal cambiando el valor de  $\alpha$  y  $\beta$  con la restricción de que sean no negativos y satisfagan que  $0 < \alpha + \beta < 1$ .

$t$	$u_{1,t}$	$u_{2,t}$	$u_{1,t}, u_{2,t}$	$\rho_{12,t}$	$\ln f_2(\theta)$
0					
1	1,1905	0,5185	0,6173	0,6961	-0,4706
2	-0,1953	0,3077	-0,0601	0,7003	0,1242
3	0,6557	0,8000	0,5246	0,6883	-0,0096
4	-0,6780	0,0813	-0,0551	0,7061	-0,1974
5	0,7826	0,5085	0,3979	0,6794	0,0028
6	0,5310	0,6034	0,3204	0,6940	0,1343
7	0,9091	0,2655	0,2414	0,7071	-0,2090
8	1,1364	0,5423	0,6162	0,6997	-0,3720
9	-0,1786	-0,8333	0,1488	0,7157	-0,1672
10	0,3738	0,1905	0,0712	0,6928	0,2526
11	0,8654	0,5882	0,5090	0,6952	-0,0444
12	0,0481	-0,1485	-0,0071	0,7195	0,3287
...	...	...	.....	...	...

---

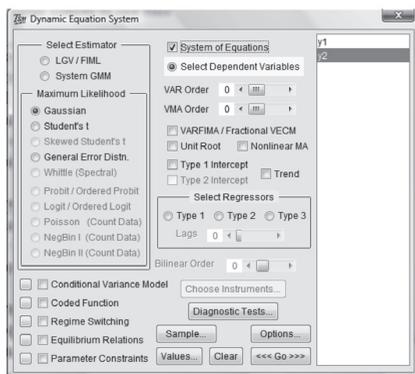
## Estimación modelos MGARCH mediante R, Eviews y TSM

La estimación de los modelos MGARCH es relativamente compleja por la que no está tan frecuentemente implementada en el distinto *software* estadístico como los modelos univariantes.

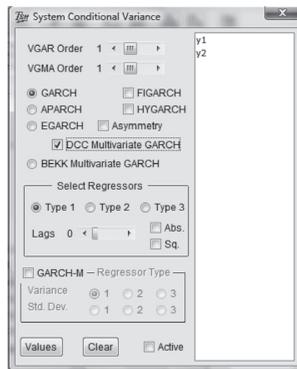
En R existen varios paquetes que permiten la estimación y simulación de modelos MGARCH. El paquete *ccgarch* proporciona funciones para estimar y simular los modelos CC-GARCH y DCC-GARCH. El paquete *rgarch*, que a fecha de elaboración de este trabajo está en etapa beta, se espera permita la estimación de modelos DCC-GARCH, y los modelos Cópula-GARCH y GO-GARCH. El paquete *gogarch* permite la estimación de los modelos GO-GARCH. Finalmente, el paquete *Mgarch*, que también es un paquete en progreso, permite la estimación y simulación de un modelo BEKK bivalente.

En Eviews no existe la posibilidad de estimar los modelos MGARCH sin recurrir a la programación de los mismos por parte del usuario o emplear el código de una tercera persona. En este sentido en la versión 6 se proporciona un ejemplo para la estimación de un modelo BEKK GARCH bivalente y trivalente triangulares.

El *software* TSM permite la estimación de modelos BEKK y modelos DCC. Para ello, al igual que con los modelos VAR, debemos seleccionar en *Dynamic Equation System* la opción *System of Equations* para que el programa permita posteriormente seleccionar modelo multivariantes.



Posteriormente en *Conditional Variance Model* podremos estimar el modelo BEKK o DCC que deseemos, en el gráfico inferior se estimaría un modelo DCC donde los modelos univariantes son GARCH(1,1).



Entre otros programas informáticos para la estimación de los modelos GARCH multivariantes destaca un *toolbox* o conjunto de funciones para Matlab desarrollado por el profesor Kevin Sheppard (inicialmente *UCSD\_GARCH toolbox*, en la actualidad *MFE Toolbox*). Contiene funciones para la estimación y simulación de modelos BEKK, CCC y DCC GARCH, además de los modelos GARCH univariantes y puede accederse gratuitamente a través de su página web [http://www.kevinsheppard.com/wiki/Main\\_Page](http://www.kevinsheppard.com/wiki/Main_Page). Una revisión del distinto *software* informático para la estimación de los modelos MGARCH puede verse en Brooks et ál. (2003).

---

## 2.5. OTROS MODELOS MULTIVARIANTES PARA LA VOLATILIDAD

Los modelos GARCH multivariantes explicados en el apartado anterior son los más conocidos, sin embargo existen otros modelos multivariantes para la volatilidad: otros modelos GARCH multivariantes (cópula-GARCH, GO-GARCH, MGARCH asimétricos), modelos de volatilidad estocástica multivariante y modelos de cambio de régimen de Markov multivariante. Asai et ál. (2006) ofrece una revisión de los modelos SV multivariantes.

## **Modelos cópula-GARCH multivariantes**

Los modelos cópula-GARCH multivariantes modelizan la dependencia condicional de las series a través de la teoría de cópulas. Patton (2006a, 2006b) y Jondeau y Rockinger (2006) han propuesto modelos cópula-GARCH, de forma que son especificados mediante ecuaciones GARCH para las varianzas condicionales, distribuciones marginales para cada serie (normal o  $t$  de Student) y una función cópula condicional (normal o  $t$  de Student). Estos artículos destacan la necesidad de permitir variaciones a lo largo del tiempo de la cópula condicional de forma que extienden en cierto sentido los modelos DCC a otras especificaciones para la dependencia condicional. La función cópula se puede hacer variar con el tiempo a través de sus parámetros los cuales pueden ser función de los datos pasados o incluso teóricamente se podría variar su forma funcional a lo largo del tiempo.

## **Modelos O-GARCH**

Otra extensión de un modelo GARCH multivariante es el GARCH ortogonal u O-GARCH (Orthogonal GARCH) propuesto por Kariya (1988) y Alexander y Chibumba (1997) y que Van der Weide (2002) generaliza en el denominado GO-GARCH (*Generalized Orthogonal GARCH*). En estos modelos se supone que los datos observados son generados por una transformación lineal ortogonal de procesos GARCH univariantes. La matriz de la transformación lineal es la matriz ortogonal de los vectores propios de la matriz de covarianza de los residuos estandarizados. Este tipo de modelos emplea el análisis de componentes principales de los datos de forma que cada componente acumula un porcentaje elevado de la información contenida en los datos, por lo que tienen como ventaja un pequeño número de parámetros a estimar cuando existe un gran número de variables.

## **Modelos MGARCH asimétricos**

De forma semejante al campo univariante, también existen modelos multivariantes en donde la varianza y/o las covarianzas condicionales reaccionan de forma distinta a los acontecimientos positivos o negativos de la misma magnitud que se presenten en el tiempo. Un modelo que tienen en cuenta el signo de los errores es el modelo ADC (*asymmetric dynamic covariance*) de Kroner y Ng (1998), el modelo AG-DCC

(*Asymmetric Generalized DCC*) de Cappiello et ál. (2006) o los propuestos en Hafner y Herwartz (1998) y Hansson y Hordahl (1998). A modo de ejemplo el modelo de Hansson y Hordahl (1998) es un modelo DVEC que añade un término  $\mathbf{D} \odot \mathbf{v}_{t-1} \mathbf{v}_{t-1}^t$ , es decir:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}^\circ + \mathbf{A}^\circ \odot (\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^t) + \mathbf{B}^\circ \mathbf{H}_{t-1} + \mathbf{D} \odot \mathbf{v}_{t-1} \mathbf{v}_{t-1}^t$$

En donde  $\mathbf{D}$  es una matriz diagonal de parámetros y  $\mathbf{v}_t = \max\{-\boldsymbol{\varepsilon}_t, 0\}$ .

### Modelos de volatilidad estocástica multivariante

Los modelos de volatilidad estocástica multivariantes (MSV) establecen que la matriz de varianzas condicionales depende de algún proceso inobservable o latente en vez de las observaciones pasadas como realizan los modelos MGARCH. Un modelo SV multivariante se especifica típicamente como  $N$  modelos de volatilidad estocástica univariantes. Para una revisión de los modelos MSV véase Ghysels et ál. (1996) o Asai et ál. (2006). En los modelos MSV los errores vienen dado para  $i = 1, \dots, N$  y  $t = 1, \dots, T$  por:

$$\varepsilon_{it} = \sigma_i z_{it} \exp(0,5h_{it})$$

En donde  $\sigma_i$  es un parámetro. El vector de innovaciones  $\mathbf{z}_t = (z_{1t}, \dots, z_{Nt})^t$  es un ruido blanco multivariante, tiene esperanza  $E(\mathbf{z}_t) = 0$  y matriz de varianzas  $\text{Var}(\mathbf{z}_t) = \boldsymbol{\Sigma}_z$ . El vector de volatilidades  $\mathbf{h}_t = (h_{1t}, \dots, h_{Nt})$  sigue un proceso VAR(1), es decir,  $\mathbf{h}_t = \boldsymbol{\phi} \mathbf{h}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t$  donde  $\boldsymbol{\eta}_t$  es una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas según una Normal(0,  $\boldsymbol{\Sigma}_\eta$ ). Una fuerte crítica a los modelos MSV es la complejidad de su estimación.

### Modelos de cambio de régimen multivariantes

Una alternativa a los modelos GARCH multivariantes o a los modelos de volatilidad estocástica son los modelos de cambio de régimen de Markov. Dichos modelos son ajustados y comparados para la determinación de las cargas de capital de un asegurador en Boudreault y Panneton (2009). El modelo RSLN de Hardy (2001) modeliza la rentabilidad de un activo o un índice como un modelo de cambio de régimen de Markov donde bajo cada uno de los regímenes la rentabilidad es gaussiana. Sin embargo, en la medida de que las compañías aseguradoras invierten en carteras

de diversos índices correlacionados este modelo puede ser extendido al campo multivariante mediante un modelo MRSLN (*multivariate regime-switching lognormal model*). De esta forma en vez de una distribución normal univariante, el modelo MRSLN está basado en una distribución normal multivariante con media  $U_{pt}$  y matriz de varianzas-covarianzas  $\Sigma_{pt}$ . De esta forma, sea el proceso  $\{p_t, t = 0, 1, \dots\}$  que influencia en la rentabilidad de los activos, donde en cada momento todos los activos están en el mismo régimen<sup>105</sup>, la rentabilidad de una cartera compuesta por distintos índices viene dada por la expresión:

$$r_t = U_{p_t} + \varepsilon_t$$

$\varepsilon_t | \text{Normal multivariante } (0, \Sigma_{p_t})$

Al igual que en el caso univariante, puede existir tantas medias y varianzas distintas como regímenes haya. Sin embargo, es más fácil la estimación de los modelos MRSLN ( $k, n_R$ ) con  $k > n_R$  donde  $k$  es el número de regímenes y  $n_R$  es el número de matrices de correlación empleadas en el modelo<sup>106</sup>.

---

El *software* TSM permite la estimación de modelos de cambio de régimen multivariantes. Para ello debemos seleccionar en *Dynamic Equation System* la opción *System of Equations* para que el programa permita posteriormente seleccionar modelo multivariantes. Posteriormente, y a semejanza del caso univariante, en *Regimen Switching* podremos estimar el modelo con los regímenes que deseemos pero con una única matriz de correlación de los errores.

---

<sup>105</sup> Esto implica que en un modelo de dos regímenes, todos los mercados están simultáneamente en el régimen de alta o baja volatilidad.

<sup>106</sup> Boudreault y Panneton (2009) emplean datos mensuales desde Enero de 1956 a Septiembre de 2005 para el mercado de Canadá, EE.UU., Reino Unido y Japón para estimar distintos modelos GARCH multivariantes comparando sus resultados en base a los tradicionales criterios de parsimonia, la normalidad de los residuos y test de heterocedasticidad. También realiza una comparación de estos modelos con los modelos RSLN multivariante en donde estiman los modelos MRSLN (2,1), MRSLN (2,2), MRSLN (3,1) y MRSLN (3,3) encontrando bajo los criterios AIC y LRT que el mejor modelo es el modelo de dos regímenes con una sola matriz de correlación MRSLN (2,1), mientras que bajo el criterio SC el mejor modelo es el de tres regímenes con una matriz de correlación MRSLN (3,1).

## CAPÍTULO 3. MÉTODOS DE COMPARACIÓN Y SELECCIÓN DE MODELOS

En los dos capítulos anteriores hemos mostrado la forma en la que se pueden construir modelos internos a partir de series temporales históricas para que la generación de escenarios económicos y la medición y control del riesgo. Dichas técnicas se podrían implantar en el marco de Solvencia II para la construcción de modelos VaR orientados a la determinación de las necesidades de capital. Un elemento fundamental a la hora de seleccionar un modelo es el proceso de validación al que es preciso someterlo. Una vez estimado un modelo se evalúa en términos cuantitativos y cualitativos, para analizar si es adecuado para alcanzar el propósito que se busca<sup>107</sup>. En este capítulo abordamos exclusivamente diferentes test estadísticos y pruebas cuantitativas que pueden aplicarse. Estos se han clasificado como técnicas de *backtesting* y otros criterios tradicionales de selección de modelos. El *backtesting* es un procedimiento estadístico utilizado para validar un modelo mediante la comparación de los resultados reales (distribución empírica de pérdidas y ganancias) y las medidas de riesgo generadas por los modelos. Entre los criterios tradicionales destacan aquellos que se establecen en base a la función de verosimilitud y los que analizan los residuos.

### 3.1. EL *BACKTESTING* DE LOS MODELOS VaR

El proyecto de Solvencia II pretende que el nivel de capital de las compañías de seguros esté en función del riesgo asumido. Por tanto, se trata de cuantificar el impacto económico que pueden tener sobre la compañía de seguros los diferentes riesgos técnicos, financieros y operativos, para determinar un capital necesario consistente con dichos riesgos. Para la cuantificación del riesgo en el modelo estándar se ha optado por el VaR por ser una medida ampliamente difundida en los mercados financieros y permitir la integración de los diferentes riesgos. El VaR es

---

<sup>107</sup> Para la aprobación de un modelo interno en el cálculo del SCR en Solvencia II se deben satisfacer las pruebas a las que hace referencia los artículos 120 a 126 de la Directiva Solvencia II, así como los requisitos establecidos en CEIOPS (2009).

la máxima pérdida que se puede esperar para un plazo e intervalo de confianza determinados en condiciones normales de mercado. En los primeros estudios cuantitativos se asumía una distribución normal para varios de los factores de riesgo de mercado. En QIS5 los parámetros y las hipótesis utilizadas para el cálculo del capital necesario se corresponden con el VaR empírico obtenido a partir de series históricas de cada riesgo y asumiendo un nivel de confianza del 99,5%. Frente al VaR utilizado en Solvencia II, los modelos internos determinan esta medida a través de métodos de simulación basados en Monte Carlo, lo cual aporta mayor flexibilidad al no tener que modelizar cada riesgo asumiendo la hipótesis de normalidad ni la distribución empírica. Por lo tanto, el VaR se calcula simplemente como el percentil deseado de la distribución de resultados simulada. Formalmente, el VaR es el nivel de pérdidas tal que exista una probabilidad  $p$  de que las pérdidas sean iguales o mayores que  $Y^*$ :

$$VaR_p(Y) = Prob(Y \geq Y^*) = p$$

Dado que la determinación del VaR puede realizarse utilizando modelos alternativos, es preciso contrastar la adecuación de los mismos. Precisamente este es el objetivo que persiguen las técnicas de *backtesting*, bajo cuya denominación se agrupan un conjunto de test y técnicas orientadas a la validación de modelos. En este capítulo analizaremos las herramientas estadísticas de validación de modelos VaR construidos con las técnicas analizadas en el capítulo anterior.

### 3.1.1. Revisión de la literatura

Los métodos de *backtesting* pretenden analizar la adecuación de los modelos internos basados en el VaR u otras medidas del riesgo. La validación mediante las técnicas que aquí se abordan consiste, principalmente, en la realización de test estadísticos que tratan de evaluar si el número de pérdidas que exceden el VaR se corresponden con el porcentaje teórico. En general, cada excepción puede considerarse como una variable de Bernoulli y, como tenemos  $N$  variables, si el modelo es adecuado las excepciones se comportarán como una distribución binomial, es decir, suceden con una determinada probabilidad individual y son independientes. Los test más simples consisten en computar el número de excedidos, entendiendo por estos los valores que superan el VaR para un determinado nivel de confianza, y

compararlos con el número esperado. En particular, la propuesta de Kupiec (1995), que ha constituido la base sobre la que se ha configurado la metodología de *backtesting* de los Acuerdos de Basilea, trata de determinar si la frecuencia observada de excepciones es consistente con la frecuencia esperada. No obstante, el test propuesto por Kupiec tiene como principal debilidad, la dificultad para detectar modelos incorrectos. Además, tampoco tiene en cuenta la dependencia entre excedidos y se centra exclusivamente en la propiedad de cobertura incondicional. Por este motivo, las propuestas de Chatfield (1993) y Christoffersen (1998) incorporan también la hipótesis de independencia entre los sucesos. Con posterioridad, Christoffersen y Pelletier (2004) proponen un test de independencia que tenga en cuenta el hecho de que si las excepciones del VaR son completamente independientes unas de otras, el tiempo que transcurre entre dichas excepciones debería ser completamente independiente, así como el tiempo transcurrido desde la última excepción, lo que significa que no debería haber ninguna dependencia en la duración. El principal problema de este tipo de propuestas subyace en la necesidad de disponer de un número elevado de observaciones.

La extensión a múltiples niveles de VaR de las propiedades de cobertura incondicional e independencia se recoge en los trabajos de Crnkovic y Drachman (1997), Diebold, Gunther y Tay (1998) así como en Berkowitz (2001). Tal y como afirman dichos autores, las citadas propiedades deberían cumplirse para cualquier nivel de confianza. Según Berkowitz (2001), esta metodología de evaluación es capaz de detectar modelos incorrectos con muestras reducidas (100 observaciones). Otra metodología para realizar el *backtesting* se basa en analizar la función de pérdidas (Lopez, 1999a), destacando su utilidad para discriminar entre modelos de riesgo alternativos. En el trabajo de Campbell (2005) se revisan los métodos condicionales e incondicionales mediante simulación, llegando a la conclusión de que aquellos que examinan varios cuantiles son mejores identificando modelos inadecuados. También Lehikoinen (2007) introduce un marco para la mejora del proceso de *backtesting* a partir del análisis de pérdidas y ganancias reales de las carteras de bancos, frente a las resultantes de un modelo VaR, formulando posteriormente un marco detallado para el desarrollo y mejora de los procesos de *backtesting*. Asimismo, Viridi (2011) calculó el VaR diario a través del modelo lognormal y aplicó los principales métodos de *backtesting* para un conjunto de empresas indias, llegando a la conclusión de que los métodos existentes pueden dar lugar a resultados inconsistentes, por lo cual se

enfatisa la necesidad de mejorar los métodos actuales. En particular, sus resultados muestran que los métodos tradicionales no son muy eficientes a la hora de diferenciar entre modelos buenos y malos.

### 3.1.2. Cobertura incondicional, independencia y función de fallos

El procedimiento de *backtesting* consiste en analizar los fallos que tiene el modelo en relación al nivel de fallos que debería tener, dado el nivel de confianza con el que el VaR ha sido estimado. Por tanto, un elemento básico del *backtesting* es el número de veces que las pérdidas superan el VaR en un periodo determinado. En este sentido, construiremos una secuencia que toma el valor de 1 si la pérdida excede el VaR y 0 en caso contrario<sup>108</sup>:

$$I_{t+1}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{t+1} > VaR_t \\ 0 & \text{si } x_{t+1} \leq VaR_t \end{cases}$$

Donde  $VaR_t$  es la pérdida estimada para el momento  $t + 1$  usando la información disponible en  $t$ ,  $x_{t+1}$  es la pérdida observada en  $t + 1$  e  $I_{t+1}(\alpha)$  es el indicador del evento de una excepción o fallido en  $t + 1$ . El resultado de aplicar la función de fallos a una determinada serie será un vector formado por una serie de ceros y unos que indicará si las pérdidas obtenidas han superado o no el VaR<sup>109</sup>.

---

#### Ejemplo. Cálculo de la función indicador.

En términos matemáticos, el valor en riesgo o VaR con un nivel de confianza  $\alpha$  se define como el cuantil  $\alpha$  de la distribución de pérdidas y ganancias. Si se asume que los rendimientos de los activos se distribuyen normalmente, el VaR se calcula de la siguiente manera:

$$VaR_\alpha = \mu - q(\alpha)\sigma$$

<sup>108</sup> La notación empleada supone, a modo de ejemplo, que un VaR del 32% se corresponde con una caída del mercado del -32% en el percentil deseado.

<sup>109</sup> A modo de ejemplo una posible secuencia sería (0, 0, 1, 0, ..., 0, 0).

Donde  $q(\alpha)$  refleja el cuantil de la distribución normal estándar con el nivel de confianza seleccionado (por ejemplo el 99,5%),  $\sigma$  la desviación estándar y  $\mu$  la media de los rendimientos. En caso de emplear un modelo de series temporales para la media condicional y/o la volatilidad condicional de los rendimientos, la fórmula del VaR suponiendo que los residuos son normales será:

$$VaR_{\alpha} = \mu_t - q(\alpha)\sigma_t$$

Supongamos que tenemos una serie de rendimientos  $r_t$  y tres modelos alternativos para su ajuste: el modelo normal, un modelo GARCH(1,1) y un modelo RSLN2. En el modelo normal tanto la media como la volatilidad son constantes, es decir:

$$r_t = \mu + \sigma Z_t$$

Siendo  $Z_t \sim N(0,1)$ . En el modelo GARCH(1,1) la volatilidad condicional depende de sus valores pasados y de los errores cometidos en la estimación:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t Z_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Finalmente, en el modelo RSLN2 tanto la media como la volatilidad son dependientes del tiempo:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \sigma_t Z_t \\ \mu_t &= \mu_1 p_1(t) + \mu_2 p_2(t) \\ \sigma_t &= \sqrt{\sigma_1^2 p_1(t) + \sigma_2^2 p_2(t) + p_1(t)(1 - p_1(t))[\mu_1 - \mu_2]^2} \end{aligned}$$

Siendo  $p_i(t)$  la probabilidad condicional de estar en el régimen  $i$  en  $t$ . En el cuadro inferior se muestran los rendimientos observados en el mercado ( $r_t$ ) y los valores para los distintos momentos temporales de la media y volatilidad para los distintos modelos.

$r_t$	Normal		GARCH		RSLN2	
	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma_t$	$\mu_t$	$\sigma_t$
...	...	...	...	...	...	...
3,68%	0,27%	5,73%	0,07%	5,73%	0,23%	5,76%
2,94%	0,27%	5,73%	0,07%	5,53%	0,66%	5,27%
-3,48%	0,27%	5,73%	0,07%	5,32%	0,38%	5,60%
-3,50%	0,27%	5,73%	0,07%	5,39%	0,13%	5,87%
-15,08%	0,27%	5,73%	0,07%	5,44%	-1,56%	7,22%
-11,99%	0,27%	5,73%	0,07%	8,75%	-1,56%	7,22%
9,29%	0,27%	5,73%	0,07%	9,46%	-1,38%	7,11%
-2,46%	0,27%	5,73%	0,07%	9,00%	-1,17%	6,97%
-6,17%	0,27%	5,73%	0,07%	7,88%	-1,36%	7,09%
4,60%	0,27%	5,73%	0,07%	7,55%	-0,90%	6,78%
...	...	...	...	...	...	...

En base a los anteriores parámetros podemos calcular el VaR estimado al 99,5% de confianza por cada modelo mediante la función  $VarR_t = \mu_t + \sigma_t \cdot DISTR.NORM.ESTAND.INV(0,995)$ , o de forma alternativa dada la simetría de la normal mediante  $VarR_t = \mu_t + \sigma_t \cdot DISTR.NORM.ESTAND.INV(0,005)$ . Una vez obtenido la serie VaR estimada la compararemos con los rendimientos para obtener nuestra función de fallidos, para lo cual podemos emplear  $-SI(r_t < VarR_t; 1; 0)$ . Como se aprecia en el cuadro inferior el modelo normal y GARCH proporcionan un fallido en el periodo temporal analizado, mientras que el modelo RSLN no produce ningún fallido.

$r_t$	VaR Normal	VaR GARCH	VaR RSLN2	Fallidos Normal	Fallidos GARCH	Fallidos RSLN2
...	...	...	...	...	...	...
3,68%	-14,49%	-14,69%	-14,61%	0	0	0
2,94%	-14,49%	-14,17%	-12,91%	0	0	0
-3,48%	-14,49%	-13,63%	-14,04%	0	0	0
-3,50%	-14,49%	-13,81%	-14,99%	0	0	0
-15,08%	-14,49%	-13,94%	-20,16%	1	1	0
-11,99%	-14,49%	-22,47%	-20,16%	0	0	0
9,29%	-14,49%	-24,30%	-19,69%	0	0	0
-2,46%	-14,49%	-23,11%	-19,12%	0	0	0
-6,17%	-14,49%	-20,23%	-19,62%	0	0	0
4,60%	-14,49%	-19,38%	-18,36%	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...

En las entidades financieras se trabaja para realizar el *backtesting* con una muestra no inferior a 250 observaciones diarias. De esta forma, si se cuenta con una serie de, por ejemplo, 3.000 datos del rendimiento diario de determinado activo, se calcula el VaR con los primeros 2.750 datos y se utilizan las 250 observaciones siguientes para realizar las pruebas de *backtesting*. Esta opción se denomina *backtesting* fuera de la muestra, pero no parece viable para su aplicación en la industria aseguradora en la que habitualmente se trabaja con datos mensuales o de mayor frecuencia. Por eso, a nuestro juicio, la mejor alternativa semeja estimar el modelo con todos los datos posibles y su validación se realizará nuevamente con todos los datos con los que los modelos han sido estimados (*backtesting* dentro de la muestra). Esta será la metodología empleada a lo largo de este trabajo al trabajar con datos mensuales. Si en el nuevo periodo analizado (12 nuevos meses) se produjese una excepción, habría que prestarle una especial importancia. Otra alternativa sería aplicar la metodología que utilizan las entidades financieras para lo cual debiera emplearse datos de mayor frecuencia, como por ejemplo diarios. En este caso, podría completarse el *backtesting* dentro de la muestra (*in sample*) con el realizado fuera de la muestra (*out sample*). El denominado *backtesting in sample* tiene como problema que dado que el modelo ha sido ajustado a la historia y se testa nuevamente frente a los valores pasados es de esperar un ajuste relativamente bueno. El *backtesting out sample* implica que sólo se valida el modelo empleando las observaciones que se produjeron después del final del periodo de la muestra utilizada en la estimación del modelo, por lo que un buen modelo dentro de la muestra pudiera producir fallos cuando se testa fuera de la muestra.

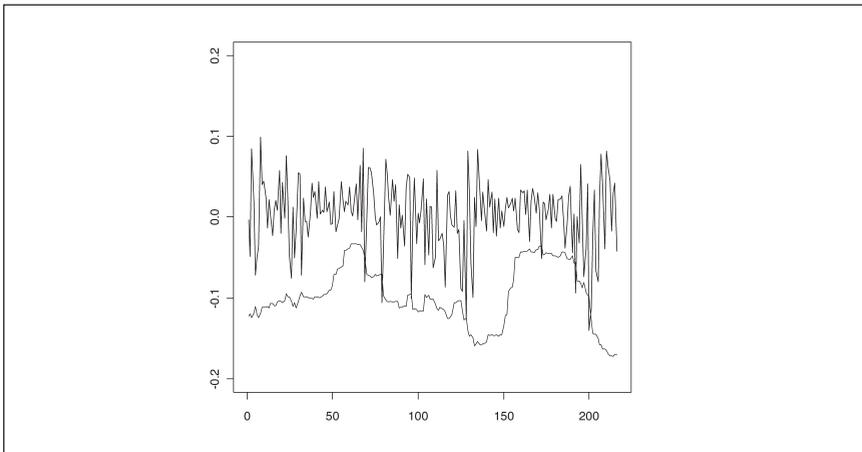
El *backtesting* limpio consiste en un análisis comparativo entre las estimaciones del VaR y los resultados diarios de las carteras de cierre del día anterior valoradas a los precios del día siguiente, es decir, una cartera modelo cuya composición no varía. La otra opción posible es realizar un *backtesting* sucio sobre las carteras reales de la entidad que incorporen el resultado de la operativa intradía. En las compañías aseguradoras el *backtesting* que proponemos realizar es el limpio, ya que detrás de la ideología de Solvencia II está estresar la cartera actual al plazo de un año.

---

**Ejemplo.** En el gráfico siguiente mostramos la evolución de los rendimientos logarítmicos mensuales del FTSE-100 en el periodo 1992-2009 (216 observaciones). Asumiendo que calculamos el VaR analítico mediante un modelo basado en la distribución normal cuyos parámetros (media y volatilidad) se recalculan mediante una ventana móvil de 24 meses, el VaR para el periodo  $t+1$  vendría determinado por  $VaR_{t+1}^p(r) = \mu_t - q(\alpha)\sigma_t$ . De este modo, el VaR al 99,5% de confianza para el primer periodo de análisis se calcularía como:

$$VaR_{t+1}^p(r) = 0,004 - 0,049 \cdot 2,5758 = -0,1223$$

Como se puede comprobar en el gráfico adjunto, el VaR es dinámico y existen 7 casos en el que el valor de las pérdidas supera al VaR estimado. Por este motivo, con este modelo y durante este periodo de análisis se computan siete excepciones.



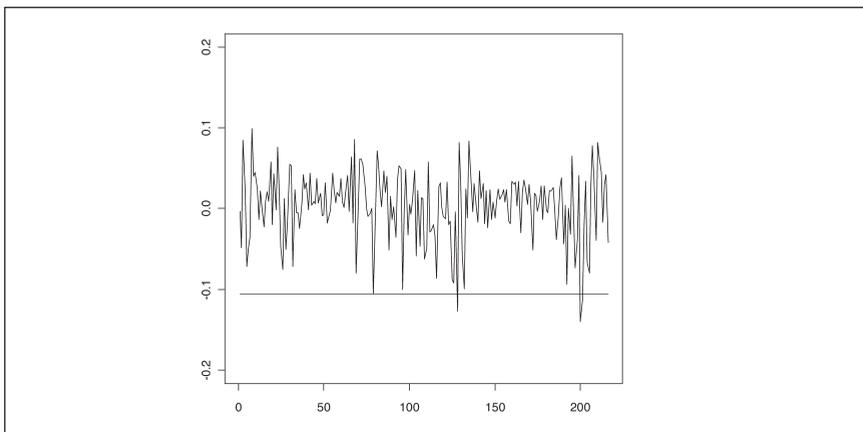
El gráfico anterior permite observar cual es la dinámica del VaR con respecto a la distribución de pérdidas histórica, y sirve para evaluar en una primera aproximación el desempeño del modelo VaR. Así, cuando un número grande de pérdidas excede el VaR es un síntoma de que el modelo está subestimando el riesgo analizado. Por el contrario, si observamos que un número muy reducido de observaciones excede el VaR, podríamos pensar que el modelo es adecuado o incluso que el VaR este sobrestimando el riesgo histórico. Otra alternativa para calcular el VaR analítico es partir de la media y desviación típica de toda la serie en vez de emplear una ventana móvil, obteniendo los parámetros que figuran en la tabla siguiente.

Volatilidad	4,21%
Promedio	0,33%

De este modo, se obtiene el VaR como:

$$VaR = 0,0033 - 2,5758 \cdot 0,0421 = -0,1053$$

Como se puede comprobar en el gráfico adjunto, esto proporciona una estimación constante del VaR, computándose en este caso y durante este periodo de análisis cuatro excepciones.



Siguiendo a Christoffersen (1998), la determinación de la adecuación de un modelo VaR se reduce a determinar si la secuencia de fallos satisface dos propiedades:

1. *Propiedad de cobertura incondicional.* Esta propiedad implica que el número de fallos en un modelo VaR debe corresponder al nivel de confianza con el que dicha medida es calculada. La probabilidad de que se produzca una pérdida que exceda el VaR tiene que ser  $\alpha$ , o lo que es lo mismo,  $\Pr(I_{t+1}(\alpha) = 1) = \alpha$ . Si las pérdidas ocurren en un porcentaje superior, asumiendo que disponemos de una muestra suficientemente grande, el VaR calculado subestima el riesgo de la cartera. En caso contrario, es decir, cuando el número de fallos es muy pequeño, el modelo sobreestima el riesgo.

2. *Propiedad de independencia.* La propiedad de independencia hace referencia a que los fallos del modelo no pueden suceder de cualquier forma, sino que deben ser independientes. Esto significa que cualquier par de fallos de la secuencia del modelo debe ser independiente del otro ( $I_{t+j}(\alpha)$ ,  $I_{t+k}(\alpha)$ ). Intuitivamente esta condición requiere que la historia previa de fallos no debiera proporcionar información acerca de cuándo se producirá un nuevo fallo. Si por ejemplo observamos que los fallos se producen de forma consecutiva (en pares), entonces, la probabilidad de observar un fallo, una vez que se produce otro, es del 100% y no de  $\alpha$ , como sería si fuesen independientes. En este caso el VaR no reflejaría la pérdida máxima que se espera que sea superada un porcentaje del tiempo igual a  $\alpha$ . En general, cuando se producen agrupaciones de fallos, se viola el principio de independencia y el modelo muestra su incapacidad para capturar cambios en el nivel de riesgo de mercado. Tal y como Campbell (2005) indica, ambas propiedades deben ser superadas por un modelo para considerarlo preciso, ya que cada una mide una dimensión diferente. Estas propiedades pueden resumirse en que la secuencia de fallos es idénticamente distribuida como una variable aleatoria de Bernoulli con probabilidad  $\alpha$ .

### **3.1.3. Test de cobertura incondicional**

En este apartado abordaremos los test de cobertura incondicional, que se centran por tanto en el número de fallos que tiene el modelo en relación al número que debería tener. A priori, un modelo será adecuado cuando el número de fallos coincida con los que deberían corresponder para un determinado nivel de confianza. De lo contrario, el modelo no mide de forma adecuada el riesgo. En todo caso, cuando el *backtesting* se hace con fines regulatorios tendría menos riesgo aceptar modelos que sobreestiman el riesgo que aquellos que infraestiman el riesgo, es decir, aquellos que tienen menos fallos de los que deberían tener, ya que implicará que en general los niveles de capital que se estimen con esos modelos superarán a los que deberían tener, lo que significa una medición conservadora del riesgo y un aumento de la solvencia.

#### **3.1.3.1. Modelo de *backtesting* de Basilea II**

El modelo de *backtesting* aplicado en Basilea II utiliza un nivel de confianza del 99% y se aplica a un periodo de 250 días. Para cada uno de esos días, los bancos tienen

que calcular el VaR con su modelo y la distribución de pérdidas y ganancias. Dados los parámetros que se utilizan, se espera que las pérdidas superen el VaR en promedio 2,5 días. La propuesta de Basilea II asume que las pérdidas y ganancias son independientes, lo que es equivalente a asumir que las excepciones se comportan como una variable de Bernoulli, y dado que disponemos de 250 días, es equivalente a la realización de un experimento con una distribución binomial. La probabilidad de que un modelo adecuado genere  $x$  excepciones en el periodo considerado (250 días) se puede estimar como:

$$f(x) = \binom{250}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots, N$$

En la tabla siguiente exponemos la probabilidad de que se produzca un determinado número de excepciones utilizando los parámetros que se utilizan en Basilea II<sup>110</sup>.

Excepciones	P(n=k)
0	8,106%
1	20,469%
2	25,742%
3	21,495%
4	13,407%
5	6,663%
6	2,748%
7	0,968%
8	0,297%
9	0,081%
10	0,020%

Según la metodología de *backtesting* propuesta en Basilea II, un modelo se considerará adecuado cuando el número de fallos esté en el intervalo (0, 4). Si el modelo incurriese entre 5 y 9 excepciones, se incluiría en la zona naranja y a partir de 10 sería clasificado en la zona roja, o lo que es lo mismo, se identificaría como un modelo inadecuado. En la tabla inferior se muestran las características del denominado sistema *traffic light* de Basilea.

<sup>110</sup> El número de fallos puede estimarse para otros niveles de confianza simplemente aplicando la distribución binomial y buscando los puntos de corte para niveles del 95% o del 90%, por ejemplo.

Zona	Número de excepciones	Características
Verde	0-4	Probablemente un buen modelo. Poca probabilidad de aceptar erróneamente un modelo inadecuado.
Amarilla	5-9	Incierto. Dicho resultado puede ser alcanzado tanto por modelos adecuados como inadecuados.
Roja	10 o más	Probablemente un mal modelo. Es muy poco probable que un buen modelo produzca este número de excepciones.

La hipótesis que se pretende contrastar es que la probabilidad de que se produzca una excepción es igual a la probabilidad esperada del 1%:

$$H_0 = p < 0.01$$

La hipótesis alternativa es que la probabilidad de que ocurra una excepción es significativamente mayor que la probabilidad esperada:

$$H_1 = p > 0.01$$

El test de Basilea II tiene un error tipo 1 muy pequeño, es decir, la probabilidad de que se rechace un modelo que es adecuado es muy baja<sup>111</sup>. Esto es debido a que sólo se rechazan los modelos que caen en la zona roja, es decir, aquellos que tengan 10 o más fallos. Como podemos observar, en el cuadro anterior, la probabilidad de que esto suceda es del 0,02%, equivalente por tanto al error tipo I. No obstante, tomando un modelo inadecuado con un  $p = 0,02$  (véase la tabla inferior), donde el número de excepciones esperadas sería 5, la probabilidad de que caiga en la zona verde (valores menores a 5), sería de un 43,87%, siendo la suma de las probabilidades de que el número de excepciones sea menor que 5.

<sup>111</sup> En los test estadísticos hay dos errores: el error tipo I describe la probabilidad de rechazar un modelo correcto y el error tipo II la probabilidad de aceptar un modelo incorrecto.

		Modelo	
		Correcto	Incorrecto
Decisión	Aceptar	OK	Error tipo II
	Rechazar	Error tipo I	OK

Excepciones	P(n=k)
0	0,640%
1	3,268%
2	8,303%
3	14,008%
4	17,653%
5	17,725%
6	14,771%
7	10,507%
8	6,514%
9	3,574%
10	1,758%

En la tabla siguiente recogemos la probabilidad de que un modelo sea clasificado dentro de la zona verde en función del valor de la probabilidad esperada del número de fallidos. En el mismo podemos ver, como algunos modelos incorrectos, todos aquellos con p diferente de 1%, tienen una probabilidad elevada de ser clasificados como correctos.

0,50%	1%	1,50%	2%	2,50%	3%
0,9911	0,8922	0,6780	0,4387	0,2495	0,1282

### 3.1.3.2. Test de Kupiec de porcentaje de fallos (POF)

Este test se centra exclusivamente en la propiedad de cobertura incondicional, es decir, simplemente comprueban si el VaR es superado en un porcentaje superior al nivel de confianza  $\alpha$  con el que fue estimado. Bajo la hipótesis nula, que plantea que si el modelo es bueno, el número de fallos sigue una distribución binomial, de modo que si tenemos un vector de T pérdidas y ganancias y una determinada frecuencia de fallos igual a p, la probabilidad de que se produzcan x excedidos es:

$$f(x) = \binom{T}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

A medida que el número de observaciones aumenta, la distribución binomial podría aproximarse a través de una distribución normal de la forma:

$$Z = \frac{x - pT}{\sqrt{p(1-p)T}} \approx N(0,1)$$

Este test es simple de aplicar y requiere como únicos parámetros,  $T$ ,  $x$  y  $p$ . El test propuesto por Kupiec comprueba si el número de fallos es igual a  $\alpha$ , en cuyo caso el porcentaje de fallos (*Percentage of Fails*, POF) toma el valor de cero, indicando que no hay evidencia de inadecuación de la medida del VaR. Asumiendo que el modelo es adecuado, la tasa de fallidos debería ser un estimador insesgado y converger a  $\alpha$  a medida que el tamaño de la muestra aumenta (Jorion, 2001). Cuando dicha proporción de fallos sea diferente, el estadístico aumenta de valor indicando que la medida estimada sobreestima o infraestima el nivel de riesgo. Por tanto, la hipótesis nula del POF-test es la siguiente:

$$H_0 = \alpha = \hat{\alpha} = \frac{x}{T}$$

El test estadístico POF se realiza a través del test de la ratio de verosimilitud (LR-Test), que consiste en calcular una ratio entre valor de la función de verosimilitud bajo la hipótesis nula y la máxima probabilidad ante la hipótesis alternativa, que se pone en el denominador. El test LR tiene la siguiente forma:

$$POF = -2 \ln \left( \frac{(1-p)^{T-x} p^x}{\left(1 - \left(\frac{x}{T}\right)\right)^{T-x} \left(\frac{x}{T}\right)^x} \right)$$

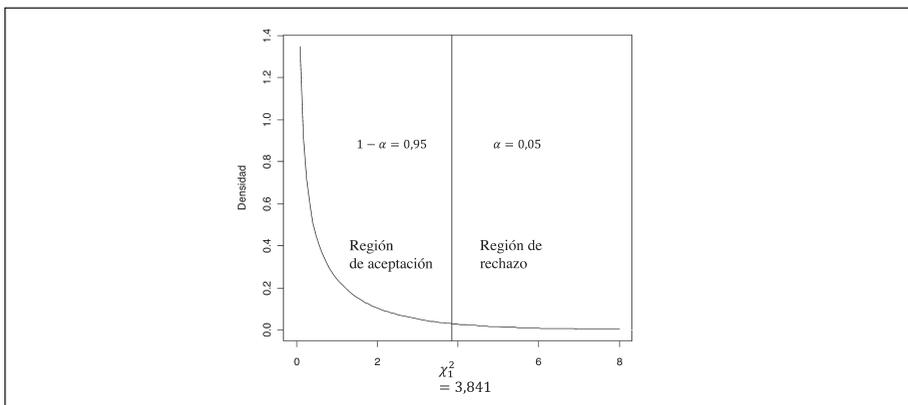
La decisión se basa en el valor de esta ratio, de modo que cuanto menor es la ratio, mayor será el valor del estadístico  $POF$ . Bajo la hipótesis nula, si el modelo es correcto  $POF$  se distribuye como una  $\chi^2$  con un grado de libertad, de modo que si el valor del estadístico supera el valor crítico, se rechaza la hipótesis nula y el modelo es considerado como inadecuado. Los valores críticos para una  $\chi^2$  con un grado de libertad se muestran en la tabla inferior.

p-valor	0,50%	1,00%	2,50%	5,00%
Valor crítico	7,879	6,635	5,024	3,841

De esta forma, el test se puede realizar mediante los valores críticos una vez establecido el nivel de significatividad. Entonces calculamos el valor de la distribución Chi cuadrado, de forma que se establecen las zonas de rechazo y aceptación (véase el gráfico inferior para un nivel de confianza del 95%):

Si  $POF > \chi_1^2 \Rightarrow$  Rechazamos la hipótesis nula de que el modelo es adecuado.

Si  $POF \leq \chi_1^2 \Rightarrow$  Aceptamos la hipótesis nula de que el modelo es adecuado



Otra forma de realizar el test es por medio de los p-valores. Una vez calculado el estadístico  $POF$ , se debe aplicar a la distribución Chi cuadrado definida sobre el valor obtenido para obtener el p-valor. Se acepta el modelo si el p-valor obtenido es mayor a un nivel de significatividad empleado, siendo común emplear el 5%. La regla que se emplea es la siguiente:

Si  $p - valor \geq$  nivel de significatividad  $\rightarrow$  Aceptamos la hipótesis nula de que el modelo es adecuado

Si  $p - valor <$  nivel de significatividad  $\rightarrow$  Rechazamos la hipótesis nula de que el modelo es adecuado

**Ejemplo.** Tomando la evolución de los rendimientos logarítmicos mensuales del FTSE-100 para el periodo 1992-2010, vamos a evaluar si un modelo VaR basado en la hipótesis de normalidad y calculado para un nivel de confianza establecido por Solvencia II del 99,5%, supera el test de cobertura incondicional de Kupiec basado en un *backtesting in sample*. Para ello es preciso calcular primero el VaR para todo el periodo de análisis, para lo cual necesitamos calcular previamente la volatilidad y la media de la serie. Empleando el modelo normal de media y volatilidad constante, del análisis de la función de fallos obteníamos cuatro excepciones para un VaR del 99,5% y el periodo temporal analizado (216 observaciones). En la siguiente tabla se resume información necesaria para realizar el POF test:

<i>KUPIEC</i>	
X	4
T	216
<i>p</i>	0,5%
1- <i>p</i>	99,5%
X/T	1,85%
POF	4,675
p-valor	3,06%

$$POF = -2\ln\left(\frac{(1-p)^{T-x}p^x}{\left(1-\left(\frac{x}{T}\right)\right)^{T-x}\left(\frac{x}{T}\right)^x}\right) = -2\ln\left(\frac{(1-0,005)^{216-4}0,005^4}{\left(1-\left(\frac{4}{216}\right)\right)^{216-4}\left(\frac{4}{216}\right)^4}\right) = 4,675$$

Intuitivamente, el test de Kupiec es una prueba que trata de evaluar si la frecuencia de excepciones observada  $x/T$  está lo suficientemente próxima a la frecuencia esperada  $p$  como para no rechazar el modelo. En la práctica el modelo se rechaza si la probabilidad asociada al estadístico (p-valor) es inferior al nivel de significación deseado, siendo frecuente emplear un nivel de significación de 0,05 (nivel de confianza del 95%). Para un nivel de significación del 5% se rechaza la hipótesis nula ya que el valor del estadístico (4,675) supera el valor crítico (3,841). Asimismo, podemos calcular el valor de una  $\chi^2$  con un grado de libertad en Excel mediante =DISTR.CHI(4,675;1)=0,0306, cuyo resultado nos llevaría a rechazar la hipótesis nula de que el porcentaje de fallos está en línea con el nivel  $p$ . La razón es que la probabilidad asociada al estadístico (p-valor de 0,0306) es inferior al nivel de significación

deseado (0,05). En el cuadro siguiente vemos como afectaría al test el aumento del número de observaciones manteniéndose el número de fallos. Se observa como para T=510 y T=1.000 un modelo que obtenga cuatro excepciones ( $X=4$ ) no puede ser rechazado (porque  $x/T$  está lo suficientemente próximo a  $p$ ), pero si resulta rechazado para T=216.

P	0,50%	0,50%	0,50%
T	216	510	1.000
X	4	4	4
X/T	1,85%	0,78%	0,40%
(1-p)	99,5%	99,5%	99,5%
POF	4,6745	0,7058	0,2159
<i>p-valor</i>	<i>0,0306</i>	<i>0,4009</i>	<i>0,6422</i>

En el cuadro siguiente exponemos el número de excedidos que se tiene que producir durante un determinado periodo de tiempo para que el modelo sea considerado como válido de acuerdo con el test de Kupiec, dado que no se puede rechazar la hipótesis nula. Es decir, se muestran las zonas de aceptación del test de Kupiec bajo diferentes niveles de confianza y tamaños muestrales.

Probabilidad (nivel de significación)	Nivel de confianza	Zona de no rechazo para el número de fallos N		
		T=216	T=510	T=1.000
1%	99%	$N < 5$	$1 < N < 11$	$4 < N < 17$
2,5%	97,5%	$1 < N < 12$	$6 < N < 21$	$15 < N < 36$
5%	95%	$5 < N < 17$	$16 < N < 36$	$37 < N < 65$
7,5%	92,5%	$9 < N < 24$	$27 < N < 51$	$59 < N < 92$
10%	90%	$14 < N < 30$	$38 < N < 65$	$81 < N < 120$

Como podemos observar, el poder del test aumenta a medida que lo hace el tamaño de la muestra, de modo que el intervalo relativo al porcentaje de fallos permitido para considerar un modelo válido se reduce considerablemente. Así, por ejemplo, en el caso particular del VaR con un intervalo de confianza del 95%, para 216 observaciones, se aceptaría un modelo que tuviese un porcentaje de fallos superior al 2,31% ( $5/216$ ) e inferior al 7,87% ( $17/216$ ), mientras que para 1.000 observaciones el rango se reduce (3,70%; 6,50%).

Nivel de confianza	95%		
Observaciones muestra	216	510	1000
Mínimo	5	16	37
Máximo	17	36	65
Mínimo [%]	2,31%	3,14%	3,70%
Máximo [%]	7,87%	7,06%	6,50%
Rango [Máximo [%]-Mínimo [%]]	5,56%	3,92%	2,80%

La principal limitación de este test es que es débil o poco potente para muestras pequeñas. Además, este test deja fuera información valiosa, ya que no tiene en cuenta la frecuencia con la que se producen los excedidos a lo largo del tiempo, con lo cual no entra a evaluar la independencia entre sucesos. Por otra parte, tampoco se tiene en cuenta el tamaño de las diferencias entre el VaR estimado y la pérdida real, con lo cual se estaría dando por bueno un modelo que tenga una frecuencia adecuada pero con pérdidas muy superiores en cuantía al VaR.

### 3.1.3.3. Test de Kupiec de tiempo hasta el primer fallo (TUFF)

Para analizar la propiedad de cobertura incondicional hay otros test estadísticos que podrían ser empleados, como podría ser el test del tiempo hasta la primera excepción o fallo. Este test está basado en las mismas hipótesis que el anterior. Asumiendo que los fallos están distribuidos de forma binomial, la probabilidad de que se produzca un excedido es igual a  $\alpha$ . De este modo, para un nivel de confianza del 99%, se debería producir un fallo cada 100 días, por lo que la hipótesis nula será:

$$H_0 = \alpha = \hat{\alpha} = \frac{1}{T}$$

Donde: T es el tiempo hasta el que se produzca el primer fallo.

El test estadístico se realiza a partir de la siguiente ratio de verosimilitud:

$$LR_{TUFF} = -2 \ln \left( \frac{\alpha(1-\alpha)^{T-1}}{\left(\frac{1}{T}\right)\left(1-\frac{1}{T}\right)^{T-1}} \right)$$

Este test, al igual que el *POF*, se distribuye como una  $\chi^2$  con un grado de libertad, de modo que si el valor del estadístico excede el valor crítico de la distribución para un determinado nivel de confianza, se rechazará la hipótesis nula. Este test es superado por el *POF* test y proporciona resultados peores que otras alternativas, de ahí que sea aconsejable sólo como herramienta de análisis preliminar cuando no se dispone de una serie de datos grande [Dowd, 1998].

---

**Ejemplo.** Tomando la evolución de los rendimientos mensuales del FTSE-100 para el periodo 1992-2010, vamos a evaluar si un modelo VaR al 99,5% basado en la hipótesis de normalidad supera el test de Kupiec de tiempo hasta el primer fallo (TUFF). Para ello, al igual que en el apartado anterior, es preciso calcular primero el VaR para todo el periodo de análisis, para posteriormente construir la función de fallos. Del análisis de dicha función se obtiene que la primera excepción se produce en el periodo 79, por lo que en el cuadro inferior se resume la siguiente información necesaria para realizar el TUFF test dado un nivel de confianza del 95%:

T	79
1/T	1,27%
p	0,50%
TUFF	0,652
CHI-TEST	0,419

$$LR_{TUFF} = -2 \ln \left( \frac{\alpha(1-\alpha)^{T-1}}{\left(\left(\frac{1}{T}\right)\left(1-\frac{1}{T}\right)^{T-1}\right)} \right) = \frac{0,005 \times (1-0,005)^{79-1}}{\frac{1}{79} \times \left(1-\frac{1}{79}\right)^{79-1}} = 0,652$$

Asimismo, podemos calcular el valor del test en Excel =DISTR.CHI(0,652;1)=0,419, cuyo resultado nos llevaría a aceptar la hipótesis nula de que el porcentaje de fallos en un determinado periodo es acorde el modelo con el nivel de confianza del 95% (0,419 > 0,05). Por tanto, para este ejemplo concreto, no podemos rechazar la hipótesis de que el modelo es correcto aplicando este test. Debe recordarse que el poder de este test es muy bajo ya que para un nivel de confianza del 95% no se pueden rechazar modelos para los cuales el primer excedido este comprendido entre el periodo 12 y 878.

---

### 3.1.3.4. Z-TEST

Este test estadístico se basa en la aproximación de la distribución binomial a través de la distribución normal. Como ya indicamos, asumiendo que los fallidos son independientes e idénticamente distribuidos, el número total de excepciones seguirá una distribución binomial:

$$E \sim B(T, \alpha)$$

Donde,  $E(E) = \alpha T$  es el número esperado de excepciones y la varianza de las excepciones viene dada por  $\text{Var}(E) = \alpha(1-\alpha)T$ .

Para tamaños muestrales grandes podemos aproximar la distribución binomial a través de una normal y se puede definir un estadístico Z de la forma:

$$Z = \frac{X - \alpha T}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)T}} \approx N(0,1)$$

Este test es la variante del test de Wald de la ratio de verosimilitud propuesto por Kupiec. Una ventaja del test de Wald sobre la ratio de verosimilitud es que está bien definido para el caso en el que no ocurre ninguna violación, algo que podría ocurrir en intervalos cortos de tiempo, mientras que esto no ocurre en el test de Kupiec, ya que el logaritmo de 0 es indefinido.

---

**Ejemplo.** Tomando el ejemplo anterior del FTSE-100, realizamos en este apartado el análisis del Z-test. Para ello, necesitamos simplemente la probabilidad de ocurrencia de excepciones ( $\alpha$ ), el número de periodos (T) y el número de excepciones que ha ocurrido en dicho intervalo temporal (X). A partir de ahí calculamos el valor del estadístico como:

$$Z = \frac{X - \alpha T}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)T}} = \frac{4 - 0,005 \times 216}{\sqrt{0,005 \times (0,995) \times 216}} = 2,82$$

Finalmente, obtenemos el valor de la distribución normal estándar para Z, aplicando la función de Excel =DISTR.NORM.ESTANDAR(2,82). El p-valor asociado es de 0,9976, lo cual significa que no se acepta el modelo por tener un número de fallos excesivo, ya que la probabilidad de que teniendo 4 fallos el modelo sea correcto es inferior al 5%. El

estadístico bajo la hipótesis nula se distribuye como una normal estándar, por lo que la región de aceptación estaría comprendida entre los p-valores del estadístico 0,025 y 0,975 con un nivel de confianza del 95%. Por lo que en este ejemplo se aceptaría el modelo si  $X=0, 1, 2$  o 3 pero no con un número de fallidos de 4 o superior.

---

### **3.1.3.5. Control de calidad de las medidas del riesgo**

El método propuesto por de la Peña et ál. (2007) reconoce el bajo poder del test de Basilea para controlar el error de tipo 2, con lo cual proponen aplicar la misma metodología (*traffic light*) pero tratando de controlar dicho error. El test utiliza las mismas hipótesis que el modelo de Basilea II, con lo cual nuevamente se asume una distribución binomial para el comportamiento de las excepciones. El control de calidad cambia las hipótesis definiéndolas del siguiente modo:

$$\begin{aligned}H_0 &= p > 0,01 \\H_1 &= p \leq 0,01\end{aligned}$$

Por tanto, si aceptamos la hipótesis nula, el modelo se rechaza. El cambio en la hipótesis también provoca cambios en los errores tipo I y tipo II del test de Basilea. Como ya hemos indicado anteriormente, en Basilea la probabilidad de rechazar un modelo adecuado es muy baja (0,03%) para un periodo de 250 días. No obstante, esto tiene como coste principal que la probabilidad de aceptar modelos inadecuados es también elevada. Los intervalos de confianza en Basilea II se establecieron en el punto en el que la probabilidad acumulada del número de excepciones equivalía al 95% y la zona roja al 99,9%. El test QCRM (*Quality control of risk measures test*) calcula la zona verde, amarilla y roja, de modo que se garantiza mediante optimización numérica, que el error tipo I no es mayor al 1%. La nueva clasificación establecida utilizando este test clasifica en la zona verde modelos con fallos en el intervalo (0, 5), reduce la zona amarilla (6-7), mientras que la zona de rechazo (roja) sería para 8 o más excepciones.

### **3.1.3.6. Limitaciones de los test de cobertura incondicional**

A pesar de que los test de cobertura incondicional proporcionan una referencia fundamental para analizar la validez de un determinado modelo VaR, presentan dos principales limitaciones. La primera es que tienen dificultades para detectar medidas

de VaR que subestiman sistemáticamente el riesgo. Desde un punto de vista estadístico estos test muestran bajo poder en tamaños de muestra consistentes con el marco regulatorio actual de Solvencia II, es decir, un año. La segunda limitación hace referencia a que no tienen en cuenta si se satisface la propiedad de independencia. En este sentido, pueden fallar a la hora de detectar niveles de VaR que muestren dependencia entre los fallos. Los modelos VaR que violan la propiedad de independencia pueden dar lugar a pérdidas que exceden el VaR de forma agrupada. Un conjunto de grandes pérdidas inesperadas puede resultar más perjudicial para una institución aseguradora que cuando ocurren de modo más frecuente pero están dispersas en el tiempo. Como ejemplo, cuatro pérdidas seguidas en el plazo de un año que superan el VaR (99%) puede ser una señal de prácticas inadecuadas de gestión del riesgo respecto a ocho dispersas en el plazo de dos años. En la medida que los fallos dependientes son una señal de falta de respuesta a las condiciones cambiantes del mercado y un informe inadecuado del riesgo, un análisis basado exclusivamente en test de cobertura incondicional podrían ser insuficiente.

### **3.1.4. Test de independencia**

El análisis de la independencia puede realizarse a través de la aplicación de diversos test que examinan la propiedad de independencia en la serie de fallos. En los test incondicionales que hemos analizado anteriormente, sólo se tiene en cuenta el número de excepciones, pero no la forma en la que éstas se distribuyen a lo largo del tiempo. No obstante, como indica Finger (2005), una buena medida del riesgo debe ser capaz de reaccionar ante cambios en la volatilidad y las correlaciones de modo que los fallidos ocurran de forma independiente, unos de otros, mientras que los malos modelos tienden a producir secuencias de excedidos consecutivos.

#### **3.1.4.1. Test de Christoffersen (1998)**

El test propuesto por Christoffersen es un test de Markov que examina si la probabilidad de que se produzca un fallo depende de si ha ocurrido alguna otra en el momento temporal previo. Berkowitz y O'Brien (2002) analizaron la adecuación de las predicciones de seis bancos comerciales estadounidenses, obteniendo como resultado que aunque en general la frecuencia de excesos era inferior a la prevista, cuando se producían eran mayores a las esperadas y estaban agrupadas en el tiempo. Por tanto, si la

medida de VaR recoge adecuadamente el riesgo de la cartera analizada, entonces la probabilidad de que se produzca un fallo debería ser independiente de lo que haya ocurrido en el periodo temporal anterior. De hecho, si la probabilidad de que se produzca un fallo aumenta en los periodos siguientes a los que hubo otro fallo, entonces, esto es indicativo de que el VaR después de una excepción presenta mayores valores.

El procedimiento para aplicar dicho test aparece recogido detalladamente en Jorion (2001), Campbell (2005) y Dowd (2006). Al igual que en el caso del test de Kupiec, el primer paso consiste en construir una variable indicador que toma el valor 1 si el VaR es excedido y 0 en el caso contrario. El siguiente paso consiste en crear una tabla de contingencia de doble entrada que recoja los fallos del VaR en momentos temporales consecutivos. Si la medida de VaR estimada es adecuada, la proporción de fallos que ocurren después de una violación previa debería ser la misma que cuando no se ha producido ninguna violación el periodo previo. Esto significa que:

$$\frac{n_{00}}{n_{00} + n_{01}} = \frac{n_{10}}{n_{10} + n_{11}}$$

Si estas proporciones difieren sustancialmente, se pone en cuestión la medición del VaR. A continuación se muestra la tabla de contingencia para el test de independencia de Markov.

	$I_{t-1} = 0$	$I_{t-1} = 1$	
$I_t = 0$	$n_{00}$	$n_{10}$	$n_{00} + n_{10}$
$I_t = 1$	$n_{01}$	$n_{11}$	$n_{01} + n_{11}$
	$n_{00} + n_{01}$	$n_{10} + n_{11}$	N

Donde  $n_{00}$  indica un no fallido en el tiempo  $t$  y también en  $t - 1$ ,  $n_{10}$  indica un no fallido en el tiempo  $t$  pero si un fallido en  $t - 1$ ,  $n_{01}$  indica un fallido en el tiempo  $t$  sin que se haya producido en el momento  $t - 1$ , y finalmente,  $n_{11}$  indica un fallido en el tiempo  $t$  que sigue a otro fallido producido en  $t - 1$ . Denotaremos por  $n_i$  el total de fallidos y por  $n_0$  el total de no fallidos. Una vez que disponemos de la tabla de doble entrada calculamos el estadístico tal y como figura a continuación:

$$POF_{ind} = -2 \ln \left( \frac{(1 - \pi)^{n_{00} + n_{10}} \pi^{n_{01} + n_{11}}}{(1 - \pi_0)^{n_{00}} \pi_0^{n_{01}} (1 - \pi_1)^{n_{10}} \pi_1^{n_{11}}} \right)$$

Siendo:

$$\pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}}, \quad \pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}}, \quad \pi = \frac{n_{01}+n_{11}}{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}} = \frac{n_1}{n_0+n_1}$$

Bajo la hipótesis nula si el modelo es correcto, el estadístico  $POF_{ind}$  se distribuye como una  $\chi^2$  con un grado de libertad, de modo que si el valor del estadístico supera el valor crítico, se rechaza la hipótesis nula y modelo es considerado como inadecuado.

---

**Ejemplo.** En este apartado vamos a realizar el test de independencia para la serie de datos del FTSE-100 mensual analizada en los ejemplos anteriores. En primer lugar es preciso calcular la tabla de doble entrada que se recoge a continuación. En la misma se incluye el número de sucesos que toman el valor 0 ó 1, condicionados al valor que tomaron en el periodo anterior. Como podemos ver, ha habido un total de cuatro fallos, pero dos de ellos han sido consecutivos<sup>112</sup>.

t/t-1	0	1
0	208	3
1	3	1

A partir de los datos de la tabla anterior construimos las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}} = \frac{3}{211} = 0,0142 \\ \pi_1 &= \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}} = \frac{1}{4} = 0,25 \\ \pi &= \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}} = \frac{4}{215} = 0,0186 \end{aligned}$$

---

<sup>112</sup> El periodo temporal es de 216 observaciones por lo que el total de N suma 215, en 208 ocasiones no se ha producido ningún fallo ni en el periodo analizado (t) ni en el previo (t-1), en 3 ocasiones se ha alcanzado un fallo en t dado que en el periodo previo no se había alcanzado, en 3 ocasiones no se ha alcanzado un fallo en t dado que en el periodo previo si se había alcanzado y, finalmente, en un caso se ha producido un fallo en el periodo analizado (t) y en el anterior (t-1).

A continuación calculamos el estadístico:

$$POF_{ind} = -2\ln\left(\frac{(1-\pi)^{n_{00}+n_{10}}\pi^{n_{01}+n_{11}}}{(1-\pi_0)^{n_{00}}\pi_0^{n_{01}}(1-\pi_1)^{n_{10}}\pi_1^{n_{11}}}\right) = 3,825$$

Finalmente aplicamos la función de Excel =DISTR.CHI(3,825;1) y obtenemos el p-valor de 0,0505, no rechazándose la hipótesis de independencia entre los sucesos para un nivel de confianza del 95%. Esto indicaría que, a pesar de que el modelo no es válido en cuanto al número de fallos que presenta (Kupiec), si cumple la propiedad de independencia entre las excepciones.

---

A pesar de que el test de independencia tiene un gran poder para detectar medidas del VaR inadecuadas, está sujeto a un problema principal. Todos los test parten de la premisa de que cualquier medida adecuada del VaR resultará en una serie de fallos independientes. De acuerdo con esto, ningún test realizado para analizar la propiedad de independencia puede describir completamente la forma en la que los fallos de dicha propiedad pueden aparecer. En el caso de este test de Markov, la propiedad de independencia puede ser violada ante la posibilidad de que la probabilidad de que se produzca un fallo en el próximo periodo dependa de si lo hubo o no en el periodo anterior. No obstante, hay muchas otras formas en las que dicha propiedad puede violarse, como sería la dependencia respecto a cualquier otro momento previo próximo a la ocurrencia del evento (por ejemplo que haya ocurrido un fallo hace dos periodos pero no en el periodo previo), en cuyo caso sería indetectable para el anterior test de Markov.

### **3.1.4.2. Test de Christoffersen y Pelletier basado en la duración**

La propuesta de Christoffersen y Pelletier (2004) se basa en el análisis de la duración entre las excepciones del VaR. Estos autores utilizan el concepto de duración para hacer referencia al número de periodos que transcurren entre dos excepciones. Cuando se produzcan agrupamientos de excepciones habrá un número excesivo de duraciones cortas y largas, correspondientes a momentos de turbulencias en el mercado y de calma. Por tanto, este test analiza la ocurrencia de excepciones a lo largo del tiempo para analizar su independencia. El test asume que un modelo VaR

adecuado generará un vector de resultados en el que la ocurrencia de excepciones se distribuye de forma independiente. La duración de no excepción se define como el periodo entre dos excepciones:

$$D_i = t_i - t_{i-1}$$

La hipótesis nula asume que el modelo VaR que se está analizando es correcto, en cuyo caso la duración de no excepción no debería tener memoria y la media debería ser igual a  $1/p$  periodos, porque las excepciones están igualmente distribuidas a través del tiempo. Nuevamente  $p$  es la probabilidad de que se produzca un evento en un momento temporal específico. La distribución de las duraciones viene determinada por:

$$f(d; p) = p(1 - p)^{d-1}$$

Se trata de la distribución geométrica, que puede ser representada a través de una función de riesgo (*hazard function*) que indica la probabilidad de que se produzca una excepción en un periodo  $D$ , asumiendo que en los  $D-1$  periodos anteriores no se ha producido ninguna:

$$\lambda(d) = P(D = d | D \geq d) = \frac{P(D = d)}{P(D \geq d)} = \frac{f(d)}{\sum_{j=d}^{\infty} f(j)} = \frac{f(d)}{S(d)}$$

$S(d)$  es la función de supervivencia, y Haas (2005) propone insertar en la fórmula anterior la función de distribución de las duraciones, obteniendo la siguiente simplificación:

$$\lambda_G(d) = \frac{p(1 - p)^{d-1}}{\sum_{j=d}^{\infty} p(1 - p)^{j-1}} = \frac{p(1 - p)^{d-1}}{p(1 - p)^{d-1} \sum_{j=d}^{\infty} p(1 - p)^j}$$

Para mejorar el test de independencia, y permitir la dependencia entre duraciones, Christoffersen y Pelletier (2004) proponen utilizar la distribución de Weibull cuya función de distribución de probabilidad viene determinada por:

$$f_{cw}(d; a, b) = ba^b d^{b-1} \exp(-(ad)^b), \quad a, b > 0, d > 0$$

Dicha distribución tiene como ventaja que la función de riesgo presenta una forma cerrada con la siguiente fórmula:

$$\lambda_{cw}(d) = \frac{f_{cw}(d)}{1 - F_{cw}(d)} = ba^b d^{b-1}$$

Donde la distribución exponencial aparece cuando  $b=1$ . Dicha función es plana para  $b=1$ , lo que significa que en ese caso las excepciones son independientes unas de otras, mientras que para  $b > 1$  o  $b < 1$ , el número de excepciones aumenta o se reduce con el tiempo, lo que indicaría una cierta dependencia entre los eventos. Por tanto, el test para medir la independencia basada en dicha función plantea las siguientes hipótesis:

$$\begin{aligned} H_{0,ind}: b &= 1 \\ H_{1,ind}: b &\neq 1 \end{aligned}$$

A continuación el test calcula la duración y el vector C, indicando si las duraciones están censuradas o no:

$$C_i = \begin{cases} 1 & \text{si } D_i \text{ es censurado} \\ 0 & \text{si } D_i \text{ no es censurado} \end{cases}$$

Una duración estará censurada si al inicio o final de la secuencia y el primer o último día no hay una excepción. La siguiente función de log-verosimilitud resulta:

$$\begin{aligned} \ln L(D; \theta) = & C_1 \ln S(D_1) + (1 - C_1) \ln f(D_1) + \sum_{i=2}^{N(T)-1} \ln f(D_i) + C_{N(T)} \ln S(D_{N(T)}) \\ & + (1 - C_{N(T)}) \ln f(D_{N(T)}) \end{aligned}$$

Donde;  $S(D_i) = 1 - F(D_i)$  es la función de supervivencia.

El siguiente paso consiste en encontrar la función de máximo-verosimilitud a través de optimización numérica, para así obtener un valor del estadístico que se comparará con la ratio de la función de verosimilitud.

### 3.1.5. Test conjuntos

Una medida precisa del VaR debe cumplir las propiedades de cobertura incondicional e independencia. En este sentido, los test que examinan ambas propiedades al mismo tiempo permiten identificar medidas del VaR que son deficientes por no superar alguna de las dos propiedades. Tanto el test de Markov propuesto por Christoffersen (1998) como el test de la duración de Christoffersen y Pelletier (2004), pueden ser extendidos para hacer test conjuntos de ambas propiedades. En el caso del test de Markov es relativamente simple caracterizar como el test conjunto examina ambas propiedades. Recordemos que el test de Markov consiste en construir una tabla de contingencia con las frecuencias de las violaciones y no violaciones en los periodos sucesivos. El test de independencia luego examina si la proporción de fallos que siguen violaciones previas es igual a la proporción de aquellas en las que no se producen fallos. Si la medida del VaR también incluye la propiedad de cobertura incondicional, entonces estas proporciones deberían también coincidir con la proporción total de fallos:

$$\frac{n_{00}}{n_{00} + n_{01}} = \frac{n_{10}}{n_{10} + n_{11}} = \frac{n_{00} + n_{10}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}} = \alpha$$

Por tanto, el test conjunto de Markov mide si hay alguna diferencia en la probabilidad de que haya un fallo, condicionado a que haya o no un fallo previo y, simultáneamente, determina si cada una de esas proporciones es significativamente diferente de  $\alpha$ . Si bien, estos test pueden parecer más apropiados, ya que evalúan simultáneamente ambas propiedades, tienen como limitación la menor capacidad para detectar medidas del VaR que sólo incumplen una de las dos propiedades (Campbell, 2005). Si, por ejemplo, una medida del VaR muestra una cobertura incondicional apropiada pero viola la propiedad de independencia, entonces, un test de independencia es más probable que detecte esta medida de VaR inadecuada, que un test conjunto. El hecho de que una de las propiedades se cumpla hace más difícil que el test conjunto detecte la inadecuación de la medida del VaR. Como ejemplo, consideremos una medida del VaR al 95% que muestre la propiedad de cobertura incondicional pero no la de independencia. La violación del VaR ocurre en un 20% de las ocasiones después de un fallo previo, pero la violación del VaR sólo se produce un 4,2% de las veces después de un periodo en el cual no se produjo ningún fallo. En una muestra anual de observaciones diarias, el test conjunto de Markov detecta

esta medida del VaR inadecuada el 50% de las veces mientras que el de independencia de Markov lo hace el 56% (Campbell, 2005). El mayor poder de detección que surge de aplicar un test que se centra en una de las propiedades indica que utilizar los dos de forma aislada es preferible a hacer el test conjunto.

---

**Ejemplo.** Vamos a realizar un test conjunto para la serie de datos del FTSE-100. El test empleado se obtiene combinando el estadístico  $POF_{ind}$  del test de independencia de Christoffersen (1998) con el estadístico  $POF$  del test de Kupiec (1995). De esta forma obtenemos un test que mide conjuntamente la proporción de fallidos de un modelo y la independencia de dichas excepciones. El estadístico se obtiene como la suma de los valores de ambos estadísticos ( $POF_{ind} + POF$ ) y se distribuye nuevamente como una  $\chi^2$  pero ahora con dos grados de libertad, de modo que si el valor del estadístico supera el valor crítico, se rechaza la hipótesis nula y modelo es considerado como inadecuado.

Dado que  $POF_{ind} = 3,825$  y  $POF = 5,877$  el estadístico conjunto toma un valor de 9,701<sup>113</sup>, aplicando la función de Excel =DISTR.CHI(9,701;2) obtenemos el p-valor de 0,01 rechazándose la hipótesis de que es modelo es correcto para un nivel de confianza del 95%.

---

### 3.1.6. Test basados en múltiples niveles ( $\alpha$ ) VaR

Hasta ahora nos hemos centrado en test que analizan exclusivamente la adecuación del VaR para un determinado nivel de confianza. No obstante, una medida precisa del VaR debería ser válida para cualquier nivel de confianza. Los principales *backtesting* basados en niveles han sido propuestos por Crnkovic y Drachman (1997), Diebold, Gunther y Tay (1998) y Berkowitz (2001). Según estos autores, si el cálculo del VaR es adecuado, un VaR al 99% debería ser excedido en un 1% de los casos, un VaR al 95% en un 5% y así sucesivamente. Además, los fallos que presenten en un determinado nivel también deberían ser independientes de los que presenten a otros niveles de confianza.

---

<sup>113</sup> El valor crítico para un p valor del 95% de una Chi cuadrado con dos grados de libertad viene toma el valor 5,991.

### 3.1.6.1. Test de múltiples niveles

Diebold et ál. (1998) y Berkowitz (2001) proponen llevar a cabo el siguiente proceso para evaluar si la distribución de la función de pérdidas y ganancias es equivalente a la propuesta por un determinado modelo VaR. En este sentido la cuestión que se plantea es determinar si:

$$\{P_t(y_t|\Omega_t)\}_{t=1}^m = \{f_t(y_t|\Omega_t)\}_{t=1}^m$$

El principal problema es que  $\{f_t(y_t|\Omega_t)\}_{t=1}^m$  no es observable ya que, puede presentar cambio estructural. En su propuesta, los autores proponen transformar los valores de la función de pérdidas y ganancias  $y_t$  a través de la integral de la probabilidad, es decir, aplicar la función de densidad acumulada al valor  $y_t$  de modo que:

$$Z_t = \int_{-\infty}^{y_t} p_t(u) du = P_t(y_t)$$

Las series de variables calculadas proporcionan más información sobre la precisión del modelo que se está evaluando. Los valores transformados proporcionan una medida continua y cuantitativa de la magnitud de las pérdidas y ganancias realizadas, mientras que el indicador de fallos sólo indica si un determinado límite ha sido excedido. Además, la serie de los cuantiles tiene dos propiedades importantes:

*Uniformidad:* Las series  $[Z_t]_{t=1}^T$  deberían estar uniformemente distribuidas en el intervalo  $[0,1]$ . Esta propiedad es análoga a la propiedad de cobertura incondicional para cada nivel de  $\alpha$ .

*Independencia:* Las series  $[Z_{t+1}]_{t=1}^T$  deberían estar independientemente distribuidas, lo que es análogo a que los fallos del VaR deberían ser independientes unos de otros y que los fallos de un determinado momento al 99% no deberían proporcionar información alguna sobre los fallos que habrá en el periodo siguiente al 95%. Esta propiedad es similar a la que le exigimos a la serie de excepciones en el caso de una única medida del VaR.

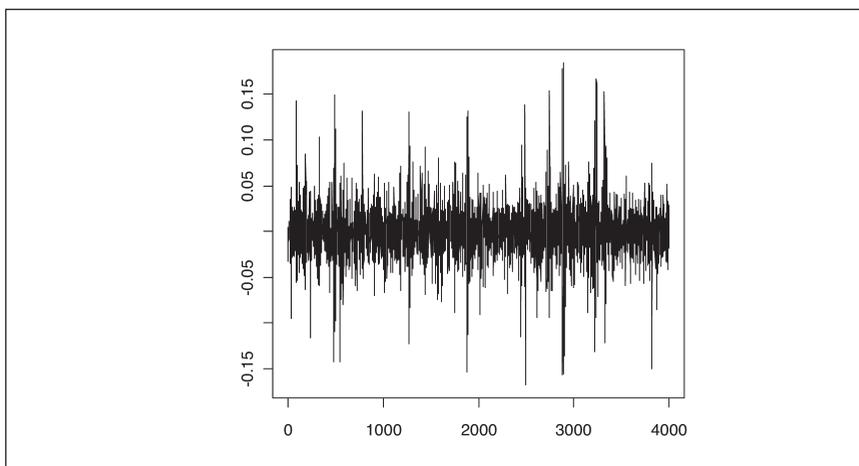
Estas dos propiedades son a menudo combinadas en una única:

$$Z_t \sim U(0,1), \text{ iid}$$

Por tanto, una vez que disponemos de los valores es preciso comprobar si se ajustan a una  $U(0,1)$ , así como que no exista dependencia serial entre los mismos. Para ello Diebold et ál. (1998) proponen analizar el histograma de los valores, en lugar de utilizar test típicos de bondad de ajuste como el de Kolmogorov-Smirnov, debido a que estos test sólo indican si se ajustan o no, pero no permiten ver los motivos, aspecto que podría analizarse mejor a través de un histograma. Asimismo, la correlación serial sería evaluada a través de correlogramas complementados por los intervalos de confianza de Barlett.

---

**Ejemplo.** A continuación vamos a exponer como llevar a cabo el análisis propuesto, cuando se pretende analizar la adecuación de la distribución completa de probabilidad de un modelo VaR. Para ello simulamos en primer lugar una serie de 8.000 rendimientos asumiendo que siguen un proceso GARCH(1, 1) con los siguientes parámetros:  $\delta = 0,00011$ ;  $\alpha_1 = 0,5$  y  $\beta_1 = 0,4$ . De este modo, la volatilidad en cada periodo vendrá dada mediante la siguiente fórmula  $\sigma_t = \sqrt{0,00011 + 0,5(\sigma_{t-1}z_{t-1})^2 + 0,4\sigma_{t-1}^2}$  y posteriormente se obtiene  $r_t = \sigma_t Z_t$ . En el gráfico adjunto exponemos una parte de la serie de rendimientos generados (los 4.000 primeros rendimientos). En el mismo podemos observar que la serie de datos presenta las características típicas de un proceso GARCH(1, 1), donde los rendimientos son aleatorios pero experimentan cambios en la volatilidad que están agrupados temporalmente.



Pues bien, asumiendo ahora la hipótesis errónea de que estos rendimientos se distribuyen normalmente, se estima con los 4.000 primeros números aleatorios los parámetros de la distribución normal que se ajustan a la serie de rendimientos. Tomando dichos valores obtenemos los siguientes parámetros:

Media	0,0083%
$\sigma$	2,9437%

A continuación, con esos mismos parámetros transformamos la serie de los siguientes rendimientos en otros nuevos:

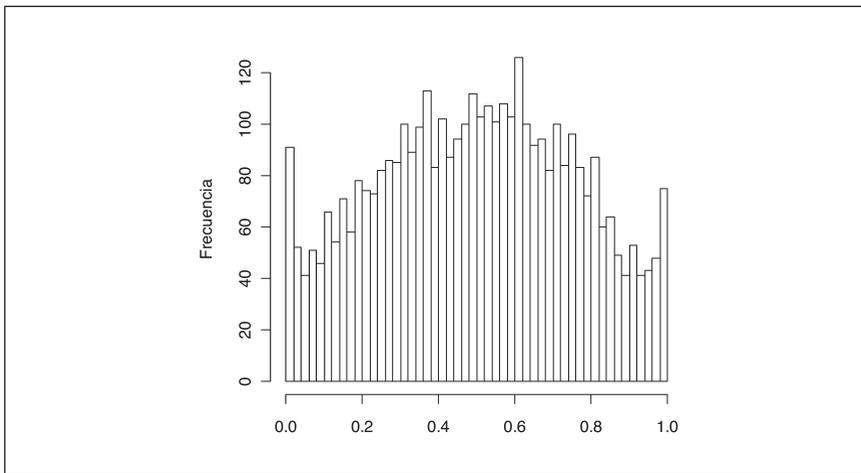
$$Z_t = \int_{-\infty}^{y_t} p_t(u) du = P_t(y_t)$$

A través de Excel, simplemente tenemos que aplicar la función de distribución normal con los parámetros estimados previamente a los 4.000 siguientes valores.

$$Z_t = \text{DISTR.NORM}(Y_t; \text{MEDIA}; \text{VOLATILIDAD}; 1) = \text{DISTR.NORM}(-0,21\%; 0,0083\%; 2,9437\%; 1) = 0,4710$$

$T$	$Y_t$	$Z_t$
4001	-0,21%	0,47102
4002	1,75%	0,72318
4003	0,61%	0,58150
4004	2,35%	0,78700
4005	-5,99%	0,02082
4006	-7,65%	0,00463
4007	-11,48%	4,7316E-05
4008	-19,59%	1,3798E-11
4009	-7,12%	0,00775
4010	-5,28%	0,03612
4011	2,51%	0,80196
4012	0,19%	0,52469
...	...	...

Una vez que disponemos de los 4.000 valores transformados podemos construir un histograma de frecuencias para ver si realmente los valores se distribuyen uniformemente en el intervalo (0, 1). Como podemos comprobar en el gráfico siguiente, el histograma construido presenta forma de mariposa, con muchos datos en torno al centro de la distribución y en los extremos, lo que indica que en muchas ocasiones la distribución de predicción sobrevalora o infravalora la verdadera distribución de probabilidad de los rendimientos.



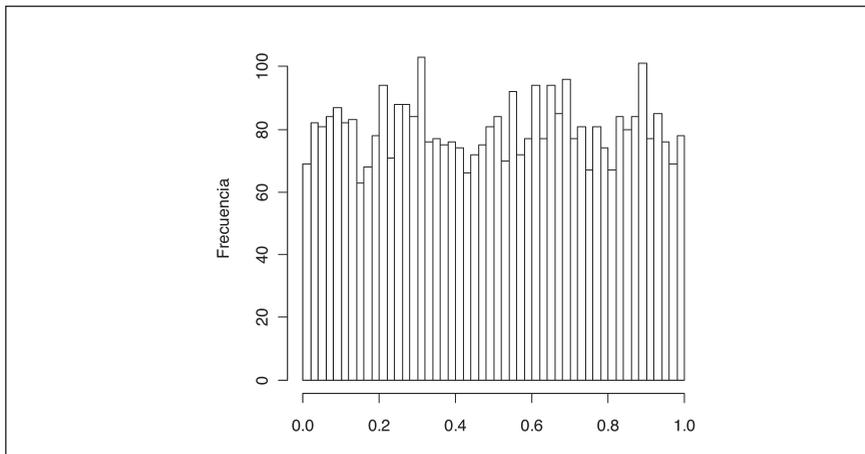
Una vez que hemos visto que el modelo normal no es adecuado para predecir la distribución de la serie, realizamos el mismo proceso, pero ahora asumiendo que la varianza el proceso sigue un proceso GARCH(1, 1) con los parámetros que expusimos anteriormente. La obtención de las variables transformadas se hace de la misma manera que para el caso de la normal, pero ahora asumimos que la volatilidad va cambiando en cada periodo de acuerdo con el proceso GARCH.

$$Z_t = \text{DISTR.NORM}(Y_t; \text{MEDIA}; \text{VOLATILIDAD}; 1) = \text{DISTR.NORM}(Y_t; 0; \sigma_t = \sqrt{0,00011 + 0,5(\sigma_{t-1}z_{t-1})^2 + 0,4\sigma_{t-1}^2}; 1)$$

Los nuevos valores de  $Z_t$  que se obtienen se muestran en la tabla inferior.

$T$	$Y_t$	$Z_t$
4001	-0,21%	0,45854
4002	0,05%	0,85755
4003	0,61%	0,62506
4004	2,35%	0,92110
4005	-5,99%	0,00363
4006	-7,65%	0,04756
4007	-11,48%	0,03259
4008	-19,59%	0,01552
4009	-7,12%	0,31799
4010	-5,28%	0,31251
4011	2,51%	0,62508
4012	0,19%	0,51413
...	...	...

Nuevamente construimos el histograma para los nuevos valores transformados y comprobamos si se distribuyen uniformemente. En el gráfico siguiente vemos que en efecto, siguen la distribución esperada y, por tanto, se confirma la adecuación del modelo GARCH para la predicción de la densidad de los rendimientos de la variable  $Y_t$ .



A través de los test realizados sobre el total de distribución o sobre diversos niveles, se incrementa el poder de detección de modelos inadecuados, eso sí, teniendo como contrapartida la necesidad de disponer de mayor información (Campbell, 2005). Así, para transformar las pérdidas y ganancias en cuantiles hemos de disponer de la función completa en lugar de un único cuantil. Los modelos que asumen una determinada forma de la distribución de pérdidas y ganancias pueden recoger muy bien los resultados extremos pero no ser buenos para caracterizar la frecuencia de resultados más moderados, lo cual podría dar lugar a rechazar este tipo de modelos, a pesar de ser adecuados para medir el riesgo. Por tanto, los test que evalúan toda la serie de cuantiles pueden señalar como inadecuados modelos cuya especificación no se ajusta bien a valores poco relevantes desde la perspectiva del análisis del riesgo pero que recogen bien las colas de la distribución. Por este motivo, es preciso tener en consideración el objetivo con el que se realiza el *backtesting*, de modo que si lo que nos interesa es ver el ajuste a valores extremos de la distribución, no será preciso evaluar todos los niveles.

### **3.1.6.2. Test de Pearson aplicable a múltiples niveles VaR**

Una opción propuesta por Campbell (2005), consiste en analizar el comportamiento de las medidas del riesgo para un rango predeterminado de valores de  $\alpha$ . Una opción sería aplicar un test que examina las excepciones del VaR sobre un rango predeterminado de niveles  $\alpha$ . A través del test de bondad de ajuste de Pearson (*test Q*) se examina el número de excepciones para los niveles  $\alpha$  que se consideren oportunos. Dicho test se construye de la siguiente manera:

1. Definimos el intervalo unitario en varios subintervalos, por ejemplo: (0; 0,01), (0,01; 0,05), (0,05; 0,10) y el resto en el intervalo (0,1; 1).
2. Contamos las excepciones que se producen en cada intervalo, de modo que una excepción en el primer intervalo significaría que se supera el VaR al 99%.
3. Finalmente, se realiza el test Q que compara las frecuencias teóricas con las reales:

$$Q = \sum_{i=1}^k \frac{(N_{(l_i, u_i)} - N(u_i - l_i))^2}{N(u_i - l_i)}$$

Donde:  $N(l_i, u_i)$  es el número de excepciones en un determinado intervalo, N es el número de periodos temporales que se utiliza para construir el test, mientras que  $u_i$  y  $l_i$  son los valores superior e inferior de cada intervalo.

En el caso de que el modelo sea adecuado, el test se distribuye aproximadamente como una  $\chi^2$  con un grado de libertad. En su trabajo, Campbell (2005) analiza la capacidad del test de Pearson para detectar modelos inadecuados, respecto al test tradicional del Kupiec. Para ello genera a través de un proceso E-garch 1.000 escenarios de 255 observaciones (datos diarios) y evalúa tres modelos mal especificados, que van desde la simulación histórica a un proceso lognormal y otro recursivo, llegando a la conclusión que el test de Pearson mejora considerablemente la detección de modelos respecto al test del Kupiec en los modelos que tienen un mayor grado de mala especificación, que es precisamente cuando es más importante detectarlos. En el cuadro siguiente se presenta el poder de ambos métodos de *backtesting* (test de Pearson y Kupiec) en el caso en el que el VaR es sistemáticamente infraestimado. Puede observarse que, en general, el uso del test de Pearson supera al test de Kupiec en el caso de que el riesgo esté sistemáticamente infraestimado.

Nivel de significación ( $\alpha$ )	5%	10%	15%	20%
Q de Pearson	13,5	35,9	63,8	86
Test de Kupiec	6,30	19,4	43,8	69

Fuente: Campbell (2005)

**Ejemplo.** En este apartado vamos a evaluar para la serie analizada de FTSE-100 el test de Pearson bajo la hipótesis de normalidad, para los niveles de significación de 0,5%, 1% y 5%. Para ello precisamos calcular en primer lugar el VaR para los diferentes niveles y construir la función de fallos para dichos niveles de confianza. La siguiente tabla recoge de forma resumida la información que se precisa para realizar dicho test.

Volatilidad	4,21%
Promedio	0,33%
VaR (99,5%)	-10,53%
VaR (99%)	-9,48%
VaR (95%)	-6,60%
N	216
Número Excepciones 99,5%	4
Número Excepciones 99%	6
Número Excepciones 95%	17

En primer lugar estimaríamos el VaR para los diferentes niveles de confianza. Por ejemplo, para un VaR 99,5% y suponiendo la hipótesis de normalidad

$$VaR_{99,5\%} = (0,0033 - 2,5758 \times 0,0421) = -0,1053$$

En segundo lugar tenemos que construir la función de fallos, obteniendo así el número de excepciones que resultan para cada nivel de confianza (4, 6 y 17). Una vez que disponemos de esa información calculamos el estadístico de Pearson:

VaR	$N_{(l_i, u_i)}$	$N(u_i - l_i)$	$\frac{(N_{(l_i, u_i)} - N(u_i - l_i))^2}{N(u_i - l_i)}$
99,50%	4	1,08	7,895
99%	2	1,08	0,784
95%	11	8,64	0,645
0	199	205,2	0,187

$$Q = \sum_{i=1}^k \frac{(N_{(l_i, u_i)} - N(u_i - l_i))^2}{N(u_i - l_i)} = 9,51$$

Dicho estadístico se distribuye como una Chi cuadrado con un grado de libertad. Aplicando la función de Excel = DISTR.CHI(9,51;1), obtenemos el valor de 0,002, con lo cual para un nivel de confianza del 95% se rechaza la hipótesis de adecuación del modelo VaR basado en una distribución normal para analizar el riesgo del FTSE-100 (ya que el p valor es menor al nivel de significación).

La razón del rechazo es el número de excepciones reales en cada intervalo (4, 2 y 11) distan de las teóricas (1,08; 1,08 y 8,64). En este caso se observa como para los tres percentiles analizados el número de excepciones proporcionados por el modelo normal infraestima el riesgo, ya que no es capaz de recoger bien las colas de la distribución empírica.

---

### **3.1.6.3. El mapa de riesgo (*Risk Map*)**

Colletaz et ál. (2011) proponen un método para la validación de modelos VaR denominado *Risk Map*. Su propuesta tiene en cuenta el número y la cuantía de pérdidas extremas, resumiendo gráficamente toda la información sobre el comportamiento de un modelo de riesgo. Esta propuesta tiene en cuenta el concepto de *súper excepción* del VaR (VaRs), que se define como una pérdida extrema que supera el VaR definido para un intervalo de confianza muy elevado, y consecuentemente poco probable. A continuación, se analiza si las secuencias de excepciones y súper excepciones pasan los test estándar de validación de modelos.

Para entender intuitivamente su propuesta podemos considerar dos entidades que tuvieran un VaR diario de 1.000 euros al 99% de confianza. Esto significa que en ambos casos la probabilidad de obtener pérdidas por encima de 1.000 euros es del 1%. No obstante, supongamos que las dos entidades en el último año tuvieron tres excepciones cuya media, en el primer caso fue de 2 millones y en el segundo de 1.000 millones. En ambos casos, los métodos tradicionales basados en excepciones indicarían que ambos modelos VaR son igual de válidos y serían aceptables. Por tanto, tal y como indican Berkowitz (2001) y Stulz (2008), la magnitud de los fallidos también deben ser tenida en cuenta. Bajo la propuesta *Risk Map* se considera que cuando una pérdida es grande, no sólo excede el VaR definido para una probabilidad  $\alpha$  sino que también lo hará para una probabilidad  $\alpha'$  mucho menor. Por este motivo, se definen dos tipos de excepciones:

$$r_t < -VaR_t(\alpha) \text{ Excepción}$$

$$r_t < -VaR_t(\alpha') \text{ Súper excepción}$$

Donde  $r_t$  es la pérdida o ganancia y  $\alpha'$  es mucho más pequeño que  $\alpha$ . Posteriormente se hace un test para ver si las secuencias de ambas excepciones satisfacen las condiciones de los métodos tradicionales y se resume en un gráfico (mapa de riesgo) toda la información sobre el desempeño de un modelo.

Las principales ventajas de este método son: la facilidad de implementación como técnica de validación dentro de un marco de evaluación de hipótesis y que es susceptible de ser aplicado a cualquier tipo de modelo VaR. En particular puede ser muy útil para la regulación de entidades financieras y compañías aseguradoras, ayudando a detectar modelos mal especificados y a penalizar a las entidades que experimenten un número de excepciones muy frecuente y grande.

El objetivo de esta técnica es presentar gráficamente los resultados del *backtesting* para un conjunto determinado de series de VaR. Para ello una opción es realizar el test incondicional de forma separada para cada tipo de excepciones, de modo que por ejemplo, un modelo sería adecuado si tiene un determinado número de fallos para cada nivel de confianza. No obstante, sería más correcto hacer un test conjunto del siguiente modo:

$$H_0: E [I(\alpha)] = \alpha \text{ y } E [I(\alpha')] = \alpha'$$

El test que es preciso realizar consiste en un test incondicional multivariante basado en Pérignon y Smith (2008). De este modo, es preciso definir una variable indicador para los resultados comprendidos en los siguientes intervalos:

$$J_{1,t} = I_t(\alpha) - I_t(\alpha') = \begin{cases} 1 & \text{si } -VaR_t(\alpha') < r_t < -VaR_t(\alpha) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como podemos comprobar, la variable indicador sólo puede tomar el valor 1 en uno de los tres casos posibles. Las  $\{J_{i,t} = I_t\}^2_{i=0}$  son variables de Bernoulli con probabilidades  $1-\alpha$ ,  $\alpha-\alpha'$  y  $\alpha'$  respectivamente. Se puede testar la hipótesis conjunta de la especificación de un modelo VaR utilizando el test de verosimilitud propuesto por Pérignon y Smith (2008), que es un test de cobertura basado en la ratio

de verosimilitud que tiene en cuenta si la frecuencia de las excepciones empíricas  $\hat{\theta}$  se desvía significativamente de las teóricas  $\theta$ . En el caso general (para cualquier  $K$ ):

$$LR_{MUC} = 2 \left( \ln \left[ \frac{1 - 1'\hat{\theta}}{1 - 1'\theta} \right]^{n_0} + \sum_{i=1}^K \ln \left( \frac{\hat{\theta}_i}{\theta_i} \right)^{n_i} \right)$$

Siendo  $\hat{\theta}$  el estimador de máximo verosimilitud para cada para  $\theta$ , dado por  $\hat{\theta}_i = (1/T) \sum_{t=1}^T 1_{i,t}$   $i = 0, 1, \dots$  y  $\hat{\theta}$  el vector formado por  $\theta_i$ . El estadístico se distribuye asintóticamente como una distribución  $\chi^2$  con  $K$  grados de libertad (tipos de excepciones). En el caso de excepciones y súper excepciones,  $K$  toma el valor de dos, en el caso de  $K=1$  (excepciones) el test multivariante se convertiría en el test univariante de cobertura incondicional de Kupiec (1995). Para  $K = 2$  la fórmula general se simplifica en:

$$LR_{MUC} = 2 \left( \ln \left[ \frac{1 - 1'\hat{\theta}}{1 - 1'\theta} \right]^{n_0} + \ln \left( \frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1} \right)^{n_1} + \ln \left( \frac{\hat{\theta}_2}{\theta_2} \right)^{n_2} \right)$$

---

Ejemplo. En este apartado vamos a evaluar para la serie analizada del FTSE-100 el mapa de riesgo, considerando los niveles de confianza del VaR al 99,5% para las súper-excepciones y del 95% para las excepciones, bajo la hipótesis de normalidad de rendimientos. Para ello, precisamos calcular en primer lugar el VaR para los diferentes niveles y construir la función de fallos para dichos niveles de confianza. Al igual que en el test de Pearson, el número de excepciones hace referencia a aquellos fallidos que superan el VaR al 95% pero no al 99,5% (13 casos), mientras que el número de súper excepciones se cuenta para los excedidos al 99,5% (4 casos). El resto hace referencia a las observaciones en la que no hubo excepciones a los dos niveles seleccionados (216 observaciones menos 17 casos). En el cuadro inferior se resume la información necesaria para realizar el test:

Volatilidad	4,21%
Promedio	0,33%
VaR (99,5%)	-10,53%
VaR (99%)	-6,60%
N	216
Número súper excepciones	4
Número excepciones	13
Resto	199

Una vez que disponemos de los datos obtenidos a partir de la función de pérdidas, procedemos a calcular el estadístico  $LR_{MUC}$  siendo;  $n_0=199$ ,  $n_1=4$ ,  $n_2=13$ ,  $\theta_1=1-99,5\%=0,5\%$ ,  $\theta_2=99,5\%-95\%=4,5\%$ . El vector  $\hat{\theta}$  está formado por  $\hat{\theta}_1=4/216=1,85\%$  y  $\hat{\theta}_2=13/216=6,02\%$ . El valor alcanzado por el estadístico es:

$$LR_{MUC} = 2 \left( \ln \left[ \frac{1 - 1,85\% - 6,02\%}{1 - 0,5\% - 4,5\%} \right]^{199} + \ln \left( \frac{1,85\%}{0,5\%} \right)^4 + \ln \left( \frac{6,02\%}{4,5\%} \right)^{13} \right) = 5,8238$$

Dicho estadístico se distribuye como una Chi cuadrado con dos grados de libertad. Aplicando la función de Excel =DISTR.CHI(5,8238; 2), obtenemos el valor de 0,0544, con lo cual no podemos rechazar con un intervalo de confianza del 95% la hipótesis de adecuación del modelo VaR basado en una distribución normal para analizar el riesgo de renta variable del FTSE-100.

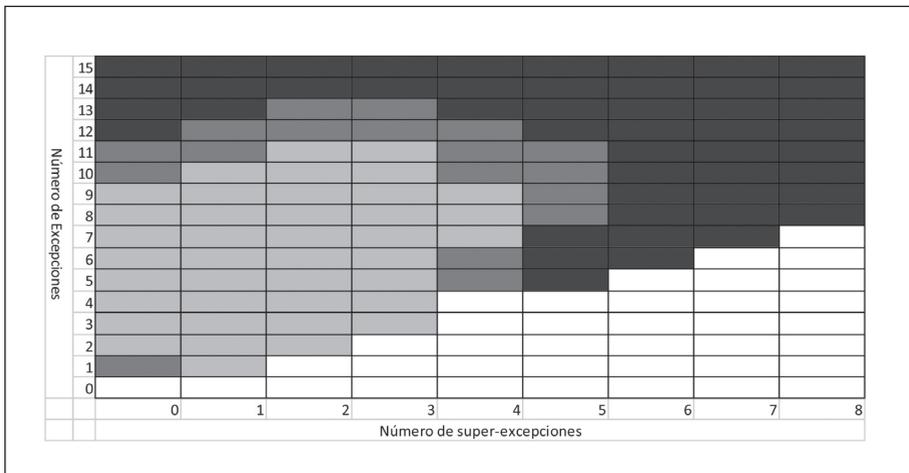
Pérignon y Smith (2008) muestran un ejemplo en el que a partir de 500 observaciones históricas de rendimientos (T=500) se estima el VaR empleando tres niveles de confianza (95%; 97,5% y 99%) asumiendo que el VaR al 99% es superado en 8 ocasiones, el VaR al 97,5% en 9 ocasiones y el VaR al 95% en 21 ocasiones. Los anteriores datos implican que la distribución de las excepciones es tal que en 12 veces las pérdidas obtenidas están entre el VaR (97,5%) y VaR (95%) y en 1 ocasión está comprendida entre el VaR (97,5%) y el VaR (99%). De esta forma se obtiene que  $n_0=500-21=479$ ,  $n_1=12$ ,  $n_2=9$  y  $n_3=8$ . De acuerdo con los test univariantes de Kupiec (1995) la hipótesis nula de que los modelos VaR son correctos no puede ser rechazada, ya que los p-valores alcanzados en los test son: p-valor (VaR al 99%) = 0,215; p-valor (VaR al 97,5%) = 0,292 y p-valor (VaR al 95%) = 0,399. Sin

embargo bajo el test multivariante se rechaza la hipótesis nula de que el modelo VaR está bien especificado:

$$LR_{MUC} = 2 \left( \ln \left[ \frac{1 - 2,4\% - 0,2\% - 1,6\%}{1 - 2,5\% - 1,5\% - 1\%} \right]^{479} + \ln \left( \frac{2,4\%}{2,5\%} \right)^{12} + \ln \left( \frac{0,2\%}{1,5\%} \right)^1 \right)$$

Lo que da un valor de 10,5441 con un p-valor asociado de 0,0141 (=DISTR.CHI(10,5441;3))

A partir del mismo se puede construir el mapa de riesgo (véase la figura inferior), utilizando las zonas de rechazo para diferentes niveles de confianza. Si la combinación (N, N´) se corresponde con una celda verde (gris claro en el gráfico), no podemos rechazar la hipótesis nula al 95% de confianza, si cae en la naranja (gris medio), se puede rechazar la hipótesis nula al 95% pero no al 99%, mientras que si cae en la roja (gris oscuro), se puede rechazar al 99% de confianza (Colletaz et ál., 2011).



Esta figura muestra el mapa de riesgo basado en el p-valor del test de cobertura incondicional multivariante para diferentes valores de excepciones y súper excepciones del VaR, tomando como valores de los parámetros  $\alpha = 1\%$ ,  $\alpha' = 0,2\%$  y  $T=500$ . Si  $N'=N=0$ , el test no puede realizarse.

### 3.1.7. Test basados en la función de pérdidas

Los métodos de *backtesting* basados en el número de excepciones tienen entre sus limitaciones el hecho de considerar igual de válidos dos modelos que tengan el mismo número de fallidos, independientemente de la cuantía de los mismos. Por este motivo, en lugar de centrarse exclusivamente en observar si la estimación del VaR es excedida o no, podríamos centrarnos en la magnitud de los excesos. El método para tener esto en cuenta es propuesto por Lopez (1998, 1999a), de modo que su propuesta es evaluar los modelos VaR en función de cómo minimizan una función de pérdidas. El atractivo de esta metodología es que no precisa un número muy elevado de observaciones (Dowd, 2006). La función de pérdidas puede tomar la siguiente forma cuadrática Lopez (1999b):

$$L(\text{VaR}_t(\alpha), x_{t,t+1}) = \begin{cases} 1 + (x_{t,t+1} - \text{VaR}_t)^2 & \text{si } x_{t,t+1} \leq -\text{VaR}(\alpha) \\ 0 & \text{si } x_{t,t+1} > -\text{VaR}(\alpha) \end{cases}$$

Donde  $x_{t,t+1}$  es el rendimiento y  $\text{VaR}_t(\alpha)$  el valor en riesgo estimado para ese momento. El proceso de *backtesting* finalmente consistiría en calcular la pérdida media para un conjunto de T observaciones:

$$\hat{L} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T L(\text{VaR}_t(\alpha), x_{t,t+1})$$

La pérdida media obtenida precisa habitualmente de algún tipo de valor de referencia con el que efectuar la comparación. Habitualmente, se establece una hipótesis acerca del comportamiento estocástico de la distribución de los rendimientos. Lopez (1999b) sugiere un procedimiento de tres pasos para determinar el rango de valores para la pérdida media que son consistentes con un modelo VaR preciso:

- Ajustar un modelo estadístico a los datos de pérdidas y ganancias,  $f(x_{t,t+1} \mid \Omega_t)$ .
- Generar, a partir del modelo desarrollado en el primer apartado, una serie de pérdidas y ganancias y el VaR asociado,  $\text{VaR}_t(\alpha)$ , y construir un valor para la pérdida media  $[\hat{L}i]_{i=1}^{10000}$ .
- Repetir el proceso anterior para disponer de un número amplio de escenarios (10.000), de modo que se pueda disponer de un conjunto de pérdidas medias

y, consecuentemente, se utilizará  $[\hat{L}i]_{i=1}^{10000}$  como una estimación de la distribución de la pérdida media.

Los cuantiles de la distribución empírica de la pérdida media simulada pueden utilizarse al igual que un test de hipótesis estándar para determinar si un modelo VaR es apropiado. La propia explicación del proceso delata que el procedimiento de *backtesting* de la función de pérdidas depende de una descripción precisa del comportamiento estocástico de las pérdidas y ganancias. En este sentido, si la pérdida media de un modelo es demasiado grande, podría ser el resultado de estar utilizando un modelo erróneo para realizar la validación, o bien, que la hipótesis respecto al comportamiento estocástico de las pérdidas y ganancias sea inadecuada. Esto no ocurre en los otros test estadísticos, ya que la función de excedidos es independiente y estadísticamente distribuida como una variable de Bernoulli, con lo cual no es preciso hacer ninguna hipótesis respecto comportamiento estocástico de las pérdidas y ganancias. Por este motivo, es habitual complementar el *backtesting* con métodos basados en hipótesis. No obstante, la función de pérdidas sigue siendo igualmente útil, sobre todo para comparar diferentes métodos VaR, en cuyo caso podría ser más apropiada para discriminar entre modelos alternativos.

---

**Ejemplo.** Vamos a analizar el método basado en la función de pérdidas cuadrática de Lopez (1999b) para la serie utilizada del FTSE-100. El cálculo se limita a calcular la pérdida media la función  $1 + (x_{t,t+1} - VaR_t)^2$  para los casos en los que esta exceda el VaR. Aplicando la fórmula expuesta anteriormente obtenemos:

$$\hat{L} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T L(VaR_t(\alpha), x_{t,t+1}) = 1,8527\%$$

Este resultado, nos indica poco de forma aislada y por tanto es más útil para comparar diferentes modelos, o para complementar a las técnicas que no tienen en cuenta la cuantía de las excepciones.

---

### 3.1.8. Otras pruebas

Además de los test anteriores basados en la contabilización del número de excepciones, su dependencia y del estudio del tamaño de las excepciones, pueden realizarse análisis complementarios como son el estudio de simetría de excepciones, análisis de ratios de variabilidad de resultados frente a variabilidad del VaR, análisis de la correlación entre los rendimientos y la serie temporal estimada de VaR, estudios para identificar las causas de las excepciones, etc. A continuación nos centraremos en el análisis de una ratio de variabilidad de resultados frente a variabilidad del VaR y en la correlación entre los rendimientos y la serie temporal estimada de VaR.

En el test de la varianza se compara la estimación de la varianza implícita en la estimación del VaR con la variabilidad empírica de la distribución de rendimientos. Una cifra de VaR se puede considerar simplemente como una varianza reescalada. Por lo tanto, es posible deshacer el cálculo del VaR para obtener la volatilidad subyacente y compararla con la varianza observada de los rendimientos. El test propuesto compara la volatilidad derivada del VaR promedio en el tiempo con la varianza de los rendimientos reales  $\sigma^2(r_t)$  durante el mismo periodo. Suponiendo que los rendimientos se distribuyen normalmente, se puede realizar una prueba  $F$  para comprobar si las dos estimaciones de la varianza son significativamente diferentes. Bajo la hipótesis nula de que las varianzas son iguales, se define el siguiente estadístico:

$$\frac{\sigma^2(r_t)}{\left(\frac{\overline{VaR}_t}{k}\right)^2}$$

Donde  $\overline{VaR}_t$  representa el VaR medio a través del tiempo,  $k$  denota el número de desviaciones estándar requeridas para el intervalo de confianza especificado (por ejemplo, un nivel de confianza del 99,5% es equivalente a 2,5758 desviaciones estándar). Bajo la hipótesis nula el test sigue una distribución  $F$  con grados de libertad igual al número de observaciones menos 1 ( $F_{n-1, n-1}$ ). La validez de la hipótesis de normalidad de los rendimientos se debe contrastar y rara vez se cumple empíricamente por lo que la validez de este test es reducida, sin embargo existen

otros test para contrastar la igualdad de varianzas que no necesitan de dicho supuesto<sup>114</sup>.

---

**Ejemplo.** Vamos a aplicar el test de igualdades de varianza para la serie de rendimientos del FTSE y los modelos GARCH y RSLN ajustados. Dado que en ambos casos el p-valor es inferior al 5% no podemos aceptar la hipótesis nula de que las varianzas de las estimaciones del VaR al 99,5% y de la serie de rendimientos sean iguales.

Modelo	$\left(\frac{\overline{VaR}_t}{k}\right)^2$	$\sigma^2(r_t)$	Estadístico	p-valor
GARCH	0,0395	0,0428	1,170	0,048
RSLN	0,0393	0,0428	1,187	0,036

---

Otro tipo de test consistiría en analizar la correlación entre las estimaciones de VaR y de la magnitud de los rendimientos. Los tradicionales test de *backtesting* para evaluar el desempeño de cualquier medida de riesgo se centran en analizar el nivel de cobertura proporcionada (que no se sobrepasen en excesivas ocasiones las pérdidas empíricas ni que estén agrupadas en el tiempo) y no en la eficiencia de la medida. Una medida adecuada del riesgo tiene que ser no sólo lo suficientemente conservadora, es decir que proporcione una cobertura apropiada, sino que también debe estar estrechamente relacionada con la exposición al riesgo de la cartera. Una medida de riesgo conservadora pero ineficiente tiende a sobreestimar el riesgo en periodos de baja volatilidad del mercado. La prueba más simple que se puede realizar consiste en evaluar la relación entre las estimaciones de VaR y el valor de los rendimientos. En este sentido, sería aconsejable que las grandes cifras de VaR fueran acompañadas de grandes rendimientos negativos mientras que los pequeños cálculos VaR deben estar asociados con pequeños rendimientos negativos o rendimientos positivos.

---

<sup>114</sup> El test analizado puede considerarse como una prueba de Levene para contrastar la igualdad de varianzas. Los valores atípicos hacen que la media varíe y al elevarlos al cuadrado para calcular la varianza se amplifica el efecto. Una alternativa sería sustituir la media por la mediana y la cuadratura por los valores absolutos, lo que se conoce como el test de Brown-Forsythe que no necesita de normalidad.

Teniendo en cuenta que el supuesto de normalidad de los rendimientos normalmente no se cumple, es útil tener en cuenta una prueba que no requiere de ningún supuesto sobre la distribución de las dos series como el test del coeficiente de correlación por rangos de Spearman  $R_s$ <sup>115</sup>. Sea  $r_t$  el conjunto de rendimientos y  $VarR_t$  la serie VaR, el coeficiente de correlación por rangos es el coeficiente de correlación lineal de las variables ordenadas. Dada una muestra de observaciones  $r_1, r_2, \dots, r_n$  de una variable aleatoria  $r_t$ , la ordenación por rango (*grades o rank order*)  $r_{(1)}, r_{(2)}, \dots, r_{(n)}$  son permutaciones de las observaciones originales ordenadas de tal forma que  $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \dots \leq r_{(n)}$ . Denominamos  $j$  a la posición por orden de  $r_{(j)}$  dentro del rango de posibles valores de la variable. Para calcular el coeficiente de *Spearman*, simplemente debemos establecer la posición numérica de cada uno de los valores de cada variable ( $r_t$  y  $VarR_t$ ) y posteriormente calcular la correlación lineal entre dichos órdenes. De esta forma, el valor del coeficiente de *Spearman* permanecerá siempre entre [-1,1]. Si el nivel de significancia del test es menor al 5%, se rechaza la hipótesis nula por lo que existe relación lineal entre el VaR de cada periodo y los rendimientos<sup>116</sup>.

Para evaluar la relación entre las estimaciones de VaR y el valor de los rendimientos también se puede emplear el estadístico tau de Kendall, que es otro coeficiente de correlación por rangos que analiza las concordancias y discordancias entre pares de puntos de los datos. De manera informal, se dice que un par de variables aleatorias es concordante si los valores grandes (pequeños) de una variable están asociados con valores grandes (pequeños) de la otra variable. El p-valor de la tau bajo la hipótesis nula de no asociación entre las variables se puede calcular en el caso de que no existan diferencias empatadas (*ties*) usando un algoritmo de Best y Gipps (1974) si bien existen varias aproximaciones en base a la normal<sup>117</sup>. Si el p-valor del test es inferior a su nivel de aceptación (normalmente el 5%), se puede rechazar la hipótesis nula de que las variables son estadísticamente independientes y aceptar la hipótesis alternativa de que están relacionadas.

<sup>115</sup> El análisis de la significatividad del coeficiente de correlación lineal requiere de normalidad.

<sup>116</sup> Para muestras pequeñas  $|R_s| \sqrt{\frac{n-2}{1-R_s^2}}$  se aproxima a una t de Student con grados de libertad igual a  $n - 2$ , para muestras suficientemente grandes el estadístico se aproxima a una normal con media 0 y varianza  $\frac{1}{n-1}$ , de forma que  $|R_s| \sqrt{n-1}$  está distribuido como una normal estándar.

<sup>117</sup> En R podemos emplear la función Kendall del paquete Kendall, nuevamente supongamos que la matriz x contiene en la primera columna la serie  $r_t$  y en la segunda  $VarR_t$ , bastaría con realizar:  
`library(Kendall)`  
`Kendall(x[,1],x[,2])`

**Ejemplo.** Vamos analizar la significatividad de la relación entre la serie de rendimientos y la serie de VaR estimada del FTSE-100 mediante el coeficiente de correlación de Spearman y Kendall. En el caso del coeficiente de correlación de Spearman<sup>118</sup> observamos que el p-valor del test es menor al 5% para el caso del modelo RSLN, de forma que se rechaza la hipótesis nula de incorrelación entre el VaR de cada periodo y los rendimientos del FTSE. En cambio para el caso del modelo GARCH no se detecta existencia de relación.

	VaR GARCH	VaR RSLN
Coefficiente de correlación de Spearman	0,03	0,22
p-valor	0,6557	0,0005

En el caso del coeficiente de correlación de Kendall (tau) observamos que el p-valor del test es menor al 5% para el caso del modelo RSLN, de forma que nuevamente se rechaza la hipótesis nula de incorrelación entre el VaR de cada periodo y los rendimientos del FTSE. Para el caso del modelo GARCH otra vez no se detecta existencia de relación.

	VaR GARCH	VaR RSLN
Coefficiente de correlación de Kendall	0,026	0,155
p-valor	0,5511	0,0003

<sup>118</sup> En Excel podemos emplear la función =JERARQUIA(valor;rango;0) que nos devuelve la j-ésima posición de un valor dentro del rango de valores. Si hubiera valores idénticos emplearíamos la siguiente función =(JERARQUIA(valor;rango;0)+CONTAR(rango)-JERARQUIA(valor;rango;1)+1)/2 que en el caso de valores iguales proporciona el mismo valor para ellos comenzando desde la posición más alta. El coeficiente de correlación de Spearman los calcularíamos mediante la función =COEF. DE.CORREL() aplicada a los j-ésimos valores de las variables. Los p-valores los calcularíamos mediante la función =DISTR.T(ABS(R<sub>s</sub>)\*RAIZ(n-2)/RAIZ(1-R<sub>s</sub><sup>2</sup>^2);n-2;2) o mediante =2\*(1-DISTR.NORM.ESTAND(ABS(R<sub>s</sub>\*RAIZ(n-1)))) que proporcionan valores casi idénticos. En R el paquete Hmisc tiene la función rcorr que simplifica enormemente el proceso. Supongamos que la matriz x contiene en la primera columna la serie r<sub>t</sub> y en la segunda VaR<sub>t</sub>, bastaría con realizar: library(Hmisc) rcorr(cbind(x[,1],x[,2], type=c("spearman")))

### 3.1.9. Conclusiones

Una de las principales ventajas del enfoque VaR es que se evalúa la exposición a diferentes mercados (tipos de interés, divisas, etc) en términos de una base común. Por lo tanto, los riesgos de diferentes mercados pueden ser comparados y agregados. Además, el valor del VaR se puede comparar directamente con los beneficios o pérdidas reales mediante el *backtesting* del modelo. Sin embargo, el VaR como metodología de la estimación del riesgo no está exenta de diversos problemas. De acuerdo con las condiciones de coherencia de riesgo establecidas por Artzner et ál. (1999), el VaR sólo satisface la de subaditividad (beneficios de la diversificación) en determinadas condiciones, por lo que según Embrechts et ál. (2001) no es una medida coherente del riesgo y en determinadas ocasiones puede conducir a decisiones erróneas<sup>119</sup>). Además el VaR presenta otros problemas de índole conceptual que trataremos a continuación.

En primer lugar, la estimación del VaR se basa únicamente en datos históricos. Dado que el pasado puede ser un no buen predictor del futuro, la medida VaR puede sobre o infraestimar el riesgo. Este problema se puede subdividir en el análisis de modelos multivariantes en: si las correlaciones entre los diferentes rendimientos son lo suficientemente estables como para confiar en ellas al cuantificar el riesgo y, en la mejor manera de modelar el comportamiento de la volatilidad.

En segundo lugar, el VaR no proporciona ninguna indicación de la magnitud de las pérdidas que pueden resultar para niveles de confianza superiores al elegido. Para completar los datos del VaR se puede analizar medidas como el Tail VaR (TVaR) o las pruebas de estrés, estas implican la especificación de escenarios de tensión y el análisis de cómo las carteras se comportarían en esas situaciones.

En tercer lugar, la relativa sencillez de un cálculo del VaR donde exposiciones a una amplia gama de instrumentos y mercados se pueden condensar en una sola cantidad es a la vez una fortaleza y debilidad. Esta simplicidad ha sido la clave para la popularidad de VaR, especialmente como medio de proporcionar información resumida. La dificultad, sin embargo, reside en que una cifra tan agregada puede enmascarar los desequilibrios en la exposición al riesgo en mercados o activos individuales.

---

<sup>119</sup> Para algunos ejemplos en los cuales el VaR es una medida incoherente, ver Acerbi y Tasche (2002).

A pesar de las debilidades del VaR este se ha extendido ampliamente para la medición del riesgo, por lo que en este capítulo hemos examinado distintas técnicas para su validación. El análisis de las diferentes técnicas de *backtesting* muestra que no existe un test exclusivo que sirva para medir directamente la validez de un modelo VaR. Dado que es preciso evaluar si los modelos superan la cobertura incondicional y la independencia, al menos es preciso utilizar un test para evaluar cada aspecto. Los test que tratan de medir la adecuación a múltiples niveles también deben utilizarse para complementar los anteriores. A mayores, estos podrían complementarse con un test basado en la cuantía, ya que serán preferibles los modelos que presentan mucha distancia a la pérdida máxima esperada. Finalmente, podría establecerse la eficiencia de la medida VaR en base a la relación de dependencia con la distribución de rendimientos real.

### **3.2. CRITERIOS TRADICIONALES DE SELECCIÓN DE MODELOS**

En el apartado anterior hemos analizado un conjunto de técnicas de *backtesting* que pueden ser útiles a la hora de evaluar un modelo de medición de riesgo. Dado que en general a priori desconocemos la bondad de un determinado modelo, será preciso plantear diferentes propuestas y evaluarlas de cara a seleccionar la más adecuada. La evaluación puede llevarse a cabo utilizando diferentes test, en cuyo caso el modelo más adecuado será el más sencillo que, a su vez, supere los distintos test respecto al VaR estimado. Adicionalmente, pueden llevarse a cabo otros test estadísticos que pasamos a describir en este apartado. Dentro de estos se encuentran los criterios basados en la función de verosimilitud y en el análisis de los residuos, donde destacamos en particular los test de normalidad, de incorrelación y de homocedasticidad. Ninguna de las herramientas para el ajuste de modelos puede evaluarse de forma aislada. Se recomienda el empleo de todas ellas aprovechando así las ventajas y reduciendo las debilidades de cada técnica.

#### **3.2.1. Criterios basados en la función de verosimilitud**

En la selección entre diferentes modelos puede utilizarse el criterio de simplicidad (parsimonia), de modo que será preferible un modelo más sencillo que otro

más complejo siempre y cuando el ajuste a los datos históricos sea similar. En el caso de que los modelos tengan el mismo número de parámetros, se suele utilizar como criterio de comparación el valor de la función de log-verosimilitud. Si por el contrario, los modelos presentan un número diferente de parámetros, será preciso utilizar criterios que realicen un ajuste. En general, un modelo con más parámetros presentará un mayor valor en la función de log-verosimilitud, pero tendrá como contrapartida su mayor complejidad. Por este motivo, se han propuesto diversos criterios que tienen en cuenta ambos aspectos. En particular, destacamos los criterios AIC (*Akaike information criteria*) propuesto por Akaike (1973) y el criterio SBC (*Schwarz criteria*) propuesto por Schwarz (1978), el criterio de Hannan-Quinn (HQC) y el test de la ratio o razón de verosimilitud (LRT).

### ***El criterio de Akaike (AIC)***

El criterio de Akaike (AIC) selecciona el modelo que toma mayor valor de la diferencia entre la función de log-verosimilitud bajo el modelo  $j$ -ésimo ( $l_j$ ) y su número de parámetros ( $k_j$ ), es decir  $l_j - k_j$ . Bajo el criterio de Akaike, cada distribución con un parámetro adicional debe aumentar la función de log-verosimilitud en, al menos, una unidad. A veces el AIC se calcula como:  $AIC = -\frac{2l_j}{T} + \frac{2k_j}{T}$ , siendo  $T$  el número de observaciones después de los ajustes, y en cuyo caso la selección de distribuciones alternativas se basa en la elección del menor valor de AIC.

### ***Criterio de información bayesiano***

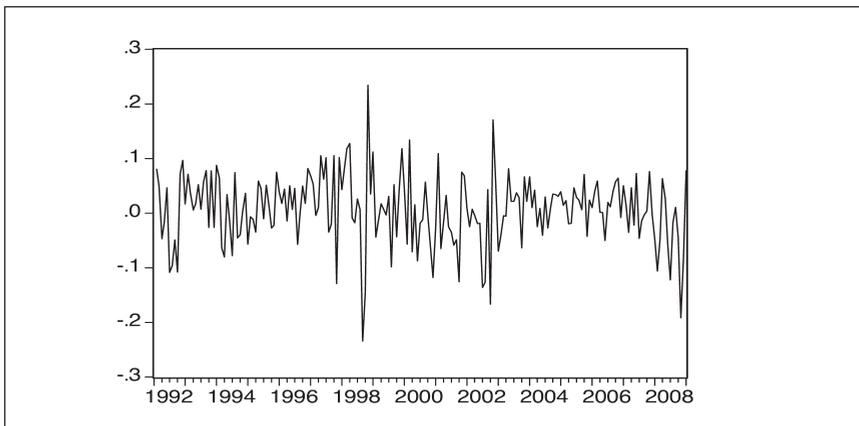
El criterio de información bayesiano o criterio bayesiano de Schwarz (1978) recomienda la selección del modelo con mayor puntuación establecida a través de la siguiente fórmula  $l_j - \left(\frac{k_j}{2}\right) \ln n$ , siendo  $l_j$  el logaritmo de la función de verosimilitud en su máximo,  $k_j$  el número de parámetros estimados y  $n$  el tamaño muestral. De esta forma a través de  $k_j$  se establece una penalización a los modelos con mayor número de parámetros, teniendo además en cuenta el tamaño muestral. De forma que cuanto mayor es el tamaño muestral el aumento de parámetros está más penalizado. De forma similar al AIC, es frecuente que en algunos programas estadísticos el SBC se calcule como  $SBC = -\frac{2l_j}{T} + \frac{k_j \ln T}{T}$ .

### **Criterio de Hannan-Quinn**

El Criterio de Hannan-Quinn (HQC) selecciona el modelo con mayor valor de  $l_j - k_j \cdot \ln(\ln n)$ . Bajo los tres criterios analizados cada parámetro adicional debe aumentar el valor de la función de log-verosimilitud, pero en el caso del SBC y HQC el aumento necesario depende de la cantidad de datos disponible, de forma que cuanto mayor es el tamaño muestral el aumento de parámetros está más penalizado. Se dice que los criterios de selección SBC y HQC son consistentes, lo que significa que si el modelo verdadero es uno de los que se compara será seleccionado con una probabilidad que se aproxima a 1 a medida que el tamaño muestral se incrementa. Lo anterior no es cierto para el AIC.

---

**Ejemplo.** En este ejemplo realizaremos una comparación de modelos utilizando los criterios de la función de verosimilitud. En el gráfico siguiente se recoge la evolución mensual de los rendimientos logarítmicos del IBEX-35 para el periodo enero de 1992 a diciembre de 2008.



Supongamos que queremos analizar la adecuación de un modelo normal y otro modelo basado en la mixtura de dos normales para posteriormente utilizarlo como modelo interno. En este apartado simplemente utilizamos los criterios basados en la función de verosimilitud. Los parámetros de ajuste de ambos modelos figuran en el cuadro siguiente.

Modelo rendimientos normal			
$Y_t = \mu + \sigma Z_t$		$\mu = 0,6369\%$	$\sigma = 6,4184\%$
Modelo mixtura de dos normales			
$Y_t = \sum_{i=1}^K p_i(\mu_i + \sigma_i Z_t)$	$p = 31,0492\%$	$\mu_1 = -1,7625\%$ $\mu_2 = 1,7174\%$	$\sigma_1 = 8,8030\%$ $\sigma_2 = 4,5925\%$

Una vez que disponemos de dichos datos se calculan los diferentes criterios de la función de verosimilitud que resulta de la estimación. Por ejemplo en el caso del modelo normal y teniendo en cuenta que nuestra serie cuenta con 204 observaciones:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= 270,72 - 2 = 268,72 \\ \text{SBC} &= 270,72 - 0,5 \cdot 2 \cdot \ln 204 = 265,40 \\ \text{HQC} &= 270,72 - 2 \cdot \ln(\ln 204) = 267,38 \end{aligned}$$

Como se puede comprobar, el modelo de mixtura presenta un mayor valor en todos los criterios basados en la función de verosimilitud, de modo que se considera el más adecuado de ambos.

Modelo	K	LOG L	AIC	SBC	HQC
Normal	2	270,72	268,72	265,40	267,38
Modelo mixtura de dos normales	5	276,94	271,94	263,64	268,58

### **El test de la ratio o razón de verosimilitud (LRT)**

El test de la ratio o razón de verosimilitud (véase por ejemplo Klugman et ál., 2008) también se puede emplear para comparar distintos modelos en el caso de que estos se consideren versiones reducidas o casos especiales de modelos más complejos<sup>120</sup>. Si un modelo con  $k_1$  parámetros es un caso especial del modelo con  $k_2$  parámetros siendo  $k_2 > k_1$  entonces, si  $l_1$  es la función de máximo verosimilitud del

<sup>120</sup> Incluso en el caso de que los modelos no sean versiones reducidas el test de la ratio de verosimilitud (LRT) puede emplearse como una aproximación para la selección de modelos.

modelo 1 y  $l_2$  es la función de máximo verosimilitud del modelo 2, este test tiene como estadístico  $T = 2(l_2 - l_1) = 2(l_2 / l_1)$  que se distribuye como una  $\chi^2$  con un número de grados de libertad igual al de restricciones que supone la hipótesis nula frente a la alternativa, es decir,  $k_2 - k_1$  grados de libertad. La hipótesis nula del test es que no se produce una mejora significativa del empleo del modelo más complejo. La hipótesis nula se rechaza si  $T > c$ , donde  $c$  es calculado a partir de  $\alpha = \Pr(T > c)$ .

**Ejemplo.** Continuando con la serie del IBEX-35 anterior, y dado que la distribución normal es un caso particular de la distribución mixtura de distribuciones normales, podemos realizar un contraste de razón de verosimilitudes en el que la hipótesis nula será que los rendimientos siguen una distribución normal y la hipótesis alternativa será que los rendimientos siguen la distribución más general. En el cuadro inferior se compara en base al test de la ratio de verosimilitud la distribución normal (modelo sencillo) con la mixtura de normales. Se rechaza la hipótesis de que los rendimientos están normalmente distribuidos frente a la hipótesis alternativa dada por el modelo más complejo.

Ho: Modelo de rendimientos normal				
H1: Modelo alternativo	Estadístico $T$	Grados de libertad	p-valor	Conclusión 99%
Mixtura de 2 normales	12,44	3	0,60%	Rechazar Ho

El estadístico T se calcula como:  $2(l_2 - l_1) = 2(276,94 - 270,72) = 12,44$ . Los grados de libertad se calculan como  $k_2 - k_1 = 5 - 2 = 3$ . El p-valor lo podemos calcular en Excel mediante  $=\text{DISTR. CHI}(12,44;3) = 0,60\%$  y dado que es menor que el 1% podemos rechazar con un 99% de probabilidad la hipótesis nula.

### 3.2.2. Test basados en el análisis de los residuos

En un modelo sin cambios de régimen los residuos estandarizados se definen como  $\hat{\varepsilon}_t = \frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t}$ , donde  $r_t$  es el rendimiento  $\mu_t$  la media y  $\sigma_t$  la volatilidad del modelo. A modo de ejemplo, en el modelo de rendimientos normales tanto la media como

la desviación típica son constantes a lo largo de la serie por lo que podemos decir que el residuo es único y viene dado por  $\hat{\varepsilon}_t = \frac{r_t - \mu}{\sigma}$ . Existen modelos en los que la volatilidad no es constante, por ejemplo un modelo del tipo GARCH(1,1) venía dado por las siguientes ecuaciones  $r_t = \mu + \varepsilon_t$ ;  $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ ;  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$  por lo que el residuo nuevamente será único y vendrá dado por  $\hat{\varepsilon}_t = \frac{r_t - \mu}{\sigma}$ . En los modelos de cambio de régimen de Markov, dado un régimen  $\rho_t$  los residuos generados se definen como  $\hat{\varepsilon}_{\rho_t, t} = \frac{r_t - \mu_{\rho_t, t}}{\sigma_{\rho_t, t}}$ . Dado que en estos modelos el proceso de movimiento entre regímenes viene dado por una cadena de Markov oculta, aunque podamos identificar el conjunto de posibles residuos no podemos directamente observar los residuos como en el caso sin regímenes. Sin embargo, aunque el régimen no es directamente observable podemos realizar inferencia acerca de cuál es la probabilidad de que el proceso esté en un determinado estado en un momento temporal concreto, estas probabilidades son lo que denotamos por  $p_j(t)$ . Formalmente  $p_j(t) = P(\rho_t = j | y_t, y_{t-1}, \dots, y_1)$ .

Freeland et ál. (2009a) citan cuatro métodos para establecer los residuos de los modelos de cambio de régimen de Markov y que podrían ser aplicados también a los modelos provenientes de mixturas. El primer método calcula los residuos estandarizados como:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_t &= \frac{r_t - (\mu_{1,t}p_1(t) + \mu_{2,t}p_2(t))}{\sqrt{\sigma_{1,t}^2 p_1(t) + \sigma_{2,t}^2 p_2(t) + p_1(t)(1 - p_1(t))[\mu_{1,t} - \mu_{2,t}]^2}} \\ &= \frac{r_t - (\mu_{1,t}p_1(t) + \mu_{2,t}p_2(t))}{\sqrt{p_1(t)[\sigma_{1,t}^2 + \mu_{1,t}^2] + p_2(t)[\sigma_{2,t}^2 + \mu_{2,t}^2] - (\mu_{1,t}p_1(t) + \mu_{2,t}p_2(t))}} \end{aligned}$$

Freeland et ál. (2009a) citan como desventaja de esta técnica que los residuos serán demasiado pequeños, especialmente cuando las medias de cada régimen sean muy distintas y los datos muestrales caigan cerca del medio de las dos medias.

El segundo método calcula los residuos estandarizados como el residuo esperado o ponderado, es decir:

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\varepsilon}_{1,t}p_1(t) + \hat{\varepsilon}_{2,t}p_2(t)$$

Freeland et ál. (2009a) citan como desventaja de esta técnica que cuando los datos muestrales estén entre las dos medias se producen colas más ligeras en los residuos de las que observaríamos si pudiéramos conocer el régimen verdadero en el que está el proceso, ya que se estaría cogiendo una media ponderada entre un residuo positivo y negativo.

El tercer método calcula los residuos estandarizados como los más probables:

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\varepsilon}_{1,t}I_{\{p_1(t)>0,5\}} + \hat{\varepsilon}_{2,t}I_{\{p_2(t)>0,5\}}$$

Siendo  $I$  una función indicador que tomará el valor 1 cuando la probabilidad en un momento temporal supere el valor de 0,5 y 0 en el caso contrario. Este es el método empleado en Hardy et ál. (2006) para analizar la bondad de ajuste de los modelos sugeridos. Freeland et ál. (2009a) citan que la ventaja de esta técnica es que la mayoría de los valores de los residuos son iguales a los actuales residuos inobservados. Sin embargo cuando la función selecciona el residuo incorrecto, el verdadero residuo probablemente tenga un tamaño superior y signo contrario. Además, nuevamente este procedimiento tiende a generar residuos con colas más ligeras que los verdaderos residuos del modelo.

El cuarto método calcula los residuos estandarizados mediante una técnica estocástica que modifica el método anterior. En este sentido se emplean las probabilidades de cada régimen en cada momento del tiempo para generar un conjunto de residuos estocástico, es decir:

$$\hat{\varepsilon}_{\tau_t,t} = \hat{\varepsilon}_{1,t}I_{\{p_1(t)>\gamma_t\}} + \hat{\varepsilon}_{2,t}I_{\{p_2(t)>\gamma_t\}}$$

Donde  $\Upsilon_t$  es una sucesión de números aleatorios distribuidos uniformemente entre 0 y 1 y  $\tau_t = 1I_{\{p_1(t)>\gamma_t\}} + 2I_{\{p_2(t)>\gamma_t\}}$ , por lo que  $\tau_t$  es el régimen elegido aleatoriamente que será empleado en un momento temporal  $t$  para generar el residuo. Cada conjunto de números aleatorios  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  resultará en un conjunto diferente de regímenes elegidos  $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  y por lo tanto en una realización distinta de residuos  $\{r_{\tau_1,t}, \dots, r_{\tau_n,t}\}$ . La principal ventaja de esta técnica es que se puede mostrar que son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una normal estándar bajo la hipótesis del modelo de cambio de régimen (Freeland et ál., 2009b).

El ajuste de un modelo también puede ser evaluado en base al error de sus predicciones. Destacaremos solamente las dos medidas más empleadas, la raíz del error cuadrático medio (RMSE) y el error absoluto medio (MAE). Cuyas fórmulas vienen dadas por:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (r_t - \hat{r}_t)^2}{N}}$$
$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^N |r_t - \hat{r}_t|}{N}$$

Donde  $r_t$  y  $\hat{r}_t$  representan la muestra de tamaño  $N$  de los valores de rendimientos observados y los estimados por el modelo. Un valor de RMSE o MAE igual a cero indica un ajuste perfecto. Otras medidas de este tipo son los denominados errores MAPE o MASE. Véase un ejemplo reciente del uso de tales medidas en la validación de modelos de volatilidad en Trück y Liang (2012).

### **3.2.2.1. Normalidad**

El análisis de la adecuación de los residuos estandarizados a un determinado tipo de distribución ha de realizarse a través del nivel de ajuste a los datos observados. Dicho contraste se puede realizar a través de pruebas informales y pruebas formales. La hipótesis habitual es que dichos residuos se distribuyan como una normal estándar. El análisis de normalidad de los residuos se suele realizar a través de cualquiera de los test tradicionales (gráficos QQ, gráficos PP, Test de Jarque Bera, Shapiro-Wilk, etc.). En el caso de que una de estas pruebas muestre que el modelo no tenga residuos normales es indicativo de que el modelo no se ajusta bien a los datos.

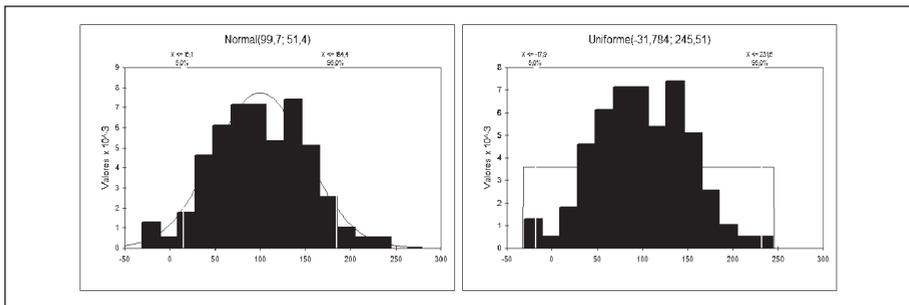
#### *A. Pruebas informales*

Una vez estimado un modelo procedemos a estimar los residuos, cuyos valores constituyen los *inputs* sobre los que se realizará el análisis de normalidad. Dicho análisis tiene sentido en la medida que el modelo estimado considere que el residuo es normal, en la práctica se puede emplear la hipótesis de que siguen una  $t$  de Student, una distribución del error generalizada, etc. o mismo no asumir ninguna distribución empleando en su simulación los empíricos. Existen una serie de pruebas informales o técnicas no paramétricas entre las que destacamos: los

gráficos de coincidencia o superposición, el gráfico QQ, el gráfico PP, el gráfico de medias y la tabla de medidas relevantes.

### Gráfico de coincidencia

Esta prueba consiste en representar en el mismo gráfico las frecuencias absolutas empíricas frente a las teóricas permitiendo una comparación visual. Si los puntos del gráfico caen aproximadamente sobre el histograma entonces el hipotético modelo es apropiado. Este gráfico permite apreciar si la distribución teórica coincide con la proporcionada por los datos, tanto de forma global como por áreas específicas (coincidencia alrededor de la media o de los extremos, etc.). A continuación se muestran dos gráficos de coincidencia o superposición. En el gráfico de la izquierda mostramos una distribución con buen ajuste a los datos empíricos y en la derecha una distribución con mal ajuste<sup>121</sup>.

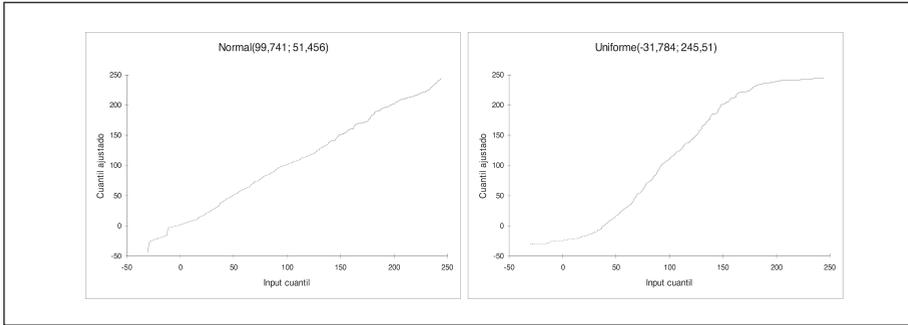


### Análisis de los gráficos QQ (Quantile-Quantile o QQ plots)

El gráfico QQ es un tipo de gráfico que representa los valores de los cuantiles de la distribución de datos empírica en comparación con los valores de los cuantiles de la función de distribución teórica. Si el ajuste proporcionado por la distribución analizada es bueno, dicho gráfico se aproximará al de una línea recta que parta del

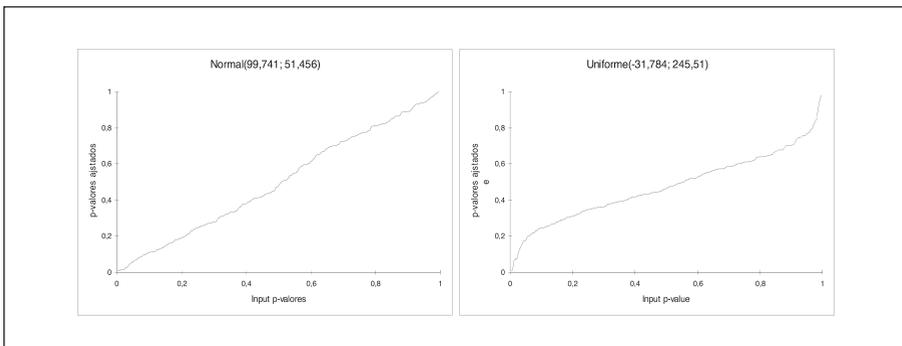
<sup>121</sup> En los sucesivos ejemplos se muestran de forma comparativa el ajuste a unos 200 datos generados a través de una Normal (100,50), mediante dos distribuciones ajustadas a dichos valores: la Normal (99,7; 51,4) frente a una Uniforme (-31,78; 245,51). El ejemplo sólo tiene interés ilustrativo, ya que las distribuciones empleadas para el ajuste presentan obviamente un buen ajuste y un mal ajuste respectivamente. En la práctica es más dificultosa esta diferenciación, por lo que se emplean los métodos formales.

origen con un ángulo de 45°. A continuación se muestran dos gráficos QQ. En el gráfico izquierda mostramos una distribución con buen ajuste a los datos empíricos (línea casi recta) y en el gráfico de la derecha una distribución con mal ajuste.



*Gráficos PP (Probability-Probability o PP Plots)<sup>122</sup>*

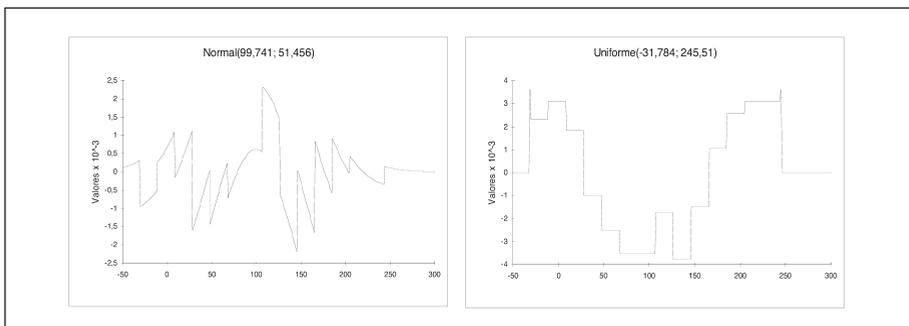
El gráfico PP muestra la probabilidad empírica acumulada en comparación con la probabilidad teórica acumulada esperada bajo la hipótesis de que los datos siguen una distribución específica. Si el ajuste proporcionado por la distribución es bueno el gráfico será, como en el caso del gráfico QQ, casi una línea diagonal. A continuación se muestra dos gráficos PP, en el de la izquierda mostramos una distribución con buen ajuste a los datos empíricos, y en la derecha una distribución con mal ajuste.



<sup>122</sup> El gráfico se crea seleccionando n valores de nuestra variable x de forma  $0 < x_1 < \dots < x_n$ . Después cada punto se dibuja para cada valor  $(F_n(x), F(x))$ . Es común establecer intervalos de confianza para un nivel del 95%.

### Gráfico de diferencias

Es un gráfico donde se muestra el error absoluto  $D(x)$  entre la distribución teórica  $F(x)$  y la función de distribución empírica  $F_n(x)$ . Por lo tanto, representa la función  $D(x) = F_n(x) - F(x)$ . A continuación se muestra dos gráficos de diferencias. En el gráfico de la izquierda<sup>123</sup> mostramos una distribución con buen ajuste a los datos empíricos ya que los errores absolutos se distribuyen aleatoriamente sobre el valor cero, y en la derecha una distribución con mal ajuste ya que los errores absolutos no muestran aleatoriedad<sup>124</sup>.



### Comparación de medidas relevantes

La última prueba informal consiste en comparar las medidas de dispersión empíricas de los residuos estandarizados con las obtenidas de la distribución propuesta. Principalmente se recurre al análisis de diversos cuantiles para analizar la bondad del ajuste del modelo a los datos extremos (comparando valores elevados de  $p$  para los cuantiles).

<sup>123</sup> Una vez calculada la diferencia vertical entre las dos funciones es útil representar intervalos de confianza al 95%, de modo que un modelo será satisfactorio en la medida en que sus diferencias permanezcan dentro de los límites.

<sup>124</sup> Debe observarse un cambio en la escala del eje vertical (Error absoluto) que varía de -2,5 a 2,5 en el gráfico de la izquierda y de -4 a 4 en el de la derecha.

## B. Pruebas formales

Las pruebas informales permiten una primera aproximación para analizar la bondad de ajuste de una distribución a una muestra. Sin embargo, existen diferentes pruebas estadísticas para verificar el ajuste de los datos a una distribución de probabilidad. Test genéricos que pueden ser aplicados al análisis de la normalidad son el contraste  $\chi^2$  de Pearson, el test de Kolmogorov-Smirnov, el test de Anderson-Darling y el Cramer-Von Mises (CVM). Existen otros test específicos comúnmente empleados para probar la normalidad de una serie de datos como el de Jarque-Bera, Shapiro-Francia, Lilliefors-Kolmogorov-Smirnov, etc.

### *Test Chi cuadrado de bondad de ajuste*

El test Chi cuadrado se utiliza para comprobar formalmente si una muestra de datos proviene de una población con una determinada distribución. En este caso, lo que deseamos probar es si los residuos estandarizados son normales. Para calcular el estadístico  $\chi^2$  primero se deben agrupar los datos en intervalos y posteriormente se emplea la siguiente fórmula:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - E_i)^2}{E_i}$$

Donde  $k$  es el número de intervalos,  $N_i$  es el número de observaciones que hay en el intervalo  $i$  y  $E_i$  es el número de observaciones que se esperan que haya en ese intervalo<sup>125</sup>. Uno de los inconvenientes del estadístico Chi cuadrado es que no existe una regla precisa sobre la selección del número y localización de los intervalos, pudiendo alcanzarse diferentes conclusiones a partir de unos mismos datos dependiendo de cómo se establezcan los intervalos. En la práctica es común el empleo de compartimentos equiprobables (Mann y Wald, 1942 o Cohen y Sackrowitz, 1975). Una modificación sobre este agrupamiento es establecida por Schorr (1974) que fija el número de intervalos en  $2n^{0.4}$  siendo  $n$  el tamaño muestral. Otra desventaja de la prueba de Chi cuadrado es que se requiere un tamaño

---

<sup>125</sup> Se calcula como producto del número total de datos observados y la probabilidad acumulada existente en cada intervalo.

muestral suficiente para que la aproximación sea válida, en general, que la frecuencia esperada de cada intervalo sea mayor a 5. El test Chi cuadrado se define entonces de la siguiente forma:

Ho: Los datos siguen la distribución especificada.

H1: Los datos no siguen la distribución especificada.

Dicho test sigue aproximadamente, una distribución  $\chi^2$  con  $k - t - 1$  grados de libertad, donde  $t$  es el número de parámetros estimados. En el caso de testar la hipótesis nula de normalidad, dado que se debe estimar media y desviación típica, tendremos  $k - 3$  grados de libertad. El test se puede realizar mediante los valores críticos una vez establecido el nivel de significatividad alfa. Entonces calculamos el valor de la distribución Chi cuadrado, de forma que si el valor del estadístico es mayor que  $\chi^2_{k-t-1}$  rechazamos la hipótesis de que los datos provienen de una distribución normal. Otra forma de realizar el test es por medio de los p-valores. Una vez calculado el estadístico  $\chi^2$ , se debe aplicar a la distribución Chi cuadrado definida sobre el valor obtenido para obtener el p-valor. Se acepta el modelo si el p-valor obtenido es mayor a un nivel de significatividad alfa empleado, siendo común emplear el 5%. La regla que se emplea es la siguiente, si el p-valor obtenido es menor que un nivel de significatividad alfa exigido rechazamos la hipótesis de que los datos provienen de una distribución especificada.

**Ejemplo.** Dada una serie de 12 rendimientos<sup>126</sup> (N=12) procedemos a estandarizarlos en el modelo normal a través de su media (0,1814) y desviación típica (1,1784), mediante la fórmula  $\hat{\varepsilon}_t = \frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t}$ .

Rendimiento	Residuo estandarizado
1,1515	1,1312
0,6665	0,7196
-0,8219	-0,5435
-0,3505	-0,1435
0,6292	0,6879
-1,7858	-1,3615
-1,6022	-1,2057
-0,8658	-0,5808
-1,7813	-1,3577
1,0152	1,0155
1,4028	1,3444
0,1652	0,2942

El primer paso para realizar el test es seleccionar el número de intervalos, en este caso hemos decidido establecer 6 intervalos por lo que cada uno tendrá una probabilidad del 0,1667. Los valores de la distribución normal estándar que se corresponden con esos valores de probabilidad se calculan mediante =DISTR.NORM.ESTAND.INV(probabilidad). En la tercera columna contamos el número de residuos estandarizados que caen en los intervalos  $(-\infty, -0,9674), \dots, (0,9674, \infty)$ , obteniendo así la frecuencia observada en cada intervalo.

La frecuencia esperada (cuarta columna), dado que los intervalos son equiprobables, se calcula por medio de la multiplicación de la probabilidad (0,1667) por el tamaño muestral (12). Finalmente obtenemos el estadístico como la suma de la última columna  $\chi^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(N_i - E_i)^2}{E_i} = 2$ . Dicho valor debe ser comparado con el de una distribución  $\chi^2$  con  $k-t-1$  grados de libertad, en este caso concreto tendremos 6-1 grados de libertad (6-2-1 en el caso de que tuviéramos que estimar los parámetros de la distribución normal). Dicho valor puede ser obtenido en Excel como =PRUEBA.CHI.INV(0,05;5) que proporciona un valor de 11,0705 (7,8147 en caso de ajustar los grados de libertad) por lo cual con un nivel

<sup>126</sup> Aunque los rendimientos estén en tanto por ciento obviaremos la expresión % para simplificar la notación.

de significación del 5% no podemos rechazar la hipótesis nula de normalidad. Alternativamente llegaríamos a la misma conclusión comparando el p-valor obtenido mediante  $\text{=DISTR.CHI}(2;5)=0,8491$  (0,5724 ajustando los grados de libertad) con el valor de 0,05.

Probabilidad	Z	Frecuencias observadas	Frecuencia esperada	$\frac{(N_i - E_i)^2}{E_i}$
0,1667	-0,9674	3	2	0,5
0,3333	-0,4307	2	2	0
0,5000	-	1	2	0,5
0,6667	0,4307	1	2	0,5
0,8333	0,9674	2	2	0
1,0000		3	2	0,5

### *Test de Kolmogorov-Smirnov (K-S)*

Es un estadístico para medir la bondad de ajuste de datos que no requiere el establecimiento de intervalos, lo cual hace que sea menos arbitrario que el Chi cuadrado. Otra ventaja es que se trata de una prueba exacta, a diferencia del test Chi cuadrado que depende del adecuado tamaño de la muestra para que la aproximación sea válida. El principal inconveniente del test K-S para analizar la normalidad de los residuos es que tiende a ser más sensible al centro de la distribución, por lo que se dice que no detecta muy bien discrepancias en los extremos.

Si tenemos una muestra de  $n$  valores provenientes de una distribución podemos realizar una prueba de bondad de ajuste a través del denominado estadístico K-S. El test Kolmogorov-Smirnov se define entonces de la siguiente forma:

Ho: Los datos siguen la distribución especificada

H1: Los datos no siguen la distribución especificada

Sea  $x_1, x_2, \dots, x_n$  una muestra de tamaño  $n$  de una variable aleatoria continua  $X$  con función de distribución empírica  $F_n(x)$ . El test K-S es un test no paramétrico basado

en la función de distribución empírica (*empirical cumulative distribution function*, ECDF). El estadístico o la distancia K-S se define como la mayor distancia entre la función de distribución empírica  $F_n(x)$  y la función de distribución esperada  $F(x)$  (*expected EDF*) bajo la hipótesis nula  $H_0$ . Formalmente:

$$D_n(F) = \sup_x |F_n(x) - F(x)| = \max[D_n^+(F), D_n^-(F)]$$

Siendo:

$$D_n^+(F) = \sup_x [F_n(x) - F(x)] = \max_{1 \leq i \leq n} \left( F(x) - \frac{i-1}{n} \right)$$

$$D_n^-(F) = \sup_x [F(x) - F_n(x)] = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{i}{n} - F(x) \right)$$

Por lo que podemos resumir que la distancia de K-S es:

$$D_n(F) = \max_{1 \leq i \leq n} \left( F(x) - \frac{i-1}{n}; \frac{i}{n} - F(x) \right)$$

Los valores críticos para el test K-S dependen de la distribución específica que se esté testando, sin embargo existen algunas tablas para ciertas distribuciones que se han calculado empleando el método de Monte Carlo. El contraste de hipótesis es de una sola cola, y la hipótesis de que la distribución es de una forma específica es rechazada si  $D_n(F)$  es mayor que el valor crítico.

#### *Test de Lilliefors o Kolmogorov-Smirnov para normalidad [L-K-S test]*

Para testar la hipótesis nula de normalidad deben estimarse los parámetros desconocidos que caracterizan a la distribución teórica (la media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma$ ). En este caso, la distribución del estadístico K-S original cambia a:

$$D_n(F) = \sup_x |F_n(x) - \Phi((x - \mu)/\sigma)| = \max[D_n^+(F), D_n^-(F)]$$

El estadístico  $D_n(F)$  representa la máxima discrepancia entre la función de distribución empírica de los residuos y la función de distribución de la normal ajustada.

**Ejemplo.** A continuación realizaremos un ejemplo del test de Lilliefors. Dada una serie de 12 residuos estandarizados ( $N=12$ ), en primer lugar ordenamos de menor a mayor valor dichos residuos (segunda columna), asignando a cada uno de ellos su nueva posición ( $i$ ). Se calcula la frecuencia acumulada observada (cuarta columna) dividiendo  $i/N$ , es decir, el más pequeño será  $1/12$ , el siguiente  $2/12$ , etc. Posteriormente calculamos la función de distribución de cada valor dada su media y desviación, por ejemplo para el dato  $i=1$  empleamos la función =DISTR.NORM(-1,3615;PROMEDIO(residuos); DESVEST(residuos);1) o dado que se analizan residuos estandarizados =DISTR.NORM.ESTAND(-1,3615).

En las dos últimas columnas calculamos las distancias:  $D_n^-(F)$  es la diferencia en valores absolutos entre la frecuencia observada y esperada, mientras que  $D_n^+(F)$  es el valor absoluto de la diferencia entre la frecuencia observada y la próxima frecuencia esperada. Finalmente el estadístico de Lilliefors  $D_n(F)$  es el mayor valor de  $D_n^-(F)$  y  $D_n^+(F)$ . A modo de ejemplo  $D_1^-(F) = \text{ABS}(0,0833-0,0867)$ ,  $D_1^+(F) = \text{ABS}(0-0,0867)$ .

El valor de  $D_n(F)$  se debe comparar con el p-valor obtenido para aceptar o rechazar la hipótesis de normalidad. Los datos obtenidos son un valor del estadístico  $D_n(F)$  de 0,1709 que tiene asociado un p-valor de 0,4314 por lo que con un 5% de significación no podemos rechazar la hipótesis de normalidad.

Residuo estandarizado	Residuo ordenado	$i$	Frecuencia acumulada observada	Frecuencia acumulada esperada	$D_n^-(F)$	$D_n^+(F)$
1,1312	-1,3615	1	0,0833	0,0867	0,0033	0,0867
0,7196	-1,3577	2	0,1667	0,0873	0,0794	0,0039
-0,5435	-1,2057	3	0,2500	0,1140	0,1360	0,0527
-0,1435	-0,5808	4	0,3333	0,2807	0,0526	0,0307
0,6879	-0,5435	5	0,4167	0,2934	0,1233	0,0400
-1,3615	-0,1435	6	0,5000	0,4430	0,0570	0,0263
-1,2057	0,2942	7	0,5833	0,6157	0,0323	0,1157
-0,5808	0,6879	8	0,6667	0,7542	0,0876	0,1709
-1,3577	0,7196	9	0,7500	0,7641	0,0141	0,0974
1,0155	1,0155	10	0,8333	0,8451	0,0117	0,0951
1,3444	1,1312	11	0,9167	0,8710	0,0457	0,0377
0,2942	1,3444	12	1,0000	0,9106	0,0894	0,0061

*Estadístico de Anderson-Darling (A-D test)*

El test Anderson-Darling es una modificación del test K-S, ya que usa una medida distinta de diferencia entre las distribuciones teóricas y empíricas, proporcionando un mayor peso a las colas. En este sentido el test A-D destaca las diferencias entre los extremos de la distribución ajustada y los datos observados. El test A-D pertenece a la familia de test cuadráticos generales, que vienen definidos para una función de ponderación  $w$  según la siguiente expresión:

$$Q_n(F) = n \int_0^{+\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 w[F(x)] dF(x)$$

En el caso del test A-D la función de ponderación empleada es  $w[F(x)] = \frac{1}{F(x)[1-F(x)]}$ . Así, el estadístico viene dado por:

$$AD = n \int_0^{\infty} \frac{[F_n(x) - F(x)]^2}{F(x)[1 - F(x)]} dF(x)$$

La prueba de Anderson-Darling para normalidad compara la distribución acumulada empírica con la teórica [normal]. A efectos prácticos el estadístico de Anderson-Darling se calcula como:

$$AD = -T - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (2i - 1) [\ln F(x_i) + \ln (1 - F(x_{n-i+0}))]$$

Donde  $T$  es el tamaño de la muestra,  $F(x_i)$  es la función de distribución acumulada de la distribución normal e  $i$  es el  $i$ -ésimo valor de la muestra de residuos cuando se clasifican en orden ascendente (de menor a mayor). El contraste de hipótesis es de una sola cola (unilateral), y la hipótesis de que la distribución de los residuos es normal es rechazada si  $AD$  es mayor que el valor crítico. Los p-valores<sup>127</sup> de este test se calculan a partir del estadístico modificado:

$$AD^* = AD \cdot (1 + 0,75/T + 2,25/T^2)$$

<sup>127</sup> La tabla es la siguiente, calculándose el p-valor para la primera condición cumplida por AD:

Valor de $D^*$	Valor del p-valor asociado
$AD^* < 0,2$	$= 1 - \exp[-13,436 + 101,14^* AD^* - 223,73^* AD^{*2}]$
$AD^* < 0,34$	$= 1 - \exp[-8,318 + 42,796^* AD^* - 59,938^* AD^{*2}]$
$AD^* < 0,6$	$= \exp(0,9177 - 4,279^* AD^* - 1,38^* AD^{*2})$
$AD^* \geq 0,6$	$= \max(1; \exp(1,2937 - 5,709^* AD^* + 0,0186^* AD^{*2}))$

**Ejemplo.** A continuación realizaremos un ejemplo del test de Anderson-Darling. Dada una serie de 12 residuos ordenados de menor a mayor valor los residuos (primera columna), asignamos a cada uno de ellos su nueva posición (i). Se calcula la función de distribución normal  $F(x_i)$  de cada valor dada la media y desviación de los residuos mediante la función =DISTR.NORM.ESTAND[residuo ordenado]. En la siguiente columna calculamos  $1-F(x_i)$ , para posteriormente ordenar los valores de  $1-F(x_i)$  de menor a mayor (quinta columna). Finalmente para cada i se calcula  $(2i-1)[\ln F(x_i) + \ln (1-F(x_{n-i+0}))]$  y se procede al cálculo del estadístico mediante la siguiente fórmula:

$$AD = -12 - \frac{1}{12} \sum [(-4,8602) + \dots + (-4,2393)] = 0,3943$$

Y el estadístico modificado como:

$$AD^* = AD \cdot (1 + 0,75/12 + 2,25/144) = 0,4251$$

A partir del cual obtendríamos un p-valor de 0,3164, por lo que con un 5% de significación no podemos rechazar la hipótesis de normalidad.

Residuo ordenado	i	$F(x_i)$	$1-F(x_i)$	$1-F(x_{n-i+0})$	$(2i-1)[\ln F(x_i) + \ln (1-F(x_{n-i+0}))]$
-1,3615	1	0,0867	0,9133	0,0894	-4,8602
-1,3577	2	0,0873	0,9127	0,1290	-13,4600
-1,2057	3	0,1140	0,8860	0,1549	-20,1831
-0,5808	4	0,2807	0,7193	0,359	-19,0041
-0,5435	5	0,2934	0,7066	0,2458	-23,6674
-0,1435	6	0,4430	0,5570	0,3843	-19,4763
0,2942	7	0,6157	0,3843	0,5570	-13,9117
0,6879	8	0,7542	0,2458	0,7066	-9,4395
0,7196	9	0,7641	0,2359	0,7193	-10,1747
1,0155	10	0,8451	0,1549	0,8860	-5,4974
1,1312	11	0,8710	0,1290	0,9127	-4,8180
1,3444	12	0,9106	0,0894	0,9133	-4,2393

*Test de Cramer-Von Mises (CVM)*

Otro test derivado de esta familia de test cuadráticos es el test de Cramer-Von Mises (CVM) que se corresponde en la función general  $Q_n(F) = n \int_0^{+\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 w[F(x)] dF(x)$  con la función  $w[F(x)]$ , dando como resultado:

$$W_n^2(F) = n \int_0^{+\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 dF(x)$$

A efectos prácticos el estadístico de Cramer-Von Mises se calcula como:

$$W_n^2(F) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[ F(x_i) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2$$

Y el estadístico modificado a partir del cual se calculan los p-valores<sup>128</sup> es:

$$W_n^2(F)^* = (1 + 0,5/n) \cdot W_n^2(F)$$

**Ejemplo.** A continuación realizaremos un ejemplo del test de CVM. Dada una serie de 12 residuos ordenados de menor a mayor valor los residuos (primera columna), asignamos a cada uno de ellos su nueva posición  $i$ . Se calcula la función de distribución normal  $F(x_i)$  de cada valor. En la última columna calculamos para cada  $i$  la función  $\left[ F(x_i) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2$ . Finalmente se procede al cálculo del estadístico mediante la siguiente fórmula:

$$W_n^2(F) = \frac{1}{144} + \sum_{i=1}^{12} [(0,0020) + \dots + (0,0023)]^2 = 0,0568$$

Y el estadístico modificado como:

$$W_n^2(F)^* = (1 + 0,5/12) \cdot W_n^2(F) = 0,0591$$

<sup>128</sup> La tabla es la siguiente calculandose el p-valor para la primera condición cumplida por  $W_n^2(F)^*$

Valor de $W_n^2(F)^*$	Valor del p-valor asociado
$W_n^2(F)^* < 0,0275$	$= 1 - \exp(-13,953 + 775,5 * W_n^2(F)^* - 12542,61 * W_n^2(F)^*^2)$
$W_n^2(F)^* < 0,051$	$= 1 - \exp(-5,903 + 179,546 * W_n^2(F)^* - 1515,29 * W_n^2(F)^*^2)$
$W_n^2(F)^* < 0,092$	$= \exp(0,886 - 31,62 * W_n^2(F)^* + 10,897 * W_n^2(F)^*^2)$
$W_n^2(F)^* \geq 0,092$	$= \max(1; \exp(1,111 - 34,242 * W_n^2(F)^* + 12,832 * W_n^2(F)^*^2))$

A partir del cual obtendríamos un p-valor de 0,3885 por lo que nuevamente con un 5% de significación no podemos rechazar la hipótesis de normalidad.

Residuo ordenado	$i$	$F(x_i)$	$\left[ F(x_i) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2$
-1,3615	1	0,0867	0,0020
-1,3577	2	0,0873	0,0014
-1,2057	3	0,1140	0,0089
-0,5808	4	0,2807	0,0001
-0,5435	5	0,2934	0,0067
-0,1435	6	0,4430	0,0002
0,2942	7	0,6157	0,0055
0,6879	8	0,7502	0,0167
0,7196	9	0,7641	0,0031
1,0155	10	0,8451	0,0029
1,1312	11	0,8710	0,0000
1,3444	12	0,9106	0,0023

### *Shapiro-Francia (SP test)*

El test de Shapiro-Francia está basado en el coeficiente de correlación al cuadrado entre los valores de los residuos ordenados y los cuantiles ordenados esperados (aproximados) de la distribución normal. Si los datos se distribuyen normalmente, la correlación debe ser alta.

**Ejemplo.** A continuación realizaremos un ejemplo del test de Shapiro-Francia. Dada una serie de 12 residuos ordenados de menor a mayor valor y su posición  $(i)$ . Se calcula la serie de valores  $s_i = (i - a) / (n + 1 - 2 \cdot a)$  para  $i$  desde el valor 1 al valor  $n$  y generalmente con  $a = 3/8$ . En nuestro caso el primer valor será  $(1 - 3/8) / (12 + 1 - 2 \cdot 3/8) = -1,6250$  y así sucesivamente.

A los anteriores valores le calculamos su cuantil en base a la distribución normal estándar  $F^{-1}(s_i)$  mediante la fórmula=DISTR.NORM.ESTAND.INV( $s_i$ ). Finalmente calculamos el coeficiente de correlación entre la última columna calculada y la columna de los residuos mediante =COEF.DE.CORREL(*residuo ordenado*,  $F^{-1}(s_i)$ ) y elevamos su valor al cuadrado obteniendo el valor del estadístico de Shapiro-Francia (SP) de 0,9359 y el p-valor asociado<sup>129</sup> de 0,3751 por lo que nuevamente con un 5% de significación no podemos rechazar la hipótesis de normalidad.

Residuo ordenado	$i$	$(i - a) / (n + 1 - 2 \cdot a)$	$F^{-1}(s_i)$
-1,3615	1	-1,6250	0,0510
-1,3577	2	-1,1011	0,1327
-1,2057	3	-0,7764	0,2143
-0,5808	4	-0,5184	0,2959
-0,5435	5	-0,2913	0,3776
-0,1435	6	-0,0704	0,4592
0,2942	7	0,1309	0,5408
0,6879	8	0,3462	0,6224
0,7196	9	0,5791	0,7041
1,0155	10	0,8491	0,7857
1,1312	11	1,2025	0,8673
1,3444	12	1,8627	0,9490

### Estadístico Jarque-Bera (Q)

Hemos visto al inicio del primer apartado de este manual que, bajo la hipótesis de que los rendimientos están distribuidos normalmente y para  $T$  suficientemente grande, el coeficiente de asimetría y curtosis se distribuyen de la siguiente manera  $\hat{S}_r \sim N(0; 6/T)$  y  $\hat{R}_r \sim 3 \sim N(0; 24/T)$ . De esta forma se pueden aplicar los test de simetría, curtosis y normalidad de Jarque-Bera para analizar la normalidad de los residuos estandarizados de los distintos modelos.

<sup>129</sup> Los p-valores se calculan a partir de  $p\text{-valor}=1-\Phi(z)$  siendo  $\Phi$  la función de distribución normal estándar y  $z$  viene dado por  $z=(\ln(1-SP)-a)/b$ , en donde  $a=-1,2725+1,0521*(\ln(\ln(n))-\ln(n))$  y  $b=1,0308-0,26758*(\ln(\ln(n))+2/c)$ .

Recordemos que bajo la hipótesis de normalidad el coeficiente de asimetría muestral (para muestras mayores a 50) sigue una distribución asintótica normal con media cero y varianza  $6/T$  donde  $T$  es el número de residuos. Tipificando, se define el coeficiente de asimetría estandarizado  $S$  como  $S = \frac{\hat{S}_r}{\sqrt{6/T}} \sim N(0; 1)$  bajo la hipótesis nula de normalidad. La regla de decisión es rechazar la hipótesis nula  $H_0$  de distribución simétrica si  $|S| > Z_{\alpha/2}$  o de forma análoga si el p-valor es menor que  $\alpha$ .

El test de curtosis sirve para contrastar la hipótesis de que el coeficiente de apuntamiento o curtosis muestral es cero, propiedad que verifica la distribución normal. Bajo la hipótesis de normalidad la distribución asintótica del coeficiente de curtosis sigue una distribución asintótica normal con media cero y varianza  $24/T$ . Tipificando, se define el estadístico  $k$  como  $K = \frac{\hat{K}_r - 3}{\sqrt{24/T}} \sim N(0; 1)$  bajo la hipótesis nula de normalidad. La regla de decisión es rechazar la hipótesis nula  $H_0$  de distribución con colas normales si  $|K| > Z_{\alpha/2}$  o de forma análoga si el p-valor es menor que  $\alpha$ .

El estadístico del test de Jarque-Bera (Jarque y Bera, 1980, 1987) combina los dos anteriores contrastes en uno conjunto, por lo que emplea la asimetría  $S$  y la curtosis  $C$  de los residuos:

$$Q = K^2 + S^2 = \frac{n}{6} \left( \hat{S}_r^2 + \frac{(\hat{K}_r - 3)^2}{4} \right)$$

Bajo la hipótesis de que los residuos son normales el estadístico  $Q$  tiene una distribución  $\chi^2$  con dos grados de libertad. De este modo, rechazaremos la hipótesis nula de que los residuos son normales cuando  $|Q| > \chi^2_2(\alpha)$  o de forma análoga cuando el p-valor asociado a la distribución  $\chi^2$  sea inferior a 0,05. Es decir, si  $Q$  toma valores grandes superiores al valor crítico se rechaza que la distribución es simétrica y/o que tiene curtosis nula y, en consecuencia, la hipótesis de normalidad.

**Ejemplo.** A continuación realizamos un ejemplo del test de Jarque Bera<sup>130</sup>. Dada una serie de 12 residuos estandarizados debemos calcular su asimetría y curtosis. El valor del test de asimetría lo realizamos como  $=\text{COEFICIENTE.ASIMETRIA}(\text{residuos})/\text{RAIZ}(6/12)$  y el test de curtosis mediante  $=\text{CURTOSIS}(\text{residuos})/\text{RAIZ}(24/12)$ . Los p-valores de ambos test los obtenemos mediante la función  $=2*\text{DISTR.NORM.ESTAND}()$  aplicada al valor de cada test. Finalmente el test de Jarque Bera puede ser calculado mediante  $=(12/6)*(\text{COEFICIENTE.ASIMETRIA}(\text{residuos})^2 + \text{CURTOSIS}(\text{residuos})^2/4)$  y su p-valor asociado mediante  $=\text{DISTR.CHI}(1,2894;2)$  lo que proporciona un p-valor de 0,5248 por lo que nuevamente con un 5% de significación no podemos rechazar la hipótesis de normalidad. La razón es que no podemos rechazar que la distribución de los residuos es simétrica ( $p\text{-valor del test de simetría} > 0,05$ ) ni que su curtosis es distinta a cero ( $p\text{-valor del test de simetría} < 0,2662$ ).

Residuo estandarizado	Estadística	Valor
1,1312	T	12
0,7196	Asimetría	-0,1626
-0,5435	Curtosis	-1,5726
-0,1435	Test simetría	-0,2300
0,6879	p-valor	0,8181
-1,3615	Test curtosis	-1,1120
-1,2057	p-valor	0,2662
-0,5808	Test JB	1,2894
-1,3577	p-valor	0,5248
1,0155		
1,3444		
0,2942		

Las pruebas basadas en la asimetría y la curtosis como el test de Jarque Bera se centran en los momentos de la distribución. Las pruebas que comparan las funciones de distribución acumulada de los datos observados y la distribución normal cuantifican la diferencia entre las dos funciones de diferentes formas, perteneciendo a este tipo de pruebas los test de Kolmogorov-Smirnov, Cramer-Von Mises, Anderson-

<sup>130</sup> Obviemos el problema de trabajar con una muestra pequeña ya que el ejemplo tiene un propósito meramente ilustrativo.

Darling o Lilliefors, entre otros. La prueba de Kolmogorov-Smirnov o Lilliefors, toma como prueba estadística el valor máximo de la diferencia absoluta entre las dos funciones, por lo que una debilidad de esta prueba es que pone un gran peso a las observaciones en torno a la media. El test Anderson-Darling emplea una medida distinta de diferencia entre las distribuciones teóricas y empíricas, proporcionando un mayor peso a las colas ya que destaca las diferencias entre los extremos de la distribución ajustada y los datos observados. Así, podemos concluir que los diferentes test<sup>131</sup> pueden producir en ocasiones distintos resultados porque dependen de si comparan la distribución normal y empírica en base a sus momentos (asimetría o curtosis) o en base a sus valores (énfasis en los valores centrales o colas). La conclusión obvia es que se recomienda analizar varios de ellos, al mismo tiempo que alguna de las pruebas informales, en especial los gráficos QQ o PP, para detectar aquellos valores extremos que pueden provocar la no normalidad de la serie de residuos.

---

**Ejemplo.** Analizaremos la normalidad de los residuos de distintos modelos para la serie mensual de rendimientos logarítmicos del IBEX-35 para el periodo Enero de 1992 a Diciembre de 2008. Para ello hemos decidido utilizar los gráficos QQ y el test de Jarque-Bera y Shapiro-Francia. Los modelos analizados serán el modelo normal, la mixtura de dos normales, el modelo GARCH (1, 1) y el modelo de cambio de régimen de Markov de 2 regímenes (RSLN2). Para el modelo de mixtura y de cambio de régimen se emplean los residuos generados por el submodelo con una mayor probabilidad asociada.

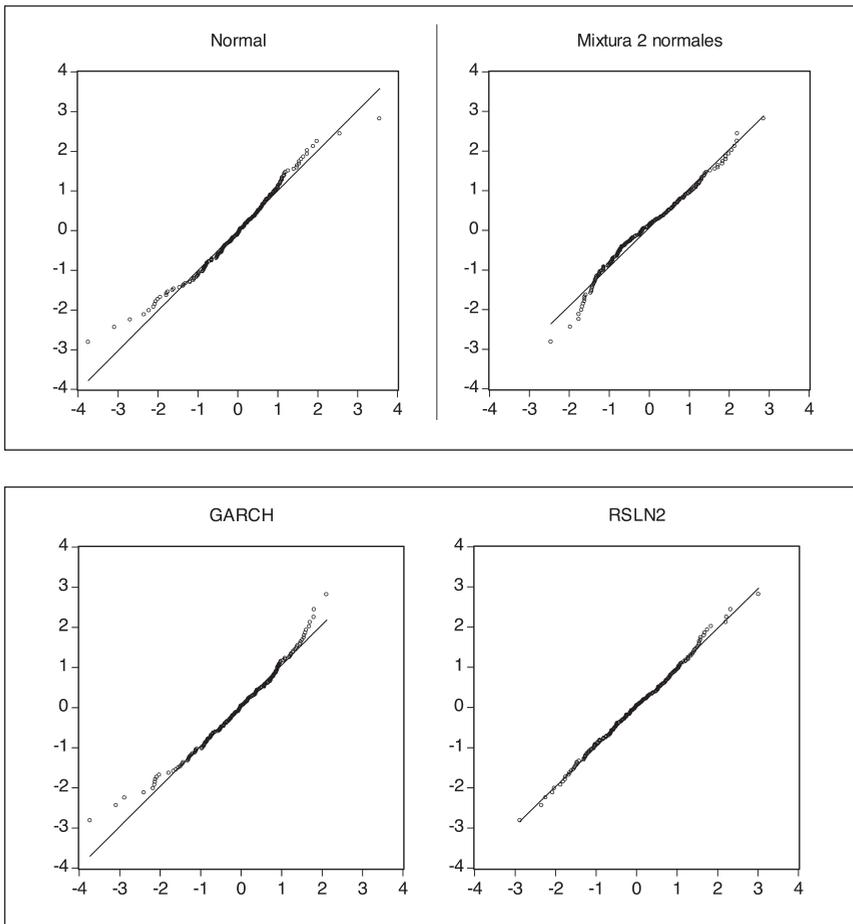
---

<sup>131</sup> En R pueden verse los anteriores test en el paquete fBasics. En la tabla inferior se muestran las fórmulas que se aplicada a cada test para evaluar la normalidad de una serie financiera (rendimientos o residuos):

jarqueberaTest	Jarque-Bera test
adTest	Anderson-Darling test
cvmTest	Cramer-von Mises test
lillieTest	Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) test
pchiTest	Chi cuadrado de Pearson test
sfTest	Shapiro-Francia test

El test Jarque Bera de dicho paquete es una mejora del aquí analizado. Además, también permite realizar dos test no tratados en este trabajo: el test de D'Agostino (dagoTest) y el test de Shapiro-Wilk (shapiroTest).

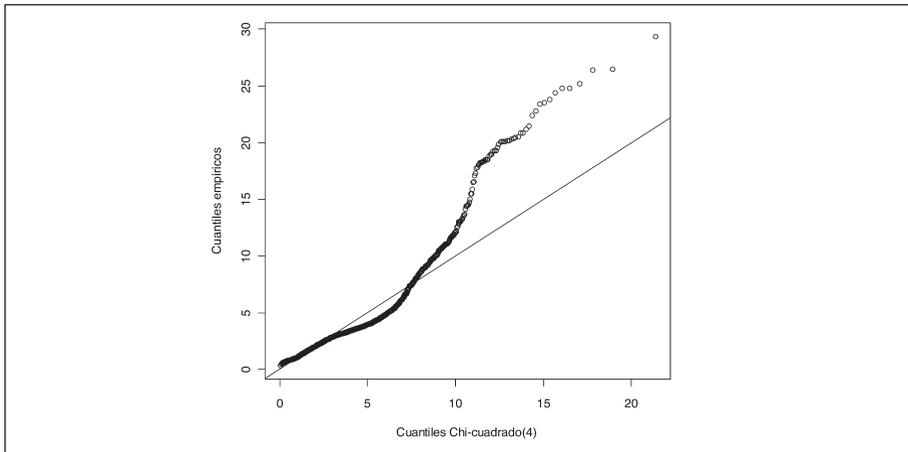
Como podemos comprobar en los gráficos QQ todos los modelos parecen realizar un buen ajuste a los datos centrales. El modelo normal, la mixtura de dos normales y el modelo GARCH presentan un pobre ajuste a las cola izquierda (pérdidas extremas), ya que las diferencias entre cuantiles empíricos de los residuos (eje horizontal) no se ajustan adecuadamente a los teóricos de la distribución normal. Sin embargo, en la cola derecha de la distribución el modelo de mixtura parece proporcionar un ajuste adecuado. El modelo RSLN2 proporciona un muy buen ajuste a ambas colas.



No obstante, sin realizar una prueba formal, no sabemos si dicho ajuste es suficiente para decidir que los residuos son normales. A través del test de Jarque Bera, se corrobora que los residuos del modelo normal y GARCH (1, 1) no superan con un 5% de confianza el test de normalidad de Jarque Bera. Por el contrario, en el modelo mixtura de 2 normales y el modelo de cambio de régimen de Markov no se puede rechazar la hipótesis de normalidad dado que el p-valor asociado al estadístico supera el 5%. Sin embargo, con los resultados del test de Shapiro-Francia se rechaza la normalidad del modelo normal, mixtura de dos normales y GARCH, siendo tan sólo superado por el modelo RSLN2.

Modelo	JB	p-valor	SP	p-valor
Normal	19,96	0,00%	0,974	0,15%
Mixtura 2 normales	5,91	5,21%	0,983	1,83%
GARCH (1,1)	11,83	0,28%	0,981	0,99%
RSLN2	0,49	78,45%	0,997	94,80%

Cuando nos encontremos con series multivariantes un primer análisis es evaluar de forma individual cada una de las series de residuos en base a la pruebas anteriores, pero dicho análisis no es suficiente. También existen extensiones al campo multivariante de algunas de las pruebas formales e informales anteriormente desarrolladas. Una herramienta informal es el gráfico QQ multivariante para evaluar el ajuste global de los modelos multivariantes a todas las series de rendimientos. Dicho gráfico se basa en el hecho de que la matriz de residuos estandarizados ( $\hat{\varepsilon}_t$ ) de un modelo multivariante N-dimensional es un vector de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como una normal estándar, de esta forma el producto  $\hat{\varepsilon}_t^t \hat{\varepsilon}_t \sim \chi_N^2$ . El gráfico representa los cuantiles empíricos de  $\hat{\varepsilon}_t^t \hat{\varepsilon}_t$  respecto a los teóricos de  $\chi_N^2$ , de forma que si el gráfico se desvía significativamente de la línea de 45° el ajuste de la distribución de rendimientos dada por el modelo multivariante será bajo. A continuación se muestra un ejemplo para una serie multivariante formada por 4 activos en donde se observa que las colas de los residuos proporcionadas por el modelo se ajustan de forma no satisfactoria a la hipótesis de normalidad multivariante.



Existen extensiones de los test univariantes al campo multivariante algunos de los cuales están incluidos en los paquetes de *software*, nos centraremos en las que en nuestro conocimiento se pueden realizar actualmente en R. El paquete *vars* de R contiene la función *normality.test* que permite realizar un test de Jarque Bera normal multivariante y el test de asimetría y curtosis que lo componen. El paquete *mvnormtest* tiene la función *mshapiro.test* que realiza el test multivariante de Shapiro-Wilk. El paquete *QRMLib* contiene la función *MardiaTest* que permite realizar el test de Mardia, quien estableció una generalización de las medidas de asimetría y curtosis para la distribución normal multivariante de forma que se pueden calcular la estadística correspondiente. Este último paquete también cuenta con la función *jointnormalTest* que proporciona un test de normalidad multivariante basado en la distancia de Mahalanobis al tiempo que realiza un gráfico QQ multivariante.

### 3.2.2.2. Autocorrelación y heterocedasticidad

Además del análisis de normalidad, la correcta especificación del modelo estimado requiere analizar si los residuos estandarizados y sus cuadrados estén incorrelacionados. Como ya hemos expuesto en el primer capítulo, para evaluar la correlación entre una serie de datos puede realizarse el análisis del correlograma y los valores de la función de autocorrelación simple y autocorrelación

parcial. Cuando hemos estimado un modelo, los residuos resultantes deberían estar ausentes de autocorrelación, ya que si los datos originales la tienen, este debería capturarla y, de este modo, eliminarla de los residuos. Un test frecuentemente empleado es la Q de Ljung y Box (1979). La hipótesis nula del test para el retardo  $k$  es que no existe autocorrelación para órdenes no superiores a  $k$ . El estadístico se define como  $Q = T(T + 2) \sum_{j=1}^k \frac{\tau_j^2}{T-j}$ , donde  $\tau_j$  es la  $j$ -ésima autocorrelación y  $T$  es el número de observaciones.  $Q$  está asintóticamente distribuido como una  $\chi^2$  con grados de libertad igual al número de autocorrelaciones. Otro test frecuentemente empleado es el test Q de Box y Pierce (1970) definido como  $Q = T \sum_{j=1}^k \tau_j^2$ .

---

**Ejemplo.** Para el cálculo del test de Box y Pierce se parte de las autocorrelaciones ( $\tau_j$ ) calculadas de una serie de datos<sup>132</sup> (columna segunda) y se elevan al cuadrado (columna tercera). En la cuarta columna las acumulamos, para posteriormente multiplicarlas por el número de observaciones de la serie de datos (quinta columna), proporcionando el valor del estadístico Q de Box y Pierce. En este ejemplo hemos supuesto la serie de datos original tiene 100 observaciones ( $T=100$ ). El p-valor lo calcularemos en Excel como =DISTR.CHI( $T \sum_{j=1}^k \tau_j^2; j$ ). A modo de ejemplo para testar la hipótesis nula de que no existe autocorrelación de orden 1 calcularíamos =DISTR.CHI(0,1436;1)=0,7047, por lo que con un 5% de significación no podemos rechazar la hipótesis de incorrelación.

---

<sup>132</sup> En este ejemplo se muestran las autocorrelaciones de orden 1 hasta el orden 12. Podríamos haberlas calculado en Excel de forma sencilla. Simplemente supongamos que tenemos 100 datos en la columna A (desde la celda A1 a A100), la primera autocorrelación se calcula mediante =COEF.DE.CORREL(A1:A99;A2:A100), la segunda como =COEF.DE.CORREL(A1:A98; A3:A100), la tercera como COEF.DE.CORREL(A1:A97;A4:A100), y así sucesivamente.

Retardo $j$	$\tau_j$	$\tau_j^2$	$\sum_{j=1}^k \tau_j^2$	$T \sum_{j=1}^k \tau_j^2$	$p$ -valor
1	0,0379	0,0014	0,0014	0,1436	0,7047
2	0,0332	0,0011	0,0025	0,2539	0,8808
3	0,0030	0,0000	0,0025	0,2548	0,9683
4	-0,0013	0,0000	0,0025	0,2549	0,9925
5	0,0204	0,0004	0,0030	0,2966	0,9977
6	0,0328	0,0011	0,0040	0,4041	0,9988
7	0,0117	0,0001	0,0042	0,4178	0,9997
8	-0,0439	0,0019	0,0061	0,6105	0,9997
9	-0,0550	0,0030	0,0091	0,9130	0,9996
10	-0,0223	0,0005	0,0096	0,9628	0,9999
11	-0,0389	0,0015	0,0111	1,1141	0,9999
12	0,0129	0,0002	0,0113	1,1307	1,0000

Para realizar el test de Ljung y Box se procede de forma similar. A partir de las autocorrelaciones calculadas, se procede a elevarlas al cuadrado pero ahora el resultado debe dividirse por  $(100-j)$  (columna tercera). En la cuarta columna las acumulamos, para posteriormente multiplicarlas por  $T(T+2)$  (10.200 en este ejemplo) proporcionando el valor del estadístico Q de Ljung y Box (quinta columna). El p-valor lo calcularemos en Excel nuevamente mediante la función =DISTR.CHI(Q;j). A modo de ejemplo, el valor del estadístico Q(1), para testar la hipótesis nula de que no existe autocorrelación de orden 1, resulta en un p-valor de 0,7047, por lo que con un 5% de significación no podemos rechazar la hipótesis de incorrelación.

Retardo $j$	$\tau_j$	$\frac{\tau_j^2}{T-j}$	$\sum_{i=1}^k \frac{\tau_j^2}{T-j}$	$\sum_{i=1}^k \frac{\tau_j^2}{T-j}$	p-valor
1	0,0379	1,45E-05	1,45E-05	0,1480	0,7005
2	0,0332	1,12E-05	2,58E-05	0,2627	0,8769
3	0,003	9,28E-08	2,58E-05	0,2637	0,9667
4	-0,0013	1,76E-08	2,59E-05	0,2638	0,9920
5	0,0204	4,38E-06	3,02E-05	0,3085	0,9975
6	0,0328	1,14E-05	4,17E-05	0,4253	0,9986
7	0,0117	1,47E-06	4,32E-05	0,4403	0,9996
8	-0,0439	2,09E-05	6,41E-05	0,6539	0,9996
9	-0,055	3,32E-05	9,74E-05	0,9930	0,9995
10	-0,0223	5,53E-06	1,03E-04	1,0494	0,9998
11	-0,0389	1,70E-05	1,20E-04	1,2228	0,9999
12	0,0129	1,89E-06	1,22E-04	1,2421	1,0000

Como se puede apreciar los p-valores para los distintos retardos son muy similares en ambos test por lo que es suficiente el empleo de uno de ellos. En general es más común y aconsejable el empleo de Q de Ljung y Box.

---

**Ejemplo.** Siguiendo con el ejemplo de los residuos de la serie mensual de rendimientos logarítmicos del IBEX-35 mostramos en el cuadro inferior los p-valores asociados al estadístico de Ljung y Box para los residuos (R) y residuos al cuadrado (R<sup>2</sup>) de los distintos modelos analizados. Observamos que sólo para el modelo GARCH los residuos están incorrelacionados y son homocedásticos para cualquier retardo. Como podemos observar, el p-valor asociado al modelo normal, mixtura de normales y RSLN2 permite asumir que los residuos no presentan autocorrelación, pero sí sus cuadrados para algunos de sus retardos (todos en el caso del modelo normal), lo que es indicativo de que el modelo no es adecuado para capturar la heterocedasticidad de la serie original. Esto supone que no recogen adecuadamente la volatilidad del mercado, lo cual puede tener consecuencias importantes en la estimación del riesgo de inversión.

Retardo	Normal		Mixtura 2		GARCH		RSLN2	
	$R$	$R^2$	$R$	$R$	$R$	$R^2$	$R$	$R^2$
1	0,35	0,00	0,48	0,27	0,22	0,58	0,79	0,06
2	0,65	0,00	0,78	0,00	0,43	0,81	0,92	0,00
3	0,83	0,00	0,90	0,00	0,60	0,93	0,80	0,01
4	0,80	0,00	0,89	0,01	0,68	0,95	0,60	0,02
5	0,89	0,00	0,95	0,01	0,80	0,97	0,73	0,04
6	0,82	0,00	0,89	0,03	0,75	0,98	0,80	0,06
7	0,87	0,00	0,92	0,04	0,81	0,98	0,88	0,09
8	0,92	0,00	0,94	0,06	0,87	0,97	0,93	0,12
9	0,90	0,00	0,73	0,05	0,73	0,98	0,87	0,16
10	0,79	0,00	0,69	0,06	0,64	0,92	0,87	0,22
15	0,93	0,00	0,76	0,00	0,89	0,97	0,93	0,35
20	0,98	0,00	0,91	0,00	0,98	0,99	0,95	0,27
25	0,99	0,02	0,96	0,00	0,98	0,99	0,93	0,43
50	0,94	0,02	0,66	0,00	0,99	0,99	0,82	0,38

Si bien la hipótesis de normalidad no es indispensable para la generación de escenarios futuros, si lo suele ser la incorrelación y homocedasticidad de los residuos. En caso de que no se cumplan que los residuos estandarizados son una variable independiente e idénticamente distribuida como una normal estándar, se suele recurrir en la simulación a la técnica del *bootstrap* o remuestreo de residuos. El *bootstrap* es un enfoque de simulación que consiste en crear muestras aleatorias de datos. Los métodos de remuestreo desarrollados para series temporales pueden subdividirse teniendo en cuenta si utilizan o no un modelo para la estructura de dependencia de la serie temporal. El denominado enfoque basado en modelo aplica el *bootstrap* a los residuos obtenidos a partir de ajustar a la serie temporal un modelo adecuado, mientras que también se podría emplear el enfoque no basado en modelo en el que se toman remuestras de bloques de observaciones consecutivas de la serie temporal (Alonso et ál. 2002).

En el caso de los modelos que proporcionan residuos no normales, los residuos estandarizados se remuestran de manera aleatoria con reemplazo para formar nuevas series de innovaciones y, a partir de estos las nuevas series de rendimientos

esperados. Si los casos estos residuos no muestran dependencia serial en sus valores ni en sus cuadrados se realiza un remuestreo tradicional. El remuestreo permite no tener que hacer hipótesis sobre la distribución de probabilidad de los residuos. El método *bootstrap* tradicional proporciona una buena solución cuando los datos son independientes e idénticamente distribuidos. Sin embargo, el *bootstrap* original destruye cualquier tipo de dependencia serial en los datos por lo que no es adecuado para los datos de series temporales con correlación serial y heterocedasticidad, sino que resulta más adecuado el denominado *block bootstrap* o remuestreo por bloques (véase Ruiz y Pascual, 2002; Härdle, et ál. 2003). En este método se dividen los datos en varios bloques, de forma que se puede preservar la dependencia original de la serie dentro de un bloque. Sin embargo, la exactitud del método es sensible a la elección de la longitud de bloque, y la longitud de bloque óptima depende del tamaño de la muestra, el proceso de generación de los datos y la estadística considerada (media, desviación estándar, percentil, etc.). Hasta la fecha, no existe una herramienta de diagnóstico apropiada para seleccionar las longitudes óptimas de los bloques (Cogneau y Zakamouline, 2012).

## **CAPÍTULO 4. ADECUACIÓN DE LOS MODELOS PREVIOS AL ANÁLISIS DE DIFERENTES RIESGOS DE MERCADO: ANÁLISIS EMPÍRICO**

En este último capítulo del trabajo analizaremos el riesgo de renta variable, en inmuebles, tipos de cambio y *spread*. Todos estos riesgos se encuadran en el modelo estándar dentro de los riesgos de mercado. El objetivo es mostrar cómo en la práctica una compañía aseguradora puede desarrollar su propio modelo para generar escenarios económicos futuros con los cuales estimar sus necesidades de capital. De esta forma, emplearemos múltiples de los conceptos abordados en los capítulos anteriores. Al mismo tiempo también haremos referenciar a cómo el modelo estándar propuesto en el cuarto y especialmente el quinto estudio de impacto cuantitativo (QIS4 y QIS5) aborda los anteriores riesgos. Debe advertirse al lector de que posteriormente a la redacción de este trabajo se ha desarrollado un nuevo estudio para las compañías aseguradoras, el LTGA o estudio de los productos con garantías a largo plazo. Además se ha realizado otro estudio de impacto cuantitativo exclusivo para los fondos de pensiones.

### **4.1. ANÁLISIS DEL RIESGO DE RENTA VARIABLE**

En este primer apartado nos centraremos en el análisis del riesgo de inversión en renta variable. Este apartado tiene por objeto analizar modelos alternativos propuestos en la literatura económica para la medición del riesgo de renta variable al que están expuestas las compañías de seguros. Los modelos calibrados permiten comparar los requerimientos de capital resultantes frente a la propuesta del QIS4 y QIS5.

#### **4.1.1. Introducción y revisión teórica**

El riesgo de inversión en renta variable mide la sensibilidad del valor de los activos, los pasivos y los instrumentos financieros ante variaciones en el nivel o la volatilidad de los precios de mercado de las acciones. El modelo de rendimientos normal, implícito en el cálculo de la fórmula estándar hasta el cuarto estudio de

impacto cuantitativo, fue elegido por razones de simplicidad y transparencia. En QIS5 es sustituido por una alternativa basada en la distribución empírica, que fija un porcentaje base al cual se le aplica un ajuste (amortiguador) que puede suponer un incremento o una reducción de hasta un 10% sobre dicho porcentaje. Este modelo está en línea con el Artículo 106 de la Directiva de Solvencia II, que establece que en el modelo estándar el submódulo del riesgo de renta variable comprenderá un ajuste simétrico<sup>133</sup> del requisito de capital, que no dará lugar a la aplicación de una carga de capital que sea inferior o superior en 10 puntos porcentuales al requisito estándar de capital. La carga de capital base establecida en QIS5 fue del 39% para las acciones globales y del 49% para la categoría otras (inferior al 45% y 55% que se había propuesto anteriormente por el CEIOPS, 2010c). El *shock* estándar final de QIS5 fue reducido en un 9% pasando al 30% y 40% respectivamente. El amortiguador se calculó con base en precios de mercado del índice MSCI World en relación con la media móvil de 3 años. A finales de 2009, los precios de la renta variable fueron un 9% inferiores a su promedio de los últimos 3 años y así el estrés se estableció en el 30% y 40%. El objetivo de emplear este amortiguador es reducir la prociclicidad o buscar un efecto contracíclico, es decir, evitar mayores cargas de capital cuando los mercados están cayendo de forma que las compañías no tengan que vender activos justo cuando estos están cayendo. A finales del año 2010, los precios de dicho índice fueron un 11% superiores a la media móvil de 3 años por lo que el estrés final resultante debiera ser del 49% siguiendo la misma metodología (39% base + 10% máximo) según los cálculos efectuados por Barrie & Hibbert (2011).

La EIOPA realizó en el año 2011 pruebas de estrés para recibir información sobre la vulnerabilidad del sector asegurador europeo frente a escenarios adversos (EIOPA, 2011b). Se establecieron tres escenarios de estrés: base (severo), adverso (deterioro más severo en las variables macroeconómicas) e inflacionista (incremento rápido de la inflación que fuerza al Banco Central Europeo a aumentar rápidamente los tipos de interés). Centrándonos en el riesgo de la renta variable se aplicó un *shock* fijo del 15% para toda la renta variable en el

---

<sup>133</sup> Es simétrico en el sentido de que puede aumentar o reducir la carga de capital por cantidades iguales. Sin embargo, si se asume que los mercados de acciones tienden a subir en el largo plazo la frecuencia del ajuste no será simétrica, es decir, el ajuste al alza se aplicará con más frecuencia que el ajuste a la baja.

escenario adverso y del 7,5% en el escenario base. Los datos se resumen en la tabla inferior.

	Base	Adverso	Inflacionista
<i>Shock</i>	-7,5%	-15%	0%

El argumento típico a favor de reducir la prociclicidad es que en caso de una crisis económica o una caída de las bolsas, los requisitos de capital basados en el riesgo podrían obligar a las aseguradoras a vender los activos en tiempos de crisis, lo que podría agravar la crisis. En relación al modelo estándar, relajar los requerimientos de capital en los mercados a la baja puede sistemáticamente disminuir el nivel de confianza al que se determina el VaR, mientras que aumentar los requerimientos de capital en los mercados al alza podría aumentar el nivel de confianza del VaR. En este sentido, Eling y Pankoke (2012) muestran que el modelo propuesto en QIS5 provoca que los factores de estrés aplicables se desvíen sustancialmente de la propuesta del VaR al 99,5% de confianza que rige Solvencia II. Por otra parte, la hipótesis de normalidad empleada en QIS4 puede subestimar la cola de la distribución de pérdidas (resultados extremos) y no capturar la variabilidad que puede presentar la volatilidad, por lo que el modelo normal es menos apropiado para representar periodos temporales más largos (Hardy, 2001). Los rendimientos pueden tener otras propiedades tales como la correlación serial en la media, volatilidad no constante a lo largo del tiempo y clusters de volatilidad. Los modelos autorregresivos (AR y ARMA) son adecuados para capturar la dependencia serial que existe entre los rendimientos de los activos. Si la varianza cambia a lo largo del tiempo, los modelos ARCH y GARCH pueden ser apropiados (Engle, 1982 y Bollerslev, 1986). En posteriores propuestas, estos modelos han sido adaptados para incorporar el efecto apalancamiento, donde destaca la propuesta del modelo GARCH exponencial de Nelson (1991). No obstante, los modelos mencionados no son capaces de capturar cambios imprevistos en el comportamiento del mercado, habituales en situaciones de crisis o de cambios en las políticas estatales. La transformación de los modelos previos, introduciendo cambios de régimen puede ser más adecuada para medir el riesgo de renta variable. En este sentido, algunos trabajos han mostrado su superioridad para rendimientos a corto plazo (Li y Lin, 2004, Sajjad et ál. 2008). No obstante, en Solvencia II el riesgo de mercado es calculado al plazo de un año. Por este motivo, algunos autores han evaluado la

adecuación de estos modelos utilizando otros periodos de análisis (Hardy, 2001; Won y Chang, 2005; Hardy et ál., 2006).

En este apartado analizaremos la adecuación de los modelos de Markov para medir el riesgo de renta variable, de modo que pretendemos ver si los cambios extremos experimentados por el mercado en la crisis financiera actual son capturados de forma adecuada. Para ello, hemos ajustado varios modelos con y sin cambio de régimen a las series de cuatro índices europeos. A través de la simulación de Monte Carlo hemos estimado los requerimientos de capital y los hemos comparado con los que resultarían de aplicar el modelo estándar bajo las especificaciones del último estudio de impacto cuantitativo (QIS5). Finalmente, hemos analizado si la revisión del último estudio de impacto cuantitativo fue adecuada para capturar el riesgo de renta variable, respecto a la propuesta anterior.

### ***Revisión teórica de modelos***

La investigación sobre la distribución de los rendimientos de la renta variable se inicia con el trabajo de Bachelier (1900), quien propone un proceso de ruido blanco normal. La hipótesis de normalidad de los rendimientos ha sido la base de modelos muy importantes desarrollados en el ámbito de la teoría financiera, como son los modelos de optimización de carteras de media-varianza de Markowitz (Markowitz; 1952, 1959), el modelo de Valoración de Activos Financieros CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) desarrollado por Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966) o el modelo de valoración de opciones de Black y Scholes (1973). Sin embargo, son numerosos los estudios que advierten que la distribución empírica de los rendimientos suele tener una mayor curtosis que la proporcionada por la distribución normal. Con la finalidad de superar las limitaciones del modelo de rendimientos normal, surgen nuevas propuestas que optan por el uso de distribuciones alternativas. Entre otros destacan los trabajos de Mandelbrot (1963) y Fama (1963, 1965), quienes consideraron la familia de distribuciones estables y la distribución *t* de Student, propuesta por Praetz (1972) y Blattberg y Gonedes (1974), que presenta unas colas mayores que las de la distribución normal. Posteriormente, Gray y French (1990) sugirieron la distribución de error generalizada (*generalized error distribution* o GED) y Eberlein y Keller (1995) la distribución hiperbólica (*hyperbolic distribution*). También se ha recurrido a la mixtura de

distribuciones, donde el modelo más empleado es la mixtura discreta de dos distribuciones normales (Ball y Torous, 1983)<sup>134</sup>.

En el caso particular de la actividad aseguradora, recientemente han surgido distintos trabajos en el mercado norteamericano, que se han interesado por la modelización del comportamiento de la renta variable con la finalidad de evaluar las necesidades de capital. No obstante, dadas las características del negocio, y a diferencia de la mayor parte de los trabajos previos, el interés se ha centrado en el comportamiento del valor de la cartera a largo plazo. Este aspecto es muy importante ya que los modelos que mejor proyectan el comportamiento del activo a corto plazo, no tienen por qué ser los más adecuados para analizar el riesgo a largo plazo. Los trabajos realizados hasta el momento para analizar el riesgo derivado de la inversión en renta variable en compañías de seguros pueden englobarse dentro de dos grupos (véase la tabla siguiente).

Por un lado están aquellos que se integran dentro de otros más amplios que tratan de proyectar estocásticamente el comportamiento conjunto de la cartera de activos y pasivos del asegurador a medio y largo plazo en modelos ALM o DFA. Todos ellos se caracterizan por proponer un determinado modelo pero sin comprobar si la opción elegida es la más adecuada. Así, Schmeiser (2004) opta por el modelo de rendimientos normal, Kaufmann et ál. (2001) y el modelo DynaMo 3<sup>135</sup> proponen un "modelo lineal", mientras que Hibbert et ál. (2001) y Ahlgrim et ál. (2004b) incorporan el modelo de cambio de régimen de Hardy (2001), justificando el mejor ajuste a las "colas gruesas" que muestran las rentabilidades históricas. Frente a estos, y a raíz del trabajo de Hardy (2001), surgen diversos estudios, que pretenden comparar diferentes alternativas para la modelización del riesgo a través de criterios estadísticos. En esta línea, Hardy (2001) propone un modelo de cambio de régimen lognormal (RSLN) y compara el ajuste logrado con otros modelos econométricos para los

---

<sup>134</sup> Otra familia popular de distribuciones son las distribuciones provenientes de la teoría de valor extremo: la distribución generalizada de Pareto y la distribución generalizada de valor extremo. La principal diferencia de las distribuciones de valor extremo respecto a las anteriores, es que las primeras sólo emplean para su ajuste un conjunto limitado de datos que son los máximos de bloque o los valores que superen un determinado umbral.

<sup>135</sup> DynaMo es un modelo de análisis financiero dinámico (DFA) descrito en D'Arcy et ál. (1997, 1998). Para una aplicación del modelo Dynamo 3 puede consultarse D'Arcy y Gorratt (2004). En la actualidad está siendo actualizado por la sociedad de actuarios americana CAS (*Casualty Actuarial Society*).

índices Standard and Poor's 500 (S&P500) y Toronto Stock Exchange 300 (TS300). En sus resultados destaca que el modelo RSLN presenta un mejor ajuste que el resto de modelos, tiene forma explícita para el cálculo del VaR y TVaR y con dos regímenes es suficiente para ajustar los datos mensuales. Una versión del modelo de Hardy, que incorpora un término de reversión de los rendimientos en caso de caídas del índice, es propuesta por Panneton (2003), denominada *Regimen Switching Draw-Down* (RSSD). Bayliffe y Pauling (2003) realizan una comparación de los modelos lognormal, lognormal autorregresivo, RSLN y GARCH, concluyendo que los modelos que presentan reversión a la media y colas gruesas son los que proporcionan mejor ajuste para datos a largo plazo. Wong y Chan (2005) emplean dos nuevos modelos, la mixtura autorregresiva (MAR) y la mixtura de ARCH (MARCH)<sup>136</sup>, cuyo ajuste comparan con el modelo lognormal, la mixtura de dos normales y el RSLN, para los datos ajustados a los índices TSE 300 y S&P 500. De su trabajo se desprende que los nuevos modelos se ajustan peor que la alternativa de cambio de régimen, si bien pueden ser útiles para la modelización de las colas. Un trabajo de características similares es el realizado por Hardy et ál. (2006), quienes comparan un amplio número de modelos estimados por máxima verosimilitud para la rentabilidad del índice S&P 500. La comparación de los modelos permite concluir que los modelos GARCH presentan un buen ajuste global pero un mal ajuste en las colas de la distribución, mientras que los de cambio de régimen tienen el mejor ajuste en la cola izquierda de la distribución y por tanto una mejor adecuación a la evaluación del riesgo. Finalmente, Boudreault y Panneton (2009) realizan una comparación de distintos modelos GARCH multivariantes y modelos de cambio de régimen multivariantes para los rendimientos mensuales del mercado canadiense, americano, británico y japonés. En general se observa que los modelos GARCH tienen un mejor ajuste global que los de cambio de régimen, pero estos últimos representan mucho mejor las colas gruesas de la distribución. Los resultados alcanzados están en línea con los que se han obtenido en la literatura para los modelos univariantes.

---

<sup>136</sup> Wong y Li (2000) introducen los modelos autorregresivos mixtos (*mixture autoregressive models* o MAR) que son la mixtura de  $K$  componentes autorregresivos, y Wong y Li (2001) los modelos de heterocedasticidad condicional autorregresiva mixtos (*mixture autoregressive conditional heteroscedastic models* o MARCH), mixtura de  $K$  componentes autorregresivos con heterocedaticidad condicional autorregresiva.

Autores	Características
Kaufmann et ál. (2001), Dynamo 3	El modelo propuesto es denominado modelo lineal y se incluye dentro de una propuesta de análisis financiero dinámico. Se trata de una versión del CAPM en donde se correlaciona negativamente el cambio en los tipos de interés a la rentabilidad de las acciones. En este trabajo no se realiza ningún ajuste a los datos de mercado ni se compara con otras alternativas.
Hardy (2001)	Hardy propone un modelo de cambio de régimen lognormal y compara el ajuste logrado con otros modelos econométricos para los índices S&P500 y TS300. Tras dicho análisis, concluye que el RSLN presenta un mejor ajuste que el resto de modelos y que con dos regímenes es suficiente para ajustar los datos mensuales. Otra ventaja que tiene este modelo es que presenta fórmula explícita para el cálculo de medidas del riesgo.
Hibbert et ál. (2001)	Aplican un modelo de cambio de régimen, a semejanza de la propuesta de Hardy, en el que en cada régimen el rendimiento sobre el activo libre de riesgo se distribuye normalmente. Dicho modelo se integra dentro de un modelo generación de escenarios para compañías aseguradoras.
Panneton (2003)	Propone un modelo de cambio de régimen que permite la reversión en los rendimientos de las acciones pero preserva las colas gruesas observadas en los rendimientos mensuales de los activos. Se trata de una variante del modelo de Hardy denominada <i>Regimen Switching Draw-Down</i> (RSSD) que consiste en añadir un término que compensa la caída de los rendimientos. Tras calibrar el modelo al índice TSE 300, Panneton (2006) indica que dicho término resulta significativo.
Bayliffe y Pauling (2003)	Comparan los modelos lognormal, lognormal autorregresivo, RSLN y GARCH. Los autores concluyen que los modelos de corto plazo no son necesariamente buenos modelos a largo plazo. Aquellos modelos que presentan reversión a la media y colas gruesas son los que proporcionan mejor ajuste para datos a largo plazo. Para datos mensuales el modelo RSLN es el que presenta un mejor ajuste. Además, es el único que supera el test de normalidad de los residuos.
Schmeiser (2004)	En este trabajo, Schmeiser propone un modelo de análisis financiero dinámico (DFA) que opta por el modelo lognormal para simular los riesgos financieros y que utiliza para calcular la probabilidad de ruina de una compañía de seguros generales alemana que opta por diferentes carteras de inversión.

Autores	Características
Ahlgrim et ál. (2004a, 2004b)	Ahlgrim et ál. (2004b) desarrollan, a petición de las sociedades de actuarios americanas <i>Casualty Actuarial Society</i> (CAS) y <i>Society of Actuaries</i> (SOA), un modelo para generación de escenarios económicos para emplearse en DFA. En dicho modelo emplean la propuesta de Hardy (2001) para la renta variable. Ahlgrim et ál. (2004a) comparan el "modelo lineal" con un modelo de cambio de régimen de Hardy (2001). En su estudio comprueban que la volatilidad de los rendimientos de las acciones es mayor que en la aproximación lineal, lo cual puede afectar de forma importante al asegurador que invierta un elevado porcentaje de su cartera en acciones.
Wong y Chan (2005)	Estos autores comparan los modelos de mixtura autorregresivos (MAR) y ARCH (MARCh) con el modelo lognormal, la mixtura de dos normales, el modelo de cambio de régimen lognormal con dos regímenes (RSLN), ajustados a los índices TSE 300 y S&P 500. Utilizando diferentes criterios de comparación llegan a la conclusión de que el RSLN presenta un buen nivel de ajuste y es simple y parsimonioso. Los modelos de mixtura, a pesar de ser más complejos, presentan un peor ajuste y requieren parámetros adicionales, pero pueden ser adecuados para modelizar las colas de la distribución.
AAA (2005)	Proponen un modelo de volatilidad estocástica lognormal ( <i>Stochastic Log-Volatility o SLV</i> ).
Hardy et ál. (2006)	Estos autores comparan los modelos lognormal, GARCH(1,1), diversas modalidades de modelos de cambio de régimen y un modelo de volatilidad estocástica lognormal a semejanza de la propuesta de AAA (2005) ajustados al índice S&P 500. Concluyen, mediante el análisis de los residuos y el empleo de <i>bootstrap</i> , que los modelos de cambio de régimen presentan un mejor ajuste en la cola izquierda de la distribución que el resto de los modelos.
CEIOPS (2008a, 2008b)	La determinación del capital en el informe de impacto cuantitativo de Solvencia II (QIS4) se basa en el modelo lognormal de precios, con media y volatilidad histórica.
Boudreault y Panneton (2009)	En este trabajo se comparan los modelos GARCH multivariantes con los de cambio de régimen para los datos relativos a diferentes mercados (Canadá, EEUU, Reino Unido y Japón). En general se observa que los modelos GARCH presentan un mejor ajuste global que los de cambio de régimen, pero estos últimos representan mucho mejor las colas gruesas de la distribución.

### Modelos considerados para el análisis del riesgo de renta variable

La tabla inferior muestra las especificaciones de los modelos que hemos evaluado susceptibles de ser utilizados como modelos internos de riesgo de renta variable. En particular, hemos considerado el modelo normal por constituir la base de Solvencia II, los modelos GARCH y EGARCH, así como sus variantes incorporando cambio de régimen de Markov. Por tanto, intentamos evaluar si la incorporación del cambio de régimen es adecuada para modelizar el riesgo de renta variable a largo plazo.

Modelo	Especificación <sup>137</sup>
Normal	$y_t = \mu + \sigma Z_t$
GARCH (1,1)	$y_t = \mu + \varepsilon_t; \varepsilon_t = \sigma_t Z_t; \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$
EGARCH (1,1)	$y_t = \mu + \varepsilon_t; \varepsilon_t = \sigma_t Z_t; \log(\sigma_t^2) = \omega + \alpha_1 \left[ \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right] + \gamma_1 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \beta_1 \log(\sigma_{t-1}^2)$
RSLN ( $k$ regímenes)	$y_t = \mu_i + \sigma_i Z_t; (p_t = 1, \dots, k)$
RS-GARCH (1,1)	$y_t = \mu_i + \varepsilon_t; \varepsilon_t = \sigma_{i,t} Z_t; \sigma_{i,t}^2 = \omega_i + \alpha_i (\varepsilon_{t-1})^2 + \beta_i \sigma_{i,t-1}^2; (i = 1,2)$
RS-EGARCH (1,1)	$y_t = \mu_i + \varepsilon_t; \varepsilon_t = \sigma_{i,t} Z_t; \log(\sigma_{i,t}^2) = \omega_i + \alpha_i \left[ \left  \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{i,t-1}} \right  - \sqrt{2/\pi} \right] + \beta_i \log(\sigma_{i,t-1}^2) + \delta_i \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{i,t-1}}; (i = 1,2)$

A continuación describimos brevemente los modelos que se han evaluado, exponiendo en este apartado exclusivamente aquellos que incorporan cambio de régimen.

#### Modelo de cambio de régimen lognormal (RSLN)

Los modelos de cambio de régimen fueron introducidos por Hamilton (1989), quien describió un proceso de cambio de régimen autorregresivo. En Hamilton y Susmel (1994) se analizan varios modelos, variando el número de regímenes y la forma del modelo dentro de cada régimen. El modelo lognormal de cambio de régimen fue propuesto en la industria aseguradora por Hardy (2001) con la finalidad de modelizar los rendimientos a largo plazo, con un desarrollo posterior en Hardy (2003). Este modelo utiliza una cadena de Markov  $i = \{1, 2, \dots\}$  que representa la evolución del estado de la economía, que puede estar en dos situaciones posibles, conocidas

<sup>137</sup>  $Z_t \sim N(0; 1)$ ;  $Z_t$  es una distribución normal estándar.

como regímenes. En cada régimen, los rendimientos siguen una distribución normal, donde los parámetros son diferentes en cada régimen:

$$y_t = \mu_i + \sigma_i Z_t \quad (i = 1, 2)$$

Donde:  $Z_t \sim N(0, 1)$ ; e  $i$  representa cada uno de los regímenes.

### **Modelo de cambio de régimen GARCH**

Este modelo fue propuesto por Gray (1996) y posteriormente fue modificado por Klaassen (2002). Marcucci (2005) compara un conjunto de modelos GARCH, EGARCH y GJR-GARCH considerando el cambio de régimen y diferentes distribuciones para los errores con la finalidad de evaluar su capacidad para predecir la volatilidad del índice S&P100. El modelo que proponemos en nuestro análisis es un RS-GARCH (1, 1) con dos regímenes y responde a la siguiente especificación:

$$y_t = \mu_{i,t} + \varepsilon_t \text{ donde } \varepsilon_t = \sigma_{i,t} Z_t$$

A diferencia del modelo RSLN, que asume una volatilidad constante, en los modelos de cambio de régimen la volatilidad varía de acuerdo a un proceso ARMA, por lo que la ecuación de la varianza para cada régimen viene dada por:

$$\sigma_{i,t}^2 = \omega_i + \alpha_i (\varepsilon_{t-1})^2 + \beta_i \sigma_{i,t-1}^2 \quad (i = 1, 2)$$

Gray (1996) propone una medida para la volatilidad  $\sigma_t^2$  que no sea dependiente:

$$\sigma_t^2 = p_{1,t}(\mu_1^2 + \sigma_{1,t}^2) + (1 - p_{1,t})(\mu_2^2 + \sigma_{2,t}^2) - (p_{1,t}\mu_1 + (1 - p_{1,t})\mu_2)^2$$

Bajo esta propuesta, la varianza condicional depende sólo del régimen y no de toda la historia del proceso.

### **Modelo de cambio de régimen E-GARCH**

En la literatura financiera se ha destacado el comportamiento asimétrico de la volatilidad de las acciones. Por este motivo, Nelson (1991) propone el modelo E-Garch

para capturar esta asimetría. Los rendimientos de las acciones tienden a mostrar más volatilidad en el caso de *shocks* negativos que después *shocks* positivos de la misma magnitud. La ecuación de la varianza para cada régimen viene dada por:

$$\log(\sigma_{i,t}^2) = \omega_i + \alpha_i \left[ \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{p,t-1}^2}} - \sqrt{2/\pi} \right] + \beta_i \log(\sigma_{t-1}^2) + \delta_i \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}}, (i = 1,2)$$

La forma logarítmica de la varianza condicional  $\sigma_t^2$  garantiza valores positivos, evitando las restricciones de no negatividad características de la estimación de modelos Garch.

#### 4.1.2. Análisis empírico, *backtesting* y simulación

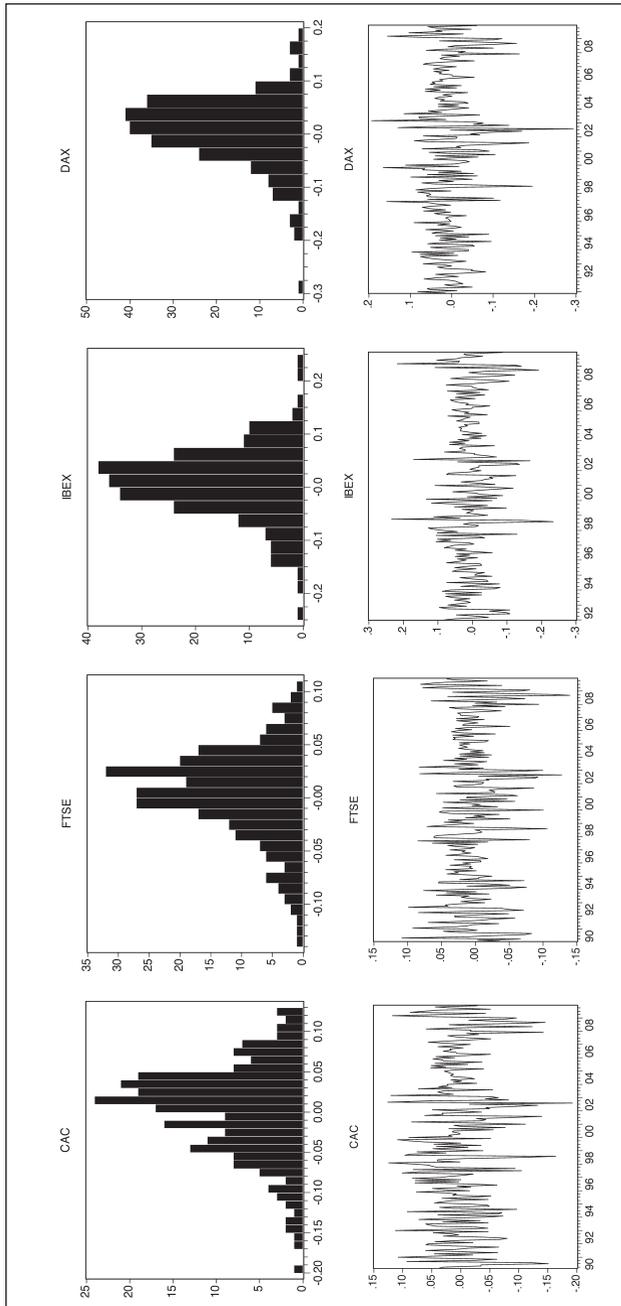
Los datos analizados para calibrar el riesgo de renta variable están compuestos por observaciones mensuales de los rendimientos logarítmicos de cuatro índices de las principales bolsas Europeas (FTSE 100, CAC40, DAX y IBEX-35)<sup>138</sup>. Como las compañías de seguros deben proteger los intereses de sus asegurados en el medio y largo plazo, es habitual utilizar datos mensuales [ver Hardy (2001), Panneton (2003), Wong y Chan (2005), Hardy et ál. (2006) o Boudreault y Panneton (2009)], e incluso el CEIOPS ha calibrado el modelo estándar europeo de QIS4 utilizando datos cuatrimestrales. Los estadísticos descriptivos y la información relativa a la normalidad medida con el test de Jarque Bera se muestran en la tabla inferior.

<sup>138</sup> La serie de rendimientos tiene distinto número de observaciones para cada índice ya que ha sido calculada a través de las observaciones hasta Diciembre de 2009 pero con distinto inicio: Enero de 1990 para el FTSE-100, Marzo de 1990 para el CAC-40, Diciembre de 1990 para el DAX y Enero de 1992 para el IBEX-35.

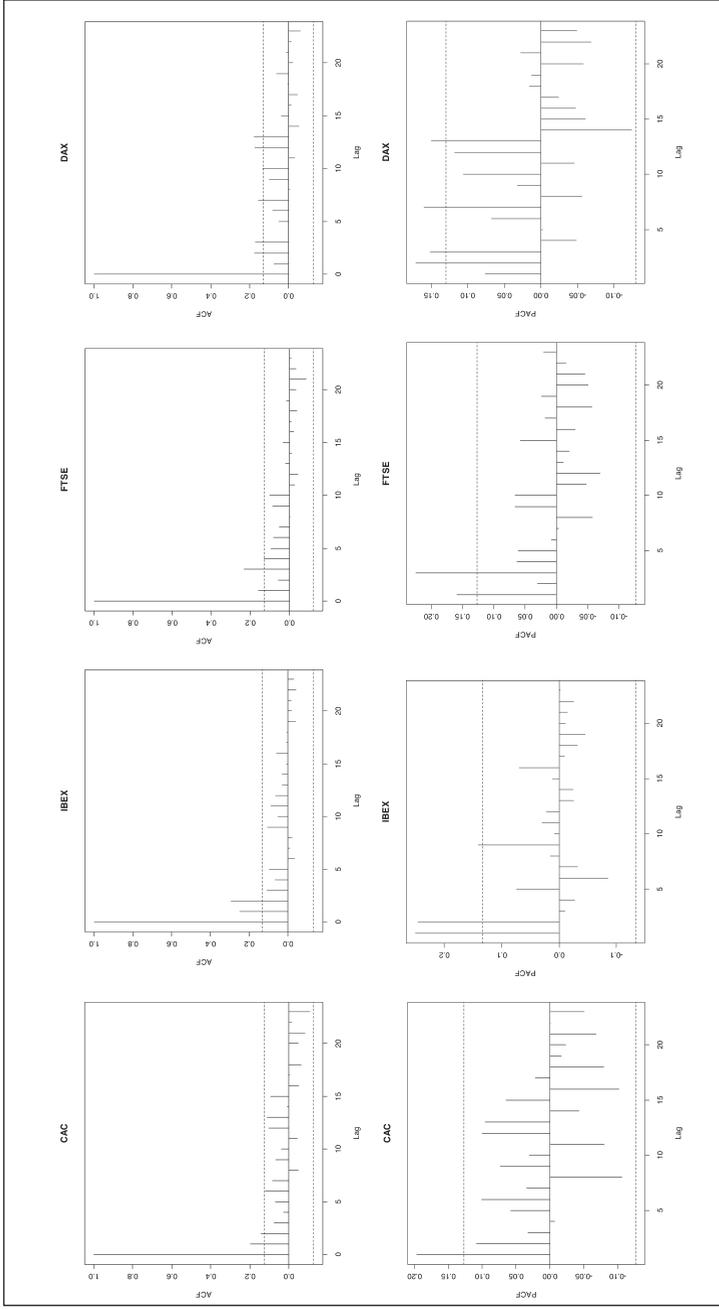
	CAC	FTSE	IBEX	DAX
Media	0,0027	0,0033	0,0068	0,0061
Mediana	0,0123	0,0075	0,0100	0,0137
Máximo	0,1259	0,1088	0,2342	0,1937
Mínimo	-0,1923	-0,1395	-0,2340	-0,2933
Desviación estándar	0,0573	0,0428	0,0666	0,0638
Asimetría	-0,5326	-0,5756	-0,2675	-0,8101
Curtosis	3,4354	3,6043	4,2821	5,4654
JB estadístico	13,1325	16,9036	17,3706	83,0442
Probabilidad	0,0014	0,0002	0,0002	0,0000
Observaciones	238	240	216	229

Como puede verse en los diferentes índices, el rendimiento medio no es muy relevante y la asimetría es significativa y negativa, implicando un posible efecto apalancamiento. Además, la curtosis es mayor que la de una distribución normal, indicando que los rendimientos tienen colas pesadas. Esto es consistente con los valores mostrados en el test de Jarque-Bera, que rechaza la hipótesis de normalidad en el comportamiento de los rendimientos de los diferentes índices. Como se muestra en los gráficos inferiores, los rendimientos presentan agrupamientos de volatilidad. Por este motivo es importante determinar qué modelo se ajusta mejor al comportamiento de la varianza a lo largo del tiempo. La función de autocorrelación simple (ACF) y la de autocorrelación parcial (PACF) de los rendimientos al cuadrado muestran una gran estructura de dependencia que implica la existencia de dependencia en la varianza de los rendimientos mensuales. Esto significa que los modelos que no consideran una volatilidad constante en el tiempo pueden ser más apropiados para analizar el riesgo de renta variable.

Histograma de los rendimientos logarítmicos mensuales y gráficos de las series temporales



Función de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) de los rendimientos al cuadrado



A continuación presentamos los resultados de estimar los modelos a partir de las series analizadas y realizamos una comparación utilizando métodos de *backtesting* y diferentes criterios estadísticos. En la tabla siguiente mostramos los parámetros resultantes de la estimación máximo verosímil. El modelo de dos regímenes (RSLN2) proporciona un régimen más estable con rendimientos esperados positivos y uno más volátil con esperanza negativa. La elevada significatividad de los parámetros de la ecuación para la varianza de los modelos GARCH es consistente con la persistencia de volatilidad de los datos empíricos. Como puede verse, la estimación de los modelos de cambio de régimen implica un gran número de parámetros y, por tanto, una mayor complejidad de estimación. De hecho, el modelo E-GARCH de cambio de régimen no ha podido ser estimado debido a que el algoritmo presentó problemas de convergencia y no fue posible encontrar una solución robusta.

		CAC 40	FTSE 100	IBEX-35	DAX
NORMAL	$\mu$	0,0026	0,0033	0,0068	0,0060
	$\sigma$	0,0572	0,0425	0,0664	0,0636
GARCH (1,1)	$\mu$	0,0062	0,0067	0,0106	0,0096
	$\omega$	0,0004	0,0001	0,0001	0,0003
	$\alpha_1$	0,1819	0,1989	0,1735	0,1408
	$\beta_1$	0,7162	0,7624	0,8103	0,8011
EGARCH (1,1)	$\mu$	0,0059	0,0068	0,0106	0,0086
	$\omega$	-1,4569	-1,0561	-0,7445	-0,7298
	$\gamma_1$	-0,1951	-0,1063	-0,0818	-0,0512
	$\alpha_1$	0,3117	0,3213	0,2891	0,2554
	$\beta_1$	0,7949	0,8762	0,9077	0,9047
RSLN2	P(1 2) P(2 1)	0,9316/0,1011	0,9560/0,0220	0,9572/0,0507	0,9777/0,0170
		Régimen 1	Régimen 1	Régimen 1	Régimen 1
	$\mu_{i1} / \sigma_{i1}$	0,0152/0,0394	0,0111/0,0204	-0,0042/0,0831	-0,00389/0,0839
		Régimen 2	Régimen 2	Régimen 2	Régimen 2
	$\mu_{i2} / \sigma_{i2}$	-0,0156/0,07221	-0,00126/0,0506	0,01898/0,0375	0,0140/0,0388

		CAC 40	FTSE 100	IBEX-35	DAX
RSLN3	P(1 1),P(2 1)	0,9304/0,0614	0,3649/0,0217	0,8281/0,1657	0,9699/0,0002
	P(2 2),P(3 2)	0,69513/0,30264	0,6303/0,96587	0,9449/0,0546	0,5638/0,4330
		Régimen 1	Régimen 1	Régimen 1	Régimen 1
	$\mu_{i1} / \sigma_{i1}$	0,01004/0,03803	0,0588/0,0035	-0,01261/0,1170	-0,00497/0,0850
		Régimen 2	Régimen 2	Régimen 2	Régimen 2
	$\mu_{i2} / \sigma_{i2}$	-0,0648/0,0205	-0,0033/0,0504	0,0199/0,0378	-0,0033/0,0365
		Régimen 3	Régimen 3	Régimen 3	Régimen 3
	$\mu_{i3} / \sigma_{i3}$	0,0671/0,0081	0,0110/0,0201	-0,0028/0,0661	0,0410/0,0242
RS-GARCH	P(1 2)/P(2 1)	0,2609/0,8890	0,1506/0,0632	0,95677/0,0439	0,9126/0,2439
		Régimen 1	Régimen 1	Régimen 1	Régimen 1
	$\mu_1$	-0,0061	-0,0876	-0,0073	0,0184
	$\omega_1$	0,0498	0,0000	0,0698	0,0306
	$\alpha_{1,1}$	0,0343	0,0757	0,2112	0,0516
	$\beta_{1,1}$	0,8141	0,0430	0,274	0,8353
		Régimen 2	Régimen 2	Régimen 2	Régimen 2
	$\mu_2$	0,0181	0,0102	0,0185	-0,0228
	$\omega_2$	0,0000	0,0213	0,0342	0,0000
	$\alpha_{1,2}$	0,5745	0,1539	0,1401	0,0478
	$\beta_{1,2}$	0,3864	0,6889	0,5065	0,9753

La selección de modelos la haremos utilizando en primer lugar el criterio de simplicidad, es decir, siendo preferible un modelo más sencillo cuando proporciona un ajuste similar a los datos. En particular, esta sección tiene en cuenta el criterio AIC propuesto por Akaike (1973), el SBC propuesto por Schwartz (1978) y el HQC (Hannan Quinn). Para cada modelo, la tabla inferior muestra los valores del logaritmo de la función de verosimilitud y los criterios AIC, SBC y HQC. En general puede observarse que los modelos de cambio de régimen superan a los otros modelos. Frente a estos, el modelo normal muestra el peor ajuste a la serie empírica de todos los índices. No obstante, la mera transformación del modelo a través de la incorporación de dos regímenes da lugar a la alternativa de mejor ajuste, superando a los modelos Garch y E-Garch en todos los índices considerados. En el caso de los modelos RSLN3 y RS-GARCH, el ajuste global es muy bueno pero su complejidad los penaliza frente a la versión más simple.

	CAC 40	FTSE 100	IBEX-35	DAX
	NORMAL			
Log likelihood	1,4421	1,7376	1,2923	1,3351
SBC	1,4191	1,7148	1,2674	1,3114
HQC	1,4278	1,7234	1,2767	1,3203
AIC	1,4337	1,7293	1,2831	1,3264
	GARCH(1,1)			
Log likelihood	1,4808	1,6962	1,3651	1,3968
SBC	1,4348	1,6507	1,3154	1,3493
HQC	1,4523	1,6680	1,3651	1,3968
AIC	1,4640	1,6796	1,3466	1,3793
	E-GARCH(1,1)			
Log likelihood	1,5017	1,7931	1,3666	1,3422
SBC	1,4442	1,7362	1,3044	1,2829
HQC	1,4659	1,7578	1,3666	1,3422
AIC	1,4806	1,7723	1,3435	1,3204
	RSLN 2			
Log likelihood	1,4943	1,8335	1,3807	1,4378
SBC	1,4254	1,7652	1,3060	1,3666
HQC	1,4515	1,7911	1,3340	1,3934
AIC	1,4691	1,8086	1,3529	1,4116
	RSLN3			
Log likelihood	1,5230	1,8438	1,3944	1,4497
SBC	1,3851	1,7072	1,2451	1,3073
HQC	1,4373	1,7590	1,3010	1,3610
AIC	1,4726	1,7940	1,3389	1,3973
	RS-GARCH			
Log likelihood	1,5030	1,8288	1,3962	1,4489
SBC	1,3876	1,7147	1,2713	1,3298
HQC	1,4313	1,7579	1,3180	1,3747
AIC	1,4608	1,7871	1,3496	1,4050

El ajuste global no es el único criterio a considerar al elegir un modelo para el análisis del riesgo de renta variable. De hecho, es necesario analizar el ajuste que presentan los datos a los valores extremos. En este sentido, podría ser que modelos con mayores valores proporcionasen un buen ajuste global pero un mal ajuste a datos extremos, que sin embargo son los que revisten un mayor interés desde la

perspectiva del riesgo. Por tanto, es preciso evaluar en qué medida los residuos superan el test de normalidad, especialmente en la cola izquierda de la distribución. En el caso de que los residuos no sean normales, el ajuste del modelo no es adecuado. Los residuos para los modelos de cambio de régimen han sido calculados utilizando los residuos ponderados. El test de normalidad ha sido realizado utilizando el test de Jarque-Bera. La tabla inferior muestra como los modelos que no tienen en consideración la existencia de regímenes, no superan el test de normalidad al 99% de confianza. No obstante, todos los modelos de cambio de régimen pasan el test de Jarque-Bera. Estos resultados están en línea con los obtenidos por Hardy et ál. (2006) para los índices TSE y S&P 500.

Modelo	CAC 40	FTSE 100	IBEX-35	DAX
Normal	13,132 (0,001)	17,156 (0,000)	17,370 (0,000)	83,044 (0,000)
Garch	14,432 (0,000)	14,097 (0,000)	12,235 (0,002)	40,373 (0,000)
Egarch	6,371 (0,041)	11,326 (0,003)	24,888(0,000)	38,791 (0,000)
RSLN2	4,0341 (0,133)	3,9079 (0,142)	1,5482 (0,461)	1,4582 (0,482)
RSLN3	3,861 (0,145)	4,0396 (0,133)	6,0575 (0,048)	4,0139 (0,134)
RS-Garch	2,7844 (0,249)	3,5996 (0,165)	0,7938 (0,672)	2,8378 (0,242)

Además de la normalidad, la correcta especificación de los modelos requiere analizar si los residuos y sus cuadrados están correlacionados. Un test utilizado con frecuencia es el propuesto por Ljung y Box (1979). En la tabla inferior mostramos los p-valores asociados al estadístico Q de los residuos (RES) y los residuos al cuadrado (RES2). Nuevamente, con excepción del modelo normal, los residuos y sus cuadrados no presentan autocorrelación. En el caso del IBEX-35, en los residuos al cuadrado en el modelo RSLN2 también se detecta presencia de autocorrelación.

Q(j)	NORMAL		GARCH		EGARCH		RSLN2		RSLN3		RSGARCH	
	RES	RES2	RES	RES2	RES	RES2	RES	RES2	RES	RES2	RES	RES2
FTSE-100												
1	0,284	0,013	0,841	0,528	0,962	0,521	0,807	0,668	0,417	0,915	0,396	0,513
3	0,439	0,000	0,836	0,570	0,814	0,604	0,354	0,239	0,214	0,252	0,469	0,916
6	0,241	0,000	0,497	0,881	0,513	0,918	0,333	0,573	0,161	0,592	0,326	0,824
9	0,230	0,000	0,380	0,959	0,402	0,996	0,370	0,720	0,253	0,585	0,306	0,405
12	0,417	0,002	0,560	0,943	0,544	0,919	0,591	0,795	0,417	0,627	0,511	0,268
CAC-40												
1	0,112	0,002	0,083	0,929	0,166	0,934	0,472	0,123	0,638	0,962	0,139	0,419
3	0,261	0,001	0,285	0,991	0,495	0,923	0,867	0,168	0,818	0,896	0,446	0,504
6	0,597	0,002	0,579	0,790	0,792	0,341	0,990	0,102	0,940	0,720	0,755	0,402
9	0,535	0,004	0,443	0,802	0,507	0,390	0,812	0,087	0,824	0,598	0,628	0,363
12	0,269	0,006	0,390	0,881	0,459	0,541	0,527	0,130	0,902	0,713	0,398	0,445
DAX												
1	0,453	0,247	0,327	0,772	0,433	0,805	0,745	0,635	0,454	0,712	0,577	0,178
3	0,644	0,002	0,433	0,988	0,506	0,990	0,936	0,584	0,693	0,228	0,835	0,236
6	0,785	0,007	0,553	0,957	0,616	0,954	0,971	0,657	0,883	0,312	0,924	0,387
9	0,608	0,002	0,532	0,872	0,533	0,900	0,862	0,787	0,634	0,385	0,712	0,257
12	0,604	0,000	0,598	0,866	0,607	0,848	0,921	0,680	0,791	0,266	0,857	0,278
IBEX-35												
1	0,564	0,000	0,291	0,549	0,372	0,642	0,891	0,056	0,963	0,353	0,778	0,815
3	0,501	0,000	0,530	0,928	0,601	0,969	0,987	0,006	0,997	0,337	0,837	0,657
6	0,755	0,000	0,857	0,845	0,901	0,974	0,986	0,019	0,972	0,330	0,959	0,618
9	0,829	0,000	0,830	0,616	0,947	0,930	0,965	0,043	0,908	0,296	0,900	0,585
12	0,813	0,000	0,792	0,708	0,901	0,638	0,957	0,075	0,907	0,203	0,903	0,479

Los modelos que hemos revisado están diseñados para analizar el riesgo de renta variable en el que incurre el asegurador a través del cálculo del *Value at Risk* (VaR). Formalmente, el VaR es la pérdida tal que la probabilidad de que ésta sea igual o mayor es igual a p:

$$VaR_p(Y) = Prob(Y \geq Y^*) = p$$

En los modelos paramétricos, los cuantiles son funciones directas de la desviación estándar y, por tanto, los modelos GARCH y de cambio de régimen presentan una medida dinámica del VaR definida como:

$$VaR_{t+1}^p(r) = \mu + \sigma_{t+1} F_p^{-1}(z)$$

Los test de diagnóstico utilizados en estudios previos [Hardy (2001), Panneton (2003), Wong y Chan (2005), Hardy et ál. (2006) y Boudreault y Panneton (2009)] pueden ser inadecuados para elegir el mejor modelo. En este sentido, Hansen (1996) y McLachlan y Peel (2000) muestran que los test estándar de máxima verosimilitud no pueden ser empleados para analizar los modelos de régimen simples frente a los modelos de Markov. Además, Sarma et ál. (2003) muestran como diferentes metodologías pueden conducir a diferentes medidas el VaR para la misma cartera y puede provocar errores significativos en la medición del riesgo. De forma alternativa, y en línea con lo propuesto por Sajjad et ál. (2008), hemos complementado nuestro análisis a través de la realización de dos pruebas de *backtesting in sample*. Tal y como expusimos en el capítulo anterior, el *backtesting* consiste en evaluar el número de veces que las pérdidas de los diferentes índices superan el VaR durante el periodo analizado. Como indica Campbell (2005), la precisión del modelo depende de si la secuencia de la variable supera las propiedades de cobertura condicional e incondicional. Estas propiedades confirman que la secuencia de fallos es independiente e idénticamente distribuida como una variable aleatoria de Bernoulli con probabilidad  $\alpha$ . En nuestro estudio comparamos el cumplimiento de ambas propiedades a través del test de Kupiec (1995) y de Christoffersen (1998).

El análisis de ambos test para los modelos propuestos y los diferentes índices muestra que los modelos de cambio de régimen RSLN2 y RS-Garch pasan todos los test. Algo similar ocurre para el modelo E-Garch, que excepto en el caso de la serie del IBEX-35, supera ambos test. De forma similar, el modelo normal y el Garch pasan los test para niveles bajos de confianza pero fallan para niveles elevados en la mayor parte de los índices. Finalmente, querríamos destacar que, en algunos casos, los modelos de mejor ajuste dependen de los datos utilizados, por lo cual la selección de los mismos debe realizarse de forma específica. Por tanto, podemos concluir que sólo los modelos RS-GARCH superan los test de normalidad, homocedasticidad, autocorrelación, cobertura incondicional e independencia. Por tanto, a

pesar de la mayor complejidad que supone su estimación e implementación, son más adecuados para la configuración de modelos internos para el riesgo de renta variable. También queremos destacar que el modelo RSLN2 muestra un buen equilibrio entre simplicidad y ajuste, ya que ha superado todos los test excepto la homocedasticidad en el caso particular del IBEX-35. La tabla inferior recoge los p-valores de los test de Kupiec y de Christoffersen para los cuatro índices analizados.

	CAC-40					
	NORMAL	GARCH	E-GARCH	RSLN	RSLN-3	RS-GARCH
POF TEST (99,5%)	0,0426	0,1635	0,4978	0,1224	0,0000	0,1226
POF TEST (99%)	0,0147	0,0147	0,3362	0,3093	0,0002	0,3093
CHRISTOFFERSEN LR TEST (99,5%)	0,7115	0,7820	0,8539	1,0000	0,3319	1,0000
	FTSE-100					
	NORMAL	GARCH	E-GARCH	RSLN	RSLN-3	RS-GARCH
POF TEST (99,5%)	0,1668	0,0095	0,0438	0,8505	0,8505	0,8505
POF TEST (99%)	0,0497	0,0497	0,1409	0,8505	0,7893	0,7893
CHRISTOFFERSEN LR TEST (99,5%)	0,0207	0,6446	0,7127	0,9271	0,9271	0,5791
	IBEX-35					
	NORMAL	GARCH	E-GARCH	RSLN	RSLN-3	RS-GARCH
POF TEST (99,5%)	0,1288	0,1288	0,1288	0,9377	0,1411	0,4278
POF TEST (99%)	0,5875	0,2606	0,5875	0,3753	0,0372	0,9118
CHRISTOFFERSEN LR TEST (99,5%)	0,7713	0,7713	0,7713	0,9232	1,0000	0,8467
	DAX					
	NORMAL	GARCH	E-GARCH	RSLN	RSLN-3	RS-GARCH
POF TEST (99,5%)	0,0077	0,0374	0,1488	0,8896	0,8896	0,1488
POF TEST (99%)	0,0404	0,0404	0,3043	0,3348	0,3348	0,6526
CHRISTOFFERSEN LR TEST (99,5%)	0,6366	0,7061	0,7061	0,9254	0,9254	0,7778

### ***Comparación de las necesidades de capital***

A continuación compararemos el capital resultante de utilizar los modelos anteriores en relación al que se exige en el modelo estándar. En este sentido, tratamos de mostrar las diferencias en la cuantificación de las necesidades de capital a través

de la aplicación de modelos de cambio de régimen que hemos visto que presentan un mejor ajuste a las series de varios índices europeos. Habiendo visto la superioridad de los modelos de Markov para capturar el riesgo de renta variable hemos considerado los cálculos obtenidos bajo esta alternativa como los requerimientos de capital más adecuados. Si los modelos simples no capturan todo el riesgo, asumimos que las necesidades de capital estarán subestimadas y queremos conocer a cuánto asciende dicha diferencia. En particular hemos analizado las diferencias respecto al RS-GARCH y RSLN2 porque son los mejores modelos en términos de ajuste y parsimonia, respectivamente. Adicionalmente, comparamos el resultado de aplicar un modelo interno que proporciona un buen ajuste a los datos de mercado con las necesidades de capital del modelo estándar, antes (QIS4) y después de la crisis financiera (QIS5).

Aquí presentamos los resultados de estimar las necesidades de capital de una cartera que contiene cualquiera de los índices que han sido analizados en el estudio. Con este propósito se ha realizado una simulación de 100.000 escenarios por el método latino hipercúbico al plazo de un año. Dado que el ajuste se ha realizado a partir de datos mensuales y el cálculo del capital se ha estimado anualmente, es necesario llevar a cabo la agregación temporal de los rendimientos simulados. Para analizar el problema de la agregación temporal es útil definir el concepto de factor de acumulación  $A_T$ . Sea  $P_t$  el valor mensual de una serie temporal en el momento  $t$ , para  $t = 0, 1, \dots, n$  y definimos el rendimiento logarítmico del mes  $t$  como  $y_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$ . Las series de los rendimientos logarítmicos para el mes  $m$  pueden construirse como:

$$Y_T = \ln \frac{P_{mT}}{P_{m(T-1)}} = \sum_{t=m(T-1)+1}^{mT} y_t$$

Para:  $T = 1, 2, \dots, N$ , donde  $N = [n/m]$  es un entero.

El factor de acumulación  $A_T$  o tasa de crecimiento del valor de mercado del índice puede ser definido como:

$$A_T = \frac{P_{mT}}{P_{m(t-1)}} = \exp(Y_T)$$

Por tanto, el factor al plazo de un año ( $m = 12$ ) basado en rendimientos logarítmicos mensuales puede ser obtenido fácilmente como:

$$A_{12} = \exp(y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + \dots + y_{t+11})$$

Y, por tanto, el valor de índice en el mes 12 será igual a:

$$P_{12} = P_0 A_{12}$$

La tabla inferior muestra las necesidades de capital que resultan de aplicar los diferentes modelos previamente analizados, calibrados al igual que en el modelo estándar para un VaR al 99,5% de confianza. Como puede verse, el modelo de rendimientos normal, implícito en el modelo estándar QIS4 (-32%), subestima significativamente la cuantía de capital, en relación al resto de modelos.

	NORMAL	GARCH	EGARCH	RSLN2	RSLN3	RSGARCH
CAC						
VaR (99,5%)	-32,4%	-31,4%	-34,5%	-37,5%	-38,5%	-39,9%
DAX						
VaR (99,5%)	-32,5%	-33,5%	-35,3%	-41,0%	-40,2%	-36,7%
IBEX						
VaR (99,5%)	-33,1%	-35,1%	-36,3%	-40,4%	-40,4%	-36,6%
FTSE						
VaR (99,5%)	-25,2%	-27,5%	-27,7%	-30,6%	-31,0%	-31,2%

La tabla inferior muestra las diferencias de cargas de capital con respecto a las que se obtienen al aplicarse los modelos RS-GARCH. Como se puede ver, para todos los índices evaluados, las cargas de capital son sustancialmente mayores que aquellas estimados a través del modelo normal, GARCH y E-GARCH. En particular, las diferencias oscilan en media desde -5,50% a -2,65%, y varían considerablemente dependiendo del índice analizado. Esto significa que el uso de modelos simples puede suponer una infraestimación del riesgo asumido y el cálculo de cargas de capital inferiores a las precisas. Además, también es importante destacar que la determinación de las necesidades de capital es específica de cada índice.

	NORMAL	GARCH	EGARCH	Media de diferencias por índice
CAC40	-7,50%	-8,50%	-5,40%	-7,13%
DAX	-4,20%	-3,20%	-1,40%	-2,93%
IBEX	-3,50%	-1,50%	-0,30%	-1,77%
FTSE	-6,00%	-3,70%	-3,50%	-4,40%
Media por modelo	-5,30%	-4,23%	-2,65%	-4,06%

Finalmente, queremos analizar el impacto de usar el modelo estándar bajo las especificaciones de QIS4 y QIS5 (*shock* base, es decir, sin considerar el ajuste simétrico). En la tabla inferior se muestran las diferencias en las necesidades de capital entre Solvencia II y un modelo interno basado en un RS-GARCH. Recordemos que bajo QIS4 las necesidades de capital se establecieron en el 32%, pero en QIS5 esta cuantía se incrementa hasta el 39%. Después de la comparación podemos ver que las necesidades de capital bajo las especificaciones de QIS4 resultaron en media un 4,1% inferiores que bajo el modelo interno basado en un RS-GARCH. Esto implica la incapacidad del modelo estándar establecido en QIS4 para capturar el riesgo de los principales índices después de la crisis financiera. Por otra parte, el aumento de la carga de capital en las nuevas especificaciones de Solvencia II (QIS5) provoca un exceso de 2,9% en los requerimientos de capital en comparación a las estimaciones del modelo interno. En este sentido, los nuevos requerimientos son consistentes con el riesgo realmente asumido. Sin embargo, el efecto amortiguador introducido en QIS5, provoca a diferencia de los modelos internos analizados, que las cargas de capital se reduzcan en situaciones de alta volatilidad. Finalmente, destacar que el uso de un modelo interno podría suponer un ahorro de capital, como ocurre en el caso analizado comparando los resultados obtenidos con el *shock* base de QIS5. Además, recordar que de aplicar la metodología del QIS5 la carga de capital resultante para mercados de países OCDE resultaría en un 49% dados los cálculos efectuados por Barrie & Hibbert (2011).

	QIS4	QIS5 (base)	RSGARCH	Diferencia QIS4	Diferencia QIS5
CAC 40	32%	39%	39,90%	-7,9%	-0,9%
DAX	32%	39%	36,70%	-4,7%	2,3%
IBEX 35	32%	39%	36,60%	-4,6%	2,4%
FTSE 100	32%	39%	31,20%	0,8%	7,8%
Media				-4,1%	2,9%

## 4.2. ANÁLISIS DEL RIESGO DE INMUEBLES

Este apartado tiene por objeto evaluar el modelo estándar propuesto en QIS5 para el riesgo de inversión inmobiliaria. La calibración del riesgo se efectuó en el modelo estándar de QIS5 a partir de los rendimientos globales del índice mensual IPD del Reino Unido para los periodos comprendidos entre 1987 y 2009. En general, se considera que los rendimientos de los índices basados en tasaciones están más suavizados que los que se derivan de índices basados en transacciones. Por eso el objetivo de este apartado es aplicar diversas técnicas de “des-suavizado” a dicho índice. Los resultados muestran que las cargas de capital resultantes, aplicando la misma metodología de cálculo que QIS5, superan en general a las propuestas en el modelo estándar.

### 4.2.1. Introducción y revisión teórica

La calibración del riesgo en QIS5 se efectuó a partir del índice mensual IPD del Reino Unido para los periodos comprendidos entre Diciembre de 1986 y Diciembre de 2009 (CEIOPS, 2010b). Se calculó un VaR histórico al 99,5% de confianza para los rendimientos anuales empíricos sin “des-suavizar”. En general, se considera que los rendimientos de los índices basados en tasaciones, como el IPD, son más suavizados que los que se derivan de índices basados en transacciones u operaciones de compra-venta. Este suavizado provoca que las series temporales sean menos volátiles y, por lo tanto, subestiman la variación real experimentada por el mercado. Este trabajo contribuye a la literatura existente aplicando diversas técnicas de “des-suavizado” a dicho índice, empleando la serie temporal 1987-2010. La metodología utilizada es susceptible de ser replicada por parte del sector asegurador para construir modelos internos con los

que evaluar su nivel de exposición al riesgo y los requerimientos de capital necesarios de acuerdo con la nueva regulación.

A continuación detallaremos las características de la inversión en inmuebles e importancia en las carteras de las aseguradoras. La inversión en inmuebles se puede clasificar en un primer nivel en directa e indirecta. La inversión indirecta es aquella que se materializa en acciones de compañías inmobiliarias y en fondos y sociedades de inversión inmobiliaria<sup>139</sup>. Por el contrario, la inversión directa involucra el proceso de adquisición y gestión de los activos, clasificándose en comercial y no comercial. Dentro de inversión comercial es frecuente distinguir entre oficinas, industrial (fábricas, almacenes, etc.) y locales comerciales mientras que la no comercial estaría formada principalmente por inversión residencial.

Tradicionalmente se asume que la inversión inmobiliaria directa comercial proporciona las siguientes ventajas: defensa cíclica frente a la economía lo que provoca rendimientos más estables que otros activos, cobertura frente a la inflación, diversificación de la cartera y oportunidades en el mercado. Las principales desventajas son que: sus valoraciones son basadas frecuentemente en tasaciones, las series históricas de rendimientos son menos completas que para otros activos, es un mercado poco líquido y con costes de transacción relativamente elevados. Estas características provocan que las inversión directas sean consideradas como inversiones a largo plazo, con un periodo medio en cartera en torno a diez años (Fisher y Young 2000, Collet et ál., 2003). Estas ventajas y desventajas se detallan en la tabla siguiente.

---

<sup>139</sup> En España se denominan SOCIMI - Sociedades Anónimas Cotizadas de Inversión en el Mercado Inmobiliario mientras que en inglés se conocen como REITs o *Real Estate Investment Trust*.

Ventajas	
Defensa cíclica y rendimientos relativamente estables	Los mercados bursátiles y de renta fija, por lo general, se mueven conjuntamente con los ciclos económicos. Por contra, los ingresos de los inmuebles se benefician de contratos de arrendamiento de varios años. Como resultado, las propiedades pueden generar flujos de ingresos más estables y alejados de la evolución de la economía. Esto es una característica muy útil para los inversores que necesitan casar los flujos de sus activos con los de sus pasivos, como las compañías de seguros. Además el rendimiento global (renta más capital) es históricamente menos volátil que la inversión en renta variable, alcanzando con menor frecuencia rentabilidades negativas.
Diversificación	La inversión en inmuebles muestra bajas correlaciones con bonos y acciones. Además, la correlación entre mercados es menor que para otros activos.
Protección contra la inflación	Los alquileres están normalmente indexados a la inflación lo que provoca su aumento ante un incremento en los índices de precios. Por lo general, también aumentan los valores de las propiedades.
Oportunidades en el mercado	Se dice que el mercado inmobiliario es débilmente eficiente, ya que las ganancias están autocorrelacionadas. Las ineficiencias del mercado crean oportunidades de valor para inversores cualificados.
Mercado sin liquidez	El mercado inmobiliario es un mercado pasivo en la medida que el número de transacciones que tiene lugar es relativamente bajo. Por otra parte, la liquidez es variable en el tiempo, con mayor liquidez en los mercados al alza y menor en los mercados a la baja.

<sup>140</sup> Sin embargo, dado el alto valor individual de cada propiedad en relación con otros activos es necesaria una cartera de mayor volumen para efectuar una correcta diversificación.

Desventajas	
Valoración basada en tasaciones	La inversión en bienes inmuebles tiene un periodo de tenencia largo, donde no se realizan operaciones de compra-venta. Sin embargo, los inmuebles se tasan de forma periódica con el fin de medir el rendimiento. Una tasación es una estimación del valor de una propiedad que se diferencia del posible valor de transacción y por lo tanto, provoca una incertidumbre en la medición del riesgo.
Series más cortas y con menor frecuencia	Las series de rendimientos son más cortas que para otros activos y tienen una menor frecuencia. Los rendimientos de la inversión directa en inmuebles están disponibles cada año, semestre, trimestre o mes en función del país.
Costes de transacción	Los costes de transacción en el mercado de bienes inmuebles son relativamente altos.

Resulta de interés valorar la importancia de la inversión en inmuebles en las carteras de los aseguradores españoles y europeos. En España la inversión directa representó un 16,55% del total de cartera de un asegurador no vida (ICEA, 2010)<sup>141</sup>. Este dato es muy superior al 1,44% del total de la cartera para las compañías de seguros de vida, resultando en un promedio del 4,62% para el conjunto asegurador<sup>142</sup>. Los resultados son relativamente superiores a los últimos datos publicados para el mercado europeo, que sitúan la inversión en inmuebles en el año 2009 en el 3,2% del total de la cartera (CEA, 2011a)<sup>143</sup>. Como se aprecia en la tabla inferior este dato varía considerablemente entre países.

<sup>141</sup> Por lo tanto representa el tercer activo en importancia después de la renta fija extranjera (27,23%) y nacional (21,79%).

<sup>142</sup> Datos facilitados por 161 entidades y grupos que representan un 86,12% del volumen total de inversiones del sector asegurador. ICEA (Investigación Cooperativa entre Entidades Aseguradoras y Fondos de Pensiones) es una asociación de entidades de seguros española encargada de realizar y publicar las estadísticas del sector asegurador español.

<sup>143</sup> Los datos son recogidos por las 34 asociaciones nacionales de seguros miembros de la CEA (Comité Europeo de Seguros) con muestras que representan un porcentaje muy elevado (en torno al 90%) de cada mercado. Los miembros de la CEA son las asociaciones nacionales del seguro en 34 países europeos. La Unión Española de Entidades Aseguradoras y Reaseguradoras (UNESPA) es la asociación empresarial del seguro en España.

País	% inversión cartera 2009	Año	% inversión cartera CEA
Portugal	10,2%	2000	5,0%
Reino Unido	9,3%	2001	4,9%
Suiza	7,6%	2002	5,0%
Francia	4,0%	2003	4,5%
España	3,4%	2004	4,2%
CEA	3,2%	2005	4,0%
UE – 27 miembros	3,0%	2006	4,0%
Alemania	1,4%	2007	3,9%
Irlanda	0,4%	2008	3,7%
Estonia	0,0%	2009	3,2%

Fuente: Elaborado a partir de CEA (2011a)

España se encuentra cerca de la media de los datos para los 27 países miembros de la Unión Europea y los miembros de CEA. Destaca el elevado peso que tiene esta inversión en países con Portugal o el Reino Unido o el reducido en países como Alemania e Irlanda. También se aprecia una reducción año a año del peso relativo medio de los inmuebles en la cartera de un asegurador miembro de la CEA a lo largo del periodo 2000-2009. Estos porcentajes son inferiores a los que resultan de estudios de carteras eficientes. Hoesli et ál. (2004) analizan el problema de la distribución de la cartera para siete países encontrando que la proporción óptima asignada a inversión inmobiliaria directa es entre el 15% al 25%.

### ***Medición del riesgo inmobiliario en Solvencia II***

En este apartado estableceremos cómo se ha realizado la medición del riesgo inmobiliario en Solvencia II a través de los QIS y las pruebas de estrés. El riesgo de mercado de los inmuebles surge por la variabilidad de los precios de mercado de las propiedades inmobiliarias. En QIS2, QIS3 y QIS4 la caída del precio de los activos estipulada era de un 20% y fue calibrada a partir de los índices IPD referidos al rendimiento global (rendimiento en renta y en capital) en inversión directa comercial en inmuebles y con frecuencia anual para los países de Holanda, Francia, Alemania, Suecia y Reino Unido. Por simplicidad no se distinguió entre inversión directa ni indirecta, ni entre las distintas subclases de

inversión (locales comerciales, oficinas e industrial). El intervalo temporal abarcado fue distinto en función del país considerado. Así, para Holanda se empleó el intervalo 1997-2005, para Francia 1998-2005, para Alemania 1996-2005, para Suecia 1997-2005 y para el Reino Unido 1971-2005. Dado que el índice IPD se construye con datos basados en tasaciones, las series temporales serán más suaves que aquellas que resultarían de transacciones reales. Para contrarrestar este efecto se aplicó un filtro autorregresivo de orden 1. Se calculó el VaR para el índice “des-suavizado” de cada país mediante su ajuste a través de una distribución normal para los rendimientos. El valor alcanzado para cada país fue muy diferente evolucionando del 8,92% de Francia al 28,87% de Reino Unido. En base a las ponderaciones del valor estimado de la inversión en cada país se formó una cesta, sin embargo, finalmente se optó por tomar directamente una carga del 20% bajo el supuesto implícito de alta correlación entre los cinco mercados<sup>144</sup>.

En QIS5 la carga de capital se basa en el cálculo de un escenario de estrés donde el *shock* es el efecto de una caída del 25 % en el valor de todas las exposiciones individuales directas e indirectas a los precios de los inmuebles<sup>145</sup>. La calibración del riesgo se efectuó únicamente a partir del índice mensual IPD del Reino Unido para los periodos comprendidos entre Diciembre de 1986 y Diciembre de 2009. Se calculó un VaR histórico al 99,5% de confianza para los rendimientos anuales empíricos, por lo que no se asume ninguna distribución paramétrica. Los rendimientos anuales son calculados a partir de los rendimientos mensuales mediante una ventana móvil (*rolling window*) de 12 meses. No se realizó el “des-suavizado” de los rendimientos sino que se trabajó con los

---

<sup>144</sup> En caso de suponer mercados independientes la carga de capital resultante para la cesta sería del 14,68% mientras que en perfecta dependencia sería del 22,13%.

<sup>145</sup> Se establece que las siguientes inversiones se tratan en el módulo inmobiliario: terrenos, edificios, participaciones directa o indirecta en empresas inmobiliarias que generan rentas periódicas o que tengan propósito de inversión y propiedades de uso propio. Serán tratadas en el módulo de inversión en renta variable las inversiones en empresas dedicadas a la gestión inmobiliaria, empresas que desarrollen proyectos inmobiliarios o actividades similares, o empresa que pidan préstamos de instituciones fuera del ámbito del grupo de seguros con el fin de apalancar sus inversiones. La inversión inmobiliaria colectiva deben ser tratada a través enfoque denominado “*look-through*”, según el cual se debe evaluar los riesgos aplicables a los activos subyacentes y aplicar las exigencias de capital calculadas para cada sub-módulo.

datos sin ajustar del índice<sup>146</sup>. Además se asumió, a la luz de los datos analizados, que no existían diferencias significativas entre el índice de todas las propiedades y los distintos subíndices<sup>147</sup>. En EIOPA (2011a) se resumen los resultados obtenidos por la industria aseguradora europea en QIS5. El 12% de la carga de capital (14% en grupos aseguradores) de los riesgos de mercado fue causada por el riesgo inmobiliario en promedio, sin embargo existen grandes diferencias en función de cada compañía. Pesé a que el modelo estándar para dicho riesgo no fue de los más criticados por la industria, sí que hubo menciones acerca de que dicho módulo no estaba lo suficientemente desarrollado dado que no consideraba la ubicación de la propiedad ni su uso, que proporcionaba cargas demasiado elevadas y que la calibración era inadecuada para activos que respaldan obligaciones a largo plazo.

En el año 2011 se publicó un informe encargado a IPD por asociaciones de los sectores inmobiliario y asegurador centrados el análisis del riesgo de inversión directa en inmuebles en Solvencia II (IPD, 2011a). La crítica más relevante es que el cálculo del requerimiento de capital para las propiedades inmobiliarias es menos robusto en QIS5 que en los anteriores estudios. Se argumenta que los datos se limitan al mercado de Reino Unido<sup>148</sup>, que es un mercado mucho más volátil estadísticamente que los principales mercados europeos donde las aseguradoras tienen la mayor parte de sus exposiciones. Además, en QIS5 se desestima la aplicación de una técnica de “des-suavizado” a los rendimientos. De esta forma, en este informe se elabora un índice paneuropeo cuatrimestral a partir de datos de IPD que incluye 15 países para los años 1999-2009 a partir del cual estiman el VaR<sup>149</sup>. Los resultados

---

<sup>146</sup> Posteriormente se afirma que se “des-suavizan” los índices proporcionando mayores cargas de capital (agrava la cola izquierda de la distribución empírica anual de rendimientos) y una volatilidad muy inferior que la volatilidad del índice de rentabilidad total MSCI de países desarrollados (empleado para la calibración del riesgo de renta variable).

<sup>147</sup> El VaR histórico variaba entre el 25,74% del índice general, el 25,93% de oficinas, el 27,47% de locales y el 27,67% de industrial.

<sup>148</sup> Lo cual contrasta con la cobertura global para otros riesgos de mercado como los tipos de interés y el mercado de valores.

<sup>149</sup> Los datos incluyen un periodo corto y variable en función del país. El fin del periodo temporal considerado es Diciembre de 2009 pero el inicio de la serie es: 1999 para Dinamarca, Francia, Alemania, Irlanda, Países Bajos, Noruega, Portugal, Suecia y Reino Unido; 2000 para España; 2002 para Suiza; 2003 para Austria, finalmente, 2004 para Bélgica y Polonia.

Los rendimientos cuatrimestrales han sido calculados a través de interpolación de los rendimientos anuales para casi todos los países. Se excluye Irlanda para el cual el índice IPD es cuatrimestral y

obtenidos muestran que la carga de capital sería del 7,1% para índice IPD basado en tasaciones y de un 13,3% para el índice “des-suavizado”<sup>150</sup>. En base a estos resultados se recomienda que la carga de capital finalmente empleada en el modelo estándar de Solvencia II no supere el 15%.

Finalmente, hemos de destacar que la EIOPA realizó este año pruebas de estrés para recibir información sobre la vulnerabilidad del sector asegurador europeo frente a escenarios adversos (EIOPA, 2011b). Los escenarios de estrés se han considerado en línea con los supuestos macroeconómicos que se aplican a la pruebas de estrés en el sector bancario, si bien se han adaptado a las especificidades de la actividad aseguradora<sup>151</sup>. Se establecen tres escenarios de estrés: base (severo), adverso (deterioro más severo en las variables macroeconómicas) e inflacionista (incremento rápido de la inflación que fuerza al Banco Central Europeo a aumentar rápidamente los tipos de interés). Centrándonos en el riesgo asociado a los inmuebles destaca la separación, no realizada en los distintos QIS, entre inversión comercial y residencial. Para el riesgo residencial el BCE ha proporcionado las hipótesis sobre la variación de precios de vivienda<sup>152</sup>. Para la inversión comercial, la caída en el índice IPD para el Reino Unido en el año 2008 se considera como el escenario adverso. En base a esto se asume un *shock* del 25% en el escenario adverso y del 12,5% en el escenario base. Los datos se resumen en la tabla inferior.

	Base	Adverso	Inflacionista
Residencial	-3,8%	-11.6%	0%
Comercial	-12,5%	-25%	0%

parcialmente los Países Bajos y Reino Unido para los que se emplea el IPD cuatrimestral en periodos recientes. Esto provoca una reducción en la volatilidad y podría influir en el cálculo del VaR.

<sup>150</sup> No aplican una de las técnicas de “des-suavizado” de las que explicaremos posteriormente en este trabajo, sino el denominado índice TLI (*transaction linked index*) que es un índice híbrido que establece una regresión de las valoraciones efectuadas (como sustituto del precio hedónico) sobre los precios de venta, capturando una mayor volatilidad que los índices basados en tasaciones (véase Devaney y Martínez, 2010). El método es similar al presentado por Fisher et ál. (2007) y empleado por el MIT Centre for Real Estate sobre la base de datos NCREIF (disponible en <http://web.mit.edu/cre/research/credl/tbi.html>).

<sup>151</sup> Los escenarios macroeconómicos han sido proporcionados por el Banco Central Europeo (BCE).

<sup>152</sup> EIOPA ha empleado el *shock* para los años 2011-2012 para el escenario adverso y el del año 2011 para el escenario base.

#### 4.2.2. Causas del suavizado y técnicas de “des-suavizado”

Existen fundamentalmente tres grandes metodologías para medir el rendimiento inmobiliario de los bienes comerciales: índices basados en tasaciones, índices de ventas repetidas y índices basados en precios hedónicos (véase Booth y Marcato, 2004). Los índices basados en tasaciones emplean los datos de las valoraciones efectuadas periódicamente por tasadores. Los índices de ventas repetidas emplean los datos registrados de inmuebles que han sido por lo menos vendidos dos veces dentro del periodo de estudio. Es frecuente que sólo un bajo porcentaje de propiedades cumplan con el criterio anterior, sin embargo el método de ventas repetidas ponderadas o método de regresión de ventas repetidas puede utilizar una muestra mucho mayor de las propiedades que se han transmitido por lo menos dos veces durante el periodo total de medición (desde el principio hasta el final del periodo de construcción del índice, y no necesariamente entre cada dos fechas de cálculo). En el método de precios hedónicos se realiza una regresión multivariante de los elementos que influyen sobre el valor de un inmueble, de forma que se modeliza su precio, el cual se denomina precio hedónico, en función de tales características. Es posible producir un índice del precio de una propiedad que posea las características estándar. Finalmente puede realizarse un método híbrido o combinación de las técnicas anteriores.

Los índices de rendimiento inmobiliario comercial más conocidos y empleados son el índice IPD (*Investment Property Databank Index*)<sup>153</sup> en el Reino Unido y el NPI (NCREIF *Property Index*) en los EE.UU (también denominado simplemente NCREIF-*National Council of Real Estate Investment Fiduciaries*), ambos basados en tasaciones. Se calculan agregando el rendimiento de las propiedades comerciales individuales de inversores institucionales (compañías de seguros, fondos de pensiones y fondos de inversión). Los rendimientos de los índices basados en tasaciones son más suavizados que los que se derivan de índices basados en transacciones u operaciones de compra-venta. Los tasadores generalmente realizan la valoración de una propiedad al final de un periodo (año, semestre, trimestre o mes función del índice), siendo por tanto conscientes de

---

<sup>153</sup> IPD es una empresa especializada en análisis de rendimientos inmobiliarios. Está presente en más de 20 países siendo líder mundial del análisis de mercados inmobiliarios. Para más información sobre la metodología empleada en los índices IPD puede consultarse el documento IPD (2011b).

los valores de tasación anteriores. Esto conduce a menudo a autocorrelación y crea una volatilidad menor<sup>154</sup> que los índices basados en transacciones (véase evidencia en Fisher et ál., 1999; 2003). Este efecto se conoce como suavizado y se han desarrollado distintas técnicas de “des-suavizado” (*unsmoothing*) que pueden ser utilizadas para desarrollar series que representen de manera más exacta los precios subyacentes.

El suavizado en los índices basados en tasaciones viene causado principalmente por el proceso de valoración individual de las propiedades y en el proceso de agregación de las valoraciones individuales en el índice (véase por ejemplo, Blundell y Ward, 1987; Quan y Quigley, 1989, 1991; Geltner, 1991, 1993a; Fisher et ál., 1994; Barkham y Geltner, 1994; Brown y Matysiak 1998, 2000; Key y Marcato, 2007).

A nivel individual se dice que el proceso de valoración inmobiliario es retrospectivo y basado en comparables, lo que causa el suavizado a nivel desagregado o micro (propiedades individuales). Dada la baja liquidez de los mercados inmobiliarios, existe muy poca información nueva comparable para realizar una nueva valoración, especialmente para aquellas realizadas en breves periodos (por ejemplo mensual o trimestral). Un tasador que no ha recibido nuevos elementos de prueba suficientes para realizar una nueva estimación de confianza del valor suele remitirse a la última tasación efectuada. Además, es probable que tengan mayores dificultades para explicar grandes cambios de valor que cambios más reducidos, lo que todavía cobraría mayor peso en el caso de que ese tasador fuese el mismo que efectuase la última valoración. Finalmente, las valoraciones pueden estar aún más ancladas a su último valor de forma que un tasador no informe de cambio alguno en la valoración hasta que se supere determinado límite (por ejemplo un cambio del 1% del valor del inmueble). De esta forma, los tasadores muestran un comportamiento conservador y valoran las propiedades ajustando los valores precedentes, por lo que no incorporan completamente los movimientos observados en el mercado.

---

<sup>154</sup> Lai y Wang (1998) muestran que la hipótesis de menor volatilidad ampliamente aceptada en la literatura especializada no siempre es cierta. Se produce cuando los valores de los rendimientos de mercado alteran de signo positivo a negativo o viceversa, siendo no cierta en mercados cuyos valores crecen permanentemente.

Blundell y Ward (1987) en el Reino Unido y Quan y Quigley (1989, 1991) en los EE.UU. fueron los primeros en sugerir que cada valoración puede considerarse como una media ponderada de la última valoración y la nueva evidencia del mercado:

$$V_t = (1 - k)P_t + kV_{t-1}$$

Donde  $V_t$  es la valoración actual emitida por el tasador,  $P_t$  el precio estimado del mercado en base a su situación actual (precios de transacción más recientes),  $V_{t-1}$  la última valoración efectuada y  $k$  un coeficiente de ponderación con un valor entre 0 y 1. Un valor de  $k$  igual a 0 supondría una valoración totalmente basada en la evidencia actual de mercado, por lo que el valor de tasación sería muy cercano al verdadero. Un valor de  $k$  igual a 1 resultaría en una valoración idéntica a la efectuada en el periodo anterior<sup>155</sup>. Cuando mayor incertidumbre exista, es decir, en entornos más volátiles, es probable que un tasador ponga más énfasis en los valores previos. Este proceso de valoración ha sido documentado empíricamente por autores como Diaz y Wolverton (1998) y Clayton et ál. (2001). Este procedimiento retrospectivo es visto como una estrategia óptima dada la incertidumbre del mercado inmobiliario y no implica incompetencia alguna de los tasadores (Quan y Quigley, 1991; Brown y Matysiak, 2000). Sin embargo, existe el problema de que los tasadores pueden estar influenciados externamente por sus clientes principalmente cuando los mercados son a la baja, lo que podría resultar en un suavizado adicional. Baum et ál. (2000) exploraron las potenciales influencias de los clientes sobre las valoraciones individuales<sup>156</sup>.

El proceso de agregación de las valoraciones individuales en el índice provoca suavizado aunque las tasaciones individuales representen los verdaderos valores de mercado. Las valoraciones de las propiedades individuales, son tomadas como estimadores de los precios de mercado, que cambian con el tiempo debido a cambios en el mercado. El valor de un índice en un punto específico en el tiempo, por ejemplo al final de un mes, se basa en las valoraciones realizadas durante

---

<sup>155</sup> El modelo de Quan y Quigley [1991] proporciona una expresión formal para el valor de  $k$  que viene dada por  $k = \sigma_m^2 / (\sigma_m^2 + \sigma_t^2)$ , donde  $\sigma_m^2$  es la varianza de los verdaderos precios de mercado y  $\sigma_t^2$  es la varianza adicional de los precios de mercado.

<sup>156</sup> Las tasaciones a veces están sometidas a conflictos de intereses por pertenecer las tasadoras a entidades financieras lo cual contribuye a distorsionar los precios.

un breve periodo de tiempo anterior a dicha fecha. De esta forma, las valoraciones en el índice son un promedio móvil suavizado de las observaciones durante un periodo corto de tiempo (Geltner, 1993a). Es además posible que diferentes tasadores muestren diferente velocidad de reacción a las nuevas evidencias de mercado (Brown y Matysiak, 2000).

Mientras que el suavizado viene causado teóricamente por el proceso de valoración individual y el proceso de agregación, los rendimientos de los índices basados en tasaciones tienen tres características empíricas que confirman que están suavizados (véase Corgel y de Ross, 1999 o Key y Marcato, 2007):

- Muestran una correlación serial positiva, por lo que altos y bajos rendimientos tienden a persistir de un periodo a otro.
- Tienen una volatilidad muy reducida en relación con otros activos de riesgo, incluidos los valores de las compañías inmobiliarias. Además, no están correlacionados con los rendimientos de los valores de dichas compañías.
- Los modelos de carteras eficientes producen asignaciones que superan muy ampliamente las observadas en las carteras de inversión del mundo real.

### **Técnicas de “des-suavizado”**

En la literatura se han desarrollado diversas técnicas para “des-suavizar” los rendimientos<sup>157</sup> y obtener así una nueva serie de rendimientos que se ha ajustado para eliminar el comportamiento de los tasadores y por lo tanto resulte más volátil. El modelo general viene dado por (Corgel y de Ross, 1999):

$$r_t^* = \omega_0 r_t + \omega(B)r_{t-1}^*$$

Donde  $r_t^*$  es el rendimiento del índice observado o suavizado durante el periodo  $t$ ,  $r_t$  es el valor verdadero o valor “des-suavizado” durante el periodo  $t$ ,  $\omega_0$  es una ponderación entre 0 y 1,  $\omega(B) = \omega_1 + \omega_2 B + \omega_3 B^2$  siendo  $B$  el operador de retardos.

<sup>157</sup> En literatura anglosajona se les conoce como *unsmoothing techniques* o *recovery models*.

Podemos expresar  $r_t^*$  en términos de los valores pasados y presentes de  $r_{t-1}^*$ :

$$r_t^* = \phi(B)r_{t-1}^* + \varepsilon_t$$

Donde  $\phi(B) = \phi_1 + \phi_2 B + \phi_1 B^2 + \dots$  es el polinomio del operador de retardos y  $\varepsilon_t = \omega_0 r_t$ , donde  $\omega_0$  representa el denominado factor de “des-suavizado”. Así, el término residual  $\varepsilon_t$  contiene el rendimiento “des-suavizado” y el efecto suavizado de las tasaciones. El término  $\phi(B)r_{t-1}^*$  captura el efecto en la media de los rendimientos previos sobre el rendimiento actual. Despejando obtenemos que los rendimientos “des-suavizados” vienen dados por:

$$r_t = \frac{(r_t^* - \phi(B)r_{t-1}^*)}{\omega_0}$$

Distintos modelos asumen distintas hipótesis dentro de este modelo general. Los modelos más empleados en la literatura son el modelo de Geltner (1993a) y Fisher et ál. (1994), sin embargo también analizaremos el denominado filtro autorregresivo de orden  $n$ , el modelo de Chaplin (1997) y el de Brown y Matysiak (1998). El análisis no intenta proporcionar una revisión completa de los métodos existentes en la literatura<sup>158</sup>, sino que emplea aquellos analizados por Key y Marcato (2007).

El modelo de Geltner (1993a) o filtro autorregresivo de orden 1 se deriva directamente del proceso de valoración de Quan y Quigley (1991). Dada la valoración efectuada por los tasadores  $V_t = (1-k) P_t + kV_{t-1}$ , se puede obtener el precio de mercado como  $P_t = (V_t - kV_{t-1}) / (1-k)$  y, por lo tanto, los rendimientos “des-suavizados” de un índice como:

$$r_t = \frac{(r_t^* - kr_{t-1}^*)}{1-k}$$

<sup>158</sup> A modo de ejemplo existe la versión modificada del modelo de Fisher et ál. (1994) propuesta por Cho et ál. (2003). Tampoco es valorado el modelo de Geltner (1993b) que no intenta eliminar las autocorrelaciones de los datos sino que presupone que tenemos idea del valor del parámetro de “des-suavizado” de la serie analizada. En Geltner et ál. (2007, Capítulo 25) se relaciona su valor con el número promedio de periodos de retardo, definido como el tiempo promedio que tardan los valores de tasación para recoger los precios de transacción.

Donde  $k$  es el parámetro autorregresivo de primer orden de la serie de rendimientos observados o suavizados  $r_t^*$ . El método de Geltner (1993a) fue aplicado a datos anuales y corrige la correlación serial de primer orden para el rendimiento entre un periodo y el siguiente. En índices de mayor frecuencia es razonable esperar que los vínculos entre la valoración actual y anteriores se remontan a más de un periodo. Una versión más generalizada consistiría en aplicar un filtro autorregresivo de orden  $n$  en donde los rendimientos “des-suavizados” se obtendrían como:

$$r_t = \frac{(r_t^* - k_1 r_{t-1}^* - k_2 r_{t-2}^* - \dots - k_n r_{t-n}^*)}{1 - k_1 - k_2 - \dots - k_n}$$

Los parámetros autorregresivos [ $k_i$  para  $i = 1, \dots, n$ ] pueden ser estimado empíricamente a partir de los datos observados de  $r_t^*$ . Para determinar los retardos adecuados se seleccionan aquellos coeficientes significativos basándose en la estadística  $t$  asociada, el poder explicativo del modelo ( $R^2$ ) o en los tradicionales criterios de selección de modelos basados en la función de verosimilitud: SBC, AIC o HQ.

Fisher et ál. (1994) proponen un modelo que incorpora una relación entre la volatilidad de la renta variable ( $\sigma_{sp500}$  o desviación del índice bursátil *Standard & Poor's 500*, al ser aplicado al mercado americano) y la verdadera volatilidad de los rendimientos comerciales ( $\sigma_{rt}$ ), de forma que la primera es el doble que la segunda ( $\sigma_{rt} = \sigma_{sp500} / 2$ ). Estiman los rendimientos “des-suavizados” a partir de:

$$r_t = \frac{(r_t^* - (k_1 r_{t-1}^* + k_4 r_{t-4}^*))}{\omega_0}$$

El valor retardado de cuarto orden se incluye para recoger el hecho de que existen propiedades en el índice NPI que son efectivamente revaloradas sólo anualmente, lo que ocurre en el cuarto cuatrimestre del año. El valor del  $\omega_0$  se calcula mediante  $\omega_0 = 2\sigma[r_t^* - (k_1 r_{t-1}^* + k_4 r_{t-4}^*)] / \sigma_{SP500} = 2\sigma_{e_t} / \sigma_{SP500}$ , donde  $\sigma_{e_t}$  es la desviación estándar de los residuos del modelo autorregresivo, los cuales son una *proxy* de la desviación de los rendimientos “des-suavizados”. Este modelo podría ser empleado aplicando un filtro autorregresivo de primer orden en caso de que el

parámetro autorregresivo  $k_d$  no fuera significativo. En este caso  $r_t = (r_t^* - k_1 r_{t-1}^*)/\omega_0$  con  $\omega_0 = 2\sigma_{\varepsilon_t}/\sigma_{SP500}$ . Como se observa,  $\omega_0$  toma un valor inferior a 1 cuando la volatilidad de la renta variable es más del doble de la volatilidad de los valores de rendimiento “des-suavizados”, resultando en un mayor aumento de la volatilidad de los rendimientos “des-suavizados” finales. Cuando la volatilidad de la renta variable es menor que el doble de los valores de rendimiento “des-suavizados”,  $\omega_0$  toma un valor superior a 1 y amortigua la volatilidad de los valores finales de los rendimientos “des-suavizados”. El valor de 2 asignado a la relación entre la volatilidad de los rendimientos inmobiliarios y la del mercado bursátil es una cuestión de criterio. Una especificación alternativa a la condición de volatilidad es fijar el valor de  $\omega_0$  de tal manera que la media de la serie “des-suavizada” sea igual a la de la series sin suavizar. Lo anterior es siempre aconsejable ya que el “des-suavizado” de una serie debiera alterar la volatilidad y la autocorrelación de una serie pero no su media, lo cual no siempre se consigue.

El método de los diferentes estados del mercado propuesto por Chaplin (1997), asume distintas tasas de suavizado  $k_i$  en función de la situación del mercado. Se asume que los índices están más suavizados cuando se producen altas tasas de apreciación o depreciación en el mercado, porque la evidencia o información proporcionada por el mercado es menos cierta en los periodos de cambio rápido de los precios que en aquellos mercados más estables. Además, los efectos de suavizado son más propensos a ser fuertes en los mercados a la baja que al alza, ya que los tasadores son más reacios a bajar las valoraciones que a aumentarlas. Por lo tanto el modelo resulta en:

$$r_t = \frac{(r_t^* - k_i r_{t-1}^*)}{1 - k_i}$$

Donde el coeficiente de “des-suavizado”  $k_i$  varía en torno a un valor base que resulta del método autorregresivo de orden 1 siendo común aplicar el siguiente procedimiento (véase Key y Marcato, 2007). El mayor valor que se le añade al valor base se produce en los periodos en que los rendimientos suavizados están alejados más de  $\pm 2$  desviaciones estándar de la media. Se realizan pequeñas adiciones o deducciones en el valor base para los periodos con rendimientos entre 1 y 2 desviaciones estándar de la media, o los

que se encuentran dentro de una desviación estándar de la media. El tamaño de las adiciones o deducciones sigue siendo una cuestión de criterio, sujeto a que sumen cero o lo que es lo mismo que el valor medio de  $k$  aplicado se mantenga sin cambios.

El método de Brown y Matysiak (1998) permite variar la magnitud de los efectos de suavizado en los rendimientos. A diferencia del modelo de Chaplin (1997), donde estos se producen en función de los denominados estados del mercado, se realiza a través de los cambios en la correlación serial observada durante los distintos periodos temporales. Se aplica un filtro de Kalman para estimar los coeficientes de “des-suavizado” como el coeficiente de correlación serial observado en la serie original  $r_t^*$  durante un periodo precedente. Así, este método necesita respecto a los anteriores mayor número de observaciones para producir una estimación razonablemente fiable de los cambios en la correlación de la serie de rendimientos, de forma que es más adecuado para series mensuales o trimestrales que anuales. El modelo resulta en:

$$r_t = \frac{(r_t^* - k_t r_{t-1}^*)}{1 - k_t}$$

Donde  $k_t$  es un parámetro autorregresivo que varía en el tiempo siendo calculado sobre una serie de rendimientos precedentes en cada momento de tiempo.

Las técnicas de “des-suavizado” requieren varias elecciones: el modelo a emplear, el empleo de rendimientos totales o en capital, y finalmente, el empleo de rendimientos nominales o reales. En primer lugar, respecto al modelo a utilizar, Brown y Matysiak (2000) afirman que a pesar de la literatura existente todavía no existe un método superior para “des-suavizar” una serie de rendimientos, si bien parece que el suavizado de una serie debe variar en el tiempo. En segundo lugar, la serie de rendimientos empleada puede ser la de rendimientos totales (rendimiento en capital más rendimiento en renta) o sólo los rendimientos en capital. Las técnicas de “des-suavizado” se pueden aplicar a los rendimientos totales, pero hay autores que reconocen que este problema puede estar presente en mayor medida en los rendimientos en capital (Fisher et ál. 1994). En caso de emplear los rendimientos en capital, y dado que el

objetivo es calcular una serie “des-suavizada” del rendimiento total se aplica el siguiente procedimiento, que está sujeto a determinado grado de error<sup>159</sup>:

- Se calcula para cada año el valor de los ingresos por alquileres (rentas) en base al índice suavizado. Es decir, se multiplica el valor del índice suavizado a principio de año por el rendimiento alcanzado durante el año.

$$\text{Renta (€)} = \% \text{ rentabilidad en renta } t \times \text{índice del valor del capital } t-1$$

- Se calcula el índice “des-suavizado” de los valores de apreciación del capital en base a alguna técnica de “des-suavizado”.
- Se dividen el valor de los ingresos por alquileres entre el índice de valor “des-suavizado” para crear una serie de renta “des-suavizada”.

$$\text{Rentabilidad alquileres “des-suavizada” (\%)} = \text{Renta (€)} / \text{índice del valor del capital “des-suavizado” } t-1$$

- Finalmente se agregan los valores de rentabilidad por alquileres “des-suavizada” más el crecimiento del capital “des-suavizado” para obtener el rendimiento total o global “des-suavizado”.

$$\text{Rentabilidad global “des-suavizada”} = \text{Rent. alquileres “des-suavizada”} + \text{Rent. capital “des-suavizado”}$$

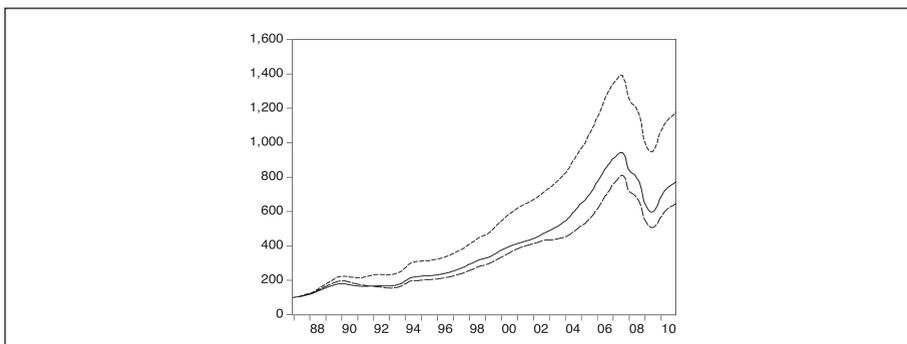
La tercera y última decisión a tomar es emplear los rendimientos nominales o emplear los rendimientos reales (Fisher et ál. 1994). En caso de emplear los rendimientos nominales, estos se transforman en reales restándoles el efecto de la inflación, para posteriormente aplicarles las técnicas de “des-suavizado”. Finalmente obtendríamos los rendimientos nominales añadiéndole nuevamente la inflación.

---

<sup>159</sup> Key y Marcato (2007) advierten que en el índice original IPD el denominador de la rentabilidad generada es el capital empleado que incorpora los ingresos acumulados continuamente durante el periodo de medición. Por lo tanto el procedimiento descrito es una aproximación que se acerca al valor real cuando el crecimiento del capital es modesto. Sin embargo, cuando se analizan largos periodos de tiempo los errores se acumulan, produciendo series de rendimiento “des-suavizadas” cada vez menos realistas.

#### 4.2.3. Análisis empírico de la serie de rendimientos suavizada y “des-suavizada”

En el gráfico inferior se muestra la serie mensual IPD global del Reino Unido para todas las propiedades para el periodo comprendido entre 31/12/1986 y 31/12/2010 (línea central). Dicha serie muestra un patrón muy similar al de sus subíndices<sup>160</sup> aunque en distintos niveles. La serie IPD locales casi se superpone a la anterior (representa casi el 50% del índice), por lo que sólo se muestra el IPD industrial (serie superior) e IPD oficinas (serie inferior). Se observa la clara tendencia ascendente del índice IPD en toda la muestra a excepción del año 1990 a principios de 1991, en los que se produjo una ligera caída, y los periodos de brusco deterioro del mercado comprendidos entre Agosto de 2007 a Junio de 2009. Dicho comportamiento es casi idéntico para las otras series analizadas, sin embargo la serie IPD locales se adelantó a ambas crisis en tres meses en el año 1990 y en dos en el año 2007 respecto al índice general.

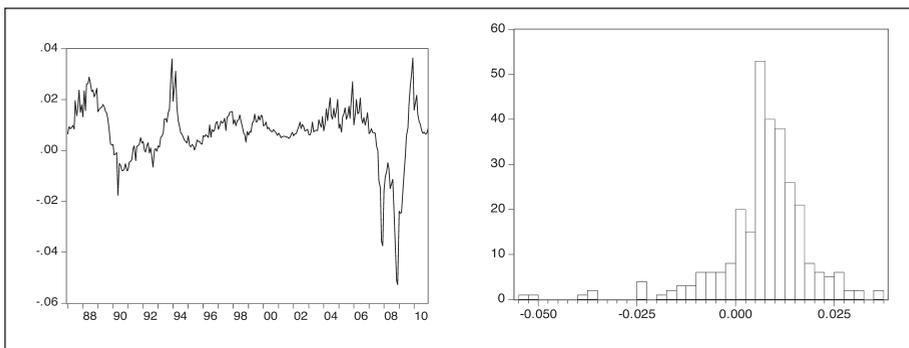


El patrón similar entre el índice global de todas las propiedades se confirma a través de la alta correlación entre los rendimientos aritméticos totales de la serie y sus subíndices a lo largo del periodo temporal analizado (véase la tabla inferior). Además hemos contrastado que dichos coeficientes permanecen relativamente estables y son altamente significativos a lo largo de distintas submuestras.

<sup>160</sup> El índice IPD está formado en realidad de otros subíndices, hemos obviado el estudio de “otras propiedades” ya que representan un porcentaje del valor del índice del 3%, y la separación que se realiza dentro de las tres grandes categorías descritas. A modo de ejemplo el sub índice “oficinas” está compuesta de los siguientes sub índices: la denominada City de Londres, el área urbana del *West End* de Londres, la región del *South East* de Inglaterra y el resto de Reino Unido.

	IPD todas las propiedades	IPD industrial	IPD oficinas	IPD locales
IPD todas las propiedades	1	0,952	0,962	0,969
IPD industrial	0,952	1	0,922	0,887
IPD oficinas	0,962	0,922	1	0,873
IPD locales	0,969	0,887	0,873	1

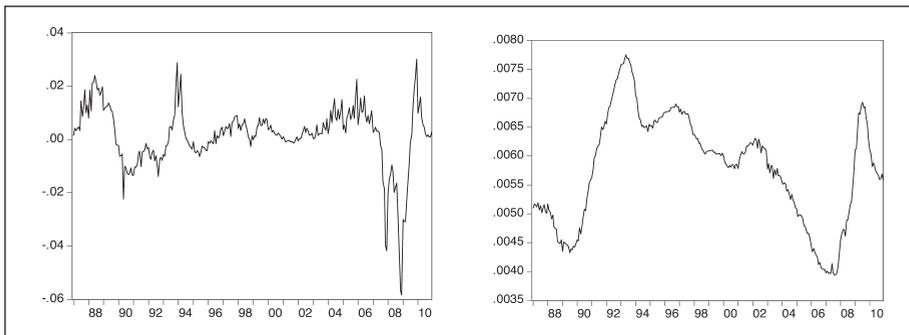
Centraremos nuestro análisis en el índice IPD mensual todas las propiedades, a semejanza del análisis efectuado en QIS5. En el gráfico inferior izquierda se muestra la evolución temporal de los rendimientos aritméticos totales de la serie IPD, que confirma la fuerte crisis experimentada a partir de mediados de 2007 y la recuperación de mercado a partir de mediados de 2009. En la derecha se muestra el histograma en el que se aprecian como la distribución de los rendimientos mensuales es asimétrica y presenta un exceso de curtosis.



En la siguiente tabla se muestran los principales estadísticos resumen de los rendimientos globales mensuales de la serie analizada, donde se puede observar el exceso de curtosis y el rechazo de la hipótesis de normalidad medida a través del test de Jarque-Bera. Los rendimientos totales son generados a partir de los rendimientos de capital y de los rendimientos por rentas. La variabilidad de la serie de rendimientos por renta (0,09%) es muy inferior a la serie de rendimientos por capital (1,16%).

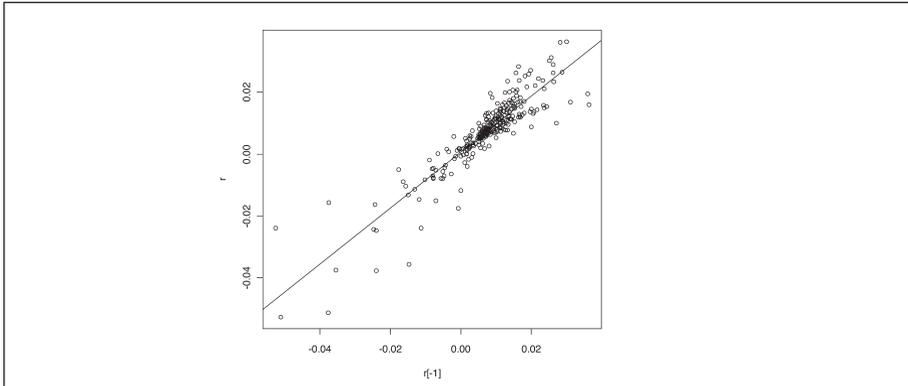
Estadística	Rendimiento global	Renta	Capital
Media	0,72%	0,58%	0,14%
Máximo	(Diciembre 2009) 3,64%	0,78%	3,01%
Mínimo	(Diciembre 2008) -5,27%	0,39%	-5,84%
Desviación típica	1,16%	0,09%	1,16%
Sesgo	-1,62	-0,17	-1,51
Curtosis	8,96	2,19	8,54
Jarque-Bera	551,77	9,14	478,69
Probabilidad	0,00	0,01	0,00

En el gráfico inferior se muestra en la izquierda la evolución temporal de los rendimientos en capital y en el gráfico derecho de los rendimientos en rentas, el coeficiente de correlación lineal entre ambas series es cercano a cero y no significativo<sup>161</sup>.

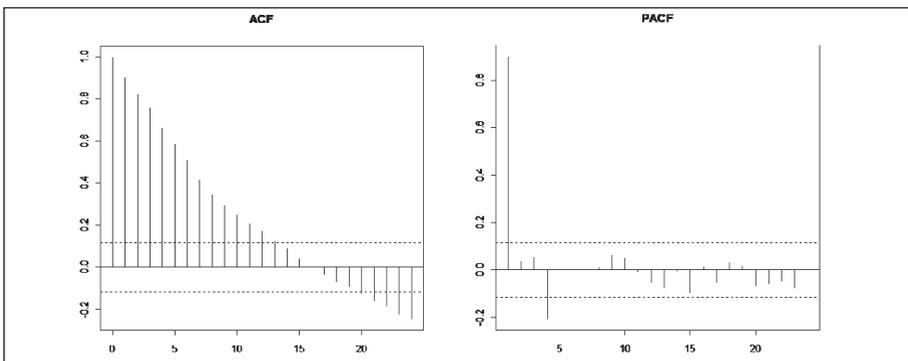


En la literatura se asume que los índices inmobiliarios basados en tasaciones muestran una fuerte correlación serial positiva. El gráfico inferior muestra los rendimientos mensuales totales del índice IPD para el periodo 1987-2010 frente a los de su periodo precedente. Si dichos rendimientos no estuvieran correlacionados el gráfico mostraría puntos con un carácter puramente aleatorio y la recta de regresión sería plana (pendiente igual a cero). La pendiente positiva (valor de 0,90) indica una asociación positiva entre los rendimientos entre periodos sucesivos. La bondad del ajuste medida a través del coeficiente de determinación  $R^2$  ajustado (0,82) es elevada.

<sup>161</sup> El coeficiente de correlación es de -0,08 con una estadística t asociada de -1,36 [p-valor de 0,17].



En la función de autocorrelación simple (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF) de los rendimientos totales, representadas en el gráfico inferior, se observa una fuerte estructura de autocorrelación lineal. Podemos afirmar que los rendimientos dependen fuertemente y de forma persistente de los rendimientos previos, el coeficiente de autocorrelación lineal de primer orden asciende a 0,903, mientras que dicho coeficiente para 12 retardos asciende a 0,174. Las características de autocorrelación de la serie de rendimientos totales, no están generadas por la baja variabilidad de la serie de rentas generadas<sup>162</sup>, sino que los resultados obtenidos en caso de analizar los rendimientos por capital son muy similares (los coeficientes son de 0,905, y 0,180 respectivamente).

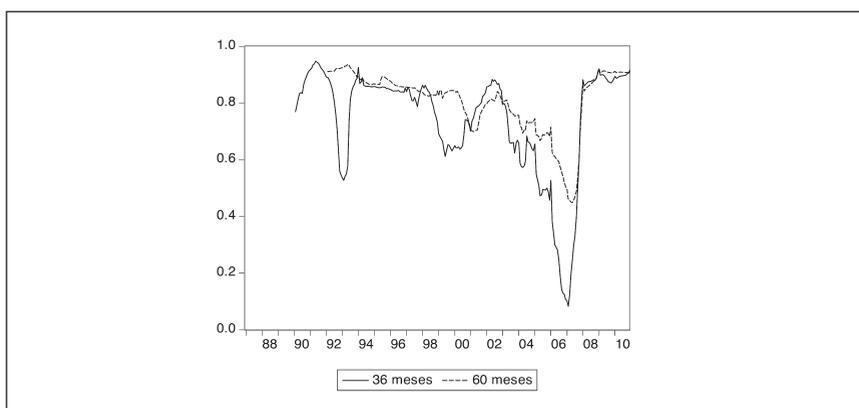


<sup>162</sup> Muestra coeficientes de 0,994 y 0,740 respectivamente.

A continuación procedemos a aplicar las técnicas de “des-suavizado” descritas anteriormente a la serie de rendimientos totales nominales del IPD. De esta forma simplificamos el procedimiento no teniendo que ajustar la serie a los efectos de la inflación ni cometemos errores de cálculo al estimar la serie de rentabilidades por renta “des-suavizada”. Además, dicha serie es la empleada en el análisis efectuado en la calibración de QIS5 y en el informe por IPD (2011a). Las hipótesis y cálculos necesarios en la estimación de los modelos son los siguientes:

- Para el método de Geltner (1993a) el único parámetro a estimar es el coeficiente AR(1) de los rendimientos suavizados. El valor estimado es de 0,90.
- Para el modelo autorregresivo de orden  $n$  hemos testado distintos modelos con múltiples órdenes. Modelos distintos del AR(1) resultan en parámetros no significativos y que no superan al anterior en base a los criterios de selección de modelos, por lo que dichos modelos quedan excluidos del análisis.
- Para el modelo de Fisher et ál. (1994) hemos empleado el modelo base AR(1) al resultar no significativo el parámetro  $k_d$  asociado a  $r_{t-d}^*$ . Dentro de este modelo establecemos dos alternativas para el valor de  $\omega_0$ . La primera toma el valor  $\omega_0 = 2\sigma_{\epsilon t} / \sigma_{RV}$  en base el ratio entre la desviación de los rendimientos “des-suavizados” y la del mercado de renta variable (medido a través del índice FTSE). Los valores estimados son  $\sigma_{\epsilon t} = 0,49\%$  y  $\sigma_{RV} = 4,13\%$ , resultando en un valor de  $\omega_0 = 0,24$ . La segunda,  $\omega_0 | E(r_t) = E(r_t^*)$ , emplea la hipótesis de igualdad de medias entre la serie “des-suavizada” y original. Como resultado de aplicar este método se obtiene la siguiente proporción  $\omega_0 = 0,81 \sigma_{\epsilon t} / \sigma_{RV}$ , que resulta en un valor de  $\omega_0 = 0,10$ . Por lo tanto, la aplicación de este segundo método resultará en un mayor aumento de la volatilidad de los rendimientos “des-suavizados” finales.
- Para el método de Brown y Matysiak (1998) los valores del parámetro de “des-suavizado” son fijados a partir del parámetro autorregresivo calculado en cada periodo sobre los 36 meses anteriores mediante un filtro de Kalman. Además, para testar la sensibilidad del anterior modelo hemos realizado estimaciones sobre los 24, 48 y 60 meses anteriores. Los valores de los parámetros

autorregresivos estimados para sobre la base de 36 y 60 meses pueden verse en el gráfico inferior. En el caso del modelo estimado sobre 36 meses (línea continua), destaca principalmente la brusca caída en la correlación serial desde niveles en torno a 0,88 (mediados de 2002) a niveles mínimos de de 0,07 (febrero de 2007) fecha a partir de la cual se ha experimentado un rápido incremento hasta regresar a niveles en torno a 0,9 (principios de 2009), a partir del cual se ha mantenido relativamente estable. Las otras dos caídas de la correlación serial se produjeron la primera de mediados de 1991 (valores en torno a 0,95) a inicios de 1993 (en torno a 0,53), mientras que la segunda de marzo de 1998 (0,86) a junio de 1999 (0,61). En el modelo estimado sobre 60 meses (línea discontinua) las caídas en el parámetro de “des-suavizado” se ven amortiguadas, sin embargo podemos afirmar que el parámetro de “des-suavizado” parece nuevamente variable en el tiempo.



- Para el método de Chaplin (1997) se ha aplicado subjetivamente adicciones / deducciones sobre el valor proporcionado por el parámetro AR(1) ( $k = 0,90$ ) en base a la relación entre los rendimientos suavizados y su distancia en desviaciones estándar ( $\sigma_{r_t^*}$ ) a la media ( $\mu_{r_t}$ ). Dado el elevado valor base (0,90) no se ha podido establecer demasiadas diferencias entre los parámetros de “des-suavizado” en cada estado de mercado (véase la tabla inferior). Se han empleado unos parámetros que mantiene la media de la serie “des-suavizada” similar a la original, sin embargo no están exentos de juicios de valor.

$k_i$	Estados de mercado	Hipótesis sobre rendimientos	Adiciones/ Deducciones
0,92	Si $r_t^* > 3,0\%$	$r_i > \mu_{r_t^*} + 2\sigma_{r_t^*}$ .	0,02
0,89	$3,0\% \leq r_t^* > 1,9\%$	$\mu_{r_t^*} + 2\sigma_{r_t^*} \leq r_i > \mu_{r_t^*} + 1\sigma_{r_t^*}$	-0,01
0,87	$1,9\% \leq r_t^* > 0,7\%$	$\mu_{r_t^*} + 1\sigma_{r_t^*} \leq r_i > \mu_{r_t^*}$	-0,03
0,88	$0,7\% \leq r_t^* > -0,4\%$	$\mu_{r_t^*} \leq r_i > \mu_{r_t^*} - 1\sigma_{r_t^*}$	-0,02
0,91	$-0,4\% \leq r_t^* > -1,6\%$	$\mu_{r_t^*} - 1\sigma_{r_t^*} \leq r_i > \mu_{r_t^*} - 2\sigma_{r_t^*}$	0,01
0,93	$r_t^* \leq -1,6\%$	$r_i \leq \mu_{r_t^*} - 2\sigma_{r_t^*}$ .	0,03

En la tabla inferior se recogen los resultados de la serie original de IPD y las series “des-suavizadas” aplicando los métodos expuestos. Los métodos de Geltner (1993a), Chaplin (1997) y Brown y Matysiak (1998) calculado sobre la base de una ventana móvil de 36 meses obtienen valores para la media mensual similares a los originales (0,72%), lo cual es una característica deseable. El modelo de Fisher et ál. (1994) en base al ratio entre la desviación de los rendimientos “des-suavizados” y la del mercado (versión original) obtiene valores inferiores, sin embargo dicho problema es subsanado en su segunda versión. Todos los métodos analizados elevan la volatilidad mensual de la serie original (1,16%). El modelo de Geltner (1993a) la multiplica en 4,4 veces, el modelo de Fisher et ál. (1994) en su versión original en 1,8, mientras que su versión modificada en 4,4, el modelo de Chaplin (1997) en 6 veces mientras que el modelo de Brown y Matysiak (1998) en 3,5 veces (versión 36 meses). En el caso de analizar la volatilidad anual, los métodos analizados también elevan la volatilidad de la serie original aunque en menor cuantía, bien atendiendo a años naturales (finales de Diciembre de cada año) bien calculando los rendimientos anuales en base a una ventana móvil de 12 meses. Los métodos analizados eliminan la elevada autocorrelación de la serie original. Se muestran los coeficientes de correlación serial de orden 1 y 2, que resultan no significativos para los modelos analizados<sup>163</sup>. Además bajo todos los modelos “des-suavizados” se rechaza la hipótesis de normalidad para los rendimientos mensuales y anuales (en base al año natural y ventana móvil), lo cual también sucedía para la serie IPD original.

<sup>163</sup> Se exceptúa el modelo de Brown y Matysiak (1998) calculado sobre 24 meses.

Estadística	IPD	Geltner	Fisher et ál. $\omega_0 = 2\sigma_z / \sigma_{\text{R}}^2$	Fisher et ál. $\omega_0 E(r_t) = E(r_t^2)$	Chaplin	Brown Y Matysiak 36 meses	Brown Y Matysiak 48 meses	Brown Y Matysiak 60 meses	Brown Y Matysiak 24 meses
Media Mensual	0,72%	0,73%	0,29%	0,72%	0,71%	0,72%	0,83%	0,93%	0,51%
Desv. Típica mensual	1,16%	5,16%	2,06%	5,11%	6,96%	4,03%	4,02%	4,31%	4,54%
Media anual (rolling)	9,47%	8,99%	3,47%	8,91%	8,51%	7,92%	8,99%	9,69%	5,51%
Media anual (natural)	9,47%	11,51%	3,91%	11,38%	13,38%	9,41%	10,74%	11,83%	6,31%
Desv. típica anual (rolling)	11,90%	20,51%	7,79%	20,31%	26,98%	14,52%	16,09%	18,04%	14,08%
Desv. típica anual (natural)	11,04%	33,08%	11,79%	32,71%	48,65%	26,90%	30,85%	34,28%	20,53%
$\rho_1$	0,90	-0,03	-0,03	-0,03	-0,03	0,00	0,05	0,06	-0,15
$\rho_2$	0,82	-0,04	-0,04	-0,04	-0,06	-0,15	-0,10	-0,10	-0,11
Var empírico (rolling)	-26,08%	-40,45%	-17,13%	-40,12%	-51,88%	-32,59%	-33,43%	-33,04%	-38,48%

Finalmente se muestra el cálculo efectuado del VaR, que reproduce la metodología empleada en la calibración de QIS5. Para ello se calcula el percentil 0,5% que representa la cola izquierda de la distribución empírica de rendimientos anuales calculados en base a una ventana móvil de 12 meses. Los distintos modelos proporcionan distintas cargas de capital, que a excepción del modelo original de Fisher et ál. (1994), superan las establecidas en el modelo estándar (25%). La carga de capital del índice IPD sin “des-suavizar” es del 26,08%, muy similar a la del modelo estándar.

Los modelos los podemos agrupar en cuatro grandes grupos<sup>164</sup>. El primer grupo, estaría formado por el modelo de Fisher et ál. (1994) original que proporciona un VaR del 17,13%. La explicación a esta reducida carga proviene de que la volatilidad de la *proxy* empleada para los rendimientos “des-suavizados”  $\sigma_{ei}$  resulta ser muy inferior a la de mercado  $\sigma_{RV}$  para el periodo analizado, por lo que el valor asignado de 2 a la relación entre volatilidades parece ser no adecuada. El segundo grupo estaría formado por el Brown y Matysiak (1998) en sus versiones de 36, 48 y 60 meses que proporcionan cargas de capital en torno al 33%. La estimación de este modelo sobre la base de ventanas de 24 meses proporciona parámetros autorregresivos muy volátiles, por lo que ocasiona resultados no muy fiables. El tercer grupo está formado por el modelo de Geltner (1993a) y el modelo de Fisher et ál. (1994) que emplea la hipótesis de igualdad de medias entre la serie “des-suavizada” y original. Ambos modelos proporcionan cargas de capital en torno al 40% del valor de la inversión. Finalmente, el último grupo estaría formado por el modelo de Chaplin (1997), que obtiene una carga de capital muy elevada, lo cual no es sorprendente dada la subjetividad del modelo, alcanzando valores muy diferentes a partir de distintas hipótesis de partida. Finalmente, debemos advertir que la distribución empírica de los rendimientos sobre la cual se calcula el VaR según el método expuesto por el CEIOPS es muy irregular en el tiempo. De esta forma si se empleara dicha técnica hasta el año 2007, y por lo tanto se excluyeran las mayores y recientes caídas del mercado, se obtendría un VaR histórico del 7,82% para el índice IPD original.

---

<sup>164</sup> Si en vez de emplear los rendimientos calculados en base a una ventana móvil se emplean los del año natural (30 de Diciembre), los resultados son similares para todas las técnicas de “des-suavizado” analizadas pero se reducen para el IPD original hasta un valor de 20,68%.

Debemos destacar que existen varios aspectos importantes en el análisis del riesgo de inmobiliario que no han sido tratados en este trabajo ni en el modelo estándar QIS5, proponiéndose como futuras líneas de investigación: estudiar la sensibilidad de los resultados obtenidos analizando el efecto del “des-suavizado” de los rendimientos de capital y del empleo de datos en términos reales, extender el análisis a mercados ajenos a Reino Unido, el análisis detallado de la correlación con otros riesgos de mercado, utilización de índices no basados en tasaciones, distinción adecuada entre inversión directa / indirecta y comercial / residencial y, finalmente, el posible empleo de los denominados modelos VaR para el cálculo de la carga de capital.

Nos parece adecuado realizar una reflexión sobre algunos de los aspectos anteriormente mencionados. Los problemas para la medición del riesgo en mercados ajenos al Reino Unido vienen derivados de la escasez de datos, debido a la menor frecuencia y la ausencia en muchos mercados de datos de series temporales largas para una estimación del percentil 0,5% fiable. En la relativo a la frecuencia, IPD en Europa proporciona un sólo índice mensual (en el Reino Unido), tres índices trimestrales (Países Bajos y Reino Unido), dos bianuales (Francia e Italia), y once índices anuales (Austria, Bélgica, Dinamarca, Finlandia, Alemania, Noruega, Polonia, Portugal, España, Suecia y Suiza). Fuera de Europa, una mayor proporción de los índices del IPD se actualizan trimestralmente (EE.UU., Australia, Canadá y Nueva Zelanda), pero algunos todavía se limitan a frecuencia bianual (Sudáfrica) o anual (Corea y Japón). A partir de los cuales se componen los denominados IPD Eurozona, IPD Pan - Europeo e IPD Global, ambos con frecuencia anual (véase IPD, 2011b). Como ya se recomendó en IPD (2011a), el empleo de un índice global o por lo menos, pan-europeo, debiera ser considerado en el modelo de riesgo de Solvencia II. Esto provocaría probablemente cargas de capital menores a las actualmente consideradas en el modelo estándar.

El análisis de la correlación con otros riesgos de mercado es de nuevo una tarea complicada dada la escasez de datos de mercado, por lo que como se afirma en IPD (2011a) las correlaciones estipuladas en QIS5 respecto a los otros riesgos de mercado son vistas por las compañías aseguradoras europeas como demasiado conservadoras (elevadas). Otra cuestión importante, y ya utilizada en el anterior informe, es el posible empleo de índices no basados en tasaciones. La

metodología empleada en el estudio de IPD (2011a) podría ser empleada para la calibración del riesgo inmobiliario. El índice LTI (véase Devaney y Martínez, 2010) no está basado en tasaciones y por lo tanto, no es necesario aplicar las técnicas analizadas en este trabajo.

Otra propuesta es evaluar la conveniencia de distinguir entre inversión directa e indirecta, o como se ha realizado en las pruebas de estrés de 2011 la separación entre inversión comercial y residencial. En la actualidad existe una gran duda en las aseguradoras europeas acerca de cómo deben considerar las inversiones indirectas en fondos de inversión a la hora de estimar los requerimientos de capital. QIS5 hace referencia a que las cargas de instrumentos de inversión colectiva deben tratarse a través de la técnica “*look-through*”, según la cual se debe evaluar los riesgos aplicables a los activos subyacentes y aplicar las exigencias de capital calculadas para cada sub módulo. Ello provoca en la práctica que algunas compañías consideren tales inversiones como puramente inmobiliarias mientras que otras las consideran renta variable (véase IPD, 2011a). En este sentido parece que las compañías demandan una mayor especificidad del modelo estándar, como pudiera ser la realizada en el test de solvencia suizo<sup>165</sup>. El modelo suizo es mucho más granular que el modelo estándar de Solvencia II. Actualmente hay 77 factores de riesgo de mercado que se supone están distribuidos normalmente y se aplican las correlaciones históricas para su agregación, calculando el TVaR al 99%. En lo relativo al riesgo de inversión inmobiliario se distinguen cuatro factores: dos para inversión directa y dos para indirecta (véase FINMA, 2011). El riesgo de inversión inmobiliaria directa se aproxima por el índice SWX IAZI de inversión inmobiliaria (inversión residencial) y la volatilidad de las propiedades comerciales directas. Para las inversiones indirectas se aplica para los fondos el índice Rüd Blass y para las compañías inmobiliarias el Wuest & Partner WUPIX A. Respecto a la separación entre comercial y residencial, el modelo español de solvencia (MES) desarrollado por ICEA y UNESPA como alternativa a QIS3 ya sugería esta distinción, para la calibración del riesgo residencial se empleó el índice Nationwide HPI para el Reino Unido.

---

<sup>165</sup> El test de solvencia suizo fue presentado como un nuevo método para evaluar la solvencia de las compañías de seguros el 1 de enero de 2006. Finalizado el periodo de transición de cinco años, se ha introducido el 1 de enero 2011. El test de solvencia suizo es un modelo que tiene muchas similitudes con Solvencia II, de hecho se espera que sea considerado como país de equivalencia, lo que en la práctica supone confianza en su régimen de supervisión.

Finalmente deseamos hacer un comentario acerca del empleo de técnicas paramétricas para el cálculo del VaR. Es bien conocido que los rendimientos del mercado inmobiliario no son normales. Miles y McCue (1984), Myer y Webb (1994) Graff et ál. (1997), Maitland-Smith y Brooks (1999) y Maurer et ál. (2004) proporcionan evidencia para distintos mercados (americano, australiano, británico y germano). En QIS5 se ha empleado la distribución empírica de los rendimientos para calcular el VaR, dado que los datos no sustentaban la normalidad de la serie analizada. En este trabajo, nosotros replicamos dicha metodología. Otras alternativas podrían emplear técnicas de series temporales para estimar modelos de valor en riesgo y posteriormente realizar un *backtesting* de los resultados obtenidos.

### **4.3. ANÁLISIS DEL RIESGO DE TIPOS DE CAMBIO**

En este apartado del trabajo se centra en la estimación, comparación y *backtesting* de distintas alternativas para modelizar el tipo de cambio. Posteriormente, hemos comparado la determinación de capital resultante de aplicar estos modelos frente a la propuesta del cuarto y quinto estudio de impacto cuantitativo (QIS4 y QIS5).

#### **4.3.1. Introducción y revisión teórica**

La probabilidad de tener pérdidas debidas a fluctuaciones desfavorables e inesperadas (no cubiertas) en los tipos de cambio es lo que se conoce como riesgo cambiario, de divisa o de tipos de cambio (*currency risk*). La exposición al riesgo de tipos de cambio para una compañía aseguradora puede tomar diferentes formas: exposición de transacción, exposición por traslación y exposición operativa. La exposición de transacción surge de las transacciones que implican movimientos de flujos de efectivo futuros denominados en una moneda diferente a la moneda local. El riesgo se produce cuando varía el tipo de cambio desde la fecha del acuerdo celebrado y la fecha en que la transacción se realiza financieramente, y puede afectar tanto a acuerdos referentes a activos como a pasivos. Esta exposición es la que se trata dentro del módulo de riesgo de mercado. La exposición operativa valora el cambio en el valor presente de los flujos de efectivo operativos

esperados en el futuro. Se dice que es una exposición económica ya que el valor futuro de la compañía es una función de los flujos de efectivo futuros de la misma, sin embargo no está contemplado actualmente en el modelo estándar. La exposición por traslación es una exposición contable que afecta principalmente a las empresas transnacionales o multinacionales, pues estas requieren expresar las cuentas anuales de sus filiales en la moneda local a fin de elaborar sus cuentas anuales consolidadas. Esta operación puede afectar las distintas cuentas afectando el valor del activo, pasivo y patrimonio neto en los grupos de empresas por lo que también se recoge para los mismos en Solvencia II<sup>166</sup>.

El riesgo en divisa depende de los sistemas cambiarios de los distintos países, que se pueden clasificar como sistemas de tipo flexible, fijo y semifijo. En el sistema flexible se deja actuar libremente a la oferta y a la demanda de las distintas divisas, lo que tiene por resultado la mayor o menor oscilación de los tipos de cambio. En un sistema de cambios fijo el tipo de cotización se mantiene sin variaciones en el tiempo mediante intervenciones en el mercado. Finalmente, un sistema semifijo permite variaciones en el tipo de cambio dentro de los límites o bandas de fluctuación marcadas. El sistema de cambios de una divisa no es algo inamovible en el tiempo, sino que en las últimas décadas hemos visto como distintos países dejaron fluctuar libremente las monedas en el mercado o, en el sentido opuesto, se incorporaron a uniones monetarias o emplearon la dolarización.

La modelización de los tipos de cambio ha sido tradicionalmente abordada a través de los denominados modelos fundamentales y econométricos. El enfoque fundamental para la modelización de los tipos de cambio se basa en una amplia gama de datos de variables económicas fundamentales que determinan los tipos de cambio. El tipo de cambio de una moneda viene determinado por muchas variables económicas, como por ejemplo los tipos de interés y la inflación. Altas tasas de inflación e interés relativas provocarán una depreciación de la moneda, siguiendo los postulados de la teoría de la paridad del poder adquisitivo y el efecto Fisher internacional. De esta forma podríamos considerar que los tipos de

---

<sup>166</sup> Este riesgo haría referencia al tratado en el apartado *G.2.3. Additional guidance for the calculation of the consolidated group SCR a. Market risk (currency risk)* de la sección 6 de las especificaciones técnicas del QIS5 relativas a Grupos. Esta carga adicional a nivel de grupos cuando las filiales están en zona no euro ha sido tratado por la CEA (2011b) y el CRO Forum (2011).

cambio son una variable estadísticamente exógena a otras variables macroeconómicas. Ejemplos de estas variables que han sido consideradas en distintos trabajos serían el PIB, el consumo, la balanza comercial, la inflación, los tipos de interés, la productividad, las tasa de desempleo, la oferta monetaria, etc. Meese y Rogoff (1983a, b) encontraron que los modelos fundamentales del tipo de cambio fallaban sistemáticamente en la predicción de los valores futuros, no siendo capaces de realizar mejores pronósticos que un paseo aleatorio simple en horizontes de hasta un año. Engel y Kenneth (2004, 2005) ofrecen una explicación de la naturaleza de paseo aleatorio del tipo de cambio en que existen algunas variables fundamentales que no son observables y que siguen un camino aleatorio, lo que es contrario a la mayoría de los modelos macroeconómicos formulados.

La segunda técnica de modelización no se basa en el análisis de las variables fundamentales de una economía sino que confía en el análisis univariante. Friedman y Vandersteel (1982) estimaron distintos modelos, entre los que se encontraban la distribución Pareto estable y la mixtura de normales, sugiriendo que los rendimientos del tipo de cambio pueden ser descritos por una distribución normal con parámetros que varíen el tiempo. Aplicaciones de distintos modelos GARCH para los tipos de cambio se pueden ver, entre otros, en los trabajos iniciales de Engle y Bollerslev (1986) y Hsieh (1988), y en otros posteriores (véase por ejemplo Hsieh, 1989; Baillie y Bollerslev, 1989; Engle y Gau, 1997; Johnston y Scott, 2000). Asimismo, se han aplicado modelos de cambio de régimen (RS normal, RSGARCH) en el trabajo original de Engle y Hamilton (1990), así como en Engle (1994), Bollen et ál. (2000) y Klaassen (2002) y de los modelos de mixtura GARCH en Alexander y Lazar (2006).

La modelización de los tipos de cambio dentro del ámbito asegurador ha sido abordada en los trabajos de Wilkie (1995), Gorratt (2001), Blum et ál. (2001) y Chan et ál. (2004) empleándose tanto modelos fundamentales como econométricos. Wilkie (1995) modeliza el proceso como autorregresivo con un componente basado en la paridad del poder de compra. Gorratt (2001) propone como posibles candidatos un modelo normal o un modelo con reversión a la media como el CIR (Cox, Ingersoll y Ross, 1985). Blum et ál. (2001) emplean modelos de regresión múltiple dinámica en los que se tiene en cuenta la diferencia entre las tasas de inflación y la diferencia entre los tipos de interés de las distintas monedas. Finalmente, Chan et ál. (2004) proponen un modelo autorregresivo por umbrales (SETAR).

### ***El riesgo en divisa en QIS5 y su calibración a partir de los distintos QIS***

En QIS5 se afirma que el riesgo cambiario surge de los cambios en el nivel o volatilidad de los tipos de cambio. Las empresas pueden estar expuestas al riesgo de divisa por sus activos y pasivos. Se denomina moneda local a la divisa en la que la compañía aseguradora prepara sus cuentas anuales, mientras que el resto de divisas se le denomina como monedas extranjeras. Se dice que una moneda extranjera es relevante en Solvencia II para el cálculo de escenarios de capital si la cantidad de fondos propios de base depende del tipo de cambio entre la moneda extranjera y la moneda local. Para cada moneda extranjera relevante (*C*) se debe calcular la posición en divisas siempre que el riesgo cambiario no esté cubierto (empleo de derivados, etc.), ya que los otros sub-módulos de mercado (renta variable, tipos de interés, inmuebles, etc.) no han sido diseñados para tener en cuenta el riesgo en divisa. Para cada divisa relevante se debe calcular la carga de capital  $Mk\text{tfx},C$  que se determina como el máximo de la carga de capital en el escenario de subida de tipos  $Mk\text{tfx},CUp$  y en el de bajada  $Mk\text{tfx},CDown$ . Estos escenarios han sido fijados en QIS5 como los producidos por un cambio del  $\pm 25\%$  del valor (subida y bajada respectivamente) frente a todas las divisas relevantes<sup>167</sup>. La carga de capital total  $Mk\text{tfx}$  es la suma de todas las cargas individuales  $Mk\text{tfx},C$ .

Para la calibración del *shock* del 25% en QIS5 se emplean datos diarios de divisas frente a la libra esterlina británica para el periodo comprendido entre enero de 1971 y junio de 2009 y al euro (para la mayoría de divisas los datos son desde 1999 a 2009). Las divisas para las que se computan los rendimientos anuales por acumulación de los rendimientos diarios son: el yen japonés (JPY), el real brasileño (BRL), la lita lituana (LTL), la rupia india (INR), el yuan chino (CNY), el dólar de Hong Kong (HKD), el dólar australiano (AUD), el dólar de Nueva Zelanda (NZD), la corona noruega (NOK), la corona sueca (SEK) la corona danesa (DKK), el franco suizo (CHF) y la libra esterlina (GBP). Se considera que las divisas CNY, INR, HKD, AUD, BRL y ARS son una *proxy* de la exposición a mercados emergentes. Del estudio de la distribución anual acumulada de rendimientos se aprecia

---

<sup>167</sup> Los escenarios de subida y bajada se han establecido en una cantidad muy inferior para ciertas monedas con tipos de cambio vinculados al euro: un  $\pm 2,25\%$  de la corona danesa, un 0% para la corona eslovaca, un  $\pm 1\%$  para el lats letón y un 0% para la lita lituana.

que las distribuciones tienen un exceso de curtosis y son asimétricas lo que violaría la ley normal que se establece en QIS4 y sus predecesores. Además, el *shock* del 20% establecido en QIS4 resulta insuficiente para la mayoría de las divisas analizando el percentil empírico al 99,5% de probabilidad, destacando que dicho percentil se alcanza además para muchas de las divisas en los últimos periodos muestrales (años 2008 y 2009). Posteriormente, se analizan los peores escenarios producidos para cada moneda y se establecen posibles 16 cestas de divisas formadas con ponderaciones distintas. Los resultados varían sensiblemente en función del peso que se le asigna en cada cesta a las distintas divisas, en especial a la proporción otorgada a los mercados emergentes dado que son los de mayor volatilidad. También se analiza el efecto de la concentración de riesgos en las principales divisas (USD, JPY, CHF y GBP) y el efecto de no considerar la exposición a mercados emergentes. Como resultado de estos test de sensibilidad se propone un factor de estrés simétrico del 25%.

En QIS4 la carga de capital es el resultado de dos escenarios predefinidos en los que se calculan un *shock* de subida y de bajada del 20% de todas las monedas distintas a la cual la empresa presenta sus cuentas y se calcula el efecto inmediato en el valor neto de los activos y pasivos. Este factor permanece inalterado respecto a QIS3 en donde en su calibración se emplearon los tipos de cambio mensuales contra el euro durante el periodo 1958-2006 de un grupo de divisas, empleándose su hipotética cotización para el periodo anterior a 1999. Tomando estas divisas se formaron una cesta de monedas<sup>168</sup> frente al euro que representaban las posiciones mantenidas por las instituciones financieras de Holanda. El ajuste de las variaciones porcentuales entre el tipo de cambio de dichas divisas frente al euro se modeliza a través de una distribución normal<sup>169</sup>. El VaR de la cesta resultante era, a partir de las volatilidades obtenidas, algo inferior al

---

<sup>168</sup> Los pesos de cada moneda en las cestas eran de un 35% para el dólar americano (USD), un 24% para la libra británica (GBP), un 13% para el peso argentino (ARS), un 8% para el yen japonés (JPY), un 7% para la corona sueca (SEK), un 7% para el franco suizo (CHF) y un 6% para el dólar australiano (AUD). El peso argentino fue empleado como una *proxy* de exposición del riesgo de cambio a los mercados emergentes.

<sup>169</sup> En vista a los resultados obtenidos la hipótesis de normalidad se consideró aceptable por el CEIOPS, sin embargo, también se citó que el ajuste a través de otros modelos más sofisticados podrían proporcionar un mejor ajuste.

20%<sup>170</sup>. Posteriormente se efectuaron dos análisis de sensibilidad de dicho factor. En el primero, se consideraban las variaciones en el tipo de cambio respecto a la libra esterlina para el periodo 1973-2006, obteniendo un factor ligeramente superior al 20%<sup>171</sup>. En el segundo, se modificaron las ponderaciones de cada divisa en la cesta de monedas frente al euro y frente a la libra esterlina, siendo los resultados consistentes con la aplicación de un factor del 20%<sup>172</sup>.

#### 4.3.2. Análisis empírico, *backtesting* y simulación

Las compañías aseguradoras españolas deben presentar sus cuentas anuales en euros, por lo que centraremos nuestra exposición a dicha moneda sin considerar la libra esterlina, a diferencia de los distintos QIS. El euro como moneda común sólo existe desde el año 1999, circulando los billetes y monedas desde el 1 de enero de 2002 por los países de la zona euro<sup>173</sup>. El periodo transcurrido desde entonces podría no proporcionar observaciones suficientes para permitir un análisis empírico detallado del riesgo en divisas por lo cual hemos decidido utilizar una serie histórica más larga. Esto está en línea con lo realizado en QIS3/QIS4 donde se emplearon los tipos de cambio mensuales contra el euro de una cesta de monedas<sup>174</sup> empleándose su hipotética cotización para el periodo anterior a 1999. Eurostat publica diferentes datos sobre los tipos de cambio, a los que se puede acceder gratuitamente a través de su web<sup>175</sup>. En especial nos

---

<sup>170</sup> El valor calculado en base a las correlaciones establecidas es de -17,34%.

<sup>171</sup> El valor calculado en base a las correlaciones establecidas es de -21,10%.

<sup>172</sup> Para el caso del euro el mayor VaR obtenido resultó ser del -22,55%, mientras que para el caso de la libra dichos factores fueron superiores resultando el peor escenario un VaR del -25,41%.

<sup>173</sup> Los doce países que adoptaron el euro ese año fueron Alemania, Austria, Bélgica, España, Finlandia, Francia, Grecia, Irlanda, Italia, Luxemburgo, Países Bajos y Portugal. Actualmente el euro es la moneda oficial de 17 países ya que el 1 de enero de 2007 el euro entró en circulación en Eslovenia, el 1 de enero de 2008 el euro entró en circulación en Chipre y Malta, el 1 de enero de 2009 el euro entró en circulación en Eslovaquia, y finalmente, el 1 de enero de 2011 el euro entró en circulación en Estonia.

<sup>174</sup> Los pesos de cada moneda en las cestas eran de un 35% para el dólar americano (USD), un 24% para la libra británica (GBP), un 13% para el peso argentino (ARS), un 8% para el yen japonés (JPY), un 7% para la corona sueca (SEK), un 7% para el franco suizo (CHF) y un 6% para el dólar australiano (AUD). El peso argentino fue empleado como una *proxy* de exposición del riesgo de cambio a los mercados emergentes.

<sup>175</sup> Pueden descargarse en [http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/exchange\\_rates/data/database](http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/exchange_rates/data/database)

interesan los tipos de cambio bilaterales entre las distintas monedas en relación con el euro, que emplea para el periodo anterior a 1999 la relación con la unidad monetaria europea (ECU). El ECU dejó de existir el 1 de enero de 1999, cuando fue sustituido por el euro al tipo de cambio de 1 a 1. Desde esa fecha, las monedas de la zona del euro se convirtieron a tasas de conversión irrevocable, en el caso español 166,386 pesetas equivaldrían a 1 euro. Para el periodo anterior a 1979 los tipos de cambio se refieren a la Unidad de Cuenta Europea (UCE) y no ECU. Sin embargo, el valor de la ECU y la composición, cuando se presentó, era idéntica a la UCE, que empezó a existir oficialmente el 28 de junio de 1974, cuando fue igual a 1 DEG (Derecho Especial de Giro). La serie de tipos de cambio mensuales, con fecha fin de cada mes, está disponible a partir de julio de 1974<sup>176</sup>. La ventaja de emplear esta serie es que cubre casi completamente la historia del sistema de tipos de cambio flexibles implantado con la caída del sistema monetario internacional del patrón oro establecido en Bretton Woods (1944-1971).

Al emplear el ECU como el precursor del euro, debemos ser conscientes de tres posibles problemas. En primer lugar, en la cesta del ECU figuran monedas que no se han fusionado en el euro en 1999: el dracma griego que lo hizo el 1 de enero de 2001 y dos monedas que todavía no lo han hecho (la libra esterlina y la corona danesa). En segundo lugar, en la cesta del ECU no se incluyen monedas de otros países que forman parte del euro (el chelín austríaco y el marco finlandés). En tercer lugar, la cesta del ECU ha sufrido modificaciones desde que fue concebida. Su composición inicial perduró hasta el 16 de septiembre de 1984, sufrió una primera variación en las monedas y ponderaciones de estas hasta el 21 de Septiembre de 1989, y una segunda que perduraría hasta el fin de su existencia el 31 de Diciembre de 1999. Esto puede dar lugar a ciertas dudas sobre el paralelismo del euro y el ECU.

El modelo estándar para el riesgo en divisa ha sido calibrado a partir de una cesta de divisas intentando recoger de una manera simple y en un único *shock*

---

<sup>176</sup> Los datos proporcionados por Eurostat proceden del Banco Central Europeo, para los datos anteriores al 31 de diciembre de 1998 (serie ECU) los tipos fueron calculadas por la Comisión Europea. Para más información léase [http://epp.eurostat.ec.europa.eu/cache/ITY\\_SDDS/EN/ert\\_bil\\_esms.htm](http://epp.eurostat.ec.europa.eu/cache/ITY_SDDS/EN/ert_bil_esms.htm)

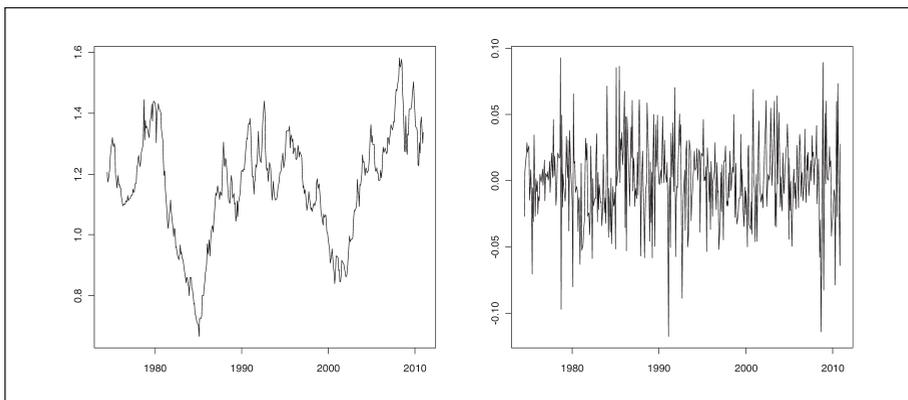
la exposición de una aseguradora a múltiples divisas, por lo tanto a diferencia de la calibración del riesgo de inmuebles recoge un *shock* global. Sin embargo, un modelo interno debiera modelizar únicamente la/s divisa/s a las que está expuesta una compañía aseguradora en sus activos o pasivos. La serie elegida en el siguiente apartado se refiere a una única moneda extranjera (dólar) por simplicidad, pudiéndose extender de manera análoga el análisis realizado a todas aquellas monedas extranjeras relevantes para el cálculo de la carga de capital.

### **Análisis rendimientos logarítmicos dólar/euro (1974-2010)**

A continuación se muestran los tipos de cambio de la serie mensual dólar/euro<sup>177</sup> (gráfico izquierda) desde julio de 1974 hasta diciembre de 2010 (438 observaciones). Se observa una fuerte caída del tipo de cambio dólar/euro desde principios de los años 80 a mediados de década, fecha a partir de la cual el tipo de cambio comienza a subir. Como ejemplo, podemos decir que el tipo de cambio en enero de 1980 era de 1,43 marcando su valor mínimo (0,67) en febrero de 1985, fecha a partir de la cual rebota. La segunda gran caída histórica se produce en torno al año 2000, en donde se marcaron varios mínimos cercanos a 0,84. A partir del año 2002 se observa un fuerte incremento que llevaría a alcanzar un nivel máximo de 1,58 a principios de 2008. En el gráfico inferior derecho se muestran los rendimientos logarítmicos de los tipos de cambio de la serie mensual dólar/euro de agosto de 1974 hasta diciembre de 2010 (437 observaciones). Se observa como los rendimientos mensuales se han mantenido en niveles aproximados dentro de la banda [-12%; 10%].

---

<sup>177</sup> Hemos empleado los tipos de cambio indirectos (dólar/euro) en vez de los directos (euro/dólar). Para pasar del tipo de cambio indirecto al directo se obtiene mediante el inverso. De esta forma las estadísticas calculadas pueden variar en función de la forma en el que el tipo de cambio venga expresado. En concreto, la media y mediana tendrá el mismo valor pero signo opuesto, el máximo del directo será el mínimo del indirecto y viceversa, caso semejante ocurre con los distintos percentiles, mientras que la desviación típica será idéntica. Al emplear rendimientos logarítmicos podemos afirmar que dichas propiedades se siguen cumpliendo ya que una característica de los rendimientos logarítmicos es que los rendimientos de un tipo de cambio en cualquier periodo es de igual cuantía pero signo contrario al calculado para el tipo de cambio directo. Es decir:  $r_{\text{logarítmico,Idcdirecto}} = -r_{\text{logarítmico,Idcindirecto}}$ . Sin embargo, en el caso de los rendimientos aritméticos se produce la siguiente igualdad  $r_{\text{logarítmico,Idcdirecto}} = -1 + 1/(1 + r_{\text{ogarítmico,Idcindirecto}})$ , por lo que las estadísticas calculadas son distintas.



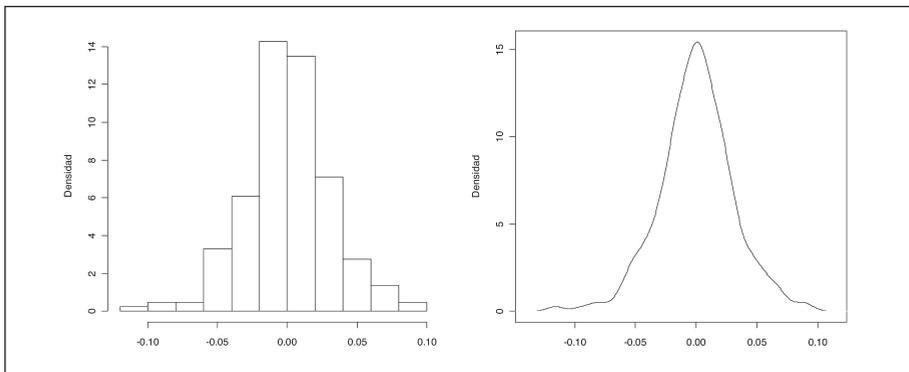
Las estadísticas resumen de ambas series (tipos de cambio y rendimientos logarítmicos) se muestran en la tabla inferior.

Estadística	Tipos de cambio	Rendimientos logarítmicos
Mínimo	0,6676	-11,77%
Percentil 0,5%	0,7113	-9,58%
1º cuartil	1,0675	-1,65%
Media	1,1621	0,02%
Mediana	1,1810	0,03%
3º cuartil	1,2849	1,85%
Percentil 99,5%	1,5598	8,64%
Máximo	1,5812	9,31%
Desv. típica	17,87%	3,07%

Si realizamos un agrupamiento de los datos de la serie de rendimientos del tipo de cambio vemos que un 89,02% (387 observaciones) de los valores está comprendido entre -5% y un 5% de variación mensual. Las probabilidades de cada intervalo, proporcionadas por las de la distribución normal ajustada (media y desviación calculadas), se muestran al lado del porcentaje empírico para cada intervalo. Se aprecia el pobre ajuste de la distribución normal a la cola izquierda (rendimientos extremadamente negativos) de la serie, dado que es incapaz de recoger las bruscas caídas del tipo de cambio sucedidas empíricamente (apreciaciones del dólar o depreciaciones del euro, dado que trabajamos con tipo de cambio indirecto).

Intervalo	Casos	Porcentaje real	Probabilidad normal
P[-0,15; -0,1]	2	0,46%	0,05%
P[-0,1; -0,05]	22	5,03%	5,04%
P [-0,05; 0]	192	43,94%	44,61%
P [0; 0,05]	197	45,08%	45,05%
P [0,05; 0,1]	24	5,49%	5,19%
P [0,1; 0,15]	0	0,00%	0,06%
Total	437	100,00%	100,00%

A continuación mostramos el histograma y el gráfico de densidad<sup>178</sup> de la serie mensual de rendimientos. Los rendimientos son ligeramente asimétricos a la izquierda (el coeficiente de simetría asciende a -0,17) y presentan un claro exceso de curtosis<sup>179</sup> (el coeficiente de curtosis asciende a 4,15), lo que lleva a rechazar la hipótesis de normalidad ( $p$ -valor<5%) como se aprecia en la tabla inferior<sup>180</sup>.



<sup>178</sup> Se ha empleado una función de densidad o Kernel gaussiano.

<sup>179</sup> Calculado suponiendo la curtosis de la distribución normal igual a 3.

<sup>180</sup> Dicho test sólo tiene en cuenta los momentos de la serie por lo que para analizar otras características empleamos otros test tradicionales (Anderson-Darling, Cramer-von Mises, Lilliefors y Shapiro-Francia). Todos los test rechazan la normalidad.

Test	Dólar/Euro	
	Estadística	p-valor
Anderson-Darling	1,47	0,08%
Cramer-von Mises	0,25	0,13%
Lilliefors	0,05	1,52%
Shapiro-Francia	0,99	0,05%

	Rendimientos logarítmicos Dólar/Euro
Asimetría	-0,17
Curtosis	4,15
Jarque Bera	26,33
Prob.	0,00%

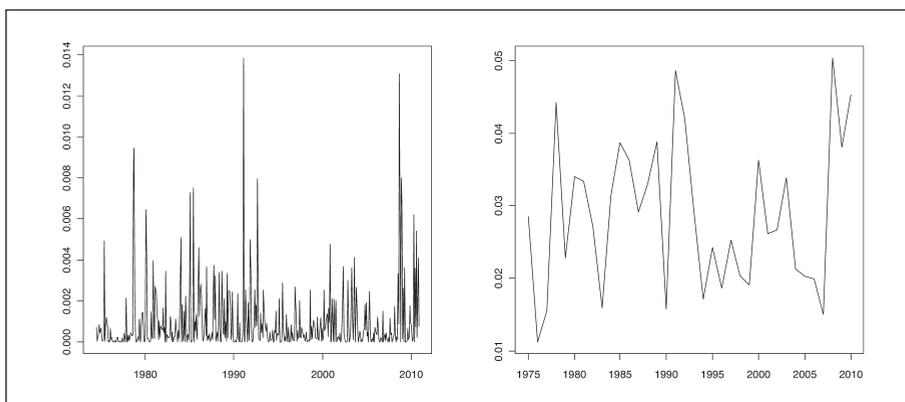
Los correlogramas de las serie de rendimientos muestran que los rendimientos están incorrelacionados (tabla inferior). Los correlogramas de las serie de rendimientos al cuadrado muestran que, en general, están correlacionados a lo largo del tiempo para ambas series. Se rechaza la hipótesis nula de incorrelación para los retardos inferiores a cuatro (p-valor inferior al 5%). Esta estructura de dependencia implica la existencia de dependencia en la varianza de los rendimientos mensuales.

Retardo	Rendimientos dólar/euro				Rendimientos al cuadrado dólar/euro			
	AC	PAC	Q	p-valor	AC	PAC	Q	p-valor
1	0,032	0,032	0,443	0,506	0,085	0,085	3,155	0,076
2	0,043	0,042	1,242	0,537	0,105	0,098	7,982	0,018
3	0,057	0,055	2,682	0,443	0,035	0,019	8,527	0,036
4	-0,043	-0,049	3,516	0,475	0,069	0,056	10,631	0,031
5	0,037	0,035	4,123	0,532	0,025	0,011	10,906	0,053
6	-0,034	-0,036	4,634	0,592	-0,034	-0,050	11,426	0,076
7	0,006	0,011	4,650	0,703	0,032	0,033	11,883	0,104
8	0,003	-0,001	4,653	0,794	-0,033	-0,035	12,356	0,136
9	0,043	0,050	5,495	0,789	0,030	0,030	12,770	0,173
10	0,026	0,017	5,793	0,832	0,024	0,030	13,028	0,222
11	0,087	0,086	9,188	0,605	0,027	0,017	13,364	0,270
12	-0,037	-0,053	9,814	0,632	-0,010	-0,018	13,406	0,340

Si analizamos la evolución temporal de la serie de rendimientos al cuadrado como estimadores de la volatilidad se aprecia como esta ha sido muy variable a lo largo del tiempo (gráfico inferior izquierda). Esta variación en la volatilidad en el periodo observado se aprecia nuevamente en el gráfico de la derecha, que representa las desviaciones típicas muestrales calculadas para los rendimientos mensuales de cada año natural entre 1975 y 2010<sup>181</sup>. Se observa que ha

<sup>181</sup> Se calcula la desviación de la serie de rendimientos mensual por periodos de cada año, es decir se estima con las doce observaciones disponibles en cada año su volatilidad.

existido una menor varianza entre los años 1994 y 2007, fecha a partir de la cual la volatilidad vuelve a aumentar.

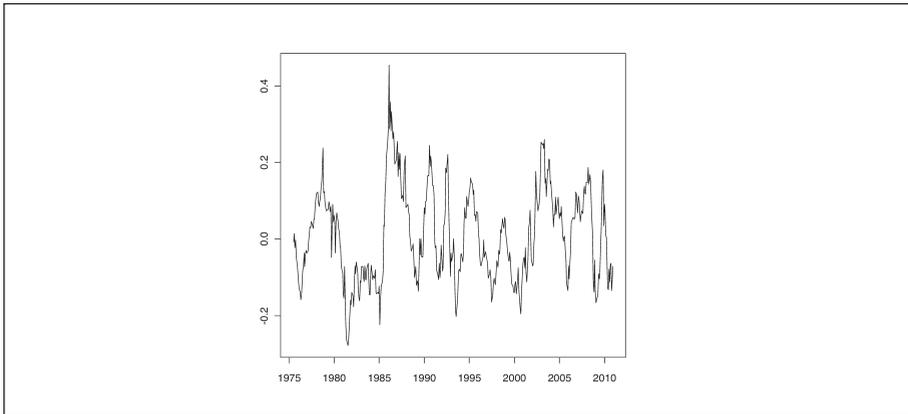


Fruto del anterior análisis podemos resumir los siguientes datos. Respecto al tipo de cambio dólar/euro: el valor mínimo (0,6676) se alcanza en febrero de 1985, mientras que el valor máximo (1,5812) en marzo de 2008. El valor medio de la serie para el periodo temporal analizada se sitúa en torno a 1,16, valor que está alejado relativamente del valor de finales de 2010 (1,33). Respecto a los rendimientos logarítmicos su valor mínimo (-11,77%) se alcanza en marzo de 1991, mientras que su valor máximo (9,31%) se alcanza en octubre de 1978. La serie muestra una media de 0,02%, lo que conlleva una apreciación media del euro (depreciación del dólar) a lo largo del periodo analizado. La distribución de los rendimientos es no normal dada su elevada curtosis, al tiempo que la distribución es ligeramente asimétrica a la izquierda. Los rendimientos están incorrelacionados a lo largo del tiempo pero no sus cuadrados, lo que indica la existencia de cambios en la volatilidad de la serie a lo largo del tiempo.

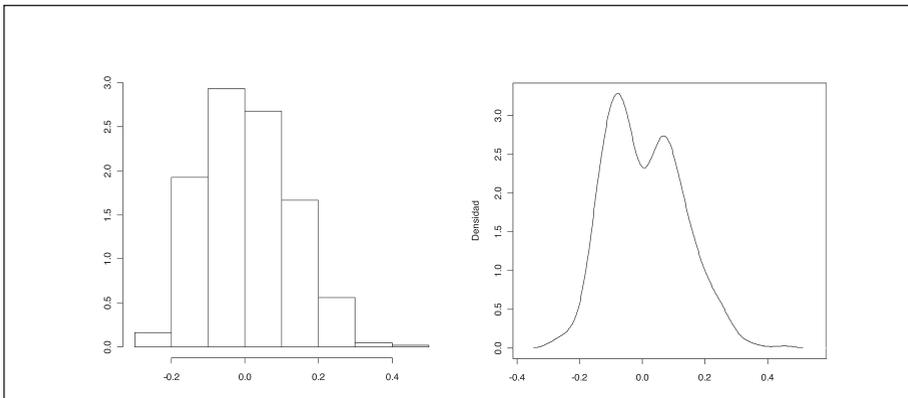
Analizaremos ahora la distribución de rendimientos anuales aritméticos calculada como acumulación de los rendimientos mensuales de cada serie, de forma semejante a lo realizado en QIS5 con datos diarios<sup>182</sup>. Dado que teníamos 438

<sup>182</sup> Recuérdese que se realizó un análisis similar con una serie temporal más corta para un mayor número de divisas y por acumulación de rendimientos diarios, lo que daría un mayor número de observaciones de los rendimientos anuales generados.

observaciones de la serie del tipo de cambio podemos generar 426 rendimientos anuales acumulando los rendimientos de 12 meses consecutivos (gráfico inferior). Se aprecia como los peores escenarios históricos en términos de riesgo han sido julio de 1981 donde se acumuló una caída anual del tipo de cambio del -27,82% (de 1,4174 en julio de 1980 a 1,0203 en julio de 1981) y febrero de 1986 donde la subida anual acumulada ascendió al 45,39% (de 0,6676 en febrero de 1985 a 0,9707 en febrero de 1986).



El histograma y el gráfico de densidad de la serie de rendimientos anuales acumulados se muestran a continuación. En ellos se aprecia que la serie dista de ser normal, apareciendo dos picos en el gráfico de densidad (bi-modal).



En la tabla inferior se muestran las estadísticas resumen de la distribución de rendimientos anuales empírica empleando la técnica de la ventana móvil de 12 meses, es decir por acumulación de todos los rendimientos mensuales, frente a la resultante de emplear el año natural (enero a diciembre del año). Se observa como el empleo el método del *rolling window* genera más riesgo medido en términos de valores extremos (máximo y mínimo), percentiles y desviación típica que el empleo del año natural. Destaca además la gran diferencia que el valor máximo de la serie anual de rendimientos mediante ventana móvil (45,39%) y el percentil al 99,5% de probabilidad de la distribución (32,59%). Esto es debido a que este valor máximo está muy alejado de los siguientes valores más altos de la serie. El segundo valor máximo asciende a 35,77%, estando dicho percentil entre el tercer valor más elevado (33,10%) y el cuarto (29,04%). En las dos últimas columnas se muestran los datos que se obtendrían de haber analizado el tipo de cambio directo.

Estadística	R. a. indirecto		R. a. directo	
	Ventana de 12 meses	Año natural	Ventana de 12 meses	Año natural
Mínimo	-27,82%	-11,79%	-31,22%	-20,83%
Percentil 0,5%	-25,96%	-11,78%	-24,57%	-20,28%
1º cuartil	-8,65%	-7,53%	-8,32%	-9,58%
Media	0,86%	2,15%	0,55%	-1,04%
Mediana	-0,21%	-1,65%	0,21%	1,68%
3º cuartil	9,08%	10,60%	9,46%	8,15%
Percentil 99,5%	32,59%	25,46%	35,07%	13,36%
Máximo	45,39%	26,32%	38,55%	13,36%
Desv. típica	12,03%	10,90%	11,84%	10,29%
Asimetría	0,38	0,38	0,17	-0,15
Curtosis <sup>183</sup>	2,78	1,95	2,66	2,25

En la tabla inferior se resumen los *shocks* (subida y bajada) que se corresponderían con un valor en riesgo al 99,5% de probabilidad para los rendimientos anuales empíricos y su comparativa con los resultantes del empleo de la distribución normal. En el caso de los rendimientos empíricos el método del año natural, en vez

<sup>183</sup> Calculado suponiendo la curtosis de la distribución normal igual a 3.

de emplear el método del *rolling window*, provoca en general menores cargas de capital, dado que los peores escenarios históricos fueron acontecidos a mitad del año. El segundo hecho que queremos resaltar es que la hipótesis de normalidad amplifica, en la mayor parte de los casos, los *shocks* empíricos.

Técnica para acumular rendimientos	Modelo	Escenario	Shock
Ventana de 12 meses (426 rendimientos anuales)	Empírico	Escenario caída (percentil 0,5%)	-24,57%
		Escenario subida (percentil 99,5%)	35,07%
	Normal	Escenario caída (percentil 0,5%)	-29,95%
		Escenario subida (percentil 99,5%)	31,04%
Año natural (36 rendimientos anuales)	Empírico	Escenario caída (percentil 0,5%)	-20,28%
		Escenario subida (percentil 99,5%)	13,36%
	Normal	Escenario caída (percentil 0,5%)	-27,54%
		Escenario subida (percentil 99,5%)	25,47%

Centrándonos en los rendimientos anuales aritméticos generados mediante la ventana móvil deseamos analizar el cumplimiento de la hipótesis de normalidad. El coeficiente de asimetría de la serie de rendimientos anuales del dólar/euro asciende a 0,38 y su curtosis a 2,78. Esto lleva a rechazar la hipótesis de normalidad de la serie del dólar mediante el test de Jarque Bera (p-valor inferior al 5%)<sup>184</sup>, razón por la cual los *shocks* resultantes que se debieran aplicar serían los empíricos, que alcanzan un valor de -24,57% en el escenario de caída de tipos (percentil 0,5%) y del 35,07% en el escenario de subida (percentil 99,5%) que se aplicarían al valor actual neto de los activos y pasivos en moneda extranjera denominados en euros. El valor del *shock* de depreciación del dólar es similar al propuesto por el modelo estándar en QIS5 (25%), pero el *shock* de apreciación del dólar resulta 10 puntos básicos más severo.

<sup>184</sup> Se confirma mediante otros test.

Test	Estadística	p-valor
Jarque Bera	11,355	0,34%
Anderson-Darling	2,782	0,00%
Cramer-von Mises	0,489	0,00%
Lilliefors	0,082	0,00%
Shapiro-Francia	0,981	0,00%

### Estimación y backtesting de modelos

El modelo de rendimientos normal suele presentar un pobre ajuste a las colas de los datos empíricos de series financieras, provocando el rechazo de dicha hipótesis para los rendimientos mensuales y anuales del tipo de cambio frente al dólar. La inadecuada estimación del riesgo en la cola puede provocar dentro del marco de Solvencia II una infraestimación del riesgo realmente asumido por la exposición de activos o pasivos en monedas distintas al euro. Por otro lado el empleo de un VaR empírico tiene principalmente tres problemas. El primero que es incapaz de recoger escenarios más adversos que los sucedidos históricamente, lo cual no tiene que acontecer necesariamente en el futuro. Ligado al anterior y en segundo lugar, el hecho de que puede haber unos escenarios extremos que no contempla el VaR empírico, dado que se queda en el análisis del percentil al 0,5% y 99,5% de probabilidad, y que no se tienen en cuenta<sup>185</sup>. El tercero y último es que no considera la situación actual (baja o alta) de volatilidad en los mercados, provocando la misma carga de capital independientemente de éstos. Como alternativas al modelo normal y empírico analizaremos distintos modelos de cambio de régimen y GARCH para recoger esa mayor curtosis, la volatilidad no constante en el tiempo y su persistencia o conglomerados de volatilidad. En el cuadro inferior recogemos la especificación de los modelos de cambio de régimen y de mixtura para dos procesos GARCH (1, 1), al mismo tiempo que presentamos la especificación de los otros modelos analizados.

Modelo	Especificación
Normal	$y_t = \mu + \sigma z_t$
GARCH (1,1)	$y_t = \mu + \varepsilon_t; \varepsilon_t = \sigma_t z_t; \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$
RSLN ( $k$ regímenes)	$y_t = \mu_{p_t} + \sigma_{p_t} z_t; (p_t = 1, \dots, k)$
RS-GARCH (1,1)	$y_t = \mu_{p_t} + \varepsilon_t; \varepsilon_t = \sigma_{p_t,t} z_t; \sigma_{p_t,t}^2 = \omega_{p_t} + \alpha_{p_t,1} (\varepsilon_{t-1})^2 + \beta_{p_t,1} \sigma_{t-1}^2;$ ( $p_t = 1,2$ )
M-GARCH (1,1)	$y_t = \sum_{i=1}^2 p_i (\mu_i + \varepsilon_t); \varepsilon_t = z_{it} \sigma_{it}; \sigma_{it}^2 = \omega_i + \alpha_i (\varepsilon_{t-1})^2 + \beta_i \sigma_{it-1}^2; \sum_{i=1}^2 p_i = 1$

Siendo:  $y_t$  es el rendimiento logarítmico;  $\mu$  es la media,  $\sigma$  la volatilidad,  $\varepsilon_t$  las innovaciones,  $p_t$  cada uno de los estados,  $z_t \sim N(0; 1)$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son parámetros a estimar.

<sup>185</sup> Si bien los peores escenarios históricos podrían ser empleados como escenarios de estrés para complementar el análisis de la suficiencia del capital de una compañía.

En la tabla siguiente mostramos los parámetros resultantes de la estimación máximo verosímil de los distintos modelos. Como puede verse, la estimación de los modelos de cambio de régimen implica un gran número de parámetros y, por tanto, una mayor complejidad de estimación. Tal y como afirman Ang y Bekaert (2002) la estimación de los modelos de cambio de régimen en muestras finitas muestran la presencia de múltiples máximos locales. Para asegurarnos de que se alcanza un máximo a nivel global se emplean algoritmos con distintos valores de partida y se comprueba la estabilidad de los mismos<sup>186</sup>. El modelo de dos regímenes (RSLN2) proporciona un régimen más estable con rendimientos esperados positivos y uno más volátil con esperanza negativa, lo cual es el resultado común de la estimación de este modelo. Para el resto de los modelos se han establecido las siguientes restricciones en la especificación general detallada en la tabla anterior. En el modelo GARCH(1,1) no se ha estimado intercepto o constante en la ecuación de la media ( $\mu = 0$ ) dado que no resultaba significativa, en el modelo RSLN3 se ha fijado como nula la probabilidad de transición del régimen 2 al 1,  $p_{21} = 0$ , dado que la estimación del modelo no restringido proporcionaba ya de por sí una muy baja probabilidad (inferior al 0,5%). En el modelo RSGARCH y MGARCH no se ha estimado intercepto o constante en la ecuación de la media ( $\mu = 0$ ) ni en la ecuación de la varianza en el régimen o mixtura 1.

---

<sup>186</sup> Cuando se emplean este tipo de modelos puede resultar que algunos modelos no converjan.

Modelo	Parámetros	Valor
Normal	$\mu$	0,02%
	$\sigma$	3,08%
GARCH (1,1)	$\omega$	0,01%
	$\alpha_1$	6,64%
	$\beta_1$	84,69%
RSLN2	$p_{11} / p_{12}$	4,14% / 9,37%
		<b>Régimen 1:</b>
	$\mu_1 / \sigma_1$	-0,23% / 3,47%
		<b>Régimen 2:</b>
	$\mu_2 / \sigma_2$	0,59% / 1,74%
RSLN3	$p_{11} / p_{12}$	90,69% / 9,28%
	$p_{21} / p_{22}$	0,00% / 88,78%
	$p_{31} / p_{32}$	13,10% / 18,14%
		<b>Régimen 1:</b>
	$\mu_1 / \sigma_1$	0,88% / 1,62%
		<b>Régimen 2:</b>
	$\mu_2 / \sigma_2$	-0,04% / 3,69%
	<b>Régimen 3:</b>	
	$\mu_3 / \sigma_3$	-0,97% / 1,27%
RS-GARCH	$p_{12} / p_{21}$	45,92% / 82,51%
		<b>Régimen 1:</b>
	$\alpha_{11}$	7,99%
	$\beta_{11}$	87,59%
		<b>Régimen 2:</b>
	$\omega_2$	0,11%
	$\alpha_{21}$	25,34%
$\beta_{21}$	20,18%	
M-GARCH	$p_1$	67,83%
		<b>Proceso 1:</b>
	$\alpha_{11}$	7,68%
	$\beta_{11}$	88,68%
		<b>Proceso 2:</b>
	$\omega_2$	0,10%
	$\alpha_{21}$	15,03%
	$\beta_{21}$	28,81%

A continuación analizamos los modelos estimados con el criterio AIC, el SBC y el HQC. Para cada modelo, la tabla inferior muestra los valores del logaritmo de la función de verosimilitud y los criterios AIC, SBC y HQC. Puede observarse que los modelos de cambio de régimen y mixtura de GARCH mejoran al modelo normal, que muestra el peor ajuste a la serie empírica del dólar. El modelo que proporciona un mejor ajuste global es el RSLN3 en base al criterio AIC pero es penalizado por su elevado número de parámetros en base a los otros criterios, resultando el MGARCH elegido por los criterios SBC y HQC.

Modelo	Parámetros estimados	Log verosimilitud	AIC	SBC	HQC
NORMAL	2	902,68	900,68	896,60	899,07
GARCH	3	907,84	904,84	898,72	902,43
RSLN	6	916,29	910,29	898,05	905,46
RSLN3	11	923,19	912,19	889,75	903,33
RSGARCH	7	918,32	911,32	897,04	905,68
MGARCH	6	918,06	912,06	899,82	907,23

El ajuste global no es el único criterio a considerar al elegir un modelo para el análisis del riesgo sino que es necesario evaluar en qué medida los residuos superan el test de normalidad, especialmente en las colas de la distribución. En el caso de que los residuos no sean normales, el ajuste del modelo no es adecuado. Los residuos para los modelos de cambio de régimen y mixtura han sido calculados asignándole el residuo a cada submodelo, de acuerdo con su probabilidad condicional de ocurrencia. El test de normalidad ha sido realizado utilizando el test de Jarque-Bera. La tabla inferior muestra el valor del test y su probabilidad asociada (entre paréntesis). Apreciamos que los modelos normal y GARCH, que no tienen en consideración la existencia de regímenes, no superan el test de normalidad al 99% de confianza.

Modelo	JB (p-valor)
NORMAL	26,330 (0,00%)
GARCH	36,511 (0,00%)
RSLN	2,153 (34,08%)
RSLN3	0,809 (66,72%)
RSGARCH	3,246 (19,73%)
MGARCH	3,192 (20,27%)

Además de la normalidad, la correcta especificación de los modelos requiere analizar si los residuos y sus cuadrados están correlacionados. Un test utilizado con frecuencia es el propuesto por Ljung y Box (1979). En la tabla inferior mostramos los p-valores asociados al estadístico Q de Ljung y Box de los residuos (RES) y sus cuadrados (RES2). Con excepción del modelo normal, los residuos al cuadrado no presentan autocorrelación. Sin embargo el modelo RSGARCH y MGARCH empeoran la capacidad de superar el test de incorrelación de los residuos, mientras que el resto de modelos incluido el normal lo superan.

Retardo	NORMAL		GARCH		RSLN2		RSLN3		RSGARCH		MGARCH	
	RES	RES2	RES	RES2	RES	RES2	RES	RES2	RES	RES2	RES	RES2
1	0,506	0,076	0,210	0,604	0,297	0,298	0,574	0,329	0,043	0,827	0,052	0,682
3	0,443	0,036	0,269	0,724	0,467	0,361	0,467	0,625	0,061	0,892	0,072	0,820
6	0,592	0,076	0,510	0,891	0,577	0,561	0,598	0,797	0,147	0,904	0,170	0,848
9	0,789	0,173	0,754	0,975	0,742	0,699	0,815	0,868	0,229	0,970	0,246	0,946
12	0,632	0,340	0,606	0,995	0,603	0,766	0,844	0,920	0,133	0,996	0,144	0,991

### **Validación de los modelos a través de backtesting**

Los modelos que hemos revisado en las secciones anteriores están diseñados para analizar el riesgo de divisa en el que incurre el asegurador a través del cálculo del *Value at Risk* (VaR), por lo que deben ser establecidas pruebas de *backtesting* y así evaluar el número de veces que las pérdidas han superado el VaR durante el periodo analizado. Los test que se han empleado son el test de Kupiec (1995) y de Christoffersen (1998). No se reportan valores para el test de independencia de Christoffersen porque no han existido violaciones consecutivas, por lo que todos los modelos pasan el test en cuestión, por lo que a continuación nos centraremos en el test de Kupiec. En función del valor actual de los

activos y pasivos de una compañía aseguradora está afectada por el riesgo de subida o bajada de los tipos de cambio, por lo que en la tabla inferior se muestra los p-valores asociados al test de Kupiec para el escenario de caída (*Down*) y de subida (*Up*) de los mismos.

	NORMAL		GARCH		RSLN2		RSLN3		RSGARCH		MGARCH	
	<i>Down</i>	<i>Up</i>										
Fallos	6	4	7	3	3	2	3	0	2	0	4	3
p-valor	3,34%	27,03%	0,95%	60,10%	60,10%	89,87%	60,10%	NA	89,87%	NA	27,03%	60,10%

En el modelo RSGARCH y RSLN3, para el VaR calculado al 99,5% en el caso de subida de tipos de cambio del dólar, el p-valor no se muestra dado que existen cero violaciones. Es decir el test de Kupiec no está definido en el caso de 0 violaciones dado que el logaritmo de 0 es indeterminado. Sin embargo, la posibilidad de que no ocurran violaciones en el VaR ha sucedido en nuestros datos y para solucionar el problema empleamos el Z-test, que es la variante del test de Wald de la ratio de verosimilitud propuesto por Kupiec. El p-valor asociado para este caso es del 6,65%, lo cual significa que se acepta el modelo por tener un número de fallos adecuado, ya que la probabilidad de que teniendo 0 fallos el modelo sea correcto es superior al 5%. Para el resto de los modelos se muestra el p-valor que llevaría a aceptar la hipótesis nula de que el porcentaje de fallos en un determinado periodo es acorde el modelo con el nivel de confianza del 95% para todos los modelos excepto el normal y GARCH, que no superan el test en lo relativo al escenario de caída.

Podemos concluir que sólo los modelos RSLN en sus versiones de dos y tres regímenes superan los test de normalidad, homocedasticidad, autocorrelación, cobertura incondicional e independencia. Por tanto, a pesar de la mayor complejidad que supone su estimación e implementación, son más adecuados para la configuración de modelos internos para el riesgo en divisa en nuestra serie. También queremos destacar que el modelo RSGARCH y MGARCH también superan los test de normalidad, homocedasticidad, cobertura incondicional e independencia presentando algún problema de autocorrelación en los residuos, seguramente causado por la estimación de modelos simplificados o de parámetros más reducidos que el general.

Finalmente deseamos que el modelo interno no sea simplemente lo suficientemente conservador, es decir que proporcione una cobertura condicional e incondicional apropiada, sino que también no sobreestime el riesgo en periodos de baja volatilidad del mercado. La prueba realizada consiste en evaluar la relación entre las estimaciones de VaR y el valor de los rendimientos empíricos mediante el coeficiente de Spearman. Observamos que el p-valor (tabla inferior) del test es menor al 5% para el caso del modelo RSLN2, de forma que se rechaza la hipótesis nula de incorrelación entre el VaR de cada periodo y los rendimientos del tipo de cambio dólar/euro. En cambio para el caso del resto de modelos no se detecta existencia de relación no lineal entre ambas variables.

	GARCH	RSLN2	RSLN3	RSGARCH	MGARCH
p-valor	85,89%	0,00%	8,86%	62,21%	87,09%

### ***Comparación de las necesidades de capital a través de los distintos modelos***

A continuación comparamos el capital resultante de utilizar los modelos anteriores en relación al que se exige en el modelo estándar. En este sentido, tratamos de mostrar las diferencias en la cuantificación de las necesidades de capital a través de la aplicación de los distintos modelos que hemos visto que presentan un mejor ajuste a la series de tipos de cambio analizado. Con este propósito se ha realizado una simulación de 100.000 escenarios mensuales por el método latino hipercúbico al plazo de un año. Dado que el ajuste se ha realizado a partir de datos mensuales y el cálculo del capital se ha estimado anualmente, es necesario llevar a cabo la agregación temporal de los rendimientos continuos simulados. Finalmente, y dado que los modelos han sido ajustados al tipo de cambio indirecto, se ajusta el *shock* resultante para aplicar directamente al valor de mercado actual de los activos y pasivos de la compañía aseguradora en euros<sup>187</sup>. Si el valor de mercado de los activos es mayor que el de los pasivos la compañía está expuesta al riesgo de depreciación del dólar, mientras que si el valor de los pasivos es mayor al de los activos estará expuesta a riesgo de apreciación del dólar.

<sup>187</sup> En primer lugar se simulan rendimientos continuos para los próximos 12 meses según la expresión matemática de cada modelo. Posteriormente, se aplica la función exponencial y acumulamos los rendimientos mensuales mediante su producto, restándole el valor de 1 para obtener el *shock* discreto anual. Dado que el *shock* resultante debe ser aplicado a valores expresados en euros se aplica la función  $-1+1/(1+shock$  indirecto anual).

La tabla inferior muestra las necesidades de capital (VaR al 99,5% de confianza) que resultan de aplicar los diferentes modelos previamente analizados. Como puede verse, el modelo RSLN es que proporcionaría una menor cuantía de capital, en relación al resto de modelos incluido el normal. Para todos los modelos evaluados las cargas de capital son asimétricas, es decir, distintas para el escenario de subida y de caída del tipo de cambio.

VaR [99,5%]	NORMAL	GARCH	RSLN2	RSLN3	RSGARCH	MGARCH
<i>Shock depreciación dólar</i>	-24,04%	-27,65%	-22,60%	-24,92%	-29,65%	-28,97%
<i>Shock apreciación dólar</i>	30,70%	38,88%	29,92%	36,98%	42,35%	40,52%

En la siguiente tabla se aprecia el orden de la cuantía de capital asignada, denotándose con el número 1 el modelo que estima una menor necesidad de capital y con un 6 el modelo con mayor necesidad de capital. Los resultados muestran que el orden de los modelos es idéntico en el *shock* de subida y de caída del tipo de cambio.

Orden	NORMAL	GARCH	RSLN2	RSLN3	RSGARCH	MGARCH
<i>Shock depreciación dólar</i>	2	4	1	3	6	5
<i>Shock apreciación dólar</i>	2	4	1	3	6	5

Finalmente, queremos analizar el impacto de usar el modelo estándar bajo las especificaciones de QIS4 y QIS5. Recordemos que bajo QIS4 las necesidades de capital para el riesgo en divisa se establecen en base a un *shock* de subida y bajada del 20%, pero en QIS5 esta cuantía se incrementa hasta el 25% con la finalidad de capturar los efectos de la crisis financiera. Estos *shocks* han sido calibrados a hipotéticas cestas de divisas con el fin de representar una exposición promedio de un asegurador europeo. Sin embargo, consideramos que la exposición real de un asegurador a distintos mercados tanto en activos (inversiones en renta variable, en inmuebles, efectivo, etc.) como en pasivos (provisiones, préstamos, etc.) puede recomendar el empleo de un modelo estándar para capturar el riesgo realmente asumido (distinta volatilidad de las divisas). Después de la comparación de distintos modelos, podemos ver que las necesidades de capital bajo las especificaciones de

QIS4 resultaron inferiores a las estimadas por los modelos analizados. Esto implica la incapacidad del anterior modelo estándar para capturar el riesgo en divisa después de la crisis financiera iniciada en el año 2007. Por otra parte, el aumento de la carga de capital en las nuevas especificaciones de QIS5 provoca cargas más acordes con las de los modelos analizados para el *shock* que resultaría de la depreciación dólar (entre el -22,60% del modelo RSLN2 y el -29,65% del modelo RSGARCH). Sin embargo, el *shock* resultante de un escenario de apreciación dólar resulta en todos los modelos analizados superior al 25% (entre el 29,92% del modelo RSLN2 y el 40,52% del modelo RSGARCH).

En la tabla inferior se resumen las cargas de capital de los modelos estándar, RSLN2 y el modelo empírico que emplea la misma metodología empleada en la calibración de QIS5. El modelo RSLN2 es capaz de recoger un *shock* simétrico como el resultante del modelo empírico. Además, debe destacarse que el uso de un modelo interno puede suponer un ahorro de capital, como ocurre en el caso analizado comparando el modelo RSLN2 con el actual *shock* de QIS5.

Rendimientos anuales históricos (ventana de 12 meses)	Empírico Dólar frente euro (1974-2010)	<i>Shock</i> depreciación	-24,57%
		<i>Shock</i> apreciación	35,07%
Modelo interno	RSLN2 Dólar frente euro (1974-2010)	<i>Shock</i> depreciación	-22,60%
		<i>Shock</i> apreciación	29,92%
Modelo estándar	QIS4 Cesta divisas frente libra y euro (1958-2006)	<i>Shock</i> depreciación	-20,00%
		<i>Shock</i> apreciación	20,00%
	QIS5 Cesta divisas frente libra (1971-2009) y euro (1999-2009)	<i>Shock</i> depreciación	-25,00%
		<i>Shock</i> apreciación	25,00%

Finalmente, advertir que los modelos analizados permiten una proyección del riesgo en divisa generando un conjunto amplio de escenarios para medir la solvencia de la compañía. Sin embargo, una compañía aseguradora puede tener activos y pasivos nominados en distintas monedas, por lo que puede ser necesario emplear modelos multivariantes, modelos univariantes correlacionados o a

semejanza de lo realizado en los distintos QIS, calibrar el modelo a los rendimientos ponderados de una cesta de divisas.

#### 4.4. ANÁLISIS DEL RIESGO DE SPREAD

En este apartado del trabajo analizamos el riesgo de *spread* inherente a la inversión en títulos de renta fija dentro de las calificaciones crediticias comprendidas entre AAA y BBB. Para ello, evaluamos la adecuación de diversas especificaciones, entre las que se incluyen, modelos garch, E-garch y modelos de cambio de régimen de Markov, para medir el riesgo de *spread*. Para ello, hemos ajustado varios modelos a las series mensuales de *spreads* difundidas por Merrill Lynch para el periodo 2000-2010 en las categorías indicadas anteriormente. La selección de los modelos más adecuados se ha realizado a través de diversas técnicas de *backtesting* y diversos test estadísticos. Una vez seleccionados dichos modelos, a través de la simulación de Monte Carlo hemos simulado los niveles a un año a partir de los cuales se podrían determinar los requerimientos de capital.

##### 4.4.1. Introducción y revisión teórica

Los bonos con riesgo de crédito deben proporcionar un rendimiento superior a los bonos sin riesgo para compensar las posibles pérdidas del capital invertido. Por esta razón, un bono con idéntico cupón y vencimiento al de otro bono pero con mayor riesgo crediticio, se comercializará a un precio inferior. La diferencia entre la rentabilidad, medida a través de la tasa interna de rentabilidad, que proporciona el bono con riesgo y el bono sin riesgo comparable es el diferencial o *spread* de crédito<sup>188</sup>. Además en la medida en que los bonos sin riesgo no sean exactamente comparables a aquellos con riesgo, el *spread* recoge esas características distintas, debidas a diferencias de liquidez, tratamiento fiscal, especulación, etc. El precio de los bonos variará en el mercado ante cambios en el *spread*.

---

<sup>188</sup> De esta forma el diferencial o *spread* de crédito  $s(t, T)$  observado en un momento temporal  $t$  para una categoría de *rating* específica (*index credit spread*) y para un vencimiento  $T$  se calcula como la diferencia entre el tipo de interés libre de riesgo y el tipo de interés proporcionado por esa categoría de *rating*. Al mismo tiempo, se puede calcular la estructura temporal de los *spreads* o curva de diferenciales de crédito como la diferencia entre la estructura temporal de la clase de *rating* y la ETTI libre de riesgo.

Dado que las compañías de seguros invierten una parte muy importante de sus recursos en renta fija, están sometidas a riesgo de *spread*. Este riesgo es particularmente relevante en el caso de las compañías de seguros generales españolas, ya que según los datos estadísticos aportados por ICEA en 2008 destinaban directamente un 46,6 por ciento de su cartera a la inversión en activos de renta fija, fundamentalmente del área euro.

### ***El riesgo de spread en el modelo estándar de QIS5***

El riesgo de *spread* recoge el cambio en el valor de los activos netos<sup>189</sup> debido a movimientos de la curva de rendimientos respecto a la estructura temporal libre de riesgo. Para su consideración se deben tener en cuenta variaciones en la volatilidad y en el nivel. La carga de capital para los riesgos de *spread* se determina para los siguientes cuatro tipos de activos:

- Bonos
- Préstamos hipotecarios
- El riesgo de *spread* es aplicable a los productos estructurados de crédito
- Además el riesgo de *spread* también cubre derivados de crédito (CDS, *Total return swaps* o CLNs)

En este trabajo nos centramos exclusivamente en los *spreads* de los bonos corporativos. En QIS4 las compañías europeas informaron que más del 94% de la inversión se realizaba en bonos calificados en el intervalo AAA-BBB, siendo además mayores las duraciones en las clases de mayor *rating*. La calibración en el último estudio de impacto cuantitativo (QIS5) se ha realizado a partir de los datos mensuales de los índices para bonos corporativos de Merrill Lynch para el periodo febrero 1999-febrero 2010. Dicho análisis se ha realizado de forma desglosada, en función del vencimiento de los activos, obteniendo de este modo un factor

---

<sup>189</sup> Los activos asignados a pólizas en los que los beneficiarios carguen con los riesgos de inversión están excluidos del riesgo de *spread*, siempre y cuando estas pólizas no tengan opciones implícitas o garantías.

de *stress* que varía en función del *rating* y de su vencimiento. No obstante, en la fórmula estándar definitiva no se han considerado variaciones diferentes para cada bono en función de la duración. Las necesidades individuales de capital por riesgo de *spread* para los títulos de renta fija ( $Mkt_{spread}^{RF}$ ) se calculan como el producto del valor de mercado de cada título ( $VM_i$ ) por una función de su duración modificada del título ( $m(dur_i)$ )<sup>190</sup> y por un factor que depende del *rating* de ese título  $F(rating_i)$ :

$$Mkt_{spread}^{RF} = \sum_i VM_i \cdot m(dur_i) \cdot F(rating_i)$$

Se establece un límite inferior y superior a la duración modificada en función del *rating*, de modo que se reduce la variación máxima, ya que al asumir una relación lineal se estaría sobreestimado el riesgo y, consecuentemente, el nivel de capital necesario. Dicho factor se ha estimado de manera consistente con un VaR empírico al 99,5% y sus valores se determinan a partir de la tabla inferior. A modo de ejemplo para un bono AAA con una duración de 10 años, se asumiría una pérdida de valor del 9%.

<i>Rating<sub>i</sub></i>	<i>F(Rating<sub>i</sub>)</i>	Duración mínima	Duración máxima
AAA	0,9%	1	36
AA	1,1%	1	29
A	1,4%	1	23
BBB	2,5%	1	13
BB	4,5%	1	10
B o inferior	7,5%	1	8
Sin <i>rating</i>	3,0%	1	12

Asimismo, se incluye un tratamiento especial de dicho riesgo para las cédulas hipotecarias, los bonos garantizados (*covered bonds*) así como para los bonos emitidos por gobiernos y bancos centrales. En relación a los primeros, si el bono tiene una calificación AAA se aplicará un factor de riesgo de 0,6% y el *cap* de la duración modificada será de 53 años. No se establece requisito de capital en el sub-módulo de *spread* a las emisiones realizadas o garantizadas por un gobierno

<sup>190</sup> Se establece un límite inferior y superior a la duración modificada en función del *rating*, de modo que se reduce la variación máxima, ya que al asumir una relación lineal se estaría sobreestimado el riesgo y, consecuentemente, el nivel de capital necesario.

nacional de un Estado del EEE (Espacio Económico Europeo), emitidos en la moneda del gobierno, o emitidos por un banco de desarrollo multilateral de los citados en el anexo VI, parte 1, número 4, de la Directiva sobre requisitos de capital (2006/48/CE) o expedido por una organización internacional de las que figuran en el anexo VI, parte 1, número 5 de la citada Directiva o emitidos por el Banco Central Europeo. Por otra parte, las inversiones en bonos emitidos por gobiernos y bancos centrales, distintos a los citados anteriormente, con calificaciones AAA y AA no requieren ninguna carga de capital, pero sí el resto de calificaciones a la cuáles se les aplicarán factores ligeramente inferiores a los bonos corporativos de igual calificación.

### **Revisión teórica**

La literatura sobre la modelización de los *spreads* de crédito abarca tres ámbitos diferentes. Por un lado, existen numerosos estudios teóricos que centran su objeto de estudio en la determinación de los *spreads* de crédito y que se clasifican dentro de dos enfoques denominados modelos estructurales y los modelos en forma reducida. Los modelos estructurales (*structural models*<sup>191</sup>) comienzan con el trabajo de Merton (1974) y continúan con Black y Cox (1976), y Longstaff y Schwartz (1995a) entre otros. Asumen que el valor de una empresa sigue un proceso estocástico, y el incumplimiento o *default* ocurre cuando dicho valor es menor que el valor de la deuda emitida o cuando cae por debajo de un límite especificado. Los modelos en forma reducida (*reduced-form models*<sup>192</sup>) como los propuestos en Jarrow y Turnbull (1995), Jarrow et ál. (1997), Duffie y Kan (1996) y Duffie y Singleton (1999) describen el evento de crédito de forma separada al valor de la compañía (exógenamente). Los modelos estructurales tienen la ventaja de que vinculan el impago de una compañía con variables específicas a ésta (valor de los activos, valor de la deuda, etc.). Sin embargo, han sido criticados porque de ellos se obtienen *spreads* de crédito menores que los observados en el mercado. Por otro lado, los *spreads* resultantes de los modelos en forma reducida se ajustan mejor a los *spreads* observados en el mercado.

---

<sup>191</sup> También conocidos como *diffusion-based models*, *asset-pricing models*, *firm-value based models* o *option pricing models*.

<sup>192</sup> Estos modelos también son conocidos como *intensity models*.

En segundo lugar, se encuentran los estudios que han analizado los factores determinantes de los *spreads* de crédito. Se incluyen dentro de los mismos, los trabajos de Delianedis y Geske (2001), quienes estudian los factores que determinan los *spreads* de las empresas estadounidenses en el periodo 1991-1998. De su trabajo se obtiene que los *spreads* de crédito están afectados por la fiscalidad, la liquidez, la tasa de recuperación y la volatilidad, así como de factores de mercado. Eso significa que la tasa de recuperación y la probabilidad de *default* explican sólo parcialmente los *spreads* de crédito. Por su parte, Brown (2001) incluye en su análisis factores como el rendimiento de los bonos del Tesoro, la confianza del consumidor, un índice de mercado y la liquidez. Dicho estudio incorpora información relativa a bonos corporativos estadounidenses en el periodo 1984-1999 y concluye que un 30% de las variaciones vienen explicadas por dichos factores. Una conclusión relevante de este trabajo es que una proporción considerable de la volatilidad de los *spreads* de crédito es debida a componentes no relacionados con el *default*. Por su parte, Nerin et ál. (2002) estudiaron los componentes del riesgo de crédito de los derivados de crédito y de los bonos corporativos norteamericanos en el periodo 1998-2000. De su trabajo se deduce que los *ratings* de crédito, el nivel y la pendiente de la curva de rendimientos, los precios de las acciones, la volatilidad del valor de la empresa, los rendimientos de los índices y otros factores de mercado explicaban en aproximadamente un 60% los cambios en los *spreads*, siendo el mercado de acciones el factor principal, puesto que explicaba prácticamente el 50%. Bansal et ál. (2004) incorporaron un modelo de cambio de régimen de la estructura temporal basado en Hamilton (1989) y aplicado al rendimiento mensual del bono del Tesoro americano en el periodo 1964-2002. De su trabajo se desprende que su modelo puede justificar las dinámicas de transición de los rendimientos del Tesoro y encuentra un vínculo entre los ciclos económicos y los regímenes. También Davies (2004) analiza a través de un modelo de cambio de régimen los determinantes de los *spreads* de crédito para los *ratings* comprendidos entre AAA y BAA (Moody's). En este trabajo, el tipo de interés libre de riesgo, el rendimiento de las acciones, la pendiente de la curva de rendimientos y la producción industrial son factores explicativos de los *spreads* a corto plazo. Clarida et ál. (2006) evalúan la aplicación de un modelo de Markov asimétrico multivariante a la serie semanal de los tipos del euro para los bonos alemanes, japoneses y norteamericanos para el periodo 1982-2000. Los autores encuentran evidencia de no linealidad en las estructuras temporales y como los regímenes se asocian a los

ciclos económicos y la inflación. Finalmente, Gabrielsen (2010) incorpora dos variables macroeconómicas nuevas no consideradas en estudios previos: inflación y un índice sobre *commodities*. De su trabajo se deduce que sólo la inflación es relevante y que los determinantes de los *spreads* son relevantes en momentos de elevada volatilidad.

En tercer lugar se encuentran los trabajos que han analizado la dinámica de los *spreads*, es decir, el comportamiento de las series temporales. El primer trabajo que considera la volatilidad variante en el tiempo fue realizado por Weiss (1984), quien analiza los rendimientos de los bonos corporativos AAA a través del uso de un modelo ARCH. En esta línea, Pedrosa y Roll (1998) emplean los índices de *spreads* diarios con datos proporcionados por Bloomberg para bonos norteamericanos corporativos con grado de inversión entre octubre de 1995 y marzo de 1997. Estos autores modelizan el comportamiento leptocúrtico de los cambios logarítmicos en los *spreads* a través de una mixtura de distribuciones normales y encuentran un alto nivel de persistencia en la volatilidad. Por su parte, Prigent et ál. (2001) emplean los datos de los niveles de *spreads* agregados de crédito de Moody's con observaciones diarias entre enero de 1986 a marzo de 2000 (3.561 observaciones) para estimar los parámetros de los modelos de tipos de interés recogidos en Chan et ál. (1992) y un modelo de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck con saltos simétricos<sup>193</sup>. Posteriormente, Bierens et ál. (2005) emplean un modelo autorregresivo con variables dependientes, heterocedasticidad condicional y saltos (*ARX(1)-ARCH(1)-Jump model*) para modelizar las variaciones logarítmicas diarias de los *spreads* estadounidenses en el periodo, diciembre de 1996 y agosto de 2002. Además, Batchelor y Manzonni (2006) investigan el impacto de las revisiones de *rating* en la volatilidad de los *spreads* de los eurobonos, encontrando asimetría en la respuesta de las volatilidades de los *spreads* a los cambios en los *ratings*. No obstante, se ha realizado muy poca investigación respecto al comportamiento dinámico de los momentos de orden superior (volatilidad, asimetría y curtosis). En este sentido, los trabajos de Bond (2000), Burns (2002), Angelidis et ál. (2004) y Wilhelmsson (2009) muestran que los modelos GARCH proporcionan estimaciones mucho más adecuadas, respecto

---

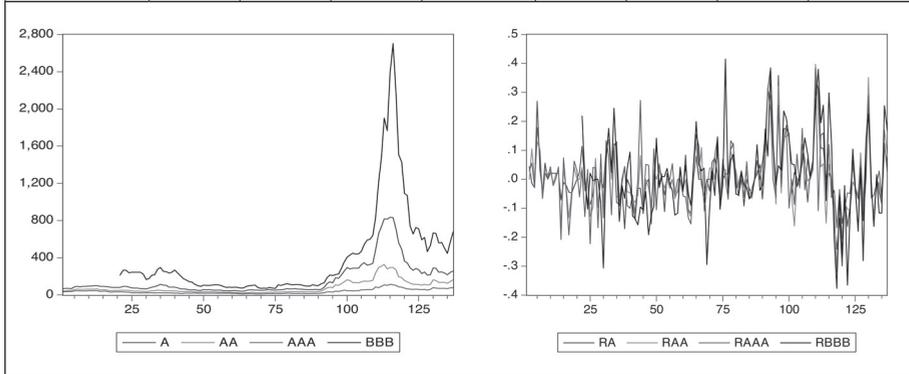
<sup>193</sup> Encuentran que para el *spread* Aaa el modelo de tipo CKLS que mejor se ajusta es el de Vasicek (1977), mientras que para el *spread* Baa es Brennan y Schwartz (1980). También encuentran evidencia empírica para el modelo con saltos.

a aquellos que sólo tienen en cuenta especificaciones de segundos momentos. En particular, Bond (2000) muestra como las distribuciones no normales asimétricas (distribución *t* asimétrica de Hansen) proporcionan mejores predicciones que aquellas basadas en distribuciones normales. Además, Angelidis et ál. (2004) indican que el proceso de la media no es relevante y que las distribuciones leptocúrticas proporcionan mejores estimaciones de VaR. Esto es debido a que captan mejor los movimientos extremos y las colas gruesas. Asimismo, Wilhelmsson (2009) propone una distribución normal inversa que permite que sus parámetros varíen con el tiempo y mejora la estimación del VaR. Finalmente, Gabrielsen (2010) analiza el desempeño de diversos modelos para predecir la volatilidad de los *spreads* de bonos europeos. Su trabajo muestra que el ARCH-SK es el modelo que genera la mejor volatilidad a 1 día, mientras que el GJR-GARCH es mejor para la volatilidad a 5 días. Las pruebas de *backtesting* realizadas mediante el método de Christoffersen (1998) muestran que no existe un modelo adecuado para todos los horizontes temporales.

#### **4.4.2. Análisis empírico, *backtesting* y simulación**

Dado que nuestro trabajo propone alternativas para la modelización de los *spreads* es necesario realizar un análisis de la serie histórica de los mismos. En la tabla inferior se muestran las estadísticas resumen de las series mensuales de *spreads* para las categorías de *rating* AAA, AA, A y BBB durante el periodo temporal, febrero de 2000 a diciembre de 2010, del índice *Corporates and Banking* elaborado por Merrill Lynch (*MSCI Eurocredit Corporate Spreads*). El gráfico muestra la evolución temporal de las cuatro series analizadas en puntos básicos y en variaciones logarítmicas.

	Spreads en niveles				Variaciones logarítmicas			
	AAA	AA	A	BBB	AAA	AA	A	BBB
Media	37,42	79,60	163,45	395,46	0,006	0,009	0,010	0,010
Mediana	29,00	49,00	85,00	216,00	0,000	0,000	0,000	0,002
Máximo	115,00	327,00	834,00	2.702,00	0,383	0,397	0,385	0,415
Mínimo	12,00	22,00	40,00	70,00	-0,223	-0,319	-0,299	-0,377
Desviación Estándar	24,84	68,94	177,55	491,48	0,105	0,103	0,110	0,145
Asimetría	1,16	1,80	2,30	2,61	0,731	0,867	0,894	0,126
Curtosis	3,61	5,87	8,12	10,21	4,160	5,677	5,114	3,656
Jarque Bera	32,65	120,68	270,29	386,31	19,743	57,661	43,437	2,386
Probabilidad	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,30



Al analizar los niveles de los *spreads* de crédito entre categorías de *ratings* apreciamos que tanto la media como la desviación típica aumenta a medida que empeora la calificación crediticia. Dado que el *spread* de crédito de un bono compensa a su poseedor por la pérdida esperada, de forma que a peor categoría de *rating* (indicador del riesgo de crédito) mayor será el *spread* requerido. Además se observa como la volatilidad de los *spreads* aumenta para los bonos peor calificados, resultado que es consistente con la evidencia empírica mostrada en Duffee (1998), lo que indica una mayor heterogeneidad dentro de esas categorías, es decir, no todos los bonos dentro de una misma categoría tienen el mismo riesgo de *spread*. Esta característica también es encontrada en la serie analizada en Longstaff y Schwartz (1995a)<sup>194</sup>.

<sup>194</sup> Los autores calculan los *spreads* mensuales para el periodo Abril 1977 a Diciembre 1992 (190 observaciones) para distintas calificaciones crediticias de tres industrias distintas (sector industrial, sector ferrocarril y *utilities*) empleando la fuente Moody's.

La ausencia de normalidad de los *spreads* se verifica a través del test de Jarque Bera para todas las categorías de *rating*. Para cada una de las series de la muestra la hipótesis nula de normalidad se rechaza al 1%, salvo en el caso de los rendimientos logarítmicos de la serie triple B. Al analizar las variaciones logarítmicas de los *spreads* entre las distintas categorías de *rating*, los coeficientes de asimetría y curtosis difieren de los de una distribución normal y por tanto se rechaza la hipótesis de que los *spreads* estén distribuidos lognormalmente, con excepción del triple B. Además, como se muestra en el gráfico anterior, los rendimientos presentan agrupamientos de volatilidad. Por este motivo es importante determinar qué modelo se ajusta mejor al comportamiento de la varianza a lo largo del tiempo. El estadístico Q asociado a las variaciones logarítmicas en los *spreads* muestra estructura de dependencia tanto en las variaciones como en sus cuadrados en las series AA y A, mientras que en las series AAA y BBB, la dependencia es sólo en la serie de variaciones. Esto puede implicar que el modelo adecuado para representar una categoría de *rating* sea específico para cada serie.

j	Rendimientos <i>Spread</i>		Rendimientos <i>Spread</i> al cuadrado	
AAA	Q(j)	Prob.	Q(j)	Prob.
1	0,2625	0,608	0,1799	0,671
3	7,9402	0,047	0,7833	0,853
6	13,627	0,034	0,8838	0,990
9	17,344	0,044	2,2016	0,988
12	19,676	0,073	2,6907	0,997
AA	Q(j)	Prob.	Q(j)	Prob.
1	8,4612	0,004	3,4991	0,061
3	15,789	0,001	4,6579	0,199
6	19,295	0,004	6,9716	0,323
9	26,189	0,002	12,657	0,179
12	28,104	0,005	17,302	0,139
A	Q(j)	Prob.	Q(j)	Prob.
1	15,693	0,0000	7,5598	0,006
3	26,022	0,0000	12,787	0,005
6	30,561	0,0000	14,592	0,024
9	35,769	0,0000	15,076	0,089
12	37,679	0,0000	18,467	0,102

j	Rendimientos <i>Spread</i>		Rendimientos <i>Spread</i> al cuadrado		
	BBB	Q(j).	Prob.	Q(j).	Prob.
1		9,4606	0,002	0,0143	0,905
3		14,037	0,003	4,4882	0,213
6		20,47	0,002	7,8572	0,249
9		24,668	0,003	13,365	0,147
12		26,304	0,001	14,325	0,280

Desde un punto de vista teórico, se asume que los *spreads* de crédito presentan reversión a la media a largo plazo debido a que dependen del entorno económico. Durante los periodos de desaceleración económica los *spreads* de crédito tienden a aumentar, mientras que en los periodos de crecimiento se reducen<sup>195</sup>. A continuación vamos a investigar si la serie analizada muestra reversión a la media en el periodo temporal analizado<sup>196</sup>. Para ello realizamos la siguiente regresión de los cambios en los *spreads* ante su nivel<sup>197</sup>:

$$\Delta S_{t+1} = S_{t+1} - S_t = a + bS_t + \varepsilon_{t+1}$$

Donde  $S_t$  es el valor del *spread* en el periodo anterior,  $a$  es la constante o término de intercepción,  $b$  es el coeficiente de pendiente y  $\varepsilon_{t+1}$  es el error de la regresión. Para que exista reversión a la media, el coeficiente  $b$  debe ser negativo, además el valor de  $-b$  indica la tasa o velocidad a la que el *spread* de crédito revierte a su media a largo plazo, siendo esta última  $-a/b$ . Los resultados de la estimación de la regresión para cada una de las categorías de *rating* se muestran en la tabla inferior.

<sup>195</sup> Arak y Corcoran (1996) encuentran evidencia empírica de que los *spreads* de crédito están negativamente correlacionados con la actividad económica y con su tendencia. De esta forma los *spreads* tienden a reducirse en las situaciones en las que la actividad económica es elevada o está expandiéndose.

<sup>196</sup> Los *spreads* de crédito recogen el riesgo de crédito y la prima por liquidez. Los cambios en el riesgo de crédito fluctúan con los cambios en las variables económicas reales como los ciclos económicos y son duraderos a largo plazo, mientras que los cambios en la prima por liquidez dependen de los sentimientos del mercado siendo más volátiles y su duración se mide en meses. Por eso es razonable pensar que la velocidad de reversión a la media del componente de liquidez es mayor que el de crédito. De esta forma si analizamos una serie temporal larga, dado que los bonos con mejor calidad crediticia tienen un mayor componente de liquidez en sus *spreads*, es de esperar intuitivamente que reviertan a su media a largo plazo antes que aquellos con peor calificación (Prigent et ál. 2001).

<sup>197</sup> Longstaff y Schwartz (1995b) encuentran reversión a la media en las variaciones logarítmicas de los *spreads* de crédito, por lo que proponen un proceso Ornstein-Uhlenbeck para su modelización.

Rating	$a$	Estadística T (p-valor)	$b$	Estadística T (p-valor)	Velocidad de reversión ( $-b$ )	Media ( $-a/b$ )
AAA	0,0062	0,6929 (0,4896)	-1,0434	12,0458 (0,000)	1,0434	0,0060
AA	0,0073	0,0073 (0,4019)	-0,7521	-8,9318 (0,0000)	0,7521	0,0097
A	0,0063	0,035 (0,4829)	-0,6636	-8,1236 (0,000)	0,6635	0,0095
BBB	-0,0062	-0,4834 (0,6297)	0,7130	7,8780 (0,000)	-0,7129	0,0088

Los resultados obtenidos reflejan dos hechos importantes. Primero, que los coeficientes  $b$  de las regresión son muy significativos<sup>198</sup> para las series analizadas y, segundo, que los coeficientes de pendiente de las regresiones son negativos excepto en el caso de la categoría BBB. Además, los coeficientes de determinación toman valores elevados, lo que significa que el efecto de reversión es relevante en tres de las series evaluadas durante el periodo de análisis.

### **Modelos considerados**

La tabla inferior muestra las especificaciones de los modelos que hemos considerado para modelizar el riesgo de *spread*. En particular, hemos considerado el modelo de tipos de interés de un factor propuesto por Cox et ál. (1985), el modelo normal, los modelos GARCH y EGARCH, así como sus variantes Markov Switching. Por tanto, intentamos evaluar la adecuación de los modelos que se exponen para modelizar el riesgo de *spread* a largo plazo, así como el efecto que tiene la incorporación de cambios de régimen<sup>199</sup>. A continuación explicaremos brevemente el *modelo de Cox et ál. (1985)*, dado que los anteriores ya han sido explicados anteriormente.

<sup>198</sup> Si el p-valor asociado al estadístico T es mayor al nivel de significación (normalmente 0,05) se rechaza que el parámetro asociado es significativo en la regresión.

<sup>199</sup> Por otra parte, dado que hemos observado autocorrelación de orden 1 en algunas series de rendimientos logarítmicos, hemos intentado incorporar un modelo AR(1) en la ecuación de la media para lograr un mejor ajuste. Sin embargo, dado que en los modelos más complejos el proceso iterativo de optimización de la función de verosimilitud no convergía hemos decidido eliminarlos para mantener la exposición más sencilla.

El modelo de Cox et ál. (1985), CIR (1985), CIR-SR o “proceso de la raíz cuadrada” relaciona la volatilidad de los *spreads* con la raíz cuadrada de su nivel actual. Es decir la restricción que se impone en la fórmula general de Chan et ál. (1992) es que  $\gamma = 1/2$  por lo que se obtiene:

$$ds_t = \kappa(\mu - s_t)dt + \sigma\sqrt{s_t}dz_t$$

Donde  $ds_t$  es el cambio continuo en el nivel actual de los *spreads*,  $k$  es la velocidad de reversión a la media de los *spreads* a corto plazo,  $\mu$  es el tipo al cual revierten los *spreads* a corto plazo,  $\sigma$  es la volatilidad (desviación estándar) de los *spreads* a corto y  $Z_t \sim N(0;1)$ . La anterior ecuación la podemos transformar haciendo  $\kappa = -\beta$  y  $\mu = \frac{\alpha}{-\beta}$  en  $ds_t = -\beta\left(\frac{\alpha}{-\beta} - s_t\right)dt + \sigma\sqrt{s_t}dz_t$  por lo que finalmente tendríamos que  $ds_t = (\alpha + \beta s_t)dt + \sigma\sqrt{s_t}dz_t$ . Una ventaja del modelo CIR (1985) es que los *spreads* no pueden ser la negativos y que relaciona la volatilidad condicional con el nivel de los *spreads*.

### **Estimación y selección de modelos**

En este apartado presentamos los resultados de estimar los modelos a partir de las series analizadas y realizamos una comparación utilizando métodos de *backtesting* y diferentes criterios estadísticos. En el cuadro inferior mostramos los parámetros resultantes de la estimación mediante los procedimientos de mínimos cuadrados y máxima verosimilitud. El modelo de dos regímenes (RSLN2) proporciona un régimen más estable con rendimientos esperados negativos y uno más volátil con esperanza positiva. La elevada significatividad de los parámetros de la ecuación para la varianza de los modelos GARCH es consistente con la persistencia de volatilidad de los datos empíricos. Como puede verse, la estimación de los modelos de cambio de régimen implica un gran número de parámetros y, por tanto, una mayor complejidad de estimación. De hecho, el modelo RS-GARCH de cambio de régimen no ha podido ser estimado debido a que el algoritmo presentó problemas de convergencia o bien no fue posible de encontrar una solución robusta con parámetros consistentes.

		AAA	AA	A	BBB
NORMAL	$\mu$	0,0062	0,0094	0,0098	0,0100
	$\sigma$	0,0105	0,1030	0,1102	0,1450
CIR	$\alpha$	-0,0025	-0,0044	0,0001	-0,0025
	$\beta$	-0,0098	-0,0116	1,8547	-0,1245
	$\sigma$	0,0070	0,0116	0,0150	0,0359
AR(1)-Garch (1,1)	$\mu$	0,0040	0,0021	0,0046	0,0051
	AR(1)	-0,0760	0,1838	0,3429	0,2892
	$\omega$	0,0001	0,0002	0,0006	0,0022
	$\alpha_1$	-0,0542	0,0770	0,1292	0,0579
	$\beta_1$	1,0574	0,9175	0,8198	0,8302
AR(1)- EGARCH(1,1)	$\mu$	0,0031	-0,0023	0,0044	-0,0026
	AR(1)	-0,1155	0,3633	0,3272	0,1918
	$\omega$	-7,6799	-5,4028	-0,4953	-8,0781
	$\gamma_1$	0,0414	1,2097	0,2479	0,1435
	$\alpha_1$	0,2253	0,0689	0,0721	0,3021
	$\beta_1$	-0,6791	0,0491	0,9338	-0,9223
RSLN2	P(1 1) P(2 2)	0,96232/0,1546	0,81369/0,9489	0,78197/0,9155	0,91525/0,8519
		Régimen 1	Régimen 1	Régimen 1:	Régimen 1
	$\mu_{i1} / \sigma_{i1}$	-0,0064/0,0867	0,06769/0,16996	0,00574/0,16966	0,03401/0,17022
		Régimen 2	Régimen 2	Régimen 2	Régimen 2
	$\mu_{i2} / \sigma_{i2}$	0,28853/0,0535	-0,0062/0,0666	-0,0090/0,0649	-0,0286/0,0730
RS-GARCH	P(1 1) P(2 2)	0,00002/1,0000	0,98752/0,99154	0,39609/1,0000	Nd/Nd Nd/Nd
		Régimen 1	Régimen 1	Régimen 1	Régimen 1
	$\mu_1$	-0,0275	-0,0036	-1,0366	Nd
	$\omega_1$	0,8812	0,0879	837,2630	Nd
	$\alpha_{1,1}$	-0,0320	-0,1725	-0,2449	Nd
	$\beta_{1,1}$	0,6222	0,9572	0,6690	Nd
		Régimen 2	Régimen 2	Régimen 2	Régimen 2
	$\mu_2$	0,0052	-0,0033	0,0051	Nd
	$\omega_2$	0,0107	0,0036	0,0677	Nd
	$\alpha_{1,2}$	0,0320	0,0834	0,1918	Nd
$\beta_{1,2}$	-0,6222	0,4511	0,5647	Nd	

Tras la estimación de los modelos, hemos comprobado si los residuos superan el test de normalidad. En el caso de que los residuos no sean normales, el ajuste del modelo puede no ser adecuado puesto que indicaría que hay valores extremos que no captura convenientemente. Los residuos empleados para los modelos de cambio de régimen son los residuos ponderados. El cumplimiento de la normalidad se ha realizado mediante el test de Jarque-Bera. La tabla inferior muestra como solo los modelos RSLN2 superan el test de normalidad al 99% de confianza para la totalidad de las series. No obstante, los modelos E-garch superan el test para las series BBB y AA, mientras que el modelo Garch lo hace para la AAA y BBB. Finalmente, la serie BBB también supera el test de normalidad para el modelo normal. No ocurre lo mismo con el modelo CIR, que resulta claramente inadecuado para captar el riesgo de las colas.

Modelo	AAA	AA	A	BBB
Normal	19,74 (0,0001)	57,66 (0,0000)	43,43 (0,0000)	2,38 (0,3033)
CIR	194,68 (0,0000)	420,53 (0,0000)	276,87 (0,0000)	157,13 (0,0000)
AR(1) Garch(1, 1)	3,98 (0,1365)	26,75 (0,0002)	26,69 (0,0000)	4,33 (0,1146)
AR(1) Egarch(1, 1)	9,71 (0,0077)	6,52 (0,0382)	22,22 (0,0001)	1,66 (0,4348)
RSLN2	0,99 (0,608)	3,01 (0,221)	2,92 (0,232)	2,06 (0,356)
RS-Garch(1, 1)	20,11 (0,0000)	0,52 (0,77)	53,35 (0,000)	-

Nota: Se muestra el valor del estadístico JB y entre paréntesis el p-valor asociado.

A continuación analizaremos si los residuos y sus cuadrados están correlacionados a través de la Q de Ljung y Box (1979). En la tabla inferior mostramos los p-valores asociados, así como el estadístico de los residuos y sus cuadrados. Nuevamente, con excepción del modelo normal y del RSLN, los residuos y sus cuadrados no presentan autocorrelación.

Q(j)	NORMAL		CIR		AR(1)-GARCH		AR(1) E-GARCH		RSLN2	
	RES	RES2	RES	RES2	RES	RES2	RES	RES2	RES	RES2
<b>AAA</b>										
1	0,608	0,738	0,533	0,545	-	-	-	-	0,117	0,878
3	0,047	0,883	0,014	0,234	0,024	0,75	0,012	0,805	0,061	0,424
6	0,034	0,992	0,018	0,358	0,016	0,955	0,017	0,986	0,048	0,168
9	0,044	0,986	0,011	0,402	0,025	0,811	0,021	0,972	0,066	0,093
12	0,073	0,996	0,018	0,402	0,050	0,932	0,034	0,993	0,140	0,049
<b>AA</b>										
1	0,004	0,095	0,000	0,013	-	-	-	-	0,208	0,994
3	0,001	0,283	0,000	0,080	0,119	0,175	0,156	0,497	0,083	0,864
6	0,004	0,382	0,002	0,130	0,227	0,319	0,161	0,741	0,156	0,942
9	0,002	0,14	0,000	0,002	0,345	0,382	0,268	0,688	0,167	0,709
12	0,005	0,087	0,000	0,000	0,506	0,574	0,390	0,083	0,258	0,867
<b>A</b>										
1	0,000	0,009	0,000	0,000	-	-	-	-	0,011	0,802
3	0,000	0,006	0,000	0,000	0,476	0,668	0,384	0,803	0,009	0,384
6	0,000	0,027	0,000	0,000	0,816	0,590	0,744	0,675	0,0024	0,266
9	0,000	0,089	0,000	0,000	0,712	0,790	0,653	0,852	0,0280	0,491
12	0,000	0,079	0,000	0,000	0,875	0,756	0,832	0,732	0,083	0,396
<b>BBB</b>										
1	0,002	0,812	0,000	0,000	-	-	-	-	0,004	0,411
3	0,003	0,188	0,000	0,000	0,353	0,401	0,210	0,818	0,006	0,148
6	0,002	0,175	0,001	0,001	0,037	0,624	0,135	0,880	0,001	0,099
9	0,003	0,099	0,000	0,000	0,031	0,298	0,117	0,622	0,002	0,119
12	0,010	0,214	0,001	0,001	0,051	0,448	0,214	0,537	0,003	0,222

Los modelos que hemos revisado en las secciones anteriores están diseñados para analizar el riesgo de *spread* en el que incurre el asegurador a través del cálculo del *Value at Risk* (VaR). Una forma alternativa de validación de los modelos consiste en la aplicación de pruebas de *backtesting* y así evaluar el número de veces que las pérdidas han superado el VaR durante el periodo analizado. Los test que se han empleado son el test de Kupiec (1995) y de Christoffersen (1998). A diferencia de lo que es habitual para modelos aplicables a series de alta frecuencia, para evaluar el riesgo a largo plazo no se dispone de datos suficientes para poder estimar los modelos y, posteriormente, aplicar el *backtesting* a un periodo posterior. Por este motivo, se analizan los modelos sobre la misma serie

sobre la que se han estimado y sin efectuar una nueva modificación en la estimación de los parámetros de los mismos. Si un modelo supera los test, entendemos que tiene un número de fallos adecuado en un periodo suficientemente amplio que permite asumir que es adecuado para medir el riesgo. En el caso particular de las series analizadas, no se reportan valores para el test de independencia de Christoffersen porque no han existido violaciones consecutivas, lo que implica que todos los modelos pasan el test en cuestión.

El análisis del test de Kupiec revela que sólo los modelos RSLN2 superan el test para todas las categorías de *spread*. El resto de modelos no lo superan por presentar un número de fallos superior al permitido, salvo en la serie de BBB, donde todos superan el test. Esto indica que los modelos de mejor ajuste dependen de los datos utilizados, por lo cual la selección de los mismos debe realizarse de forma específica. No obstante, el RSLN2 es el único modelo que supera el *back-testing* y, al igual que sucede para otras series financieras, vuelve a ser un buen candidato para construir modelos internos para medir el riesgo de *spread* ya que muestra un buen equilibrio entre simplicidad y ajuste. No obstante, en las series analizadas la inclusión de un modelo autorregresivo podría ayudar a lograr un mejor ajuste y eliminar los problemas detectados de autocorrelación<sup>200</sup>.

	NORMAL	AR(1)-GARCH(1,1)	AR(1)-EGARCH(1,1)	RSLN 2
<b>AAA</b>				
FALLOS	3	3	3	0
POF (99,5%)	0,0372	0,0372	0,0372	0,2042
<b>AA</b>				
FALLOS	5	5	4	0
POF (99,5%)	0,0006	0,0006	0,0053	0,2042
<b>A</b>				
FALLOS	4	4	4	0
POF (99,5%)	0,0056	0,0056	0,0056	0,2042
<b>BBB</b>				
FALLOS	2	2	1	0
POF (99,5%)	0,1422	0,1422	0,6113	0,2226

Nota: Para los modelos con 0 fallos se muestra el p-valor asociado al Z-test.

<sup>200</sup> Es decir, un modelo de cambio de régimen donde las rentabilidades de cada régimen estuvieran normalmente distribuidas y tuvieran un componente AR(1).

## ***Evaluación del comportamiento de los modelos***

En este apartado realizaremos el análisis de los resultados de los *spreads* proyectados para cada *rating* por los modelos RSLN ajustados, comparándolos con los resultantes de aplicar la distribución anual empírica. Para ello se ha empleado 50.000 simulaciones de tipo Latino-Hipercúbico<sup>201</sup> para los rendimientos logarítmicos de cada uno de los 12 meses simulados. Posteriormente se acumulan dichos rendimientos y a partir del último valor histórico de cada categoría de *spread*, simulamos los niveles de *spreads* proyectados a un año. Estos valores se compararan con los que resultarían de aplicar los escenarios anuales históricos.

En la tabla inferior se muestran la estadísticas resumen de los valores proyectados mediante la distribución anual empírica y los modelos RSLN ajustados. Las principales estadísticas (media y distintos percentiles) de la distribución empírica de rendimientos anuales aritméticos de los *spreads* ha sido calculada como acumulación de los rendimientos mensuales de cada serie (AAA, AA, A y BBB). Estos datos nos proporcionan información acerca de las variaciones que han experimentado históricamente los *spreads* empleando una ventana móvil de 12 meses. Por ejemplo, la variación medio anual de los *spreads* AAA a lo largo de la muestra analizada ascendió a un incremento del 15,43%. En segundo término, se muestran las estadísticas de los valores de *spreads* proyectados a 1 año, aplicando las anteriores variaciones empíricas a los últimos niveles de *spread* históricos. Estos datos nos proporcionan información acerca de cuáles serían los niveles de *spreads* a un año si se aplican los rendimientos empíricos observados en el pasado. A modo de ejemplo, dado que el peor escenario anual empírico para el *rating* AAA ha sido una subida anual del 231,25%, si aplicásemos este escenario de estrés al último dato muestral resultaría un *spread* del 2,62% sobre el tipo libre de riesgo. En tercer lugar, se muestran las estadísticas de los *spreads* simulados mediante los modelos de cambio de régimen de Markov estimados anteriormente. Finalmente, las últimas cuatro columnas muestran información de las diferencias

---

<sup>201</sup> El método de simulación Latino Hiperúbico (LHS) es un método de recogida de muestras por estratificación. Permite recrear una distribución con una mayor precisión para un mismo número de iteraciones que el método de Monte Carlo común, en el que las muestras son seleccionadas de forma completamente aleatoria.

porcentuales entre los niveles simulados por los modelos y aquellos proyectados por la distribución anual empírica. Se observa como en general los modelos simulados generan niveles de *spreads* a un año cuyos valores máximos sobrepasan aquellos que resultan de aplicársele el peor escenario histórico de subida y valores mínimos que resultan inferiores a los que implicarían los mejores escenarios históricos de bajada. En la proyección de los percentiles centrales se observa menor variabilidad que los resultantes de los percentiles más extremos. Los niveles de *spreads* simulados mediante el modelo RSLN2 no revierten a la media, lo que provoca que en los escenarios de subida generen niveles poco realistas. Las opciones para resolver este problema sería emplear datos de menor frecuencia para aumentar el número de observaciones y además modelizar la media condicional ya que se aprecia términos autorregresivos en la media. Como futuras líneas de investigación se podrían ajustar los anteriores modelos a datos semanales o diarios, lo que aumentaría notablemente el tamaño de la muestra y permitiría el ajuste de modelos con elevado número de parámetros (modelos RSGARCH y RSLN con efectos autorregresivos en media). Además, también sería posible el ajuste a nuevos modelos entre los que destacamos el GARCH-SK, que es un modelo tipo GARCH en el que además de estimar la varianza condicional también se estima la asimetría y curtosis condicional [véase por ejemplo Gabrielsen (2010) y las referencias allí citadas]. Formalmente las ecuaciones del modelo GARCH(1,1)-SK(1,1) o GARCHSK(1,1,1,1) se escriben como:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-1}^2 \\ s_t &= \beta_0 + \beta_1 \eta_{t-1}^3 + \beta_2 s_{t-1} \\ k_t &= \gamma_0 + \gamma_1 \eta_{t-1}^4 + \gamma_2 k_{t-1} \end{aligned}$$

Donde  $\mu_t$  representa la ecuación condicional de la media (puede ser un modelo ARMA, una constante u omitirse si no es necesaria),  $\varepsilon_t$  son los residuos del modelo,  $\eta_t$  los residuos estandarizados calculados como  $\eta_t = \varepsilon_t / \sigma_t$ ,  $\sigma_t^2$  la varianza condicional de  $r_t$ ,  $s_t$  la simetría condicional de los residuos estandarizados y  $k_t$  la curtosis condicional de los residuos estandarizados. Sobre los parámetros de la ecuación deben imponerse una serie de restricciones para asegurar que la varianza condicional y la curtosis sean positivas, y que el proceso de la varianza, simetría y curtosis condicional sean estacionarios.

Estad.	Variaciones anuales empíricas						Valores proyectados aplicando variaciones empíricas						Valores de spreads simulados aplicando RSL/NZ						Variación spreads resultante modelo RSL/NZ/empírico					
	AAA	AA	A	BBB	BBB	AAA	AAA	AA	A	BBB	BBB	AAA	AAA	AA	A	BBB	BBB	AAA	AAA	AA	A	BBB	BBB	
Media	15,43%	24,12%	31,32%	43,06%	0,91%	2,01%	3,38%	9,74%	0,95%	2,20%	3,52%	7,91%	4,65%	9,41%	4,29%	-18,80%	4,65%	9,41%	4,29%	-18,80%	4,65%	9,41%	4,29%	
0,0%	-50,43%	-65,14%	-72,42%	-78,82%	0,39%	0,56%	0,71%	1,44%	0,19%	0,43%	0,63%	0,91%	-51,10%	-23,27%	-11,06%	-36,88%	-51,10%	-23,27%	-11,06%	-36,88%	-51,10%	-23,27%	-11,06%	
0,1%	-50,26%	-65,06%	-72,14%	-78,64%	0,39%	0,57%	0,72%	1,45%	0,31%	0,65%	0,92%	1,81%	-21,50%	14,31%	28,12%	24,77%	-21,50%	14,31%	28,12%	24,77%	-21,50%	14,31%	28,12%	
0,5%	-49,56%	-64,76%	-71,03%	-77,95%	0,40%	0,57%	0,74%	1,50%	0,36%	0,77%	1,16%	2,28%	-9,84%	35,25%	55,35%	52,05%	-9,84%	35,25%	55,35%	52,05%	-9,84%	35,25%	55,35%	
1,0%	-48,12%	-64,12%	-70,13%	-77,06%	0,41%	0,58%	0,77%	1,56%	0,39%	0,85%	1,26%	2,54%	-5,71%	45,74%	64,68%	62,41%	-5,71%	45,74%	64,68%	62,41%	-5,71%	45,74%	64,68%	
2,5%	-41,52%	-61,07%	-66,38%	-68,66%	0,46%	0,63%	0,86%	2,13%	0,44%	0,96%	1,45%	2,92%	-5,07%	52,16%	67,53%	36,77%	-5,07%	52,16%	67,53%	36,77%	-5,07%	52,16%	67,53%	
5,0%	-38,46%	-53,21%	-60,06%	-61,39%	0,49%	0,76%	1,03%	2,63%	0,49%	1,06%	1,62%	3,30%	0,02%	39,43%	57,56%	25,63%	0,02%	39,43%	57,56%	25,63%	0,02%	39,43%	57,56%	
10,0%	-34,89%	-31,07%	-41,40%	-55,73%	0,51%	1,12%	1,51%	3,01%	0,55%	1,18%	1,83%	3,80%	6,52%	5,48%	21,34%	26,19%	6,52%	5,48%	21,34%	26,19%	6,52%	5,48%	21,34%	
15,0%	-33,33%	-24,75%	-28,64%	-48,13%	0,53%	1,22%	1,83%	3,53%	0,60%	1,27%	1,99%	4,19%	12,98%	4,07%	8,63%	18,68%	12,98%	4,07%	8,63%	18,68%	12,98%	4,07%	8,63%	
25,0%	-26,86%	-19,54%	-17,53%	-28,02%	0,58%	1,30%	2,12%	4,90%	0,67%	1,42%	2,26%	4,83%	16,76%	9,10%	6,68%	-1,53%	16,76%	9,10%	6,68%	-1,53%	16,76%	9,10%	6,68%	
75,0%	38,23%	30,77%	35,29%	70,36%	1,09%	2,12%	3,48%	11,60%	1,12%	2,48%	4,08%	9,42%	2,97%	17,21%	17,32%	-18,77%	2,97%	17,21%	17,32%	-18,77%	2,97%	17,21%	17,32%	
85,0%	66,95%	72,58%	106,96%	156,01%	1,32%	2,80%	5,32%	17,43%	1,31%	3,11%	5,03%	11,71%	-0,50%	11,23%	-5,42%	-32,86%	-0,50%	11,23%	-5,42%	-32,86%	-0,50%	11,23%	-5,42%	
90,0%	92,72%	114,21%	158,60%	215,48%	1,52%	3,47%	6,65%	21,48%	1,46%	3,67%	5,86%	13,53%	-4,13%	5,79%	-11,77%	-37,02%	-4,13%	5,79%	-11,77%	-37,02%	-4,13%	5,79%	-11,77%	
95,0%	145,26%	198,95%	213,03%	300,25%	1,94%	4,84%	8,04%	27,26%	1,72%	4,69%	7,36%	17,07%	-11,24%	-3,06%	-8,57%	-37,36%	-11,24%	-3,06%	-8,57%	-37,36%	-11,24%	-3,06%	-8,57%	
97,5%	179,56%	271,15%	329,90%	323,08%	2,21%	6,03%	11,05%	28,81%	2,01%	5,82%	9,02%	20,89%	-8,90%	-3,54%	-18,36%	-27,48%	-8,90%	-3,54%	-18,36%	-27,48%	-8,90%	-3,54%	-18,36%	
99,0%	198,33%	328,98%	383,20%	431,57%	2,36%	6,95%	12,42%	36,20%	2,42%	7,62%	11,73%	26,37%	2,66%	9,72%	-5,54%	-27,17%	2,66%	9,72%	-5,54%	-27,17%	2,66%	9,72%	-5,54%	
99,5%	211,72%	349,98%	389,17%	455,13%	2,46%	7,29%	12,57%	37,80%	2,79%	8,99%	14,00%	31,06%	13,16%	23,26%	11,35%	-17,85%	13,16%	23,26%	11,35%	-17,85%	13,16%	23,26%	11,35%	
99,9%	227,34%	375,88%	392,22%	470,94%	2,59%	7,71%	12,65%	38,88%	3,86%	13,22%	19,48%	44,86%	49,15%	71,45%	53,98%	15,39%	49,15%	71,45%	53,98%	15,39%	49,15%	71,45%	53,98%	
100,0%	231,25%	382,35%	392,98%	474,89%	2,62%	7,81%	12,67%	39,15%	6,81%	13,22%	26,87%	53,98%	160,14%	243,92%	154,62%	127,81%	160,14%	243,92%	154,62%	127,81%	160,14%	243,92%	154,62%	

A continuación estableceremos cómo calcular el riesgo de *spread* de una compañía aseguradora en Solvencia II empleando modelos internos para el caso de un bono. El riesgo de *spread* de una obligación o bono se calcula refleja el cambio en el valor de los activos debido al movimiento de la curva de tipos de interés en relación a la curva sin riesgo. Para calcular la carga de capital resultante de un modelo interno se debe realizar un número suficiente simulaciones para todas las categorías de *spreads* a través de modelos adecuados. Mediante los *spreads* generados se puede analizar la repercusión sobre el precio de un bono. De este modo, el efecto del riesgo de *spread* al cabo de 12 meses se estima a través de los cambios en el precio del bono para lo que se emplea la siguiente ecuación:

$$P_{12} = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1 + r + CS_{12})}$$

Donde:  $P_{12}$  es el precio del bono en el mes 12,  $CF_t$  es el flujo de caja del bono,  $r$  es la tir libre de riesgo que se supone constante a lo largo del periodo analizado,  $CS_{12}$  es el *spread* simulado para una determinada categoría de *rating* en el mes 12. Dicho *spread* será una media ponderada de los *spreads* de los diferentes *ratings* simulados, ya que se debe tener en cuenta el efecto de las matrices de transición entre los diferentes *ratings* a 1 año. Esta matriz indica cuál es la probabilidad de que un bono con una determinada calificación pase a tener otra calificación dentro del periodo de temporal considerado. De esta forma, para simular el nivel de *spread* de un *rating* en el mes 12 podemos tener que simular todas las categorías de *rating*, ya que aunque exista una alta probabilidad de que el bono no varíe de calidad crediticia, también existe una probabilidad de que existan cambios de *rating* (subidas o bajadas)<sup>202</sup>. Dado que Solvencia II establece que las compañías que empleen un modelo interno deben establecer su carga de capital en base al VaR (99,5%) a un año, se calcula la pérdida máxima esperada al nivel de confianza establecido como el cuantil 0,5% de la distribución de pérdidas y ganancias del bono o cartera de bonos analizados.

El proyecto Solvencia II lleva a cabo una revisión de las normas de valoración de la situación financiera con el objetivo de mejorar el control y la medición de los

<sup>202</sup> Formalmente se denomina migración de *rating*.

riesgos a los que se exponen las aseguradoras europeas. Bajo este nuevo marco, la determinación de las necesidades de capital se puede calcular mediante un modelo estándar o bien con modelos internos previamente aprobados por el regulador. El presente trabajo orienta sobre la forma de elaborar un modelo interno para medir el riesgo de *spread* desde un punto de vista teórico y mediante el análisis del comportamiento empírico de distintas alternativas propuestas en la literatura. El análisis del test de Kupiec y Christoffersen revela que sólo los modelos de cambio de régimen de Markov donde los rendimientos generados en cada régimen se distribuyen normalmente (RSLN) superan dichos test para todas las categorías de *spread*. Posteriormente se simulan los niveles de los *spreads* mediante simulación Latino Hibercúbica comparando los niveles de *spread* con los que resultarían de aplicar la distribución anual empírica. Se observa como en general los modelos simulados generan niveles de *spreads* a un año cuyos valores máximos sobrepasan aquellos que resultan de aplicársele el peor escenario histórico de subida. Además, se simulan valores mínimos que resultan inferiores a los que implicarían los mejores escenarios históricos de bajada. En la proyección de los percentiles centrales se observa menor discrepancia que los resultantes de los percentiles más extremos. Esto podría indicar que los modelos RSLN, que son los que mejor se ajustan a los datos históricos superando las pruebas de *backtesting*, podrían no proyectar de forma adecuada los niveles futuros al carecer de reversión a la media y sobre ajustarse a los datos de rendimientos extremos. Esto supone un importante reto no sólo para las compañías aseguradoras que deseen desarrollar su modelo interno sino también a las autoridades de supervisión encargadas de aprobar su uso. Futuras investigaciones parecen necesarias para determinar los mejores modelos del riesgo de *spread* empleando datos de menor frecuencia para poder ajustar componentes autorregresivos en la media condicional.



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHLGRIM, K. C.; D'ARCY, S. P. y GORVETT, R. W. (2004a): "Asset-liability modeling for insurers: Incorporating a regime-switching process for equity returns into a Dynamic Financial Analysis model", Presentado a ASTIN Colloquium 2004, Bergen, Noruega. Disponible en [http://www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Bergen/Ahlgrim\\_DArcy\\_Gorvett.pdf](http://www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Bergen/Ahlgrim_DArcy_Gorvett.pdf) [consultado el 15 de enero de 2012].

AHLGRIM, K. C.; D'ARCY, S. P. y GORVETT, R. W. (2004b): "Modeling of Economic Series Coordinated with Interest Rate Scenarios", Proyecto de investigación Casualty Actuarial Society (CAS) y Society of Actuaries (SOA). Disponible en <http://www.soa.org/research/research-projects/finance-investment/research-modeling-of-economic-series-coordinated-with-interest-rate-scenarios.aspx>. [consultado el 15 de enero de 2012]-

AKAIKE, H. (1973): "Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle", en N. Petrov y F. Csake (ed.) *The Second International Symposium on Information Theory*, pp. 267-281. Hungary: Akademiai Kiado.

ALEXANDER C. O. y CHIBUMBA A. M. (1997): "Multivariate orthogonal factor GARCH", Working paper, University of Sussex.

ALEXANDER C. O. Y LAZAR, E. (2006): "Normal Mixture Garch (1,1): Applications to exchange rate modelling", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 21, No. 3, pp. 307-336.

ALONSO, A.; PEÑA, D. y ROMO, J. (2002): "Una revisión de los métodos de remuestreo en series temporales", *Estadística Española*, Vol. 44, No. 150, pp. 133-159.

AMERICAN ACADEMY OF ACTUARIES (AAA) (2005): "Recommended Approach for Setting Regulatory Risk-Based Capital Requirements for Variable Annuities and Similar Products", Presentado por la American Academy of Actuaries Life Capital

Adequacy Subcommittee al National Association of Insurance Commissioners Capital (NAIC) Adequacy Task Force (C3 Phase 2 Report). Disponible en [http://www.naic.org/documents/committees\\_e\\_capad\\_lrbc\\_2\\_LCASDocFinal.pdf](http://www.naic.org/documents/committees_e_capad_lrbc_2_LCASDocFinal.pdf) [consultado el 15 de enero de 2012].

ANG, A. y BEKAERT, G. (2002): "International asset allocation with time-varying correlations", *Review of Financial Studies*, Vol. 15, No. 4, pp. 1137-1187.

ANG, A. y CHEN, J. (2002): "Aymmetric Correlations of Equity Portfolios", *Journal of Financial Economics*, Vol. 63, No. 3, pp. 443-494.

ANGELIDIS, T.; BENOS, A. y DEGIANNAKIS, S. A. (2004): "The Use of GARCH Models in VaR Estimation", *Statistical Methodology*, Vol. 1, No. 2, pp. 105-128.

ARAK, M. y CORCORAN, P. J. (1996): "Yields on privately placed debt: examining the behavior", *Journal of Portfolio Management*, Vol. 22, No. 3, pp. 88-96.

ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J. M. y HEATH, D. (1999): "Coherent Measures of Risk", *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, pp. 203-228.

ASAI, M.; MCALEER, M. y YU, J. (2006): "Multivariate Stochastic Volatility: a Review", *Econometric Reviews*, Vol. 25, No. 2-3, pp. 145-175.

BACHELIER, L. (1900): "Theorie de la Speculation", *Annales de l'Ecole Normal Superieure*, Vol. 17, pp. 21-86.

BAILLIE, R. T. y BOLLERSLEV T. (1989): "The message in daily exchange rates: a conditional-variance tale", *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 7, No. 3, pp. 297-305.

BALL, C. A. y TOROUS, W. N., (1983): "A simplified jump process for common stock returns", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 18, No. 1, pp. 53-65.

BANSAL, R.; TAUCHEN, G. y ZHOU, H. (2004): "Regime shifts, risk premiums in the term structure, and the business cycle", *Journal of Business and Economics Statistics*, Vol. 22, No. 4, pp. 396-409.

BARKHAM, R. y GELTNER, D. (1994): "Understanding British Valuation-Based Returns Without Assuming an Efficient Market", *Journal of Property Research*, Vol. 11, No. 2, pp. 81-95.

BARKHAM, R. y GELTNER, D. (1995): "Price Discovery in American and British Property Markets", *Real Estate Economics*, Vol. 23, No. 1, pp. 21-44.

BARRIE & HIBBERT (2011): "A Comment on the Solvency II equity dampener: more change to come?". Disponible en [http://www.barrhibb.com/blog/entry/a\\_comment\\_on\\_the\\_solvency\\_ii\\_equity\\_dampener/](http://www.barrhibb.com/blog/entry/a_comment_on_the_solvency_ii_equity_dampener/) [consultado el 15 de enero de 2012].

BASEL COMMITTEE OF BANKING SUPERVISION (1996): *Supervisory Framework For The Use of "Backtesting" in Conjunction With The Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements*. Disponible en <http://www.bis.org/publ/bcbsc223.pdf> [consultado el 15 de enero de 2012].

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (2005): *Amendment to the capital Accord to incorporate market risks*. Disponible en <http://www.bis.org/publ/bcbs119.pdf> [consultado el 15 de enero de 2012].

BATCHELOR R. K. y MANZONI (2006): "The dynamics of bond yield *spreads* around rating revision dates", *Journal of Financial Research*, Vol. 29, No. 3, pp.421-436.

BAUM, A.; CROSBY, N.; MCALLISTER, P.; GALLIMORE, P. y GRAY, A. (2000): "The Influence of Valuers and Valuations on the Workings of the Commercial Property Investment Market", RICS Research Foundation. Disponible en <http://construction.ntu.ac.uk/staffwebs/gallimore/valuers.pdf> [consultado el 15 de enero de 2012].

BAUWENS, L.; LAURENT, S. y ROMBOUTS, J. V. K. (2006): "Multivariate GARCH: A Survey", *Journal of Applied Econometrics*, Vol.21, No. 1, pp. 79-109.

BAYLIFFE D. y PAULING, B. (2003): "Long Term Equity Returns", Presentado al 2003 Stochastic Modeling Symposium, 4-5 Septiembre, Toronto. Disponible en [http://www.towersperrin.com/tp/getwebcachedoc%3Fwebc=TILL/USA/2003/200309/Long\\_Term\\_Equity\\_Returns.pdf](http://www.towersperrin.com/tp/getwebcachedoc%3Fwebc=TILL/USA/2003/200309/Long_Term_Equity_Returns.pdf) [consultado el 15 de enero de 2012].

BERA, A. K. y HIGGINS, M. L. (1993): "ARCH modes: properties, estimation and testing", *Journal of Economic Surveys*, Vol. 7, No. 4, pp. 305-366.

BERGMAN, U. M. y HANSSON, J. (2005): "Real exchange rates and switching regimes", *Journal of International Money and Finance*, Vol. 24, No. 1, pp. 121-138.

BERKOWITZ, J. (2001): "Testing Density Forecasts, With Applications to Risk Management", *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 19, No. 4, pp. 465-474.

BERKOWITZ, J. y O'BRIEN, J. (2002): "How Accurate are Value-at-Risk Models at Commercial Banks?", *Journal of Finance*, Vol. 57, No. 3, pp. 1093-1112.

BEST, D. J. y GIPPS, P. G. (1974): "Algorithm AS 71: The Upper Tail Probabilities of Kendall's Tau", *Applied Statistics*, Vol. 23, No. 1., pp. 98-100.

BIERENS, J. H.; HUANG, J. Z. y KONG, W. (2003): "An Econometric Model of Credit Spreads with Rebalancing, ARCH and Jump Effects", Stern School of Business Working Paper No. FIN-03-012. Disponible en: <http://ssrn.com/abstract=396644> [consultado el 15 de enero de 2012].

BIERENS, J. H.; HUANG, J. Z. y KONG, W. (2005): "Time-Series Estimation of Aggregate Corporate Bond Credit Spreads", Presentado a China International Conference in Finance, Kunming, China, 6 de Julio. Disponible en <http://www.ccf.org.cn/cicf2005/paper/20050126063455.PDF> [consultado el 15 de enero de 2012].

BLACK, F. y COX, J. C. (1976): "Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions", *Journal of Finance*, Vol. 31, No. 2, pp. 351-367.

BLACK, F. y SCHOLES, M. (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

BLATTBERG, R. C. y GONEDES, N. J. (1974): "A Comparison of the Stable and Student Distribution as Statistical Models for Stock Prices", *Journal of Business*, Vol. 47, No. 2, pp. 247-280.

BLUM, P. (2005): *On some mathematical aspects of Dynamic Financial Analysis*, Tesis Doctoral, University of Zurich.

BLUM, P.; DACOROGNA, M.; EMBRECHTS, P.; NEGHAWI, T. y NIGGLI, H. (2001): "Using DFA for Modelling the Impact of Foreign Exchange Risks on Reinsurance Decisions", *CAS Forum*, Summer, pp. 49-93.

BLUNDELL, D. y WARD, C. W. R. (1987): "Property Portfolio Allocation: A Multi-Factor Model", *Journal of Development Studies*, Vol. 4, No. 2, pp. 145-156.

BOLLEN, N. P. B., GRAY, S. F. y WHALEY, R. E. (2000): "Regime Switching in Foreign Exchange Rates: Evidence from Currency Option Prices," *Journal of Econometrics*, Vol. 94, No. 1-2, pp. 239-276.

BOLLERSLEV, T. (1986): "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, Vol. 31, No. 3, pp. 307-327.

BOLLERSLEV, T. (1990): "Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model", *Review of Economics and Statistics*, Vol. 72, No. 3, pp. 498-505.

BOLLERSLEV, T.; ENGLE, R. F. y WOOLDRIDGE, J. (1988): "A capital asset pricing model with time-varying covariance", *Journal of Political Economy*, Vol. 96, No. 1, pp. 116-13.

BOLLERSLEV, T.; CHOU, R. Y. y KRONER K. (1992): "ARCH modelling in finance: a review of the theory and empirical evidence", *Journal of Econometrics*, Vol. 52, No. 1, pp. 5-59.

BOND, S. A. (2000): "A review of conditional density functions in autoregressive conditional heteroscedasticity models" en Knight, J. y Satchell, S.E. (eds) *Return Distributions in Finance*, Butterworth and Heinemann, Oxford.

BOOTH, P. y MARCATO, G. (2004): "The Measurement and Modelling of Commercial Real Estate Performance", *British Actuarial Journal*, Vol. 10 No. 1, pp. 5-61.

BOS, C. S. (2011): "Relating Stochastic Volatility Estimation Methods", Tinbergen Institute Discussion Paper No. 11-049/4. Disponible en <http://www.tinbergen.nl/discussionpapers/11049.pdf> [consultado el 15 de enero de 2012].

BOUDREAU, M. y PANNETON C. M. (2009): "Multivariate Models of Equity Returns for Investment Guarantees Valuation", *North American Actuarial Journal*, Vol.13, No.1, pp. 36-53.

BOUYÉ, E.; DURRLEMAN, V.; NIKEGHBALI, A.; RIBOULET, G. y RONCALLI, T. (2000): "Copulas for finance – a reading guide and some applications", Working Paper. Disponible en <http://www.thierry-roncalli.com/download/copula-survey.pdf> [consultado 15 de enero de 2012].

BOX, G. E. P. y Pierce, D. A. (1970): "Distribution of the Autocorrelations in Autoregressive Moving Average Time Series Models", *Journal of American Statistical Association*, Vol. 65, No. 232, pp. 1509-1526.

BRENNAN, M. J. y SCHWARTZ, E. S. (1980): "Analyzing Convertible Bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 15, No. 4, pp. 907-929.

BROCK, W.; DECHERT, D.; SCHEINKMAN, J. y LEBARON, B. (1996): "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension", *Econometric Reviews*, Vol. 15, No. 3, pp. 197-235.

BROOKS, C.; BURKE, S. P. y PERSAND, G. (2003): "Multivariate GARCH models: software choice and estimation issues", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 18, No. 6, pp. 725-734.

BROTO, C. y RUIZ, E. (2004): "Estimation methods for stochastic volatility models: a survey", *Journal of Economic Surveys*, Vol. 18, No. 5, pp. 613-649.

BROWN, D. T. (2001): "An Empirical Analysis of Credit *Spread* Innovation", *Journal of Fixed Income*, Vol. 9, pp. 9-27.

BROWN, G. R. y MATYSIAK, G. A. (1998): "Valuation Smoothing without Temporal Aggregation", *Journal of Property Research*, Vol. 15, No. 2, pp. 89-103.

BROWN, G. R. y MATYSIAK, G. A. (2000): *Real Estate Investment*, Ed. Prentice Hall.

BURNS, P. (2002): "The quality of Value at Risk via univariate GARCH", *Computational Statistics*, Vol. 9, 301-310.

CAMPBELL, J. Y. y HENTSCHELL, L. (1992): "No news is good news: An asymmetric model of changing volatility in stock returns", *Journal of Financial Economics*, Vol. 31, No. 3, pp. 281-318.

CAMPBELL, S. (2005): "A Review of Backtesting and Backtesting Procedure", Finance and Economics Discussion Series, Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs, Federal Reserve Board, Washington D.C.

CAO C. Q. y TSAY, R. S. (1992): "Non linear Time Series Análisis of Stock Volatility", *Journal of Applied Econometrics*. Vol. 7, No. S1, pp. 165-185.

CAPORALE, G. M. y SPAGNOLO, N. (2004): "Modelling East Asian exchange rates: a Markov switching approach", *Applied Financial Economics*, Modelling East Asian exchange rates: a Markov switching approach", *Applied Financial Economics*, Vol. 14, No. 4, pp. 233-242.

CAPPIELLO, L.; ENGLE, R. F. y SHEPPARD, K. (2006): "Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns", *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 4, No. 4, pp. 537-572.

CEA (2011a): *European insurers' investment portfolio – 21 Jun 2011*.

CEA (2011b): *Issues with and solutions for QIS5 Currency Risk treatment*.

CEIOPS (2007): *Calibration of the underwriting risk, market risk and MCR*. CEIOPS-FS-14/07.

CEIOPS (2008a): *QIS4 Technical Specifications*. MARKT/2505/08.

CEIOPS (2008b): *QIS4 background document Calibration of SCR, MCR and proxies*, CEIOPS-DOC-02/2008.

CEIOPS (2009): *CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: Articles 120 to 126 Tests and Standards for Internal Model Approval*, CEIOPS-DOC-48/09.

CEIOPS (2010a): *QIS5 Technical Specifications*.

CEIOPS (2010b): *Solvency II Calibration Paper*, CEIOPS-SEC-40-10.

CEIOPS (2010c): *CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: Article 111 and 304 Equity risk sub-module*, CEIOPS-DOC-65/10.

CHAN, K. C.; KAROLYI, G. A.; LONGSTAFF, F. A. y SANDERS, A. B. (1992): "An empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate", *The Journal of Finance*, Vol. 47, No. 3, 1209-1227.

CHAN, K. S. y TONG, H. (1986): "On Estimating Thresholds in Autoregressive Models", *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 7, No. 3, pp. 178-190.

CHAN W. S., CHEUNG, S. H., ZHANG, L.X. y WU, K. H. (2008): "Temporal Aggregation of Equity Return Time-Series Models", *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 78, No. 2-3, pp. 172-180.

CHAN, W. S.; WONG, A. C. S. y TONG, H. (2004): "Some nonlinear threshold autoregressive time series models for actuarial use", *North American Actuarial Journal*, Vol. 8, No. 4, pp. 37-61.

CHAN, W. S., ZHANG, L. X. y CHEUNG, S. H. (2009): "Temporal Aggregation of Markov Switching Financial Return Models", *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, Vol. 25, No. 3, pp. 359-383.

CHAPLIN, R. (1997): "Unsmoothing valuation-based indices using multiple regimes", *Journal of Property Research*, Vol. 14, No. 3, pp. 189-210.

CHATFIELD, C. (1993): "Calculating Interval Forecasts", *Journal of Business and Economics Statistics*, Vol. 11, No. 2, pp. 121-135.

CHERUBINI, U.; LUCIANO, U. y VECCHIATO, W. (2004): *Copula Methods in Finance*, Wiley.

CHO, H., KAWAGUCHI Y. y SHILLING J. D. (2003): "Unsmoothing Commercial Property Returns: A Revision to Fisher-Geltner-Webb's Unsmoothing Methodology", *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol. 27, No. 3, pp. 393-405.

CHRISTODOULAKIS, G. A. y SATCHELL, S. E. (2002): "Correlated ARCH: modelling the time-varying correlation between financial asset returns", *European Journal of Operations Research*, Vol. 139, No. 2, pp. 351-370.

CHRISTOFFERSEN, P. (1998): "Evaluating interval forecasts", *International Economic Review*, Vol. 39, No. 4, pp. 841-862.

CHRISTOFFERSEN, P. y PELLETIER, P. (2004): "Backtesting Value-at-Risk: A Duration-Based Approach", *Journal of Empirical Finance*, Vol. 2, No. 1, pp. 84-108.

CLARIDA, R. H.; SARNO, L.; TAYLOR, M. P. y VALENTE, G. (2006): "The role of asymmetries and regime shifts in the term structure of interest rates", *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 79, No. 3, pp. 1193-1224.

CLAYTON, J.; GELTNER, D. M. y HAMILTON, S. W. (2001): "Smoothing in Commercial Property Valuations: Evidence from Individual Appraisals", *Real Estate Economics*, Vol. 29, No. 3, pp. 337-360.

COGNEAU P. y ZAKAMOULINE V. (2012): "Block bootstrap methods and the choice of stocks for the long run", *Quantitative Finance*, Forthcoming.

COHEN, A. y SACKROWITZ, H. B. (1975): "Unbiasedness of the Chi-Square, Likelihood Ratio, and Other Goodness of Fit Tests for the Equal Cell Case", *Annals of Statistics*, Vol. 3, No. 4, pp. 959-964.

COLLET, D.; LIZIERI, C. y WARD, C. (2003): "Timing and the Holding Periods of Institutional Real Estate", *Real Estate Economics*, Vol. 31, No. 2, pp. 205-222.

COLLETAZ, G.; HURLIN, C. y PÉRIGNON, C. (2011): "The Risk Map: A New Tool for Backtesting Value-at-Risk Models", Working Paper. Disponible en [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1824984](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1824984) [consultado el 15 de enero de 2012].

COMISIÓN EUROPEA (2013): *Proposal for a DIRECTIVE OF THE EUROPEAN PARLIAMENT AND OF THE COUNCIL amending Directive 2009/138/EC on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II) as regards the dates of transposition and application and the date of repeal of certain Directives*, COM(2013) 680 final.

CORGEL, J. y DE ROSS, J. (1999): "Recovery of Real Estate Returns for Portfolio Allocations", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol. 18, No. 3, pp. 279-296.

COX, J.; INGERSOLL, J. y ROSS, S. (1985): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, Vol. 53, No 2, pp. 385-407.

CRNKOVIC, C. y DRACHMAN, J. (1997): "Quality Control in VaR: Understanding and Applying Value-at-Risk", *Risk*, Vol. 9, pp. 139-143.

CRO FORUM (2011): *Currency Risk under Solvency II: The day an accounting treatment hatched into a risk*. Disponible en [http://www.thecroforum.org/assets/files/publications/CROF%20Non-Reporting%20Currency%20Risk\\_April%202011.pdf](http://www.thecroforum.org/assets/files/publications/CROF%20Non-Reporting%20Currency%20Risk_April%202011.pdf) [consultado el 15 de enero de 2012].

D'ARCY, S. P.; GORVETT, R. W.; HERBERS, J. A.; HETTINGER, T. E.; LEHMANN, S. G. y MILLER, M. J. (1997): "Building a Public Access PC-Based DFA Model", CAS Forum, pp. 1-40.

D'ARCY, S. P.; GORVETT, R. W.; HETTINGER, T. E. y WALLING III, R. J. (1998): "Using the Public Access Dynamic Financial Analysis Model. A Case Study", CAS Forum, pp. 53-118.

D'ARCY, S. P. y GORVETT, R. W. (2004): "The Use of Dynamic Financial Analysis to Determine Whether an Optimal Growth Rate Exists for a Property-Liability Insurer", *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 71, No. 4, pp. 583-615.

DAVIES, A. (2004): "Credit Spread Modeling with Regime-Switching Techniques", *The Journal of Fixed Income*, Vol. 14, No. 3, pp. 36-48.

DE ARCE, R. (2004): "20 años de modelos ARCH: una visión de conjunto de las distintas variantes de la familia", *Estudios de economía aplicada*, Vol. 22, No. 1, pp. 1-27.

DE LA PEÑA, V. H.; RIVERA, R. y RUIZ-MATA, J. (2007): "Quality Control of Risk Measures: Backtesting VaR Models", *Journal of Risk*, Vol. 9, No. 2, pp. 39-54.

DE MATTEIS, R. (2001): *Fitting Copulas to Data*, Tesis doctoral, University of Zurich.

DELIANEDIS, G. y GESKE, R. (2001): "The Components of Corporate Credit Spreads: Default, Recovery, Tax, Jumps, Liquidity and Market Factors" Working Paper, Universidad de California. Disponible en <http://escholarship.org/uc/item/32x284q3> [consultado el 15 de enero de 2012].

DEMPSTER, A. P.; LAIRD, N. M. y RUBIN, D. B. (1977): "Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm", *Journal of the Royal Statistical Society B*, Vol. 39, No. 1, pp. 1-38.

DEMPSTER, M. A. H.; HON, F. I. A.; GERMANO, M.; MEDOVA, E. A. y VILLAVERDE, M. (2003): "Global Asset Liability Management", *British Actuarial Journal*, Vol. 9, No. 1, pp. 137-195.

DEVANEY, S. y MARTINEZ DIAZ, R. (2010), "Transaction based indices for the UK commercial real estate market", Working paper, University of Aberdeen. Disponible en <http://aura.abdn.ac.uk/bitstream/2164/775/1/BS%2010-02.pdf> [consultado el 1 de enero de 2012].

DEWACHTER, H. (2001), "Can Markov Switching Models Replicate Chartist Profits in the Foreign Exchange Market?", *Journal of International Money and Finance*, Vol. 20, No. 1, pp. 25-41.

DIAZ III, J. y WOLVERTON, M. L. (1998): "A Longitudinal Examination of the Appraisal Smoothing Hypothesis", *Real Estate Economics*, Vol. 26, No. 2, pp. 349-358.

DIEBOLD, F. X., GUNTHER, T. A., y TAY, A. S. (1998): "Evaluating Density Forecasts with Applications to Financial Risk Management", *International Economic Review*, Vol. 39, No. 4, pp. 863-883.

DING, Z.; GRANGER C. W. J. y ENGLE R. F. (1993): "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model", *Journal of Empirical Finance*, Vol. 1, No. 1, pp. 83-106.

DOWD, K. (1998): *Beyond Value at Risk, The new Science of Risk Management*, John Wiley & Sons, England.

DOWD, K. (2006): "Retrospective Assessment of Value-at-Risk. Risk Management: A Modern Perspective", en M. K. Ong (ed.) *Risk Management A Modern Perspective*, San Diego, Elsevier, pp. 183-202.

DUFFEE, G. R. (1998): "The relation between Treasury yields and corporate bond yield spreads", *Journal of Finance*, Vol. 53, No. 6, pp. 2225-2241.

DUFFIE, D. y KAN, R. (1996): "A yield-factor model interest rates", *Mathematical Finance*, Vol. 6, No. 4, pp. 379-406.

DUFFIE, D. y SINGLETON, K., J. (1999): "Modelling the Term Structure of defaultable bonds", *The Review of Financial Studies*, Vol. 12, No. 4, pp. 687-720.

DURÁN, P. y OTERO, L. A. (2010): *El Análisis Financiero Dinámico como Herramienta para el Desarrollo de Modelos Internos en el Marco de Solvencia II*, Cuadernos de la Fundación Mapfre N° 153, Ed. Fundación Mapfre (Madrid).

DURRELMAN, V.; NIKEGHBALI, A. y RONCALLI, T. (2000): "Which copula is the right one?", Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais. Disponible en [http://defaultrisk.com/pp\\_corr\\_68.htm](http://defaultrisk.com/pp_corr_68.htm) [consultado el 1 de enero de 2012].

EBERLEIN, E. y KELLER, U. (1995): "Hyperbolic distributions in finance", *Bernoulli*, Vol. 1, No. 3, pp. 281-299.

EIOPA (2011a): *EIOPA Report on the fifth Quantitative Impact Study (QIS5) for Solvency II*, TFQIS5-11/001.

EIOPA (2011b): *Specifications for the 2011 EU-wide stress test in the insurance sector*, FS-11/012.

ELING, M. y PANKOKE, D. (2012): "Basis Risk, Procyclicality, and Systemic Risk in the Solvency II Equity Risk Module", Presentado a American Risk and Insurance Association (ARIA) 2012 Annual Meeting 5-8 de Agosto, Minneapolis, Minnesota (EE.UU.). Disponible en <http://www.aria.org/meetings/2012%20Meetings/4B-Basis%20Risk%20Procyclicality.pdf> [consultado el 15 de Septiembre de 2012].

EMBRECHTS, P.; LINDSKOG, F. y MCNEIL, A. (2001): "Modelling dependence with copulas and applications to risk management", en S. T. Rachev (ed.): *Handbook of heavy tailed distributions in finance*, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, pp. 329-384.

EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A. y STRAUMANN, D. (2002): "Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls", en M. A. H. Dempster (ed.): *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 176-223.

ENGEL, C. M. (1994): "Can the Markov Switching Model Forecast Exchange Rates?", *Journal of International Economics*, Vol. 36, No. 1-2, pp. 151-165.

ENGEL, C. M. y HAKKIO, C. S. (1996): "The Distribution of Exchange Rates in the EMS", *International Journal of Finance and Economics*, Vol. 1, No. 1, pp. 55-67.

ENGEL, C. M. y HAMILTON, J. D. (1990): "Long Swings in the Dollar: Are They in the Data and Do Markets Know It?", *American Economic Review*, Vol. 80, No. 4, pp. 689-713.

ENGEL, C. M. y KENNETH, W. (2004): "Accounting for Exchange Rate Variability in Present Value Models when the Discount Factor is Near One", *American Economic Review*, Vol. 94, No. 2, pp. 119-125.

ENGEL, C. M. y KENNETH, W. (2005): "Exchange Rates and Fundamentals", *Journal of Political Economy*, Vol. 113, No. 3, pp. 485-517.

ENGLE, R. F. (1982): "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation", *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, pp. 987-1008.

ENGLE, R. F. (2002): "Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models", *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 20, No. 3, pp. 339-50.

ENGLE, R. F. y BOLLERSLEV, T. (1986): "Modelling the persistence of conditional variance", *Econometric Reviews*, Vol. 5, No. 1, pp. 1-50.

ENGLE R. F. y GAU Y. F. (1997): "Conditional volatility of exchange rates under a target zone", Working paper. Disponible en <http://ssrn.com/abstract=39724> [consultado el 15 de enero de 2012].

ENGLE, R. F. y GRANGER, C. W. J. (1987). "Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing", *Econometrica*, Vol. 55, No. 2, pp. 251-276.

ENGLE, R. F. y KRONER, G. (1995): "Multivariate simultaneous generalized ARCH", *Econometry Theory*, Vol. 11, No. 1, pp. 122-150.

ENGLE, R. F.; LILIEN, D. y ROBINS, R. (1987): "Estimating time-varying risk premia in the term structure. The ARCH-M model", *Econometrica*, Vol. 55, No. 2, pp. 391-407.

ENGLE, R. F. y SHEPPARD K. (2001), "Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH", Stern Finance Working Paper Series FIN-01-027, New York University Stern School of Business. Disponible en <http://qed.econ.queensu.ca/faculty/mackinnon/econ872/papers/engle-sheppard.pdf> [consultado 15 de enero de 2012].

FAMA, E. F. (1963): "Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis", *Journal of Business*, Vol. 36, No. 4, pp. 420-429.

FAMA, E. F. (1965): "The Behaviour of Stock Market Prices", *Journal of Business*, Vol. 38, No. 1, pp. 34-105.

FIGLEWSKI, S. (1997): "Forecasting volatility", *Financial Markets, Institutions and Instruments*, Vol. 6, No. 2, pp.1-88.

FINGER, C. (2005): "Back to Backtesting", Research Monthly, May RiskMetrics Group.

FINMA (2011): *Guideline on the "SST" market risk standard model*. Edición del 26 de Octubre de 2011. Disponible en <http://www.finma.ch/e/beaufsichtigte/versicherungen/schweizer-solvenztest/Pages/default.aspx> [consultado el 15 de enero de 2012].

FISHER, J.; GATZLAFF, D.; GELTNER, D. M. y HAURIN, D. (2003): "Controlling for the Impact of Variable Liquidity in Commercial Real Estate Price Indices", *Real Estate Economics*, Vol. 31, No. 2, pp. 269-303.

FISHER, J.; GELTNER, D. y POLLAKOWSKI, H. (2007), 'A Quarterly Transactions-based Index of Institutional Real Estate Investment Performance and Movements in Supply and Demand', *Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol. 34, No. 1, pp. 5-33.

FISHER, J.; GETTNER, D. y WEBB, B. (1994): "Value Indices of Commercial Real Estate: A Comparison of Index Construction Methods", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol. 9, No. 2, pp. 137-166.

FISHER, J.; MILES, M. y WEBB, R. B. (1999): "How Reliable are Commercial Property Appraisals? Another Look", *Real Estate Finance*, Vol. 16, No. 3, pp. 9-15.

FISHER, J. Y YOUNG, M. S. (2000): "Holding Periods for Institutional Real Estate in the NCREIF Database", *Real Estate Finance*, Vol. 17, No. 3, pp. 27-34.

FRANK, M. J. (1979): "On the Simultaneous Associativity of  $F(x,y)$  and  $x+y-F(x,y)$ ", *Aequationes Mathematicae*, Vol. 19, No. 2-3, pp. 194-226.

FRANSES, P. H. y VAN DIJK, D. (2000): *Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance*, Cambridge: Cambridge University Press.

FREELAND, R. K.; HARDY, M. R. y TILL, M. (2009a): "Assessing Regime Switching Equity Return Models", Working paper. Disponible en [www.soa.org/library/monographs/other-monographs/2009/april/mono-2009-m-as09-1-freeland.pdf](http://www.soa.org/library/monographs/other-monographs/2009/april/mono-2009-m-as09-1-freeland.pdf) [consultado el 15 de enero de 2012].

FREELAND R. K., TILL, M., y HARDY M. R. (2009b): "Residual Based Assessment of Regime Switching Autoregressive Models", Working Paper.

FREES, E. y VALDEZ, E. (1998): "Understanding relationships using copulas", *North American Actuarial Journal*, Vol. 2, No. 1, pp.1-25.

FRIEDMAN, D. y VANDERSTEEL, S. (1982): "Short-run fluctuations in foreign exchange rates", *Journal of International Economics*, Vol. 13, No. 1-2, pp. 171-186.

GABRIELSEN (2010): *Modelling the Dynamics of Credit Spreads of European Corporate Bond Indices*, Tesis doctoral, City University London. Disponible en <http://openaccess.city.ac.uk/1116/> [consultado el 15 de enero de 2012]

GELTNER, D. M. (1991): "Smoothing in Appraisal-Based Returns", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol. 4, No. 3, pp. 327-345.

GELTNER, D. M. (1993a), "Temporal aggregation in real estate return indices", *Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association*, Vol. 21, No. 2, pp. 141-166.

GELTNER, D. M. (1993b): "Estimating Market Values from Appraised Values Without Assuming an Efficient Market", *Journal of Real Estate Research*, Vol. 8, No. 3, pp. 325-345.

GELTNER, D. M.; MILLER, N. G.; CLAYTON, J. y EICHHOLTZ, P. (2007): *Commercial Real Estate Analysis and Investments*, 2ª Edición, Ed. Cengage Learning.

GENEST, C. y RIVEST, L. (1993): "Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 88, No. 423, pp. 1034-1043.

GEWEKE J. (1986): "Modelling the Persistence of Conditional Variances: A Comment", *Econometric Review*, Vol. 5, No. 1, pp. 51-56.

GHYSELS, E.; HARVEY, A. y RENAULT, E. (1996): "Stochastic volatility" en G. S. Maddala y C. R. Rao (eds.) *Handbook of Statistics*, Elsevier Science: Amsterdam.

GLOSTEN, L.; JAGANNATHAN, R. y RUNKLE, D. (1993): "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks", *Journal of Finance*, Vol. 48, No. 5, pp. 1779-1801.

GORVETT, R. W. (2001): "Foreign Exchange Rate Risk: Institutional Issues and Stochastic Modeling", *CAS Discussion Paper Program: Financial and Accounting Systems and Issues Associated with the Globalization of Insurance*, Disponible en <http://www.casact.org/pubs/dpp/dpp01/01dpp19.pdf> [consultado 15 de enero de 2012].

GRAFF, R. A.; HARRINGTON, A. y YOUNG, M. S. (1997): "The Shape of Australian Real Estate Return Distributions and Comparisons to the United States", *Journal of Real Estate Research*, Vol. 14, No. 3, pp. 291-308.

GRANGER, C. W. J. y TERÄSVIRTA T. (1992): *Modelling Dynamic Nonlinear Relationships*, Oxford University Press.

GRAY, J. B. y FRENCH, D. W. (1990): "Empirical Comparisons of Distributional Models for Stock Index Returns", *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol. 17, No. 3, pp. 451-459.

GRAY, S. F. (1996): "Modelling the conditional distribution of interest rates as a regime switching process", *Journal of Financial Economics*, Vol. 42, No. 1, pp. 27-62.

GUMBEL, E. J. (1960): "Bivariate Exponential Distributions", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 55, No. 292, pp. 698-707.

HAAS, M. (2001): "Methods in Backtesting", Financial Engineering, Research Center Caesar, Bonn. Disponible en <http://www.each.usp.br/rvicente/risco/haas.pdf> [consultado 15 de enero de 2012].

HAAS, M. (2005): "Improved Duration-Based Backtesting of Value-at-Risk", *Journal of Risk*, Vol. 8, No. 2, pp. 17-36.

HAFNER, C. y HERWARTZ, H. (1998): "Time-varying market price of risk in the CAPM. Approaches, empirical evidence and implications", *Finance*, Vol. 19, No. 2, pp. 93-112.

HAMILTON, J. D. (1989): "A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle", *Econometrica*, Vol 57, No. 2, pp. 357-384.

HAMILTON, J. D. (1994): *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press.

HAMILTON, J. D. (2005): "Regime Switching Models", Palgrave Dictionary of Economics. Disponible en <http://dss.ucsd.edu/~jhamilto/palgrav1.pdf> [consultado 15 de enero de 2012].

HAMILTON, J. D. y SUSMEL, R. (1994) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime", *Journal of Econometrics*, Vol. 64, No. 1-2, pp. 307-333.

HANNAN, E. J. y QUINN, B. G. (1979): "The determination of the order of an autoregression", *Journal of the Royal Statistical Society B*, Vol. 41, No. 2, pp. 190-195.

HANSEN, B. E. (1996): "Erratum the Likelihood Ratio test under nonstandard conditions Testing the Markov switching model of GNP", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 11, No. 2, pp. 195-198.

HANSSON, B. y HORDAHL, P. (1998): "Testing the conditional CAPM using multivariate GARCH-M", *Applied Financial Economics*, Vol. 8, No. 4, pp. 377-388.

HÄRDLE, W.; HOROWITZ, J. y KREISS, J. P. (2003). "Bootstrap Methods for Time Series", *International Statistical Review*, Vol. 71, No. 5, pp.435-459.

HARDY, M. R. (1999): "Stock return models for segregated fund guarantees", Segregated Funds Symposium Proceedings, Canadian Institute of Actuaries.

HARDY, M. R. (2001): "A Regime Switching Model of Long-Term Stock Returns", *North American Actuarial Journal*, Vol. 5, No. 2, pp. 41-53.

HARDY, M. R. (2003): *Investment Guarantees; Modeling and Risk Management for Equity Linked Life Insurance*, Wiley, New York.

HARDY, M. R.; FREELAND, R. K. y TILL, M. C. (2006): "Validation of Long-Term Equity Return Models for Equity-Linked Guarantees", *North American Actuarial Journal*, Vol. 10, No. 4, pp. 28-47.

HARRIS, G. R. (1997): "Regime Switching Vector Autoregressions: A Bayesian Markov Chain Monte Carlo Approach", Proceedings of the 7th International AFIR Colloquium 1, pp. 421-450. Disponible en <http://www.actuaries.org/AFIR/Colloquia/Cairns/Harris.pdf> [consultado el 15 de enero de 2012].

HIBBERT, J.; MOWBRAY, P. y TURNBULL, C. (2001): "A Stochastic Asset Model & Calibration for Long-Term Financial Planning Purposes", Technical Report, Barrie & Hibbert Limited. Disponible en <http://www.actuaries.org.uk/sites/all/files/documents/pdf/hibbert0.pdf> [consultado el 15 de enero de 2012].

HIGGINS, M. L. y BERA, A. K. (1992): "A Class of Nonlinear Arch Models International", *Economic Review*, Vol. 33, No. 1, pp. 137-158.

HOESLI, M.; LEKANDER, J. y WITKIEWICZ W. (2004): "International Evidence on Real Estate as a Portfolio Diversifier", *The Journal of Real Estate Research*, Vol. 26, No. 2, pp. 161-206.

HOUGAARD, P. (1986): "A Class of Multivariate Failure Time Distributions", *Biometrika*, Vol. 73, No. 3, pp. 671-678.

HSIEH, D. A. (1988): "The statistical properties of daily foreign exchange rates: 1974-1983", *Journal of International Economics*, Vol. 24, No. 1-2, pp. 129-145.

HSIEH, D. A. (1989): "Modeling heteroscedasticity in daily foreign-exchange rates", *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 7, No. 3, pp. 307-317.

HURLIN, C. y PÉRIGNON, C. (2011): Margin Backtesting, Working paper. Disponible en: [http://www.univ-orleans.fr/deg/masters/ESA/CH/MarginBacktesting\\_Aug20111.pdf?abstract\\_id=1824984](http://www.univ-orleans.fr/deg/masters/ESA/CH/MarginBacktesting_Aug20111.pdf?abstract_id=1824984) [consultado el 15 de enero de 2012]

ICEA (2010): *Estructura de la cartera. Año 2010*.

IPD (2011a): *The IPD Solvency II Review. Informing a new regulatory framework for real estate*.

IPD (2011b): *IPD Index Guide. 6ª Edición - Enero 2011*.

J. P. MORGAN y REUTERS (1996): *RiskMetrics™—Technical Document*.

JARQUE, C. M. y BERA, A. K. (1980): "Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals", *Economics Letters*, Vol. 6, No. 3, pp. 255-259.

JARQUE, C. M. y BERA, A. K. (1987): "A Test for Normality of Observations and Regression Residuals", *International Statistical Review*, Vol. 55, No. 2, pp. 163-172.

JARROW, R. y TURNBULL, S. (1995): "Pricing Derivatives on financial securities subject to default risk", *Journal of Finance*, Vol. 50, No. 1, pp. 53-86.

JARROW R.; LANDO, D. y TURNBULL, S. (1997): "A Markov model for the Term Structure of credit spreads", *Review of Financial Studies*, Vol. 10, No. 2, pp. 481-523.

JOE, H. (1997): *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman and Hall, Londres.

JOE, H. y XU, J. J. (1996): "The estimation method of inference functions for margins for multivariate models", Working Paper. Disponible en <http://www.stat.ubc.ca/~harry/ifm.pdf> [consultado el 15 de enero de 2012].

JOHNSTON K. y SCOTT, E. (2000): "GARCH models and the stochastic process underlying exchange rate price changes", *Journal of Financial and Strategic Decisions*, Vol. 13, No. 2, pp. 13-24.

JONDEAU, E. y ROCKINGER, M. (2006): "The copula-GARCH model of conditional dependencies: An international stock-market application", *Journal of International Money and Finance*, Vol. 25, No. 5, pp. 827-853.

JORION, P. (2001), *Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 2ª Edición, McGraw-Hill, United States.

KARIYA, T. (1988): "MTV model and its application to the prediction of stock prices", en T. Pullila y S. Puntanen (eds.) *Proceedings of the Second International Tampere Conference in Statistics*, University of Tampere, Finland.

KAROLYI, A. y STULZ, R. (1996): "Why do Markets Move Together? An Investigation of U.S.-Japan Stock Return Movements", *Journal of Finance*, Vol. 51, No. 3, pp. 951-986.

KAUFMANN, R.; GADMER, A. y KLETT, R. (2001): "Introduction to Dynamic Financial Analysis", *ASTIN Bulletin*, Vol. 31, No. 1, pp. 213-249.

KEY, T. y MARCATO, G. (2007): *Index Smoothing and the Volatility of UK Commercial Real Estate*, Report for the Investment Property Forum.

KIRIKOS, D. G. (2000): "Forecasting exchange rates out of sample: random walk vs Markov switching regimes", *Applied Economics Letters*, Vol. 7, No. 2, pp. 133-136.

KLAASSEN, F. (2002): "Improving GARCH volatility forecasts with regime-switching GARCH", *Empirical Economics*, Vol. 27, No. 2, pp. 363-394.

KLEIN, G. E. (2002): Discussions of Paper "A Regime-Switching Model of Long-Term Stock Returns", *North American Actuarial Journal*, Vol. 6, No. 1, pp. 171-173.

KLUGMAN, S. A.; PANJER, H. H. y WILLMOT, G. E. (2008): *Loss Models: From Data to Decisions*. Tercera Edición, John Wiley & Sons, New York.

KLUGMAN, S. A. y PARSA, R. (1999): "Fitting bivariate loss distributions with copulas", *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 24, No. 1, pp. 139-148.

KLUGMAN, S. A. y RIOUX, J. (2006): "Toward a unified approach to fitting loss models", *North American Actuarial Journal*, Vol. 10, No. 1, pp. 63-83.

KOOPMAN, S. J. y USPENSKY, E. H. (2002): "The stochastic volatility in mean model: empirical evidence from international stock markets", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 17, No. 6, pp. 667-689.

KRONER, F. K. y NG, V. K. (1998): "Modelling asymmetric comovements of asset returns", *The Review of Financial Studies*, Vol. 11, No. 4, pp. 817-844.

KUPIEC, P. (1995): "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models", *Journal of Derivatives*, Vol. 3, pp. 73-84.

LAI, T.-Y. y WANG, K. (1998): "Appraisal Smoothing: The Other Side of the Story", *Real Estate Economics*, Vol. 26, No. 3, pp. 511-535.

LEBARON, B. (1992): "Forecast Improvements Using a Volatility Index", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 7, No. S1, pp. 137-149.

LEHIKONEN, K. (2007): *Development of Systematic Backtesting Processes of Value at Risk*, Master's Thesis, Helsinki University of Technology, Finlandia.

LI, M. Y. L. y LIN, H. W. W. (2004): "Estimating Value-at-Risk via Markov Switching ARCH Models: An Empirical Study on Stock Index Returns", *Applied Economics Letters*, Vol. 11, No. 11, pp. 679-691.

LINTNER, J. (1965): "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, No. 1, pp. 13-37.

LIZIERI C.; SATCHELL, S.; WORZALA, E. y DACCO, R. (1998): "Real Interest Regimes and Real Estate Performance: A Comparison of US and UK Markets", *Journal of Real Estate Research*, Vol. 16, No. 3, pp. 339-356.

LJUNG, G. y BOX, G. (1979): "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models", *Biometrika*, Vol. 66, pp. 265-270.

LONGIN, F. y SOLNIK, B. (1995): "Is the Correlation in International Equity Returns Constant?", *Journal of International Money and Finance*, Vol. 14, No. 1, pp. 3-26.

LONGSTAFF, F. A. y SCHWARTZ, E. (1995a): "A Simple Approach to Value Fixed and Floating Rate Debt", *Journal of Finance*, Vol. 50, No. 3, pp. 789-819.

LONGSTAFF, F. A. y SCHWARTZ, E. S. (1995b): "Valuing credit derivatives", *The Journal of Fixed Income*, Vol. 5, No. 1, pp. 6-12.

LOPEZ, J. (1998): "Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates, Economic Policy Review", *Economic Policy Review*, Vol. 4, No. 3, pp. 119-64.

LOPEZ, J. A. (1999a): "Regulatory Evaluation of Value-at-Risk Models", *Journal of Risk*, Vol. 1, No. 2, pp. 37-64.

LOPEZ, J. A. (1999b): "Methods for Evaluating Value-at-Risk Models", *Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Review*, Vol. 2, pp. 3-17.

MAITLAND-SMITH, J. y BROOKS, C. (1999): "Threshold Autoregressive and Markov Switching Models: An Application to Commercial Real Estate", *Journal of Property Research*, Vol. 16, No. 1, pp. 1-19.

MANDELBROT, B. (1963): "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, Vol. 36, No. 4, pp. 394-419.

MANN, H. B. y WALD, A. (1942): "On the Choice of the Number of Class Intervals in the Application of the Chi-Square Test", *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 13, No. 3, pp. 306-317.

MARAVALL, A. (1983): "An Application of Nonlinear Time Series Forecasting", *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 1, No. 1, pp. 66-74.

MARCUCCI, J. (2005): "Forecasting Stock Market Volatility with Regime-Switching GARCH Models", *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, Vol. 9, No. 4, pp. 1-53.

MARKOWITZ, H. (1952): "Portfolio selection", *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.

MARKOWITZ, H. (1959): *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*, John Wiley & Sons, New York.

MAURER, R.; REINER, F. y SEBASTIAN, S. (2004): "Characteristics of German Real Estate Return Distributions: Evidence from Germany and Comparison to the

U.S. and U.K.”, *Journal of Real Estate Portfolio Management*, Vol. 10, No. 1, pp. 59-76.

MCLACHLAN, G. J. y KRISHNAN, T. (1997): *The EM Algorithm and Extensions*. Wiley, New York.

MCLACHLAN, G. J. y PEEL, D. (2000): *Finite Mixture Models*, John Wiley and Sons, New York.

MCLEISH, D. L. y SMALL, C.G. (1988): *The Theory and Applications of Statistical Inference Functions*, Springer-Verlag, New York.

MCLEOD, A. I. y LI, W. K. (1983): “Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared-Residual Autocorrelations”, *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 4, No. 4, pp. 269-273.

MEESE, R. y ROGOFF, K. (1983a): “Empirical exchange rate models of the seventies: do they fit out of sample?”, *Journal of International Economics*, Vol. 14, No. 1, pp. 3-24.

MEESE, R. y ROGOFF, K. (1983b): “The out-of-Sample failure of empirical exchange rate models: sampling error or misspecification?” en: Frenkel, J. (ed.) *Exchange Rates and International Macroeconomics*, University of Chicago Press, Chicago.

MERTON, R. C. (1973): “Theory of Rational Option Pricing”, *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

MERTON, R., C. (1974). “On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates”, *Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2, pp. 449-470.

MILES, M. y MCCUE, T. (1984): “Commercial Real Estate Returns”, *Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association*, Vol. 12, No. 3, pp. 335-77.

MOSSIN, J. (1966): “Equilibrium in a Capital Asset Market”, *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, pp. 768-783.

MYER, F. C. N. y WEBB, J. R. (1994): "Statistical Properties of Returns: Financial Assets Versus Commercial Real Estate", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol. 8, No. 3, pp. 267-82.

NELSON, D. B. (1991): "Conditional heteroscedasticity in asset returns: a new approach", *Econometrica*, Vol. 59, No. 2, pp. 347-370.

NERIN, A. D.; COSSIN, D.; HRICKO, D. y HUANG, Z. (2002): "Exploring for the determinants of credit risk in credit default swap transaction data: Is fixed income markets' information sufficient to evaluate credit risk", FAME Research Paper No. 65. Disponible en: <http://ssrn.com/abstract=375563> [consultado el 15 de enero de 2012].

NIEPPOLA, O. (2009): *Backtesting value-at-risk models*, Master thesis. Helsinki School of Economics. Disponible en [http://epub.lib.aalto.fi/fi/ethesis/pdf/12049/hse\\_ethesis\\_12049.pdf](http://epub.lib.aalto.fi/fi/ethesis/pdf/12049/hse_ethesis_12049.pdf) [consultado el 15 de enero de 2012].

PAGAN, A. R. (1996): "The econometrics of financial markets", *Journal of Empirical Finance*, Vol. 3, No. 1, pp. 15-102.

PAGAN, A. R. y SCHWERT, G. W. (1990): "Alternative models for conditional stock volatility", *Journal of Econometrics*, Vol. 45, pp. 267-290.

PANNETON, C. M. (2003): "Mean-Reversion in Equity Models in the Context of Actuarial Provisions for Segregated Fund Investment Guarantees", Presentado al 2003 Stochastic Modeling Symposium Proceedings, Canadian Institute of Actuaries.

PANNETON, C. M. (2005): *Practical Implications of Equity Models in the Context of Actuarial Provisions for Segregated Funds Investment Guarantees*, Master Thesis, Université Laval.

PANNETON, C. M. (2006): "A Review of the CIA Calibration Criteria for Stochastic Modeling", Presentado a la CIA Stochastic Modeling Symposium, Canadian Institute of Actuaries.

PARLAMENTO EUROPEO Y CONSEJO (2009): *Directiva del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el seguro de vida el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II)*, PE-CONS 3643/6/09.

PATTON, A. (2006a): "Modelling asymmetric exchange rate dependence", *International Economic Review*, Vol. 47, No. 2, pp. 527-556.

PATTON, A. (2006b): "Estimation of multivariate models for time series of possibly different lengths", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 21, pp. 147-173.

PAULING, B. (2002): "Credit Spread Modeling Considerations", Presentado a Valuation Actuary Symposium, Society of Actuaries, 19-20 Septiembre, Florida (EE.UU.).

PEDROSA, M. y ROLL, R. (1998): "Systematic Risk in Corporate Bond Credit Spreads." *The Journal of Fixed Income*, Vol 8, No. 3, pp. 7-26.

PENTULA S. (1986): "Modelling the Persistence of Conditional Variances: A Comment", *Econometric Review*, Vol. 5, No. 1, pp. 71-74.

PEÑA, D. (2005): *Análisis de series temporales*, Alianza Editorial, Madrid.

PÉRIGNON, C. y SMITH, D. R. (2008): "A New Approach to Comparing VaR Estimation Method", *The Journal of Derivatives*, Vol. 16, No. 2, pp. 54-66.

PRAETZ, P. D. (1972): "The Distribution of Share Price Changes", *Journal of Business*, Vol. 45, No. 1, pp. 49-55.

PRIGENT, J.; RENAULT, O. y SCAILLET, O. (2001): "An empirical investigation into credit spread indices", *The Journal of Risk*, Vol. 3, No. 3, pp. 27-56.

QUAN, D. C. y QUIGLEY, J. M. (1989): "Inferring an Investment Return Series for Real Estate from Observations on Sales", *Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association*, Vol. 17, No. 2, pp. 218-230.

QUAN, D. C. y QUIGLEY, J. M. (1991): "Price Formation and the Appraisal Function in Real Estate Markets", *Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol. 4, No. 2, pp. 127-146.

RABEMANANJARA, R. y ZAKOÏAN, J. M., (1993): "Threshold Arch Models and Asymmetries in Volatility", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 8, no. 1, pp. 31-49.

RAPACH, D. E. y STRAUSS, J. K. (2008): "Structural breaks and GARCH models of exchange rate volatility", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 23, No. 1, pp. 65-90.

RASOUL SAJJAD R., COAKLEY, J. y NANKERVIS, J. (2008): "Markov-Switching GARCH Modelling of Value-at-Risk", *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, Vol. 12, No. 3, pp.1-29.

RUIZ, E. (1993): "Stochastic Volatility versus Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", Working Paper, Universidad Carlos III de Madrid. Disponible en [http://e-archivo.uc3m.es/bitstream/10016/5708/1/stochastic\\_ruiz\\_1993.pdf](http://e-archivo.uc3m.es/bitstream/10016/5708/1/stochastic_ruiz_1993.pdf) [consultado el 15 de enero de 2012].

RUIZ, E. y PASCUAL, L., (2002): "Bootstrapping Financial Time Series", *Journal of Economic Surveys*, Vol. 16, pp. 271-300.

RUIZ, E. y VEIGA, H. (2008): "Modelos de volatilidad estocástica: una alternativa atractiva y factible para modelizar la evolución de la volatilidad", *Anales de Estudios Económicos y Empresariales*, No. 18, pp. 9-68.

SAJJAD, R.; COAKLEY, J. y NANKERVIS, J. C. (2008): "Markov-Switching GARCH Modelling of Value-at-Risk", *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, Vol. 12, No. 3, pp. 1-29.

SARMA, M.; THOMAS, S. y SHAH, A. (2003): "Selection of Value-at-Risk models", *Journal of Forecasting*, Vol. 22, No. 4, pp. 337-358.

SCHMEISER, H. (2004): "New Risk-Based Capital Standards in the EU. A Proposal Based on Empirical Data", *Risk Management and Insurance Review*, Vol. 7, No. 1, pp. 41-52.

SCHORR, B. (1974): "On the Choice of the Class Intervals in the Application of the Chi-Square Test", *Mathematische Operationsforschung und Statistik*, Vol. 5, No. 4, pp. 357-377.

SCHWARZ, G. (1978): "Estimating the Dimension of a Model", *The Annals of Statistics*, Vol. 6, No. 2, pp. 461-464.

SCHWERT, G. W. (1989): "Why does stock market volatility change over time?", *Journal of Finance*, Vol. 44, No. 5, pp. 1115-1153.

SHARPE, W. (1964): "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 425-442.

SHEPHARD, N. (ed.) (2005): *Stochastic Volatility: Selected Readings*, Oxford University Press, Oxford.

SILVERMAN, B. W. (1986) *Density Estimation*, Chapman and Hall, London.

SIMS, C. (1980): "Macroeconomics and Reality", *Econometrica*, Vol. 48, No. 1, pp 1-48.

SMITH, J. B. (1981): *The Probability Distribution of Market Returns: A Logistic Hypothesis*, Tesis doctoral, University of Utah.

STOCK, J. H. y WATSON, M. W. (2001): "Vector Autoregressions", *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 15, No. 4, pp. 101-115.

STULZ, R. (2008): "Risk Management Failures: What Are They and When Do they Happen?", *Journal of Applied Corporate Finance*, Vol. 20, No. 4, pp. 39-48.

TAYLOR, S. J. (1986): *Modeling Financial Time Series*, Wiley, New York.

TERÄSVIRTA, T. (1994): "Specification, Estimation, and Evaluation of Smooth Transition Autoregressive Models", *Journal of the American Statistical Association*, Vol 89, No. 425, pp. 208-218.

TONG, H. (1990): *Nonlinear Time Series: A Dynamical System Approach*, Oxford University Press, Oxford.

TRÜCK, S. y LIANG, K. (2012): "Modelling and forecasting volatility in the gold market", *International Journal of Banking and Finance*, Vol. 9, No. 1, Disponible en <http://epublications.bond.edu.au/ijbf/vol9/iss1/3> [consultado 10 de Enero de 2013].

TSAY, R. S. (1989): "Testing and modeling threshold autoregressive processes", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 84, pp. 231-240.

TSAY, R. S. (2005): *Analysis of Financial Time Series*, 2º Edición, Wiley.

TSAY, R. S. y TIAO, G. C. (1984): "Consistent Estimates of Autoregressive Parameters and Extended Sample Autocorrelation Function for Stationary and Nonstationary ARMA Models", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 79, No. 385, pp. 84-96.

TSE, Y. K. y TSUI, A. K. C. (1999): "A note on diagnosing multivariate conditional heteroscedasticity models", *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 20, No. 6, pp. 679-691.

TSE, Y. K. y TSUI, A. K. C. (2002): "A Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model with Time-Varying Correlations", *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 20, No. 3, pp. 351-362.

VAN DER WEIDE, R. (2002): "GO-GARCH: A Multivariate Generalized Orthogonal GARCH Model", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 17, No. 5, pp. 549-564.

VASICEK, O. (1977): "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No 2, pp. 177-188.

VENTER, G. G. (2003): "Fit to a t - Estimation, Application and Limitations of the t-copula", ASTIN Colloquium International Actuarial Association, Berlin, Alemania. Disponible en <http://www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Berlin/Venter1.pdf> [consultado el 15 de enero de 2012].

VIRDI, N. K. (2011): "A Review of Backtesting Methods for Evaluating Value-at-Risk", *International Review of Business Research Papers*, Vol. 7. No. 4, pp. 14-24.

WEISS, A. (1984): "ARMA models with ARCH errors", *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 5, No. 2, pp. 129-143.

WHITTEN, S. P. y THOMAS, R. G. (1999): "A Non-Linear Stochastic Model for Actuarial Use", *British Actuarial Journal*, Vol. 5, No. 5, pp. 919-953.

WILHELMSSON, A. (2009): "Value at Risk with Time Varying Variance, Skewness and Kurtosis The NIG-ACD model", *Econometrics Journal*, Vol. 12, No. 1, pp. 82-104.

WILKIE, D. (1986): "A Stochastic Investment Model for Actuarial Use", *Transactions of the Faculty of Actuaries*, Vol. 39, pp. 341-403.

WILKIE, D. (1995): "More on a Stochastic Model for Actuarial Use", *British Actuarial Journal*, Vol. 1, No. 5, pp. 777-964.

WONG, C. S. y CHAN, W. S. (2005): "Mixture Gaussian Time Series Modeling of Long-Term Market Returns", *North American Actuarial Journal*, Vol. 9, No. 4, pp. 83-94.

WONG, C. S. y LI, W. K. (2000): "On a Mixture Autoregressive Model", *Journal of the Royal Statistical Society B*, Vol. 62, No. 1, pp. 95-115.

WONG, C. S. y LI, W. K. (2001): "On a Mixture Autoregressive Conditional Heteroscedastic Model", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 96, No. 455, pp. 982-995.

WÜRTZ D., CHALABI Y., LUKSAN L. (2011): "Parameter Estimation of ARMA models with GARCH/APARCH errors", *Journal of Statistical Software*, Forthcoming.

Disponible en <http://faculty.washington.edu/ezivot/econ589/WurtzEtAlGarch.pdf>  
[consultado el 15 de enero de 2012].

ZAKOÏAN, J. M. (1994): "Threshold Heteroskedastic Models," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 18, No. 5, pp. 931-944.

## COLECCIÓN “CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN”

Para cualquier información sobre nuestras publicaciones consulte:  
[www.fundacionmapfre.org](http://www.fundacionmapfre.org)

203. Generación de escenarios económicos para la medición de riesgos de mercado en Solvencia II a través de modelos de series temporales. 2014
202. La valoración de los inmuebles del patrimonio histórico y los riesgos sísmicos en el contrato de seguro: el caso de Lorca. 2014
201. Inteligencia computacional en la gestión del riesgo asegurador. 2014
200. El componente transfronterizo de las relaciones aseguradoras. 2014
199. El seguro basado en el uso (Usage Based Insurance). 2014
198. El seguro de decesos en la normativa aseguradora. Su encaje en Solvencia II. 2014
197. El seguro de responsabilidad civil en el arbitraje. 2014
196. La reputación corporativa en empresas aseguradoras: análisis y evaluación de factores explicativos. 2014
195. La acción directa del perjudicado en el ordenamiento jurídico comunitario. 2013
194. Investigaciones en Seguros y Gestión del Riesgo: RIESGO 2013
193. Viability of Patent Insurance in Spain. 2013
192. Viabilidad del seguro de patentes en España. 2013

191. Determinación de zonas homogéneas de riesgo para los rendimientos de distintos cultivos de la región pampeana en Argentina. 2013
190. Género y promoción en los sectores financiero y asegurador. 2013
189. An Introduction to Reinsurance. 2013
188. El control interno y la responsabilidad penal en la mediación de seguros privados. 2013
187. Una introducción al gobierno corporativo en la industria aseguradora en América Latina. 2013
186. Mortalidad de jóvenes en accidentes de tráfico. 2012
185. Las reclamaciones derivadas de accidentes de circulación por carretera transfronterizos. 2012
184. Efecto disuasorio del tipo de contrato sobre el fraude. 2012
183. Claves del Seguro Español: una aproximación a la Historia del Seguro en España. 2012
182. La responsabilidad civil del asegurador de asistencia sanitaria. 2012
181. Colaboración en el contrato de Reaseguro. 2012
180. Origen, situación actual y futuro del seguro de Protección Jurídica. 2012
179. Experiencias de microseguros en Colombia, Perú y Brasil. Modelo socio agente. 2012
178. El agente de seguros y su Responsabilidad Civil. 2012
177. Riesgo operacional en el marco de Solvencia II. 2012

176. Un siglo de seguros marítimos barceloneses en el comercio con América. (1770-1870). 2012
175. El seguro de Caución. 2012
174. La contabilidad de los corredores de seguros y los planes y fondos de pensiones. 2012
173. El seguro de Vida en América Latina. 2011
172. Gerencia de riesgos sostenibles y Responsabilidad Social Empresarial en la entidad aseguradora. 2011
171. Investigaciones en Seguros y Gestión del Riesgo. RIESGO 2011
170. Introdução ao Resseguro. 2011
169. La salud y su aseguramiento en Argentina, Chile, Colombia y España. 2011
168. Diferencias de sexo en conductas de riesgo y tasa de mortalidad diferencial entre hombres y mujeres. 2011
167. Movilización y rescate de los compromisos por pensiones garantizados mediante contrato de seguros. 2011
166. Embedded Value aplicado al ramo No Vida. 2011
165. Las sociedades cautivas de Reaseguro. 2011
164. Daños del amianto: litigación, aseguramiento de riesgos,y fondos de compensación. 2011
163. El riesgo de tipo de interés: experiencia española y Solvencia II. 2011

162. I Congreso sobre las Nuevas Tecnologías y sus repercusiones en el Seguro: Internet, Biotecnología y Nanotecnología. 2011
161. La incertidumbre bioactuarial en el riesgo de la longevidad. Reflexiones bioéticas. 2011
160. Actividad aseguradora y defensa de la competencia. La exención antitrust del sector asegurador. 2011
159. Estudio empírico sobre la tributación de los seguros de vida. 2010
158. Métodos estocásticos de estimación de las provisiones técnicas en el marco de Solvencia II. 2010
157. Introducción al Reaseguro. 2010
156. Encuentro Internacional sobre la Historia del Seguro. 2010
155. Los sistemas de salud en Latinoamérica y el papel del seguro privado. 2010
154. El Seguro de Crédito en Chile. 2010
153. El análisis financiero dinámico como herramienta para el desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II. 2010
152. Características sociodemográficas de las personas con doble cobertura sanitaria. Un estudio empírico. 2010
151. Solidaridad impropia y seguro de Responsabilidad Civil. 2010
150. La prevención del blanqueo de capitales en las entidades aseguradoras, las gestoras y los corredores de seguros 2010
149. Fondos de aseguramiento agropecuario y rural: la experiencia mexicana en el mutualismo agropecuario y sus organizaciones superiores. 2010

148. Avaliação das Provisões de Sinistro sob o Enfoque das Novas Regras de Solvência do Brasil. 2010
147. El principio de igualdad sexual en el Seguro de Salud: análisis actuarial de su impacto y alcance. 2010
146. Investigaciones históricas sobre el Seguro español. 2010
145. Perspectivas y análisis económico de la futura reforma del sistema español de valoración del daño corporal. 2009
144. Contabilidad y Análisis de Cuentas Anuales de Entidades Aseguradoras (Plan contable 24 de julio de 2008). 2009
143. Mudanças Climáticas e Análise de Risco da Indústria de Petróleo no Litoral Brasileiro. 2009
142. Bases técnicas dinámicas del Seguro de Dependencia en España. Una aproximación en campo discreto. 2009
141. Transferencia Alternativa de Riesgos en el Seguro de Vida: Titulización de Riesgos Aseguradores. 2009
140. Riesgo de negocio ante asegurados con múltiples contratos. 2009
139. Optimización económica del Reaseguro cedido: modelos de decisión. 2009
138. Inversiones en el Seguro de Vida en la actualidad y perspectivas de futuro. 2009
137. El Seguro de Vida en España. Factores que influyen en su progreso. 2009
136. Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos. RIESGO 2009
135. Análisis e interpretación de la gestión del fondo de maniobra en entidades aseguradoras de incendio y lucro cesante en grandes riesgos industriales. 2009

134. Gestión integral de Riesgos Corporativos como fuente de ventaja competitiva: cultura positiva del riesgo y reorganización estructural. 2009
133. La designación de la pareja de hecho como beneficiaria en los seguros de vida. 2009
132. Aproximación a la Responsabilidad Social de la empresa: reflexiones y propuesta de un modelo. 2009
131. La cobertura pública en el seguro de crédito a la exportación en España: cuestiones prácticas-jurídicas. 2009
130. La mediación en seguros privados: análisis de un complejo proceso de cambio legislativo. 2009
129. Temas relevantes del Derecho de Seguros contemporáneo. 2009
128. Cuestiones sobre la cláusula cut through. Transferencia y reconstrucción. 2008
127. La responsabilidad derivada de la utilización de organismos genéticamente modificados y la redistribución del riesgo a través del seguro. 2008
126. Ponencias de las Jornadas Internacionales sobre Catástrofes Naturales. 2008
125. La seguridad jurídica de las tecnologías de la información en el sector asegurador. 2008
124. Predicción de tablas de mortalidad dinámicas mediante un procedimiento bootstrap. 2008
123. Las compañías aseguradoras en los procesos penal y contencioso-administrativo. 2008
122. Factores de riesgo y cálculo de primas mediante técnicas de aprendizaje. 2008

121. La solicitud de seguro en la Ley 50/1980, de 8 de octubre, de Contrato de Seguro. 2008
120. Propuestas para un sistema de cobertura de enfermedades catastróficas en Argentina. 2008
119. Análisis del riesgo en seguros en el marco de Solvencia II: Técnicas estadísticas avanzadas Monte Carlo y Bootstrapping. 2008
118. Los planes de pensiones y los planes de previsión asegurados: su inclusión en el caudal hereditario. 2007
117. Evolução de resultados técnicos e financeiros no mercado segurador iberoamericano. 2007
116. Análisis de la Ley 26/2006 de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2007
115. Sistemas de cofinanciación de la dependencia: seguro privado frente a hipoteca inversa. 2007
114. El sector asegurador ante el cambio climático: riesgos y oportunidades. 2007
113. Responsabilidade social empresarial no mercado de seguros brasileiro influências culturais e implicações relacionais. 2007
112. Contabilidad y análisis de cuentas anuales de entidades aseguradoras. 2007
111. Fundamentos actuariales de primas y reservas de fianzas. 2007
110. El Fair Value de las provisiones técnicas de los seguros de Vida. 2007
109. El Seguro como instrumento de gestión de los M.E.R. (Materiales Especificados de Riesgo). 2006

108. Mercados de absorción de riesgos. 2006
107. La exteriorización de los compromisos por pensiones en la negociación colectiva. 2006
106. La utilización de datos médicos y genéticos en el ámbito de las compañías aseguradoras. 2006
105. Los seguros contra incendios forestales y su aplicación en Galicia. 2006
104. Fiscalidad del seguro en América Latina. 2006
103. Las NIC y su relación con el Plan Contable de Entidades Aseguradoras. 2006
102. Naturaleza jurídica del Seguro de Asistencia en Viaje. 2006
101. El Seguro de Automóviles en Iberoamérica. 2006
100. El nuevo perfil productivo y los seguros agropecuarios en Argentina. 2006
99. Modelos alternativos de transferencia y financiación de riesgos "ART": situación actual y perspectivas futuras. 2005
98. Disciplina de mercado en la industria de seguros en América Latina. 2005
97. Aplicación de métodos de inteligencia artificial para el análisis de la solvencia en entidades aseguradoras. 2005
96. El Sistema ABC-ABM: su aplicación en las entidades aseguradoras. 2005
95. Papel del docente universitario: ¿enseñar o ayudar a aprender? 2005
94. La renovación del Pacto de Toledo y la reforma del sistema de pensiones: ¿es suficiente el pacto político? 2005

92. Medición de la esperanza de vida residual según niveles de dependencia en España y costes de cuidados de larga duración. 2005
91. Problemática de la reforma de la Ley de Contrato de Seguro. 2005
90. Centros de atención telefónica del sector asegurador. 2005
89. Mercados aseguradores en el área mediterránea y cooperación para su desarrollo. 2005
88. Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación. 2004
87. Dependencia en el modelo individual, aplicación al riesgo de crédito. 2004
86. El margen de solvencia de las entidades aseguradoras en Iberoamérica. 2004
85. La matriz valor-fidelidad en el análisis de los asegurados en el ramo del automóvil. 2004
84. Estudio de la estructura de una cartera de pólizas y de la eficacia de un Bonus-Malus. 2004
83. La teoría del valor extremo: fundamentos y aplicación al seguro, ramo de responsabilidad civil autos. 2004
81. El Seguro de Dependencia: una visión general. 2004
80. Los planes y fondos de pensiones en el contexto europeo: la necesidad de una armonización. 2004
79. La actividad de las compañías aseguradoras de vida en el marco de la gestión integral de activos y pasivos. 2003
78. Nuevas perspectivas de la educación universitaria a distancia. 2003

77. El coste de los riesgos en la empresa española: 2001.
76. La incorporación de los sistemas privados de pensiones en las pequeñas y medianas empresas. 2003
75. Incidencia de la nueva Ley de Enjuiciamiento Civil en los procesos de responsabilidad civil derivada del uso de vehículos a motor. 2002
74. Estructuras de propiedad, organización y canales de distribución de las empresas aseguradoras en el mercado español. 2002
73. Financiación del capital-riesgo mediante el seguro. 2002
72. Análisis del proceso de exteriorización de los compromisos por pensiones. 2002
71. Gestión de activos y pasivos en la cartera de un fondo de pensiones. 2002
70. El cuadro de mando integral para las entidades aseguradoras. 2002
69. Provisiones para prestaciones a la luz del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados; métodos estadísticos de cálculo. 2002
68. Los seguros de crédito y de caución en Iberoamérica. 2001
67. Gestión directiva en la internacionalización de la empresa. 2001
65. Ética empresarial y globalización. 2001
64. Fundamentos técnicos de la regulación del margen de solvencia. 2001
63. Análisis de la repercusión fiscal del seguro de vida y los planes de pensiones. Instrumentos de previsión social individual y empresarial. 2001
62. Seguridad Social: temas generales y régimen de clases pasivas del Estado. 2001

61. Sistemas Bonus-Malus generalizados con inclusión de los costes de los siniestros. 2001
60. Análisis técnico y económico del conjunto de las empresas aseguradoras de la Unión Europea. 2001
59. Estudio sobre el euro y el seguro. 2000
58. Problemática contable de las operaciones de reaseguro. 2000
56. Análisis económico y estadístico de los factores determinantes de la demanda de los seguros privados en España. 2000
54. El corredor de reaseguros y su legislación específica en América y Europa. 2000
53. Habilidades directivas: estudio de sesgo de género en instrumentos de evaluación. 2000
52. La estructura financiera de las entidades de seguros, S.A. 2000
51. Seguridades y riesgos del joven en los grupos de edad. 2000
50. Mixturas de distribuciones: aplicación a las variables más relevantes que modelan la siniestralidad en la empresa aseguradora. 1999
49. Solvencia y estabilidad financiera en la empresa de seguros: metodología y evaluación empírica mediante análisis multivariante. 1999
48. Matemática Actuarial no vida con MapleV. 1999
47. El fraude en el Seguro de Automóvil: cómo detectarlo. 1999
46. Evolución y predicción de las tablas de mortalidad dinámicas para la población española. 1999

45. Los Impuestos en una economía global. 1999
42. La Responsabilidad Civil por contaminación del entorno y su aseguramiento. 1998
41. De Maastricht a Amsterdam: un paso más en la integración europea. 1998
39. Perspectiva histórica de los documentos estadístico-contables del órgano de control: aspectos jurídicos, formalización y explotación. 1997
38. Legislación y estadísticas del mercado de seguros en la comunidad iberoamericana. 1997
37. La responsabilidad civil por accidente de circulación. Puntual comparación de los derechos francés y español. 1997
36. Cláusulas limitativas de los derechos de los asegurados y cláusulas delimitadoras del riesgo cubierto: las cláusulas de limitación temporal de la cobertura en el Seguro de Responsabilidad Civil. 1997
35. El control de riesgos en fraudes informáticos. 1997
34. El coste de los riesgos en la empresa española: 1995
33. La función del derecho en la economía. 1997
32. Decisiones racionales en reaseguro. 1996
31. Tipos estratégicos, orientación al mercado y resultados económicos: análisis empírico del sector asegurador español. 1996
30. El tiempo del directivo. 1996
29. Ruina y Seguro de Responsabilidad Civil Decenal. 1996
28. La naturaleza jurídica del Seguro de Responsabilidad Civil. 1995

27. La calidad total como factor para elevar la cuota de mercado en empresas de seguros. 1995
26. El coste de los riesgos en la empresa española: 1993
25. El reaseguro financiero. 1995
24. El seguro: expresión de solidaridad desde la perspectiva del derecho. 1995
23. Análisis de la demanda del seguro sanitario privado. 1993
22. Rentabilidad y productividad de entidades aseguradoras. 1994
21. La nueva regulación de las provisiones técnicas en la Directiva de Cuentas de la C.E.E. 1994
20. El Reaseguro en los procesos de integración económica. 1994
19. Una teoría de la educación. 1994
18. El Seguro de Crédito a la exportación en los países de la OCDE (evaluación de los resultados de los aseguradores públicos). 1994
16. La legislación española de seguros y su adaptación a la normativa comunitaria. 1993
15. El coste de los riesgos en la empresa española: 1991
14. El Reaseguro de exceso de pérdidas 1993
12. Los seguros de salud y la sanidad privada. 1993
10. Desarrollo directivo: una inversión estratégica. 1992
9. Técnicas de trabajo intelectual. 1992

8. La implantación de un sistema de controlling estratégico en la empresa. 1992
7. Los seguros de responsabilidad civil y su obligatoriedad de aseguramiento. 1992
6. Elementos de dirección estratégica de la empresa. 1992
5. La distribución comercial del seguro: sus estrategias y riesgos. 1991
4. Los seguros en una Europa cambiante: 1990-95. 1991
2. Resultados de la encuesta sobre la formación superior para los profesionales de entidades aseguradoras (A.P.S.). 1991
1. Filosofía empresarial: selección de artículos y ejemplos prácticos. 1991

### **ÚLTIMOS LIBROS PUBLICADOS**

El riesgo de longevidad y su aplicación práctica a Solvencia II. 2014

Historia del Seguro en España. 2014

Actas del III Congreso Internacional de Nuevas Tecnologías: sus repercusiones en el seguro: internet, biotecnología y nanotecnología: 12 y 13 de noviembre de 2012, Santiago de Chile. 2013

Emergencia y reconstrucción: el antes y después del terremoto y tsunami del 27F en Chile. 2012

Riesgo sistémico y actividad aseguradora. 2012

La historia del seguro en Chile (1810-2010). 2012

Modelo de proyección de carteras de seguros para el ramo de decesos. 2011

Desarrollo comercial del seguro colectivo de dependencia en España. 2010

La mediación de seguros en España: análisis de la Ley 26/2006, de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2010

Museo del Seguro. Catálogo. 2010

Diccionario MAPFRE de Seguros. 2008

Teoría de la credibilidad: desarrollo y aplicaciones en primas de seguros y riesgos operacionales. 2008

El seguro de caución: una aproximación práctica. 2007

El seguro de pensiones. 2007

Las cargas del acreedor en el seguro de responsabilidad civil. 2006

Diccionario bilingüe de expresiones y términos de seguros: inglés-español, español-inglés. 2006

El seguro de riesgos catastróficos: reaseguro tradicional y transferencia alternativa de riesgos. 2005

La liquidación administrativa de entidades aseguradoras. 2005

## **INFORMES Y RANKINGS**

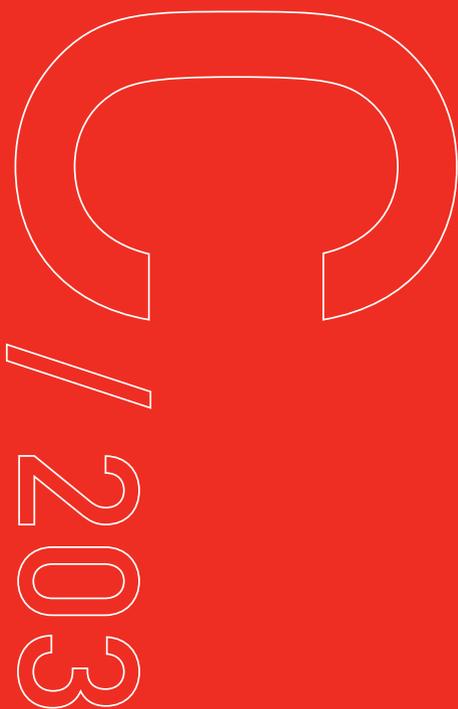
Desde 1994 se publican anualmente estudios que presentan una panorámica concreta de los mercados aseguradores europeos, de España e Iberoamérica y que pueden consultarse en formato electrónico desde la página Web:

[www.fundacionmapfre.org](http://www.fundacionmapfre.org)

- Mercado español de seguros
- Mercado asegurador de Iberoamérica
- Ranking de grupos aseguradores europeos
- Ranking de grupos aseguradores iberoamericanos
- La percepción social del seguro en España 2014
- Informe de predicción de la actividad aseguradora en España. 2014
- La internacionalización de la empresa española: riesgos y oportunidades. 2014
- El seguro en la sociedad y la economía españolas. 2013
- Papel del seguro en el desarrollo sostenible. ICEA, 2013
- Emprender en momentos de crisis: riesgos y factores de éxito. 2012
- La percepción social del seguro en España 2012



FUNDACIÓN **MAPFRE**



Paseo de Recoletos, 23  
28004 Madrid (España)  
[www.fundacionmapfre.org](http://www.fundacionmapfre.org)

P.V.P.: 25 €

ISBN 978-84-9844-475-9



9 788498 444759