Procedimiento abreviado para resolver los problemas de programación lineal tipo Hitchcock

Por Francisco BUSQUETS

1

Antecedentes

Recordemos (1) que los problemas tipo Hitchcock pueden representarse por el siguiente esquema:

Disponibilidades	Aplicaciones						
	A_1	A_2	....	A_k	....	A_q	
D_1	λ_{11}	λ_{12}	....	λ_{1k}	....	λ_{1q}	
D_2	λ_{21}	λ_{22}	....	λ_{2k}	....	λ_{2q}	
....	....						
....	....						
D_h	λ_{h1}	λ_{h2}	....	λ_{hk}	....	λ_{hq}	
....	....						$\sum_{h=1}^{p} D_h = \sum_{k=1}^{q} A_k$
....	....						
D_p	λ_{p1}	λ_{p2}	....	λ_{pk}	....	λ_{pq}	

siendo λ_{hk} la cantidad de disponibilidad D_h que se destina a la aplicación A_k.

---

(1) Vid. *Programación Lineal. Método del Simplex,* publicado en el volumen número 2 de estos Anales, de 1962.

Que la función a maximizar (o minimizar) es de la forma:

$$z = c_{11}\,\lambda_{11} + c_{12}\,\lambda_{12} + \ldots\ldots + c_{hk}\,\lambda_{hk} + \ldots\ldots + c_{pq}\,\lambda_{pq}$$

Y que las ecuaciones de vínculo resultan de sumar las filas e igualarlas a las disponibilidades y sumar las columnas e igualarlas a las aplicaciones, siendo la última ecuación combinación lineal de las demás (aunque en lo que sigue no prescindiremos de ella).

Los vectores columna de la matriz A y el P_0, de los términos independientes, son los siguienes:

		MATRIZ A						Vector	
		P_{11}	P_{12}	....	P_{hk}	....	P_{pq}	P_0	
1^a	ecuación	1	1	....	0	....	0	D_1	
2^a	ecuación	0	0	....	0	....	0	D_2	
....	....	....	....	....	....	....	....	....	
....	....	....	....	....	....	....	....	....	
h^a	ecuación	0	0	....	1	....	0	D_h	
....	....	....	....	....	....	....	....	....	
....	....	....	....	....	....	....	....	....	
p^a	ecuación	0	0	....	0	....	1	D_p	
$(p+1)^a$	ecuación	1	0	....	0	....	0	A_1	[1]
$(p+2)^a$	ecuación	0	1	....	0	....	0	A_2	
....	....	....	....	....	....	....	....	....	
....	....	....	....	....	....	....	....	....	
$(p+k)^a$	ecuación	0	0	....	1	....	0	A_k	
....	....	....	....	....	....	....	....	....	
....	....	....	....	....	....	....	....	....	
$(p+q)^a$	ecuación	0	0	....	0	....	1	A_q	

2

Solución de base inicial

Se puede dar un método general para obtener una solución de base del sistema de ecuaciones de vínculo (2).

Escrito el esquema del problema en la siguiente forma:

	A_1	A_2	$\ldots$	$\ldots$	A_k	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	A_p
D_1									
D_2									
$\vdots$									
D_h									
$\vdots$									
D_p									

en la casilla arbitraria en la que se cruzan, p. e., la fila h con la columna k, daremos a su variable, considerándola como parte de la base, el valor

$$\lambda_{hk} = \text{mín}\ [D_h, A_k]$$

(es decir, el menor de ambos valores).

Podemos, entonces, pasar a un esquema más reducido en el que se habrá:

— Suprimido la fila h, si es $\lambda_{hk} = D_h$ y encabezado la columna k con el valor $A_k - \lambda_{hk}$.

---

(2) Recuérdese que una solución de base del sistema de ecuaciones de vínculo es la que resulta de igualar a cero las $pq - p - q + 1$ variables que arbitrariamente se tomen como independientes y resolver el sistema de $p + q - 1$ ecuaciones para el resto de las variables, siempre que éstas reciban en la solución valores no negativos. A dichas variables *dependientes* las llamaremos, en lo que sigue, *variables de la base*.

— Suprimido la columna k, si es $\lambda_{hk} = A_k$ y encabezado la fila h con el valor $D_h - \lambda_{hk}$.
— Suprimido la fila h y la columna k, si es $D_h = A_k = \lambda_{hk}$ y en el que procederemos de nuevo en igual forma con una casilla arbitraria.

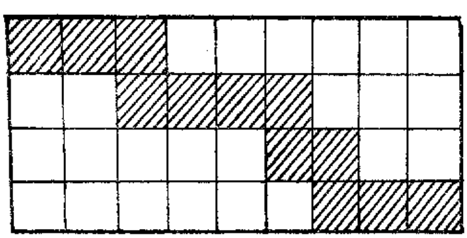
Aplicando reiteradamente este método hasta que no queden filas ni columnas para un nuevo esquema reducido, si el número de casillas con valor escrito es $p + q - 1$, tendremos los valores que constituyen la solución de base inicial. Si es inferior, debemos tomar arbitrariamente las casillas que hagan falta para completar la base, escribiendo en ellas el valor *cero* (se tratará de una base degenerada que no impide proseguir con el Método del Simplex). Las demás variables, como sabemos, toman también el valor *cero*, aunque, para proseguir con la mecánica del sistema, no es necesario escribirlo en las casillas.

Dentro de este método, el camino que proporciona la solución inicial de base más próxima a una solución óptima, consiste en elegir en el primer esquema y en cada uno de los sucesivos reducidos la casilla correspondiente a la variable λ_{rs} que tiene, en la función a optimizar, el coeficiente

$$c_{rs} = \text{máx}\ [c_{ij}]$$

es el método llamado de *costo mínimo*.

Sin embargo, el procedimiento más sistemático y que mejor se presta a la mecanización es el que consiste en tomar, en el esquema inicial y en cada uno de los reducidos, la casilla *principal*, es decir, la que ocupa la primera fila y la primera columna. Con el cual las variables de la base (aplicando los *ceros* necesarios para alcanzar el número de p + q — 1) ocuparán un conjunto escalonado de casillas semejante a la parte sombreada de la siguiente figura:



Este método, llamado de *la esquina noroeste,* es el que consideraremos en lo que sigue, aunque las demostraciones serían válidas para cualquier otro. Nótese que, al ser $p + q - 1$ el número de variables de la base, habrán siempre:

— para cada dos filas consecutivas, variables de la base que formarán columna, y

— para cada dos columnas consecutivas, variables de la base que formarán fila.

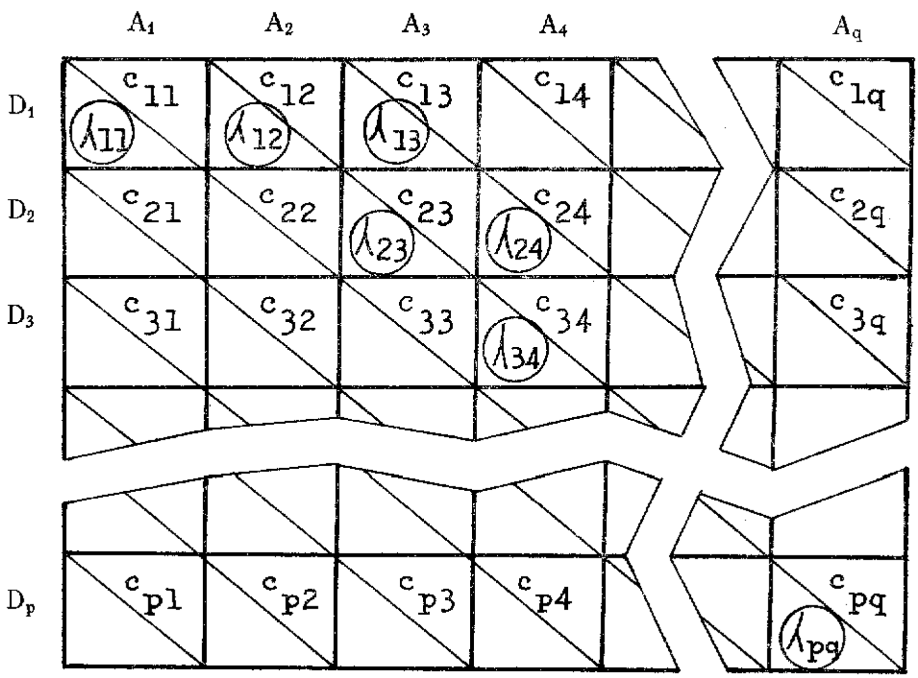
3

Abreviación del Método del Simplex

Hallada la solución de base inicial, supongamos que las variables de la base son λ_{11}, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23}, λ_{24}, λ_{34}, ..., λ_{pq}.

La primera tabla del Simplex puede escribirse, usando el esquema propuesto, en la siguiente forma:

Tabla I del Simplex



Obsérvese que los valores de las variables de la base los circunscribimos por curvas cerradas para distinguirlos de las cantidades que escribiremos en los demás triángulos análogos.

Como veremos más adelante, el cálculo de los valores de $\omega_{hk} = Z_{hk} - C_{hk}$ para todo *h* y *k* es tan sencillo que puede efectuarse directamente sobre la tabla. Si anotamos dichos valores en las mitades triangulares inferiores de las casillas que corresponden a variables que no pertenecen a la base (y cuyo valor numérico es cero), será fácil localizar entre ellos el negativo de mayor valor absoluto, que existirá siempre a no ser que, por pura casualidad, la solución inicial de base fuese óptima. Son también de determinación inmediata, como veremos, el valor λ'_{hk} con que debe ser introducida esta variable en la nueva base y aquélla que debe excluirse.

Plantear la Tabla II (abreviada) del Simplex es, igualmente, muy fácil, por cuanto los valores de las demás variables de la nueva base se encuentran bien por un simple tanteo, bien aplicando una regla muy sencilla.

Veamos cómo se determinan los valores ω.

Si representamos por α_h un vector columna de $p + q - 1$ filas cuyos elementos son ceros excepto el que ocupa la fila *h*, que será la unidad, y por β_k otro vector columna del mismo número de filas, que tenga la unidad por elemento de la fila $p + k$ y los demás elementos sean ceros, el vector P_{hk} de [1] puede expresarse (3):

$$P_{hk} = \alpha_h + \beta_k \qquad [2]$$

Para distinguir, en lo que sigue, las variables de la base y sus correspondientes vectores de la matriz *A*, sustituiremos sus dos subíndices por uno solo que sea el resultado de disminuir en una unidad la suma de ambos. Es decir, que las variables $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23}, \lambda_{24}, \lambda_{34}, \ldots, \lambda_{pq}$ se anotarán, respectivamente, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \ldots, \lambda_{p+q-1}$ y los vectores correspondientes, $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, \ldots, P_{p+q-1}$, con lo cual quedan también perfectamente determinados.

La diferencia entre dos vectores α o β de subíndices consecutivos, puede expresarse siempre (recordar último párrafo de 2) en función

---

(3) Ahora puede verse por qué la ecuación $(p + q)^a$ del sistema de vínculo ha sido conservada. Para no restringir la generalidad de la fórmula de descomposición.

de dos vectores de columna de A correspondientes a variables de la base. Así, por ejemplo:

$$P_{12} - P_{11} = P_2 - P_1 = (\alpha_1 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1) = \beta_2 - \beta_1 \qquad [3,\ a]$$

$$P_{13} - P_{12} = P_3 - P_2 = (\alpha_1 + \beta_3) - (\alpha_1 + \beta_2) = \beta_3 - \beta_2 \qquad [3,\ b]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad [3]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{23} - P_{13} = P_4 - P_3 = (\alpha_2 + \beta_3) - (\alpha_1 + \beta_3) = \alpha_2 - \alpha_1 \qquad [3,\ c]$$

$$P_{34} - P_{24} = P_6 - P_5 = (\alpha_3 + \beta_4) - (\alpha_2 + \beta_4) = \alpha_3 - \alpha_2 \qquad [3,\ d]$$

De lo que se deduce, inmediatamente, que cualquier vector α_h o β_k puede ser expresado en función de vectores P_i (de las variables de la base) y α_1, como sigue:

$$
\begin{array}{ll}
\text{de } [2] & \beta_1 = P_1 - \alpha_1 = -\alpha_1 + P_1 \\
\text{de } [3,\ a] & \beta_2 = \beta_1 - P_1 + P_2 = -\alpha_1 + P_1 - P_1 + P_2 = -\alpha_1 + P_2 \\
\text{de } [3,\ b] & \beta_3 = \beta_2 - P_2 + P_3 = -\alpha_1 + P_2 - P_2 + P_3 = -\alpha_1 + P_3 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\text{de } [3,\ c] & \alpha_2 = \alpha_1 + P_4 - P_3 \\
\text{de } [3,\ d] & \alpha_3 = \alpha_2 + P_6 - P_5 = \alpha_1 + P_4 - P_3 + P_6 - P_5
\end{array}
\qquad [4]
$$

en general, puede, pues, escribirse:

$$\alpha_h = \alpha_1 + \sum_{i=1}^{p+q-1} \mu_{hi}\, P_i$$

$$\beta_k = -\alpha_1 + \sum_{i=1}^{p+q-1} \nu_{ki}\, P_i \qquad [5]$$

siendo μ_{hi} y ν_{ki} coeficientes con valor $+1$, -1 o cero.

Compárense los desarrollos de β_3 y α_3 de [4] y obsérvese que el vector P_3 aparece en ambos, pero con signo distinto. Ello obedece a que cualquier P_i que sea minuendo para las diferencias de vectores consecutivos β en [3] debe ser sustraendo para las diferencias de vectores consecutivos α, por cuanto corresponderá a una variable de la base que será la última de su fila y la primera de su columna en el esquema. Es decir, que μ_{hi} y ν_{ki}, que son coeficientes del mismo vector P_i, serán ambos nulos o la unidad con signo contrario.

Cualquier vector P_{hk} correspondiente a una variable independiente (es decir, no perteneciente a la base) será de la forma:

$$P_{hk} = \alpha_h + \beta_k = \alpha_1 + \sum_{i=1}^{p+q-1} \mu_{hi} P_i - \alpha_1 + \sum_{i=1}^{p+q-1} \nu_{ki} P_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{p+q-1} (\mu_{hi} + \nu_{ki}) P_i = \sum_{i=1}^{p+q-1} x_{hk,\,i}\, P_i$$

siendo $x_{hk,\,i} = \mu_{hi} + \nu_{ki}$.

Es de notar que los valores $x_{hk,\,i}$ (para $i = 1, 2, \ldots, p + q - 1$) constituyen el vector columna de la matriz X de la tabla completa del Simplex correspondiente a la variable λ_{hk} y que, por lo dicho anteriormente respecto a μ_{hi} y ν_{ki}, sólo pueden ser $+1$, -1 ó cero.

Sabemos que

$$z_{hk} = \sum_{i=1}^{p+q-1} x_{hk,\,i}\, c_i = \sum_{i=1}^{p+q-1} (\mu_{hi} + \nu_{ki}) c_i = u_h + v_k$$

El cálculo directo de los valores

$$u_h = \sum_{i=1}^{p+q-1} \mu_{hi}\, c_i \qquad \text{y} \qquad v_k = \sum \nu_{ki}\, c_i$$

sería muy laborioso, pero el hecho de que, para las variables de la base, por ejemplo, λ_{rs}, sea $z_{rs} = u_r + v_s = c_{rs}$, proporciona un camino que permite calcular el valor z_{hk} de cualquier variable independiente mediante un sistema de ecuaciones de resolución inmediata.

Para comprenderlo mejor, veamos un caso concreto. Calculemos z_{31}, para ello plantearemos el siguiente sistema de ecuaciones:

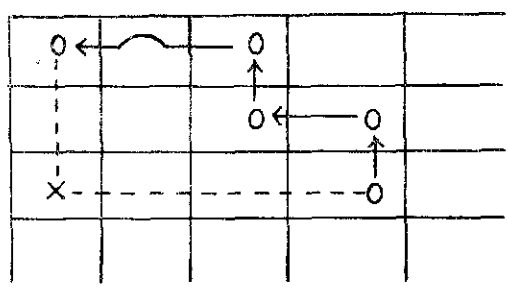
$z_{31} = u_3 + v_1$	
$c_{34} = u_3 + v_4$	por ser $z_{34} = c_{34}$ al pertenecer a la base
$c_{24} = u_2 + v_4$	por ser $z_{24} = c_{24}$ ídem íd.
$c_{23} = u_2 + v_3$	por ser $z_{23} = c_{23}$ ídem íd.
$c_{13} = u_1 + v_3$	por ser $z_{13} = c_{13}$ ídem íd.
$c_{11} = u_1 + v_1$	por ser $z_{11} = c_{11}$ ídem íd.

del que fácilmente se deduce:

$$z_{31} = c_{34} - c_{24} + c_{23} - c_{13} + c_{11} \qquad [6]$$

La introducción de cada una de las ecuaciones que siguen a la segunda se ha hecho por la necesidad de eliminar alguna *u* o *v* que proporcionaba, sin ser necesario, la anterior. Si observamos sobre la tabla I del Simplex los valores *c* que determinan el de z_{31}, veremos que señalan sobre dicha tabla el camino que seguiría una torre en un tablero de ajedrez para ir de la casilla que contiene la primera variable de la base de la fila 3 a la variable de la base de la columna 1, cambiando de dirección solamente en casillas que contienen variables de la base y siguiendo el trayecto menor.

Veamos la gráfica del trayecto seguido para z_{31} en el siguiente dibujo, en el que la casilla marcada con $\times$ es la que corresponde a la variable λ_{31}



y observemos que, de las variables que están en los vértices de la línea quebrada que forma la trayectoria, deben tomarse los valores de *c* con signos alternativamente positivos y negativos. De haber iniciado el camino por la columna, es decir, de seguirlo en sentido contrario, el resultado hubiera sido el mismo.

Si recordamos la forma de obtener los valores de z_k en el Método general del Simplex, veremos que el desarrollo [6] de z_{31} nos da también los valores no nulos de $x_{31,\,i}$, los cuales son, alternativamente, $+1$ y -1.

Determinado el valor $\omega_{hk} = z_{hk} - c_{hk}$ que localiza la variable que debe ser introducida en la nueva base, el valor de ésta y la variable de la base antigua que debe suprimirse se determinan, como sabemos, por el menor cociente

$$\frac{\lambda_i}{x_{hk,\,i}}$$

de denominadores positivos. La variable a suprimir de la base será, pues, la menor de las correspondientes a las casillas en que la trayectoria de la gráfica para determinar z_{hk} cambia de dirección y que ocupan lugar par en el orden de dicha trayectoria y su valor es el que debe tomar la variable, λ'_{hk}, a introducir en la nueva base, por cuanto, para dichas casillas, $x_{hk,\,i}$ toman siempre el valor $+1$.

La supresión de una variable y la introducción de otra (con el mismo valor) debe alterar, naturalmente, el valor de varias de las demás, precisamente de aquéllas que están en los vértices de la repetida gráfica. La alteración es el valor de la nueva variable introducida, en el sentido de disminución en las variables de las casillas de vértice impar y de aumento en las de vértice par. No obstante, por simple tanteo, pueden determinarse fácilmente los nuevos valores, por cuanto las *sumas de filas y columnas están predeterminadas por el problema.*

5

Observación

Para una demostración rigurosa del método abreviado que acabamos de exponer, debiera haber sido precedido este trabajo de unas nociones bastante extensas de la teoría de *grafos*, lo que lo hubiera alargado considerablemente. Hemos seguido un camino intuitivo que no carece de rigor, el cual puede ser aplicado tanto a una solución inicial de base como a cualquiera de las tablas que la siguen y no sólo a la que resulta del método de la esquina noroeste.

6

Ejemplo

Veamos la aplicación del método a un problema, clásico ya por venir citado en diversos textos:

"De un producto dado y en un lapso de tiempo determinado tres centros de producción, D_1, D_2 y D_3, fabrican las cantidades que se indican en la siguiente tabla, con las que se han de abastecer cinco almacenes de venta, A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5, en las cantidades que también se indican en la tabla."

"Dados los costos de transporte de una unidad de producto desde cada centro, D, a cada almacén, A, que la tabla también facilita, determinar la forma más económica de efctuar la distribución."

PRODUCCION		ALMACENES				
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Cantidad	Centros	Coste unitario del transporte				
90	D_1	10	20	7	15	10
40	D_2	0	9	8	21	3
80	D_3	6	17	4	12	5
Abast. Almacenes		30	50	40	60	30

Como se trata de hallar un mínimo, la forma de distribución cuyo coste total es menor, los coeficientes de la función a maximizar serán negativos y la primera tabla del Simplex, obtenida por el método de la esquina noroeste, será:

	30	50	40	60	30
90	−10 30	−20 50	−7 10	−15	−10
40	0	−9	−8 30	−21 10	−3
80	−6	−17	−4	−12 50	−5 30

que da un coste total del transporte:

$$z = -\Big[30(-10) + 50(-20) + 10(-7) + 30(-8) + 10(-21) + \\ + 50(-12) + 30(-5)\Big] = 2570$$

Calcularemos los 8 valores ω que corresponden a las 8 variables independientes, así, por ejemplo:

$$\omega_{31} = z_{31} - c_{31} = c_{34} - c_{24} + c_{23} - c_{13} + c_{11} - c_{31} = \\ = -12 - (-21) + (-8) - (-7) + (-10) - (-6) = 4$$

Dicha tabla, con todos los cálculos efectuados, es:

TABLA I DEL SIMPLEX

−10 / 30	−20 / 50	−7 / 10	−15 / −5	−10 / −3
0 / −11	−9 / $\boxed{-12}$	−8 / 30	−21 / 10	−3 / −11
−6 / 4	−17 / 5	−4 / 5	−12 / 50	−5 / 30

La variable independiente con *omega* negativo de mayor valor absoluto es λ_{22}, con $\omega_{22} = -12$, que en la tabla anterior figura inscrito en un rectángulo. La variable de esta casilla ha de pasar a formar parte de la nueva base, sustituyendo a la menor de los vértices impares de la trayectoria que ha servido para calcular z_{22}, es decir, $\lambda'_{22} = \lambda_{23} = 30$, quedando las variables de los demás vértices de la citada trayectoria en la forma:

	−20 / 20	−7 / 40	
	−9 / 30	−8	

La segunda y posteriores tablas toman los valores siguientes:

TABLA II DEL SIMPLEX

−10 / 30	−20 / 20	−7 / 40	−15 / $\boxed{17}$	−10 / −15
−0 / 1	−9 / 30	−8 / 12	−21 / 10	−3 / −11
−6 / 16	−17 / 17	−4 / 17	−12 / 50	−5 / 30

$z = 2210$

TABLA III DEL SIMPLEX

−10 / 30	−20 / 10	−7 / 40	−15 / 10	−10 / 2
0 / 1	−9 / 40	−8 / 12	−21 / 17	−3 / 6
−6 / $\boxed{-1}$	−17 / 0	−4 / 0	−12 / 50	−5 / 30

$z = 2040$

TABLA IV DEL SIMPLEX

−10 / 1	−20 / 10	−7 / 40	−15 / 40	−10 / 2
0 / 2	−9 / 40	−8 / 12	−21 / 17	−3 / 6
−6 / 30	−17 / 0	−4 / 0	−12 / 20	−5 / 30

z = 2010

En la tabla IV llegamos a no tener ninguna *omega* negativa, es decir, llegamos a una solución óptima fundamental.

La existencia en dicha tabla de dos *omegas* iguales a cero nos permite deducir otras dos soluciones óptimas fundamentales. Basta proceder con la variable independiente de $\omega = 0$ como se ha operado con las de *omega* negativo de mayor valor absoluto. Dichas dos soluciones son:

Segunda solución óptima fundamental

	10	20	60	
	40			
30		20		30

Tercera solución óptima
fundamental

		40	50	
	40			
30	10		10	30

Existen infinitas soluciones óptimas derivadas, que obtendríamos sumando las tres fundamentales, después de multiplicarlas por las fracciones positivas k_1, k_2 y k_3, respectivamente, tales que $k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

Es de notar, que los dos transportes de menor coste $D_2\ A_1$ y $D_2\ A_5$, no forman parte de ninguna de las soluciones óptimas. Ello nos hace creer que si tratáramos de resolver el problema propuesto mediante una serie de ensayos, sin conocer la técnica de la Programación Lineal, difícilmente llegaríamos a obtener alguna de las infinitas soluciones.