Análisis espectral de los procesos econométricos y de sus transformaciones lineales

Por el Doctor
FRANCISCO JAVIER URBELZ IBARROLA
Catedrático de Estadística. Actuario de Seguros

Este artículo tiene por finalidad conocer (en términos sencillos) el concepto del análisis espectral aplicado a los procesos de tipo económico.

Por esta razón dedico el capítulo primero a ideas básicas: frecuencia, ciclo, etc., e indico cómo surgió a raíz de las investigaciones efectuadas por Newton al examinar y comprobar la descomposición (y su composición) de la luz a través de un prisma en la gama de colores denominado espectro. Cada color ocupa la misma posición en el espectro, es decir, tiene su propia longitud de onda.

También esta técnica se aplicó para analizar las distintas componentes de una serie temporal de tipo económico, con resultados bien distintos.

Estas series tienen similitudes con las series físicas, pero están sujetas a fenómenos que no son controlables.

No obstante, las directrices son prácticamente las mismas. Las series económicas tienen también sus peculiaridades que exige un tratamiento especial, aunque no muy diferente de las series observadas y representativas de los fenómenos físicos.

Generalmente no existen ciclos perfectos y las series económicas son "pseudocíclicas", lo cual implica que en el análisis del espectro de naturaleza continua haya masas de la función de densidad concentradas en torno a ciertas bandas o valores de la frecuencia.

Este hecho puede sugerir modelos apropiados representativos de estas series. De ahí la importancia que tiene este análisis del espectro.

Pero a veces existen impedimentos para su análisis, y esto muchas veces se determina mejor por unas operaciones previas a las que se somete las series para que las series resultantes tengan unas propiedades de tipo estacionario.

A la operación realizada con la serie antigua para formar una nueva serie se la denomina transformación y, si tiene ciertas propiedades importantes de linealidad, la transformación es lineal.

La importancia de las transformaciones lineales radica en el hecho de que una serie pertenezca a un espacio y por una transformación adecuada se la proyecta en otro espacio con propiedades estructurales más simples (o viceversa).

El proceso econométrico básico y elemental es la perturbación aleatoria. De este proceso mediante transformaciones lineales obtenemos otros procesos de tipo econométrico, que estudiamos y que están íntimamente relacionados, como son: medias móviles, autorregresivo y mixto. Estos procesos los estudiamos en el dominio de la frecuencia.

El capítulo II se dedica exclusivamente al estudio de estos procesos: representaciones espectrales de los procesos y sus funciones de covarianza, así como las funciones de densidad espectrales, todo él exclusivamente matemático, comenzando por definiciones de transformaciones lineales y sus propiedades matemáticas.

El capítulo III trata de las transformaciones lineales de operadores finitos y, entre estos operadores, se estudian el operador diferencia Δ y el de traslación, diferencia retrasada y retroceso, medias móviles, sumas, etc., y reiteraciones sucesivas de estos operadores y de sus combinaciones lineales.

El capítulo IV lo dedico a las transformaciones lineales de parámetro t continuo. En este capítulo, brevísimo, trato la representación espectral del operador derivada y sucesivas, así como también del operador integral, con aplicaciones a transformaciones lineales de tipo "euleriano".

En el último capítulo estudio esquemáticamente los conceptos básicos del análisis de las series temporales múltiples para un conocimiento más completo de las técnicas del análisis espectral de los procesos multivariantes y de sus transformaciones lineales en general.

Se complementa con un apéndice de notaciones y su significado, estuadiados en otros artículos.

Finalizo el trabajo con una pequeña referencia bibliográfica.

CAPITULO PRIMERO

Ideas fundamentales de los procesos estocásticos

SECCIÓN 1.ª

1. *Conceptos básicos*

1. Muchas personas al leer este trabajo se harán la pregunta: *¿Qué es el análisis espectral?*

En mis artículos anteriores (1) he expuesto sintéticamente el concepto de proceso estocástico y representación espectral. En esta introducción damos unos conceptos sencillos para la mejor comprensión de nuestro trabajo, comenzando por su origen: fenómenos físicos.

2. El movimiento de un péndulo nos facilita ideas de oscilación simple, compuesta y sucesivas.

Oscilación: Es el movimiento del péndulo una vez completa.

Período: Es el tiempo de una oscilación hasta el punto de partida.

Frecuencia: Es el número de oscilaciones en la unidad de tiempo.

3. De los conceptos de período y frecuencia se comprueba la relación inversa entre ellos.

La frecuencia está medida en *ciclos* o en *radianes.* Si estuviese medida en radianes y se expresara un móvil a velocidad uniforme, el recorrido sería $\lambda\, t$ y su posición en la circunferencia de radio unidad sería: $e^{i\lambda t} = \cos \lambda\, t + \operatorname{sen} \lambda\, t$.

En este caso λ representa la frecuencia angular *medida en radianes* y es como aparece en nuestras fórmulas. Las relaciones entre ellas son sencillas: *la frecuencia angular* es la *frecuencia medida en ciclos multiplicada por $2\,\pi$.*

Se observa que, por ser λ proporcional al tiempo, también puede interpretarse como la velocidad de un móvil M en la unidad de tiempo que parte del origen de la circunferencia en sentido contrario a las agujas del reloj.

2. *Unicidad de las ciencias físicas*

1. Brevemente examinamos algunos fenómenos físicos relacionados con el espectro por las diferentes clases de ondas: acústicas, caloríficas, luminosas y eléctricas.

Mencionamos el origen de la palabra espectro, dado por Newton al descubrir la descomposición de la luz al atravesar un prisma.

---

(1) Ver apéndice.

2. El movimiento vibratorio produce unas longitudes de onda y, si están dentro de las posibilidades de nuestro oído, son acústicas. Las caloríficas (por vibraciones de las moléculas) pueden ser o no luminosas, según la frecuencia.

3. Las longitudes de onda se miden en anstron $=(10^{-8}$ cm$)=$ Å. Los *rayos rojos* tienen una longitud de 7.600 Å y la de los *violados,* 3.600 Å. Entre estos valores se encuentra el espectro visible de la descomposición de la luz en colores a través de un prisma.

4. Pero fuera de ese espectro visible se encuentran los que tienen longitudes de onda inferiores y que son, por ejemplo, rayos X, α, β, etc., láser...

Esta unicidad de la teoría espectral con la ondulatoria es sencilla.

5. Al analizar el espectro producido por la descomposición de la luz, Fraunhofer, en 1802, *descubre las primeras rayas oscuras* del espectro solar y que siempre aparecen en el mismo lugar.

Todo cuerpo emite radiaciones, y Kirchhof estudió el fenómeno de estas rayas oscuras del espectro, llegando a la conclusión importante que la atmósfera absorbe componentes de las radiaciones de los cuerpos, y que *siempre cada átomo lo hace con la misma longitud de onda,* y estas absorciones son porque la atmósfera tiene esos mismos elementos.

6. Conclusiones importantes se han derivado de estos hechos: velocidad de una estrella, distancia, composición atómica, etc., y que no nos extendemos en cuestiones tan interesantes.

7. La teoría de la luz nos proporciona un conocimiento de la trayectoria de una rayo de luz y puede considerarse como un proceso estocástico de naturaleza estacionaria.

Las características principales para nuestro estudio son las siguientes:

1) Depende del tiempo.

2) Puede descomponerse en multitud de elementos independientes.

3) En esa descomposición cada elemento infinitesimal tiene su propia longitud de onda correspondiente al elemento vibratorio.

4) *El espectro es independiente del tiempo* y tiene todas las longitudes de onda del rayo de luz y, si carece de un determinado componente, no aparece en la gráfica del espectro.

SECCIÓN 2.ª

1. *Aplicación del análisis espectral a las series económicas*

1. Desde antiguo se pensó que las técnicas del análisis espectral se podían aplicar a las series temporales económicas. No obstante, las aplicaciones con estas técnicas son relativamente desde hace dos décadas, por publi-

caciones en revistas científicas de estudios concretos interesantes. La literatura sobre el análisis especral en econometría ha evolucionado con gran rapidez.

2. Las series temporales siguen directrices similares a las ciencias físicas y existen algunas particularidades. Resumimos las bases para el planteamiento y aplicación del análisis espectral al campo económico:

2.1 Fundamentación de la serie temporal como una trayectoria de un proceso estocástico de tipo económico.

2.2 Descomposición del proceso estocástico en la totalidad de sus elementos simples integrantes (independientes, ortogonales) y con una longitud de onda (frecuencia) asociada a cada descomposición.

2.3 La descomposición es de infinitos sumandos y cada uno con su frecuencia contribuye a la *varianza* del proceso.

La suma de los infinitos sumandos independientes y aleatorios, ortogonales, con frecuencias angulares diferentes, en un momento del tiempo t, nos proporciona la representación espectral del proceso estocástico econométrico de la trayectoria temporal observada.

2.4 El objeto del análisis espectral es estudiar el espectro o, dicho en forma más sencilla y en términos estadísticos, el espectro es la varianza del proceso estocástico distribuido en el eje de frecuencias.

2.5 El conocimiento del espectro de una serie nos indica las posibles componentes periódicas y sugiere modelos estocásticos econométricos de tipo determinado.

Cada frecuencia tiene mayor o menor contribución a la varianza total del proceso. Si fuere constante, ninguna frecuencia influye más que las otras, todas ejercen la misma influencia: el proceso econométrico es el conocido de la "perturbación aleatoria".

2.6 Un espectro discontinuo (llamado de rayas) nos indica componentes cíclicos en los puntos donde exista función de cuantía. Los ciclos son inversos a la frecuencia asociada del espectro.

2.7 Los fenómenos económicos carecen (en general) de "ciclos perfectos", por lo que el espectro *no es de tipo discreto.*

En estos fenómenos econométricos *el espectro no es de tipo continuo* y suelen concentrarse en determinadas "zonas de frecuencia" o "bandas" con máximos relativos en la función de densidad espectral.

Tales fenómenos, de grandes concentraciones de masas espectrales, se denominan *"pseudocíclicos".*

2.8 El simple análisis del espectro nos proporciona una idea de la estructura del fenómeno económico y sugiere posibles representaciones en forma de un modelo apropiado.

2. *Análisis del espectro*

2.1 En mi artículo (2) de "Estimación del espectro" indicaba dificultades y metodología, y no voy a insistir para que la función de densidad estimada fuese un estimador centrado y consistente.

2.2 La longitud o tamaño de la muestra es muy importante para que las interpretaciones sean correctas y, al analizar el espectro desde el punto de vista riguroso, sea una estimación fidedigna del espectro teórico del proceso econométrico y el espectro pueda descomponerse en sus componentes principales y del residuo de la serie.

2.3 Si del análisis del espectro resulta que es similar a un modelo de tipo econométrico conocido, sabremos ciertamente su estructura y únicamente nos queda por determinar los parámetros poblacionales a partir de la muestra temporal conocida.

3. *Estimaciones parámetros lineales. Metodología*

3.1 En econometría los modelos lineales son ampliamente estudiados y, desde luego, todos en el dominio del tiempo.

3.2 Las propiedades de estos estimadores ELIO son importantes, pero los datos son temporales y, evidentemente, son muestras de procesos estocásticos. Tratar a estos procesos como datos no aleatorios es erróneo.

3.3 Para otro artículo posterior dejo la estimación de los parámetros poblacionales de los procesos estocásticos de naturaleza lineal.

Existe cierta similitud con el cálculo operacional para la estimación de los parámetros.

3.4 La metodología es:

1.° Planteamiento del modelo econométrico en el dominio del tiempo.

2.° Multiplicar por una componente estocástica (que es un proceso) y que se relaciona linealmente con éstas.

3.° Hallar esperanzas matemáticas y obtener ecuaciones lineales en función de las covarianzas.

4.° Calcular transformadas de Fourier para trasladar al dominio de la frecuencia y que los parámetros sean independientes del tiempo.

5.° Estimar las densidades espectrales y los parámetros del proceso.

6.° Estimar los parámetros lineales.

(2) F. J. URBELZ: "Estimación del espectro", *Anales del Instituto de Actuarios*, 1983.

SECCIÓN 3.ª

1. *Técnicas para el estudio de las series temporales*

1.1 Las series temporales generalmente no son de naturaleza estacionaria. Pero existen ciertas técnicas que permiten el tratamiento de las series y *transformarlas en otras series de tipo estacionario.*

1.2 Es evidente que al proceder de esta forma se introducen ciertas perturbaciones en determinadas frecuencias. El objetivo de las transformaciones es conocer la influencia y relaciones existentes entre los espectros de la nueva serie y de la antigua.

1.3 A esta técnica se la denomina "transformaciones de procesos estocásticos". Y es particularmente importante las *transformaciones lineales* para convertir un proceso entrante *(input)* en otro de salida *(output)* cuyas características sean estacionarias.

1.4 Al conjunto de números por los que hay que multiplicar el proceso entrante se denomina filtro. Y si la operación es lineal, la denominación evidentemente es "transformación lineal".

1.5 Las técnicas dinámicas utilizan con frecuencia un *sistema de transformación de espacios,* operadores lineales, etc., que permiten reducir los procesos en otros más sencillos y que pueden ser de los tipos conocidos y estudiados en econometría, como los siguientes: medias móviles, autorregresivo, mixto, etc., inclusive el de la perturbación aleatoria.

1.6 Es relativamente simple que de una serie temporal no estacionaria, empleando una transformación lineal y aplicando un determinado "filtro" a una serie antigua, obtengamos una nueva serie temporal con propiedades más sencillas.

Esta transformación lineal es el fundamento para el análisis del espectro de la antigua, porque existe una relación importante entre los espectros de ambas series.

2. *Clases de filtros*

2.1 Los filtros pueden clasificarse, según el fin que se persiga:

1. Filtros para estudiar en un intervalo de frecuencia (λ_1, λ_2) el comportamiento del espectro.

2. Filtros para suprimir la influencia de una frecuencia determinada λ_0. Esto nos indica la reducción de la varianza de la serie original motivada por esta frecuencia concreta.

(Estos filtros tienen particular interés en las series económicas, porque si $\lambda = o$ eliminaremos la influencia de la tendencia.)

Igualmente tienen importancia si deseamos eliminar las componentes estacionales.

3. Filtros para no dejar pasar unas frecuencias de una zona inferior del espectro o superior, etc.

2.2 La eliminación de la tendencia se hará aplicando el filtro apropiado a la serie antigua para que el espectro de la nueva serie no tenga tendencia, y esto se consigue haciendo que el espectro de la nueva serie se anule para $\lambda = 0$, lo que nos dice que tendría un período infinito.

2.3 Aunque no siempre es tan sencillo aplicar a las series económicas no estacionarias filtros adecuados y no se consigue fácilmente sean estacionarias, lo cierto es que después de aplicar un filtro apropiado se puede estudiar más fácilmente el nuevo proceso.

2.4 Si una serie temporal económica, analizada en el dominio del tiempo, no puede considerarse estacionaria, puede *redefinirse* como suma de dos procesos: *uno de* tipo *estacionario* y *el otro de* su *tendencia.*

Se pueden aplicar filtros adencuados para eliminar la tendencia y variaciones estacionales y estudiar un modelo que represente esta parte del proceso, y estudiar el espectro de la serie residual para que, aplicando un filtro adecuado, el *espectro* de la serie residual sea aproximadamente constante.

Este hecho nos indica que podríamos reconstruir el proceso estocástico por el de tendencia y suma de combinaciones lineales de la perturbación aleatoria.

3. *Propiedades de los filtros lineales*

3.1 Los procesos estocásticos más estudiados son los débilmente estacionarios. En econometría raramente existen esta clase de procesos, de ahí que sea importante elegir filtros adecuados para tratar de convertir los procesos económicos en nuevas series que sean semejantes a los procesos débilmente estacionarios (3).

3.2 Las propiedades importantes de los filtros radican en las siguientes:

1. Linealidad.
2. Invarianza en el tiempo.
3. Relaciones de espectros de la serie antigua y nueva.

La relación entre los espectros de salida al de entrada es una función que depende de la frecuencia y se denomina "factor de filtrado" o función de transferencia.

El conocimiento de esta función, multiplicada (o dividida) por el espectro de la serie antigua (nueva) nos dará el espetro de la serie nueva (antigua).

(3) Ver mi trabajo "Introducción a los procesos estocásticos", donde dedico especial atención a esta definición.

SECCIÓN 4.ª

1. *Clases de procesos econométricos*

1.1 Los procesos econométricos raramente son procesos univariantes, es decir, un único proceso relacionado en diferentes momentos del tiempo.

Generalmente, los procesos estocásticos econométricos ni son estacionarios ni tampoco univariantes. Se relacionan con otros procesos.

1.2 Las representaciones espectrales de los procesos multivariantes son semejantes a los procesos univariantes, con una generalización de conceptos de las funciones de covarianza (mixta o cruzada) e igualmente de las densidades espectrales mixtas.

1.3 En los procesos multivariantes las funciones de covarianza y funciones espectrales se relacionan por la transformada de Fourier.

En este tipo de procesos importa señalar que las funciones de densidad espectrales no son funciones reales, sino complejas.

En consecuencia, la función de densidad mixta está compuesta de dos funoiones reales: el *coespectro* (parte real de la función de densidad mixta) y la *cuadratura del espectro* (parte imaginaria).

1.4 En los procesos multivariantes de tipo econométrico, además de las funciones de densidad de cada proceso que se estudian y las funciones de densidad mixta, existen otros conceptos dignos de estudiarse: la coherencia, la ganancia y la fase.

La función de coherencia correspondiente a una frecuencia determinada tiene analogía con el coeficiente de correlación.

La ganancia está íntimamente relacionada con las funciones de densidades espectrales de los procesos y con su coherencia. Prácticamente podríamos decir que se semejante al cuadrado del coeficiente de regresión de los procesos en la frecuencia λ.

Finalmente, la fase es el posible diferimiento de una serie respecto a la otra, medidas en frecuencia.

CAPITULO II

Conceptos fundamentales

En este capítulo nos ocuparemos de las definiciones de los conceptos fundamentales que intervienen en las transformaciones lineales: el proceso entrante y saliente; filtro, respuesta frecuencial, función de transferencia y ganancia del filtro.

Después nos dedicaremos a las clases de operaciones lineales y su aplicación sobre los procesos estacionarios de parámetro continuo y discreto.

Nota importante: Si no se menciona expresamente, siempre se supondrá que operamos con procesos estocásticos de esperanza matemática nula.

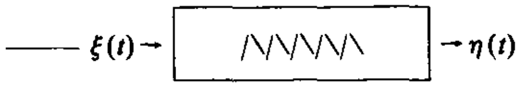
SECCIÓN 1.ª

1. *Definiciones previas y generalidades*

Definición I.—Dos procesos estocásticos

$$\{\xi(t),\ t\epsilon T\} \quad \text{y} \quad \{\eta(t),\ t\epsilon T\} \qquad [1]$$

se denominan de entrada y de salida cuando están relacionados por cualquier algoritmo. Esquemáticamente se representan así:



En este esquema el proceso $\{\xi(t),\ t\epsilon T\}$ *entra* en el sistema, donde se efectúan ciertas operaciones, y sale transformado en otro proceso, $\{\eta(t),\ t\epsilon T\}$. Al proceso estocástico $\xi(t)$ se le denomina proceso entrante *(input)* y al proceso $\eta(t)$, proceso saliente *(output)*.

Definición II.—Si la relación entre los procesos de entrada y de salida pudiésemos escribirla de una de las formas:

1. Proceso de naturaleza continua:

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(h)\,\xi(t-h)\,dh \qquad t\epsilon R \qquad [2]$$

cuando $t\epsilon R$ (R, conjunto de números reales); o

2. Proceso de naturaleza discreta:

$$\eta(t)=\sum_{z=-\infty}^{\infty}\Phi_h\,\xi(t-h) \qquad t\epsilon Z \qquad [2']$$

donde $t\epsilon Z$ (Z, conjunto de números enteros.

Denominamos transformación lineal o, también, filtro lineal a cualquier expresión del tipo [2] o [2'].

Hemos relacionado dos procesos (de entrada *input)* $\{\xi(t),\ t\epsilon T\}$ con otro proceso nuevo (de salida *output)* por medio de una de las fórmulas [2] o [2'], según que el parámetro t pertenezca a los números reales o naturales.

La palabra "filtro" procede de "ingeniería" y puede justificarse su denominación en econometría, como veremos en su momento, porque al aplicar a una serie temporal y efectuar una transformación de uno de los tipos indicados [2] o [2'] formamos una nueva serie temporal "filtrada" y algunas de sus componentes frecuenciales las habremos atenuado, modificado o eliminado.

La función $\Phi(h)$ debe cumplir la condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} / \Phi(h) / dh < \infty$$

y la Φ_h debe cumplir igualmente:

$$\Sigma / \Phi_h / < \infty$$

Las funciones $\Phi(h)$, Φh se denominan filtros de Kernel. Algunos autores las denominan "función impulso".

Las condiciones anteriores garantizan la convergencia.

Definición III.—Se denomina función de respuesta frecuencial del filtro $\Phi(h)$ a la transformada de Fourier de la función del filtro de Kernel:

$$\Phi^x(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \Phi(z)\, dz \qquad z \epsilon R \qquad [3]$$

y la de la función Φ_z su transformada se define así:

$$\Phi^x(\lambda) = \sum_{z=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \Phi_z \qquad z \epsilon Z \qquad [3']$$

el dominio de z puede ser continuo o los números enteros.

Definición IV.—Dados los procesos $\{\xi_i(t),\ t \epsilon T\}$, pertenecientes al espacio de Hilbert $\forall\ \xi_i(t) \epsilon H$ y para $\forall\ a_i \epsilon C$, donde C es el cuerpo de números complejos, si hacemos una combinación lineal de los procesos y aplicamos una transformación T si se verifica que:

$$\eta(t) = T(a_1 \xi_1(t) + a_2 \xi_2(t) = a_1 T\xi_1(t) + a_2 T\xi_2(t) \qquad [4]$$

y si los transformados pertenecen igualmente al espacio de Hilbert, decimos que el operador T es lineal. O, dicho en otras palabras, la transformación T sobre un proceso $\{\xi_i(t),\ t \epsilon T\}$ es lineal.

La definición precedente la cumplen la [2] y [2'], siempre que los filtros de Kernel pertenezcan al cuerpo de números complejos.

Una transformación T sobre un proceso $\{\xi_i(t),\ t \epsilon T\}$ se denomina lineal si para $\forall\ \xi_1(t),\ \xi_2(t) \epsilon H$ (espacio de Hilbert) y para $\forall\ a,\ b \epsilon C$

$$\eta(t) = T[a\xi_1(t) + b\xi_2(t)] = aT\xi_1(t) + bT\xi_2(t) \qquad [4']$$

los transformados pertenecen al espacio H.

Puede comprobarse que la definición II cumple esta condición.

Definición V.—Definiremos *función de transferencia* asociada a un filtro la expresión:

$$\psi(\lambda) = / \Phi^x(\lambda) /^2 \qquad [5]$$

que siempre es real y no negativa.

Definición VI.—Definiremos función ganancia del filtro a la función no negativa:

$$G(\lambda) = \sqrt{\psi(\lambda)} \qquad [6]$$

2. *Clases de operaciones lineales*

En econometría se utilizan transformaciones lineales de tipos muy diversos.

Generalmente suelen dividirse en dos grandes grupos: cuando el parámetro t sea de tipo continuo o discreto.

Esta división suele incluso ser más restrictiva. Los conjuntos $\{t \epsilon T\}$, sobre los que se definen los procesos, son los números enteros u otros asociados a ellos, como son los de una progresión aritmética. Estos procesos normalmente son los que representan series temporales económicas recogidas en tiempos equidistantes.

Los primeros (de naturaleza continua), aun siendo importantes, son menos utilizados. Las transformaciones de los procesos econométricos de tipo discreto son las más utilizadas. Las operaciones lineales se aplican a los tipos de procesos siguientes:

2.1 Para los de naturaleza continua:

La derivada de un proceso:

$$\xi'(t)$$

La derivada de orden k:

$$\xi^{(k)}(t)$$

La integral ordinaria:

$$\int_{-\infty}^{t} \xi(t-z) \cdot h(z)\, dz$$

La integral de Stieljtes:

$$\int_{0}^{\infty} \xi(t-z)\, d\zeta(z)$$

Integrales, combinadas con sumatorias y derivadas de procesos:

$$\sum_{v=1}^{N} \int_{0}^{\infty} \xi^{(v)}(t-z)\, dk_v(z)$$

Estos ejemplos, utilizados en la teoría de predicción (4), son muy importantes y algunos de ellos los examinamos detenidamente. Los límites de las integrales pueden ser diferentes.

2.2 Para los de naturaleza discreta:

Las sumatorias:

$$\sum_{z=0}^{\infty} \xi(t-z) \cdot \alpha_z$$

---

(4) NORBER WILNER: *Extrapolation, interpolation and Smoothing of stationary time series,* 1970, 3.ª ed., pág. 57.

Las diferencias (*n*):

$$\Delta^n \xi(t)$$

Diferencias combinadas con sumatorias, diferencias invertidas, etc.

SECCIÓN 2.ª

1. *Transformaciones lineales sobre procesos estacionarios (parámetro continuo)*

1. La transformación lineal [2] de la sección anterior, aplicada al proceso estacionario $[\xi(t),\ t\epsilon R]$ de media nula, nos da como salida el proceso $\{\eta(t),\ t\epsilon R\}$.

Sustituyamos en [2] de la sección 1.ª el el proceso estocástico $\xi(t)$ por su representación espectral (5):

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\zeta(\lambda) \qquad \forall\, t,\ \lambda\epsilon R \tag{1}$$

El proceso de salida puede escribirse así:

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(h)\,dh\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-h)}\,d\zeta(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(h)\,e^{-i\lambda h}\,dh\Big]d\zeta(\lambda)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,\Phi^{x}(\lambda)\,d\zeta(\lambda) \tag{1}$$

donde hemos sustituido el corchete por la definición [3] de la sección anterior, donde la función $\Phi^x(«)$ es la función de respuesta frecuencial.

La [1] puede escribirse:

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\zeta_1(\lambda) \tag{1'}$$

donde

$$d\zeta_1(\lambda)=\Phi^x(\lambda)\,d\zeta(\lambda) \tag{2}$$

es la función aleatoria estocástica $\zeta(\lambda)$ de naturaleza espectral de incrementos ortogonales independientes con las propiedades:

$$E\,d\zeta(\lambda)=o$$
$$E\zeta(\lambda)=o \tag{3}$$
$$o\ \lambda\neq\lambda \tag{4}$$
$$E\,d\zeta(\lambda)\,\overline{d\zeta(\lambda')}=$$
$$dF(\lambda) \qquad \lambda=\lambda' \tag{5}$$

donde $F(\lambda)$ es una función monótona no decreciente denominada función de distribución espectral.

---

(5) F. J. URBELZ: "Introducción a los procesos estocásticos", *Anales del Instituto de Actuarios*, 1979.

La función $\zeta(\lambda)$ está asociada con una nueva $\zeta_1(\lambda)$, cuyos incrementos $d\zeta_1(\lambda)$ se relacionan con los incrementos de $\zeta_1(\lambda)$ del proceso saliente por la [2].

2. Probemos que $d\zeta_1(\lambda)$ es un proceso ortogonal (I) si lo es $\zeta(\lambda)$ y, en consecuencia, $\eta(t)$ será estacionario:

$$E d\zeta_1(\lambda) = \Phi^x(\lambda)\ E d\zeta(\lambda) = 0 \qquad [3']$$

$$\begin{aligned} E d\zeta_1(\lambda)\ \overline{d\zeta(\lambda')} &= E\Phi^x(\lambda)\ \overline{\Phi^x(\lambda')}\ d\zeta(\lambda)\ \overline{d\zeta(\lambda')} = \\ &= \Phi^x(\lambda)\ \overline{\Phi^x(\lambda')}\ E d\zeta(\lambda)\ \overline{d\zeta(\lambda')} = 0 \qquad \text{si } \lambda \neq \lambda' \end{aligned} \qquad [4']$$

$$\begin{aligned} E / d\zeta_1(\lambda) /^2 &= / \Phi^x(\lambda)^2\ E\{ / d\zeta(\lambda) /^2 \} = \Phi^x(\lambda)^2 d\ F(\lambda) = \\ &= d F_1(\lambda) \qquad \lambda = \lambda' \end{aligned} \qquad [5']$$

de acuerdo con las [3], [4] y [5]. La [5'] nos dice cómo se relaciona *el espectro de salida* con el espectro de entrada.

Decir espectro es similar a decir distribución de la varianza del proceso según la influencia de las frecuencias, y la varianza elemental del proceso transformado de salida $d F_1(\lambda)$ —en la frecuencia λ— es igual a la función de transferencia por la varianza elemental del proceso de entrada en la misma frecuencia.

El proceso de salida $\eta(t)$ [1] o [1'] es un proceso estacionario Si el proceso $\xi(t)$ es estacionario, tiene por representación espectral la [1] y la de su función de covarianza:

$$B(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z}\, d F(\lambda) \qquad [6]$$

La función de covarianza del proceso transformado es:

$$B_\eta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} / \Phi^x(\lambda) /^2\, d F(\lambda) \qquad [6']$$

o también:

$$B_\eta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} d^{i\lambda z}\, d F_\eta(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} / \Phi^x(\lambda) /^2\, d F_\xi(\lambda) \qquad [7]$$

Hemos añadido los subíndices correspondientes a los procesos de entrada y salida. $F_\xi(\lambda)$ es la función de distribución espectral del proceso $\{\xi(z), t\epsilon R\}$ y $F_\eta(\lambda)$ la función de distribución espectral del proceso $\{\eta(t), t\epsilon R\}$.

4. La relación entre los espectros, según hemos visto en [5], es:

$$d F_\eta(\lambda) = / \Phi^x(\lambda) /^2\, d F_\xi(\lambda) \qquad [8]$$

o también las funciones de densidad espectrales si la [8] es continua y derivable:

$$f_\eta(\lambda) = / \Phi^x(\lambda) /^2 f_\xi(\lambda) \qquad [8']$$

La relación entre el espectro de salida y el de entrada es, precisamente, *la función de transferencia.*

Las funciones de $F_\xi(\lambda)$ y $F_\eta(\lambda)$ son las funciones de distribuciones espectrales de los procesos estocásticos entrante y saliente, respectivamente. Estas funciones indican las varianzas de los procesos hasta la frecuencia λ. Por simple examen de dos frecuencias obtenemos las diferencias de las funciones de distribución:

$$F_\xi(\lambda_2) - F_\xi(\lambda_1)$$

y $$\lambda_2 > \lambda_1$$

$$F_\eta(\lambda_2) - F_\eta(\lambda_1)$$

Al comparar las diferencias de estas dos funciones (monótonas no decrecientes), si para un determinado intervalo de λ la diferencia de la función de distribución es notoriamente inferior a la diferencia del proceso entrante, la conclusión es que el efecto producido, por la transformación lineal, ha producido una atenuación o disminución de la varianza en la banda de frecuencia (λ_1, λ_2).

La [8'] nos indica las relaciones de las funciones de densidad espectrales en la frecuencia λ.

En este caso las varianzas de una frecuencia determinada son elementales y hay que multiplicar por $d\lambda$ para su representación correcta.

Si tenemos una gráfica de las funciones de densidad espectral, el área representa la varianza. Y es conveniente analizar la [8'] para examinar la influencia de un filtro determinado por una transformación lineal.

2. *Transformaciones lineales sobre procesos estacionarios (parámetro discreto)*

1. La transformación lineal [2'] de la sección 1.ª del filtro de Kernel sobre el proceso estacionario $\{\xi(t),\ t\epsilon Z\}$:

$$\eta(t) = \sum_{z=-\infty}^{\infty} \Phi_z \xi(t-z) \qquad \forall\ t\epsilon Z \tag{9}$$

si sustituimos $\xi(t-z)$ por su representación espectral [3], también proporciona un proceso estacionario que puede representarse espectralmente:

$$\eta(t) = \sum_{z=-\infty}^{\infty} \Phi_z \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-z)} d\zeta(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \left[\sum_{z=-\infty}^{\infty} \Phi_z e^{-i\lambda z}\right] d\zeta(\lambda) =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \Phi^x(\lambda)\, d\zeta(\lambda) \qquad t\epsilon Z \tag{10}$$

siendo $\Phi^x(\lambda)$ la función [3'] definida en III de la sección 1.ª, denominada respuesta de frecuencias asociada al filtro Φ_z de kernel.

2. La estacionariedad de [10] se demuestra de forma análoga al proceso $\{\eta(t),\ t\epsilon R\}$, demostrado en el parágrafo anterior, siendo las relaciones [1]

a [8] idénticas, excepto en los límites porque λ varia entre $-\pi$ y π. Así, por ejemplo, la función de covarianza es:

$$B_\eta(z)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda z}\, d\, F_\eta(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda z}\, /\, \Phi^x(\lambda)\, /^2\, d\, F(\lambda) \qquad z\epsilon Z$$
$$\lambda\, \epsilon\, (-\pi,\, +\pi) \qquad [11]$$

No hay que olvidar que cuando $z\epsilon Z$ —conjunto de números enteros— las representaciones espectrales no son el dominio real sino entre $-\pi$, $+\pi$.

SECCIÓN 3.ª

1. *Transformaciones lineales sucesivas. Parámetro $t\epsilon R$*

1. Definición.—Dado un proceso estacionario, si efectuamos una transformación T, tenemos un nuevo proceso. Si al proceso resultante efectuamos otra transformación T_2, tendremos otro nuevo proceso, y así sucesivamente.

A todo este conjunto de transformaciones lineales se denomina transformaciones sucesivas.

2. Si efectuamos la transformación lineal T_1 sobre el proceso estacionario $\xi(t)$ y después, con el proceso resultante, efectuamos otra transformación lineal T_2, obtendremos un nuevo proceso "salida" resultante de las dos transformaciones.

Sin pérdida de generalidad pueden considerarse n transformaciones lineales cualesquiera.

3. Examinemos las propiedades de estas transformaciones:

$$\eta_1(t)=T_1\,\xi(t) \qquad [1]$$

$$\eta(t)=T_2\,\eta_1(t)=T_2\,T_1\,\xi(t) \qquad [2]$$

La linealidad es evidente, recordando la [4] de la sección 1.ª, si lo son T_1 y T_2.

4. La representación espectral de la transformación [1] se ha estudiado en las secciones anteriores, y si el parámetro $t\epsilon R$ y aplicamos otra transformación lineal con nuevo factor de filtrado $\Phi_2(z)$, tenemos que el proceso de salida es:

$$\begin{aligned} \eta_s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t-z')\ \Phi_2(z')\ dz' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\lambda(t-z')}\,\Phi_1^x(\lambda)\, d\zeta(\lambda)]\,\Phi_2(z')\, dz' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,\Phi_1^x(\lambda)\Big[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z'}\,\Phi_2(z')\, dz'\Big]\, d\zeta(\lambda) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,\Phi_2^x(\lambda)\,\Phi_1^x(\lambda)\, d\zeta(\lambda) \end{aligned} \qquad [3]$$

que es la representación espectral del proceso salida, y siendo $\Phi_2^x(\lambda)$, es la transformada de Fourier de $\Phi_2(z)$ y $\Phi_1^x(\lambda)$ es la repuesta frecuencial de $T_1(z)$, según la definición III de la sección 1.ª

4. El proceso salida $\{\eta_s(t),\ t\epsilon R\}$ también es un proceso estacionario. Sus características se demuestran sencillamente:

Partiendo del proceso de esperanza nula, tenemos:

4.1 La media del proceso de salida:

$$E\eta_s(t)=0$$

4.2 La función de covarianza:

$$B(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} / \Phi_1^x(\lambda)\,\Phi_2^x(\lambda) /^2\, d\,F(\lambda) \qquad [4]$$

luego esta función también $B(z)$ puede escribirse:

$$B(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z}\, d\,F_{\eta_s}(\lambda) \qquad [5]$$

De la [4] y la [5] se deduce la relación de espectros (entrada/salida):

$$d\,F_{\eta_s}(\lambda)= / \Phi_2^x(\lambda) /^2 / \Phi_1^x(\lambda) /^2\, d\,F_\xi(\lambda) \qquad [6]$$

$F_{\eta_s}(\lambda)$ es la función de densidad del proceso de salida $\eta_s(t)$, y $F(\lambda)=$ $=F_\xi(\lambda)$, la función de densidad del proceso de entrada $\xi(t)$.

5. Extensión a n transformaciones lineales. Dados los filtros de Kernel $\Phi_1(.)$, $\Phi_2(.)$, ..., $\Phi_n(.)$ y sus correspondientes transformadas de Fourier de mencionadas funciones de Kernel, es decir, las funciones de respuesta frecuencial $\Phi_1^x(.)\{i=1,...,n\}$, según la definición III de la sección 1.ª, tenemos las siguientes representaciones espectrales y relaciones:

a) Representación espectral del proceso de salida $\{\eta(t),\ t\epsilon R\}$ después de efectuadas las n transformaciones lineales:

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,\Phi_1^x(\lambda)\ \Phi_2^x(\lambda)\ ...\ \Phi_n^x(\lambda)\ d\zeta(\lambda) \qquad [7]$$

siendo

$$\Phi_j^x(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda}\ \Phi_j(z)\,dz \qquad [8]$$

la función de respuesta frecuencial del filtro de tiempo invariante del lugar j.

Aclaremos que la denominación de filtro de "tiempo invariante" es cuando la función [8] no depende del tiempo.

Venimos empleando la notación $\zeta(\lambda)$ para un proceso de incrementos ortogonales y que

$$E\,d\zeta(\lambda)=0$$

Luego resulta sencillo probar que también

$$\Phi_1^x(\lambda)\ ...\ \Phi_n^x(\lambda)\,d\zeta(\lambda) \qquad [9]$$

es el incremento de un proceso ortogonal $\zeta_1(\lambda)$ y también es un proceso estocástico de incrementos ortogonales y media nula.

b) Representación espectral de la función de covarianza.

También es estacionaria y

$$B_\eta(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} / \Phi_1^x(\lambda)\ \Phi_2^x(\lambda)\ \ldots\ \Phi_n^x(\lambda)^2\, d\, F_\xi(\lambda) \qquad [10]$$

c) Relaciones entre los espectros de entrada con el de salida. Esta relación es:

$$d\, F_\eta(\lambda) = /\ \Phi_1^x(\lambda)\ \Phi_2^x(\lambda)\ \ldots\ \Phi_n^x(\lambda)\ /^2\, d\, F_\xi(\lambda) \qquad [11]$$

Observemos que, conocido un espectro y las funciones de transferencia, determinamos el otro espectro. Son inmediatas las fórmulas cuando los filtros de Kernel sucesivos son idénticos.

La [11] nos proporciona la relación entre los espectros de entrada y salida después de efectuar n transformaciones sucesivas.

Del análisis de la expresión [11] deducimos una serie de consideraciones importantes:

1.ª Permutabilidad de los filtros sin que se altere el espectro de la última serie resultante.

2.ª Si una de las funciones de transferencia se anulara para un valor de la frecuencia, se anulará para el mismo valor el espectro correspondiente a esa frecuencia.

3.ª Si la función de distribución espectral de entrada $F_\xi(\lambda)$ es derivable, podremos dividir la [11] por $d\lambda$ y tendremos las relaciones entre las funciones de densidad espectral de salida a la de entrada. El cociente de las dos funciones de densidad espectrales es el producto de las funciones de transferencia de las n transformaciones lineales efectuadas.

6. *Transformaciones lineales sucesivas. Parámetro* t *discreto*

1. En este caso la función de filtro de Kernel es $\Phi_z\{z \epsilon Z\}$, por lo que ya vimos en [3] de la sección 1.ª que la función de respuesta frecuencial es:

$$\Phi_j^x(\lambda) = \sum_{z=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z}\, \Phi_z^{(j)} \qquad [12]$$

siendo $\Phi_z^{(j)}$ el filtro de Kernel correspondiente a transformación (j).

2. De forma semejante a como hemos demostrado para el caso de transformaciones lineales de parámetro continuo, tendremos para el caso discreto y podemos representar fórmulas semejantes a la [7] para la representación espectral del proceso de salida o la [10] para la función de covarianza.

Las representaciones espectrales sucesivas para parámetro $t \epsilon Z$ discreto son semejantes a las expuestas en [7] para el proceso y [10] para la función de covarianza.

Hemos de señalar una *nota importante para estas representaciones:*

Los límites de la frecuencia son

$$\lambda \epsilon (-\pi, -\pi)$$

por lo que las integrales (cuando $z \epsilon Z$) el campo de variación *no es el eje real,* sino el dominio de la frecuencia.

De igual modo obtenemos para la relación entre los espectros fórmula semejante a la [11].

SECCIÓN 4.ª

1. *Efectos de filtro*

Finalizamos este capítulo con una serie de conclusiones muy interesantes y de gran utilidad, consecuencia de los efectos de los filtros por las transformaciones de los procesos.

Estas conclusiones han sido demostradas en las secciones anteriores:

1.ª De las relaciones [8] u [8'] de la sección 2.ª se desprende que si la función de transferencia $/ \Phi^x(\lambda) /^2$ se anula para un valor determinado de frecuencia λ, por ejemplo, $\lambda = \lambda_o$, también se anulará el espectro de salida en este punto.

Aplicaciones: *En Econometría,* por ejemplo, *la tendencia representa un período infinito* o, dicho de otra forma, le corresponde el punto de frecuencia $\lambda = 0$. Si el espectro de una serie económica es muy grande en la frecuencia $\lambda = 0$, es porque le corresponde un período infinito. Este hecho revela la existencia de tendencia en el proceso. Si elegimos un filtro para que la función de transferencia se anule para $\lambda = 0$, y aplicado este filtro a los *datos de entrada de la serie obtendremos una nueva serie libre de los efectos de la tendencia.*

2.ª Igualmente podemos determinar filtros para que dejaran pasar frecuencias inferiores a una determinada frecuencia, o superiores, o incluso una zona o "banda de frecuencias" determinada. Estos filtros reciben denominaciones paso superior, paso inferior, paso banda, etc. Esto justifica la aceptación, en la terminología econométrica, de la palabra "filtro".

3.ª Es sencillo eliminar efectos producidos por variaciones estacionales o de tipo periódico de forma semejante a lo indicado para la tendencia.

4.ª La relación entre el espectro de salida al espectro de entrada nos da la función de transferencia o el producto de ellas, según sea una transformación simple o fueren transformaciones lineales sucesivas.

5.ª La función de respuesta frecuencial puede ponerse en la forma:

$$\Phi^x(\lambda) = / \Psi(\lambda) / e^{i\alpha(\lambda)} = \Phi_1^x(\lambda) + i\,\Phi_2^x(\lambda) \qquad [1]$$

siendo

$$\Psi(\lambda)=\sqrt{\Phi_1^x(\lambda)^2+\Phi_2^x(\lambda)^2}=\sqrt{/\ \Phi^x(\lambda)\ /^2} \qquad [2]$$

según [6], la ganancia del filtro; y [3] se denomina fase:

$$\alpha(\lambda)=\text{Artg}\ \frac{-\Phi_2^x(\lambda)}{\Phi_1^x(\lambda)} \qquad [3]$$

La fase nos indica cómo puede alterar la frecuencia por efectos del filtro.

6.ª Con esta notación y aplicando la transformación lineal [2] del filtro de Kernel de la sección 1.ª, el proceso de salida puede escribirse:

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\lambda t+\alpha(\lambda)]}\,\Psi(\lambda)\,d\zeta(\lambda) \qquad [4]$$

y nos proporciona una información importante, que se interpreta sencillamente:

a) La frecuencia angular no varía.

b) La amplitud aumenta o se reduce según

$$/\ \Psi(\lambda)\ /\gtreqless 1$$

c) La fase se altera siempre que

$$\alpha(\lambda)\neq 0$$

CAPITULO III

Procesos discretos econométricos

En este capítulo trataremos de los procesos fundamentales econométricos.

Los modelos más estudiados son los de tipo lineal. Si estos modelos son de tipo estocástico se le añade el proceso aleatorio denominado perturbación aleatoria.

Así, si Y es un vector columna; X, una matriz de las variables endógenas; ϵ, un vector de la perturbación aleatoria, y β, el vector de los parámetros a estimar, se plantea matricialmente la ecuación:

$$Y=X\beta+\epsilon$$

Los componentes teóricos del traspuesto β son los parámetros de este modelo lineal:

$$\beta^{1}=\{\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_k\}$$

Las variables endógenas y_t son las componentes del vector y.

En general se plantean ciertas hipótesis, entre ellas las siguientes:

1. Linealidad del modelo.

2. No aleatoriedad de las variables endógenas.

3. Proceso estocástico de la perturbación aleatoria (esperanza matemática nula y homocedasticidad para todo t e incorrelación).

4. Otras hipótesis de colinealidad, normalidad de la distribución de la perturbación aleatoria, etc., suelen completar para un análisis de las distribuciones de las estimaciones.

El planteamiento de este modelo econométrico lineal tiene gran importancia; pero, entre las hipótesis, la no aleatoriedad de las variables endógenas observadas a través del tiempo supone cierta restricción.

Nuestro trabajo se basa en considerar las trayectorias observadas como muestras de procesos estocásticos.

Estudiamos los principales procesos econométricos y no haremos hipótesis sobre distribuciones.

SECCIÓN 1.ª

1. *Perturbación aleatoria*

1. En Econometría existen modelos de procesos combinados linealmente con un proceso típico denominado sencillamente perturbación aleatoria.

2. Denominamos procesos de perturbación aleatoria $\{\epsilon_t, t \epsilon Z\}$ (6) a aquel que tiene las características siguientes:

2.1 Esperanza: [1]

$$E\epsilon_t = 0 \qquad [1']$$

2.2 Covarianzas:

$$B(t-s) = E\,\epsilon_t\,\epsilon_s = \delta_{t,s}\,\sigma^2 \qquad \forall\ s,\ t \epsilon Z \qquad [2]$$

La [2] nos dice la homocedasticidad e incorrelación, donde δ es el símbolo de Kronecker.

3. La representación espectral de este proceso es:

$$\epsilon_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, d\zeta(\lambda) \qquad t \epsilon Z \qquad [3]$$

siendo $d\zeta(\lambda)$ proceso de incrementos correlacionados.

(6) A este proceso en física se le denomina "ruido blanco" ($t \epsilon R$). Esta denominación es adecuada en la terminología econométrica y estadística.

4. La función de distribución espectral del proceso [3], recordando la fórmula [16] de la sección 6.ª del capítulo III (7), es:

$$F(\lambda)=\frac{\lambda+\pi}{2\pi}\,B(o)+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda}-e^{i\pi n}}{-in}\,B(n)$$

y por ser

$$B(o)=\sigma^2 \quad \text{y} \quad B(n)=o \qquad n\neq o$$

según [2], la [4] se convierte en:

$$F(\lambda)=\frac{\lambda+\pi}{2\pi}\cdot\sigma^2 \qquad -\pi<\lambda\leq\pi \tag{5}$$

Esta función de distribución espectral nos indica la varianza del proceso ϵ_t hasta la frecuencia λ.

5. La función de densidad espectral es la derivada de [5]:

$$f(\lambda)=F'(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi} \qquad -\pi<\lambda\leq\pi \tag{6}$$

Al ser constante la función de densidad espectral, el proceso $\{\epsilon_t\}$ carece de frecuencias propias y todas las frecuencias influyen igualmente en la formación de la varianza del proceso.

SECCIÓN 2.ª

Procesos de medias móviles

1. Un proceso $\{\xi_t,\ t\in Z\}$ se denomina de medias móviles si a partir del proceso de perturbación aleatoria estudiado en la sección anterior formamos la combinación lineal:

$$\xi_t=\sum_{j=0}^{m}\alpha_j\,\epsilon_{t-j} \qquad \begin{array}{l}\forall\ t\in Z\\ \forall\ \alpha_j\in R\end{array} \tag{1}$$

Este proceso es estacionario si no es infinita la varianza, en cuyo caso es de orden m.

Si, por el contrario, $m\to\infty$, para que el proceso [1] sea estacionario debe cumplir la condición

$$\Sigma^{\alpha}\,\partial_j^2<\infty$$

Elegiremos $\alpha_o=1$, donde R es el conjunto de números reales.

(7) F. J. URBELZ: "Introducción a la teoría de los procesos estocásticos", *Anales del Instituto de Actuarios*, 1979.

2. La representación espectral de la transformación lineal del nuevo proceso [1], según la [2'] y [3'] de la sección 1.ª, [10] de la sección 2.ª del capítulo II y las fórmulas [3] de la sección anterior, si hacemos $I_n = \Phi_m$ tenemos:

$$\xi_t = \int_{\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, \Phi^x(\lambda)\, d\zeta(\lambda) \qquad t \in Z \tag{2}$$

donde en este caso la *respuesta frecuencial* es:

$$\Phi^x(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j\, e^{-ij\lambda} \qquad -\pi < \lambda \leq \pi \tag{3}$$

de acuerdo con la [3'] de la sección 1.ª del capítulo anterior.

3. La función de densidad espectral de ξ_t es:

$$f_1(\lambda) = /\, \Phi^x(\lambda)\, /^2\, \frac{\sigma^2}{2\pi} \qquad -\pi < \lambda \leq \pi \tag{4}$$

según la [8'] de la sección 2.ª del capítulo II y de la [6] de la sección anterior.

Esta función de densidad [4] puede ponerse de distintas formas según [3]:

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \left| \sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{-i\lambda j} \right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} = \left| \sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{i\lambda j} \right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} = \\ &= \left| \sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{i\lambda(m-j)^2} \right| \frac{\sigma^2}{2\pi} \end{aligned} \tag{4'}$$

Tiene importancia teórica y práctica poner en diferentes formas la función de densidad espectral. Su justificación es sencilla.

Por ejemplo:

$$\left| \sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{-ij\lambda} \right|^2 = \left(\sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{-ij\lambda} \right) \overline{\left(\sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{-ij\lambda} \right)} =$$

$$= \left(\sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{-ij\lambda} \right) \left(\sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{ij\lambda} \right) = \left(\sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{ij\lambda} \right) \overline{\left(\sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{ij\lambda} \right)} =$$

$$\left| \sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{ij\lambda} \right|^2 \qquad \text{porque } \alpha_j \in R$$

También se demuestra sencillamente:

$$\left| \sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{-ij\lambda} \right|^2 = e^{i\lambda m} \cdot e^{-i\lambda m} \left(\sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{-i\lambda j} \right) \left(\sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{i\lambda j} \right) =$$

$$= \left(\sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{i\lambda(m-j)} \right) \left(\sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{-i\lambda(m-j)} \right) = \left| \sum_{j=o}^{m} \alpha_j e^{i\lambda(m-j)} \right|^2$$

La importancia de poner la función de densidad espectral en formas diferentes nos permite en las aplicaciones, cuando conozcamos la función de densidad de un proceso estocástico, elegir la fórmula óptima de extrapolación (8).

También la [10'] puede escribirse:

$$f_1(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\prod_{j=1}^{m} / e^{i\lambda}-\beta_j/^2 \qquad [4'']$$

siendo β_1, β_2, ..., β_m las m raíces de la siguiente ecuación (8):

$$\sum_{j=o}^{m}\alpha_j Z^{m-j}=o \qquad [5]$$

4. La función de covarianza del proceso [1] es:

$$B(n)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} / \Phi^x(\lambda) /^2 d\lambda \qquad [6]$$

Para calcular [6] recordemos primero [3] y [4'], y la función de transferencia en nuestro caso puede escribirse:

$$/ \Phi^x(\lambda) /^2=\sum_{j,k=o}^{m} e^{-i\lambda(j-k)}\alpha_j\alpha_k \qquad [7]$$

Hagamos:

$$h=j-k \Rightarrow -m\leq h\leq +m \qquad [8]$$

Sumando [7] respecto de k (siempre no negativa), podemos descomponerla en [2] según [8]:

a) Si $h\geq o \qquad k=j-h\leq m \Rightarrow o\leq k\leq m-h$ [9]

b) Si $h<o \qquad k=j-h\geq o \Rightarrow m\geq k\geq -h=/h/$ [9']

Finalmente, de estas dos sumas, la función de transferencia [7] puede escribirse (9):

$$/ \Phi^x(\lambda) /^2=\sum_{h=-m}^{+m}\sum_{k=o}^{m-/h/} e^{-i\lambda h}\alpha_k\alpha_{k+h} \qquad \alpha_k\in R \qquad [10]$$

Sustituyendo en [6] tenemos la función de covarianza:

$$B(n)=\int_{\pi}^{\pi}\left[\sum_{h=-m}^{+m} e^{i\lambda(n-h)}\sum_{j=o}^{m-/h/}\alpha_j\alpha_{j+h}\right]\sigma^2\frac{d\lambda}{2\pi} \qquad [11]$$

(8) F. J. URBELZ: "Extrapolación, interpolación y filtraje", *Anales del Instituto de Actuarios*, 1978, págs. 178 y ss.

(9) Ver mi trabajo "Extrapolación, interpolación y filtraje", *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 1978, págs. 176 y ss.

Pero la [11] puede simplificarse porque

$$\frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\, d\lambda = \begin{cases}\sigma^2 & n=o \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

La [11] se convierte en:

$$B(n)=\begin{cases}\sigma^2 \sum\limits_{j=o}^{m-/n/} \alpha_j \alpha_{j+n} & /n/\leqslant m \\ 0 & /n/>m\end{cases} \qquad [11']$$

Box y Jenkins (10) estudian ampliamente estos procesos.

5. Estudiemos, por su importancia, algunos casos simples:

a) $m=1$. El proceso [7] es:

$$\xi_t = \epsilon_t + \alpha_1\, \epsilon_{t-1} \qquad \begin{matrix} t \in Z \\ \alpha_1 \in R \end{matrix} \qquad [12]$$

por haber supuesto que $\alpha_o = 1$.

La función de densidad espectral de [12] es:

$$f_1(\lambda) = /e^{i\lambda} + \alpha_1/^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} = [1 + e^{+i\lambda}\alpha_1 + e^{-i\lambda}\alpha_1 + \alpha_1^2] \frac{\sigma^2}{2\pi} =$$

$$= [1 + \alpha_1^2 + 2\,\alpha_1\, \cos\lambda] \frac{\sigma^2}{2\pi} \qquad [13]$$

La [13] nos indica que la función de densidad espectral no es constante. Recordemos que la función de densidad espectral del proceso de perturbación aleatoria es constante. La transformación [12] nos conduce a la conclusión de que el espectro depende del cos λ y de α_1.

Analicemos la influencia y esta variación según los distintos casos que pueden presentarse.

Como varía cos λ entre -1 a $+1$, según el argumento λ, dividimos el intervalo de variación de λ en los dos siguientes ($-\pi$, 0 y 0, $+\pi$); la variabilidad de $f_1(\lambda)$ se expone en los cuadros siguientes, según el valor de α_1.

---

(10) George E. P. Box y G. M. Jenkins: *Time series analysis, forecasting and control*, Holden Day, San Francisco, 1970.

CUADRO 1

Primer caso: $\alpha_1 > 0$

λ	$-\pi$	$<$	0	$<$	π
$\cos \lambda$	-1	$<$	1	$>$	-1
$f_1(\lambda)$	$(1-\alpha_1)^2 \dfrac{\sigma^2}{2\pi}$	$<$	$(1+\alpha_1)^2 \dfrac{\sigma^2}{2\pi}$	$>$	$(1-\alpha_1)^2 \dfrac{\sigma^2}{2\pi}$
Extremos	Mínimo		Máximo		Mínimo

Es decir, las bajas frecuencias absolutas (alrededor de cero) influyen más que las altas frecuencias a la formación de la varianza total del proceso. Esta influencia es tanto mayor cuanto mayor sea $\alpha_1 \to 1$. Caso de ser $\alpha_1 = 1$, los extremos mínimos son nulos y no pueden ser negativos, ya que siempre $f(\lambda) \geq o$.

Segundo caso: $\alpha_1 < o$.

Llegamos a conclusiones opuestas. En el cuadro 2 está el campo de variación de la función de densidad según los valores de las frecuencias.

CUADRO 2

λ	$-\pi$	$<$	0	$<$	π
$\cos \lambda$	-1	$<$	1	$>$	-1
$f_1(\lambda)$	$(1-\alpha_1)^2 \dfrac{\sigma^2}{2\pi}$	$>$	$(1+\alpha_1)^2 \dfrac{\sigma^2}{2\pi}$	$<$	$(1-\alpha_1)^2 \dfrac{\sigma^2}{2\pi}$
Extremos	Máximo		Mínimo		Máximo

En este caso las altas fecuencias absolutas contribuyen más que las bajas a la formación del espectro.

De la simetría de la función cos λ se observa que el espectro del proceso [12] de medias móviles más simple (y todos los de naturaleza real) es simétrico respecto del origen.

En los cuadros observamos la existencia de dos mínimos extremos (o máximos) y de un máximo [o mínimo, según el valor de $\alpha_1 > o$ (o $\alpha_1 < o$)].

Si $/\alpha_1/ \to o$, el proceso [2] tiende al proceso de perturbación aleatoria $\{\epsilon_t,\ t \in Z\}$ con la función de densidad constante expuesta, cuyas características hemos estudiado en la sección anterior.

b) $m = 2$. El proceso [1] se reduce:

$$\xi_t = \epsilon_t + \alpha_1 \epsilon_{t-1} + \alpha_2 \epsilon_{t-2} \qquad [14]$$

La función de densidad espectral en este caso, recordando la respuesta frecuencial [7], es:

$$f_1(\lambda) = / \Phi^x(\lambda) /^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} = / 1 + \alpha_1 e^{-i\lambda} + \alpha_2 e^{-2i\lambda} /^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} =$$

$$= (1 + \alpha_1 e^{-i\lambda} + \alpha_2 e^{-2i\lambda})(1 + \alpha_1 e^{i\lambda} + \alpha_2 e^{2i\lambda}) \frac{\sigma^2}{2\pi} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left[1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1 \cos\lambda + 2\alpha_2 \cos 2\lambda + 2\alpha_1\alpha_2 \cos\lambda\right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left[[(1-\alpha_2)^2 + \alpha_1^2] + 2\alpha_1(1+\alpha_2)\cos\lambda + 4\alpha_2 \cos^2\lambda\right]$$

Esta función de densidad es un trinomio respecto de cos λ y puede escribirse:

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left\{4\,\alpha_2 \left[\cos\lambda + \frac{\alpha_1(1+\alpha_2)}{4\alpha_2}\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{4\alpha_2[(1-\alpha_2)^2 + \alpha_1^2] - \alpha_1^2(1+\alpha_2)^2}{4\alpha_2}\right\}$$

simplificando el término independiente tenemos:

$$f_1(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left\{4\,\alpha_2 \left[\cos\lambda + \frac{\alpha_1(1+\alpha_2)}{4\alpha_2}\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(1-\alpha_2)^2(4\alpha_2 - \alpha_1^2)}{4\alpha_2}\right\} \qquad [15]$$

La función de densidad no puede ser negativa y se observa su simetría. Anderson (11) estudia las variaciones de este proceso, y esquemáticamente sintetizamos y exponemos:

Casos

Primero:

CUADRO 3

$+\alpha_1(1+\alpha_2) > 4 / \alpha_2 /$

λ	$-\pi$	<	0	<	$+\pi$
Extremos	Mínimo	<	Máximo	>	Mínimo
$f(\lambda)$	$\frac{\sigma^2}{2\pi}(1-\alpha_1+\alpha_2)^2$	<	$\frac{\sigma^2}{2\pi}(1+\alpha_1+\alpha_2)^2$	>	$\frac{\sigma^2}{2\pi}(1-\alpha_1+\alpha_2)^2$

(11) ANDERSON: *The statistical analysis of time series*, 1971, págs. 403 y ss.

Segundo:

CUADRO 4

$$+\alpha_1(1+\alpha_2) < -4 / \alpha_2 /$$

λ	$-\pi$	0	π
Extremos	Máximo	Mínimo	Máximo
$f(\lambda)$	$\frac{\sigma^2}{2\pi}(1-\alpha_1+\alpha_2)^2 >$	$\frac{\sigma^2}{2\pi}(1+\alpha_1+\alpha_2)^2$	$< \frac{\sigma^2}{2\pi}(1-\alpha_1+\alpha_2)^2$

Tercero:

CUADRO 5

$$/ \alpha_1(1+\alpha_2) / < 4 / \alpha_2 / \Rightarrow \cos\lambda_o = \frac{-\alpha_1(1+\alpha_2)}{4\alpha_2}$$

$$\text{si } \alpha_2 > 0 \Rightarrow \alpha_1^2 < 4\alpha_2$$

λ	$-\pi$	$-\lambda_o$	0	λ_o	$-\pi$
$f(\lambda)$	$\frac{\sigma^2(1-\alpha_1+\alpha_2)^2}{2\pi}$	$> f(-\lambda_o)$	$< f(o)$	$> f(+\lambda_o)$	$< \frac{\sigma^2}{2\pi}(1-\alpha_1+\alpha_2)^2$
Extremos	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo

Si $\alpha_2 < 0$, las conclusiones son opuestas.

SECCIÓN 3.ª

1. *Procesos autorregresivos. Teoría general*

1. Estos procesos estudiados por Yule (12) se denominan también de armónicos perturbados.

Numerosas series económicas pueden representarse por procesos de este tipo.

El proceso $\{\xi(t), t \in Z\}$ [1], denominado autorregresivo, es de orden n si puede expresarse por la relación lineal:

$$\xi_t = -\sum_{j=1}^{n} \beta_j\, \xi_{t-j} + \epsilon_t \qquad t \in Z \qquad [2]$$

donde el proceso ϵ_t es el proceso estudiado de la perturbación aleatoria.

(12) G. U. YULE: *Introducción a la Estadística Matemática*, Aguilar, 1950.

También la [2] puede escribirse:

$$\sum_{j=o}^{n} \beta_j \, \xi_{t-j} = \epsilon_t \qquad \begin{matrix} t \in Z \\ \beta_j \in R \end{matrix} \qquad [3]$$

eligiendo $\beta_o = 1$.

Yule supone que el proceso [1] es originado por dos procesos: uno de propiedades internas con componentes sistemáticos, tales como elasticidades y contracciones, que determina cómo se mueve el sistema, y el otro, una serie de perturbaciones aleatorias del tipo estudiado en la sección 1.ª

El nombre de procesos regresivos dado por Yule es porque pueden fundamentarse en unas ecuaciones de regresión. Son de gran importancia en econometría porque reflejan muchas series económicas cuyas observaciones dependen de los "retardos" o desplazamientos.

Wold (13) en su tesis doctoral los estudia ampliamente, así como otros autores (14). Si las raíces de la ecuación característica:

$$z^n + \beta_1 \, z^{n-1} + \ldots + \beta_n = 0 \qquad [4]$$

están dentro del círculo unidad, el proceso $\{ \xi_t, \ t \in Z \}$ será estacionario. La discusión de cuestión tan importante puede consultarse en citadas obras.

En la hipótesis de estacionariedad, si multiplicamos la [3] por $\overline{\xi}_s$ y hallamos esperanzas, tenemos:

$$\sum_{j=o}^{n} \beta_j \, B(t-j-s) = 0 \qquad [5]$$

La [5] la hemos escrito porque

$$E \, \xi(t-j) \, \overline{\xi(s)} = B(t-j-s)$$

En las series económicas, las series son de naturaleza real y las funciones de covarianza son simétricas, $B(-k) = B(k)$.

La [5] para cada valor de s tenemos una ecuación. Dando a s tantos valores como parámetros tiene el modelo formamos un sistema que depende de las covarianzas. Así determinamos los parámetros β_j del proceso autorregresivo.

Este sistema es el de Yule-Walker: cuando se sustituyen $B(h)$ por sus coeficientes de correlación:

$$\rho(h) = \frac{B(h)}{B(o)} \qquad [6]$$

y si es real $\rho(-h) = \rho(h)$ por ser $B(k) = B(-k)$.

(13) H. O. A. Wold: "Series cronológicas estacionarias", *Trabajos de Estadística*, volumen II, 1951.

(14) Box y Jenkins, *o. c.*, págs. 54 y ss.

La representación espectral de los procesos ξ_t y la combinación lineal [2]. Recordando la [3], tenemos:

$$\sum_{j=o}^{n} \beta_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-j)} d\zeta_1(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} d\zeta(\lambda) =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \left[\sum_{j=o}^{n} \beta_j e^{-i\lambda j} \right] d\zeta_1(\lambda) \qquad \text{siendo } \beta_o = 1 \tag{7}$$

donde $d\zeta_1(\lambda)$ es el proceso de incrementos ortogonales del proceso autorregresivo. De la [7] deducimos:

$$d\zeta_1(\lambda) = \frac{d\zeta(\lambda)}{\Phi^x(\lambda)} \tag{8}$$

siendo

$$\Phi^x(\lambda) = \sum_{j=o}^{m} \beta_j e^{-i\lambda j} \tag{8'}$$

la función de respuesta frecuencial de la transformación lineal, considerando las $\{\beta_j, j=o, 1, \ldots, m\}$ como un filtro de Kernel donde $\beta_o = 1$.

3. La relación entre los espectros es sencilla, pero en las condiciones de estacionariedad indicadas viene expresada por alguna de las fórmulas:

$$E\{/ d\zeta_1(\lambda)/^2\} = \frac{\sigma^2 d\lambda}{2\pi / \Phi^x(\lambda)/^2} \Rightarrow \tag{9}$$

$$f_1(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi \left| \sum_{j=o}^{m} \beta_j e^{-i\lambda j} \right|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi \left| \sum_{j=o}^{m} \beta_j e^{i\lambda(m-j)} \right|^2} \tag{10}$$

recordando las diversas representaciones de la [4] de la sección anterior.

4. El proceso autorregresivo tiene representación espectral (conocida la [7] y [8]):

$$\xi(t) = \int_{\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} d\zeta_1(\lambda) = \int_{\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \frac{d\zeta(\lambda)}{\Phi^x(\lambda)} \qquad t \in Z \tag{11}$$

según [8].

La función de covarianza, de acuerdo con la [10], tiene la representación espectral:

$$B(t) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \frac{d\lambda}{\left| \sum_{j=o}^{n} \beta_j e^{i\lambda(n-j)} \right|^2} \tag{12}$$

2. *Procesos autorregresivos. Casos particulares*

Estudiaremos dos casos simples y examinaremos las condiciones de estacionariedad.

2.1 Proceso oscilante.—Este proceso, dado por Kendall (15), es el siguiente:

$$\xi_t = \xi_{t-1} + \epsilon_t \qquad t \in Z \tag{13}$$

Es el más sencillo y un caso particular del proceso de Markoff.

La raíz de la ecuación característica [4] es la unidad, y la solución particular de [13] es:

$$\xi_t = \sum_{j=o}^{\infty} \epsilon_{t-j} \tag{14}$$

A esta solución podemos llegar por sustituciones sucesivas. Así:

$$\xi_t = \xi_{t-1} + \epsilon_t = \epsilon_t + \epsilon_{t-1} + \xi_{t-2} = \epsilon_t + \epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2} + \ldots + \epsilon_{t-p} + \xi_{t-(p-1)}$$

luego

$$\xi_t - (\epsilon_t + \epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2} + \ldots + \epsilon_{t-p}) = \xi_{t-(p-1)}$$

La diferencia entre el valor de ξ_t y la suma de perturbaciones aleatorias es precisamente el mismo proceso oscilante $\xi_{t-(p-1)}$.

Por ser

$$E\,\xi_t = E\,\epsilon_t = 0$$

la varianza es:

$$\sigma^2_{\xi_t} = \sigma^2_{\xi_{t-1}} + \sigma^2_{\epsilon_t} \Rightarrow \sigma^2_{\xi_t} = (p+1)\,\sigma^2_{\epsilon} + \sigma^2_{\xi_{t-(p+1)}}$$

y crece a infinito con p, luego el proceso oscilante [13] no es de tipo estacionario, ya que la varianza de [13] crece sin límite. Esto justifica que la raíz *debe de ser inferior a la unidad* para que el proceso sea de tipo estacionario.

2.2 Proceso de Markoff (autorregresivo de primer orden):

1. Es del tipo sencillo:

$$\xi_t + \beta\,\xi_{t-1} = \epsilon_t \tag{15}$$

La ecuación característica [4] en este caso es:

$$z + \beta = o \qquad \Rightarrow \qquad z = \rho = -\beta \tag{16}$$

También en este proceso podemos por sustituciones sucesivas:

$$\xi_t = \epsilon_t + \rho\,\epsilon_{t-1} + \rho^2\,\epsilon_{t-2} + \ldots + \rho^p\,\epsilon_{t-p} + \rho^{p-1}\,\xi_{t-(p+1)}$$

(15) Kendall: *The advanced theory of statistics*, vol. 3, Ch. & Griffon, 1968, págs. 418 y 420.

La diferencia

$$\xi_t - (\epsilon_t - \rho\, \epsilon_{t-1} + \ldots + \rho^p\, \epsilon_{t-p}) = \rho^{p+1}\, \epsilon_{t-(p+1)}$$

y la varianza

$$E\,[\xi_t - (\epsilon_t + \rho\, \epsilon_{t-1} + \ldots + \rho^p\, \epsilon_{t-p})]^2 = \rho^{2p+2}\, E\, \xi^2_{t-p}$$

Es importante cuando $/\,\rho\,/ < 1$, y se ve sencillamente que si $\rho \rightarrow \infty$, y la varianza de este proceso de Markoff es:

$$\sigma^2_{\xi_t} = \frac{\sigma^2_\epsilon}{1-\rho^2}$$

Ahora aplicaremos "operadores lineales" para esta demostración.

Si en la [15] introducimos el operador retroceso

$$\xi_{t-1} = R\, \xi_t \Rightarrow$$

$$\xi_t + \beta\, R\, \xi_t = (1-\rho\, R)\, \xi_t = \epsilon_t \Rightarrow$$

sustituyendo β por $-\rho$, según [16]:

$$\xi_t = \frac{\epsilon_t}{1-\rho\, R} = [1 + \rho\, R + \rho^2\, R^2 + \rho^3\, R^3 + \ldots]\, \epsilon_t =$$

$$= \xi_t = \epsilon_t + \rho\, \epsilon_{t-1} + \rho^2\, \epsilon_{t-2} + \ldots + \rho^k\, \epsilon_{t-k} + \ldots \qquad [17]$$

Y recordando la representación espectral de ϵ_t tenemos:

$$\xi_t = \sum_{k=o}^{\infty} \int_{\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-k)}\, \rho^k\, d\zeta(\lambda) \qquad [17']$$

Para que ξ_t sea estacionario ρ deberá estar dentro del círculo de radio unidad: $/\,\rho\,/ < 1$, por lo que, de acuerdo con las [12'] y [8] tenemos:

$$\Phi^x(\lambda) = 1 - \rho\, e^{-i\lambda} \qquad [18]$$

El proceso [15] tiene por representación espectral en el caso de ser $/\,\rho\,/ < 1$:

$$\xi_t = \int_{\pi}^{\pi} \frac{e^{i\lambda t}}{1-\rho\, e^{-i\lambda}}\, d\zeta(\lambda) \qquad [19]$$

2. La representación espectral de la función de covarianza de este proceso es fácil de obtener:

$$B(n) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \frac{e^{i\lambda n}\, d\lambda}{1+\rho^2 - 2\rho\cos\lambda} \qquad [20]$$

La representación [19] es idéntica a la [17] si se desarrolla el denominador, con la condición de

$$/\,\rho\, e^{-\lambda i}\,/ < 1$$

es decir, que $/\,\rho\,/ < 1$.

La función de densidad espectral del proceso de Markoff [15], según [20], es:

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi(1+\rho^2-2\rho\cos\lambda)} \qquad |\rho|<1 \qquad [21]$$

Estudiemos las variaciones de esta función de densidad espectral.

La [21] nos indica la simetría de la función porque $f(\lambda)=f(-\lambda)$. Esto nos permite estudiar o dibujar la gráfica en el semieje positivo.

Igual que hicimos cuando estudiamos la representación espectral de los procesos de medias móviles, aquí dividiremos la variación del cos λ entre los límites -1, 0, $+1$, por cuanto $\lambda \epsilon (-\pi, +\pi)$ el coseno crece.

Consideremos el caso:

a) $\rho>0$. Las variaciones extremas figuran en el siguiente cuadro.

CUADRO 6

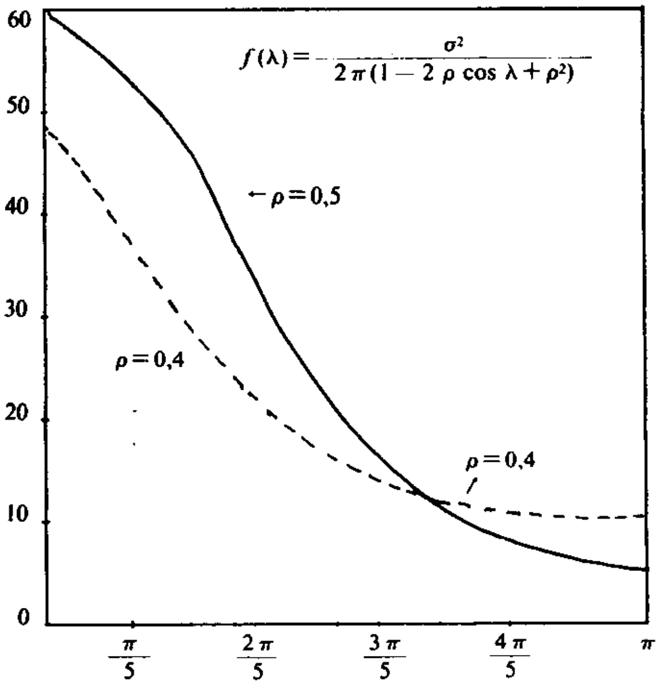
λ	$-\pi$		0		π
$f(\lambda)$	$\frac{\sigma^2}{2\pi(1+\rho)^2}$	$<$	$\frac{\sigma^2}{2\pi(1-\rho)^2}$	$>$	$\frac{\sigma^2}{2\pi(1+\rho)^2}$
Extremos	Mínimo		Máximo		Mínimo

Las bajas freuencias son las que más contribuyen a la formación de la varianza del proceso.

Si $\rho\to 0$, la función de densidad tiende a la función de densidad constante del proceso puramente aleatorio ϵ_t.

Representación gráfica. Reproducimos dos gráficos superpuestos de las funciones de densidad espectrales para dos valores de $\rho=0,4$ y $\rho=0,5$, de la obra de Fischman (16), y que por su simetría, $f(\lambda)=f(-\lambda)$, lo tomamos en el semieje positivo, según hemos indicado.

(16) GEORGE S. FISCHMAN: *Spectral methods in econometrics*, Harvard University Press, 1969, pág. 55.



Las ordenadas son medidas en unidades σ^2 o haciendo $\sigma^2=1$.

Observemos que, por ser ρ positivo, las bajas frecuencias influyen más que las altas en la estructura del espectro.

b) Para $\rho<0$ tendríamos conclusiones contrarias ($/\rho/<1$).

2.3 Proceso autorregresivo de Yule (17) (segundo orden):

1. Del proceso [2], para $n=2$, tenemos:

$$\xi_t+\beta_1\,\xi_{t-1}+\beta_2\,\xi_{t-2}=\epsilon_t \qquad [22]$$

Este proceso es muy utilizado en Econometría y puede representar modelos de ecuaciones en diferencias con fluctuaciones diversas.

Pensemos que de [22] puede facilmente deducirse

$$\xi_t=-\beta_1\,\xi_{t-1}-\beta_2\,\xi_{t-2}+\epsilon_t=-(\beta_1+\beta_2)\,\xi_{t-1}+\beta_2(\xi_{t-1}-\xi_{t-2})+\epsilon_t$$

También podría aplicarse el operador retroceso para llegar a

$$\xi_t=\frac{\epsilon_t}{1+\beta_1\,R+\beta_2\,R^2}$$

cuyas raíces del denominador deben estar dentro del círculo unidad para la convergencia de la varianza y, en consecuencia, ser estacionario.

(17) KENDALL, *o. c.*, pág. 419, así denomina a este proceso.

Volviendo a las ecuaciones de Yule-Walker dadas en [5] (haciendo $s=o$ y 1 y $t=1$) para proceso real —que son todos los procesos económicos donde $B(k)=B(-k)$—, las ecuaciones para este caso son:

$$\begin{aligned} B(1)+\beta_1\ B(o)+\beta_2\ B(1)=0 \\ B(2)+\beta_1\ B(1)+\beta_2\ B(o)=0 \end{aligned} \qquad [23]$$

y dividiendo por $B(o)$, recordando [6], tenemos el sistema en función de los coeficientes de correlación:

$$\begin{aligned} \rho_1+\beta_1 \quad +\rho_1\ \beta_2=0 \\ \rho_2+\rho_1\ \beta_1+ \quad \beta_2=0 \end{aligned} \qquad [23']$$

deducimos los parámetros del proceso:

$$\beta_1=-\frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2} \quad ; \quad \beta_2=-\frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} \qquad [24]$$

La ecuación característica de este proceso es, según la [4],

$$z^2+\beta_1\ Z+\beta_2=0 \Rightarrow \qquad [25]$$

$$\rho(k)=\frac{B(k)}{B(o)}=A\ Z_1^k+B\ Z_1^k \qquad [26]$$

donde Z_1 y Z_2 son las raíces de [25] sujetas a las condiciones iniciales:

$$\frac{B(o)}{B(o)}=A+B=1 \qquad [27]$$

$$\frac{B(1)}{B(o)}=\rho_1=A\ Z_1+B\ Z_2= \qquad [28]$$

$$=B(k)=\frac{B(o)}{Z_2-Z_1}\ [(z_2-\rho)\ Z_1^k+(\rho-z_1)\ Z_2^k] \qquad [28']$$

2. De la [22] y [10] deducimos la función de densidad espectral:

$$f_1(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi\ /\ 1+\beta_1 e^{-i\lambda}+\beta_2 e^{-i\lambda 2}\ /^2} \qquad [29]$$

Análogamente a como vimos en la sección anterior para los procesos de medias móviles estudiadas cuando $m=2$ en [14], tenemos:

$$f_1(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi[(1-\beta_2)^2+\beta_1^2+2\beta_1(1+\beta_2)\cos\lambda+4\beta_2\cos^2\lambda]} \qquad [29']$$

Las variaciones de $f_1(\lambda)$ corresponden al análisis del trinomio de cos λ del denominador, recordando que son inversas a las deducidas cuando estudiamos los procesos de medias móviles ($m=2$). Omitimos repetir cuadros similares a los expuestos, pero observemos que el trinomio del denominador puede ordenarse de forma semejante a como vimos en la función de densidad espectral de las medias móviles de segundo orden. En aquel caso el trinomio figuraba en el numerador.

En este caso, como el trinomio es igual pero está en el denominador, las conclusiones son inversas para los mismos casos considerados.

A título meramente ilustrativo indicamos que, en el supuesto de ser $\beta_1(1+\beta_2)\geq 4/\beta_2/$, la función de densidad adquiere los siguientes valores extremos:

Para $\lambda=o$ mínimo:

$$f(o)=\frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi(1+\beta_1+\beta_2)^2}$$

Para $\lambda=\pm\pi$ máximos:

$$f(\pm\pi)=\frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi(1-\beta_1+\beta_2)^2}$$

2.4 Observación importante: Recordamos que si las raíces de la ecuación característica [4] están dentro del círculo unidad, los procesos son estacionarios.

SECCIÓN 4.ª

8. *Procesos mixtos de medias móviles y autorregresivos*

1. Estos procesos son combinaciones de los estudiados en las secciones 2.ª y 3.ª Si el proceso $\{\xi_t, t\in Z\}$, de medias móviles al proceso $\{\xi(t), t\in Z\}$ lo denominamos mixto si se relaciona estocásticamente por ecuaciones de medias móviles y del autorregresivo por una combinación lineal:

$$\sum_{k=o}^{n}\beta_k\,\xi(t-k)=\sum_{h=o}^{m}\alpha_h\,\epsilon_{t-h}\qquad\forall\ \alpha_h,\ \beta_k\in R \tag{1}$$

donde $\beta_o=\alpha_o=1$; este proceso $\{\xi_t(t)\in Z\}$ se denomina mixto de medias móviles residuales y autorregresivo.

Es de señalar que la combinación de un proceso de medias móviles, tal como se definió en la sección 2.ª, nos conduce a procesos de medias móviles residuales.

2. Para la estacionariedad es preciso que las raíces del proceso autorregresivo caigan dentro del círculo de radio unidad y las del proceso de medias móviles no sean superiores a la unidad (18).

(18) La unidad puede ser raíz del numerador, pero no del denominador. Ver JENKINS, *o. c.*, y WOLD, *o. c.* Recuérdese que en el proceso [17] hasta $\alpha_1=-1$ (raíz de la ecuación característica) era válida la función de densidad espectral. Ver también mi trabajo "Interpolación, extrapolación y filtraje", *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 1978.

3. En la hipótesis de estacionariedad la relación espectral [1] es:

$$\sum_{k=o}^{n} \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-k)}\, d\zeta_1(\lambda) = \sum_{h=o}^{m} \alpha_h \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-h)}\, d\zeta(\lambda) \qquad [2]$$

que implica

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, h(\lambda)\, d\zeta_1(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, g(\lambda)\, d\zeta(\lambda) \qquad [2']$$

Existen en [2'] las siguientes funciones de impulso:

$$h(\lambda) = \sum_{k=o}^{n} \beta_k\, e^{-i\lambda k} \qquad [3]$$

$$g(\lambda) = \sum_{h=o}^{m} \alpha_h\, e^{-i\lambda h} \Rightarrow \qquad [4]$$

$$d\zeta_1(\lambda) = \frac{g(\lambda)\, d\zeta(\lambda)}{h(\lambda)} \qquad [5]$$

La [5] nos indica el incremento aleatorio del proceso espectral $\zeta_1(\lambda)$ asociado al proceso mixto ξ_t, donde las funciones $g(\lambda)$ y $h(\lambda)$ dependen de λ y están asociadas a los procesos de medias móviles y del autorregresivo.

4. La función de densidad espectral del proceso mixto puede escribirse de formas diversas, y entre ellas son las más usuales:

$$f_1(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \frac{/\, g(\lambda)\, /^2}{/\, h(\lambda)\, /^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \; \frac{\left| \sum_{k=o}^{m} \alpha_h\, e^{-i\lambda h} \right|^2}{\left| \sum_{k=o}^{n} \beta_k\, e^{-i\lambda h} \right|^2} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \; \frac{\left| \sum_{h=o}^{m} \alpha_h\, e^{i\lambda(m-h)} \right|^2}{\left| \sum_{k=o}^{n} \beta_k\, e^{i\lambda(n-k)} \right|^2} \qquad [6]$$

Los procesos mixtos, según la [6], tienen una función de densidad espectral racional en $e^{i\lambda}$. Box y Jenkins *(o. c.,* págs. 73 y ss.) estudian ampliamente estos procesos. Para la teoría de predicción (19) es importante conocer el hecho que los procesos mixtos tengan función de densidad espectral racional.

La representación espectral del proceso mixto estacionario es:

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, \frac{g(\lambda)}{h(\lambda)} \cdot d\zeta(\lambda) \qquad [7]$$

donde $g(\lambda)$ y $h(\lambda)$ son las expresiones referidas en [3] y [4]. La función covarianza es:

$$B(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, \frac{/\, g(\lambda)\, /^2}{/\, h(\lambda)\, /^2} \cdot \frac{\sigma^2\, d\lambda}{2\pi} \qquad [8]$$

(19) F. J. Urbelz: "Extrapolación, interpolación y filtraje", *Anales del Instituto de Actuarios,* 1978, págs. 179 y 178.

Si las *raíces de las ecuaciones características cumplen* las condiciones expuestas en el punto 2, el proceso es estacionario.

7. Observación importante: Cualquier función de densidad espectral puede representarse aproximadamente por una función racional de $e^{i\lambda}$. Esto es consecuencia del teorema de Weierstrass de *aproximaciones por polinomios* trigonométricos.

En consecuencia, un proceso de medias móviles puede aproximadamente representar la función de densidad del proceso autorregresivo e igualmente su función de covarianza.

* * *

TRANSFORMACIONES LINEALES DE OPERADORES FINITOS

(Parámetro t *discreto)*

Las transformaciones lineales estudiadas en este capítulo son usualmente aplicadas en econometría.

Utilizo el español para no depender de terminología extranjera y ser más clara mi exposición.

SECCIÓN 5.ª

1. *Operadores diferencia* Δ *y siguiente* E

1. El método de las diferencias lo he aplicado en mi estudio sobre "Interpolación, extrapolación y filtraje" cuando un modelo econométrico tiene dependencia parabólica determinista y el proceso de perturbación aleatoria. Así se elimina la influencia de la tendencia.

Aquí trataremos de la definición de este operador y sus correspondientes propiedades.

2. Se define operador diferencia Δ al que, aplicado sobre el proceso $\xi(t)$, nos da el nuevo proceso:

$$\Delta\,\xi(t)=\xi(t+1)-\xi(t) \qquad t\in Z \tag{1}$$

Hemos elegido por comodidad $h=1$ (h, el valor del argumento; si $z\in R$, h podría ser cualquier valor).

3. Definimos operador siguiente al que, aplicado sobre el proceso $\xi(t)$, nos da el proceso en el punto $t-1$:

$$E\,\xi(t)=\xi(t+1) \tag{2}$$

4. La relación entre los operadores Δ y E es inmediata:

$$\Delta\ \xi(t) = E\ \xi(t) - \xi(t) \equiv (E - 1)\ \xi(t) \qquad [3]$$

Simbólicamente puede escribirse:

$$\Delta \equiv E - 1 \qquad [4]$$

Si el proceso $\xi(t)$ es estacionario, también lo serán los procesos [1] y [2].

5. La representación espectral de [3], si $\xi(t)$ es estacionario, es:

$$\Delta\ \xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} (e^{i\lambda} - 1)\ d\zeta(\lambda) \qquad [5]$$

Y la función de covarianza de $\Delta\ \xi(t)$ es:

$$E\{\Delta\ \xi(t)\ \overline{\Delta\ \xi(s)}\} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-s)} / e^{i\lambda} - 1 /^2\ dF(\lambda) \qquad [6]$$

Esta función depende de la diferencia $t - s$, por lo que la covarianza es estacionaria.

6. Si aplicamos n veces la transformación [1] sobre $\xi(t)$, es un nuevo proceso, es decir, $\Delta^n\ \xi(t)$, y su representación espectral es:

$$\Delta^n\ \xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} (e^{i\lambda} - 1)^n\ d\zeta(\lambda) \qquad [7]$$

Y la función de covarianza del proceso de diferencia —n— es:

$$E\{\Delta^n\ \xi(t)\ \overline{\Delta^n\ \xi(s)}\} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-s)} / e^{i\lambda} - 1 /^{2n}\ dF(\lambda) =$$
$$B_1(t-s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-s)}\ 2^{2n} \operatorname{sen}^{2n} \frac{\lambda}{2}\ dF(\lambda) \qquad [8]$$

La transformación Δ^n sobre el proceso de entrada $\xi(t)$ acentúa las frecuencias en los puntos $\pm\pi$ y forma picos de carácter periódico, mientras que para las restantes tienden a cero si $n \to \infty$. Según [8], el espectro de entrada se multiplica por $2^n \operatorname{sen}^n \frac{\lambda}{2}$ y las masas espectrales se concentran en los extremos, tanto más cuanto mayor es n.

7. El operador E^n aplicado sobre $\xi(t)$ es:

$$E^n\ \xi(t) = \xi(t+n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t+n)}\ d\zeta(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\ e^{i\lambda n}\ d\zeta(\lambda) \qquad [9]$$

Este proceso tiene la misma función de distribución espectral que el proceso original $\xi(t)$, como era de esperar.

2. *Operador* ∇ *y retroceso* R

1. Definimos ∇ aplicado sobre $\xi(t)$ al proceso resultante:

$$\nabla\ \xi(t) = \xi(t) - \xi(t-1) \qquad [10]$$

Al proceso correspondiente se le denomina "diferencia invertida".

2. Definimos el operador retroceso (o retardo) al que, aplicado sobre $\xi(t)$, nos da el proceso en el punto $t-1$:

$$R\,\xi(t)=\xi(t-1) \tag{11}$$

En las aplicaciones económicas, las series temporales son recogidas en diferencias equidistantes del tiempo.

Los modelos lineales econométricos representativos de un fenómeno pudieran ser del tipo siguiente:

$$Y_t=\alpha+\alpha_o X_t+\alpha_1 X_{t-1}+\alpha_2 X_{t-2}+\ldots+\alpha_k X_{t-k}+\epsilon_t$$

siendo ϵ_t la perturbación aleatoria.

El operador retardo puede aplicarse así:

$$Y_t=\alpha+\alpha_o X_t+\alpha_1 R\ X_t+\alpha_2\ R^2 X_t+\ldots+\alpha_k\ R^k X_t+\epsilon_t=$$

$$=\alpha_o+[\alpha_o+\alpha_1\ R+\alpha_2\ R_2+\ldots+\alpha_k\ R^k]\ X_r+\epsilon_t$$

ya que

$$R^2 X_t=R[RX_t]=RX_{t-1}=X_{t-2}$$

y así sucesivamente.

En la expresión anterior puede reducirse el corchete poniéndole en forma de función de los parámetros a estimar y el operador R:

$$Y_t=\alpha_o+\varphi(\beta,\ R)\ X_t+\epsilon_t$$

Existen modelos de retardos que $k\to\infty$ y para que sean convergentes necesitamos que

$$\Sigma\,\alpha_j^2<\infty$$

Un caso particular de estos retardos son cuando

$$\alpha_j=\alpha_o\,\rho^j \qquad /\,\rho\,/<1$$

Estos modelos se denominan retardos de tipo geométrico.

Este modelo es un caso particular del de medias móviles.

En los modelos autorregresivos y mixto también puede utilizarse este operador.

3. La relación entre los operadores es:

$$\nabla\ \xi(t)=\xi(t)-R\ \xi(t)=(1-R)\ \xi(t) \tag{12}$$

o simbólicamente:

$$\nabla\equiv 1-R \tag{13}$$

El proceso $\{\nabla\ \xi(t),\ t\in Z\}$ se obtiene según se ha definido por la diferencia hacia atrás.

A la nueva serie resultante puede aplicarse otra vez el operador ∇ y obtendremos otro proceso.

4. Si aplicamos n veces este operador tendremos el proceso $\{\nabla^n \xi(t), t \epsilon Z\}$ y, por ser una operación lineal, la relación con el operador R es:

$$\nabla^n \equiv 1 - \binom{n}{1} \quad R + \binom{n}{2} \quad R^2 - \binom{n}{3} \quad R^3 + \ldots \qquad [14]$$

Luego aplicado sobre $\xi(t)$ tenemos:

$$\nabla^n \xi(t) = \xi(t) - \binom{n}{1} \xi(t-1) + \binom{n}{2} \xi(t-2) - \binom{n}{3} \xi(t-3) + \ldots \qquad [15]$$

La [15] tiene $n+1$ sumandos estocásticos.

El proceso $\{\nabla^n \xi(t), t \epsilon Z\}$ es el de diferencia —n— invertida y es una combinación lineal del proceso $\{\xi(t), t \epsilon Z\}$ con $n+1$ sumandos.

5. La representación espectral de [15] es:

$$\nabla^n \xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}(1 - e^{-i\lambda})^n d\zeta(\lambda) \qquad [16]$$

y la de la función de covarianza es:

$$\begin{aligned} E\, \nabla^n \xi(t)\, \overline{\nabla^n \xi(s)} &= \int_{\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-s)} \,/\, 1 - e^{-i\lambda} \,/^{2n} d F(\lambda) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-s)} 2^{2n} \operatorname{sen}^{2n} \frac{\lambda}{2}\, d F(\lambda) \end{aligned} \qquad [17]$$

En este filtro coincide la función de densidad espectral con la [8]. Advertimos que la transformación ∇^n acentúa las frecuencias cuando $\operatorname{sen} \frac{\lambda}{2} \sim 1$, o sea, $\lambda \approx \pm \pi$. En las altas frecuencias forma picos de carácter periódico y elimina las bajas cuando $n \to \infty$.

La 17] nos indica la estacionariedad de la función de covarianza.

3. *Operador de medias móviles*

1. Si $\Phi_z = a_z$ y si además:

$$a_j = a_{-j} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, m) \qquad [18]$$

tenemos un filtro lineal que aplicado sobre $\xi(t)$ el proceso transformado $\eta(t)$ tiene la representación espectral siguiente:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \sum_{j=-m}^{m} a_j\, \xi(t+j) = \sum_{j=-m}^{m} a_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t+j)} d\zeta(\lambda) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \left[\sum_{z=-m}^{m} a_j\, e^{ij\lambda} \right] d\zeta(\lambda) \end{aligned} \qquad [19]$$

Por la [3'] y según la definición III de la sección 1.ª del capítulo segundo:

$$\Phi^x(\lambda) = \sum_{j=-m}^{m} a_j \, e^{-i\lambda j} \qquad [20]$$

que es la función de respuesta frecuencial.

Por la [18], la [20] se puede expresar así:

$$\Phi^x(\lambda) = a_o + \sum_{j=1}^{m} a_j (e^{i\lambda j} + e^{-i\lambda j}) = a_o + 2 \sum_{j=1}^{m} a_j \cos \lambda j \qquad [20']$$

Esta es la respuesta frecuencial, y al filtro [18] se le denomina filtro del coseno.

2. La representación espectral de la función de covarianza es:

$$B_\eta(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda z} \, / \, \Phi^x(\lambda) \, /^2 \; d \, F_\xi(\lambda)$$

siendo $/ \, \Phi^x(\lambda) \, /^2$, por la definición V de la sección 1.ª, la función de transferencia del filtro y sustituiremos por la [20] o [20'].

4. *Operador* $[2k+1]$ *y operador* $\dfrac{[2k+1]}{2k+1}$ *de media móvil*

1. El operador $[2k+1]$ es un caso particular del tercero, siendo $a_j = 1$, y la [19] es:

$$[2k+1] \; \xi(t) = \sum_{j=-k}^{k} \xi(t+j) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \left[\sum_{j=-k}^{k} e^{ij\lambda} \right] d\zeta(\lambda) =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \, \frac{\operatorname{sen} \lambda (k + \tfrac{1}{2})}{\operatorname{sen} \dfrac{\lambda}{2}} \cdot d\zeta(\lambda) \qquad [19']$$

porque

$$\sum_{h=-k}^{k} e^{i\lambda h} = \frac{\operatorname{sen} \lambda (k + \tfrac{1}{2})}{\operatorname{sen} \dfrac{\lambda}{2}} \qquad [20']$$

La relación de los espectros de salida y entrada es:

$$d \, F_1(\lambda) = \frac{\operatorname{sen}^2 \lambda (k + \tfrac{1}{2})}{\operatorname{sen}^2 \dfrac{\lambda}{2}} \; d \, F(\lambda) \qquad [21]$$

Esta expresión nos conduce a una conclusión importante: las frecuencias bajas se acentúan porque si $\lambda \to o$, la función de transferencia en este punto es $(2\,k+1)^2$.

La media móvil del operador es:

$$\frac{[2k+1]}{2k+1}\,\xi(t) = \frac{\sum_{h=-k}^{k} \xi(t+h)}{2k+1}$$

y las relaciones de los espectros son:

$$d\,F_1(\lambda) = \left[\frac{\operatorname{sen} \lambda\,(k+½)}{(2k+1)\operatorname{sen}\frac{\lambda}{2}}\right]^2 d\,F(\lambda) \qquad [22]$$

El proceso de media móvil es de gran importancia.

Si de un proceso estocástico obtenemos otro proceso centrado por una media móvil, la función de transferencia [22] alrededor de $\lambda = o$ es precisamente

$$2\,k+1$$

Es decir: si formanos de un proceso entrante otro por una media móvil centrada, el espectro de salida tiene concentración de masa espectral alrededor del punto $\lambda = o$. Y para las frecuencias altas ($\pm\pi$) el espectro de salida se atenúa fuertemente.

5. *Operadores* S_1 *y* S_2

1. Definimos el operador suma S_1 aplicado al proceso $\xi(t)$ a la expresión:

$$\eta(t) = S_1\,\xi(t) = \xi(t) + \xi(t+1) \Rightarrow \qquad [23]$$

$$S_1{}^n \xi(t) = \xi(t) + \binom{n}{1}\xi(t+1) + \binom{n}{2}\xi(t+2) + \ldots + \binom{n}{n}\xi(t+n) \qquad [24]$$

2. La representación espectral de [24] es:

$$\eta(t) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t+k)}\,d\zeta(\lambda) = \int_{\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}(1+e^{i\lambda})^n\,d\zeta(\lambda) \qquad [25]$$

3. La función de covarianza tiene la representación espectral:

$$B\,\eta(t-s) = \int_{\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-s)} / 1 + e^{i\lambda} /^{2n}\,d\,F(\lambda) =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-s)}\,4^n \cos^{2n}\frac{\lambda}{2}\,d\,F(\lambda) \qquad [26]$$

Las conclusiones obtenidas al aplicar reiteradamente el operador S_1 al proceso $\xi(t)$ las obtenemos si examinamos la función de transferencia. Obsérvese que el coseno se anula para las altas frecuencias $\lambda = \pm\pi$, porque $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = o$. Para estos valores los extremos de la frecuencia la función de densidad espectral del proceso saliente se anulará. Y para las bajas frecuencias la masa espectral se concentra fuertemente alrededor de $\lambda = o$. (La función de transferencia vale 4^n para este punto.)

4. El operador S_2 lo definimos así:

$$S_2\, \xi(t) = \xi(t) + \xi(t-1) \qquad [27]$$

Dado su carácter lineal (que se comprueba fácilmente), deducimos:

$$S_n^n\, \xi(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, \xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} (1 + e^{-i\lambda})^n\, d\zeta(\lambda) \qquad [28]$$

5. Las funciones de *distribución covarianza espectral del proceso* [28] es la misma que la del proceso [25] y también idénticas las propiedades del espectro.

6. *Operador combinado* $\Delta^m\, S_1^n$

1. Por reiteradas operaciones de sumas S_1^n combinadas con diferencias Δ^m obtenemos la representación del proceso $\Delta^m\, S_1^n\, \xi(t)$, el cual es:

$$\Delta^m\, S_1^n \xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} (e^{i\lambda} - 1)^m\, (e^{i\lambda} + 1)^n\, d\zeta(\lambda) \qquad [29]$$

El orden de las sumas y diferencias no altera al proceso resultante [29]. Puede primero ser una sola diferencia; después, dos sumas, etc., pero siempre que se hayan tomado m diferencias y n sumas.

Cada vez que se aplique un operador se obtiene un proceso distinto, y sobre este nuevo hay que aplicar el mismo o el otro operador.

2. La relación de los espectros viene dada por:

$$2^{n+m} (1 - \cos\lambda)^m\, (1 + \cos\lambda)^n \qquad [30]$$

Esta relación nos muestra *el efecto de tomar* n *sumas y* m *diferencias sucesivas* (de dos términos consecutivos).

Derivando la [30] e igualando a cero para calcular su máximo, tenemos:

$$[D(1 - \cos\lambda)^M]\, (1 + \cos\lambda)^n + [D(1 + \cos\lambda)^n]\, (1 - \cos\lambda)^m = o \Rightarrow$$

$$\cos\lambda_o = \frac{m-n}{m+n} = \frac{1 - \dfrac{n}{m}}{1 + \dfrac{n}{m}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad [31]$$

$$\text{si } \alpha = \frac{n}{m} \qquad -\pi < \lambda \leq \pi \qquad [32]$$

únicamente en los puntos λ_o y $-\lambda_o$ existirán picos en el espectro o, mejor, concentración de las masas espectrales alrededor de estos valores.

tiene r componentes. El filtro será una matriz $r\times q$ y, aplicable sobre el vector entrante $Z(t)$ de q componentes, nos dará un vector proceso de r componentes.

Si el filtro lo aplicamos al proceso vector entrante y las componentes de éste las sustituimos por sus representaciones espectrales, tendremos la representación espectral del vector proceso de salida.

3. Supondremos el filtro matricial $h(u)$, $r\times q$ y un vector proceso de q componentes; tenemos para el vector proceso de salida $\{X(t),\ t\in Z\}$ de r componentes:

$$X(t) = \Sigma\, h(z)\, Z(t-z) \qquad z\in Z \qquad [29]$$

Partimos siempre de las hipótesis de ser las medias nulas.

4. El filtro vectorial es:

$$h(z) = \begin{pmatrix} h_{11}(z), & h_{12}(z), & \ldots, & h_{1q}(z) \\ h_{r1}(z), & h_{r2}(z), & \ldots, & h_{rq}(z) \end{pmatrix} \qquad [30]$$

Si $h_{jk}(\lambda) = a_{jk}$, el filtro es una generalización de cuando estudiamos las medias móviles.

5. Si llamamos *respuesta frecuencial*

$$h_{je}^{x}(\lambda) = \sum_{Z=-\infty}^{+\infty} h_{je}(z)\, e^{-i\lambda z} \qquad z\in Z \qquad [31]$$

y formamos la matriz de $r\times q$ elementos [31] tenemos la matriz de la respuespuesta frecuencial correspondiente al filtro [30]:

$$^{x}(\lambda)\ X^{x}(\lambda) = \{h_{je}^{x}(\lambda)\} \qquad \begin{array}{l} j=1,2,\ldots,r \\ e=1,2,\ldots,q \end{array} \qquad [32]$$

6. Si en la expresión matricial [29] aplicamos el filtro [30], la componente j del vector de salida es:

$$X_j(t) = \sum_{z=-\infty}^{-\infty} \sum_{l=1}^{q} h_{je}(z)\, Z_e(t-z)$$

La anterior para $j=1,2,\ldots,r$ nos da la transformación en el dominio del tiempo del vector de salida $X(t)$. Pero si sustituimos los procesos $Z_e(t-z)$ por sus representaciones espectrales tenemos:

$$X_j(t) = \sum_{z=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{q} h_{jl}(z) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-z)}\, d\zeta_l(\lambda) =$$

$$= \sum_{l=1}^{q} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} \left[\sum_{z=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda}\, h_{jl}(z) \right] d\zeta_l(\lambda) = \qquad [33]$$

$$= \sum_{l=1}^{q} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, h_{jl}^{x}(\lambda)\, d\zeta_l(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \left[\sum_{l=1}^{+q} h_{jl}^{x}(\lambda)\, d\zeta_l(\lambda) \right]$$

Hemos recordado la [31] y sustituido en la anterior.

Si el incremento $d\zeta_l(\lambda)$ no dependiera de l, la anterior se simplificaría. Las componentes del proceso saliente $j=1,2,...,r$ depende de los procesos entrantes y de las funciones de las repuestas frecuenciales.

Pero la [33] puede escribirse así:

$$[h^x_{j1}(\lambda),\ h^x_{j2}(\lambda),\ ...,\ h^x_{jq}(\lambda)]\begin{bmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ \cdots\cdots \\ Z_q(t) \end{bmatrix} \qquad [33']$$

por ser

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, d\zeta_l(\lambda)=Z_l(t) \qquad [34]$$

7. Representación espectral de la matriz de funciones de densidades espectrales del vector saliente.

Llamemos $F(\lambda)^s$ *a la matriz* $r\times r$ de las funciones de densidad epectral del proceso vector salida de s componentes; $H^x(\lambda)$, a la matriz formada por las respuestas frecuenciales de orden $r\times q$; $\overline{H^x(\lambda)}^1$, a la traspuesta conjugada, y $f(\lambda)^e$, a la matriz formada por las funciones de densidad espectral del proceso entrante.

De la [32], multiplicada por la misma pero para $t=s$ y $j=k$, tenemos la matriz de la función de covarianza $\{B_{jk}(t-s)\}$, y matriz de las funciones de densidad espectrales de salida son:

$$f_s(\lambda)=H^x(\lambda)\, f_e(\lambda)\ \overline{H^x(\lambda)}^1 \qquad [35]$$

Notas importantes:

1.ª La matriz $f(\lambda)^s$ es de orden $r\times r$, y los ordenes de las matrices del segundo miembro son:

$$(r\times q)\times(q\times q)\times q\times r$$

2.ª Las componentes del vector proceso de salida tienen las funciones de densidad espectral en la diagonal principal de $f_s(\lambda)$.

8. El proceso de salida puede representarse espectralmente con la matriz respuesta frecuencial:

$$X(z)=H^x(\lambda)\ Z(t) \qquad [36]$$

siendo $H^x(\lambda)$ la matriz de las repuestas frecuenciales, y $Z(t)$ es el vector proceso cuyos formados por q procesos y hay que sustituirlos por sus representaciones espectrales.

2. *Transformaciones lineales estacionarias*

2.1 El planteamiento general es:

1. Que los procesos entrantes sean estacionarios univariantes.
2. Que lo sean dos a dos.

2.2 La transformación lineal de la matriz de covarianzas aplicado en [33] tenemos:

$$\text{Var}\ (u) = \text{Cov}\ [X(t-u),\ \overline{X(t)}^1] =$$
$$= \sum_v \sum_s h(v)\ \text{Cov}\ (t-u, -v),\ \overline{Z(t-s)}^1\ \bar{h}(s)^1 \qquad v, s \in Z \qquad [37]$$

3. *Aplicaciones*

1. Entre las numerosas aplicaciones de tipo econométrico destacan los procesos múltiples de medias móviles y autorregresivo; la regresión, la correlación parcial y múltiple, e incluso el análisis de la varianza.

2. Las funciones espectrales, de determinación de coespectros y espectro de cuadratura, fase y coherencia, son los conceptos más utilizados y que no queremos ya extender más este artículo.

APENDICE

Notaciones utilizadas

Concepto	Valor estadístico	Representación espectral
Esperanza matemática del proceso $\{\xi(t),\ t \in R\}$	$E\,\xi(t) = o$	—
Proceso $\{\xi(t),\ t \in R\}$	—	$\xi(t) \stackrel{2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\zeta(\lambda)$ $\quad \lambda \in R$
Proceso $\{\xi(t),\ t \in R\}$	—	$\xi(t) \stackrel{2}{=} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, d\zeta(\lambda)$ $\quad -\pi < \lambda < +\pi$
Función de covarianza: Para $t \in R$ y $t \in Z$	$E\,\xi(t)\,\overline{\xi(s)}$	—
Caso de covarianza estacionaria: Para $t, \in R \quad t-s=u$	$E\,\xi(t)\,\overline{\xi(s)}$	$B(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u}\, dF(\lambda)$
Para $t, \in R \quad t-s=u$	$E\,\xi(t)\,\overline{\xi(s)}$	$B(u) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda u}\, dF(\lambda)$
NOTA: $F(\lambda)$ es la función de distribución y, si tiene derivada, se sustituye en las representaciones el $dF(\lambda) = f(\lambda)\, d\lambda$.		
Funciones de densidad espectral: 1. Parámetro t continuo $t \in R$. *R*, conjunto núms. reales.	—	$f(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(t)\, e^{-i\lambda t}\, du$

Concepto	Valor estadístico	Representación espectral
2. Parámetro z discreto $z \in Z$. z, conjuntos nums. enteros.	—	$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{z=-\infty}^{\infty} B(z)\, e^{-i\lambda z}$
Proceso bivariante $\{X_j(t), X_k(t), t \in Z\}$:		
Función de covarianza estacionaria:		
1. Caso discreto $t, s \in Z$; $z=t-s$	$EX_j(t)\overline{X_k(s)}$	$B_{jk}(z)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda z} f_{jk}(\lambda)\, d\lambda$
2. *Caso continuo $r, s \in R$;* $u=t-s$	$EX_j(t)\overline{X_k(s)}$	$B_{jk}(u)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u} f_{jk}(\lambda)\, d\lambda$
Función de densidad espectral mixta:		
1. Caso discreto $z \in Z$; $\lambda \in (-\pi, \pi)$	—	$f_{jk}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{z=-\infty}^{+\infty} B(z)\, e^{-i\lambda z}$
2. Caso continuo $u \in R$; $\lambda \in R$	—	$f_{jk}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(u)\, e^{-i\lambda u} dt$
Función de coespectro	—	$c_{jk}(\lambda)=$ Parte real $f_{jk}(\lambda)$
Función de cuadratura del espectro	—	$q_{jk}(\lambda)=$ Parte imag $f_{jk}(\lambda)$
Coherencia	—	$\gamma(\lambda)=\frac{/\, f_{jk}(\lambda)\, /^2}{f_{jj}(\lambda)\, f_{kk}(\lambda)}=\frac{c_{jk}(\lambda)^2+q_{jk}(\lambda)^2}{f_{jj}(\lambda)\, f_{kk}(\lambda)}$
Fase	—	$\varphi_{jk}(\lambda)=\text{artg}\left(\frac{-q_{jk}(\lambda)}{c_{jk}(\lambda)}\right)$
Ganancia al cuadrado	—	$\vartheta_{jk}(\lambda)^2=\frac{/\, f_{jk}(\lambda)\, /^2}{/\, f_{jj}(\lambda)\, /^2}$

BIBLIOGRAFIA

ANDERSON: *The statistical analysis of time series,* Wiley, 1958.

GRANGER, G. E. P., y JENKINS: *Spectral analysis of economic time series,* Princeton University, 1964.

HANAN, E. J.: *Multiple time series,* John Wiley and Son, 1970.

RUZANOV, E.: *Procesos aleatorios,* Ed. Mir, 1973 (Moscú).

URBELZ IBARROLA, F. J.: "Aplicaciones del espacio de Hilbert a la estadística", *Anales del Instituto de Actuarios,* 1975.

— "Extrapolación, interpolación y filtraje", *Anales del Instituto de Actuarios,* 1978.

— "Introducción a los procesos estocásticos", *Anales del Instituto de Actuarios,* 1979.

— "Estimación del espectro de las series temporales", *Anales del Instituto de Actuarios,* 1981-82.

YAGLOM, A. M.: *An introduction in the theory of stationary random fonctions. Prentre-Hall,* New Jersey, 1962.

WIENER, Norbert: *The Fourier integral and certain of its applications,* Cambridge University, 1953.

WOLD, H.: *Series cronológicas estacionarias,* Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1971.