PRESTAMOS CON INTERES VARIABLE. ANALISIS ESTOCASTICO

Rosa M. Mayoral y Antonio Alegre
Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Universitat de Barcelona

RESUMEN

La actual mutabilidad de los mercados financieros ha llevado a los agentes que en ellos intervienen a pactar operaciones que incorporen la variación de los tipos de interés. Este es el caso de las operaciones de amortización a interés variable. Sin embargo, este mayor acercamiento a las leyes de mercado redunda en una total incertidumbre en cuanto a la evolución futura de la operación, puesto que no es posible elaborar el cuadro de amortización del préstamo ya que los términos amortizativos y las correspondientes cuotas de capital y de interés de cada periodo dependerán del tipo de interés vigente en ese momento.

En este trabajo pretendemos superar la anterior dificultad, incorporando en el modelo la evolución futura incierta del tipo de interés a aplicar en la operación de amortización, que quedará recogida en un proceso estocástico. Esto permitirá a los sujetos de la operación obtener información a cerca del comportamiento probabilístico de la dinámica del préstamo para la toma de decisiones.

Palabras clave: factor de capitalización asociado a Poisson Compuesto, proceso estocástico deuda pendiente, criterios de decisión financiera, métodos de persecución de objetivos.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo proponemos un método de análisis de las operaciones financieras de préstamo cuando la ley financiera de valoración empleada viene recogida por un proceso estocástico.

Las operaciones de amortización que consideramos son puras en cuanto a que no se contempla la aplicación sobre las mismas de características comerciales que modifiquen los compromisos iniciales de los sujetos que intervienen en la operación.

Para el desarrollo del trabajo tomaremos como punto de partida el préstamo francés por ser el de mayores ventajas prácticas y el más utilizado en los mercados financieros, considerando una periodicidad por k −ésimo de año para el pago de los términos amortizativos. Así, a partir del enfoque determinista de este tipo de operaciones, extenderemos el análisis al caso de que el tipo de interés a aplicar varíe en el tiempo de forma no predeterminada, optando por recoger su evolución en un proceso estocástico.

Con fines expositivos, realizaremos una hipótesis concreta de evolución del interés de mercado y de su repercusión en el interés de la operación. Así, consideramos el caso de que el interés instantáneo de mercado en el origen cierto de la operación toma un valor constante ρ_0 y que en el plazo de la misma experimenta variaciones finitas de cuantía aleatoria en instantes también aleatorios. Esta evolución del interés responde a una tendencia constante que se ve alterada por cambios coyunturales inesperados en el propio mercado y que afectan lógicamente a su precio de equilibrio. Para recoger el comportamiento del interés de mercado superponemos a la tendencia constante ρ_0 un proceso de saltos, en concreto, un Poisson Compuesto.[1] Las trayectorias de este proceso estocástico serán funciones escalonadas.

Con esta evolución del interés de mercado, en determinadas operaciones como las que aquí consideramos, pueden establecerse revisiones periódicas del interés a aplicar en la misma. En estas modificaciones del tipo de interés de la operación se incorporarán todos los cambios que se hayan producido a lo largo del periodo inmediatamente anterior en el interés de mercado y que supondremos recogidas en un proceso de Poisson Compuesto, de manera que el tanto a aplicar en la operación vendrá dado por algún valor cierto, a posteriori, relacionado con la evolución del tipo de interés durante el periodo inmediatamente anterior, verbigracia, el promedio de los dos últimos valores generados por dicho proceso estocástico, o simplemente el último valor

[1]En Merton (1976) puede verse una aplicación del proceso de Poisson Compuesto para recoger la evolución del precio del subyacente en un modelo de valoración de opciones sobre acciones.

alcanzado por el mismo, etc. De entre los múltiples criterios de revisión posibles nosotros adoptaremos este último, de forma que aunque el interés varíe durante el periodo según un proceso de Poisson Compuesto, sólo al final de dicho periodo se revisará el tanto a aplicar en la operación, con el fin de que sólo afecte a la capitalización durante el resto del plazo el último valor alcanzado por el tanto durante cada periodo[2].

Dado que las operaciones de préstamo que analizaremos en el trabajo se amortizan mediante pagos a realizar cada k –ésimo de año consideraremos la misma periodicidad para las revisiones en el interés de la operación. Con todo ello, el interés instantáneo de la operación quedará recogido en un proceso de Poisson Compuesto discretizado por k –ésimo de año.

Para definir el proceso estocástico del interés nominal instantáneo de la operación consideramos en primer lugar el proceso estocástico discreto $\{\rho_n\}_{n\in\left\{0,\frac{1}{k},\frac{2}{k},\dots\right\}}$ siendo,

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \rho_0 \\
\rho_{\frac{1}{k}} &= \rho_0 + Z_{\frac{1}{k}} \\
\rho_{\frac{2}{k}} &= \rho_0 + Z_{\frac{1}{k}} + Z_{\frac{2}{k}} = \rho_{\frac{1}{k}} + Z_{\frac{2}{k}} \\
&\vdots \\
\rho_n &= \rho_0 + Z_{\frac{1}{k}} + \cdots + Z_{n-\frac{1}{k}} + Z_n = \rho_{n-\frac{1}{k}} + Z_n
\end{aligned}$$

donde, $\{Z_j\}_{j\in\left\{\frac{1}{k},\frac{2}{k},\dots,n\right\}}$ tales que $Z_j = Z\left(\frac{1}{k}\right) = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{n\left(\frac{1}{k}\right)}$ $\forall j \in \left\{\frac{1}{k},\frac{2}{k},\cdots,n-\frac{1}{k},n\right\}$

[2]Las propiedades de la capitalización cuando el interés instantáneo de la operación presenta la evolución aquí descrita se analizan en Mayoral et al. (1997).

las variables aleatorias equidistribuidas según un Poisson Compuesto que representan el proceso de variación del tanto nominal estricto durante cada uno de los periodos de revisión que hay en el plazo de la operación y que, al no estar dichos intervalos solapados, son independientes entre sí. Así, estas variables pueden simbolizarse por $Z^{(k)} = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{n\left(\frac{1}{k}\right)}$.

$n(\frac{1}{k})$ es la variable aleatoria que recoge el número de saltos experimentados por el interés de mercado dentro de cada k –ésimo de año y que tiene una distribución Poisson $(\frac{\lambda}{k})$, ya que λ es el número medio de saltos al año.

$\{\delta_i\}_{i\in\left\{1,2,\cdots n\left(\frac{1}{k}\right)\right\}}$ son las variables aleatorias que recogen la cuantía de cada salto instantáneo en el tipo de interés y que son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $F_\delta(x)$ y función generatriz de momentos $\Phi_\delta(\theta)$.

Con todo ello, el proceso estocástico del interés nominal instantáneo de la operación $\{\rho_d(\tau)\}_{\tau\in\Re}$ se define a partir del anterior como el correspondiente a mantener constante entre dos periodos de revisión consecutivos el tipo de interés, de forma que, teniendo en cuenta que $ENT(\tau)$ es el número entero de periodos de revisión contenido en τ, puede expresarse,

$$\rho_d(\tau) = \rho_0 + Z_{\frac{1}{k}} + \cdots + Z_{ENT(\tau)}$$

Puesto que la periodicidad de la operación de préstamo cuyo análisis contemplamos en este trabajo coincide con la correspondiente a las revisiones pactadas en el interés, únicamente consideramos la aplicación del interés instantáneo que acabamos de definir hasta un número entero de k –ésimos de año. La extensión a la capitalización hasta un diferimiento entre dos periodos de revisión consecutivos se realiza aplicando el valor alcanzado por el tanto nominal estricto al principio del k –ésimo de año en que se realiza la valoración durante el plazo que resta desde este inicio de periodo hasta el diferimiento intermedio de que se trate.

Con este proceso del interés instantáneo, el factor de capitalización surge de resolver la ecuación diferencial estocástica en la cuantía del capital

$$dC(t) = C(t)\cdot \rho_d(t)\cdot dt$$

como en ella no interviene la diferencial de un proceso estocástico, su solución se obtiene integrando trayectoria a trayectoria con la condición de contorno $C(0)=C_0$. Así, el factor de capitalización a aplicar entre $\frac{r}{k}$ y $\frac{r+s}{k}$, expresados ambos diferimientos en años, es

$$f^{p^{(k)}}\left(\frac{r}{k},\frac{r+s}{k}\right)=e^{\int_{\frac{r}{k}}^{\frac{r+s}{k}}\rho_d(t)\cdot dt} = e^{\rho_0\cdot\frac{s}{k}}\cdot\prod_{\substack{h=1\\ \Delta h=1}}^{r} e^{Z^{(k)}\cdot\frac{s}{k}}\cdot\prod_{\substack{j=\frac{1}{k}\\ \Delta j=\frac{1}{k}}}^{\frac{s-1}{k}} e^{Z^{(k)}\cdot j}$$

En esta expresión, se observa que durante los $\frac{s}{k}$ años del plazo de la capitalización, se aplican tanto el interés inicial ρ_0 como las variaciones que experimenta el interés instantáneo de la operación incorporadas en las revisiones que se realizan con anterioridad al primer diferimiento del factor $\frac{r}{k}$. Sin embargo, las variaciones del interés que se añaden desde la revisión en $\frac{r+1}{k}$ hasta la última en $\frac{r+s-1}{k}$, se aplican en la capitalización desde el momento de la revisión hasta el final.

Esta interpretación pone de manifiesto que la expresión analítica del factor financiero obtenido no dependerá únicamente del plazo durante el que se aplique sino también de los diferimientos concretos entre los que tenga lugar la capitalización, por lo que podemos afirmar que está asociado a una ley financiera estocástica dinámica, por analogía con la definición de ley dinámica del enfoque determinista.

La distribución de probabilidad de este factor queda caracterizada por sus principales estadísticos, cuyas expresiones analíticas recogemos a continuación, donde $\Phi_\delta(\theta)$ es la función generatriz de momentos de las variables δ, cuantía de cada salto en el interés instantáneo de mercado, y $\Phi_{Z^{(k)}}(\theta)$ la correspondiente a las variables $Z^{(k)}$ Poisson Compuesto de amplitud un k-ésimo de año.

- **Esperanza**

$$E\left[f^{P^{(k)}}\left(\frac{r}{k},\frac{r+s}{k}\right)\right]= e^{\rho_0\cdot\frac{s}{k}}\cdot\Phi^{r}_{Z^{(k)}}\left(\frac{s}{k}\right)\cdot\prod_{\substack{j=\frac{1}{k}\\ \Delta j=\frac{1}{k}}}^{\frac{s-1}{k}}\Phi_{Z^{(k)}}(j)=$$

$$= e^{\rho_0\cdot\frac{s}{k}}\, e^{\frac{\lambda}{k}\cdot r\cdot\left[\Phi_\delta\left(\frac{s}{k}\right)-1\right]}\cdot e^{\frac{\lambda}{k}\cdot\sum_{j=\frac{1}{k}}^{\frac{s-1}{k}}\left[\Phi_\delta(j)-1\right]}$$

La principal característica de este promedio es que crece con la varianza de los saltos en el interés de mercado $V[\delta]$ con independencia de cuál sea la esperanza de estos incrementos.

- **Varianza**

$$V\left[f^{P^{(k)}}\left(\frac{r}{k},\frac{r+s}{k}\right)\right]= e^{2\cdot\rho_0\cdot\frac{s}{k}}\cdot$$

$$\cdot\left[\Phi^{r}_{Z^{(k)}}\left(\frac{2\cdot s}{k}\right)\cdot\prod_{\substack{j=\frac{1}{k}\\ \Delta j=\frac{1}{k}}}^{\frac{s-1}{k}}\Phi_{Z^{(k)}}(2\cdot j)-\Phi^{2\cdot r}_{Z^{(k)}}\left(\frac{s}{k}\right)\cdot\prod_{\substack{j=\frac{1}{k}\\ \Delta j=\frac{1}{k}}}^{\frac{s-1}{k}}\Phi^{2}_{Z^{(k)}}(j)\right]=$$

$$=e^{2\cdot\rho_0\cdot\frac{s}{k}}\cdot\left[e^{\frac{\lambda}{k}\cdot r\cdot\left[\Phi_\delta\left(\frac{2\cdot s}{k}\right)-1\right]}\cdot e^{\frac{\lambda}{k}\cdot\sum_{j=\frac{1}{k}}^{\frac{s-1}{k}}\left[\Phi_\delta(2\cdot j)-1\right]}-e^{2\cdot\frac{\lambda}{k}\cdot r\cdot\left[\Phi_\delta\left(\frac{s}{k}\right)-1\right]}\cdot e^{\frac{2\cdot\lambda}{k}\cdot\sum_{j=\frac{1}{k}}^{\frac{s-1}{k}}\left[\Phi_\delta(j)-1\right]}\right]$$

- **Covarianzas**

Este estadístico refleja la dependencia que existe entre los factores de capitalización aun cuando sus intervalos de aplicación sean disjuntos. Esta dependencia positiva se debe a que el interés instantáneo a utilizar en la operación en periodos futuros incorpora todas las variaciones discretas que desde el principio del proceso se han acumulado sobre la tendencia inicial cierta ρ_0.

Con todo ello, la expresión de la covarianza de los factores con intervalos de aplicación **disjuntos** es, con $r<s<n$,

$$Cov\left[f^{P^{(k)}}\left(\frac{r}{k},\frac{s}{k}\right),f^{P^{(k)}}\left(\frac{s}{k},\frac{n}{k}\right)\right]=e^{\rho_0\cdot\frac{n-r}{k}}\cdot$$

$$\cdot\left[e^{\frac{\lambda\cdot r}{k}\cdot\left[\Phi_\delta\left(\frac{n-r}{k}\right)-1\right]}\cdot e^{\frac{\lambda}{k}\cdot\sum_{j=\frac{1}{k}}^{\frac{n-r-1}{k}}\left[\Phi_\delta(j)-1\right]}-e^{\frac{\lambda}{k}\left[r\cdot\left[\Phi_\delta\left(\frac{s-r}{k}\right)-1\right]+s\cdot\left[\Phi_\delta\left(\frac{n-s}{k}\right)-1\right]\right]}\cdot e^{\frac{\lambda}{k}\cdot\sum_{j=\frac{1}{k}}^{\frac{s-r-1}{k}}\left[\Phi_\delta(j)-1\right]}\cdot e^{\frac{\lambda}{k}\cdot\sum_{j=\frac{1}{k}}^{\frac{n-s-1}{k}}\left[\Phi_\delta(j)-1\right]}\right]$$

y con intervalos de aplicación **solapados**, siendo $r<s<n$

$$Cov\left[f^{P^{(k)}}\left(\frac{r}{k},\frac{n}{k}\right),f^{P^{(k)}}\left(\frac{s}{k},\frac{n}{k}\right)\right]=e^{\rho_0\cdot\frac{(n-r)+(n-s)}{k}}\cdot$$

$$\cdot\left[e^{\frac{\lambda\cdot r}{k}\cdot\left[\Phi_\delta\left(\frac{(n-r)+(n-s)}{k}\right)-1\right]}\cdot e^{\frac{\lambda}{k}\cdot\sum_{j=\frac{1}{k}}^{\frac{s-r}{k}}\left[\Phi_\delta\left(\frac{(n-r)+(n-s)}{k}-j\right)-1\right]}\cdot e^{\frac{\lambda}{k}\cdot\sum_{j=\frac{1}{k}}^{\frac{n-s-1}{k}}\left[\Phi_\delta\left(2\cdot\left(\frac{n-s}{k}-j\right)\right)-1\right]}-\right.$$

$$\left.-e^{\frac{\lambda}{k}\left[r\cdot\left[\Phi_\delta\left(\frac{n-r}{k}\right)-1\right]+s\cdot\left[\Phi_\delta\left(\frac{n-s}{k}\right)-1\right]\right]}\cdot e^{\frac{\lambda}{k}\cdot\sum_{j=\frac{1}{k}}^{\frac{n-r-1}{k}}\left[\Phi_\delta(j)-1\right]}\cdot e^{\frac{\lambda}{k}\cdot\sum_{j=\frac{1}{k}}^{\frac{n-s-1}{k}}\left[\Phi_\delta(j)-1\right]}\right]$$

2. PROCESO ESTOCÁSTICO DEUDA PENDIENTE POR AMORTIZAR

Como ya se mencionó en el anterior epígrafe de introducción, el punto de partida de nuestro análisis es el enfoque clásico del préstamo francés que lleva a la descripción de la dinámica de la reserva del mismo.[3] A partir de él, desarrollamos de forma paralela el estudio de este tipo de operaciones pero con ambiente financiero aleatorio.

Consideramos un préstamo de nominal C, sin carencia, a amortizar por tanto durante los n años siguientes al inicio de la operación, mediante términos amortizativos de cuantía constante α pagaderos al final de cada k −ésimo de año.

En el análisis determinista de las operaciones de préstamo con método de amortización francés, se establece que éstas se pactan en régimen financiero de interés compuesto constante vencido al tanto nominal instantáneo ρ_0. Con todo ello, la condición de equilibrio de la operación que consiste en exigir que la reserva matemática al final de la duración fijada n sea nula, queda

[3]Para un estudio completo del método de amortización francés con interés cierto ver, entre otros, Rodríguez (1994, págs. 242-246) y Gil-Peláez (1987, págs. 401-403).

recogida, teniendo en cuenta la expresión de la reserva activa, en la siguiente ecuación que permite determinar el importe de los términos amortizativos,[4]

$$C \cdot e^{\rho_0 \cdot n} - \alpha \cdot S_{\overline{n \cdot k}|\frac{\rho_0}{k}} = 0$$

En general, la ecuación de recurrencia dinámica discreta de la reserva que cuantifica el desequilibrio de la operación de préstamo en cada uno de los momentos del plazo en que se produce un desembolso es

$$R(r) = R(r-1) \cdot e^{\frac{\rho_0}{k}} - \alpha \qquad \text{con} \qquad r = 1, 2, \cdots, k \cdot n$$

y con la condición de contorno $R(0) = C$ se tiene que la reserva en cada uno de los momentos examinados puede expresarse,

$$R(r) = \sum_{s=0}^{r} C_s \cdot \; e^{\frac{\rho_0}{k} \cdot (r-s)} = \sum_{s=0}^{r-1} C_s \cdot \; e^{\frac{\rho_0}{k} \cdot (r-s)} - \alpha \qquad \text{con}$$

$$C_s = \begin{cases} C & s = 0 \\ -\alpha & s = 1, 2, \cdots, r \end{cases}$$

En este caso, se ha supuesto que la ley financiera que interviene en el cálculo del precio de la operación es estacionaria y cierta, lo que permite conocer perfectamente, en cualquier instante del plazo, los parámetros futuros del plan de amortización trazado.

Sin embargo, la consideración, por parte de los sujetos que contratan el préstamo, de las ineficiencias que acarrea la aplicación de un tanto de interés cierto en este tipo de operaciones, cuya duración además generalmente se extiende hasta el largo plazo, en cuanto a que de esa forma no se contempla la evolución futura de los tipos de interés en el mercado, puede llevarlos a añadir en los pactos dicha problemática y tenerla en cuenta principalmente al analizar la dinámica de la operación, surgiendo así los préstamos a tanto variable con variación no predeterminada. Esta incorporación puede llevarse

[4] Aquí y en todo lo que sigue utilizamos, en los símbolos correspondientes a la valoración de las rentas unitarias ciertas, el tanto instantáneo en lugar de, como aparece habitualmente en la literatura financiera, el tanto efectivo equivalente.

a cabo, en una primera etapa, acordando recalcular periódicamente la cuantía del término amortizativo constante que permite cancelar la deuda en el plazo que reste hasta el final de la operación, y con el tipo de interés que en ese momento determine el equilibrio en el mercado financiero. Este planteamiento, considera conocido, al principio de cada uno de los periodos en que se recalcula el término amortizativo, el tanto de interés a aplicar durante el periodo siguiente, y al incorporar a posteriori, la evolución de los tipos de interés en el pasado inmediato, al menos reduce considerablemente las desviaciones que se producían al tomar como prefijado para todo el plazo de la operación el tipo de interés. El coste de este mayor acercamiento a las leyes del mercado se traduce de forma directa en la imposibilidad de conocer en cada momento la cuantía de los términos amortizativos futuros, lo que conlleva una importante pérdida de información por parte de los sujetos que intervienen en la operación, con la consiguiente dificultad en la toma de decisiones financieras hasta el final del préstamo.

Por lo tanto, parece más conveniente intentar recoger en un modelo la evolución de los tipos de interés del mercado en el tiempo, de forma que sea posible trasladarla a la dinámica del proceso de amortización, ya que esto posibilitará conocer al menos las variables aleatorias que intervienen en el mismo, reduciéndose así la incertidumbre en la toma de decisiones financieras que se realizará con un nivel de confianza determinado, reflejando este último el grado de aversión al riesgo de los sujetos que contratan el préstamo. Para desarrollar este enfoque, trasladaremos la expresión de la reserva matemática retrospectiva del caso cierto al campo estocástico, para así analizar a través de ella el préstamo francés bajo leyes financieras estocásticas.

A continuación, definimos el proceso estocástico del resto pendiente por amortizar durante el plazo que dure la operación de préstamo $\{\boldsymbol{R}(r)\}_{r=0,1,\cdots,k\cdot n}$ por simple extensión de la obtenida en el caso cierto, esto es, sin más que sustituir en la misma el factor de capitalización correspondiente a la ley financiera cierta estacionaria al tanto ρ_0 por el factor financiero estocástico cuya expresión analítica particular depende del proceso estocástico concreto que supongamos recoge la evolución del tipo de interés a aplicar. Como ya se mencionó en la introducción del trabajo, utilizaremos el factor de capitalización estocástica asociado a Poisson Compuesto discretizado por k −ésimo de año, con lo que, teniendo en cuenta la condición de contorno $\boldsymbol{R}(0)=C$, resulta,

$$R(r)=\sum_{s=0}^{r-1} C_s \cdot f^{p^{(k)}}\left(\frac{s}{k},\frac{r}{k}\right)-\alpha \qquad \forall\, r=1,2,\cdots,k\cdot n$$

A partir de esta expresión de la reserva, para la determinación en el inicio de la operación del importe del término amortizativo constante será necesario adoptar criterios de decisión financiera basados en estadísticos de la reserva en un periodo determinado del plazo, generalmente el último de ellos, al cabo de n años, que nos permitan definir la condición de equilibrio en este tipo de operaciones.

Del análisis dinámico del proceso estocástico anteriormente establecido para la reserva del préstamo se desprende que el comportamiento aleatorio del tipo de interés permite que en la realización del proceso se den trayectorias en las que la reserva tome valores negativos a partir de un determinado periodo del plazo de la operación y hasta el final de éste, n años, lo cual implicaría que debido a una evolución a la baja de los tipos de interés, y por tanto a favor del sujeto pasivo, el préstamo se ha amortizado en un número de años inferior a n y al continuar el pago de α el prestamista inicial ha pasado a contraer una deuda con el que era su prestatario. Este comportamiento poco realista del proceso estocástico definido para la reserva del préstamo hace necesario recurrir a una restricción del mismo $\left\{\tilde{R}(r)\right\}_{r=0,1,\cdots,k\cdot n}$ de forma que,

$$\tilde{R}(r)=\begin{cases}0 & \forall\, r \mid R(r)\leq 0\\ R(r) & \forall\, r \mid R(r)>0\end{cases}$$

siendo entonces $\tilde{R}(r)$ la variable aleatoria mixta que toma el valor 0 en caso de que el préstamo se amortice dentro del plazo de amplitud r periodos o el resto pendiente en r, en caso contrario. Puesto que no disponemos de una expresión analítica para la variable $\tilde{R}(r)$ en la que no intervenga directamente la variable $R(r)$, sólo podremos examinar la distribución de probabilidad de aquélla a través de la correspondiente a esta última, y no de forma aislada, por lo que nos centraremos en el análisis de la distribución de probabilidad de $R(r)$.

A continuación, analizaremos la variable aleatoria deuda pendiente, al final del r-ésimo periodo, del préstamo que hemos definido. Para ello, obtendremos las expresiones de sus estadísticos esperanza y varianza, a través de las correspondientes a los estadísticos del factor de capitalización empleado $f^{P^{(k)}}(\frac{r}{k},\frac{r+s}{k})$. Por consiguiente, se trata de determinar la esperanza y la varianza del valor final de una renta cierta menos la constante α. La renta será inmediata, prepagable de r términos pagaderos por k-ésimo de año y variables, valorada con la ley financiera estocástica dinámica que tiene asociada el factor financiero de Poisson Compuesto discretizado por k –ésimo de año.

La esperanza matemática de esta variable aleatoria se determina teniendo en cuenta las propiedades de linealidad de este estadístico, por las cuales la esperanza de una suma de variables aleatorias es la suma de las esperanzas de cada una de ellas. Así con $\Delta j = \frac{1}{k}$,

$$E[R(r)] = \sum_{s=0}^{r-1} C_s \cdot E\left[f^{P^{(k)}}(\frac{s}{k},\frac{r}{k}) \right] - \alpha = C \cdot e^{\rho_0 \cdot \frac{r}{k}} \cdot e^{\frac{\lambda}{k} \cdot \sum_{j=\frac{1}{k}}^{\frac{r-1}{k}} [\Phi_\delta(j) - 1]} -$$

$$- \alpha \cdot \left(\sum_{s=1}^{r-1} e^{\rho_0 \cdot \frac{r-s}{k}} \cdot e^{\frac{\lambda}{k} \cdot s \left[\Phi_\delta(\frac{r-s}{k}) - 1 \right]} \cdot e^{\frac{\lambda}{k} \cdot \sum_{j=\frac{1}{k}}^{\frac{r-s-1}{k}} [\Phi_\delta(j) - 1]} \right)$$

De esta forma, la reserva media coincide con la deuda pendiente de un préstamo con la misma corriente de pagos que el que estamos considerando pero valorado con una determinada ley financiera cierta.

Para la obtención de la varianza de la deuda pendiente del préstamo al cabo de r periodos, partiremos de la expresión

$$V[R(r)] = V\left[\sum_{s=0}^{r-1} C_s \cdot f^{P^{(k)}}(\frac{s}{k},\frac{r}{k}) \right]$$

que se corresponde con la varianza del valor final de una renta cierta inmediata, prepagable, de r términos pagaderos por k –ésimo de año y variables, calculado con una ley financiera estocástica dinámica. Así pues, ésta es la varianza de la suma de r variables variables aleatorias dependientes entre sí,

$$\sum_{s=0}^{r-1} C_s \cdot f^{p^{(k)}}\left(\frac{s}{k}, \frac{r}{k}\right)$$

puesto que los factores de capitalización en los que interviene el proceso de saltos y que tienen intervalos de aplicación solapados presentan dependencia debido a que las variaciones discretas del tipo de interés que hayan tenido lugar entre 0 y el primer diferimiento de cada factor intervienen en los factores a aplicar desde diferimientos futuros.

Para determinar esta varianza, utilizaremos las expresiones de las varianzas y covarianzas de los factores financieros que intervienen en la capitalización desde cada uno de los diferimientos en los que hay un término C_s de la renta hasta aquél en el que se calcula la reserva, r. De esta forma, utilizando la matriz de varianzas y covarianzas de dichos factores financieros, la varianza de la deuda pendiente en r puede expresarse vectorialmente,

$$V[\boldsymbol{R}(r)] = (C \quad - \alpha \quad - \alpha \quad \cdots \quad - \alpha)$$

$$Cov\begin{pmatrix} f^{p^{(k)}}(0, \frac{r}{k}), f^{p^{(k)}}(0, \frac{r}{k}) & \cdots & f^{p^{(k)}}(0, \frac{r}{k}), f^{p^{(k)}}(\frac{r-1}{k}, \frac{r}{k}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{p^{(k)}}(\frac{r-1}{k}, \frac{r}{k}), f^{p^{(k)}}(0, \frac{r}{k}) & \cdots & f^{p^{(k)}}(\frac{r-1}{k}, \frac{r}{k}), f^{p^{(k)}}(\frac{r-1}{k}, \frac{r}{k}) \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} C \\ -\alpha \\ -\alpha \\ \vdots \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

lo que en forma de sumatorios quedaría, tras aplicar el producto matricial y teniendo en cuenta que en la diagonal principal están las varianzas de cada uno de los factores,

$$V[R(r)]=C^2\cdot V\left[f^{P(k)}(0\ ,\frac{r}{k})\right]+\alpha^2\cdot\sum_{s=1}^{r-1}V\left[f^{P(k)}(\frac{s}{k},\frac{r}{k})\right]\ -2\cdot C\cdot\alpha\cdot$$
$$\cdot\sum_{h=1}^{r-1}Cov\left[f^{P(k)}(0\ ,\frac{r}{k}),f^{P(k)}(\frac{h}{k}\ ,\frac{r}{k})\right]+2\cdot\alpha^2\cdot$$
$$\cdot\sum_{s=1}^{r-2}\sum_{h=1}^{r-1}Cov\left[f^{P(k)}(\frac{s}{k}\ ,\frac{r}{k}),f^{P(k)}(\frac{h}{k}\ ,\frac{r}{k})\right]$$

donde habrá que sustituir las expresiones analíticas de la varianza y de la covarianza entre dos factores Poisson Compuesto discretizado por k-ésimo de año con intervalos temporales de aplicación solapados que se recogieron en el epígrafe 1 de introducción.

Con todo ello, quedan determinadas la esperanza y varianza de la deuda pendiente después de pagar el r-ésimo término amortizativo, valorando con el factor de capitalización estocástica utilizado. Otros estadísticos de dicha variable aleatoria que resultarán de interés para la aplicación sobre la misma de criterios de decisión con el fin, entre otros, de calcular los términos amortizativos del préstamo, son los percentiles. Para su cálculo, será necesario recurrir a métodos de simulación puesto que, como ya se ha comentado anteriormente, no conocemos la distribución de probabilidad de la variable que estamos analizando. Así, la determinación de los percentiles de la deuda pendiente al cabo de r periodos se realizará simulando el proceso de amortización del préstamo a través del factor financiero de capitalización asociado a Poisson Compuesto con revisiones del interés cada k-ésimo de año y obteniendo así la distribución de probabilidad de la deuda pendiente.

3. ELEMENTOS DE ANÁLISIS DE LAS OPERACIONES DE PRÉSTAMO CON INTERESES ESTOCÁSTICOS

Dada la naturaleza estocástica de este tipo de operaciones, inferida por la evolución aleatoria del interés a aplicar en el préstamo, para su estudio definiremos los llamados elementos de análisis del proceso amortizativo. Estos elementos instrumentarán tanto la determinación del importe del término amortizativo a cobrar en la operación como la elaboración de distintos planes de amortización. En este sentido distinguimos los siguientes elementos,

1. Deuda pendiente de amortizar después de efectuado el pago del r-ésimo término amortizativo $\boldsymbol{R}(r)$ y su restricción positiva $\widetilde{\boldsymbol{R}}(r)$, cuyas expresiones en función del factor financiero estocástico se obtuvieron en el apartado anterior. En esta línea se podría ahondar aún más examinando la distribución de probabilidad de la variable aleatoria deuda pendiente al cabo de r periodos condicionada a que sea positiva $\boldsymbol{R}(r) \mid \boldsymbol{R}(r) \geq 0$.

2. Variable aleatoria bidimensional $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{\beta})$ resultando de interés tanto el análisis de la distribución de probabilidad conjunta como el de las correspondientes distribuciones marginales, siendo $\boldsymbol{N}$ el número de periodos necesarios para amortizar el préstamo y $\boldsymbol{\beta}$ la cuantía del último término amortizativo que permite, por lo tanto, cancelar definitivamente la deuda.

La función de cuantía de probabilidad marginal de la variable aleatoria $\boldsymbol{N}$ dependerá de la distribución de la reserva del préstamo de forma que,

$$P[\boldsymbol{N}=r]=P\left[\left(\bigcap_{j=1}^{r-1}(\boldsymbol{R}_j>0)\right)\bigcap(\boldsymbol{R}_r\leq 0)\right]=P[\boldsymbol{R}_1>0]\,P[\boldsymbol{R}_2>0 \mid \boldsymbol{R}_1>0]$$

$$\cdot P\left[\boldsymbol{R}_3>0 \mid \bigcap_{j=1}^{2}(\boldsymbol{R}_j>0)\right]\cdots\cdot P\left[\boldsymbol{R}_r\leq 0 \mid \bigcap_{j=1}^{r-1}(\boldsymbol{R}_j>0)\right]$$

La distribución de probabilidad de β es distinta de la correspondiente a la variable aleatoria $\boldsymbol{R}(r)+\alpha$ sólo cuando el término residual, de acuerdo con el plan de amortización trazado, está acotado superiormente por la cuantía del término amortizativo, de forma que $0< \beta \leq \alpha$. En este último caso, suponiendo conocida la función de cuantía de probabilidad del número de periodos en que se amortiza el préstamo, podremos obtener la función de densidad de la variable aleatoria β condicionada a N en función también de la distribución de probabilidad de $\boldsymbol{R}(r)$. De manera que esta función de densidad vendrá definida como el cociente entre la densidad de probabilidad de que la reserva sea negativa en una cuantía y correspondiente a la diferencia entre el valor de β menos el término amortizativo, y la probabilidad de que la reserva sea negativa por primera vez en cuyo caso sólo podrá tomar valores entre 0 y $-\alpha$, con todo ello queda,

$$f_{\beta}(x|r)=\frac{f_{\boldsymbol{R}_r}(y)}{\int_{-}^{0} f_{\boldsymbol{R}_r}(y)\cdot dy} \quad \forall x\in \left]0,\alpha\right] \text{ con } y = x-\alpha$$

4. DETERMINACIÓN DEL TÉRMINO AMORTIZATIVO

Una vez analizado el proceso estocástico de la reserva del préstamo que nos permitirá conocer la dinámica de la operación, y tras examinar sus principales estadísticos, nos planteamos la cuantificación del término amortizativo con el que dará comienzo la operación fijado el nominal del préstamo.

El hecho de que en estas operaciones los elementos de análisis, que recogen la evolución de la amortización, tengan naturaleza de variables aleatorias hace que para la toma de decisiones financieras, como la que ahora nos ocupa de cálculo del término amortizativo, resulte necesario reducir dicha aleatoriedad a un equivalente cierto. Así pues, será necesario en primer lugar escoger una variable aleatoria de las que intervienen en el proceso, que los sujetos de la operación consideren que representa adecuadamente la dinámica del mismo y sustituirla por el equivalente cierto que resulte mediante la aplicación sobre ella de un determinado criterio de decisión, el cual reflejará el grado de aversión al riesgo de ambos sujetos. De esta forma, el equilibrio inicial se establecerá definiendo los objetivos que prestamista y prestatario desean obtener en el futuro de la operación a través del equivalente cierto obtenido.

Aunque para el cálculo del término amortizativo podría utilizarse cualquiera de los elementos de análisis definidos en el anterior epígrafe, sólo consideraremos, por analogía con el enfoque determinista, la variable aleatoria deuda pendiente al cabo de un determinado número n de años, que en principio se tomará como el final de la operación y en el cual, por lo tanto, ya debe haberse alcanzado el objetivo de amortización.

Con todo ello, aplicaremos sobre dicha variable aleatoria algunos de los principales criterios de decisión que se utilizan en la Matemática Actuarial para el cálculo de primas[5] y que, de acuerdo con ciertas reglas, permitirán determinar la cuantía de los términos amortizativos constantes, en el inicio de la operación. En concreto, serán el de la esperanza matemática, el del percentil de nivel de confianza $(1-\varepsilon)$, el de la varianza y el de la desviación tipo[6]. Globalmente, simbolizaremos el término amortizativo inicial por α_{CD} donde el subíndice genérico CD hará referencia al criterio de decisión concreto empleado en cada caso.

La aplicación de un determinado criterio dependerá principalmente del nivel de riesgo que los sujetos que intervienen en la operación están dispuestos a asumir en cuanto al cumplimiento de los objetivos de amortización establecidos para el cálculo del término amortizativo.

Una vez calculada la cuantía del término amortizativo puede resultar interesante analizar en cada periodo, durante la vigencia del contrato, su descomposición en cuota de capital A_r y cuota de interés Y_r .

Así pues, la cuota de interés de cada α_{CD} deberá cubrir el crecimiento experimentado por la reserva del préstamo como consecuencia de los intereses acumulados durante el periodo inmediatamente anterior, siempre que no se haya amortizado totalmente la deuda,

---

[5]En Goovaerts et al. (1984) encontramos el análisis de diferentes criterios de cálculo de primas.
[6]La utilización de estos criterios en la toma de decisiones financieras con leyes estocásticas se estudia con operaciones de financiación simples en Alegre et al. (1995).

$$Y_r = I_k^{r-1} \cdot \tilde{R}(r-1) \qquad r=1,2,\ldots$$

donde I_k^{r-1} simboliza el tipo de interés efectivo con frecuencia de capitalización k dentro el año y que es equivalente al nominal instantáneo que ha actuado en la operación desde el pago del anterior término amortizativo, por tanto entre $r-1$ y r, de forma que,

$$I_k^{r-1} = f^{p^{(k)}}\left(\frac{r-1}{k}, \frac{r}{k}\right) - 1$$

Las cuotas de capital A_r de cada término amortizativo las calcularemos por diferencia con las cuotas de interés Y_r del mismo,

$$A_r = \alpha_{CD} - Y_r$$

1) Criterio de la esperanza matemática

El término amortizativo α_E calculado con este criterio es aquél que hace que la deuda pendiente esperada al cabo de n años tome un determinado valor, siendo nulo si se pretende que el préstamo se amortice totalmente en ese plazo, de forma que,

$$\alpha_E = \frac{C \cdot E\left[f^{p^{(k)}}(0,n)\right]}{\sum_{s=1}^{n \cdot k-1} E\left[f^{p^{(k)}}\left(\frac{s}{k}, n\right)\right] + 1}$$

De entre todos los criterios de cálculo del término amortizativo que describimos, éste es el menos prudente al no considerar el nivel de riesgo de no alcanzar el objetivo de amortización que queda reflejado en el grado de dispersión que presenta $R(n \cdot k)$. Si para reducir el riesgo de que esto ocurra se incrementa la cuantía del término amortizativo resultante mediante la aplicación de forma explícita de un recargo de seguridad $\theta > 0$, el nuevo término amortizativo α_{E_θ} hace que si el equivalente de la reserva final con el que se calculó α_E era 0, en promedio la reserva al final pase a ser negativa en cuantía,

$$E\left[\boldsymbol{R}_\theta(n\cdot k)\right]=-\theta\cdot\alpha_E\cdot\left(\sum_{s=1}^{n\cdot k-1}E\left[f^{P^{(k)}}(\frac{s}{k},n)\right]+1\right)$$

y en cada periodo de pago de término amortizativo durante el plazo de la operación, la relación entre la reserva esperada calculada con α_E y α_{E_θ}, se calcula

$$E\left[\boldsymbol{R}_\theta(r)\right]=C\cdot E\left[f^{P^{(k)}}(0,\frac{r}{k})\right]-\alpha_{E_\theta}\cdot\left(\sum_{s=1}^{r-1}E\left[f^{P^{(k)}}(\frac{s}{k},\frac{r}{k})\right]+1\right)=$$

$$=E\left[\boldsymbol{R}(r)\right]-\theta\cdot\alpha_E\cdot\left(\sum_{s=1}^{r-1}E\left[f^{P^{(k)}}(\frac{s}{k},\frac{r}{k})\right]+1\right)$$

En esta línea, el estudio del cálculo del término amortizativo se completa mediante el análisis de sensibilidad que presenta la distribución de la reserva del préstamo en n a distintos niveles de recargo.

2) Criterio del percentil de nivel de confianza $(1-\varepsilon)$

El término amortizativo calculado con este criterio α_ε es aquél que hace que la deuda pendiente al final sea superior, con probabilidad ε, a un determinado valor, que si es nulo, se tiene,

$$P\left[\boldsymbol{R}(n\cdot k)>0\right]=\varepsilon$$

Como ya se ha mencionado, dado que no se conoce la distribución de probabilidad de la variable $\boldsymbol{R}(n\cdot k)$, sus percentiles se determinarán obteniéndola por simulación del proceso de amortización, incluyendo, de acuerdo con la anterior expresión, su correspondiente función de distribución desacumulada, con distintos términos amortizativos.

Como caso particular de este criterio cuando el nivel de confianza exigido es el 50%, surge el término amortizativo calculado con el criterio de la mediana α_{Me}. Este término amortizativo hace que la deuda pendiente al final tenga la misma probabilidad de ser positiva o negativa, por lo que existe un riesgo del 50% de no amortización completa en n años con el término amortizativo que resulte.

3) Criterio de la varianza

Con este criterio se obtiene un término amortizativo α_V tal que la esperanza del resto pendiente de amortizar al cabo de n años más K_V veces su varianza toma un determinado valor que, si el objetivo es completar la amortización al cabo de los n años, será el 0.

Con todo ello, α_V hace que la reserva esperada al final sea negativa de manera proporcional a la varianza del resto pendiente en n,

$$E\left[\boldsymbol{R}(n\cdot k)\right]=-K_V\cdot V\left[\boldsymbol{R}(n\cdot k)\right]$$

resultando este criterio, para valores de K_V positivos, tanto más prudente que el de la esperanza matemática con $\theta=0$ cuanta mayor dispersión presente la variable aleatoria $\boldsymbol{R}(n\cdot k)$.

Si tenemos en cuenta la expresión general de la reserva al final $\boldsymbol{R}(n\cdot k)$ se aprecia que es una combinación lineal de variables aleatorias multiplicadas por distintas constantes, en concreto la variable $f^{P^{(k)}}(0,n)$ está multiplicada por el nominal del préstamo C, mientras que las restantes variables quedan multiplicadas por la cuantía en negativo del término amortizativo. Así pues, al ser la esperanza un operador lineal, la reserva media es la combinación lineal de las esperanzas de los factores financieros multiplicadas por las correspondientes constantes, de forma que si la cuantía del término amortizativo fuese una incógnita, la reserva media sería una función lineal de dicha cuantía. Sin embargo, al aplicar la varianza sobre la variable $\boldsymbol{R}(n\cdot k)$, la cuantía del término amortizativo queda elevada al cuadrado como se puede comprobar a través de la expresión obtenida para este estadístico en el epígrafe 2, con lo que la varianza de la reserva es una función cuadrática del término amortizativo. De esta forma, parece evidente que para la determinación de α_V será necesario resolver una ecuación de segundo grado cuya variable será el término amortizativo.

4) Criterio de la desviación tipo

La aplicación de este criterio es similar a la del anterior, pero ahora el riesgo de la operación queda medido en función de la desviación estándar. De forma que, si el valor del equivalente cierto elegido por el decisor fuese nulo, la aplicación del criterio equivale a exigir que la deuda pendiente esperada al final sea negativa en una determinada proporción de la desviación tipo de la deuda al final,

$$E\left[\boldsymbol{R}(n\cdot k)\right] = -K_D \cdot D\left[\boldsymbol{R}(n\cdot k)\right]$$

Así, este criterio también es más prudente que el de la esperanza matemática con recargo de seguridad nulo, cuanta mayor aversión al riesgo presenten los decisores a través del coeficiente K_D y cuanta más dispersión tenga la variable aleatoria $\boldsymbol{R}(n\cdot k)$.

El comportamiento del término amortizativo α_D resultante con este criterio en función de K_D deberá analizarse y verificarse su compatibilidad financiera.

5. PLANES DE AMORTIZACIÓN

Una vez calculado el término amortizativo, los sujetos que intervienen en la operación tendrán que establecer el modo en que las variaciones aleatorias del interés van a influir en la evolución de la amortización, que es lo que denominamos plan de amortización.

Se proponen tres planes de amortización diferentes dependiendo de la variable del modelo sobre cuya evolución se trasladan los efectos de las variaciones en el interés,

1. Considerar el número de años n, empleado en el cálculo del término amortizativo, como una cota máxima de la duración de la operación, siendo todos los términos amortizativos constantes de cuantía α_{CD} excepto el último de ellos que será variable. Por lo tanto, este planteamiento equivale a repercutir la aleatoriedad del interés sobre el importe del último término amortizativo.

   Con todo ello, una evolución temporal a la baja en los tipos de interés, y por tanto a favor del sujeto pasivo, permitiría amortizar el préstamo antes del plazo previsto como máximo $\boldsymbol{N} < n \cdot k$; siendo, en este caso, α_{CD} una cota superior del último término amortizativo, $0 < \boldsymbol{\beta} \leq \alpha_{CD}$. Mientras que por el contrario una evolución al alza de los tipos daría lugar a un último término amortizativo en n que podría tomar un valor superior incluso a α_{CD} con el fin de cancelar definitivamente la deuda, y que en concreto ascendería a $\boldsymbol{R}\,(n \cdot k) + \alpha_{CD}$.

2. Establecer que el término amortizativo previamente calculado α_{CD} constituya una cota superior del último término amortizativo que cancelará definitivamente el préstamo en un número aleatorio de años. De esta forma, se traslada el riesgo de variación del interés a la duración de la operación. En este caso, las trayectorias del proceso de la deuda pendiente en las que no se amortiza nunca el préstamo tienen asignada probabilidad positiva que será tanto mayor cuanto más pequeña sea la cuantía del citado término amortizativo.

   En este sentido, se podría determinar la cuantía del término amortizativo que hace que esa probabilidad sea suficientemente pequeña, aplicando el criterio del percentil sobre la variable aleatoria $\boldsymbol{N}$, análogamente a como se hizo sobre la variable $\boldsymbol{R}\,(n \cdot k)$.

3. Definición de métodos de persecución que permitan modificar el término amortizativo α_{CD} durante el plazo de la operación con el fin de que la dinámica de la amortización no se aleje "demasiado", de acuerdo con determinadas reglas, de la que resultaría adecuada para alcanzar el objetivo de perseguido de cancelación de la deuda. En este punto se podrá distinguir entre,

a) Considerar que los n años empleados en el cálculo del término amortizativo como duración de la operación, constituyen una cota máxima de la misma en la realización del proceso de amortización, lo que llevaría a contemplar únicamente modificaciones al alza en el término amortizativo.

b) Perseguir el objetivo de amortización exactamente en los n años inicialmente previstos para la misma, con lo que se podrán realizar variaciones tanto al alza como a la baja en el término amortizativo, con el fin de que la operación no se acabe ni antes ni después de n.

Este último plan de cancelación de la deuda es exclusivo del enfoque estocástico de las operaciones de amortización, por lo que dedicaremos íntegramente el próximo epígrafe a la descripción de los elementos necesarios para su implantación.

6. DEFINICIÓN DEL PROCESO DE PERSECUCIÓN

De acuerdo con lo expuesto al final del anterior epígrafe, los métodos de persecución permiten intervenir activamente en la dinámica de la operación de préstamo[7]. Este control dinámico de la amortización se llevará a cabo bajo el principio de efectuar el menor número de variaciones posibles en el término amortizativo con el fin de no incrementar excesivamente la incertidumbre del proceso.

El establecimiento de un método de persecución requiere la determinación de dos elementos,

1. ***Banda de control*** que constituirá en cada momento del plazo de la operación el indicador de un alejamiento "excesivo", de acuerdo con su definición, de la dinámica de la amortización que está teniendo lugar con respecto a la que permitiría cumplir el objetivo perseguido. Para su definición se necesita,

[7]El diseño de operaciones financieras en las que el objetivo a alcanzar en el futuro, constitución de capital o amortización de un préstamo, resulta afectado por variaciones de los tipos de interés modelizadas a través de escenarios probabilísticos, ya aparecía bajo la denominación de persecución de objetivos en Alegre (1981, pág. 268).

a) La elección de uno de los elementos de análisis del proceso amortizativo descritos en el epígrafe 3 cuyo comportamiento se considere que representa adecuadamente la evolución de la operación.

b) Determinación de un equivalente cierto del anterior que limite su variabilidad con criterios de prudencia. Así pues, en cada revisión, se comparará la realización de la variable aleatoria en el proceso con su correspondiente equivalente cierto detectando el posible alejamiento del objetivo perseguido.

c) Ha de quedar reflejado el nivel de aversión al riesgo de los decisores, de forma que represente el grado de influencia del anterior equivalente cierto al concretar la amplitud de la banda de control, siendo más amplias cuanta menor aversión al riesgo presenten.

Desde un punto de vista práctico, el control de la evolución de la operación se realizará en cada momento de pago del término amortizativo considerando que ya se ha efectuado su abono. Con todo ello, cuando el valor de la variable aleatoria elegida en la realización del proceso de amortización, sobrepase el límite fijado por la banda de control, será necesario modificar la cuantía del término amortizativo a cobrar en periodos futuros.

En el subepígrafe 6.1 se profundiza en el análisis de este elemento del proceso de persecución realizándose una clasificación de las bandas de control y proponiéndose definiciones concretas para cada elemento de análisis del préstamo.

2. ***Métodos de modificación del término amortizativo***. Cuando a lo largo del proceso de amortización, las bandas de control definidas indiquen que resulta necesario rectificar la cuantía del término amortizativo, se hará de forma que permita conseguir en el plazo que queda de la operación el objetivo de amortización que se esté persiguiendo.

   Así pues, aunque se podrían fijar distintos sistemas de modificación del término amortizativo, proponemos considerar la deuda pendiente en el momento de la revisión r como el nominal de un nuevo préstamo a amortizar en el plazo de $n-\frac{r}{k}$ años que resta hasta el final fijado inicialmente como máximo, siendo lo habitual que se aplique el mismo criterio de decisión con que se obtuvo el α_{CD} en el inicio de la operación. Por lo tanto, en este sentido, si en el cálculo inicial del término amortizativo se utilizó un recargo de seguridad será coherente mantenerlo en las distintas revisiones que haya que realizar, incluso cuando se realicen en el último periodo del plazo ya que a lo largo de él se podrán producir variaciones estocásticas en el tipo de interés y por tanto el recargo contribuirá a reducir el riesgo de no amortización.

En principio, para realizar las correcciones en la cuantía del término amortizativo se conservará el proceso estocástico del tipo de interés considerado en el inicio, y que en nuestro caso es el Poisson Compuesto discretizado por k-ésimo de año. Sin embargo, sí que modificaremos el valor de la tendencia cierta sobre la que se aplicará dicho proceso entre el momento de la revisión y el final de la operación. Dicha tendencia pasará de ser ρ_0, el tanto vigente al contratar el préstamo, a ser ρ_r el tanto nominal instantáneo en el momento de la revisión.

6.1. Propuestas de definición de bandas de control

Dependiendo del momento temporal en que queden concretadas las bandas de control y de la naturaleza de los elementos empleados en su definición, se puede establecer la siguiente clasificación,

A) Bandas prefijadas

Bandas de control definidas desde el inicio de la operación y para la duración íntegra del préstamo, obteniéndose en el inicio los intervalos de variación admitida en cada uno de los periodos futuros. En este caso, se tendrá en cuenta el comportamiento estocástico del proceso de amortización y se considerará desde el momento de la concesión del préstamo la situación aleatoria futura a través de los elementos de análisis que describen su dinámica. Por consiguiente, resulta necesario que el mencionado elemento de análisis sea un proceso estocástico para que así en cada periodo de revisión haya una variable aleatoria cuya realización pueda compararse con los intervalos fijados por el indicador de control. Con todo ello, sólo se podrán definir bandas prefijadas sobre la deuda pendiente puesto que era el único elemento de análisis con naturaleza de proceso estocástico. Sin embargo, tanto el número de términos amortizativos necesarios para cancelar el préstamo N, como la cuantía del término amortizativo residual β son variables aleatorias y no procesos estocásticos y por lo tanto, en cada realización del proceso amortizativo tomarán un solo valor y no uno en cada momento de revisión como se requiere para definir una banda de control prefijada.

A continuación, tomando el proceso estocástico de la deuda pendiente al final de cada k-ésimo de año $\{R(r)\}_{r=0,1,\cdots,k\cdot n}$ como representativo del comportamiento de la dinámica de amortización, definimos una banda superior y otra inferior, de entre las muchas posibles en cada caso.

Banda superior

Si el objetivo a perseguir es que la duración del préstamo sea como máximo de n años, sólo se definirá una banda de control superior, de forma que constituya una cota máxima de los valores que el elemento de análisis tome en cada momento de pago del término amortizativo.

Según se ha señalado, es deseable utilizar, al definir la banda de control, un equivalente cierto de la deuda pendiente en cada momento r de revisión con el que comparar la evolución que efectivamente tendrá dicho proceso en la realización de la amortización, para poder detectar así un alejamiento no deseado de la consecución del objetivo perseguido. Si consideramos como tal equivalente cierto, la reserva prospectiva que en el momento de la revisión correspondería al préstamo francés del enfoque determinista, valorado al tanto constante ρ_0 vigente en el inicio de la operación, y cuyo término amortizativo α se calcula sin tener en cuenta la aleatoriedad en los tipos de interés, la banda de control podría ser tal que se modificase el término amortizativo cuando no se cumpliese la siguiente condición,

$$\boldsymbol{R}^*(r) - R(r) \le K_S \cdot C \qquad 1 > K_S \ge 0$$

donde,

$\boldsymbol{R}^*(r)$ representa el valor que toma la deuda pendiente en r en la realización del proceso de amortización.

K_S simboliza el coeficiente de aversión al riesgo de no alcanzar el objetivo perseguido correspondiente a los decisores y que será tanto más próximo a 1 cuanto mayor sea la propensión al riesgo que presenten.

$R(r) = \alpha \cdot a_{\overline{n \cdot k - r|}\frac{\rho_0}{k}}$ es la reserva matemática prospectiva del préstamo francés en r.

En la definición de esta banda de control, el principio de prudencia reside en utilizar como equivalente cierto el resto pendiente que resultaría si se emplease el término amortizativo del caso cierto α y no el que se pactó en el inicio de la operación aplicando un criterio de decisión determinado α_{CD}, ya que al ser, en general, éste más elevado que aquél daría lugar a una reserva prospectiva mayor, con lo que la banda de control sería más amplia, permitiendo así que la deuda pendiente tomase valores más elevados durante la amortización y aumentando en consecuencia el riesgo de no cumplimiento del objetivo de amortización.

Una primera generalización de la definición de esta banda de control consiste en considerar variable a lo largo del plazo de la operación el coeficiente de aversión que, de acuerdo con los criterios de prudencia que deben primar al determinar la banda de control, disminuiría a medida que nos acercásemos al final de la operación n. De esta manera, los valores permitidos para $\boldsymbol{R}^*(r)$ en cada revisión disminuirían en el transcurso de la amortización no sólo por la reducción que experimenta la reserva cierta $R(r)$ sino también porque se reduce la amplitud de la banda de control definida en torno a ella. Una posible especificación del coeficiente de aversión variable sería una proporción H_S del número de periodos que faltan hasta alcanzar el final de la operación con respecto a la duración global de la misma,

$$K_S(r) = H_S \cdot \frac{n \cdot k - r}{n \cdot k} \qquad H_S \geq 0$$

De esta manera, cuanto más nos acerquemos al final de la operación, la banda superior se estrechará más y por lo tanto se está solicitando una convergencia más rápida al objetivo de amortización haciendo más factible una modificación al alza del término amortizativo.

Banda inferior

En caso de que se pretenda que la duración del préstamo coincida exactamente con los n años inicialmente pactados, junto con la banda superior anteriormente planteada se debería utilizar otra que acotara inferiormente la variabilidad de la deuda pendiente a lo largo del proceso. De esta forma, utilizando el mismo equivalente cierto que intervino en la definición de la banda superior, tenemos que el término amortizativo debe reducirse cuando deje de cumplirse,

$$R^*(r) - R(r) \geq -K_I \cdot \alpha_{CD} \qquad K_I \geq 0$$

siendo K_I el coeficiente de aversión al riesgo de no amortización, de modo que cuanto mayor sea ésta, mayor será también K_I. En el límite, un valor suficientemente grande de este parámetro haría que la banda inferior no actuase, de forma que el término amortizativo no se redujese en ningún caso durante la operación, con lo que este planteamiento sería equivalente a definir únicamente una banda superior.

La elección del término amortizativo calculado al contemplar las variaciones estocásticas en el interés α_{CD} en lugar del correspondiente al caso cierto, resulta más prudente en la definición de la banda inferior, ya que, al ser normalmente $\alpha \leq \alpha_{CD}$, el término amortizativo se modificará menos veces a la baja.

También en este caso es posible definir una banda inferior con coeficiente de aversión variable durante el plazo de la operación. Como ya se ha indicado, el coeficiente crece con la aversión al riesgo, por lo tanto deberá tomar valores más elevados conforme nos acercamos al final del préstamo n. De esta manera, una posible caracterización del coeficiente variable sería considerarlo inversamente proporcional al número de periodos que restan hasta el final, siendo H_I una constante de proporcionalidad,

$$K_I(r) = H_I \cdot \frac{n \cdot k}{n \cdot k - r} \qquad H_I \geq 0$$

Con todo ello, a medida que nos acercamos al final de la operación crece la amplitud de la banda de control por lo que será más difícil que ésta actúe y de esta manera se realizarán menos reducciones del término amortizativo.

B) Bandas bayesianas

Estas bandas de control, a diferencia de las anteriores, no quedan predefinidas desde la concesión del préstamo sino que los intervalos de variación permitida del elemento escogido para representar la dinámica de la amortización para cada periodo se calculan en cada revisión. De hecho, en el origen de la operación lo único que queda definido son los instrumentos a utilizar para acotar dichos intervalos. Estas bandas, por lo tanto, incorporan en su determinación la información observada en la amortización durante los periodos pasados para así obtener las distribuciones del futuro condicionadas por la historia del proceso.

El control se llevará a cabo teniendo en cuenta la realización de la variable aleatoria deuda pendiente en el momento de la revisión $\boldsymbol{R}^*(r)$ y considerándola como el nominal de un nuevo préstamo a amortizar en $n-\frac{r}{k}$ años con el término amortizativo vigente α_{CD}^{r-1}. De esta forma, para definir la banda de control no se tendrá en cuenta la deuda pendiente como tal variable aleatoria sino su realización en el proceso amortizativo. En este caso, se podrá modificar la tendencia cierta sobre la que se aplica el proceso de Poisson Compuesto discretizado por k-ésimo de año que modeliza la evolución del tipo de interés de la operación de forma que pasará a ser ρ_r, tanto instantáneo en el momento de la revisión. A partir de esta información se vuelve a calcular la distribución de probabilidad del elemento de análisis elegido para la definición de la banda de control y se compara con un determinado equivalente cierto.

Seguidamente, proponemos algunas bandas de control definidas de acuerdo con lo anterior, para cada elemento del proceso amortizativo y utilizando para ello diferentes parámetros.

B.1) Deuda pendiente al final

En cada revisión r se calcula el término amortizativo α_{CD}^{r} que resultaría contemplando la historia del proceso como se ha indicado anteriormente y aplicando, sobre la deuda pendiente al final condicionada a la realización de la amortización, el mismo criterio de decisión que se utilizó en el origen de la operación. Una vez calculado este término amortizativo se compara con el que se venía pagando desde la última revisión α_{CD}^{r-1} a través de las siguientes bandas,

<u>*Banda superior*</u>

Si el término amortizativo recalculado α_{CD}^{r} supera en una determinada cuantía al que estaba vigente hasta ese momento, se incrementará el término amortizativo. De esta forma, no habrá modificación mientras se verifique

$$\alpha_{CD}^{r} - \alpha_{CD}^{r-1} \leq K_S \cdot \alpha_{CD} \qquad\qquad K_S \geq 0$$

En este caso, el coeficiente de aversión K_S puede definirse como variable en el plazo de la operación $K_S(r)$ de manera idéntica a como se propuso con anterioridad en la banda superior prefijada.

<u>*Banda inferior*</u>

El término amortizativo se reduce cuando ya no se cumple,

$$\alpha_{CD}^{r} - \alpha_{CD}^{r-1} \geq K_I \cdot \alpha_{CD} \qquad\qquad -K_I \geq 0$$

Así, cuando el objetivo a perseguir sea que la duración del préstamo coincida con la inicialmente pactada como máxima de n años se utilizarán conjuntamente la banda superior y ésta inferior.

La definición de un coeficiente de aversión variable en el plazo de la operación $K_I(r)$ puede ser idéntica a la planteada en el caso de banda inferior prefijada.

B.2) Número N de términos amortizativos necesarios para cancelar el préstamo

Se proponen dos definiciones diferentes de bandas bayesianas,

a) En el momento de la revisión r, se obtiene la distribución de probabilidad del número de términos N^r que quedan para cancelar totalmente la deuda pendiente $\boldsymbol{R}^*(r)$, con el término amortizativo que resultó de la última revisión α_{CD}^{r-1} y modificando la tendencia cierta del Poisson Compuesto discretizado que pasará a ser ρ_r.

Una vez determinada la distribución de probabilidad de N^r, la compararemos con el número de periodos que realmente quedan para finalizar el préstamo. Esta comparación puede realizarse a través de un equivalente cierto de la variable aleatoria, verbigracia su valor esperado, o simplemente analizando la probabilidad que en su distribución acumula el valor $n \cdot k - r$. Escogeremos esta segunda opción para las bandas que a continuación proponemos.

<u>Banda superior</u>

El término amortizativo se incrementará cuando el número de periodos necesarios para amortizar $\boldsymbol{R}^*(r)$ con α_{CD}^{r-1} sea superior a los que realmente quedan con una probabilidad superior o igual a ε, es decir, cuando ya no se cumpla,

$$P\left[N^r > (n \cdot k - r)\right] \leq \varepsilon$$

La aversión al riesgo del decisor queda recogida en el parámetro ε disminuyendo éste conforme aumenta aquélla. Así pues, la probabilidad admitida como máxima antes de incrementar el término amortizativo podría haberse considerado variable a lo largo del plazo de la operación, teniendo que reducirse conforme nos acercamos al final de la misma para así permitir más incrementos del término amortizativo.

Banda inferior

Se reduce el término amortizativo cuando no se verifica la siguiente condición, donde φ es la probabilidad admitida como máxima para detectar un término amortizativo demasiado elevado,

$$P\left[N^r \leq (n \cdot k - r)\right] \leq \varphi$$

es decir, cuando el número de términos amortizativos α_{CD}^{r-1} necesarios para cancelar la deuda pendiente $\boldsymbol{R}^*(r)$ sea inferior a los que realmente quedan para acabar el préstamo, con una probabilidad superior a φ.

En este caso, la aversión al riesgo de no amortización de los decisores queda reflejada a través del parámetro φ , creciendo éste con aquélla. De forma que si valiese 1, como la probabilidad nunca podrá ser superior, no se reduciría el término amortizativo y sólo tendría posibilidad de actuar la banda superior. Con todo ello, si definiésemos esa probabilidad como variable en el plazo de la operación debería reducirse con el número de periodos que restan hasta el final.

b) El segundo método bayesiano para definir las bandas de control sobre el número de términos amortizativos necesarios para cancelar la deuda también requiere la determinación en el momento de la revisión r de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria N^r.

La utilización del mismo en cada revisión r se realizará siguiendo 3 etapas,

1) Determinación de un intervalo de valores entorno al número de periodos que realmente quedan para llegar al final de la operación $n \cdot k - r$, teniendo en cuenta que este valor no tiene porqué ser el centro del intervalo. De esta forma, el conjunto de valores que estamos considerando constituye el intervalo discreto,

$$\left[n \cdot k - r - d_I , n \cdot k - r + d_S\right] \qquad d_I \overset{>}{\underset{<}{=}} d_S \qquad , \qquad d_I , d_S \geq 0$$

2) Una vez definido el anterior intervalo, obtendremos la probabilidad de que la variable aleatoria N^r esté dentro del mismo con el término amortizativo actual α_{CD}^{r-1}.

3) Posteriormente, se calculará el término amortizativo que hace que la anterior probabilidad sea máxima y se cuantificará ésta, de manera que si resulta ser "significativamente" superior a la asociada al término amortizativo actual α_{CD}^{r-1}, modificaremos la cuantía de éste.

De esta manera, el grado de aversión al riesgo de los decisores se pone de manifiesto a través de los parámetros d_I y d_S, que constituyen las diferencias máximas admitidas con respecto al número de periodos que quedan para completar la duración n considerada inicialmente para el préstamo. Cuanto mayor sea d_I con respecto a d_S, más elevada será la aversión al riesgo de no amortización, lo que ocasionará un mayor número de aumentos en el término amortizativo, ya que los términos amortizativos que asignan una probabilidad máxima a la amortización previa a n serán más elevados cuanto mayor sea d_I.

Asimismo, si la amplitud del intervalo es muy pequeña, significará que en cada periodo estamos buscando el término amortizativo que hace que la duración del préstamo sea muy próxima a n. Por lo tanto, unos valores suficientemente pequeños de d_I y d_S, equivaldrían a emplear conjuntamente la banda superior y la inferior de planteamientos anteriores puesto que en cada revisión compararíamos α_{CD}^{r-1} con el término amortizativo que maximizase la probabilidad de que la duración sea casi exactamente de n años.

La mayor propensión al riesgo quedaría reflejada estableciendo que d_S fuese superior a d_I.

B.3) Cuantía del último término amortizativo β

En este caso, calcularemos la distribución de probabilidad del término amortizativo residual β^r que correspondería a amortizar la deuda pendiente en el momento de la revisión $R^*(r)$ en un plazo máximo de

$n \cdot k - r$ periodos, a través del término amortizativo vigente α_{CD}^{r-1} y con el proceso de Poisson Compuesto discretizado para el interés de valoración aplicado sobre el tanto de mercado ρ_r . La banda de control quedará definida al comparar β^r con una determinada proporción del término amortizativo.

<u>*Banda superior*</u>

De esta manera, el término amortizativo se incrementará cuando el término amortizativo residual β^r supere una proporción K_S del actual con una probabilidad superior a ε , o lo que es igual, cuando ya no se dé la relación

$$P\left[\beta^r > K_S \cdot \alpha_{CD}^{r-1}\right] \leq \varepsilon$$

Con esta especificación de la banda de control se utilizan dos coeficientes K_S y ε que reflejan el grado de aversión al riesgo de no amortización, de forma que cuanto mayor sea ésta, K_S y ε tendrán que tomar valores más pequeños. Con lo que si fuesen variables en el plazo de la operación deberían disminuir conforme el momento de revisión esté más próximo al final de la operación.

<u>*Banda inferior*</u>

En este caso, reduciremos la cuantía del término amortizativo cuando el término amortizativo residual sea inferior a una determinada proporción K_I del actual con probabilidad superior a φ, o cuando ya no se verifique

$$P\left[\beta^r < K_I \cdot \alpha_{CD}^{r-1}\right] \leq \varphi$$

Cuanto mayor sea la aversión al riesgo de no amortización más pequeño será K_I mientras que φ tomará valores más elevados. Debiendo tenerse en cuenta que si estos parámetros se definen como variables a lo largo de la operación, la aversión al riesgo se incrementa conforme nos aproximamos al final de la misma.

7. EJEMPLO NUMÉRICO

Con el fin de ilustrar el anterior análisis teórico de las operaciones de amortización valoradas con leyes estocásticas, plantearemos un préstamo concreto.

Sea un nominal de 1.000.000 u.m. a amortizar en 5 años mediante términos amortizativos mensuales $k=12$, que a priori consideraremos constantes.

El interés instantáneo en el origen de la operación es $\rho_0 = 0'06$ y constituye por tanto, la tendencia constante sobre la que posteriormente se aplicarán las perturbaciones estocásticas del interés. Con todo ello, el término amortizativo que resultaría del modelo cierto con este tanto de valoración constante asciende a $\alpha = 19.339'7887$ u.m. que se harían efectivas al final de cada mes.

Respecto al proceso de Poisson Compuesto discretizado mensualmente que vamos a utilizar para recoger la evolución del precio de la operación, suponemos que el número medio de variaciones discretas al cabo del año en el interés instantáneo es $\lambda=2$ siendo la cuantía de cada uno de esos saltos una variable aleatoria δ distribuida según una Normal de media $\mu=0$ y desviación tipo $\sigma=0'01$. De acuerdo con las propiedades del factor asociado al proceso de saltos, el factor esperado crece con $V[\delta]$ con independencia de los parámetros del proceso. Por lo tanto, al ser $E[\delta]=0$ el factor esperado que resulta es tanto mayor que el cierto, caso particular con $V[\delta]=0$, cuanto mayor es la varianza de δ.

a) Término amortizativo

En el cálculo del término amortizativo de la operación con riesgo de interés será necesario aplicar sobre la variable deuda pendiente al final uno de los criterios de decisión descritos en el epígrafe 4. Para esta aplicación escogeremos el criterio de la esperanza matemática, de forma que el α_E que resulte hará que en promedio la deuda pendiente al final de 60 meses sea nula, $E[\boldsymbol{R}(60)]=0$.

Adicionalmente, para reducir el riesgo de no amortización, incrementaremos el término amortizativo mediante la aplicación de forma explícita de un recargo de seguridad $\theta = 0'1$. Así pues, el término amortizativo α_E y el recargado $\alpha_{E_{0'1}}$ son respectivamente,

$$\alpha_E = 19.377'0686 \qquad\qquad \alpha_{E_{0'1}} = 21.314'7754$$

El término amortizativo sin recargar α_E es superior al correspondiente al caso cierto ya que la aleatoriedad en el tipo de interés se pone de manifiesto en que el factor esperado crece con la varianza de las variables δ. Esto hace que con el proceso de saltos, se espere que la deuda pendiente crezca más que con el interés cierto, y por tanto se necesite un término amortizativo superior para conseguir una reserva final esperada nula.

No obstante, el recargo implícito de α_E con respecto al del caso cierto es sólo del 0'2%, lo que refleja que el criterio de la esperanza sin recargar es poco prudente puesto que no tiene en cuenta la dispersión de la variable aleatoria sobre la que se aplica, en este caso $V[\boldsymbol{R}(60)]$. Así pues, en la amortización utilizaremos el término recargado $\alpha_{E_{0'1}}$.

b) Planes de amortización

Como ya se ha comentado, la distribución de probabilidad de las variables aleatorias que describen la dinámica de la amortización dependen de la asociada a la deuda pendiente $\boldsymbol{R}(r)$. Sin embargo, debido a que desconocemos la expresión analítica de la función de densidad de esta variable para el proceso estocástico del interés utilizado, determinaremos mediante simulación su distribución de probabilidad y la de las restantes variables aleatorias que dependen de ella. En concreto, realizaremos 10.000.000 de simulaciones.

b.1) Establecimiento de duración máxima

En este caso, se establece una duración máxima para cancelar la deuda que supondremos son los 5 años empleados en el inicio para calcular el término amortizativo.

Para evaluar el comportamiento de la amortización obtenemos los estadísticos esperanza y varianza de la deuda pendiente al final $\boldsymbol{R}(60)$, de la variable aleatoria mixta $\widetilde{\boldsymbol{R}}(60)$ y, por último, también de la deuda pendiente al final condicionada a positivo, $\boldsymbol{R}(60) \mid \boldsymbol{R}(60) > 0$.

	$\boldsymbol{R}(60)$	$\widetilde{\boldsymbol{R}}(60)$	$\boldsymbol{R}(60) \mid \boldsymbol{R}(60) > 0$
E	-135.518'5284	88'7585	26.235'0750
V	1.426.235.078'1309	4.750.905'2228	718.313.208'3660

Tabla 1

Asimismo, obtenemos la distribución de probabilidad de la deuda positiva al final $\widetilde{\boldsymbol{R}}(60)$ que toma el valor 0 cuando el préstamo se amortiza durante los 60 meses fijados como máximo y en caso contrario toma el valor de la deuda al final,

$\widetilde{\boldsymbol{R}}(60)$	Trayectorias	Tray. acumuladas
0	9.966.168	10.000.000
(0,1]	10.786	33.832
(1,2]	7.397	23.046
(2,3]	4.998	15.649
(3,4]	3.355	10.651
(4,5]	2.302	7.296
(5,6]	1.499	4.994
(6,7]	1.137	3.495
(7,8]	733	2.358
(8,9]	521	1.625
(9,10]	335	1.104
(10,15]	629	769
(15,20]	109	140
(20,25]	27	31
(25,30]	4	4

Tabla 2

Con estos resultados observamos que la utilización del término amortizativo recargado $\alpha_{E_{0'1}}$ equivale a exigir que la deuda pendiente al final sea negativa $E[\boldsymbol{R}(60)] = -135.518'5284$.

En cuanto a la deuda pendiente positiva esperada es de casi un 0% del nominal puesto que en un 99'66% de los casos el préstamo se amortiza durante los 5 años y el valor 0 de la variable aleatoria $\widetilde{\boldsymbol{R}}(60)$ tiene mucho peso específico en la determinación del promedio. Comparativamente, esta variable lógicamente presenta menor dispersión que $\boldsymbol{R}(60)$ puesto que los valores negativos de ésta se concentran en el 0 de aquélla.

La deuda pendiente condicionada a positivo es en promedio también muy reducida suponiendo únicamente un 0'26% del nominal.

En la distribución de probabilidad de $\tilde{\boldsymbol{R}}(60)$ se observa que la probabilidad de no amortización sólo asciende al 0'338% y que el rango de valores oscila entre el 1% y el 30% del nominal teniendo los valores más elevados probabilidad casi nula.

Por último, en la tabla 3 se obtiene la distribución de probabilidad del número de términos amortizativos que cancelan el préstamo en los 5 años, $\boldsymbol{N} \leq 60$.

En ella, se aprecia que las amortizaciones más tempranas se producen con 45 pagos y que el valor modal de $\boldsymbol{N}$ es 54 términos amortizativos con probabilidad del 26'87%. Asimismo, la probabilidad de que el número de términos sea inferior o igual a 54 es del 60'30%.

$\boldsymbol{N}$	Trayectorias
45	6
46	99
47	777
48	4.844
49	25.817
50	106.889
51	358.918
52	944.764
53	1.901.660
54	2.686.623
55	1.976.703
56	1.070.048
57	514.199
58	230.945
59	100.421
60	43.455
TOTAL	9.966.168

Tabla 3

b.2) Ultimo término amortizativo acotado por el pactado inicialmente

En este caso, los sujetos de la operación establecen que el riesgo de interés se trasladará a la duración del préstamo, de forma que el término amortizativo inicial será una cota superior del término residual β .

Para analizar la amortización con este planteamiento, resulta clave determinar la distribución de la variable aleatoria bidimensional (N, β). En la siguiente tabla recogemos la que se ha obtenido para el ejemplo numérico que hemos planteado, quedando representados los valores de β en porcentaje del término amortizativo pactado inicialmente $\alpha_{E_{(v)1}}$.

	N								
β	<51	51	52	53	54	55	56	57	>57
(0,10]	6.663	20.366	61.154	142.402	246.252	244.119	141.561	70.413	57.532
(10,20]	7.564	22.835	67.614	152.788	255.694	233.822	132.957	65.656	53.020
(20,30]	9.040	25.926	74.271	163.292	264.217	223.203	124.766	61.164	48.702
(30,40]	10.470	29.247	80.842	173.953	271.619	212.875	116.628	56.678	45.013
(40,50]	12.091	32.749	88.625	184.358	276.624	202.404	109.106	52.634	41.352
(50,60]	13.803	36.420	96.966	195.847	285.181	192.489	102.002	48.185	38.341
(60,70]	15.782	40.239	105.268	206.433	290.882	181.918	95.026	45.091	34.957
(70,80]	18.110	45.048	114.425	217.125	274.687	171.380	88.451	41.102	32.506
(80,90]	20.757	50.094	123.281	227.034	265.818	160.849	82.246	38.357	30.156
(90,100]	23.582	55.714	133.367	238.139	256.647	152.762	76.836	35.170	27.266
TOTAL	137.862	358.638	945.813	1.901.371	2.687.621	1.975.821	1.069.579	514.450	408.845

Tabla 4

Asimismo, analizaremos la distribución marginal del número de términos necesarios para la amortización N.

	i									
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40 + *i*	0	0	0	0	0	97	790	4.910	25.594	106.471
50 + *i*	358.638	945.813	1.901.371	2.687.621	1.975.821	1.069.579	514.450	230.930	100.731	43.685
60 + *i*	18.572	8.221	3.632	1.619	762	345	179	77	42	18
70 + *i*	17	9	3	1	1	1	0	0	0	0
>80	0									

Tabla 5

A través de estos datos se aprecia la dependencia existente entre N y β, de forma que cuanto mayores son los valores de N, es más probable que β tome valores más pequeños. Sin embargo, cuando la amortización se produce con pocos términos amortizativos es más probable que β sea más próximo al inicial $\alpha_{E_{0'1}}$.

La distribución marginal de N permite observar que las amortizaciones más tempranas tienen lugar con 46 términos amortizativos aunque con probabilidades casi 0. Al igual que con el plan amortizativo anterior, la mayor probabilidad de amortización se da con 54 términos.

Por otro lado, la amortización más tardía tiene lugar con 76 términos amortizativos aunque con probabilidad casi 0. Con lo que, aunque como se vio teóricamente, con este plan amortizativo la probabilidad de no amortización puede ser estrictamente positiva, en el ejemplo numérico que hemos propuesto esta probabilidad es nula.

Los resultados obtenidos con éste y el anterior plan de amortización, permiten concluir que el recargo utilizado ha contribuido a reducir considerablemente el riesgo de interés, pudiendo incluso considerarse θ excesivo si los sujetos de la operación tienen como objetivo la cancelación de la deuda exactamente en los 5 años pactados inicialmente. En este sentido, podría resultar aconsejable diseñar un método de persecución de objetivos que permitiese modificar el término amortizativo dependiendo de la evolución de la dinámica de la operación, y que pasamos a describir en el siguiente apartado como tercer plan amortizativo.

b.3) Métodos de persecución

Para ilustrar la implantación de métodos de persecución de objetivos, utilizaremos bandas de control prefijadas, relativas por tanto necesariamente al proceso estocástico de la reserva del préstamo.

En los anteriores planes de amortización se ha puesto de manifiesto que el término amortizativo resulta "suficientemente" elevado para conseguir la cancelación de la deuda en un máximo de 5 años. Por lo tanto, definiremos el proceso con el objetivo a perseguir de amortización exactamente en 5 años. Así pues, utilizaremos conjuntamente una banda superior con un coeficiente $K_S = 0'1$ y otra inferior con $K_I = 1$.

En cuanto a los métodos para recalcular la cuantía del término amortizativo del préstamo cuando se detecte un alejamiento no deseado del objetivo de amortización, emplearemos el criterio de decisión de la esperanza matemática con el recargo $\theta = 0'1$ aplicado en el inicio de la operación. Para ello, consideraremos que la deuda pendiente en el momento de la revisión r del término amortizativo es el nominal de un nuevo préstamo a cancelar en los periodos que queden hasta llegar al final de los 60 meses del inicio de la operación, $60-r$, y con una tendencia cierta del interés igual al tanto nominal instantáneo de valoración vigente en ese momento.

En la tabla 6 se recoge la esperanza y varianza de la deuda pendiente positiva y de la deuda pendiente condicionada a positivo.

	$\tilde{\boldsymbol{R}}(60)$	$\boldsymbol{R}(60) \mid \boldsymbol{R}(60) > 0$
E	76'71	24.054'99
V	3.295.873,6429	456.715.845,0591

Tabla 6

En la tabla 7 se resume la distribución de probabilidad de la variable deuda pendiente positiva.

$\tilde{\boldsymbol{R}}(60)$	Trayectorias	Tray. Acumuladas
0	9.968.110	10.000.000
(0,1]	10.227	31.890
(1,2]	7.118	21.663
(2,3]	4.863	14.545
(3,4]	3.267	9.682
(4,5]	2.259	6.415
(5,6]	1.482	4.156
(6,7]	1.124	2.674
(7,8]	732	1.550
(8,9]	519	818
(9,10]	299	299

Tabla 7

La distribución de probabilidad del número de términos amortizativos necesarios para cancelar la deuda en los 5 primeros años del contrato aparece en la tabla 8, juntamente con el número de modificaciones realizadas en cada uno de los meses del préstamo. Dado el volumen de datos, los menos relevantes aparecen agrupados.

N	Trayectorias	Nº. Aumentos	Nº. reducciones
[0,3]	0	0	0
(3,4]	0	0	101
(4,19]	0	0	89.657.358
(19,20]	0	0	9.388.355
(20,21]	0	1	9.434.066
(21,23]	0	0	18.980.172
(23,24]	0	1	9.536.814
(24,35]	0	177	106.198.891
(35,46]	0	407	107.653.797
(46,57]	0	245	88.174.049
(57,58]	0	2	10.310
(58,59]	38.512	0	0
(59,60]	9.929.598	0	0
TOTAL	9.968.110	833	439.033.958

Tabla 8

Para determinar las influencias que sobre la amortización tiene la utilización de los métodos de persecución comparamos los resultados recogidos en estas tablas con los obtenidos en el primer plan de amortización, tablas 1 a 3. Con todo ello, se aprecian los siguientes efectos,

- Se ven reducidas en términos esperados la deuda final positiva y la deuda condicionada a positivo. Asimismo, también disminuye la dispersión de ambas variables aleatorias.

- En la tabla 7 se comprueba la reducción de la dispersión en $\tilde{R}(60)$ puesto que el rango de valores de la variable aleatoria está entre 0 y 10. La deuda pendiente positiva es del 10% del nominal en 299 trayectorias y cuando no hay bandas de control la deuda final es mayor o igual a ese valor en 1.104 trayectorias.

- Se observa que se incrementa el número de trayectorias con amortización completa en 5 años, produciéndose todas ellas en los dos últimos meses, por lo que todo ello redunda en una menor dispersión de la variable aleatoria $N \leq 60$.

- Dado que el término amortizativo inicial $\alpha_{E_{0\,l}}$ era muy elevado, actúa más a menudo la banda inferior que la superior. Esta última se utiliza entre los meses 21 y 58 y en un total de 833 ocasiones. Sin embargo, el número de reducciones asciende a 439.033.958 en el total de 10 millones de trayectorias, empezando a producirse estas modificaciones a la baja en el cuarto mes.

Así pues, a la luz de los resultados obtenidos se puede afirmar que la utilización de métodos de persecución de objetivos permite una mayor convergencia de la dinámica de la amortización, en cuanto a duración de la misma, a la que resultaría en el caso sin riesgo de interés.

Bibliografía

Alegre, A. (1981). *Memoria sobre conceptos, método, fuentes y programa de la Matemática de las Operaciones Financieras.* Barcelona.

Alegre, A. y R. M. Mayoral (1995). "Financial decision criteria in stochastic accumulation. An application with the Wiener process". *Actas del XXV International Congress of Actuaries,* 65-86. Bruselas.

Gil Peláez, L. (1987). *Matemática de las Operaciones Financieras.* Editorial A.C, Madrid.

Goovaerts, M. J., F. De Vylder y J. Haezendonck (1984). *Insurance premiums. Theory and applications.* North-Holland, Amsterdam.

Mayoral, R. M. (1997). *Análisis estocástico de las operaciones financieras y actuariales con riesgo de variación del tipo de interés.* Tesis doctoral. Barcelona.

Mayoral, R. M. y A. Alegre (1997). "Capitalización estocástica asociada al proceso de Poisson Compuesto". *IV Congreso de Matemática de las Operaciones Financieras,* 149-173. Barcelona.

Merton, R. C. (1976). "Option pricing when underlying stock returns are discontinuous". *Journal of Financial Economics 3,* 125-144.

Rodríguez, A. (1994). *Matemática de la Financiación.* Ediciones S.,Barcelona.