

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE CÓPULAS AL CÁLCULO DE LA PRIMA DE EMISION DE LOS BONOS SOBRE CATÁSTROFES

M^a Victoria Rivas López¹, María José Pérez Fructuoso² y Alfredo Cuesta Infante³

RESUMEN: En el presente artículo se realiza una aplicación de la teoría de Cópulas a los productos alternativos de transferencia de riesgo, denominados bonos sobre catástrofes (CAT Bonds). El objetivo principal es considerar, a través de la citada teoría, la dependencia existente entre los factores de riesgo que intervienen en el proceso de fijación de la prima de reaseguro de estos productos. Para ello, se determina empíricamente cuales son las cópulas que mejor se adecuan a los datos siniestrales simulados y distribuciones marginales consideradas y se desarrolla un algoritmo que permite obtener numéricamente la prima de reaseguro del bono catastrófico analizado.

Palabras Clave: Transferencia alternativa de riesgos, Dependencia de riesgos, Correlación no lineal, Simulación de MonteCarlo, MatLab.

¹ Profesora de Matemáticas de las Operaciones Financieras, Centro de Estudios Superiores FELIPE II (U.C.M.), C/ Lucas Jordán, s/n. 28300, Aranjuez, Madrid. Teléfono: +34 91.809.92.00 ext. 316 Fax: +34 91.809.92.10 e-mail: mvrivas@cesfelipesecondo.com

² Profesor Visitante de Matemática Actuarial, Departamento de Economía de la Empresa. Universidad Carlos III de Madrid, .Avenida de la Universidad Carlos III, 22. 28270, Colmenarejo, Madrid. Teléfono: +34 91 856 13 08 Fax: +34 91 856 12 20 e-mail: mjperez@emp.uc3m.es

³ Profesor de Fundamentos de Computadore, Centro de Estudios Superiores Felipe II (U.C.M.), C/ Lucas Jordán, s/n. 28300, Aranjuez, Madrid. Teléfono: + 34 91.809.92.00 ext. 251 Fax: + 34 91.809.92.05 e-mail: acuesta@cesfelipesecondo.com

1. Introducción

En las últimas décadas se ha producido un incremento mundial de la ocurrencia de catástrofes naturales como consecuencia de dos factores clave: los cambios climáticos y geológicos, que han provocado una mayor severidad y frecuencia de desastres naturales tales como terremotos, huracanes, inundaciones, sequías, etc., y la concentración y el crecimiento de la población en áreas propensas, o potencialmente propensas, a catástrofes naturales, como California o Florida en EE.UU.

Derivado de ello, el mercado asegurador mundial se encuentra sometido a una mayor exposición a pérdidas catastróficas que puede comprometer la solvencia y estabilidad de las compañías que operan en él, si no es capaz de obtener la financiación y diversificación necesarias para asegurar su viabilidad futura y la protección de sus asegurados.

Entre las soluciones tradicionales con las que cuentan las aseguradoras para resolver el incremento de la siniestralidad por catástrofes, cabe destacar la reducción de la concentración de pólizas en aquellos ramos más susceptibles de verse afectados por este tipo de eventos, o el aumento de la contratación de reaseguro, para cubrir una mayor proporción de las potenciales pérdidas. En este contexto de incremento de la siniestralidad asociada a los riesgos catastróficos, los mercados de capital ofrecen, a través de la titulización del riesgo, una alternativa para obtener protección catastrófica complementaria a la del reaseguro tradicional. Mediante la creación y emisión de derivados financieros, como bonos, opciones o swaps dentro del proceso de titulización se transfiere el riesgo asegurado a los inversores de los mercados de capital, quienes toman posiciones en la ocurrencia y el coste de las catástrofes.

La emisión de Bonos sobre Catástrofes es una de las formas de titulización que más ha desarrollado y utilizado el sector asegurador en los últimos años. Estos bonos son productos financieros cuyos flujos, cupones y principal, están condicionados a la ocurrencia de un determinado suceso de naturaleza catastrófica establecido en la emisión (Pérez-Fructuoso, 2005).

Un aspecto relevante en el análisis, tanto teórico como práctico, de estos instrumentos financiero-actuariales es su tarificación a lo largo de un horizonte temporal determinado. Desde un enfoque exclusivamente actuarial, para fijar el precio de un producto de seguros, tradicionalmente se trabaja con las hipótesis de la Teoría Clásica del Riesgo que suponen variables aleatorias cuantías individuales de los siniestros independientes y equidistribuidas. La prima se obtiene aplicando, además, el principio de mutualidad a partir del cual los riesgos se distribuyen entre toda la masa asegurada, de forma que en promedio los errores se compensan y la esperanza matemática de la siniestralidad total, o prima pura, es suficiente para llevar a cabo la cobertura. Sin embargo, este procedimiento de determinación del precio del seguro es incongruente con la valoración realizada en los mercados financieros, en los que, la cuantificación de los activos derivados se obtiene, evitando las oportunidades de arbitraje, mediante la réplica de carteras formadas por activos simples cuyos resultados son iguales, en todo momento del periodo de negociación, al del activo derivado objeto de valoración.

Diversos autores han desarrollado modelos de determinación del precio de estos derivados sobre seguros utilizando combinaciones de las herramientas financiero-actuariales tradicionales descritas. Así por ejemplo, Loubergé, Kellezi y Gilli (1999) aplican el modelo de valoración de opciones sobre catástrofes basado en un proceso de Wiener, desarrollado por Cummins y Geman en 1992, para calcular el precio de un CAT Bond cuyo desencadenante es un índice de pérdidas de la industria aseguradora. Lee y Yu (2002) incorporan en la valoración del bono el riesgo de crédito a través de un movimiento geométrico Browniano además de considerar cuestiones prácticas relacionadas con el azar moral y el riesgo de base. Cox y Pedersen (2000) proponen un método de cálculo del precio del CAT Bond en mercados incompletos a partir de la definición de una determinada estructura temporal de los tipos de interés y de una estructura de probabilidades de ocurrencia del riesgo catastrófico. Finalmente, Lane (2000) realiza un análisis empírico de una serie de transacciones de CAT Bonds negociadas durante el año 1999, y propone, a partir de una regresión lineal, un modelo que permite fijar el precio de dichas emisiones a partir de una función similar a la función de producción de Coob-Douglas.

Esta revisión de la literatura financiero-actuarial pone de manifiesto que ninguno de los modelos desarrollados hasta el momento, incorpora la existencia de factores de riesgos dependientes, como los que se producen en los sucesos de carácter extraordinario o catastrófico, lo que puede dar lugar a resultados erróneos en el cálculo de la prima del seguro (reaseguro) si no consideran adecuadamente las estructuras de dependencia que se establecen entre los mismos. En este sentido, la Teoría de Cópulas profundiza en el estudio de las relaciones que se producen entre el conjunto de variables aleatorias dependientes que intervienen en un determinado fenómeno de la naturaleza. La aplicación de esta teoría al sector asegurador se fundamenta, precisamente, en la ocurrencia de sucesos relacionados o cúmulos, como una catástrofe, que pueden afectar a varios ramos de negocio al mismo tiempo. En este caso, suponer independencia para calcular la prima del seguro (reaseguro) puede provocar desviaciones de precios significativas que hagan peligrar la solvencia de la compañía aseguradora que lo contrata. La aplicación de la teoría de cópulas al sector asegurador permitirá seleccionar la mejor función de distribución que caracterice al riesgo extraordinario analizado y a partir de ella, las distribuciones marginales óptimas para cada uno de los riesgos relacionados con el mismo.

El objetivo de este artículo es, por tanto, utilizar la teoría de cópulas para desarrollar una aplicación empírica que determine la prima de reaseguro asociada a la emisión de bonos catastróficos. Para llevar a cabo los cálculos se ha desarrollado un conjunto de funciones para Matlab denominado ICT (Insurance/Copula Toolbox) (Rivas, Cuesta, 2006). La utilidad principal de ICT radica en dos aspectos: por un lado permite realizar un estudio sobre diversas funciones marginales y copulas con el fin de elegir aquellas que mejor caracterizan un par de vectores de datos correlacionados, y además puede calcular la prima de diversos productos a partir de la generación de escenarios más realistas ya que permite la posibilidad de utilizar cópulas. Para ello el toolbox consta de una batería de funciones que implementan los productos y otra que implementa las funciones de distribución. Finalmente existen tres funciones interfaz que se conectan a cada uno de los productos, de las marginales y de las copulas y devuelven aquel elemento requerido. De este modo el toolbox se puede actualizar simplemente añadiendo más productos o funciones de distribución en

forma de funciones de MatLab independientes. Para este artículo en particular se ha añadido el producto CAT Bond.

La organización del artículo es la siguiente: en el epígrafe 2 se describen los productos alternativos de cobertura de riesgo catastrófico analizados en el presente trabajo. El tercer epígrafe recoge los conceptos teóricos relacionados con las cópulas, fundamentales para su aplicación al sector asegurador. La sección 4 desarrolla un método para seleccionar la copula óptima y las distribuciones marginales asociadas a unos datos siniestrales relacionados con factores de riesgos dependientes. La generación por MonteCarlo de los datos siniestrales así como el método general para calcular la prima de cualquier producto de seguro tradicional o alternativo se desarrollan en el epígrafe 5. En la sección 6 se presenta un ejemplo de aplicación de la teoría de cópulas en el proceso de fijación de la prima de emisión (o prima total de reaseguro) de un bono catastrófico y se analiza el efecto que produce la aplicación de la citada teoría sobre la misma. Finalmente se exponen las conclusiones del citado proceso.

2. Descripción general de una transacción con Bonos sobre Catástrofes

Los bonos catastróficos, CAT Bonds, son instrumentos financieros que proporcionan a la industria aseguradora acceso a una nueva fuente de cobertura del riesgo a través de los mercados de capital. Su estructura es similar a la de los bonos tradicionales aunque, a diferencia de estos últimos, los CAT Bonds condicionan el pago de intereses y el reembolso del principal a la ocurrencia de una catástrofe, o suceso desencadenante, cuyos parámetros quedan fijados en el momento de la emisión (Pérez-Fructuoso, 2005). En compensación por esta incertidumbre que se produce en los flujos de caja, los inversores en bonos catastróficos reciben unas rentabilidades muy superiores a las ofrecidas por otro tipo de bonos con un rating de crédito comparable, además de reducir el riesgo de sus carteras a través de la diversificación; el rendimiento de un CAT Bond no depende de las condiciones de los mercados de capital sino de la ocurrencia de una catástrofe cuyas características se ajusten a unos valores establecidos en la emisión. Esto supone que el riesgo de

pérdida en los bonos catastróficos no está correlacionado con el riesgo de pérdida en otros bonos y activos financieros tradicionales, convirtiéndolos en títulos “beta cero”.

La estructura típica de una transacción con bonos catastróficos puede resumirse en el gráfico 1:

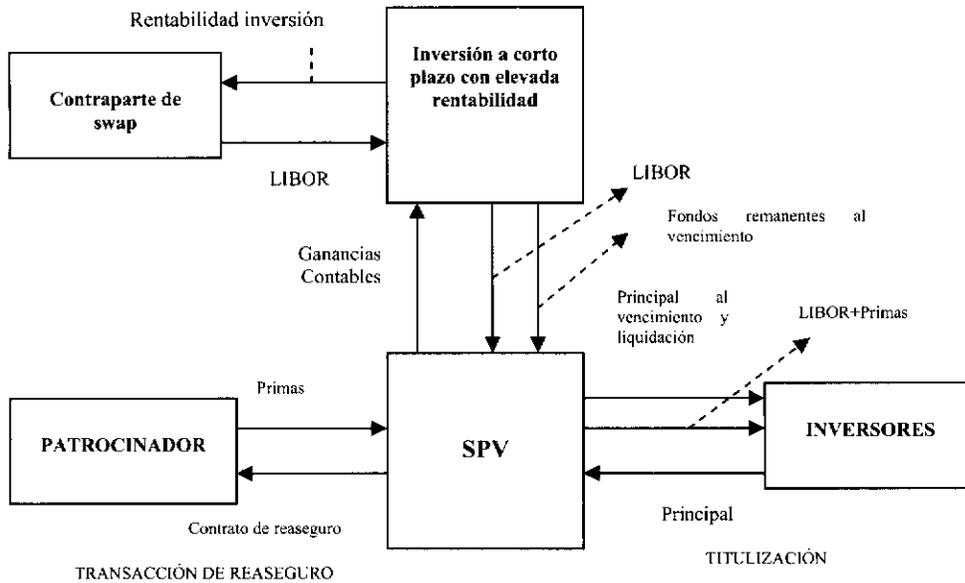


GRÁFICO 1: Estructura típica de una transacción con CAT-Bonds (Fuente: McGhee et al. 2006)

Los CAT Bonds son, en su mayor parte, patrocinados por compañías de seguros y reaseguradoras que buscan protección adicional para la cobertura de riesgos extraordinarios. En estas transacciones, el asegurador cedente transfiere a un *Special Purpose Vehicle* (SPV), una parte, o la totalidad, de su riesgo de suscripción a cambio del pago de una prima. El SPV es una reaseguradora especializada y situada en un paraíso fiscal, cuyo único objetivo es mantener un conjunto de activos procedentes de una emisión o de una operación financiera fuera de balance y cuyas funciones básicas son emitir una póliza de reaseguro convencional para el asegurado (patrocinador) y buscar financiación en el mercado de capital, que actúa como contrapartida

de su primera función. Los flujos obtenidos con la emisión del bono y la prima pagada por la cedente en concepto de precio del reaseguro, son invertidos por el SPV en activos a corto plazo con elevada rentabilidad, de forma que se generen los recursos financieros necesarios para llevar a cabo el pago de los cupones establecido en la emisión y la cobertura del riesgo contratada, en caso de ocurrencia del siniestro.

Entonces, si a lo largo de un determinado periodo, denominado periodo de riesgo, no se produce la catástrofe cubierta por el bono, los inversores reciben el pago de los cupones de forma periódica y la devolución del principal al vencimiento. En caso contrario, los inversores están sujetos a la pérdida de la totalidad, o de una parte de los cupones, y/o del principal dependiendo de cómo se haya estructurado el bono catastrófico emitido.

A este respecto hay que destacar que la mayor parte de transacciones con bonos sobre catástrofes realizadas hasta la fecha han sido del tipo *Principal-Fully-Secured Bonds*, es decir, bonos en los cuales sólo los cupones (una parte o la totalidad) han estado sujetos a pérdidas después de la ocurrencia de la catástrofe cubierta. Pero existen emisiones del tipo *All-Risk Bonds*, es decir bonos con cupones y principal arriesgados, o bonos con el principal parcialmente protegido, *Principal-Partially-Secured Bonds*.

Otros participantes en una operación con CAT-Bonds son empresas, como AIR (*Applied Insurance Research, Inc.*), EQECAT o RMS (*Risk Management Solutions*), dedicadas a la creación de modelos estadísticos de medición de pérdidas, firmas de abogados que dan forma legal a la emisión y agencias de rating que valoran el riesgo de crédito de la misma.

3. Nociones fundamentales de Teoría de Cópulas aplicables al sector asegurador

En este apartado se presentan las bases teóricas necesarias para comprender el funcionamiento de la distribución cópula bivalente,

con el objetivo de analizar la función de distribución conjunta asociada a un determinado fenómeno de la naturaleza, que afecta a un par de variables aleatorias cuya distribución individual es distinta de la distribución conjunta asociada al citado fenómeno (para una información más detallada ver, por ejemplo, Embrechts, 2003 y Levi, 2001).

Definición 1: Una cópula, C , es una función de distribución multivariante cuyas leyes marginales se distribuyen uniformemente entre $[0,1]$. En el caso bivalente, $C(u,v) = p[U \leq u, V \leq v]$ es una función definida en $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ que verifica las siguientes tres propiedades:

- $C(u,v)$ es una función creciente para cada una de sus componentes.
- $C(u,1) = u$ y $C(1,v) = v$.
- $\forall a_1 \leq a_2$ y $\forall b_1 \leq b_2$, $C(a_1, b_1) + C(a_2, b_2) - C(a_1, b_2) - C(a_2, b_1) \geq 0$.

Teorema 1 (Teorema de Sklar): Sea una función de distribución bidimensional cuyas marginales son F_X y F_Y . Entonces, existe una cópula $C / \forall (x, y) \in [-\infty, \infty]^2$, tal que:

$$F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$$

Si las distribuciones marginales son continuas, la cópula es única. Por tanto, a partir de las cópulas, es posible crear distribuciones bivalentes con distribuciones marginales definidas. De esta forma, si C es una cópula y F_X y F_Y son dos distribuciones marginales, $C(F_X(x), F_Y(y))$ es una distribución bivalente.

De la definición del *Teorema de Sklar*, se deduce que las funciones de distribución marginales univariantes pueden tener una estructura separada de la estructura de la cópula.

La aplicabilidad de este Teorema al mercado asegurador, y concretamente a los productos de transferencia alternativa de riesgos analizados en el artículo, se fundamenta en la premisa de que la estructura del fenómeno de la naturaleza cuya ocurrencia afecta a varios ramos de seguros a la vez es independiente de la función de distribución seguida por cada ramo individualmente.

Definición 2 (Función de distribución inversa): Si F es una función de distribución, entonces su función inversa generalizada, es toda función $F^{(-1)}$ definida en $[0,1]$ tal que:

- Si $t \in \text{Im}(F)$ y $x \in [-\infty, \infty]$, entonces $F^{(-1)}(t) = x$ y $F(x) = t$. Por tanto, $\forall t \in \text{Im}(F)$, $F(F^{(-1)}(t)) = t$.

- Si $t \notin \text{Im}(F)$ entonces $F^{(-1)}(t) = \inf\{x / F(x) \geq t\} = \sup\{x / F(x) \leq t\}$.

- Si F es estrictamente creciente tiene una única función inversa generalizada $F^{(-1)}$.

Corolario 1 (Corolario del Teorema de Sklar): Se definen F , C , F_X y F_Y como en los enunciados anteriores, y F_X^{-1} y F_Y^{-1} como las respectivas funciones inversas generalizadas de F_X y F_Y . Entonces, $\forall (u, v) \in [0, 1]^2$,

$$C(u, v) = F(F_X^{-1}(x), F_Y^{-1}(y))$$

Definición 3 (Densidad de una cópula): Sabemos que, si existe, la densidad f de una función de distribución, F , se define como:

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

La expresión de la densidad de una cópula, simbolizada por c , es:

$$c(u, v) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u \partial v}$$

A partir de $c(u, v)$, la densidad f de la función de distribución F puede obtenerse como:

$$f(x, y) = c(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y)$$

Definición 4 (Distribución condicionada de una cópula): Sea $C_1(u, v)$ la derivada de $C(u, v)$ respecto de u ,

$$\frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = C_1(u, v)$$

Si la distribución conjunta de X e Y es $F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$ entonces la distribución condicionada $Y / X = x$ es:

$$F_{Y/X=x}(y) = C_1(F_X(x), F_Y(y))$$

Definición 5 (Survival copula o cópula de supervivencia): Sea $S(x) = p(X > x)$. La función de supervivencia conjunta $S(x, y) = p(X > x, Y > y)$ no es $1 - F(x, y)$ como podría pensarse, si no:

$$S(x, y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y)$$

Análogamente, para una cópula sabemos que $C(u, v) = p[U \leq u, V \leq v]$. Por tanto, la función de supervivencia de una cópula será:

$$C_s(u, v) = p[U > u, V > v] = 1 - u - v + C(u, v)$$

Entonces como $F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$, obtenemos que $S(x, y) = C_s(F_X(x), F_Y(y))$.

Definición 6: Sean (x, y) y (x', y') dos observaciones de un vector

aleatorio continuo (X, Y) . Entonces (x, y) y (x', y') son concordantes si $(x - x')(y - y') > 0$ y discordantes en caso contrario.

Definición 7 (Coeficiente de correlación no lineal de Kendall): Una de las principales ventajas de las cópulas, es que permiten analizar coeficientes de correlación no lineales. En el presente artículo se ha utilizado como coeficiente de correlación no lineal, el denominado coeficiente de correlación de Kendall, que muestra una relación directa con el parámetro α que aparece en la función de distribución multivariable cópula.

Sea (X, Y) un par de variables aleatorias. La medida de concordancia τ de Kendall se define como la diferencia entre las probabilidades de concordancia y discordancia de dos observaciones distintas, (x, y) y (x', y') , de ese par aleatorio:

$$\tau(X, Y) = p[(x - x')(y - y') > 0] - p[(x - x')(y - y') < 0]$$

con las siguientes propiedades:

- $-1 \leq \tau \leq 1$
- Si X e Y son concordantes entonces, $\tau = 1$.
- Si X e Y no son concordantes entonces, $\tau = -1$.
- Si X e Y son independientes entonces, $\tau = 0$. La implicación inversa no tiene porque ser cierta, es decir, si $\tau = 0$, las variables X e Y no son necesariamente independientes.
- Si α y β son dos funciones estrictamente crecientes, entonces $\tau[\alpha(X), \beta(Y)] = \tau(X, Y)$. El coeficiente de correlación de Kendall permanece invariante ante una transformación estrictamente creciente de las variables aleatorias ya que sólo depende del rango de cada observación.
- τ no depende de la cópula de (X, Y) .

Teorema 2 (Definición de cópula Arquimediana): Consideramos que φ es una función continua, estrictamente decreciente de $[0,1]$ sobre $[0, \infty]$ tal que $\varphi(1) = 0$, y $\varphi^{[-1]}$ es la función pseudo-inversa de φ .

Sea C la función definida de $[0,1]^2$ sobre $[0,1]$ tal que $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$. Esta función es copula si y sólo si φ es convexa.

Este tipo de copula se llama Arquimediana y la función φ se conoce como el generador de copula.

Siguiendo este procedimiento se han creado muchos tipos de cópulas que forman parte de la familia de cópulas Arquimedianas cuyas propiedades resultan muy interesantes en su aplicabilidad al sector asegurador.

A continuación se presentan las cópulas Arquimedianas utilizadas en el presente estudio:

Cópula de Frank: La función de distribución para la cópula de Frank es:

$$C_a(u, v) = -\frac{1}{a} \ln \left(1 + \frac{(e^{-au} - 1)(e^{-av} - 1)}{e^{-a} - 1} \right)$$

Si hacemos $g_z = e^{-az} - 1$, la derivada de la cópula respecto de la componente u resulta:

$$C_1 = \frac{\partial C_a(u, v)}{\partial u} = \frac{g_u g_v + g_v}{g_u g_v + g_1}$$

y la función de densidad:

$$c(u, v) = -ag_1 \left(\frac{1 + g_{u+v}}{(g_u g_v + g_1)^2} \right)$$

El coeficiente de correlación de *Kendall*, en función de su parámetro a , se define como:

$$\tau(a) = 1 - \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} \int_0^a \frac{t}{e^t - 1} dt$$

Cópula de Gumbel: La función de distribución para la cópula de *Gumbel* es:

$$C_a(u, v) = \exp \left\{ \left[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a \right]^{\frac{1}{a}} \right\}$$

La función derivada de la cópula respecto de la componente u es:

$$C_1 = \frac{\partial C_a(u, v)}{\partial u} = C(u, v) \left[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a \right]^{-1 + \frac{1}{a}} \frac{(-\ln u)^{a-1}}{u}$$

y la densidad,

$$c(u, v) = C(u, v) u^{-1} v^{-1} \left[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a \right]^{-2 + \frac{2}{a}} \left[\ln u \ln v \right]^{a-1} \left[1 + (a+1) \left[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a \right]^{\frac{1}{a}} \right]$$

El coeficiente de correlación de *Kendall*, en función de su parámetro a , se define como:

$$\tau(a) = 1 - \frac{1}{a}$$

Cópula de Clayton: La función de distribución para la cópula de *Clayton* es:

$$C_a(u, v) = \left(u^{-\frac{1}{a}} + v^{-\frac{1}{a}} - 1 \right)^a$$

La función derivada de la cópula respecto de la componente u es:

$$C_1 = \frac{\partial C_a(u, v)}{\partial u} = u^{-1-\frac{1}{a}} \left[u^{-\frac{1}{a}} + v^{-\frac{1}{a}} - 1 \right]^{a-1}$$

y la densidad,

$$c(u, v) = \left(1 + \frac{1}{a}\right) (uv)^{-1-\frac{1}{a}} \left(u^{-\frac{1}{a}} + v^{-\frac{1}{a}} - 1 \right)^{a-2}$$

El coeficiente de correlación de *Kendall*, en función de su parámetro a , se define como:

$$\tau(a) = \frac{1}{2a+1}$$

Cópula *HRT*: Esta cópula no pertenece a la familia de cópulas Arquimedianas pero puede definirse como la cópula de supervivencia (*survival copula*) de la cópula de *Clayton*.

La expresión de la función de distribución para la cópula *HRT* es:

$$C_a(u, v) = u + v - 1 + \left[(1-u)^{-\frac{1}{a}} + (1-v)^{-\frac{1}{a}} - 1 \right]^a$$

La función derivada de la cópula *HRT* respecto de la componente u , resulta:

$$C_1 = \frac{\partial C_a(u, v)}{\partial u} = 1 - \left[(1-u)^{-\frac{1}{a}} + (1-v)^{-\frac{1}{a}} - 1 \right]^{a-1} (1-u)^{-1-\frac{1}{a}}$$

y la densidad de la cópula es:

$$c(u, v) = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left[(1-u)^{-\frac{1}{a}} + (1-v)^{-\frac{1}{a}} - 1 \right]^{a-2} \left[(1-u)(1-v) \right]^{-1-\frac{1}{a}}$$

El coeficiente de correlación de *Kendall*, en función de su parámetro a , es el mismo que para la cópula de *Clayton*.

4. Elección de la cópula bivalente óptima y de las distribuciones marginales aplicables al sector asegurador

En los últimos años, el método más utilizado para considerar las relaciones de dependencia existentes entre los diferentes tipos de riesgo a la hora de calcular el precio de un determinado seguro, ha sido la aplicación de la teoría de cópulas. Una cópula describe la estructura de dependencia de una variable aleatoria multivariante (bivalente en nuestro caso), además de permitir la transformación de las variables aleatorias, a través de su distribución acumulada, en variables uniformemente distribuidas. Las cópulas resultan, por tanto, un magnífico instrumento para simular variables aleatorias con distribuciones marginales dadas, a partir de la simulación de variables uniformes con estructuras de correlaciones determinadas. De esta forma, la relación de dependencia entre las variables analizadas, la determinarán las relaciones que se establezcan entre las distribuciones uniformes simuladas.

El proceso de selección de la cópula y distribuciones marginales que mejor se ajustan a la realidad actuarial que queremos representar, se inicia con la obtención de una serie de datos de cuantías siniestralas. Estas cuantías pueden ser reales o simuladas (por ejemplo, a través del método de Monte Carlo) en función del nivel de información disponible para el decisor.

Para la realización del presente artículo, dichas series de datos $X = \{x_i\}$ e $Y = \{y_i\}$, con $i=1,2,\dots,n$, se ha obtenido por simulación mediante el método de Monte Carlo y se corresponden con los datos históricos de cuantías siniestralas para dos ramos de seguros X e Y (se ha de tener en cuenta que, en la realidad empresarial, la generación de estos datos no sería necesaria ya que las empresas disponen de datos históricos reales para el proceso de fijación de la prima).

A partir de la generación de estos datos, los pasos a seguir para llevar a cabo el proceso de selección considerado se enumeran a continuación (Rivas, Cuesta., 2005):

1. En primer lugar se transforman los datos siniestrales X e Y en datos uniformemente distribuidos entre $[0,1]$, U y V , siendo $U = \{u_i\}$ y $V = \{v_i\}$, con $i=1,2,\dots,n$, mediante la aplicación de la función empírica dada por:

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x_i \leq x\}} = \frac{\text{card}\{x_i \leq x\}}{n+1}$$

2. Seguidamente se estima el parámetro "a" de la cópula aplicando el método de máxima verosimilitud:

$$\hat{a} = \arg \max \sum_{i=1}^n \ln c(u_i, v_i; a)$$

donde c es la función de densidad de la cópula y \hat{a} es el parámetro de la cópula estimado.

3. Se selecciona el conjunto de funciones de distribución marginales que se quieren evaluar y se estiman los parámetros de cada una de ellas por máxima verosimilitud.

4. La elección de la distribución marginal que mejor se ajusta a cada serie de datos utilizada, se realiza aplicando algunos de los criterios de selección de modelos tales como el criterio Akaike Information (AIC) o el criterio Hannan-Quinn Information (HQ).

5. A partir de la cópula y de las distribuciones marginales seleccionadas previamente, se construye la nueva función de distribución y se estiman de nuevo sus parámetros utilizando el método de máxima verosimilitud.

6. Finalmente se verifica la calidad del ajuste mediante la aplicación de un test de bondad como el de la χ^2 .

La aplicación al sector asegurador de este proceso de selección de la cópula óptima permite extraer las siguientes conclusiones (ver Joe, 2001 y Levi, 2001):

- En el sector asegurador es más útil analizar la dependencia entre los grandes siniestros que entre los pequeños. Tal asimetría se valora de forma mucho más precisa a través de la familia de cópulas Arquimedianas.
- Dentro de esta familia, la cópula de *Frank* no es aplicable a priori al sector asegurador, debido a que, como se observa en los gráficos asociados, la distribución de los datos es simétrica entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$, y por tanto considera la misma estructura de dependencia entre los siniestros de baja cuantía que entre los grandes siniestros.
- La cópula de *Clayton*, presenta una importante concentración de puntos entorno al $(0,0)$ lo que significa que tiende a correlacionar los pequeños siniestros y no los grandes siniestros. Esta cópula es una de las que puede utilizarse en el estudio de las cuantías siniestrosales, pero será o no apropiada en función del tipo de siniestros que se estén considerando. No servirá, por tanto, para modelar cuantías asociadas a la ocurrencia de grandes siniestros.
- La cópula *HRT* y la *Gumbel*, pueden admitirse en el estudio de las distribuciones de las reclamaciones de siniestros catastróficos, ya que los puntos en la representación gráfica muestran una asimetría adecuada de los datos siniestrosales, tanto en los grandes siniestros como en los pequeños. Para la cópula *HRT*, la concentración de puntos cerca de $(1,1)$ es la más importante de todas las cópulas analizadas en esta sección. Con esta estructura de dependencia, los grandes siniestros presentarán una tendencia a ocurrir al mismo tiempo.

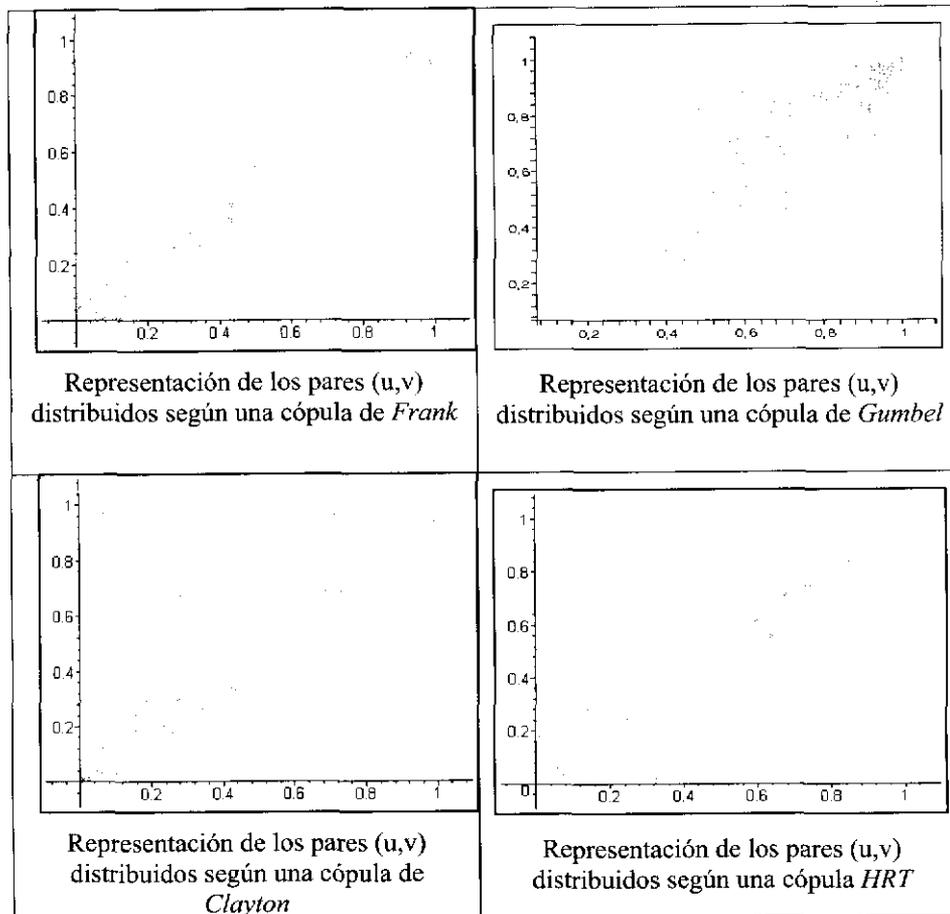


Gráfico 2: Representación de las cópulas Arquimedianas y HRT

Estas conclusiones deben reforzarse con un análisis empírico, desarrollado en la sección 6 a continuación, pero seleccionar la cópula óptima permite acercarnos a la determinación futura del precio del seguro, cuando los riesgos analizados son dependientes y están asociados a un mismo evento o fenómeno de naturaleza. En cualquier caso, se ha de tener en cuenta que la elección de la cópula óptima dependerá de las relaciones de dependencia que muestren los datos muestrales analizados.

En cuanto a las distribuciones marginales que mejor se adaptan a las cuantías siniestrales analizadas, en este trabajo no se realiza una

selección de las mismas sino que se trabaja con una serie de distribuciones típicamente de cola larga, y por tanto tradicionalmente utilizadas en la modelación de grandes cuantías siniestras. Dichas distribuciones se combinan con las cópulas Arquimedianas seleccionadas y se estudian todas las combinaciones de cópulas y marginales que dan lugar a los mejores resultados de prima de reaseguro del CAT-Bond analizado.

5. Proceso de simulación de las cuantías siniestras y método general de cálculo de la prima de cualquier producto de seguro (reaseguro)

En los últimos años, la teoría de cópulas se ha utilizado para fijar la prima de los productos de seguro y reaseguro tradicionales (Levi, 2001). En este artículo su aplicación se extiende a los bonos sobre catástrofes o CAT Bonds pertenecientes a los denominados productos de Transferencia Alternativa de Riesgos (o productos ART) aunque podría extenderse a cualquier otro producto de esta familia como se pone de manifiesto en Blum et al. 2002.

Por esta razón, a continuación se presenta el método general de cálculo de la prima de un producto ART para dos ramos de seguros, a partir de las cópulas y distribuciones marginales seleccionadas siguiendo el proceso descrito en el epígrafe 3:

1. Se generan dos series de datos uniformemente distribuidos $U = \{u_i\}$ y $P = \{p_i\}$.
2. Se obtiene la serie de datos $V = \{v_i\}$ a partir de U y P y de la cópula seleccionada (Levi, 2001).

La generación de los pares (u, v) de U y V se obtiene fácilmente teniendo en cuenta la distribución condicionada de la cópula y siguiendo los pasos que se detallan a continuación:

- Se genera el vector aleatorio uniformemente distribuido u .

- A continuación, se calcula la función pseudo-inversa de $c_u(u)$ que dependerá de los parámetros de la cópula y del vector aleatorio u .
- Finalmente, se calcula el segundo vector aleatorio, v , como:

$$v = c_u^{-1}(p)$$

donde c_u es la derivada parcial de la cópula respecto de u .

3. Se obtienen las cuantías siniestras $X = \{x_i\}$ e $Y = \{y_i\}$ a partir de los datos uniformemente distribuidos $U = \{u_i\}$ y $V = \{v_i\}$ y de las funciones de distribución marginales y la cópula seleccionada (Levi, 2001).

4. Se selecciona el producto ART adecuado a las necesidades de la compañía

5. Se calcula la prima del producto ART seleccionado en función de las cuantías siniestras $X = \{x_i\}$ e $Y = \{y_i\}$ así como de las condiciones particulares del contrato analizado: retención, excedente, límite agregado, etc.

Para llevar a cabo la simulación de las cuantías siniestras y su posterior evaluación, el proceso a seguir es el siguiente:

- El objetivo de esta simulación es generar una pareja de variables aleatorias (x_i, y_i) teniendo en cuenta las leyes marginales elegidas, y cuya estructura de dependencia viene dada por el tipo de cópula seleccionada. En el presente trabajo las cópulas consideradas para su aplicación han sido las cópulas Arquimedianas (*Gumbel*, *Frank* y *Clayton*) y la cópula *HRT*. Esta última se ha incluido en el modelo por dos razones fundamentales: en primer lugar porque se observa que la concentración de puntos en su representación gráfica teórica, es de aplicación adecuada para el sector asegurador, en especial para riesgos catastróficos y en segundo lugar por ser la *survival copula* de la Cópula *Clayton*. En cuanto a las distribuciones marginales, se han utilizado para el

análisis las distribuciones Exponencial, Log-Normal, Pareto, Logística y Para-Logística.

- Para obtener la pareja de variables aleatorias (x_i, y_i) en primer lugar se simulan dos variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas entre $[0,1]$. Las realizaciones de estas variables se simbolizan como u_i y v_i .
- A continuación, a partir de los valores anteriormente simulados, se determina el valor de la variable v_i .
- Y finalmente, con los valores de (u_i, v_i) se obtienen las realizaciones del vector aleatorio (x_i, y_i) como sigue:

$$x_i = F_{x_i}^{(-1)}(u_i)$$
$$y_i = F_{y_i}^{(-1)}(v_i)$$

Las cuantías siniestras futuras (x_i, y_i) de los ramos de seguros X e Y , se han obtenido aplicando el Corolario del Teorema de Sklar que permite, utilizando la función inversa, calcular los valores (u, v) distribuidos uniformemente entre $[0,1]$ y finalmente, a partir de (u, v) generar las cuantías siniestras para ser introducidas en el proceso de fijación de prima del producto asegurador considerado.

6. Cálculo del precio de reaseguro (prima de emisión) de un Bono sobre Catástrofes aplicando la Teoría de Cópulas

Para calcular la prima de reaseguro o precio de emisión de un bono sobre catástrofes es necesaria la unión entre el mundo actuarial y la valoración de los activos financieros en el mercado de capitales. Como pone de manifiesto la literatura científica sobre el tema (Froot, *et al.* 2000 y Pérez-Fructuoso, 2005), las pérdidas asociadas a este tipo de bonos no están correlacionadas con los cambios que se producen en

la economía o en los mercados financieros y por tanto son beta cero ($\beta = 0$) respecto a las pérdidas que se producen en una cartera de inversión formada por productos financieros tradicionales. Derivado de ello, y a partir de la teoría del CAPM, este tipo de derivados no deberían incluir en la determinación de su precio ninguna prima de riesgo.

Es evidente que este enfoque no sirve para explicar aquellos casos en los que debe incluirse una prima de riesgo por las características especiales del producto analizado. En concreto, para Embrechts (2003 y 2005) la correlación lineal asociada al coeficiente β , no es suficiente para explicar la correlación de los valores extremos, como los que se producen en sucesos de naturaleza catastrófica, asociados a la función de distribución de los siniestros. Los productos de transferencia alternativa de riesgos, dentro de los que se incluyen los CAT Bonds, se diseñan para cubrir sucesos raros o extremos de la distribución conjunta de los factores de riesgo. En este sentido, la aplicación de la teoría de cópulas resulta evidente en los bonos sobre catástrofes ya que son productos que cubren múltiples líneas de seguros.

Expuestas estas consideraciones, aplicamos la teoría de cópulas a un modelo sencillo de determinación de la prima de reaseguro de un CAT Bond, considerando el hecho de que las características específicas del contrato real exigirán realizar las inclusiones en el modelo que en cada caso sean oportunas, con el objetivo de satisfacer las necesidades de la cedente. Esto implica que en la práctica aseguradora, el analista puede encontrarse con coberturas que requieran una implementación más compleja del modelo aquí presentado.

6.1. Modelo y algoritmo de simulación para un Bono sobre Catástrofes

Uno de los enfoques más recientes para llevar a cabo la tarificación de productos de transferencia alternativa de riesgos en el denominado método de inversión equivalente (Kreps et al., 2002).

El modelo de inversión equivalente se apoya en el hecho de que el mercado asegurador (reasegurador) es muy tradicional, por lo que cualquier compañía que opere en dicho mercado preferirá contratar una póliza de reaseguro, que le permita garantizar la cobertura de su exceso de siniestralidad y por tanto su solvencia y estabilidad a corto plazo, antes de asignar los mismos fondos a un instrumento de cobertura alternativo. Por esta razón, el método de inversión equivalente tiene como objetivo considerar la posibilidad de suscribir un contrato de reaseguro utilizando el mismo razonamiento que en el caso de una inversión arriesgada en activos de los mercados financieros.

Para llevar a cabo el desarrollo de dicho enfoque se han de tener en cuenta los criterios de inversión, la distribución de pérdidas y la aversión al riesgo del reasegurador. Como el reasegurador prefiere suscribir un contrato de reaseguro antes que asignar los mismos fondos a una inversión tradicional, las alternativas financieras disponibles en los mercados de capital deberán tener una rentabilidad esperada y una volatilidad equivalentes a las de un contrato de reaseguro para que el reasegurador acepte participar en la cobertura a través de ellas. Además, y como precaución, el reasegurador mantendrá fondos suficientes para garantizar los pagos contratados en el acuerdo de reaseguro con un determinado nivel de probabilidad para evitar una situación de ruina de la compañía.

A partir de estas consideraciones, la prima total de reaseguro pagada por la cedente, P , expresa el valor actual de los pagos por pérdidas esperados más una carga de riesgo adicional,

$$P = R + \frac{EL}{(1+f)}$$

Esta fórmula refleja las ganancias del reasegurador en el momento inicial del contrato, donde EL es la pérdida esperada, f el tipo de interés libre de riesgo y R la carga de riesgo.

A cambio, el reasegurador constituye un fondo de seguridad con el dinero recibido de la cedente más un excedente establecido por él, y lo invierte completamente en activos libres de riesgo. Este fondo se

representa como $F = P + A$, siendo A el excedente invertido y F la cuantía total destinada al fondo.

Es evidente que, en términos netos, en el momento cero el reasegurador experimenta una salida de excedente de igual a A .

A partir de esta definición del modelo, los pasos realizados para llevar a cabo la simulación del precio de emisión (prima de reaseguro) del bono sobre catástrofes han sido los siguientes:

- Se considera que la duración del bono catastrófico emitido es anual y durante ese periodo de riesgo se ha de producir la catástrofe cubierta con la transacción (Rivas et al., 2005).
- La emisión del bono se realiza para cubrir las pérdidas por catástrofes que se producen en dos ramos de seguros. Las cuantías de dichas pérdidas en los dos ramos considerados X e Y , se simulan a través del método de MonteCarlo, teniendo en cuenta las funciones de distribución marginales y cópula elegidas como se ha indicado en el proceso general descrito.
- La operación se realiza sobre la base de un reaseguro cuota parte 30/70 de forma que el bono se utiliza para cubrir la cuota del 70% de la suscripción total que va a cargo del reasegurador. El 30% restante lo asume la aseguradora, sin necesidad de contratar cobertura adicional.
- Las pérdidas totales se obtienen sumando las cuantías siniestras X e Y asociadas a ambas líneas de negocios.
- A partir estas pérdidas totales, las pérdidas esperadas, EL , se calculan como:

$$EL = \frac{L}{\text{Número Simulaciones}}$$

- Como variables predeterminadas (variables de entrada en el programa) se consideran R la carga de riesgo, definida como un

porcentaje de la pérdida esperada, f la rentabilidad del activo libre de riesgo, A un excedente establecido por el reaseguro y LR el límite de reaseguro constante. Los valores asignados a estas variables predeterminadas son los siguientes:

- $R = 3\%$
- $f = 10\%$
- $A = 200.000.000\text{€}$
- $LR = 1.000.000.000\text{€}$

- Con estos datos, la prima total de reaseguro y por tanto el precio de emisión del bono, P , se obtiene como $P = R + \frac{EL}{(1+f)}$
- Finalmente, se determina el fondo de reaseguro, F , sumando la prima de emisión y el excedente de reaseguro, $F = P + A$. Este fondo se utiliza para obtener el valor neto de reaseguro cuya expresión es $NR = F(1+f) - L$.

6.2. Resultados

En el cuadro resumen a continuación se muestran los valores de la prima obtenidos para las distintas combinaciones de cópulas Arquimedianas y distribuciones marginales analizadas:

CUADRO 1: Resumen Primas de Emisión de un CAT-Bond						
X	Y	Prima Gumbel	Prima HRT	Prima Frank	Prima Clayton	Prima Sin Cópulas
Para-Logística	Para-Logística	175.626,52	3.578.500,62	304.936,35	10.013.153,52	2.921.708,55
Logística	Para-Logística	10.900.069,61	4.746.224,99	165.538,73	6.895.975,38	2.063.791,74
Pareto	Para-Logística	10.227.956,01	5.663.570,46	238.887,79	7.357.221,63	9.123.784.483.185.020
Log-Normal	Para-Logística	219.487.490,72	22.703.986,97	13.248.960,57	129.958.130,64	2.016.052,97
Exponencial	Para-Logística	93.639.573,66	19.433.857,85	14.495.581,66	21.386.598,31	3.323.449,18
Para-Logística	Logística	10.438.815,99	9.598.823,05	205.575,56	7.879.085,47	2.063.791,74
Logística	Logística	196.511,23	1.719.368,68	138.760,80	4.539.224,81	1.205.874,92
Pareto	Logística	4.885.798,31	3.238.645,43	239.248,50	6.485.663,33	9.123.784.482.327.120
Log-Normal	Logística	123.709.632,16	9.392.930,38	13.341.574,03	29.499.632,24	1.158.136,16
Exponencial	Logística	52.625.625,05	6.030.713,79	5.079.605,59	5.506.887,85	2.465.532,37
Para-Logística	Pareto	11.734.807,62	4.701.929,01	211.998,52	9.291.116,75	9.123.784.483.185.020
Logística	Pareto	4.690.966,94	2.754.088,16	228.184,32	5.505.246,54	9.123.784.482.327.120
Pareto	Pareto	221.796,32	2.330.342,16	172.281,36	7.685.721,05	18.247.568.963.448.300
Log-Normal	Pareto	97.116.329,39	12.590.001,94	13.226.491,43	121.023.083,32	9.123.784.482.279.380
Exponencial	Pareto	65.445.396,63	5.910.269,54	7.330.167,27	7.060.132,42	9.123.784.483.586.780
Para-Logística	Log-Normal	109.905.076,15	13.013.664,49	13.367.786,86	32.218.545,48	2.016.052,97
Logística	Log-Normal	99.975.241,89	11.556.920,52	13.190.592,04	59.939.903,32	1.158.136,16
Pareto	Log-Normal	126.817.086,30	11.169.487,61	13.267.724,68	78.972.189,38	9.123.784.482.279.380
Log-Normal	Log-Normal	108.739.257,79	10.715.069,93	3.036.259.681,26	9.726.199,40	1.110.397,39
Exponencial	Log-Normal	62.512.757,69	6.269.257,93	6.314.784,17	6.662.989,89	2.417.793,60
Para-Logística	Exponencial	394.399.312,25	4.789.728,08	9.490.139,36	7.363.030,32	3.323.449,18
Logística	Exponencial	54.691.073,79	4.903.779,08	14.890.440,16	6.354.005,58	2.465.532,37
Pareto	Exponencial	72.066.179,39	6.185.189,84	7.393.223,22	7.283.859,46	9.123.784.483.586.780
Log-Normal	Exponencial	65.520.967,47	6.630.881,60	5.982.927,64	6.352.212,47	2.417.793,60
Exponencial	Exponencial	20.417.310,34	2.093.656,02	2.072.420,65	2.111.174,57	3.725.189,81

Observando los resultados derivados de la simulación se desprenden las siguientes conclusiones: la aplicación de la teoría de cópulas para calcular la prima de emisión de un bono sobre catástrofe reduce el precio de dicha emisión respecto al calculado sin considerar las estructuras de dependencia existentes entre los riesgos que intervienen en el CAT Bond en 43 de los 100 casos analizados distribuidos de la siguiente forma: 11 casos de los 25 posibles para la cópula de *Gumbel*, 10 casos de los 25 posibles para la cópula *HRT*, 13 casos de los 25 posibles para la cópula de *Frank* y 9 casos de los 25 posibles para la cópula de *Clayton*. A pesar de que los valores de prima más reducidos se obtienen al considerar las relaciones de dependencia a través de la

cópula de *Frank* combinada con las distribuciones marginales Logística-Para-Logística, Logística-Logística y Pareto-Pareto, estos resultados no son relevantes ya que la cópula de *Frank* no es aplicable a priori al sector asegurador catastrófico, al considerar el mismo grado de dependencia entre los siniestros pequeños y grandes. Esta conclusión se refuerza con los valores obtenidos al calcular el coeficiente de correlación de *Kendall* (ver cuadro 2). Por otra parte, la cópula de *Clayton* tampoco es aplicable a los siniestros catastróficos, objeto de análisis, lo que se refleja en unas primas muy superiores a las obtenidas considerando cualquiera de las otras cópulas analizadas.

Respecto a las primas resultantes de aplicar las cópulas de *Gumbel* y *HRT*, definidas, desde un punto de vista teórico, como las cópulas óptimas para su aplicación a las reclamaciones catastróficas consideradas, los valores más baratos se obtienen al utilizar la cópula de *Gumbel*, en concreto, para las distribuciones marginales, para los ramos X e Y respectivamente, Para-Logística-Para-Logística (175.626,52€), Logística-Logística (196.511,23€), Pareto-Pareto (221.796,32€). La cópula *HRT* rebaja la prima respecto al cálculo sin cópulas en un 40% de los casos analizados pero en menor proporción que en el caso de la cópula de *Gumbel*. Para la cópula *HRT* los menores valores de prima se obtienen con las combinaciones Logística-Logística (1.719.638,68€), Pareto-Pareto (2.330.342,16€), Exponencial-Exponencial (2.093.656,02€).

CUADRO 2: Coeficiente de Correlación de *Kendall*

Marginal X	Marginal Y	Gumbel	HRT	Frank	Clayton
Paralogística	Paralogística	0,46238422	0,85394731	-0,17884021	0,9999999
Logística	Paralogística	0,3116716	0,87595804	-0,17883978	0,9999999
Pareto	Paralogística	0,3116716	0,87595804	-0,17883978	0,9999999
Log-Normal	Paralogística	0,09090909	0,31215935	0,94278583	0,99976187
Exponencial	Paralogística	0,09234981	0,31215935	-0,06849297	0,31215935
Paralogística	Logística	0,3116716	0,87595804	-0,17883978	0,9999999
Logística	Logística	0,51619627	0,85394731	-0,17883987	0,9999999
Pareto	Logística	0,3116716	0,87595804	-0,17883636	0,9999999
Log-Normal	Logística	0,09090909	0,31215935	0,94278583	0,99976187
Exponencial	Logística	0,09234981	0,31215935	-0,06849297	0,31215935
Paralogística	Pareto	0,3116716	0,87595804	-0,17883978	0,9999999
Logística	Pareto	0,3116716	0,87595804	-0,17883636	0,9999999
Pareto	Pareto	0,51619627	0,85394731	-0,17883987	0,9999999

Log-Normal	Pareto	0,09090909	0,31215935	0,94278583	0,99976187
Exponencial	Pareto	0,09234981	0,31215935	-0,06849297	0,31215935
Paralogística	Log-Normal	0,09090909	0,31215935	0,94278583	0,99952305
Logística	Log-Normal	0,09090909	0,31215935	0,94278583	0,99952305
Pareto	Log-Normal	0,09090909	0,31215935	0,94278583	0,99952305
Log-Normal	Log-Normal	0,09234981	0,31215935	0,65846467	1
Exponencial	Log-Normal	0,09234981	0,31215935	-0,06849297	0,31215935
Paralogística	Exponencial	0,09234981	0,31215935	-0,06849297	0,31215935
Logística	Exponencial	0,09234981	0,31215935	-0,06849297	0,31215935
Pareto	Exponencial	0,09234981	0,31215935	-0,06849297	0,31215935
Log-Normal	Exponencial	0,09234981	0,31215935	-0,06849297	0,31215935
Exponencial	Exponencial	0,09234981	0,31215935	-0,06849297	0,31215935

Analizando el coeficiente de correlación de *Kendall* asociado a las combinaciones de cópulas y marginales que dan el menor valor para el precio del CAT Bond, resulta que para la cópula de *Gumbel*, los coeficientes asociados a los pares de distribuciones seleccionados, Para-Logística-Para-Logística (0,46238422), Logística-Logística (0,51619627), Pareto-Pareto (0,51619627), son los más elevados (cercanos a la unidad) para todas las posibles combinaciones de marginales. Además para estas combinaciones, el valor del parámetro de la cópula, \hat{a} , estimado mediante el método de máxima-verosimilitud es 1,86006445, 2,06695389 y 2,06695389 respectivamente. En la cópula *HRT*, y para las distribuciones marginales seleccionadas, los valores de la τ -*Kendall* también resultan positivos (Logística-Logística: 0,85394731, Pareto-Pareto: 0,85394731 y Exponencial-Exponencial: 0,31215935). Para la cópula de *Frank* los coeficientes de correlación no lineal asociados a las marginales que dan lugar al menor precio de emisión, Para-Logística-Para-Logística (-0,17884021), Para-Logística-Pareto (-0,17883978), Logística-Pareto (-0,17883636) y Pareto-Pareto (-0,17883987), son en todos los casos negativos. Esto es una muestra adicional de que dicha cópula no es aplicable a los datos catastróficos analizados ya que no recoge correctamente las relaciones de dependencia entre los mismos.

A partir del análisis de los resultados obtenidos, y teniendo en cuenta la particularidad de los datos simulados, podemos concluir que la cópula de *Gumbel* es la más adecuada para calcular la prima de

emisión del bono catastrófico utilizado en el ejemplo, porque ofrece un grado de concentración de puntos, o una estructura de dependencia entre factores de riesgo adecuada a las necesidades de esta tipología de siniestros caracterizados por tener baja frecuencia de ocurrencia y elevada intensidad de siniestralidad. Además para esta cópula se obtienen los valores de prima más bajos.

En el cuadro a continuación se muestran los resultados de todas las variables que intervienen en el proceso de fijación del precio del CAT Bond, para la cópula de *Gumbel* seleccionada.

CUADRO 3: Simulación Emisión Total del CAT-Bond utilizando la Cópula de *Gumbel*

X	Y	EL	R%	Fondo	ET. actualizadas	Prima	NR	LR	ROI
Paralogística	Paralogística	187.017,59	5.610,527	200.175.626,52	170.015,99	175.626,52	33.175.594,97	0,000939	0,033175
Logística	Paralogística	11.607.044,12	348.211,323	210.900.069,61	10.551.858,29	10.900.069,61	-11.375.054.043,42	0,000939	-11,37505
Pareto	Paralogística	10.891.337,47	326.740,124	210.227.956,01	9.901.215,88	10.227.956,01	-10.660.086.718,39	0,000939	-10,66008
Log-Normal	Paralogística	233.723.368,63	7.011.701,059	419.487.490,72	212.475.789,66	219.487.490,72	-233.261.932.390,21	0,000939	-233,2619
Exponencial	Paralogística	99.713.001,96	2.991.390,059	293.639.573,66	90.648.183,60	93.639.573,66	-99.389.998.428,98	0,000939	-99,38999
Paralogística	Logística	11.115.873,76	333.476,212	210.438.815,99	10.105.339,78	10.438.815,99	-10.884.391.062,41	0,000939	-10,88439
Logística	Logística	209.256,88	6.277,706	200.196.511,23	190.233,53	196.511,23	10.959.284,75	0,000939	0,010959
Pareto	Logística	5.202.689,40	156.080,681	204.885.798,31	4.729.717,63	4.885.798,31	-4.977.315.017,85	0,000939	-4,977315
Log-Normal	Logística	131.733.393,39	3.952.001,802	323.709.632,16	119.757.630,35	123.709.632,16	-131.377.312.794,63	0,000939	-131,3773
Exponencial	Logística	56.038.903,73	1.681.167,112	252.625.625,05	50.944.457,94	52.625.625,05	-55.761.015.542,45	0,000939	-55,76101
Paralogística	Pareto	12.495.922,93	374.877,687	211.734.807,62	11.359.929,94	11.734.807,62	-12.263.014.641,61	0,000939	-12,26301
Logística	Pareto	4.995.221,33	149.856,639	204.690.966,94	4.541.110,30	4.690.966,94	-4.770.061.264,37	0,000939	-4,770061
Pareto	Pareto	236.181,95	7.085,458	200.221.796,32	214.710,86	221.796,32	-15.937.971,85	0,000939	-0,015937
Log-Normal	Pareto	103.415.258,79	3.102.457,764	297.116.329,39	94.013.871,63	97.116.329,39	-103.088.430.827,67	0,000939	-103,0884
Exponencial	Pareto	69.690.160,98	2.090.704,829	265.445.396,63	63.354.691,80	65.445.396,63	-69.398.171.043,71	0,000939	-69,39817
Paralogística	Log-Normal	117.033.478,96	3.511.004,369	309.905.076,15	106.394.071,78	109.905.076,15	-116.692.583.376,23	0,000939	-116,6925
Logística	Log-Normal	106.459.599,30	3.193.787,979	299.975.241,89	96.781.453,91	99.975.241,89	-106.129.626.533,92	0,000939	-106,1296
Pareto	Log-Normal	135.042.395,87	4.051.271,876	326.817.086,30	122.765.814,43	126.817.086,30	-134.682.897.075,07	0,000939	-134,6828
Log-Normal	Log-Normal	115.792.046,05	3.473.761,382	308.739.257,79	105.265.496,41	108.739.257,79	-115.452.432.866,43	0,000939	-115,4524
Exponencial	Log-Normal	66.567.312,16	1.997.019,365	262.512.757,69	60.515.738,33	62.512.757,69	-66.278.548.126,54	0,000939	-66,27854
Paralogística	Exponencial	419.979.906,56	12.599.397,2	594.399.312,25	381.799.915,05	394.399.312,25	-419.326.067.316,52	0,000939	-419,3260
Logística	Exponencial	58.238.316,72	1.747.149,502	254.691.073,79	52.943.924,29	54.691.073,79	-57.958.156.538,83	0,000939	-57,95815
Pareto	Exponencial	76.740.365,27	2.302.210,958	272.066.179,39	69.763.968,43	72.066.179,39	-76.441.092.472,68	0,000939	-76,44109
Log-Normal	Exponencial	69.770.633,32	2.093.119	265.520.967,47	63.427.848,47	65.520.967,47	-69.478.560.255,78	0,000939	-69,47856
Exponencial	Exponencial	21.741.569,58	652.247,087	220.417.310,34	19.765.063,25	20.417.310,34	-21.499.110.538,62	0,000939	-21,49911

Respecto a estas variables cabe mencionar que es básico estimar de forma adecuada el valor del excedente de reaseguro, A , que de lugar a un neto de reaseguro, NR , positivo, lo que supone un beneficio para el reasegurador. Para la cópula *Gumbel* y sus distribuciones marginales seleccionadas, el valor del neto de reaseguro, para un excedente de 200.000.000€, es positivo en las combinaciones Para-Logística-Para-Logística 33.175.594,97€ y Logística-Logística 10.959.284,75€. En estos casos, tanto asegurado como reasegurador salen beneficiados ya que el primero de ellos paga la prima más barata y el segundo obtiene el mayor beneficio neto. Para la combinación Pareto-Pareto el neto de reaseguro es -15.937.971,85€, lo que significa que en este caso sólo se beneficia el asegurado (compañía de seguros), que paga menor prima, aunque el asegurador (reasegurador) tiene una pérdida como consecuencia de llevar a cabo dicha emisión.

8. Conclusiones

El tratamiento de riesgos dependientes asociados a los productos de transferencia alternativa de riesgos (ART), necesita su propia función de distribución conjunta que refleje una determinada situación de correlación no lineal entre factores de riesgo. Mediante la aplicación de la Teoría de Cópulas es posible avanzar en este sentido, con el objetivo de llevar a cabo una determinación futura del precio tanto de los productos de seguro y reaseguro tradicionales como de los productos de transferencia alternativa de riesgos como los que aquí se analizan. Además, por medio de esta teoría, se puede establecer una relación entre las distribuciones marginales de los distintos ramos de negocios correlacionados y la función de distribución multivariante conjunta. En lo referente a la conveniencia de utilizar la teoría de cópulas en el sector asegurador, dependerá de las características de los ramos o factores de riesgo que compongan el producto asegurador considerado. Desde el punto de vista teórico, si son riesgos dependientes, la aplicación es clara.

En este trabajo hemos utilizado las cópulas para medir el impacto de la ocurrencia de catástrofes naturales sobre dos ramos de seguros afectados por este tipo de riesgo (por ejemplo, los ramos de daños y responsabilidad civil) y calcular, a partir de este análisis, el precio de

reaseguro o prima de emisión de un Bono Catastrófico. El estudio se ha centrado en la familia de cópulas Arquimedianas por ser las que mejor representan la realidad del sector asegurador y dentro de ellas hemos analizado los efectos de aplicar cuatro tipos de cópulas: *Frank*, *Clayton*, *Gumbel* y *HRT*. Los resultados obtenidos evidencian que la cópula que mejor representa el fenómeno considerado es la cópula de *Gumbel*, la cual traduce correctamente el hecho de que las grandes catástrofes suponen cuantías siniestros elevadas en dos ramos de seguros dependientes. La cópula *HRT*, definida como la *survival copula* de la cópula de *Clayton*, también es adecuada para modelar el fenómeno catastrófico analizado pero, en nuestro caso, los valores obtenidos para el precio de emisión del bono resultan superiores a los que ofrece la cópula de *Gumbel*. Las cópulas de *Frank* y de *Clayton* no sirven para ser aplicadas en nuestro ejemplo porque muestran las relaciones de dependencia entre siniestros tradicionales de baja intensidad y elevada frecuencia que no son objeto de cobertura por los bonos considerados. Finalmente hay que destacar que el valor del parámetro "a" que aparece en la función cópula multivariable muestra el grado de correlación "no lineal" según los datos muestrales determinados. En el presente trabajo, el valor del citado parámetro, se ha obtenido aplicando el método de máxima verosimilitud con el objetivo de obtener estimaciones eficientes y consistentes.

Todos los cálculos desarrollados en el artículo se han realizado mediante un toolbox para Matlab que integra todo el proceso: elección de cópula y marginales, simulación de escenarios y cálculo de primas. De este modo la complejidad matemática y algorítmica quedan en un segundo plano, ejecutándose de modo invisible, mientras que el usuario de la aplicación simplemente debe hacer peticiones al ordenador en forma de comandos o a través de un interfaz gráfico.

BIBLIOGRAFÍA

1. Blum, P., A. Dias y P. Embrechts (2002). *The ART of dependence modelling: the latest advances in correlation analysis* en *Alternative Risk Strategies*. Ed. Morton Lane. Risk Books. London. 339-356.
2. Cherubini, U. (2004). *Copula methods in finance*. John Wiley & Sons, Ltd. EE.UU.

3. Cox, S. H. y H. Pedersen (2000), Catastrophe Risk Bonds. *North American Actuarial Journal*, vol. 4 (4), 56-82.
4. Embrechts, P., F. Lindskog y A. McNeil (2003), *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, en Handbook of heavy tailed distributions in finance. Editado por Rachev ST. Publicado por Elsevier/North-Holland, Amsterdam. http://www.math.ethz.ch/~mcneil/pub_list.html
5. Embrechts, P., A. McNeil y F. Rüdiger, (2005). *Quantitative Risk Management. Concepts, techniques, tools*. Princeton Series in Finance. Princeton university Press. New York.
6. Froot, K. y S. Posner (2000). *Issues in the pricing of catastrophic risk*. Guy Carpenter & Company Inc. <http://www.guycarp.com/portal/extranet/pdf/pricing.pdf?vid=1>
7. Joe, H. (2001). *Multivariate models and dependence concepts*. New York: Chapman & Hall/CRC.
8. Kreps, R. E. y J. A. Major. (2002). *Catastrophe risk pricing in the traditional market* en Alternative Risk Strategies. Editado por Morton Lane. Risk Books. London. 201-220.
9. Lane, M. (2000). Pricing risk transfer transactions. *Astin Bulletin*. Vol. 30. Nº 2. 259-293.
10. Lee, J. P. y M.T. Yu (2002). Pricing default-risky Cat bonds with moral hazard and basis risk. *Journal of Risk and Insurance*. Vol. 69. Nº1. 25-44.
11. Levi, Charles M. (2001). *Tempêtes: Etude des dépendances entre les branches Auto et Incendie avec la théorie des copulas*. Guy Carpenter y Université Louis Pasteur Strasbourg.
12. Loubergé, H., E. Kellezi y M. Gilli (1999). Using Catastrophe-Linked Securities to diversify insurance risk: A financial analysis of Cat Bonds. *Journal of Insurance Issues*. Vol. 22 (2). 125-146.
13. Pérez Fructuoso, M. J. (2005). La titulización del riesgo catastrófico: descripción y análisis de los *cat bonds*. *Revista Española de Seguros*. Número 121. 75-92.
14. Rivas López, V. y A. Cuesta (2006). *Matlab toolbox for generating claim sizes using Archimedean copulas*, WSEAS Transactions on Business and Economics. Issue 3. Vol. 3 (March). 178-183.
15. Rivas López, V. y A. Cuesta, (2005). *A method using Copulas for determine the premium of ART products* en New Mathematical

Methods in Risk Theory. Workshop in Honour of Hans
Bühlmann, Florencia 2005.