

MODELOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES SOBRE ÍNDICES DE CATÁSTROFES: ANÁLISIS EMPÍRICO Y ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO ALTERNATIVO.

María José Pérez Fructuoso¹

Profesora Visitante de Matemática Actuarial

Antonio Alegre Escolano²

Catedrático de Universidad

Resumen: En este documento realizamos el análisis empírico de datos de siniestralidad catastrófica y las estimaciones de los parámetros del modelo desarrollado en el artículo "Análisis de los modelos de valoración de opciones sobre índices de catástrofes: Un modelo alternativo" (nº 6, Tercera Época, Anales del Instituto de Actuarios). Ajustamos distribuciones al número y a la cuantía total de las catástrofes, y estimamos el parámetro fundamental del modelo propuesto, tasa de declaración de siniestros, por el método de Máxima-Verosimilitud y aplicando Mínimos Cuadrados con Restricciones.

Por último, calculamos la volatilidad que incorpora el proceso de Wiener en el modelo aleatorio para las distintas estimaciones de la tasa y verificamos la bondad del ajuste mediante el cálculo de los correspondientes intervalos de confianza.

Palabras Clave: Distribución Lognormal; Distribución de Poisson; Estimación Máximo-Verosimil; Estimación por Mínimos Cuadrados Restringidos; Intervalos de Confianza.

¹ Departamento de Economía de la Empresa. Universidad Carlos III de Madrid. Avenida de la Universidad Carlos III, 22, 28270 Colmenarejo, Madrid. Tel.: 918561308. Fax: 918561220. e-mail: mjperez@emp.uc3m.es

² Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Universidad de Barcelona. Avenida Diagonal, 690, 08034, Barcelona. Tel.: 934021950. Fax: 934021953. e-mail: aalegre@eco.ub.es

1. INTRODUCCIÓN

En el artículo "Análisis de los modelos de valoración de opciones sobre índices de catástrofes: Un modelo alternativo", publicado en el nº 6 de la tercera época de los Anales del Instituto de Actuarios se desarrolla un modelo, en tiempo continuo, para determinar la cuantía total de las pérdidas aseguradas al final de un periodo determinado, $[0, T_2]$, asociadas a la ocurrencia de catástrofes naturales, $L(T_2)$. Esta variable constituye el subyacente de los activos derivados sobre índices de catástrofes negociados en el CBOT.

La hipótesis central del modelo es la definición de una dinámica de declaración de siniestros basada en un modelo exponencial decreciente a razón de un valor denominado tasa de declaración de siniestros, que aplicamos sobre la cuantía de siniestros pendiente de declarar.

En el trabajo original, las catástrofes se clasifican en tres grupos en función de su cuantía, y en una primera etapa, se atribuye carácter determinista a la dinámica de la declaración de los siniestros de forma que la única aleatoriedad viene dada por el tamaño, número e instante de ocurrencia de las catástrofes. Posteriormente, el modelo se plantea de forma aleatoria incorporando una perturbación de ruido blanco en la tasa de declaración de siniestros; el propósito: representar mejor el comportamiento irregular de las declaraciones de siniestros en el tiempo.

El total de declaraciones, $L(T_2)$, se obtiene mediante la convolución de la distribución de la cuantía total de declaraciones de pérdidas para cada catástrofe, considerando la información disponible sobre los sucesos catastróficos ya sucedidos y los siniestros asociados que se han declarado hasta un determinado momento del periodo de negociación de los activos derivados considerados.

En el presente artículo llevamos a cabo la estimación de los parámetros que aparecen en el modelo anteriormente resumido. Para ello realizamos un ajuste global de la distribución de la cuantía total de las catástrofes empleando la serie de datos disponible, pero en un primer momento, sin establecer diferencias por grupos de catástrofes.

Después, clasificamos las catástrofes, distinguiendo entre pequeñas, medianas y grandes, señalando los valores mínimo y máximo correspondientes a cada categoría, y a partir de dicha clasificación ajustamos una distribución al número de siniestros para cada uno de los grupos considerados.

Por otro lado, realizamos dos tipos de estimaciones para la tasa de declaración de siniestros constante: una, conforme al método de Máxima-Verosimilitud; la otra, aplicando Mínimos Cuadrados con Restricciones. Sobre la base de los resultados así obtenidos, contrastamos la validez del modelo continuo con tasa constante propuesto en este trabajo. También, determinamos la volatilidad que incorpora el proceso de Wiener dentro del modelo continuo aleatorio, respecto a cada una de las estimaciones realizadas sobre la tasa de declaración de siniestros. Por último, verificamos la bondad del ajuste mediante el cálculo de los correspondientes intervalos de confianza.

2. PRINCIPALES RESULTADOS DEL MODELO CONTINUO

En el modelo continuo planteado, tanto cierto como aleatorio, se parte de la hipótesis de que la cuantía total de una catástrofe, k_j^i , es la suma de la cuantía declarada de siniestros en t , $S_j^i(t)$, y de la cuantía de siniestros pendiente de declarar en ese momento, $R_j^i(t)$, variable fundamental en la formalización del modelo. En su versión determinista, utilizamos la ecuación diferencial:

$$dR_j^i(t) = -\alpha^i R_j^i(t) dt$$

para representar la evolución decreciente de la cuantía de siniestros pendiente de declarar asociada a la catástrofe del tipo i ($i=1,2,3$)³

³ El superíndice i hace referencia a la clasificación de las catástrofes en función de su magnitud. Esto da lugar a la clasificación de las catástrofes en tres categorías según su cuantía siendo $i=1$ las catástrofes de pequeña cuantía, $i=2$ de cuantía media e $i=3$ de gran cuantía.

ocurrida en el momento t_j^i ($j=1,2,\dots,N^i(t)^4$) siendo α^i la tasa instantánea de declaración de siniestros constante⁵.

La solución de dicha ecuación da lugar a:

$$R_j^i(t) = k_j^i e^{-\alpha^i(t-t_j^i)}$$

Posteriormente, perturbamos la tasa instantánea de declaración a través de un proceso de Wiener obteniendo la ecuación diferencial estocástica siguiente para representar la nueva dinámica del proceso:

$$dR_j^i(t) = -\alpha^i R_j^i(t)dt + \sigma^i R_j^i(t)dw_j^i(t-t_j^i)$$

donde $w_j^i(t-t_j^i)$ son procesos de Wiener independientes asociados, cada uno de ellos, a una catástrofe del tipo i ocurrida en el momento t_j^i y α^i y σ^i representan, respectivamente, la tendencia media de la tasa de declaración de siniestros y la volatilidad, constante en el tiempo, asociada a cada proceso de Wiener.

Resolvemos esta ecuación diferencial estocástica mediante la aplicación del lema de Itô,

⁴ $N^i(t)$ es el número aleatorio de catástrofes ocurridas durante el periodo de tiempo considerado. Este número se representa mediante distribuciones de Poisson independientes para cada tipo i de catástrofe, de intensidad $\lambda^i T_1$ con $i=1,2,3$, donde λ^i es el número medio anual de catástrofes ocurridas del tipo i [Hossack, I.B. et al. (1983)] y T_1 indica la amplitud del periodo en el que la ocurrencia de una catástrofe se incluye en la elaboración del índice de pérdidas subyacente del contrato.

⁵ La obtención de esta tasa se realiza a partir del análisis de series históricas de declaraciones siniestralas considerando que las reclamaciones asociadas a las catástrofes de cuantía media ($i=2$) presentan una velocidad de declaración mayor que las grandes catástrofes ($i=3$), y por tanto $\alpha^2 > \alpha^3$. Por hipótesis, las catástrofes de pequeña cuantía, $i=1$, se declaran íntegramente en el momento en que se producen, t_j^1 , pasando a formar parte de la ratio de pérdidas instantáneamente $\alpha^1 \rightarrow \infty$ y por tanto $R_j^1(t_j^1) = 0$ y $S_j^1(t_j^1) = k_j^1$.

$$R_j^i(t) = k_j^i e^{-\left(\alpha^i + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_j^i) + \sigma^i w_j^i(t-t_j^i)}$$

de donde resulta el proceso estocástico que determina la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t asociado a una determinada catástrofe.

$R_j^i(t)$ es una variable aleatoria cuya distribución dependerá de la distribución de probabilidad de la cuantía total de la catástrofe, k_j^i . Si hacemos la hipótesis de que dicha cuantía es un valor constante, $R_j^i(t)$ seguirá una distribución Log-Normal, siendo los parámetros de la distribución normal asociada [Feller, W. (1968)],

$$N\left(\ln k_j^i - \left(\alpha^i + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_j^i), \sigma^i \sqrt{t-t_j^i}\right)$$

Esta asunción, lleva a concluir que, en promedio, la cuantía de siniestros pendiente de declarar tiene el mismo comportamiento que en el modelo cierto:

$$E[R_j^i(t)] = k_j^i e^{-\alpha^i(t-t_j^i)} \quad E[S_j^i(t)] = k_j^i \left[1 - e^{-\alpha^i(t-t_j^i)}\right]$$

La cuantía de siniestros declarada, $S_j^i(t)$, la obtenemos como diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de siniestros pendiente de declarar asociada a dicha catástrofe,

$$S_j^i(t) = k_j^i \left[1 - e^{-\left(\alpha^i + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_j^i) + \sigma^i w_j^i(t-t_j^i)}\right]$$

A partir de estos resultados, la cuantía total de las declaraciones en T_2 , $L(T_2)$, la determinamos mediante la convolución de la cuantía de siniestros declarada hasta T_2 asociada a cada una de las catástrofes por separado:

$$L(T_2) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{N^i(T_1)} S_j^i(t) = \sum_{j=1}^{N^1(T_1)} k_j^1 + \sum_{i=2}^3 \sum_{j=1}^{N^i(T_1)} k_j^i \left[1 - e^{-\left(\alpha^i + \frac{(\sigma^i)^2}{2}\right)(T_2 - t_j) + \sigma^i w_j^i (T_2 - t_j)} \right]$$

3. ANÁLISIS EMPÍRICO Y ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO

3.1 CUANTÍA TOTAL DE LAS CATÁSTROFES Y NÚMERO DE SINIESTROS

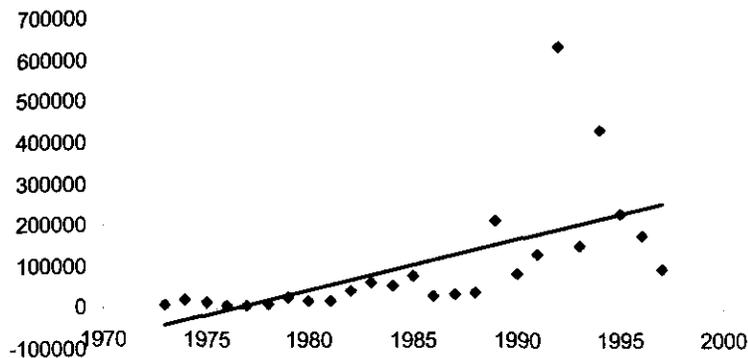
A partir de los datos de siniestralidad por catástrofes en EE.UU. durante el periodo 1973-1997, obtenidos a través de PCS (*Property Claims Services*) realizamos un ajuste de distribución en el número de siniestros y en la cuantía total de las catástrofes, tras suponer una clasificación de las mismas en función de sus cuantías.

3.1.1 TENDENCIA DE LA MEDIA ANUAL DE LA CUANTÍA DE LAS CATÁSTROFES

Antes de analizar la distribución de la cuantía total de las catástrofes del modelo continuo propuesto, k_j^i , nos planteamos la necesidad de determinar la tendencia media anual de la cuantía total de las catástrofes a lo largo de los 25 años considerados. Para ello, partiendo de los datos acerca de las pérdidas totales, en dólares constantes, asociadas a cada una de las catástrofes ocurridas en el intervalo [1973,1997], calculamos la media anual de dichas pérdidas y representamos gráficamente su dispersión:

Año	Cuantía catastrófica media anual
1973	9196,982561
1974	21882,21774
1975	16234,10938
1976	10695,2913
1977	10063,17619
1978	15370,78333
1979	31528,76944
1980	23078,88039
1981	21654,71188
1982	46323,32879
1983	68326,21212
1984	59548,36538
1985	82942,20588
1986	33393,4375
1987	39416,66667
1988	44031,25
1989	218342,8571
1990	88281,25
1991	134085,7143
1992	638055,5556
1993	156111,1111
1994	436153,8462
1995	233194,4444
1996	178292,6829
1997	100000

Tendencia de la cuantía media anual de las catástrofes en EE.UU para el periodo 1973-1997

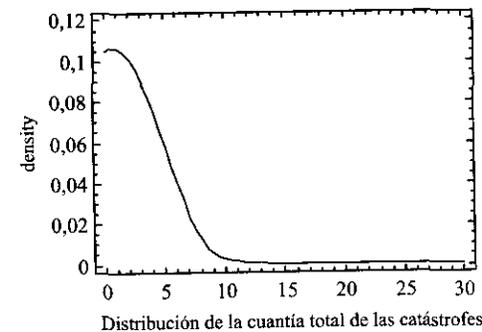


Como se observa en el gráfico, la cuantía media anual de las catástrofes presenta una tendencia creciente en el tiempo.

El objetivo de este análisis de tendencia es homogeneizar los datos de partida, es decir, en términos actuariales, trabajar sobre un colectivo lo más homogéneo posible, para poder estimar la distribución de la cuantía total de las catástrofes globalmente. Por tanto, y con este objetivo de homogeneización de la muestra, dividimos la cuantía de las pérdidas totales para cada una de las catástrofes consideradas por su correspondiente cuantía media anual.

La gráfica a continuación muestra el ajuste realizado sobre esta nueva serie de datos homogéneos: *cuantía total de la catástrofe dividida por su correspondiente cuantía media anual*.

Distribution: Lognormal; mean = 0,909314; SD = 1,6353; p = 0,2608335



Después de probar el ajuste de distintas distribuciones continuas, tradicionalmente utilizadas para modelar en seguros la variable aleatoria cuantía de un siniestro (como la distribución Normal, Log-Normal, Gamma, Exponencial y Pareto), a la serie de datos *cuantía de la catástrofe dividida por su correspondiente cuantía media catastrófica anual*, resulta que el test de la χ^2 para un nivel de significación del 5% y con un *p-value* igual a 0,2608335, no permite rechazar estadísticamente que la distribución empírica de la *cuantía total de las catástrofes corregida por su correspondiente media anual* se ajuste a una distribución Log-Normal.

En nuestro modelo teórico, se realiza una clasificación de las catástrofes en tres categorías en función de su cuantía total, k_j^i con $i=1,2,3$. Consideraremos, como hipótesis de trabajo para realizar el análisis que pretendemos llevar a cabo, que el 60% de las catástrofes que ocurren son de pequeña cuantía, el 25% son de cuantía media y el 15% restante son grandes catástrofes.

A partir de estos valores, obtenemos los percentiles 60 (punto de corte de las catástrofes de pequeña cuantía y de cuantía media) y 85 (punto de corte de las catástrofes de cuantía media y de gran cuantía) de la distribución de la cuantía total de las catástrofes corregida por su correspondiente media anual, cuyos valores resultan:

percentil 60 = 0,566372 y percentil 85 = 1,6

De esta forma, la ocurrencia de catástrofes cuya cuantía referida a su correspondiente media anual pertenezca al intervalo $[0,0156726;0,566372]$ serán consideradas catástrofes de pequeña cuantía. Las catástrofes cuya cuantía pertenezca al intervalo $]0,566372;1,6]$ serán consideradas catástrofes de cuantía media y el resto, $]1,6;\infty[$, grandes catástrofes.

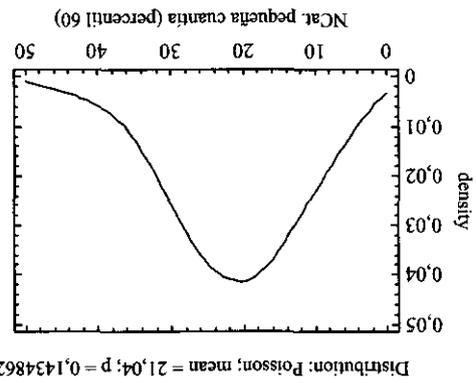
La distribución de la cuantía total de la catástrofe para cada uno de estos intervalos se ajusta a una distribución Lognormal condicionada a que el valor de dicha cuantía no esté por debajo del percentil inferior ni supere el percentil superior, es decir, pertenezca al intervalo correspondiente.

Determinados los intervalos de cuantía para cada uno de los tres tipos de catástrofes considerados, obtenemos el número de catástrofes anual dentro de cada uno de estos intervalos, como se muestra en la siguiente tabla, y representamos gráficamente su ajuste a la distribución de Poisson⁶ [Jonhson, N.L. et al. (1992)]:

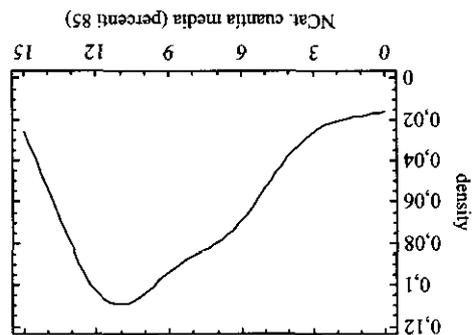
⁶ Por hipótesis del modelo, consideramos que el número de catástrofes para cada tipo de catástrofe sigue distribuciones de Poisson independientes. Con el objetivo de comprobar la bondad de la asunción realizada se analiza en este punto el ajuste a dicha distribución únicamente.

Tabla 2:

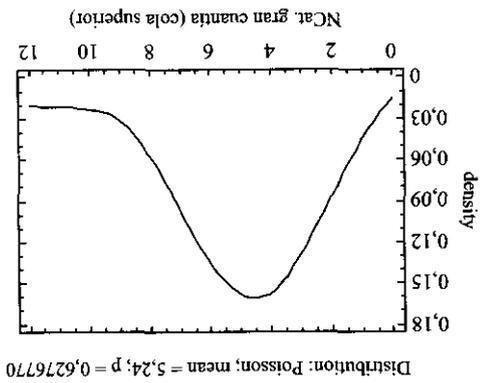
Año	NCat Anual (Perc. 60)	NCat Anual (Perc. 85)	NCat Anual (Cola Sup.)
	Cat. Pequeña cuantía	Cat. Cuantía media	Grandes Cat.
1973	26	9	6
1974	24	5	2
1975	17	11	4
1976	15	6	6
1977	24	7	11
1978	23	11	8
1979	41	9	4
1980	27	12	12
1981	16	12	4
1982	15	13	5
1983	26	5	2
1984	11	11	4
1985	21	8	5
1986	10	12	6
1987	10	11	3
1988	11	13	8
1989	30	1	4
1990	19	7	6
1991	22	10	3
1992	28	6	2
1993	22	9	5
1994	35	1	3
1995	23	7	6
1996	21	13	7
1997	9	12	5



Distribution: Poisson; mean = 21,04; p = 0,1434862



Distribution: Poisson; mean = 8,84; p = 0,2689930



Distribution: Poisson; mean = 5,24; p = 0,6276770

Como resultado del ajuste desarrollado para las tres series de datos sobre este número anual de catástrofes, y basándonos en el test de χ^2 realizado para un nivel de significación del 5%, se obtiene que en ninguno de los tres casos es posible rechazar la hipótesis de que la distribución empírica del número de catástrofes anual por intervalo de cuantía es una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 21,04$ para el número anual de catástrofes de pequeña cuantía, $\lambda = 8,84$ para el número anual de catástrofes de cuantía media y $\lambda = 5,24$ para el número anual de grandes catástrofes.

Tabla resumen:	
NCat. Pequeña cuantía	$\lambda = 21,040$ p-value = 0,1434862
NCat. Cuantía Media	$\lambda = 8,840$ p-value = 0,2689930
NCat. Gran cuantía	$\lambda = 5,240$ p-value = 0,6276770

3.2 ESTIMACIÓN DE LA TASA DE DECLARACIÓN DE SINIESTROS

En la aplicación práctica del modelo teórico de evolución de la ratio de siniestralidad subyacente de los derivados sobre catástrofes, uno de los principales parámetros a estimar es la tasa de declaración de siniestros, α .

Para llevar a cabo el ajuste, disponemos de series temporales de datos sobre el porcentaje declarado de siniestros, acumulado semanalmente, en tres grandes eventos ocurridos en distintas regiones de España: Alcira, San Sebastián y Barcelona en 1991, 1992 y 1999 respectivamente. Estos datos han sido obtenidos a través del Departamento Técnico y de Reaseguro del Consorcio de Compensación de Seguros.

Tabla 3: Serie de datos: Alcira 01/10/1991

Periodo	% Declarado Real	Tasa Declaración (α Real)	% Pendiente Declarar Real (PDR)
Semana			
0	0		100
1	15,06	0,163225061	84,94
2	46,35	0,311344358	53,65
3	65,04	0,350321878	34,96
4	75,95	0,356258797	24,05
5	81,14	0,333625382	18,86
6	86,64	0,33548417	13,36
7	89,47	0,321563123	10,53
8	91,96	0,315092638	8,04
9	93,06	0,296429823	6,94
10	94,77	0,295075891	5,23
11	95,92	0,290824836	4,08
12	96,29	0,274511526	3,71
13	96,44	0,256569972	3,56
14	97,4	0,26068991	2,6
15	98,25	0,269703627	1,75
16	98,7	0,27142537	1,3
17	99,23	0,286266762	0,77
18	99,71	0,324613586	0,29
		Tasa Media	
		0,295168151	

Tabla 4: Serie de datos: San Sebastián 23/06/1992

Periodo	% Declarado Real	Tasa Declaración (α Real)	% Pendiente Declarar Real (PDR)
Semana			
0	0		100
1	11,92	0,126924694	88,08
2	63,96	0,510270377	36,04
3	76,33	0,480320587	23,67
4	83,32	0,447739947	16,68
5	87,71	0,419276852	12,29
6	90,06	0,384767194	9,94
7	91,28	0,348507278	8,72
8	92,24	0,319523481	7,76
9	93,2	0,298694175	6,8
10	94,22	0,28507665	5,78
11	94,82	0,269124103	5,18
12	95,67	0,261633554	4,33
13	96,55	0,258984304	3,45
14	97,31	0,258259214	2,69
15	98,19	0,267456223	1,81
16	98,41	0,258839761	1,59
17	98,61	0,251521555	1,39
18	98,84	0,247597232	1,16
19	99,04	0,244525904	0,96
20	99,24	0,243980352	0,76
21	99,55	0,257317994	0,45
22	99,72	0,267187994	0,28
23	99,8	0,270200352	0,2
24	99,83	0,265713626	0,17
25	99,89	0,272497804	0,11
26	99,94	0,285330035	0,06
		Tasa Media	
		0,300048894	

Tabla 5: Serie de datos: Barcelona 14/09/1999

Periodo	% Declarado Real	Tasa Declaración	% Pendiente Declarar Real
Semana		(α Real)	(PDR)
0	0		100
1	9,319899244	0,097832249	90,68010076
2	31,62354019	0,190070788	68,37645981
3	49,32447905	0,226575738	50,67552095
4	58,57568125	0,220325517	41,42431875
5	68,42225784	0,230543535	31,57774216
6	74,57064346	0,228210985	25,42935654
7	80,4442409	0,233128623	19,5557591
8	83,31806732	0,223855491	16,68193268
9	86,7185711	0,224311494	13,2814289
10	89,45500343	0,22495187	10,54499657
11	91,84795054	0,227900075	8,152049462
12	93,19899244	0,224008285	6,801007557
13	93,8745134	0,214823999	6,125486604
14	96,58804671	0,241277518	3,411953286
15	96,58804671	0,22519235	3,411953286
16	97,38951225	0,227852069	2,610487749
17	98,19097779	0,236022571	1,809022212
18	98,74055416	0,243027687	1,259445844
19	99,43897412	0,272797812	0,561025876
		Tasa Media	
		0,223593329	

Al carecer, por una parte, de un número mayor de datos sobre porcentaje de declaraciones asociadas a catástrofes y, por otra, de datos más ajustados a la realidad que queremos analizar, realizamos en esta sección un ajuste simple de los datos disponibles al modelo exponencial cierto que a su vez resultaría como media del modelo aleatorio desarrollado basado en el proceso de Wiener.

3.2.1 ESTIMACIÓN MÁXIMO VEROSÍMIL DE LA TASA DE DECLARACIÓN DE SINIESTROS

El método utilizado para estimar la tasa de declaración de siniestros, es el cálculo del estimador Máximo-Verosímil (MV) del parámetro de la distribución exponencial que sigue la cuantía declarada de siniestros, σ , mediante la resolución de la ecuación de solución única [Jonhson, N.L. et al. (1994)]:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{N_i(x_i - x_{i-1})}{-1} - \sum_{i=2}^k N_i x_i$$

donde x_i son los puntos de división que determinan cada intervalo, $0 = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{k-1} < \infty$. En nuestro caso x_i es el número de la semana correspondiente. La amplitud entre los puntos de división, $x_i - x_{i-1}$, es siempre igual a una (1) semana.

N_i son los valores observados en los intervalos, con $\sum_{i=1}^k N_i = n$. En nuestro caso N_i es el porcentaje declarado de siniestros por semana desacumulado, es decir:

$$N_i = \frac{1 - e^{-\alpha(t-t_i)}}{100}$$

Obtenido el valor del parámetro, calculamos la media de la distribución exponencial estimada, $\hat{\alpha}$, como:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\hat{\sigma}}$$

y con este valor determinamos la distribución estimada de las declaraciones de siniestros, como sigue:

$$N_i^E = \frac{1 - e^{-\hat{\alpha}(t-t_i)}}{100}$$

La distribución de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, real y estimada, resulta de restarle a 1 la cuantía declarada de siniestros real o esperada según el caso:

$$PDR_i = 1 - N_i \quad PDE_i = 1 - N_i^E$$

siendo PDR_i la cuantía de siniestros pendiente de declarar real semanal y PDE_i la cuantía de siniestros pendiente de declarar estimada semanal.

Los resultados de la estimación MV de la tasa de declaración de siniestros, se muestran en la siguiente tabla resumen:

Tabla resumen:			
Serie	Tasa Media Real	Tasa Estimada MV	p-value
Alcira	0,295168151	0,269736718	0,955821075
San Sebastián	0,300048894	0,313794958	0,626496305
Barcelona	0,223593329	0,207067399	0,995621039

A partir de la aplicación del test de la χ^2 para un nivel de significación del 5%, resulta que no podemos rechazar la hipótesis de que la distribución empírica de los datos sobre declaraciones de siniestros catastróficos para el modelo cierto, se ajuste a un distribución exponencial de parámetros, respectivamente $\alpha = 0,269736718$, $\alpha = 0,313794958$ y $\alpha = 0,207067399$.

3.2.2 ESTIMACIÓN DE LA VOLATILIDAD DEL MODELO ALEATORIO PARA LA TASA ESTIMADA MV

Como se ha comentado en el epígrafe 2 del presente trabajo, bajo la hipótesis de que la cuantía total de la catástrofe es un valor constante, la variable aleatoria cuantía de los siniestros pendiente de declarar sigue una distribución Log-Normal cuya esperanza matemática coincide con la cuantía de siniestros pendiente de declarar del modelo determinista,

$$R_j^i(t) = k_j^i e^{-\left(\alpha^i + \frac{\sigma^i}{2}\right)(t-t_j) + \sigma^i w_j^i(t-t_j)} \sim N\left(\ln k_j^i - \left(\alpha^i + \frac{\sigma^i}{2}\right)(t-t_j), \sigma^i \sqrt{t-t_j}\right) \Rightarrow E[R_j^i(t)] = k_j^i e^{-\alpha^i(t-t_j)}$$

Teniendo en cuenta este hecho y las características de los datos de siniestralidad disponibles, el modelo continuo aleatorio de evolución de la ratio de siniestralidad permite expresar la cuantía de los siniestros pendiente de declaración como escribimos a continuación:

$$R_j^i(t) = R_j^i(t-1) e^{-\left(\alpha^i + \frac{(\sigma^i)^2}{2}\right) + w(t)}$$

de forma que la variación de esta cuantía presenta una distribución Lognormal, de normal asociada con parámetros de tendencia y dispersión siguientes:

$$\ln \frac{R_j^i(t)}{R_j^i(t-1)} \sim N\left(-\left(\alpha^i + \frac{(\sigma^i)^2}{2}\right), \sigma^i\right)$$

y operando resulta:

$$-\ln \frac{R_j^i(t)}{R_j^i(t-1)} - \alpha^i \sim N\left(\frac{(\sigma^i)^2}{2}, \sigma^i\right)$$

o alternativamente,

$$\ln \frac{R_j^i(t-1)}{R_j^i(t)} - \alpha^i \sim N(\mu, \sqrt{2\mu})$$

Si denotamos por \bar{X} y \bar{S}_x^2 respectivamente, a la media y variancia muestral de la distribución normal asociada, considerando que $\bar{S}_x^2 = 2\bar{X}$ y llamamos $\hat{\sigma}^2$ al estimador de la variancia muestral, el valor de este estimador lo obtenemos minimizando la suma de los errores al cuadrado, es decir:

$$2\left(\bar{X} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(\bar{S}_X^2 - \hat{\sigma}^2\right)(-1) = 0$$

$$\bar{X} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} + 2\bar{S}_X^2 - 2\hat{\sigma}^2 = 0$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2}{5}(\bar{X} + 2\bar{S}_X^2)$$

Aplicando el estimador resultante a las series de datos disponibles y para los valores de la tasa de declaración de siniestros estimada de forma MV, tendencia del proceso estocástico definido para la cuantía de siniestros pendiente de declarar en el modelo con Wiener, se derivan los resultados que mostramos en la siguiente tabla resumen:

Tabla resumen:		
Serie	Variación Estimada	Desviación estimada
Alcira	0,055718609	0,236047895
San Sebastián	0,016742656	0,129393417
Barcelona	0,0515987	0,227153472

3.2.3 INTERVALOS DE CONFIANZA PARA EL CASO TASA ESTIMADA MV

Estimada la volatilidad existente en el modelo aleatorio de evolución de las declaraciones de siniestros, para el valor de la tasa de declaración de siniestros estimada por el método de Máxima-Verosimilitud, precisamos la incertidumbre existente en dicha estimación calculando los intervalos de confianza del 90% y del 99% y, por tanto, para un nivel de significación del 10% y del 1% en una normal de 2 colas, para la distribución de la cuantía de siniestros pendiente de declarar.

Tabla 6: Serie de datos: Alcira: Intervalos de confianza 90% y 99% tasa MV			
Int. Sup. LogN 90	Int. Inf. LogN 90	Int. Sup. LogN 99	Int. Inf. LogN 99
109,4905	50,3656	136,4003	40,4292
95,4942	31,8452	130,3012	23,3385
80,228	20,9029	117,3902	14,2857
66,1096	13,9888	102,5988	9,0136
53,8054	9,4783	87,9496	5,7985
43,4079	6,4788	74,3611	3,7820
34,7871	4,4582	62,2195	2,4926
27,7317	3,0839	51,6320	1,6564
22,0122	2,1425	42,5579	1,1082
17,4093	1,4939	34,8808	0,7456
13,7266	1,0448	28,4511	0,5041
10,7941	0,7327	23,1099	0,3422
8,4682	0,5150	18,7027	0,2332
6,6298	0,3627	15,0869	0,1594
5,1808	0,2560	12,1348	0,1093
4,0418	0,1809	9,7348	0,0751
3,1483	0,1281	7,7910	0,0517
2,4490	0,0908	6,2217	0,0357

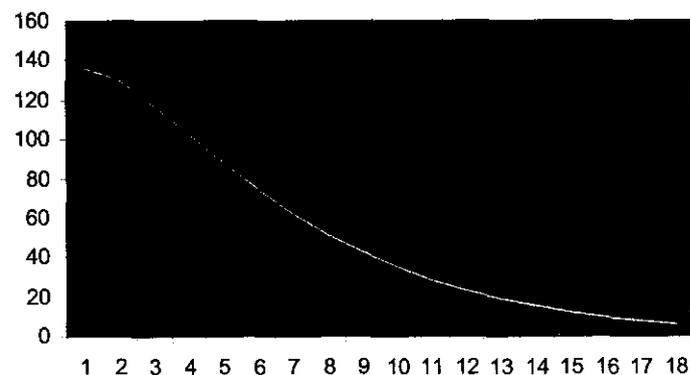


Tabla 7: Serie de datos: San Sebastián: Intervalos de confianza 90% y 99% tasa MV

Int. Sup. LogN 90	Int. Inf. LogN 90	Int. Sup. LogN 99	Int. Inf. LogN 99
89,6432	58,5669	101,1192	51,9202
70,9396	38,8554	84,1154	32,7691
54,9987	26,3122	67,7590	21,3571
42,1895	18,0084	53,6831	14,1528
32,1447	12,4091	42,0817	9,4789
24,3737	8,5920	32,7394	6,3966
18,4140	5,9709	25,3259	4,3413
13,8713	4,1614	19,5025	2,9598
10,4246	2,9071	14,9627	2,0254
7,8189	2,0349	11,4442	1,3903
5,8546	1,4268	8,7299	0,9568
4,3774	1,0019	6,6442	0,6600
3,2687	0,7044	5,0466	0,4562
2,4380	0,4958	3,8264	0,3159
1,8166	0,3493	2,8965	0,2191
1,3523	0,2463	2,1895	0,1521
1,0059	0,1739	1,6529	0,1058
0,7476	0,1228	1,2463	0,0736
0,5552	0,0868	0,9387	0,0513
0,4121	0,0614	0,7063	0,0358
0,3057	0,434	0,5310	0,0250
0,2266	0,0307	0,3988	0,0174
0,1679	0,0218	0,2993	0,0122
0,1244	0,0154	0,2244	0,0085
0,0921	0,0109	0,1682	0,0060
0,0681	0,0077	0,1259	0,0042

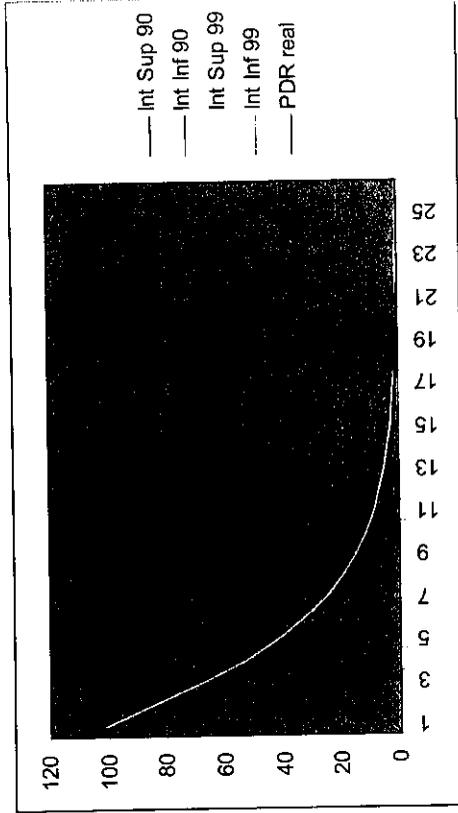
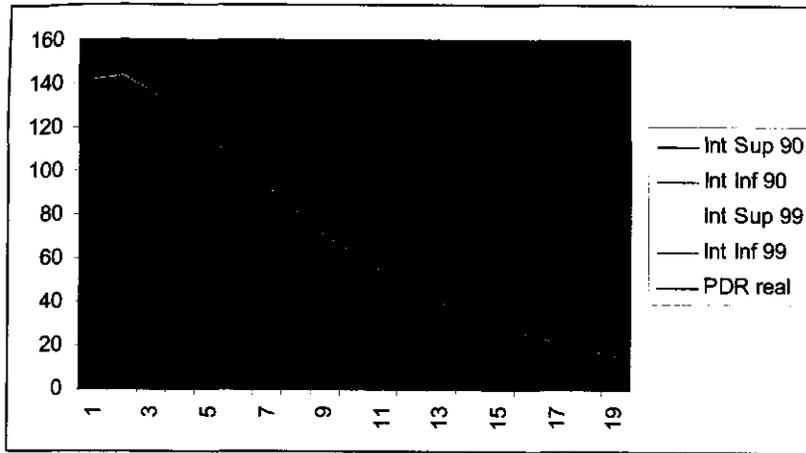


Tabla 8: Serie de datos: Barcelona: Intervalos de confianza 90% y 99% tasa MV

Int. Sup. LogN 90	Int. Inf. LogN 90	Int. Sup. LogN 99	Int. Inf. LogN 99
115,11568	54,5255	142,2254	44,1323
106,467	37,0044	143,5820	27,4390
94,9853	26,0343	137,0039	18,0497
83,1770	18,6609	126,9664	12,2250
71,9741	13,5361	115,4897	8,4358
61,7554	9,9021	103,6676	5,8988
52,6489	7,2904	92,1260	4,1663
44,6579	5,3948	81,2212	2,9662
37,7230	4,0087	71,1434	2,1255
31,7545	2,9890	61,9781	1,5314
26,6513	2,2354	53,7436	1,1085
22,3109	1,6760	46,4162	0,8056
18,6353	1,2595	39,9466	0,5875
15,5342	0,9484	34,2715	0,4298
12,9260	0,7154	29,3205	0,3153
10,7385	0,5405	25,0216	0,2319
8,9081	0,4089	21,3042	0,1710
7,3799	0,3098	18,1012	0,1263
6,1063	0,2350	15,3503	0,0935



De los resultados obtenidos se observa que no se mantiene la simetría respecto a la media como en los intervalos resultantes para la distribución normal asociada debido a la transformación exponencial realizada. Además, estadísticamente, no se rechaza la hipótesis de que el 90% (alternativamente, 99%) de los datos reales en las tres series consideradas están contenidos en el intervalo.

3.2.4 ESTIMACIÓN DE LA TASA DE DECLARACIÓN DE SINIESTROS POR MÍNIMOS CUADRADOS CON RESTRICCIONES (MCR)

Utilizando la metodología de Mínimos Cuadrados con Restricciones (MCR), el estimador de la tasa de declaración de siniestros se calcula resolviendo el siguiente programa lineal de optimización matemática:

$$\min \left(\sum_{i=1}^n (PDR_i - e^{-\alpha t_i})^2 \right)$$

$$\text{sujeto a } \sum_{i=1}^n \frac{PDR_i}{e^{-\alpha t_i}} = n$$

siendo PDR_i la cuantía de siniestros pendiente de declarar real semanal y $(e^{-\alpha t_i})^7$ la cuantía de siniestros pendiente de declarar esperada semanal.

Los valores de la tasa de declaración de siniestros resultantes de la aplicación de este método de estimación son los que aparecen en la siguiente tabla a continuación:

Tabla resumen:		
Serie	Tasa estimada MCR	p-value
Alcira	0,288209	0,988786844
San Sebastián	0,271	0,10746276
Barcelona	0,231	0,989348653

De la aplicación del test de la χ^2 para un nivel de significación del 5% se obtiene que no es posible rechazar la hipótesis de que la distribución real de los datos en las tres series temporales disponibles se ajusta a una distribución exponencial con tasas de declaración de siniestros $\alpha = 0,288209$, $\alpha = 0,271$ y $\alpha = 0,231$ para la serie de Alcira, San Sebastián y Barcelona respectivamente.

3.2.5 ESTIMACIÓN DE LA VOLATILIDAD DEL MODELO ALEATORIO PARA LA TASA ESTIMADA MCR

Para este nuevo valor de la tasa estimada, realizamos la estimación de la volatilidad del modelo aleatorio.

Los resultados de la estimación son los que aparecen en el siguiente cuadro resumen:

⁷ $e^{-\alpha t_i}$ es $R_j^i(t) = k_j^i e^{-\alpha^i (t-t_j^i)}$ para $k_j^i = 1$ y t_j^i el origen del contador de los periodos de declaración de siniestros o la semana cero de declaración de siniestros asociada a los datos disponibles.

Tabla resumen:		
Serie	Volatilidad estimada	Desviación estimada
Alcira	0,048329696	0,21984016
San Sebastián	0,033886044	0,184012064
Barcelona	0,042025659	0,205001605

3.2.6 INTERVALO DE CONFIANZA PARA EL CASO TASA ESTIMADA MCR

Las siguientes tablas reflejan la incertidumbre de la estimación realizada por el método de mínimos cuadrados con restricciones, a través del cálculo de los intervalos de confianza del 90% y del 99% en una distribución normal de 2 colas, para la cuantía de siniestros pendiente de declarar.

Tabla 9: Serie de datos: Alcira: Intervalos de confianza 90% y 99% tasa MCR

Int. Sup. LogN 90	Int. Inf. LogN 90	Int. Sup. LogN 99	Int. Inf. LogN 99
105,0462	50,9676	128,9040	41,5345
89,2827	32,1057	119,2535	24,0369
73,2857	20,9414	104,4658	14,6910
59,0795	13,9080	88,9628	9,2362
47,0811	9,3439	74,4050	5,9125
37,2135	6,3239	61,4365	3,8337
29,2321	4,3138	50,2378	2,5101
22,8500	2,9547	40,7655	1,6561
17,7897	2,0319	32,8719	1,0996
13,8035	1,4020	26,3677	0,7339
10,6799	0,9702	21,0556	0,4921
8,2426	0,6730	16,7484	0,3312
6,3477	0,4679	13,2769	0,2237
4,8789	0,3259	10,4932	0,1515
3,7436	0,2274	8,2707	0,1029
2,8679	0,1589	6,5030	0,0700
2,1940	0,1112	5,1019	0,0478
1,6763	0,0779	3,9945	0,0327

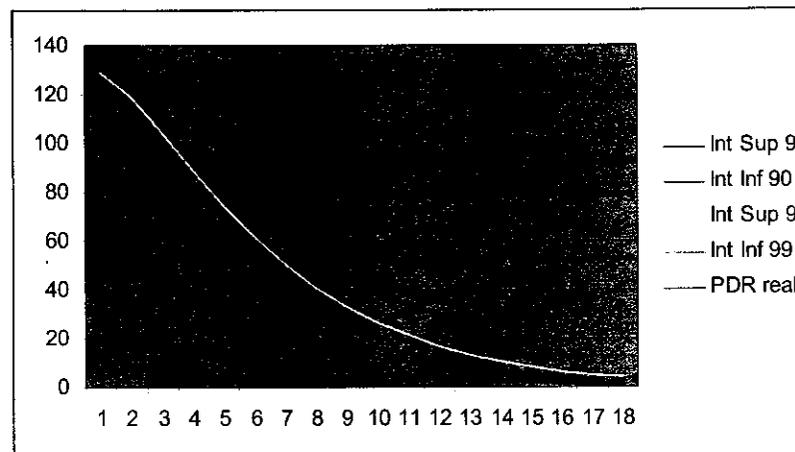


Tabla 10: Serie de datos: San Sebastián: Intervalos de confianza 90% y 99% tasa MCR

Int. Sup. LogN 90	Int. Inf. LogN 90	Int. Sup. LogN 99	Int. Inf. LogN 99
101,4851	55,3993	120,4487	46,6771
86,2589	36,6445	109,9059	28,7602
71,2093	24,9565	95,8078	18,5489
57,9044	17,2550	81,5664	12,2494
46,6333	12,0458	68,4005	8,2124
37,2996	8,4671	56,7473	5,5653
29,6794	5,9826	46,6981	3,8023
23,5191	4,2445	38,1818	2,6145
18,575	3,0215	31,0547	1,8073
14,6289	2,1570	25,1470	1,2548
11,4935	1,5435	20,2867	0,8745
9,0114	1,1068	16,3126	0,6114
7,0524	0,7951	13,0795	0,4287
5,5104	0,5721	10,4608	0,3013
4,2993	0,4122	8,3474	0,2123
3,3500	0,2974	6,6473	0,1499
2,6072	0,2148	5,2837	0,1060
2,0270	0,1554	4,1928	0,0751

1,5743	0,1124	3,3219	0,0533
1,2215	0,0815	2,6281	0,0378
0,9471	0,0591	2,0765	0,0269
0,7337	0,0428	1,6386	0,0192
0,5679	0,0311	1,2916	0,0136
0,4393	0,0226	1,0170	0,0097
0,3396	0,0164	0,7999	0,0069
0,2624	0,0119	0,6286	0,0050

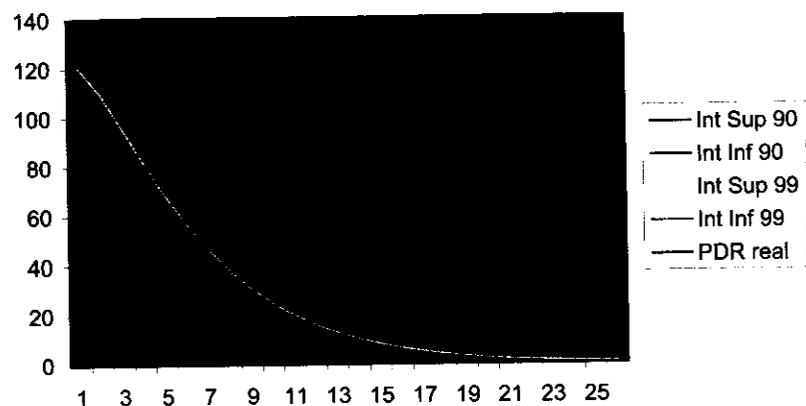
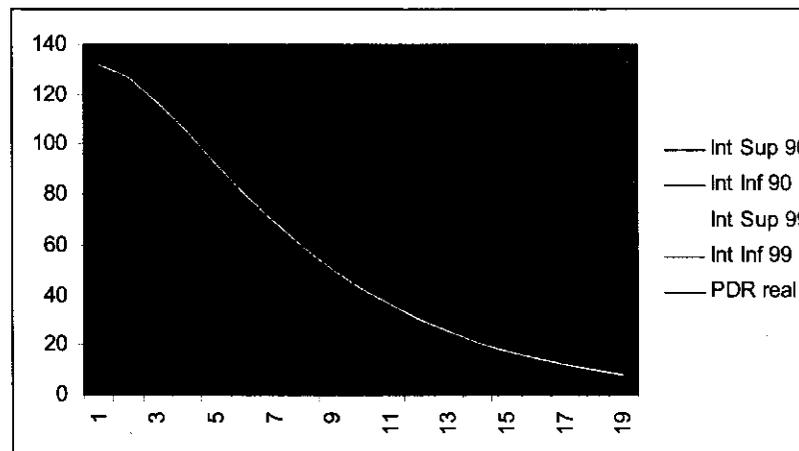


Tabla 11: Serie de datos: Barcelona: Intervalos de confianza 90% y 99% tasa MCR

Int. Sup. LogN 90	Int. Inf. LogN 90	Int. Sup. LogN 99	Int. Inf. LogN 99
108,8918	55,4765	131,7897	45,8377
97,3209	37,4975	127,4750	28,6275
84,1983	26,1824	117,1835	18,8125
71,6299	18,5918	104,9222	12,6925
60,2861	13,3445	92,3755	8,7089
50,3528	9,6516	80,3624	6,0474
41,8135	7,0212	69,2809	4,2375
34,5637	5,1311	59,3005	2,9907

28,4642	3,7639	50,3005	2,1231
23,3676	2,7696	42,7292	1,5146
19,1324	2,0435	36,0307	1,0851
15,6286	1,5112	30,2723	0,7802
12,7405	1,1198	25,3534	0,5627
10,3674	0,8313	21,1739	0,4070
8,4227	0,6181	17,6389	0,2951
6,8329	0,4603	14,6606	0,2145
5,5358	0,3432	12,1600	0,1562
4,4796	0,2562	10,0670	0,1140
3,6209	0,1914	8,3198	0,0833



4. CONCLUSIONES

El análisis empírico de los datos sobre cuantía y número de catástrofes en EE.UU durante un intervalo de 25 años permite atribuir un carácter Lognormal a la variable aleatoria cuantía total de la catástrofe de forma que, en cada uno de los grupos de catástrofes considerados, la

cuantía total de las mismas tomará una forma Lognormal condicionada a los valores mínimo y máximo que definen dicha cuantía total en el intervalo.

En lo referente al número de siniestros, en los tres grupos que definen las catástrofes en función de su tamaño, el test realizado sobre la distribución empírica del número de siniestros permite afirmar que estadísticamente no es posible rechazar la hipótesis de distribución de Poisson para el número de siniestros en cada uno de los grupos considerados.

No obstante, como se ha indicado a lo largo del trabajo, la parte central del modelo continuo propuesto, tanto cierto como aleatorio, consiste en la definición de la dinámica de las declaraciones de siniestros basada en un crecimiento proporcional a la cuantía de siniestros pendiente de declarar a razón de la tasa de declaración de siniestros.

Esta tasa de declaración de siniestros, en el caso constante, ha sido estimada utilizando dos métodos distintos: Máxima-Verosimilitud y Mínimos Cuadrados con Restricciones. En ambos casos, los valores obtenidos son muy similares y no permiten rechazar la hipótesis de distribución exponencial para la variable cuantía declarada de siniestros a partir de la cual calculamos el numerador de la ratio de siniestralidad objeto de estudio.

La estimación de la volatilidad incorporada por el proceso de Wiener en el modelo continuo aleatorio, ha sido realizada minimizando la suma de los errores al cuadrado y aplicado el resultado hallado para cada una de las estimaciones realizadas sobre la tasa de declaración de siniestros. El contraste de los resultados obtenidos lo hemos desarrollado a través del estudio de los correspondientes intervalos de confianza, contraste del que se desprende que el modelo aleatorio describe de forma adecuada la realidad que pretendemos representar.

BIBLIOGRAFÍA

- Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol I, II. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- Hossack, I. B.; Pollard, J.; Zehnwirth, B. (1983). *Introductory statistics with applications in general insurance*. Cambridge University Press.
- Johnson, N. L.; Kotz, S. Balakrishnan, N. (1994). *Continuous univariate distributions*. Vol. I. John Wiley & Sons Inc. New York.
- Johnson, N. L.; Kotz, S.; Kemp, A. K. (1992). *Univariate discrete distributions*. John Wiley & Sons Inc. New York.
- Pérez Fructuoso, M.J.; Alegre Escolano, Antonio (2000). *Análisis de los modelos de valoración de opciones sobre índices de catástrofes. Un modelo alternativo. Anales del Instituto de Actuarios, Tercera Época-nº6, 97-117.*