

## **LA METODOLOGÍA ROUGH SET FRENTE AL ANÁLISIS DISCRIMINANTE EN LA PREDICCIÓN DE INSOLVENCIAS EN EMPRESAS ASEGURADORAS**

M.J. Segovia Vargas, J.A. Gil Fana, A. Heras Martínez y  
J.L. Vilar Zanón

*Dpto. de Economía Financiera y Contabilidad I, Facultad de C.  
Económicas y Empresariales, Universidad Complutense de Madrid,  
Campus de Somosaguas, 28223 Madrid, e-mail  
mjsegovia@ccee.ucm.es.*

### **Resumen**

La detección precoz de insolvencias en el sector asegurador es una cuestión de gran importancia y actualidad. Tradicionalmente, se han utilizado métodos estadísticos para abordar este problema que suelen emplear como variables explicativas ratios financieros. Estas variables no suelen cumplir las hipótesis estadísticas requeridas por dichas técnicas.

Hemos aplicado la metodología Rough Set para la predicción de insolvencias sobre una muestra de empresas españolas de seguros no-vida a partir de ratios financieros. Esta metodología presenta estas ventajas: es útil para analizar sistemas de información que representan el conocimiento adquirido por la experiencia; elimina variables redundantes reduciendo el coste, en tiempo y dinero, del proceso de decisión, y, se obtienen reglas de decisión fácilmente comprensibles que se extraen de ejemplos reales lo que justificaría las decisiones que de acuerdo con ellas se tomen.

Los resultados obtenidos son muy satisfactorios comparándolos con el análisis discriminante y muestran que esta teoría puede ser útil para evaluar la insolvencia de una entidad aseguradora.

**Palabras clave:** Insolvencia, rough set, análisis discriminante, compañías de seguros

## 1.- INTRODUCCIÓN

La actividad aseguradora, bancaria y de inversión constituyen, conjuntamente, una proporción muy significativa de las transacciones financieras. Por tanto, la gran importancia social y económica del sector asegurador conduce a que la detección precoz de insolvencias o de las condiciones que pueden llevar a que éstas acaezcan en una aseguradora, sea una cuestión clave para las autoridades reguladoras, inversores, gestores, analistas financieros, bancos, auditores y asegurados.

Es más, la predicción de insolvencias en las aseguradoras es una cuestión de interés general dado que los costes asociados a este problema no se limitan a las responsabilidades que pudieran tener, en su caso, gestores y auditores, si no que recaen en el conjunto de la economía a través de los fondos de garantía existentes en algunos países.

Si desde hace tiempo se ha visto la necesidad de supervisar a las entidades aseguradoras para minimizar el riesgo de fracaso, en la actualidad el proyecto *Solvencia II* pretende marcar las directrices que reformen las reglas existentes en la Unión Europea en relación con la solvencia.

Por tanto, y en línea, con los objetivos del proyecto Solvencia II, desarrollar y aplicar nuevos métodos en relación con la supervisión de compañías aseguradoras o para analizar la información que suministren dichas entidades relativa a su gestión de riesgos es una cuestión de gran actualidad e importancia.

En este sector muchos de los métodos aplicados para predecir crisis son de tipo estadístico (Mora, 1994; Sanchis *et al.*, 2003), entre otros, el análisis discriminante que ha demostrado ser una buena herramienta en el diagnóstico y pronóstico de crisis empresariales. Estas técnicas suelen emplear como variables explicativas ratios financieros. Este tipo de variables no suele satisfacer las hipótesis estadísticas que requieren dichos métodos lo que dificulta su aplicación o cuestiona los resultados obtenidos. A veces en este tipo de técnicas la presencia de

observaciones atípicas (*outliers*) afecta en gran medida a los resultados finales y los resultados obtenidos son difíciles de interpretar.

A comienzos de los ochenta, Pawlak propuso una nueva metodología, la *Teoría Rough Set*. Es un enfoque que se encuadra dentro de las aplicaciones de la Inteligencia Artificial. Utiliza la experiencia (hechos pasados) de una forma objetiva, a través del estudio de la experiencia histórica de una manera cuantitativa, para así explicitar reglas que, resumiendo y objetivando esa experiencia acumulada, ayuden en las decisiones futuras.

Esta metodología no requiere que los datos satisfagan ningún tipo de requisito o hipótesis, no se ve afectada por la presencia de observaciones atípicas y el modelo final obtenido consiste en un conjunto de reglas de decisión en forma de sentencias lógicas que las hace fácilmente comprensibles por cualquier usuario. Además dichas reglas están basadas en decisiones pasadas (experiencia del decisor), y por tanto, son casos reales lo que justificaría su utilización para futuras decisiones.

El presente trabajo describe una investigación de carácter empírico consistente básicamente en la aplicación al sector de empresas de seguros no-vida de la metodología Rough Set. Nuestro objetivo es comprobar su efectividad en la detección de insolvencias como problema de clasificación entre empresas sanas y fracasadas y utilizando como variables ratios financieros. Como resultado obtendremos un modelo de predicción de la solvencia empresarial tomando como referencia los datos contables.

Hemos comparado los resultados obtenidos con esta metodología con los obtenidos aplicando el análisis discriminante. Los resultados obtenidos con la metodología rough set son muy satisfactorios y similares a los conseguidos con el análisis discriminante. Este hecho muestra que esta teoría es una herramienta de gran utilidad y una alternativa a los métodos estadísticos ya que mejora en algunos aspectos algunos de sus problemas.

El resto del trabajo se estructura en las siguientes secciones: en la sección 2 se enuncian los principales conceptos de la Teoría Rouge Set; en la sección 3 presentamos una breve comparación teórica entre

la metodología Rough Set y el Análisis Discriminante; la sección 4 describe la aplicación de ambas metodologías al problema real de la predicción de crisis empresariales en seguros no-vida, y finalmente, la sección 5 expone nuestras conclusiones.

## 2.- PRINCIPALES CONCEPTOS DE LA TEORÍA ROUGH SET

### 2.1. APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE ROUGH SET, TABLA DE INFORMACIÓN Y RELACIÓN DE NO DIFERENCIACIÓN

La teoría Rough Set fue originalmente desarrollada en los años ochenta por Z. Pawlak (Pawlak, 1991), entre otros, como herramienta formal para tratar con la incertidumbre inherente a un proceso de decisión. Aunque existen en la actualidad extensiones de esta teoría (Greco *et al.*, 1996) nos referiremos al enfoque clásico. (Para mayor aclaración, los principales conceptos de esta teoría en su enfoque clásico se exponen en Segovia (2003)).

Para situar la metodología rough set cabría recordar que en todo proceso de decisión es necesario un *modelo de preferencias* que contenga "la mejor" solución para un problema de decisión dado. Un camino para construir dicho modelo es a través de la inteligencia artificial y constituye el modelo vía *aprendizaje de los ejemplos o adquisición inductiva del conocimiento* (también denominado *inducción de reglas, aprendizaje inductivo*). El modelo resultante es un conjunto de reglas de la forma Si/Entonces o un árbol de decisión. Este camino descansa sobre la hipótesis de que se puede obtener un modelo sobre las preferencias mediante el estudio de las valoraciones efectuadas por los decisores cuando se les presenta un conjunto de objetos representativos de un problema de decisión. Lo que subyace dentro de este enfoque es que ofrece más confianza la valoración efectivamente realizada por un decisor que la explicación que tuviera que dar sobre la misma dicho agente. El enfoque *rough set* es un representante típico de esta categoría al igual que las *redes neuronales*.

Por otro lado, la teoría rough set implica el cálculo de particiones, divisiones o clases, según queramos. Es algo diferente tanto de la teoría estadística de la probabilidad como de la teoría *fuzzy set*. Para comprender en qué se diferencian describiremos las tres categorías generales de imprecisión que encontramos en el análisis científico. La primera categoría ocurre, cuando un acontecimiento es aleatorio en naturaleza. Por lo tanto, la imprecisión asociada con este tipo de acontecimientos puede describirse por la teoría estadística de la probabilidad. La segunda surge del hecho de que los objetos pueden no pertenecer exclusivamente a una única categoría sino que pueden pertenecer a varias categorías aunque con diferentes grados, en este caso la imprecisión toma forma de pertenencia difusa a un conjunto. Esta segunda categoría es el objeto de la lógica *fuzzy*. La tercera categoría es la teoría rough set que es útil cuando las clases en las que han de clasificarse los objetos son imprecisas, pero sin embargo pueden aproximarse mediante conjuntos precisos (Nurmi *et al.*, 1996). Estas diferencias muestran una de las principales ventajas de la teoría rough set y es que no necesita ninguna información adicional acerca de los datos como puede ser una distribución de probabilidad en estadística o el grado o probabilidad de pertenencia en la teoría *fuzzy set*.

La filosofía del método se basa en la suposición de que con cada objeto del universo que estamos considerando se puede asociar alguna información (datos, conocimiento). Los objetos caracterizados por la misma información no son discernibles teniendo en cuenta dicha información disponible. La relación de *no diferenciación* generó de este modo la base matemática para esta teoría.

La "no-diferenciación" de los objetos en términos de datos disponibles viene provocado porque la información acerca de los mismos es imprecisa y evita, en consecuencia, su asignación precisa a un conjunto. "Rough" podría traducirse por "vago, impreciso"; de aquí en adelante hablaremos de rough set. Por tanto, y de manera intuitiva, un rough set es un conjunto de objetos que, en general, no pueden ser caracterizados de manera precisa en términos de la información disponible. Si esta información consiste en un conjunto de objetos descrito por otro conjunto, en este caso, de atributos, diremos que un rough set es un conjunto de objetos que, en general, no pueden ser

de los atributos (atributos de condición) pero que sin embargo están asignados a diferentes clases (atributos de decisión) (Roy, 1989). Esta incertidumbre impide una clasificación precisa de los objetos y la búsqueda de dependencias entre valores de los atributos de condición (que describen los objetos) y atributos de decisión (que asignan a las clases). Hay dos razones principales que justifican la existencia de imprecisiones: que la evidencia sea incompleta o que esta entre en conflicto. Desde el punto de vista de nuestro trabajo nos interesa la inducción de reglas en el caso de que la evidencia entre en conflicto, esto es, que los objetos o casos que tenemos son inconsistentes. Prácticamente eso significa que dados dos objetos, descritos por los mismos valores de los atributos, cada uno de ellos pertenece a conceptos o clases diferentes. (Es decir, dadas dos empresas con los mismos valores para todos los ratios o con los valores de los ratios dentro de los mismos intervalos, una fracasa y la otra no, hecho que a veces ocurre en la realidad).

Por tanto, si los objetos no se pueden distinguir mediante atributos, no podemos asignarlos de manera precisa a un conjunto con lo que induciremos una *aproximación* de las distintas clases en las que se asignarían los objetos.

Por tanto, un rough set es un par de *aproximaciones por encima y por debajo* de un conjunto (clase) en términos de objetos no discernibles. En otras palabras, un rough set es una colección de objetos que, en general, no pueden ser clasificados de manera precisa en términos de los valores del conjunto de atributos, mientras que las aproximaciones por arriba y por abajo si pueden.

En consecuencia, cada rough set tiene casos fronterizos, esto es objetos que no pueden clasificarse con certeza como miembros del conjunto o de su complementario y, por tanto, puede ser reemplazado o representado por un par de conjuntos precisos, llamados la *aproximación por encima* y *por debajo*. La aproximación por debajo está formada por todos los objetos que con seguridad pertenecen al conjunto y la aproximación por encima contiene los objetos que posiblemente pertenecen al conjunto. La frontera (o *región de duda*) se define como la diferencia entre ambas aproximaciones, es decir, es el conjunto de elementos que no pueden clasificarse con certeza utilizando los atributos del sistema de información.

caracterizados de manera precisa en términos de valores de un conjunto de atributos.

La teoría del rough set asume la representación de los objetos y de sus atributos en forma de una *tabla de información*, que es un caso especial de un sistema de información. En las filas de la tabla se indican los *objetos* (acciones, alternativas, candidatos, pacientes, empresas, etc.), mientras que las columnas se corresponden con los *atributos*. Las entradas en la tabla son los *valores del atributo*. Es decir, la entrada en columna  $q$  y en fila  $x$  tiene el valor  $f(x, q)$ . Por tanto, para cada par (objeto, atributo) se conoce un valor denominado *descriptor*. Cada fila de la tabla contiene descriptores que representan información correspondiente a un objeto del universo.

Utilizamos la noción de atributo en lugar de la de criterio porque el primero es más general que el segundo debido a que el dominio (escala) de un criterio ha de ordenarse de menor a mayor preferencia mientras que el dominio de los atributos no ha de ser ordenado.

La *relación de no diferenciación* se expresaría de la siguiente forma dados dos objetos,  $x, y$ , decimos que  $x$  e  $y$  no son *discernibles* a partir de un conjunto de atributos si, y sólo si,  $f(x, q) = f(y, q)$  para todos los atributos de la tabla.

## 2.2. APROXIMACIÓN DE CONJUNTOS, APROXIMACIÓN DE LA PARTICIÓN Y CALIDAD DE LA CLASIFICACIÓN

Dada la cuestión que vamos a abordar, nos interesa tratar el *problema de clasificar*, que consiste en asignar cada objeto de un conjunto a una categoría predefinida apropiada.

La clasificación de los objetos se basa en la información que hay accesible sobre ellos y no en los objetos en sí mismos. El problema de clasificación en este caso consiste en qué medida es posible reflejar mediante atributos (de condición) la clasificación efectuada por el experto.

Sin embargo, al hablar de la información sobre los objetos ya hemos mencionado que suele ser imprecisa (inconsistente). Esta inconsistencia en la descripción de los objetos lleva a la ambigüedad en su clasificación, es decir objetos descritos por los mismos valores

Al cociente entre la aproximación por debajo y la aproximación por encima se le denomina *precisión*. Este ratio indica los casos fronterizos que existen en la categoría o clase para la que se está calculando esta medida. Este ratio toma el valor 1 para aquellas categorías en los que no hay casos fronterizos (no hay por tanto información inconsistente).

Por otro lado, si en una tabla de información no solo existe una clase o categoría si no que existen varias, para cada una de ellas se puede calcular la aproximación por arriba y por abajo. Al cociente entre la suma de todas las aproximaciones por debajo y el número total de objetos del sistema se denomina *calidad de la clasificación*. Expresa el ratio de todos los objetos correctamente clasificados respecto a todos los objetos del sistema (Slowinski y Stefanowski, 1994).

### 2.3. REDUCCIÓN Y DEPENDENCIA DE ATRIBUTOS

Una de las funciones más importantes de la metodología rough set es el descubrimiento de las dependencias entre atributos al analizar una tabla de información. Descubrir *la dependencia* nos indica cómo algunos conceptos pueden expresarse mediante otros conceptos. Es decir, descubrir dichas dependencias permite que el conjunto de atributos se pueda reducir (eliminar aquellos atributos que sean redundantes), apareciendo el concepto de *reducto* o *conjunto mínimo*, que se define como el menor conjunto de atributos que mantiene la misma calidad de clasificación (ver sección anterior) que el conjunto de todos los atributos.

En una tabla de información puede haber más de un reducto. La intersección de todos los reductos nos da el denominado *núcleo*, que es la colección de los atributos más relevantes en la tabla y que no pueden ser eliminados sin que disminuya la calidad de la clasificación.

### 2.4. REGLAS DE DECISIÓN

Un sistema de información reducido permite la obtención de reglas de decisión. De hecho, la cuestión más importante del enfoque rough set es la obtención de las reglas de decisión a partir de un sistema de información.

Se supone que la tabla de información contiene datos de un conjunto de *objetos* descritos por un conjunto de *atributos*. Los atributos a su vez se dividen en dos subconjuntos, *atributos de condición* y *atributos de decisión*, que denotamos por C y D (D a menudo es un conjunto unitario porque la decisión puede consistir en aceptar o rechazar, por ejemplo). El problema, por tanto, consiste en encontrar reglas que determinen si un objeto pertenece a un subconjunto particular denominado *clase de decisión* o a un *concepto*.

Una regla de decisión puede expresarse como una sentencia lógica que relaciona la descripción de condiciones y las clases de decisión y toma la siguiente forma:

SI <se cumplen condiciones> ENTONCES <el objeto pertenece a una clase de decisión dada>

Las reglas generadas pueden ser *determinísticas* o *no determinísticas*. Por *determinística* (consistente, precisa, exacta) entendemos si  $C \rightarrow D$ , es decir, describe *unívocamente* las decisiones (acciones) que deben hacerse cuando algunas *condiciones* se satisfacen. En las reglas no *determinísticas*, las decisiones no se determinan unívocamente por las condiciones, es decir, las condiciones pueden conducir a varias posibles decisiones.

Cada regla de decisión se caracteriza por su *fuerza*, esto es el número de objetos que satisfacen la parte de la condición de la regla (en el argot se dice *cubiertos* por la regla) y que pertenecen a la clase de decisión sugerida. En el caso de reglas aproximadas la fuerza se calcula para cada posible clase de decisión de forma separada. Es decir, una característica importante de la filosofía rough set aplicada a un problema de clasificación es que las inconsistencias mostradas en los objetos que se van a clasificar no se corrigen sino que las reglas producidas se clasifican en precisas o aproximadas.

En definitiva, el conjunto de las reglas de decisión y la información sobre los atributos más significativos para la clasificación de los objetos puede considerarse como *una representación* del conocimiento adquirido por un *especialista* o *experto* sobre todos los casos/objetos contenidos en un sistema de información, sin las redundancias, tan típicas en las bases de datos reales. Es más, los resultados obtenidos por el enfoque rough set se expresan de *forma*

similar al lenguaje natural humano. Así, las reglas son muy fáciles de comprender por el usuario/analista y permiten justificar y explicar las conclusiones derivadas del análisis de los datos. Además, da la posibilidad para el analista de controlar dicho análisis de manera simple. Tal posibilidad no es normalmente ofrecida por las técnicas tradicionales de análisis de datos, ofreciendo además una baja carga computacional y posibilidad de interacción con un usuario en modo de diálogo.

El conjunto de reglas para todas las clases de decisión se denomina *algoritmo de decisión*. Los procedimientos para generar reglas de decisión a partir de una tabla de decisión operan sobre los principios del aprendizaje inductivo. No vamos a entrar en los algoritmos de inducción de reglas simplemente indicar que utilizan alguna de las siguientes estrategias: 1) generación de un conjunto mínimo de reglas que cubran todos los objetos de una tabla de decisión, 2) generación de un conjunto exhaustivo de reglas consistentes en todas las reglas posibles de una tabla de decisión, 3) generación de un conjunto de reglas de decisión "fuertes", incluso en parte discriminantes, cubriendo relativamente muchos objetos pero no necesariamente todos los objetos de la tabla de decisión.

## 2.5. TOMA DE DECISIONES UTILIZANDO REGLAS DE DECISIÓN EN PROBLEMAS DE CLASIFICACIÓN MULTIATRIBUTO

Aunque los problemas de clasificación son el punto central para la metodología rough set, existen otros problemas a los que también les es aplicable esta metodología (Pawlak y Slowinski, 1994).

Dentro de los problemas de clasificación nos centraremos en los *problemas de clasificación multiatributo* dado que entendemos la predicción de insolvencias como un problema de este tipo. En estos problemas existe solo un atributo de decisión. En nuestro caso, empresa sana o empresa insolvente.

Las reglas de decisión derivadas de una tabla con esta metodología pueden ser utilizadas para clasificar *nuevos objetos*. La clasificación de cualquier nuevo objeto puede hacerse comparando su descripción con las condiciones cada una de las reglas de decisión. Esta

comparación puede conducir a una de las siguientes situaciones (Slowinski y Stefanowski, 1994):

- a) encaja exactamente con una regla de clasificación determinística o con más de una regla determinística indicando, sin embargo la misma clase de decisión,
- b) encaja con una regla no determinística o más de una regla aproximada que indican diferentes clases de decisión, o más de una regla determinística que también conduzcan a diferentes clases de decisión,
- c) no encaja con ninguna de las reglas.

En los casos a) la recomendación es unívoca mientras que en el caso b) de comparación no clara o ambigua, el usuario es informado de la *fuerza* total de todas las reglas de decisión con las que encaja con respecto a las clases de decisión sugeridas. Si la fuerza de una categoría es mayor que la fuerza de otras categorías dentro de las que existen en la regla no-determinística o determinística que conduzca a distintas clases, se puede concluir que el objeto considerado lo más verosímil es que pertenezca a la categoría *más fuerte*. Si ninguna regla de decisión encaja con el nuevo objeto (caso c), el decisor puede conseguir el conjunto de reglas "más cercanas" a la descripción del objeto.

Las reglas más cercanas son reglas que están próximas a la descripción de un objeto clasificado, en el sentido de una determinada medida de distancia (en otras palabras, no difieren del objeto de un modo significativo). El motivo de introducir las reglas "más cercanas" resulta de la creencia de que ofrecer al decisor más información sobre la vecindad de un objeto clasificado puede darle alguna sugerencia en lugar de no ofrecerle nada. La noción de *proximidad* implica el uso de una medida de distancia. Las definiciones más empleadas son la denominada métrica  $L_p$  (Stefanowski, 1993; Slowinski y Stefanowski, 1992), incorporada en el software ROSE que utilizaremos en la parte empírica del trabajo y, otra medida es la desarrollada por Slowinski (1993) y se denomina *relación de proximidad valorada*, RPV, y está incorporada en algunos softwares que han precedido al ROSE (Más detalles sobre dichas medidas se pueden obtener de la bibliografía citada).

### 3.- COMPARACIÓN TEÓRICA ENTRE AMBAS METODOLOGÍAS

Aunque la filosofía de las dos técnicas es muy diferente, ambas metodologías se pueden aplicar a la predicción del fracaso empresarial sobre un conjunto de datos comunes.

Antes de comentar brevemente una comparación teórica entre los dos métodos vamos a definirlos.

El análisis discriminante es una técnica estadística que se utiliza para clasificar objetos en diferentes grupos basándose en la observación de algunas características de dichos objetos. Básicamente consiste en estimar una función lineal discriminante que calcula un resultado para cada objeto. Esta función es una combinación lineal ponderada de los valores que toman las características observadas del objeto. Las ponderaciones representan, en esencia, la importancia relativa y el impacto de las características que forman parte de la función discriminante (Uriel, 1995). El objeto se clasifica en un determinado grupo o clase basándose en la puntuación obtenida con la función discriminante.

El análisis discriminante está sujeto a un gran número de hipótesis tales como: cada grupo debe seguir una distribución normal multivariante; las matrices de covarianzas de cada grupo son idénticas; y, las matrices de covarianzas, las probabilidades a priori y los errores de clasificación han de ser conocidos (Anderson *et al.*, 1999). Si no se cumplen estas hipótesis los resultados que obtenemos pueden ser erróneos.

Tal y como se ha explicado en la sección anterior, la *Teoría Rough Set* es un método que se encuadra dentro de las aplicaciones de la Inteligencia Artificial. Analiza las decisiones pasadas de un determinado decisor o hechos pasados (experiencia histórica) de manera cuantitativa, para, basándose en estas decisiones o datos, explicitar reglas. Estas reglas constituyen la esencia de las decisiones pasadas o de los hechos y contribuyen a objetivar los mismos.

En el problema que nos ocupa, la metodología rough set analizaría los ratios pasados de un conjunto de empresas sanas y fracasadas. Estos datos constituyen la experiencia pasada. El análisis que efectúa de esta experiencia consiste en esencia en comparar las empresas entre sí para

ver qué valores de los ratios (variables) diferencian a una empresa de otra. De este análisis exhaustivo se obtienen dos resultados. En primer lugar, se eliminan aquellas variables que no son necesarias para diferenciar a las empresas, es decir, eliminar las variables no significativas. De esta manera, implícitamente, estamos evaluando la importancia de las variables que estamos empleando. En segundo lugar, una vez que nos hemos quedado con los ratios esenciales denominados en la teoría rough set como *reductos* (en nuestro caso, el mínimo conjunto de variables que es capaz de diferenciar a todas las empresas), se analizan los valores que toman esos ratios y se sistematizan en nuestro caso en dos grupos: valores que toman para las empresas sanas y valores que toman para las empresas fracasada. Y a partir del estudio de estos dos grupos se extraen las reglas de decisión (algoritmo). El algoritmo consiste en un conjunto de reglas de decisión en forma de sentencias lógicas (*si* <el ratio toma el valor X> *entonces* <la empresa pertenece al grupo Y (sana o en crisis)>).

Para la exposición comparativa de los dos métodos seguiremos a Krusinska *et al.* (1992) y Stefanowski (1992). Las principales conclusiones a nivel teórico que se extraen son las siguientes:

- a) *Problemas que pueden resolver ambos métodos:* Aunque los objetivos de ambos métodos no son exactamente los mismos (el discriminante se centra en la clasificación de objetos mientras que la metodología rough set intenta descubrir las dependencias causa-efecto y reducir el número de atributos), si observamos a nivel práctico cómo se comporta el análisis rough set se aproxima mucho al discriminante.
- b) *Representación y tipo de datos:* Ambas metodologías aceptan los datos representados en forma de sistema de información. Sin embargo el método rough set trabaja mejor con datos discretos, bien sean variables cualitativas o variables cuantitativas previamente discretizadas. El análisis discriminante, por el contrario, acepta atributos de tipo continuo y no suele aceptar variables cualitativas.
- c) *Requisitos de los datos:* El análisis discriminante, al igual que ocurre con la mayoría de los métodos estadísticos requiere que los datos cumplan una serie de requisitos, entre otros: la muestra debe ser estadísticamente representativa, el

número de atributos discretos que acepta es limitado, los atributos continuos deben seguir distribuciones normales, las matrices de covarianzas han de ser iguales, el número de objetos que debe haber en cada clase debe ser comparable, etc. Sin embargo la metodología *rough set* no requiere que los datos cumplan ningún tipo de requisito. Incluso, es posible analizar pequeños sistemas de información o que los sistemas a los que nos enfrentamos tengan grandes diferencias en cuanto al número de objetos que hay en cada clase. Ahora bien, hay que matizar, que los resultados que se obtienen no serían extrapolables por lo que no es recomendable analizar pequeños sistemas, sin embargo, incluso para éstos, la metodología *rough set* revela importantes hechos o conocimiento que encierra dicho sistema.

d) *Agregación de los datos*: En el análisis discriminante es necesario introducir parámetros para corregir los valores atípicos de las variables lo que implica que los datos no se mantienen en su forma original durante el análisis. En el análisis *rough set* no se efectúa ninguna corrección a los datos originales por lo que se mantienen durante todo el análisis. Un valor atípico aparece hasta el final y se le crea una regla para el solo. Esto puede, en algunas aplicaciones, ser una ventaja.

e) *Reducción de atributos*: Ambos métodos buscan reducir el número de atributos y las dimensiones de los datos pero la filosofía con que acometen este problema es diferente. En el análisis discriminante se seleccionan las variables que posean mayor poder discriminante mientras que la metodología *rough set* busca encontrar los denominados reductos o conjuntos mínimos a partir del concepto de calidad de clasificación. Por lo tanto, en el análisis discriminante se calcula el mejor subconjunto de atributos mientras que en la metodología *rough set* puede haber varios reductos.

f) *Modelos*: Los modelos resultantes (reglas de decisión y puntuación discriminante) con ambas metodologías son diferentes. Las puntuaciones discriminantes son, de hecho, funciones matemáticas mientras que las reglas de decisión son sentencias lógicas lo que en principio las hace más

comprensibles por el usuario final. Ambos modelos pueden utilizarse para clasificar nuevos objetos. Con las puntuaciones obtenidas con el discriminante no solo se puede clasificar sino jerarquizar. Con las reglas de decisión se pueden clasificar objetos que no encajan con ninguna regla en virtud de las reglas más cercanas según una determinada medida de distancia. (Slowinski y Stefanowski, 1994).

Sin embargo, en la práctica, las hipótesis requeridas por el análisis discriminante no se suelen verificar y muchos investigadores han cuestionado su aplicabilidad (Eisenbeis, 1977; Ohlson, 1980; Zavgren, 1985).

Las críticas a los modelos del análisis discriminante provienen de dos tipos de consideraciones, las financiero-contables (hacen referencia al tipo de variables, tanto dependientes como independientes empleadas en los trabajos que utilizan el discriminante) y las puramente estadísticas.

Desde un punto de vista estadístico-formal las principales críticas se han formulada por parte de Eisenbeis (1977) que señala los siguientes problemas:

- La distribución de las variables empleadas debería ser normal multivariada para que el análisis discriminante funcionase correctamente. Sin embargo, en la práctica, los ratios contables y otras muchas variables no suelen presentar distribuciones normales.

- En el análisis de funciones lineales, como las empleadas por casi todos los modelos, se supone la igualdad de las matrices de covarianzas que indican el grado de dispersión de los grupos. Si dicha igualdad no se da, caso probable, habrían de emplearse mejor funciones cuadráticas.

- Las reglas de clasificación deben incorporar las probabilidades "a priori" de fracaso y no fracaso y los costes relativos de los errores. En la práctica, estos aspectos no se tienen en cuenta.

Como principal ventaja tendríamos la obtención de una puntuación única que permite una jerarquización de las empresas analizadas, así como una clasificación dicotómica entre sanas y candidatas potenciales al fracaso.

En la práctica las hipótesis estadísticas que requiere el discriminante raramente se satisfacen. En consecuencia, en la mayoría de las ocasiones los ratios financieros no satisfacen los supuestos estadísticos mencionados por lo que cabría preguntarse por las razones que justifican su elección como método para comparar con la teoría rough set. La elección del discriminante se justifica porque ha sido el primer método que se aplicó (Altman, 1968) y, en consecuencia, el más utilizado para problemas de clasificación y predicción dentro del campo financiero y de gestión. Además, ha dado muy buenos resultados empíricos en problemas financieros en los que intervienen como variables ratios contables pese a que estos no satisfagan las hipótesis estadísticas.

El método rough set no necesita que los datos verifiquen a priori ningún tipo de hipótesis. Aunque, ambos métodos pueden aplicarse a un grupo común de datos y para problemas de clasificación multiatributo, a diferencia del discriminante, la metodología rough set puede aplicarse cuando existen únicamente atributos cualitativos o coexisten cualitativos con cuantitativos, cuando la muestra no es, desde el punto de vista estadístico representativa o cuando los datos no cumplen requisitos estadísticos o de otra índole.

#### 4.- ANÁLISIS DISCRIMINANTE VERSUS ANÁLISIS ROUGH SET EN LA PREDICCIÓN DE CRISIS EMPRESARIALES EN ENTIDADES ASEGURADORAS.

En esta fase de nuestra investigación hemos procedido a seleccionar los datos y las variables que serán objeto de estudio, y que posteriormente formarán parte de los modelos.

En cuanto a los datos, la muestra utilizada es la seleccionada para la aplicación del análisis discriminante en la predicción de la insolvencia en entidades aseguradoras españolas no vida (Sanchis *et al.*, 2003). Consta de 36 empresas sanas y 36 empresas fracasadas, emparejadas

por tamaño (medido a través del volumen de primas) y sector, para minimizar el efecto de estas variables en el estudio. Para cada una de las empresas se han obtenido los Balances y Cuentas de Resultados para los cinco años anteriores al año de la quiebra.

Las reglas de decisión que constituyen el modelo derivado de la aplicación de la metodología rough set se han obtenido empleando los datos del año 1 (año anterior a la quiebra) y verificando la capacidad predictiva de las mismas utilizando los datos de los años 2, 3, 4 y 5 previos a la quiebra. Posteriormente se ha efectuado un análisis discriminante siguiendo los mismos criterios que para el análisis rough set, es decir, estimar la función discriminante con el año 1 y comprobar la capacidad predictiva de dicha función utilizando los años 2, 3, 4 y 5 anteriores a que las firmas quebraran (Dimitras *et al.* 1999).

En cuanto a las variables, hemos partido de considerar que el éxito o fracaso de una empresa es función de una serie de variables. Siguiendo un paralelismo con conceptos matemáticos podríamos decir que el éxito o fracaso de una empresa sería la variable dependiente y por variables independientes tomaríamos la información contable de las mismas reflejada a través del cálculo de determinados ratios financieros.

La definición de *empresa fracasada*, variable independiente, es aquella empresa que ha tenido que ser intervenida por la C.L.E.A (Comisión Liquidadora de Entidades Aseguradoras). Es una medida objetivamente determinable de las empresas que fracasan.

Para la selección de los *ratios* hemos acudido a los más utilizados en el análisis financiero para el pronóstico de la insolvencia de entidades aseguradoras (Martin *et al.*, 1999; Maestro, 2000; Millán, 2000; Linares, 2000) teniendo en cuenta nuestro criterio personal y las características de las empresas de la muestra. Las particularidades sectoriales de las empresas de seguros, son tan significativas, que junto a los ratios aplicables al conjunto de empresas industriales y comerciales (Zopounidis y Dimitras, 1998) hay que considerar todos aquellos específicos para el sector asegurador.

La **Tabla I** muestra los 21 ratios seleccionados. Los ratios 15 y 16 no han sido utilizados en el análisis posterior porque las peculiaridades de

la muestra hacían que tomasen valores que carecían de sentido económico. Con lo que solo hemos utilizado los 19 restantes.

El análisis rough set de la información se desarrolló utilizando el programa ROSE (Predki *et al.*, 1998 y Predki y Wilk, 1999).

De la aplicación de la metodología rough set se obtuvo el reducto (conjunto de ratios que clasifican a las 72 empresas en sanas y fracasadas igual que si tomásemos en consideración los 19 ratios originales) formado por los ratios R1, R3, R9, R14, R17, R19 (Segovia, 2003). Hemos de resaltar que para la aplicación de este método hemos transformado los valores continuos de los ratios en términos cualitativos utilizando 4 subintervalos que han sido determinados a través de los cuartiles de la distribución de cada ratio. Se han asignado los valores 1, 2, 3 y 4 a los intervalos obtenidos de acuerdo al principio "cuánto más alto sea el código, mejor intervalo". Esta discretización de los ratios facilita la aplicación de las reglas y no falsea el problema de decisión ya que se utilizan desde el principio del análisis hasta el final con la obtención de las reglas de decisión. La **Tabla II** y **III** muestran los intervalos y los códigos asignados a los mismos.

La siguiente tabla muestra las reglas obtenidas:

Nº Regla	R1	R3	R9	R14	R17	R19	Decisión	Fuerza	Empresas
1	2	2					0	6	2,13,20,24,27,32
2				2	1		0	6	7,23,26,30,35,36
3		1	1				0	8	6,7,10,11,12,16,17,19
4	1		4				0	3	22,28,34
5		1	3				0	3	3,4,14
6					4	3	0	4	1,4,9,11
7			2			2	0	2	5,29
8		4		1			0	4	16,18,21,25
9	2				2	1	0	1	31
10	4		4		4		0	1	33
11	2			3			0	4	4,8,13,15
12		3		4			1	7	43,46,50,53,54,56,60
13			2		4		1	5	59,62,67,69,70
14	4			1			1	5	37,38,41,45,72
15	3	4	1				1	4	42,44,47,55
16	3				3		1	6	40,47,48,52,56,68
17	1		2			1	1	3	64,66,70
18	1		3			3	1	2	51,61
19			2	3			1	3	39,59,64

Nº Regla	R1	R3	R9	R14	R17	R19	Decisión	Fuerza	Empresas
20		1		1		3	1	1	71
21	2	1		2			1	1	57
22	3		4		4		1	1	63
23	4		3				1	4	37,43,45,49
24				1	3		1	3	38,58,68
25	3			4			1	6	40,46,53,55,56,65

Hemos obtenido 25 reglas aplicando esta metodología. Es necesario recordar que las reglas son sentencias lógicas. Así por ejemplo la regla número 2 se leería: *Si* el ratio R14 toma el valor 2 (0,225, 0,435] y el ratio R17 toma el valor 1 (<0,98), *entonces* la empresa pertenece al grupo de las fracasadas. La fuerza de esta regla es de 6 porque son 6 las empresas que verifican este hecho en nuestra muestra.

Para comparar los dos métodos hemos derivado una función discriminante utilizando los ratios del reducto seleccionado en su forma original (sin codificar). La siguiente tabla muestra los coeficientes obtenidos de la función discriminante:

Variable	Coficiente
Término Constante	-0,62358
R1	4,68606
R3	-0,29266
R9	0,24881
R14	-0,03074
R17	-0,76597
R19	1,86133

En cuanto a los porcentajes de clasificaciones correctas obtenidas con ambas metodologías son las siguientes:

**Análisis Rough Set**

Clasificaciones correctas	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Clase 0 (empresas quebradas)	100%	77.14%	55.56%	70.83%	63.16%
Clase 1 (empresas sanas)	100%	80%	76.67%	59.26%	76.19%
<b>Total</b>	<b>100%</b>	<b>78.57%</b>	<b>66.67%</b>	<b>64.71%</b>	<b>70%</b>

**Análisis Discriminante**

Clasificaciones correctas	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Clase 0 (empresas quebradas)	76.47%	78.79%	87.5%	72.72%	81.25%
Clase 1 (empresas sanas)	55.88%	64.71%	61.53%	43.47%	50%
<b>Total</b>	<b>66.17%</b>	<b>71.75%</b>	<b>74.51%</b>	<b>58.09%</b>	<b>65.62%</b>

Los resultados del discriminante provienen de asumir una determinada relación de probabilidades de clasificación errónea a la hora de estimar las probabilidades de pertenencia a cada grupo para cada unidad. Estas probabilidades estimadas de pertenencia a un grupo se utilizaron para clasificar las unidades en cada grupo, tomando como punto de corte una probabilidad de pertenencia a un grupo de 0.5, dado que en nuestro caso trabajamos con dos grupos. La idea es la siguiente normalmente se compensa el hecho de lo que interesa captar (la insolvencia) tiene una probabilidad de ocurrencia reducida, con el hecho de que la valoración que se hace de cometer un error en el sentido de clasificar una unidad de ese grupo reducido (insolventes) en el grupo más amplio (solventes) es mucho peor que el error ocurra en sentido contrario.

Tal y como puede verse en las tablas anteriores, en nuestra muestra, los resultados del enfoque rough set, excepto para el año 3, son mejores que los del análisis discriminante. Estos resultados muestran la capacidad de esta metodología para responder de manera eficiente al problema de predicción del fracaso empresarial, siendo una alternativa muy fiable al análisis discriminante.

Es más, desde el punto de vista del usuario, las reglas de decisión expresan las dependencias entre las características financieras de una empresa y su situación en un lenguaje más accesible que una función discriminante. Una función discriminante solo da una visión global, mientras que las reglas de decisión hablan el lenguaje natural de las decisiones tomadas por un experto o decisor y que han servido como ejemplos.

**5.- CONCLUSIONES**

La metodología rough set presenta unas ventajas muy importantes sobre el análisis discriminante como son: a) no requiere especificar ningún dato a priori o que las variables empleadas satisfagan ningún tipo de hipótesis estadística; b) acepta variables de tipo cualitativo sin ningún tipo de limitación; c) se puede aplicar a sistemas de información con escasos números de datos; y, d) las reglas de decisión son muy flexibles con los cambios en el modelo a lo largo del tiempo y son fácilmente interpretables y aplicables por el decisor. Sin embargo, presenta una limitación desde el punto de vista económico: considera igualdad de costes para los errores de clasificación. Es decir, sólo computa el número global de errores sin distinguir si se trata de clasificar una empresa sana en las fracasadas (coste de oportunidad) o clasificar una fracasada dentro del grupo de las sanas (coste real). En definitiva el método Rough Set es una herramienta efectiva para la ayuda en la toma de decisiones. Esto lo convierte en una competitiva alternativa a los modelos que existen para la predicción de insolvencias, especialmente a los modelos que requieren que los datos cumplan algún tipo de requisito.

**6.- BIBLIOGRAFÍA**

- Altman, E.I.** (1968). Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy, *The Journal of Finance* 23, 589-609.
- Anderson, R., Blac, W.C., Hair, J y Tatham, R. L.** (1999). Análisis Multivariante. Prentice Hall
- Dimitras, A.I., Slowinski, R., Susmaga, R. y Zopounidis, C.** (1999). Business failure prediction using Rough Sets, *European Journal of Operational Research*, 114, 263-280.
- Eisenbeis, R.A.** (1977). Pitfalls in the application of discriminant analysis in business and economics, *The journal of Finance* 32, 875-900.
- Greco, S., Matarazzo, B. y Slowinski, R.** (1996): Rough Approximation of Preference Relation by Dominance Relations, *ICS Research Report 16/96, Warsaw University of Technology, Warsaw.*

- Krusinska, K., Slowinski, R. y Stefanowski, J.**, (1992). Discriminant versus rough sets approach to vague data analysis, *Applied Stochastic Models and Data Analysis* 8, 43-56.
- Linares, A.** (2000). *Auditoria y Control Interno de las Entidades Aseguradoras*, Editorial Fundación Mapfre Estudios.
- Maestro, J.L.** (2000). *Garantías Técnico-Financieras de las Entidades Aseguradoras*, Editorial Grupo Winterthur.
- Martín, M.L., Leguey, S., Sánchez, J. M.** (1999). Solvencia y estabilidad financiera en la empresa de seguros: Metodología y evaluación empírica mediante análisis multivariante, *Cuadernos de la Fundación Mapfre Estudios*, 49.
- Millán, A.**, (2000). *Análisis Contable de Entidades Aseguradoras*, Asociación Española de Contabilidad y Administración de Empresas.
- Mora, A.** (1994): Los modelos de predicción del fracaso empresarial: una aplicación empírica del logit, *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 78, enero-marzo, 203-233.
- Nurmi, H., Kacprzyk, J. y Fedrizzi, M.** (1996): Probabilistic, fuzzy and rough concepts in social choice. *European Journal of Operational Research* nº 95, pp 264-277.
- Ohlson, J.A.**, (1980). Financial Ratios and the Probabilistic Prediction of Bankruptcy, *Journal of Accounting Research*, 18, 109-131.
- Pawlak, Z.** (1991). Rough Sets. Theoretical Aspects of Reasoning about Data, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London.
- Pawlak, Z. y Slowinski, R.** (1994). Rough set approach to multi-attribute decision analysis, *European Journal of Operational Research* 72, pp. 443-459.
- Predki, B., Slowinski, R., Stefanowski, J., Susmaga, R. y Wilk, S.** (1998): ROSE – Software Implementation of the Rough Set Theory, in L. Polkowski, A. Skowron, eds. *Rough Sets and Current Trends in Computing, Lecture Notes in Artificial Intelligence*, vol. 1424. Springer-Verlag, Berlin, 605-608.
- Predki, B. y Wilk, S.** (1999). Rough Set Based Data Exploration Using ROSE System. In: Z.W. Ras, A. Skowron eds. *Foundations of Intelligent Systems, Lecture Notes in Artificial Intelligence*, vol. 1609, Springer-Verlag, Berlin, 172-180.
- Roy, B.** (1989). Main sources of inaccurate determination, uncertainty and imprecision in decision models. *Math. Comput. Modell.*, 12, pp. 1245-1254.

- Sanchis, A., Gil, J.A. y Heras, A.** (2003): El análisis discriminante en la previsión de la insolvencia en las empresas de seguros no vida, *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 116, enero-marzo, 183-233.
- Segovia, M.J.** (2003). Predicción de crisis empresariales en seguros no vida mediante la metodología Rough Set, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.
- Slowinski, R.** (1993). Rough set learning of preferential attitude in multicriteria decision making, in: J. Komorowski and Z. W. Ras (eds.), *Methodologies for Intelligent Systems. Lecture Notes in Artificial Intelligence* vol. 689, Springer-Verlag, Berlin, pp. 642-651.
- Slowinski, R. y Stefanowski, J.** (1992). "RoughDAS" and "RoughClass" software implementations of the rough set approach. Chapter III-8 in Slowinski (1992), pp. 445-456.
- Slowinski R. y Stefanowski J.** (1994). Rough classification with valued closeness relation, in: Diday E. et al (eds.), *New Approaches in Classification and Data Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 482-488.
- Stefanowski, J.** (1992). Rough Sets Theory and discriminant methods as tools for analysis of information systems. A comparative study, *Foundations of Computing and Decision Sciences* vol 17 (2), 81-98.
- Stefanowski, J.** (1993). Classification support based on the rough set theory, in J. Wessels, A.P. Wierzbicki (eds.): *User-Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis and Support, LNEMS 397*, Springer Verlag, Berlin, pp. 185-192.
- Uriel, E.** (1995). *Análisis de Datos. Series Temporales y Análisis Multivariante*, Colección Plan Nuevo AC.
- Zavgren, C.V.** (1985). Assessing the vulnerability to failure of American industrial firms. A logistic analysis, *Journal of Business Finance and Accounting* 12 (1), 19-45.
- Zopounidis, C., y Dimitras A.** (1998). Multicriteria Decision Aid Methods for the Prediction of Business Failure. Kluwer. Dordrecht.

Tabla I: Lista de Ratios Empleados

Ratios	DEFINICIÓN
R1	Fondo de Maniobra / Activo Total
R2	Beneficio antes de Impuestos(BAI)/ Capitales propios
R3	Ingresos Financieros/ Total Inversiones
R4	BAI*/ Pasivo Total
R5	BAI* = BAI+ Amortizaciones + Provisiones + Resultados Extraordinarios
R6	Total Primas adquiridas de seguro directo / Capitales propios
R7	Total Primas adquiridas de seguro directo / Capitales propios + Provisiones Técnicas
R8	Total Primas adquiridas de negocio neto /Capitales propios + Provisiones Técnicas
R9	Capitales Propios / Pasivo Total
R10	Provisiones Técnicas / Capitales Propios
R11	Gastos Técnicos de seguro directo / Capitales propios
R12	Gastos Técnicos de negocio neto / Capitales propios
R13	Gastos Técnicos de seguro directo / Capitales propios + Prov. Técnicas
R14	Gastos Técnicos de negocio neto / Capitales propios + Provisiones Técnicas
R15	Ratio Combinado 1 = Ratio Siniesitralidad de seguro directo (RSD)+ Ratio de Gastos (RG)
	RSD = Gastos Técnicos de seguro directo/ Total Primas adquiridas de seguro directo
	RG = Comisiones y otros gastos de explotación/ Otros ingresos explotación
R16	Ratio Combinado 2 = Ratio Siniesitralidad de negocio neto (RSN)+ Ratio de Gastos (RG)
	RSN = Gastos Técnicos de negocio neto/ Total Primas adquiridas de negocio neto
	RG = Comisiones y otros gastos de explotación/ Otros ingresos explotación
R17	(Gastos Técnicos de seguro directo + Comisiones y otros gastos de Explotación)/ Total Primas adquiridas de seguro directo
R18	(Gastos Técnicos de negocio neto + Comisiones y otros gastos de Explotación)/ Total Primas adquiridas de negocio neto
R19	Provisiones Técnicas de reaseguro cedido / Provisiones Técnicas
R20	RSD = Gastos Técnicos de seguro directo/ Total Primas adquiridas de seguro directo
R21	RSN = Gastos Técnicos de negocio neto/ Total Primas adquiridas de negocio neto

Tabla II: Lista de Subintervalos

Ratio	1º	2	3º	4º
R1	(-∞, 0.115]	(0.115, 0.295]	(0.295, 0.475]	(0.475, +∞)
R2	(-∞, 0]	(0, 0.1]	(0.1, 0.07]	(0.07, +∞)
R3	(-∞, 0.03]	(0.03, 0.06]	(0.06, 0.11]	(0.11, +∞)
R4	(-∞, 0.03]	(0.03, 0.08]	(0.08, 0.26]	(0.26, +∞)
R5	(-∞, 0.565]	(0.565, 1.38]	(1.38, 2.715]	(2.715, +∞)
R6	(-∞, 0.525]	(0.525, 1.38]	(1.38, 2.715]	(2.715, +∞)
R7	(-∞, 0.455]	(0.455, 0.725]	(0.725, 1.22]	(1.22, +∞)
R8	(-∞, 0.46]	(0.46, 0.7]	(0.7, 1.18]	(1.18, +∞)
R9	(-∞, 0.14]	(0.14, 0.35]	(0.35, 0.68]	(0.68, +∞)
R10	(-∞, 0.04]	(0.04, 0.545]	(0.545, 2.97]	(2.97, +∞)
R11	(-∞, 0.27]	(0.27, 1.095]	(1.095, 2.43]	(2.43, +∞)
R12	(-∞, 0.27]	(0.27, 0.845]	(0.845, 1.815]	(1.815, +∞)
R13	(-∞, 0.27]	(0.27, 0.49]	(0.49, 0.82]	(0.82, +∞)
R14	(-∞, 0.225]	(0.225, 0.435]	(0.435, 0.765]	(0.765, +∞)
R17	(-∞, 0.98]	(0.98, 1.055]	(1.055, 1.27]	(1.27, +∞)
R18	(-∞, 1]	(1, 1.09]	(1.09, 1.29]	(1.29, +∞)
R19	(-∞, 0]	(0, 0.065]	(0.065, 0.19]	(0.19, +∞)
R20	(-∞, 0.515]	(0.515, 0.68]	(0.68, 0.785]	(0.785, +∞)
R21	(-∞, 0.515]	(0.515, 0.655]	(0.655, 0.75]	(0.75, +∞)

Tabla III: Códigos asignados a los subintervalos

Ratio	1º	2	3	4
R1	1	2	3	4
R2	1	2	3	4
R3	1	2	3	4
R4	1	2	3	4
R5	1	3	4	2
R6	1	3	4	2
R7	1	3	4	2
R8	1	3	4	2
R9	1	3	4	2
R10	1	3	4	2
R11	1	4	3	2
R12	1	4	3	2
R13	1	4	3	2
R14	1	4	3	2
R17	1	4	3	2
R18	1	4	3	2
R19	1	3	3	2
R20	4	3	2	1
R21	4	3	2	1