El problema de la descomposición de la prima

INDICE

El problema de la descomposición de la prima

Por el Dr. Ubaldo NIETO DE ALBA

I

INTRODUCCION

El problema de la descomposición de la prima ha recibido siempre atención especial dentro de la literatura actuarial. Se trata de precisar el significado que cada una de las componentes de la prima juega en la operación.

Este trabajo se inicia con una referencia al problema en la literatura para después entrar en el estudio crítico del mismo.

El origen del problema, entendemos, se encuentra en los principios en que se apoya la concepción clásica de la matemática de estas operaciones. En ella predomina el cálculo de primas, que se apoya en el principio de equivalencia estática, sobre las reservas. Para el cálculo de éstas aparecen en el orden siguiente los métodos: prospectivo, retrospectivo y de recurrencia o de Fouret. Este último es el que sirve de base para el estudio de la descomposición de la prima.

La capitalización financiera y un concepto muy restringido de capital en riesgo completan el cuadro de ideas sobre el que reposa la concepción clásica de la descomposición de la prima.

Entendemos que en este problema hay dos aspectos: uno real, en cuanto se trata de fijar el significado económico que dentro del *ente* asegurar tiene cada una de las componentes de la prima. Pero existe el aspecto formal del problema, encaminado a una construcción más racional de la matemática de estas operaciones.

De acuerdo con los principios que informan actualmente el estudio de estas operaciones, es decir: situar en primer plano el principio de equivalencia dinámica, predominio de las reservas sobre las primas y tomar como base la capitalización actuarial, parece más fecundo formalmente el concepto de prima de ahorro condiciona a la capitalización actuarial, ya que en la misma aparecen recogidas las causas que modifican la variación de las reservas en la evolución estocástica de la operación. Esta idea ya aparece en Hagströen en 1940 ("Sur la notion de prime d'épargne", *Skan. Akt.*).

En la última parte se hace aplicación de estas ideas estableciendo una ecuación dinámica general de las reservas que nos lleva a generalizar el concepto de capital en riesgo.

El concepto de prima de ahorro condicionada nos permite obtener la ecuación funcional de las reservas con recursos puramente actuariales.

El trabajo termina con unas aplicaciones a modalidades que ya habían sido tratadas con arreglo a la concepción clásica.

II

EL PROBLEMA EN LA LITERATURA ACTUARIAL

2.1. Antecedentes.

La primera noción de prima de ahorro se debe a Zillmer (*Deutsche Versicherungs Zeitung*, 1867). Posteriormente (1887) este mismo autor divide la Prima total en dos partes: prima de ahorro y prima de riesgo.

Suponiendo la siguiente ecuación de recurrencia generalizada:

$$({}_tV_x + P_x)(1 + i) = C_t\, q_{x+t} + K_t\, p_{x+t} + p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x$$

tenemos que Bortkiewicz (1903) divide la prima en tres partes:

$$\begin{aligned} P_x &= vq_{x+t}(C_t - K_t - {}_{t+1}V_x) + (v\,{}_{t+1}V - {}_tV_x) + vK_t \\ &= \text{Prima de riesgo} + \\ &+ \text{Prima de ahorro} + \\ &+ \text{Residuo.} \end{aligned}$$

Sin embargo, M. Jacob ("Sugli integrali di Stieltjes e sulla loro applicazione nella Mattematica attuariale", *Giornale dell'Istituto It. degli Att.*, 1932) une este residuo a la prima de ahorro.

W. Saxer (*Versicherungsmathematik*, tomo II, pág. 42) sienta el principio de que la prima total P puede dividirse en prima de ahorro y prima de riesgo. Es decir,

$$P(t) = P^a(t) + P^r(t)$$

siendo:

$$P^a(t) = V^1(t) - \delta V(t)$$

$$P^r(t) = r(t) + \sum_{1}^{m} \left(U^{(i)}_{x+t} - V(t) \right) \mu^{(i)}_{x+t}$$

Este autor no hace referencia al residuo, que, por otra parte, en el caso de ser negativo, estaría comprendido en la prima de riesgo sin más que suponer:

$$U^{(k+1)}_{x+t} = \ldots = U^{(m)}_{x+t} = 0$$

O sea:

$$P^r(t) = r(t) + \sum_{1}^{k} \left(U^{(i)}_{x+t} - V(t) \right) \mu^{(i)}_{x+t} - \sum_{k+1}^{m} V(t)\, \mu^{(i)}$$

Esta idea aparece confirmada cuando (tomo I, págs. 100-101), al hablar de la descomposición de la prima en el seguro de renta de invalidez establece:

$$(t - 1V^{ai}x + P^{i}x)\ l^{a}_{x+t-1}\ (1 + i) =$$
$$= l^{a}_{x+t-1} \cdot i_{x+t-1}\ a^{i}_{x+t} + l^{a}_{x+t} \cdot tV^{ai}x$$

definiendo la prima de ahorro:

$$P^{ai}x = vtV^{ai}x - {}_{t-1}V^{ai}x$$

y diciendo que a la prima de riesgo se llega indirectamente·

$$P^{ir}x = P^{i}x - P^{ia}x = i_{x+t-1}\ v(a^{i}_{x+t} - tV^{ai}x) - q^{a}_{x+t-1}\ vtV^{ai}x$$

No obstante añade: También se podía definir, la prima de riesgo, directamente entre la prestación (teniendo en cuenta la reserva acumulada) por invalidez y la reducción por muerte. Estas ideas nos servirán de base para generalizar el concepto de capital en riesgo.

Sobre este problema han hecho aportaciones, además de los autores citados: Insolera, Bohlman, Wright, Broggi, Karup y, especialmente, el profesor Lasheras-Sanz.

2.2. Casos de residuo negativo.

Las mayores aportaciones en estos casos corresponden al profesor Lasheras-Sanz (*R. Y. S.*, IV trimestre 1953). Veamos los siguientes ejemplos:

a) *Seguro para caso de muerte en estado de actividad.*— La prima media constante se calcula de acuerdo con el principio de equivalencia estática, es decir:

$$P^{aa}x\ a^{aa}x = A^{aa}x$$

Para el estudio de la descomposición de la prima se parte de la siguiente ecuación de recurrencia:

$$(tV^{aa}x + P^{aa}x)\ (1 + i) =$$
$$= q^{aa}_{x+t} + p^{aa}_{x+t} \cdot t + 1\ V^{aa}x$$

sustituyendo

$$p^{aa}_{x+t} = 1 - q^{aa}_{x+t} - \varepsilon_{x+t}$$

y operando se llega:

$$\begin{aligned} P^{aa}x &= vq^{aa}_{x+t}(1 - {}_{t+1}V^{aa}x) + \\ &\quad + (v\,{}_{t+1}V^{aa}x - {}_tV^{aa}x) - v\varepsilon_{x+t} \cdot {}_{t+1}V^{aa}x \\ &= P^r + P^a x + R \end{aligned}$$

en donde el residuo R está formado por las reservas de los que se invalidan, que, al liberarse a favor del asegurador, repercuten en la disminución de la prima.

b) *Seguro para casos de invalidez.* — La prima media constante se calcula a partir de la ecuación de equivalencia estática:

$$(P^{ai}x)\ \ddot{a}^{aa}x = (A^{ai})$$

En la ecuación de recurrencia

$$[{}_tV^{ai}x + (P^{ai}x)]\,(1 + i) = \varepsilon_{x+t} + p^{aa}_{x+t} \cdot {}_{t+1}V^{ai}x$$

sustituyendo

$$p^{aa}_{x+t} = 1 - q^{aa}_{x+t} - \varepsilon_{x+t}$$

y haciendo operaciones se llega:

$$\begin{aligned} (P^{ai}x) &= (v\,{}_{t+1}V^{ai}x - {}_tV^{ai}x) + \\ &\quad + v\varepsilon_{x+t}(1 - {}_{t+1}V^{ai}x) - vq^{aa}_{x+t} \cdot {}_{t+1}V^{a}x \\ &= P^a + P^r + R \end{aligned}$$

Aquí el residuo está formado por las reservas de los que fallecen activos, que también vienen a incrementar los fondos del asegurador, repercutiendo en la disminución de la prima.

c) *Caso de renta de invalidez.*—Al igual que en los casos anteriores, se tiene para la prima

$$P^{ai}x\ \ddot{a}^{aa}x = a^{ai}x$$

La ecuación de recurrencia será:

$$({}_tV^{ai}_x + P^{ai}_x)(1 + i) = vp^{ai}_{x+t} \cdot a^i_{x+t+1} + \\ + vp^{aa}_{x+t} \cdot {}_{t+1}V^{ai}_x$$

sustituyendo:

$$p^{aa}_{x+t} = 1 - q^{aa}_{x+t} - \varepsilon_{x+t} = \\ = 1 - q^{aa}_{x+t} - (p^{ai}_{x+t} + q^{ai}_{x+t})$$

y haciendo operaciones se llega:

$$P^{ai}_x = (v \cdot {}_{t+1}V^{ai} - {}_tV^{ai}_x) + vp^{ai}_{x+t}(a^i_{x+t+1} - {}_{t+1}V^{ai}_x) \\ - v(q^{aa}_{x+t} + q^{ai}_{x+t})\, {}_{t+1}V^{ai}_x$$

En este caso el residuo está formado por las reservas de los que fallecen, bien como activos o como inválidos.

d) *Renta de supervivencia.*—La prima media constante viene dada por

$$P_{x/y}\, a_{xy} = a_{x/y}$$

La ecuación de recurrencia es:

$$({}_tV_{x/y} + P_{x/y})(1 + i) = q_{x+t}\, p_{y+t}\, a_{y+t+1} + \\ + p_{x+t}\, p_{y+t} \cdot {}_{t+1}V_{x/y}$$

en donde operando se llega:

$$P_{x/y} = vq_{x+t}\, p_{y+t}\, a_{y+t+1} + v(1 - q_{x+t})\, p_{y+t} \cdot {}_{t+1}V_{x/y} - \\ - {}_tV_{x/y}$$

$$= vq_{x+t}\, p_{y+t}\,(a_{y+t+1} - {}_{t+1}V_{x/y}) + vp_{y+t} \cdot \\ \cdot {}_{t+1}V_{x/y} - {}_tV_{x/y}$$

$$= vq_{x+t}\, p_{y+t}\,(a_{y+t+1} - {}_{t+1}V_{x/y}) + (v\,{}_{t+1}V_{x/y} - \\ - {}_tV_{x/y}) - vq_{y+t} \cdot {}_{t+1}V_{x/y}$$

$$= P^r + P^a + R$$

en donde R es el Residuo negativo correspondiente a las reservas que se liberan a favor del asegurador en los casos que fallezca la cabeza Y.

2.3. La prima de ahorro como elemento formativo de las reservas.

La prima de ahorro tal como ha sido definida anteriormente proporciona las reservas mediante su capitalización financiera. Suponiendo $V(0) = 0$ y tratándose del caso continuo, se tiene:

$$\int_0^k e^{\delta(k-t)} P^a(t)\,dt = e^{\delta k}\int_0^k e^{-\delta t}\left(V^1(t) - \delta V(t)\right)dt$$

$$= e^{\delta k}\left[\int_0^k e^{-\delta k} V^1(t)\,dt - \delta \int_0^k e^{-\delta t - t} V(t)\,dt\right]$$

$$= e^{\delta k}\left\{\left[e^{-\delta t} V(t)\right]_0^k + \delta \int_0^k e^{-\delta t} V(t)\,dt - \right.$$

$$\left. - \delta \int_0^k e^{\delta t} V(t)\,dt\right\}$$

$$= e^{\delta k}\left(e^{-\delta k} V(k) - V(0)\right) = V(k)$$

Para el caso discreto podemos escribir:

$$tVx = (1 + i)\,(P^a{}_{x+t+1} + t - 1Vx) = (1 + i)\,[P^a{}_{x+t-1} + $$
$$+ (1 + i)\,(P^a{}_{x+t-2} + t - 2Vx)]$$

$$= \sum_{r=0}^{t-1} (1 + i)^{t-r} \cdot P^a x + r$$

No se puede decir que en la literatura actuarial no haya quien considerara la capitalización actuarial como elemento formativo de las reservas. Pues ya Hagströem ("Sur la notion de prime d'épargne", *Skan. Akt.*, 1940, núms. 1-2) estableció dos primas de ahorro. Situándonos en el campo continuo y en base de la ecuación diferencial de Thiel:

$$V^1(x, t) = V(x, t)\,(\delta + \mu x + t) + P(x, t) - Sx + t\,\mu x + t$$

estas primas de ahorro serían:

$$P^{a}_{1}(t) = V^{1}(x, t) - \delta V(x, t) = P(x, t) - $$
$$- (Sx + t - V(x, t))\ \mu x + t$$
$$P^{a}_{2}(t) = V^{1}(x, t) - (\delta + \mu x + t)\ V(x, t) =$$
$$= P(x, t) - Sx + t\ \mu x + t$$

La primera (más usada en la técnica del seguro, dice Hamströem) proporciona las reservas mediante capitalización financiera y la segunda mediante capitalización actuarial, es decir:

$$V(x, k) = e^{\delta k}\left[V(x, 0) + \int_0^k P^{a}_{1}(t)\ e^{-\delta t}dt\right]$$

$$V(x, k) = \frac{1}{kEx}\left[V(x, 0) + \int_0^k P^{a}_{2}(t)\ tEx\ dt\right]$$

Este autor propone la siguiente terminología para designar cada una de estas primas de ahorro:

P^{a}_{1} = prime d'accompte
P^{a}_{2} = prime d'accumulation

III

ESTUDIO CRITICO DEL PROBLEMA

3.1. Origen del problema.

Este se encuentra en los principios en que se apoya la concepción clásica de la matemática de estas operaciones. En esta concepción predomina el principio de equivalencia estática mediante el cual se calculan las primas medias. En segundo lugar se calculan las reservas y posteriormente se plantea el problema de la descomposición de la prima media, apareciendo las componentes de ésta en función de dichas reservas.

Esta concepción se pone también de manifiesto observando cómo al hablar de los métodos para el cálculo de reservas aparecen en este orden: prospectivo, retrospectivo y de recurrencia o de Fouret. Por otra parte, al contemplar las sumas en riesgo positivas y negativas asociadas al mismo suceso ha dado lugar a un concepto muy restringido de Capital en riesgo causante de la aparición del residuo.

A este cuadro de ideas es preciso, todavía, añadir la utilización, casi exclusiva, de la capitalización financiera.

3.2. La descomposición de Bortkiewicz.

La descomposición de la prima, con arreglo al criterio de este autor, parte de la ecuación de recurrencia de Fouret generalizado por Broggi (*). Como ya hemos visto, esta ecuación es

$$(tVx + P(x, t)) (1 + i) = Ct\ q_{x+t} + Kt\ p_{x+t} \cdot t + 1Vx$$

En principio esta ecuación capta la dinámica de una operación del siguiente tipo: Al comienzo del año se paga una prima que junto con las reservas acumuladas y los intereses correspondientes tiene que ser suficiente para pagar al final del mismo año la cantidad Kt si el asegurado vive y la suma Ct si fallece en el transcurso del mismo año, así como la constitución de las reservas en caso de sobrevivir dicho asegurado.

Como ya hemos señalado anteriormente en la concepción clásica predomina el cálculo de primas sobre el de reservas y por tanto al hablar de la ecuación de recurrencia o de Fouret dichas primas respondian a modalidades de seguros conocidos de antemano.

(*) LASHERAS-SANZ, A.: *Matemática del Seguro*, pág. 538.

Supongamos que en la generalización de Broggi se prescinde de esta condición. En tal caso estaremos ante una auténtica ecuación de equivalencia dinámica y vamos a ver qué pasa cuando calculamos la prima en base de la ecuación de equivalencia estática que se desprende de condiciones de contorno.

Para resolver esta ecuación escribiremos:

$$Vp_{x+t} \cdot t + 1Vx - tVx = P(x, t) - Ct\ Vq_{x+t} - Kt\ Vp_{x+t}$$

$$\frac{t + 1Ex}{tEx} \cdot t + 1Vx - tVx = P(x, t) - Ct\ Vq_{x+t} - Kt\ Vp_{x+t}$$

multiplicando por tEx y sumando se tiene:

$$\sum_{t=0}^{k-1} (t + 1Ex \cdot t + 1Vx - tEx \cdot tVx) =$$

$$= \sum_{t=0}^{k-1} tEx\ (P(x, t) - Ct\ Vq_{x+t} - Kt\ Vp_{x+t})$$

$$kEx \cdot kVx - 0Vx = \sum_{t=0}^{k-1} tEx\ P(x, t)$$

$$- \sum_{t=0}^{k-1} Ct \cdot vq_{x+t} \cdot tEx$$

$$- \sum_{t=0}^{k-1} Kt \cdot Vp_{x+t} \cdot tEx$$

es decir:

$$\sum_{0}^{k-1} tEx\ P(x, t) + 0Vx = kEx \cdot kVx + \sum_{0}^{k-1} Ct\ vqx + t \cdot tEx +$$

$$+ \sum_{0}^{k-1} Kt\ vq_{x+t} \cdot tEx$$

Caso a):

Prima constante media.............. P
Condiciones de contorno............. ${}_0V = {}_nV_x = 0$
Sumas aseguradas constantes....... $C_t = C$, C^1 $K_t = K$
La ecuación de equivalencia estática será:

$$P a_{x\overline{n}|} = C \sum_{0}^{n-1} v q_{x+t} \cdot {}_tE_x + K \sum_{0}^{n-1} v p_{x+t} \cdot {}_tE_x$$

$$= C A^1_{x\overline{n}|} + K \alpha_{x\overline{n}|}$$

en donde operando se llega:

$$P = (C - K) \frac{A^1_{x\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}} + vK$$

es decir: la prima de un seguro temporal de capital (C-K) combinado con una operación cierta cuya prima $P_1 = vK$ da derecho, mientras se paga, a un capital final de período de K pesetas. Para el caso particular en que $C = K$ estamos ante una operación cierta.

Caso b): Tomando los mismos datos pero con las condiciones de contorno:

$${}_0V_x = 0 \qquad {}_nV_x = K$$

La ecuación de equivalencia estática será:

$$K \cdot {}_nE_x = P a_{x\overline{n}|} - C A^1_{x\overline{n}|} - K \alpha_{x\overline{n}|}$$

en donde operando se llega:

$$P = (C - K) \frac{A^1_{x\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}} + K \frac{{}_nE_x}{a_{x\overline{n}|}} + vK$$

es decir: la prima de un temporal y un capital diferido combinada con una operación cierta. En este caso, para $C = K$

tendríamos

$$P = K \frac{nEx}{a_{\overline{x n}|}} + vK$$

Estos resultados nos dicen que la generalización de Broggi, para primas medias constantes, encierra modalidades ya conocidas combinadas con una operación cierta. Siendo esta última componente el residuo positivo de la descomposición de Borkievicz.

En el capítulo IV estableceremos una ecuación general en donde aparecerán residuos positivos que no serán términos ciertos de la operación.

3.3. Aspectos del problema.

En el problema de la descomposición de la prima podemos contemplar dos aspectos. Uno real en cuanto trata de precisar el significado eonómico que cada una de sus componentes juega en la operación. Desde el momento en que éstas se dan en el seno de un ente económico se impone un análisis de la operación encaminado a fijar el significado que cada uno de sus elementos tiene dentro del mismo.

Pero existe un aspecto formal encaminado a una construcción más racional de la matemática de estas operaciones. En este sentido encontramos mucho más fecundo el concepto de prima de ahorro condicionada a la capitalización actuarial asociada a la operación.

En nuestro trabajo "Teoria unitaria en la matemática de las operaciones de seguros sobre la vida" (*RIS*, II trim. 1968) hacemos un estudio unitario de estas operaciones en base de los siguientes principios:

1) Tomar como base la capitalización actuarial asociada a la operación (Insolera).

2) Situar en primer plano las reservas de la operación (Hansen, Franckx, Hagströem, Söderström, Pötteker, Zwinggi, Gil Peláez, etc.).

3) Elaborar un sistema de ecuaciones multidimensionales que capten el equilibrio dinámico de la operación habida cuenta de su estructura estocástica, es decir, utilizando el principio de equivalencia dinámica, cuyo principal precursor ha sido Fouret.

Como dice E. Franckx ("L'algorithme du Broyage des traces", *B. I. A. F.*, marzo 1967): Toda operación que satisface una relación de equivalencia dinámica, junto con sus condiciones de contorno, posee solamente una trayectoria en el tiempo que nos da la totalidad de las reservas. La concepción dinámica no hace ya la distinción entre el cálculo de primas y reservas. Estos principios son fecundos en consecuencias prácticas cuando se calculan las operaciones-vida por métodos electrónicos.

4) Dichas ecuaciones dinámicas serán lo suficiente generales para que recojan operaciones tales que en la descomposición real de la prima aparezcan los casos de residuo positivo, nulo y negativo. Es decir siguiendo la línea de Bortkievicz ampliamente desarrollada por el Profesor Lasheras-Sanz.

5) Resolver este sistema con respecto a las Reservas, apareciendo como más natural el método retrospectivo. Cuando las primas se calculen por el principio de equivalencia estática que se desprende de condiciones de contorno se puede hablar del *método prospectivo* y de su equivalencia con el *retrospectivo*.

IV

PLANTEAMIENTO GENERAL

4.1. Ecuación dinámica de las reservas.

Con arreglo a las siguientes notaciones:

$V(x, t)$ = Reservas en el momento t

$P(x, t)\,dt$ = Prima pura en $(t, t + dt)$

$\delta(t)$ = Tanto instantáneo de capitalización

$\gamma^{(r)}_{x+t}\,dt$ = Probabilidad de que en $(t, t + dt)$ cese el proceso de capitalización debido a la causa r-ésima

$\mu^{(r)}_{x+t}\,dt$ = Probabilidad de que en $(t, t + dt)$ se presente el suceso que da lugar al pago del capital $S^{(r)}_{x+t}$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$

$$P^{(n)}(x, t)\,dt = \sum_{1}^{m} S^{(r)}_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt = \text{Prima natural en } (t, t + dt)$$

y en base del principio de equivalencia dinámica podemos escribir la siguiente ecuación:

$$[V(x, t) + P(x, t)]\,(1 + \delta(t)\,dt) =$$

$$= \left(1 - \sum_{1}^{k} \nu^{(r)}_{x+t}\,dt\right) V(x, t + dt) +$$

$$+ \sum_{1}^{m} S^{(r)}_{x+t}\,\mu^{(r)}_{x+t}\,dt$$

haciendo que $dt \rightarrow 0$, y operando se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$V^1(x, t) = V(x, t) \left(\delta(t) + \sum_1^k \nu_{x+t}^{(r)} \right) +$$

$$+ P(x, t) - \sum_1^m S_{x+t}^{(r)} \mu_{x+t}^{(r)}$$

es decir:

$$V^1(x, t) = V(x, t)\, \rho(x, t) + P(x, t) - P^{(n)}(x, t)$$

en donde

$$\rho(x, t) = \delta(t) + \sum_1^k \nu_{x+t}^{(r)}$$

es la *fuerza actuarial* asociada a la operación. El factor de actualización actuarial será:

$$E(x, t) = e^{-\int_0^t \rho(x, s)\, ds}$$

Dada la condición inicial $V(x, 0)$ se tiene la solución:

$$V(x, k) = \frac{1}{E(x, k)} \left[V(x, 0) + \int_0^k E(x, t) \left(P(x, t) - P^{(n)}(x, t) \right) dt \right]$$

Cuando, además, se da la condición de contorno $V(x, n)$ se tiene la siguiente ecuación de equivalencia estática:

$$E(x, n)\, V(x, n) = V(x, 0) +$$

$$+ \int_0^n E(x, t) \left(P(x, t) - P^{(n)}(x, t) \right) dt$$

que permite el cálculo de las primas medias y hablar del método prospectivo para el cálculo de las reservas.

Ejemplo.—Seguro mixto unitario:

Fuerza actuarial	$\rho(x, t) = \delta + \mu x + t$
Prima natural	$P^{(n)}(x, t) = \mu x + t$
Condiciones de contorno.........	$V(x, 0) = 0, \; V(x, n) = 1$

La prima media constante se obtiene de la siguiente ecuación de equivalencia estática:

$$V(x, n)\, E(x, n) = \int_0^n E(x, t)\,(P - \mu x + t)\, dt =$$

$$= P\, \bar{a}_{x\overline{n}|} - \bar{A}^{1}_{x\overline{n}|}$$

es decir:

$$P\bar{a}_{x\overline{n}|} = \bar{A}^{1}_{x\overline{n}|} + E(x, n) = \bar{A}_{x\overline{n}|}$$

La reserva retrospectiva es:

$$V(x, k) = \frac{1}{E(x, k)} \int_0^k (P - \mu x + t)\, E(x, t)\, dt =$$

$$= \frac{P\bar{a}_{x\overline{k}|} - \bar{A}'^{1}_{x\overline{n}|}}{E(x, k)}$$

Teniendo en cuenta la condición de contorno $V(x, n) = 1$ se llega a la reserva prospectiva:

$$V(x, k) = \bar{A}_{x+t\,:\,\overline{n-t}|} - P\,\bar{a}_{x+t\,:\,\overline{n-t}|}$$

4.2. Capital en riesgo.

Partiendo de la ecuación dinámica de las reservas:

$$V^{1}(x, t) = V(x, t)\left(\delta + \sum_{1}^{k} \nu^{(r)}_{x+t}\right) + P(x, t) - \sum_{1}^{m} S^{(r)}_{x+t}\, \mu^{(r)}_{x+t}$$

y admitiendo como prima de ahorro:

$$P^{a}(x, t) = V^{1}(x, t) - \delta V)x, t)$$

tendríamos la siguiente prima de riesgo generalizada:

$$P^{r}(x, t) = \sum_{1}^{m} \overset{(r)}{S}_{x+t} \overset{(r)}{\mu}_{x+t} - V(x, t) \sum_{1}^{k} \overset{(r)}{\nu}_{x+t}$$

la cual está asociada a la esperanza matemática de la variante:

$$\zeta = \eta - \xi$$

en donde η y ξ son:

$$P(\eta = \overset{(r)}{S}_{x+t}) = \overset{(r)}{\mu}_{x+t} \, dt \; (r = 1, 2, \dots, m)$$

$$P(\xi = V(x, t)) = \sum_{1}^{k} \overset{(r)}{\nu}_{x+t} \, dt$$

es decir, asociadas a los sumandos positivos y negativos respectivamente del capital en riesgo. La variante ζ nos habla del capital en riesgo y la *prima de riesgo generalizada* es:

$$P^{(r)}(x, t) \, dt = E(\zeta)$$

En esta prima de riesgo generalizada se encuentra incluído el Residuo tal como aparece, para casos menos generales, en la concepción de Saxer.

Para ver mejor la relación que existe entre los conceptos de prima de riesgo incluyendo o no el residuo veamos los siguientes casos que se pueden presentar al suponer que las probabilidades asociadas a la capitalización actuarial coinciden con las asociadas al pago de capitales, es decir, que

$$\overset{(r)}{\nu}_{x+t} = \overset{(r)}{\mu}_{x+t}$$

a) *Caso en que $k < m$.*—En tal caso la descomposición, con prima de riesgo generalizada, sería:

$$P(x, t) = (V^1(x, t) - \delta Vx, t)) +$$
$$+ \sum_{1}^{m} S^{(r)}_{x+t} \mu^{(r)}_{x+t} - V(x, t) \sum_{1}^{k} \mu^{(r)}_{x+t}$$
$$= P^a(x, t) + P^r(x, t)$$

Admitiendo la existencia del residuo tendríamos la siguiente descomposición de la prima:

$$P(x, t) = (V^1(x, t) - \delta V(x, t) +$$
$$+ \sum_{1}^{m} (S^{(r)}_{x+t} - V(x, t)) \mu^{(r)}_{x+t} + \sum_{k+1}^{m} V(x, t) \mu^{(r)}_{x+t}$$
$$= P^a(x, t) + P^r(x, t) + R$$

Un caso particular sería aquel en que $k = 0$ y $m = 1$, es decir:

$$V(x, t) = V(x, t) \delta + P(x, t) - S^{x+t} \mu x+ t$$

la cual coincide con la ecuación diferencial que establece Hansen (*) para los seguros de vida con ahorro no-condicionado.

En el caso general hay $m - k$ causas ($r = k + 1, k + 2, \ldots, m$) que dan lugar, además del pago del capital, a la devolución de las reservas.

b) *Caso en que $k = m$.*—Aquí la descomposición de la prima sería:

$$P(x, t) = (V^1(x, t) - \delta V(x, t)) + \sum_{1}^{m} (S^{(r)}_{x+t} - V(x, t) \mu^{(r)}_{x+t}$$
$$= P^a(x, t) + P^r(x, t)$$

(*) CHR. HANSEN: "Sobre algunos teoremas y fórmulas de la Matemática del seguro de vida sobre una cabeza". *Skan. Akt.*, 1960, núm. 3-4.

En este caso no hay residuo y todas las causas que dan lugar a pago de capitales liberan reservas a favor del asegurador.

c) *Caso en que* $k > m$.—Aquí la descomposición de la prima será:

$$P(x, t) = (V^1(x, t) - \delta V(x, t)) +$$

$$+ \sum_{1}^{m} (S^{(r)}_{x+t} - V(x, t)) \mu^{(r)}_{x+t} - \sum_{m+1}^{k} V(x, t) \mu^{(r)}_{x+t}$$

en donde el último sumando sería el residuo, en este caso negativo, ya que las causas $r = m + 1, m + 2, \ldots, k$ liberan también las reservas a favor del asegurador.

4.3. Prima de ahorro condicionada a la capitalización actuarial.

Ya hemos dicho que éste es un concepto más fecundo formalmente, puesto que en dicha capitalización aparecen recogidas las causas que modifican la variación de las reservas en la evolución estocástica de la operación.

Partiendo nuevamente de la ecuación dinámica:

$$V^1(x, t) = V(x, t) \left(\delta + \sum_{1}^{k} \nu^{(r)}_{x+t} \right) + P(x, t) - \sum_{1}^{m} S^{(r)}_{x+t} \mu^{(r)}_{x+t}$$

$$= V(x, t) \rho(x, t) + P(x, t) - P^{(n)}(x, t)$$

Esta *prima de ahorro* será:

$$P^{a}(x, t) = V^1(x, t) - V(x, t) \rho(x, t) = P(x, t) - P^{(n)} (x, t)$$

En base de dicha capitalización actuarial podemos establecer:

$$\int_s^k E(x, t) P^{a}(x, t)\, dt = \int_s^k E(x, t) (V^1(x, t) - V(x, t) \rho(x, t))\, dt$$

$$= E(x, k) V(x, k) - E(x, s) V(x, s)$$

es decir:

$$E(x, k)\ V(x, k) = E(x, s)\ V(x, s) +$$
$$+ \int_s^k E(x, t)\ (P(x, t) - P^{(n)}(x, t))\ dt$$

la ecuación funcional de las reservas de Schärf obtenida aquí con recursos exclusivamente actuariales. Para $s = 0$ tendremos las reservas retrospectivas ya obtenidas anteriormente.

4.4. Aplicaciones.

Veamos los mismos casos tratados en el capítulo 2.2.

a) *Seguro para caso de invalidez.*—La ecuación dinámica será:

$$(tV^{ai}x + P^{ai}(x, t)\ (1 + i) = \varepsilon x + t + p^{aa}x + t \cdot t + 1V^{ai}x$$

la prima de ahorro condicionada a la capitalización actuarial será:

$$vp^{aa}x + t \cdot t + 1V^{ai}x - tV^{ai}x = P^{ai}(x, t) - v\varepsilon x + t$$

es decir:

$$\frac{t + 1E^{aa}x}{tE^{aa}x} \cdot t + 1V^{ai}x - tV^{ai}x = P^{ai}(x, t) - v\varepsilon x + t$$

procediendo a actualizar en base de $tE^{aa}x$;

$$\sum_{t=0}^{k-1}(t + 1E^{aa}x \cdot t + 1V^{ai}x - tE^{aa}x \cdot tV^{ai}x) =$$
$$= \sum_{t=0}^{k-1} tE^{aa}x\ (P^{ai}(x, t) - v\varepsilon x + t)$$

se obtiene:

$$kE^{aa}x \cdot kV^{ai}x = 0V^{ai}x +$$

$$+ \sum_{t=0}^{k-1} tE^{aa}x \, (P^{ai}(x, t) - v\varepsilon x + t)$$

Para las condiciones de contorno $0V^{ai}x = \omega V^{ai}x = 0$ la prima constante media se obtiene de la siguiente ecuación de equivalencia estática:

$$(P^{ai}) \sum_{0}^{w-1} tE^{aa}x = \sum_{0}^{w-1} tE^{aa}x \cdot v \cdot \varepsilon x + t$$

o sea:

$$(P^{ai})x \; a^{aa}x = (A^{ai}x)$$

b) *Caso de renta de invalidez.*—La ecuación dinámica será:

$$(tV^{ai}x + P^{ai}(x, t) (1 + i) = p^{ai}x + t \cdot a^{i}x + t + 1 +$$

$$+ p^{aa}x + t \cdot t + 1V^{ai}x$$

siguiendo el mismo camino podemos escribir:

$$\frac{t + 1E^{aa}x}{tE^{aa}x} \cdot t + 1V^{ai}x - tV^{ai}x = P^{ai}(x, t) -$$

$$- vp^{ai}x + t \; a^{i}x + t + 1$$

procediendo a actualizar (actuarialmente) se llega a:

$$kE^{aa}x \cdot kV^{ai} = 0V^{ai}x +$$

$$+ \sum_{0}^{k-1} tE^{aa}x(P^{ai}(x, t) - vp^{ai}x + t \; a^{i}x + t + 1)$$

Para condiciones de contorno $0V^{a_i}x = \omega V^{a_i}x = 0$ se obtiene la prima constante media de la siguiente ecuación de equivalencia estática:

$$P^{a_i}\, \mathrm{a}^{aa}x = \sum_{0}^{w-1} tE^{aa}x \cdot Vp^{a_i}x + t \cdot \mathrm{a}^{i}x + t + 1 = \mathfrak{a}^{a_i}x$$

c) *Caso de renta de supervivencia.*—La ecuación dinámica será:

$$(tVx/y + Px/y)\,(1 + i) = = qx + t\, py + t \cdot \mathrm{a}y + t + 1 + px + t\, py + t \cdot t + 1Vx/y$$

haciendo operaciones se tiene:

$$\frac{t + 1\ Exy}{tExy} \cdot t + 1Vx/y - tVx/y = = Px/y - vqx + t \cdot py + t\mathrm{a}y + t + 1$$

aplicando el factor de actualización tExy y sumando se llega a:

$$kExy \cdot kVx/y = 0Vx/y + + \sum_{0}^{k-1} tExy(Px/y - vqx + t\, py + t\mathrm{a}y + t + 1)$$

Para condiciones de contorno $\omega Vx/y = 0Vx/y = 0$ se llega a la siguiente ecuación de equivalencia estática:

$$\sum_{0}^{w-1} tExy\, Px/y = \sum_{0}^{w-1} tExy\, Vqx + t\, py + t\, \mathrm{a}y + t + 1$$

y la prima constante media se obtiene de:

$$Px/y\ \mathrm{a}xy = \mathfrak{a}x/y$$

V

BIBLIOGRAFIA

1.—Cr. Hansen: "Über einige Sätzw und Formeln der Mathematik der Leberversicherung auf einleben". *Skan. Akt.*, 1960.

2.—Franckx, E.: "L'algorithme du Broyage des Traces". *R. I. A. Franc.*, marz, 1967.

— "La evolución de las ideas actuariales y sus consecuencias prácticas". *La Reasurance*, nom. 1963.

3.—Hanströem, J. G.: "Sur la notion de prime d'epargne". *Skan. Alt.*, 1940, núm. 1-2.

4.—Howard, R. A.: *Dynamic Programming and Marcov Processes.* T. P. and Willey, 1960.

5.—Insolera, F.: *Curso de matemática Financiera y Actuarial.*

6.—Lasheras-Sanz, A.: *Matemática del Seguro.*

— "Los sistemas financiero-actuariales en los Seguros Sociales". *R. Y. S.*, IV Trim. 1953.

— *El sistema financiero de capitalización colectiva y sus variedades.* III C. I. de Act. y Est. de la S. S., Madrid, 1962.

7. Nieto de Alba, U.: "Enfoque macroeconómico de los problemas de depreciación monetaria y revalorización en el seguro". *A. I. Actuarios*, 1963.

— "Ensayo de una construcción racional y con fundamento económico de la Matemática Financiera y Actuarial". *R. I. S.*, 1963.

— "Obtención de fórmulas más generales en la Teoria matemática de la variación". *Anales I. Actuarios*, 1967.

— "Teoría matemática de las operaciones de capitalización con sorteos". *R. I. S.*, núm. 18.

— "Teoría unitaria en la matemática de las operaciones de seguros sobre la vida". *R. I. S.*, núm. 22.

8.—Pöttker W.: "Die Lebersversicherung mit exponentiell austeingender Prämienreserve (Sparversicherung)". *Skan. Akt.*' 1954, núm. 3-4.

9.—Richard, P. J.: *Théorie et Pratique des Op. d'assur.*

10.—Saxer, W.: *Versicherunsmathematik.*

11.—Söderström, L. C.: "Valuations of the Fund and Analysus of its development". *Skan. Akt.*, 1957, núm. 1-2.

12.—Zwinggi, E.: *Versicheungmathematik.*