La estadística aplicada a optimizar el tiempo en las auditorías

Por

Dr. FRANCISCO JAVIER URBELZ IBARROLA
Catedrático de Estadística. Actuario de Seguros

INTRODUCCION

1. La normativa vigente para el Registro de Auditores Actuarios me ha impulsado a escribir este artículo cuya finalidad es proporcionar al profesional-actuario de los recursos que les ofrece la Estadística para que puedan con éxito cumplir mejor su cometido.

2. El auditor se enfrentará con problemas simples unos y otros excesivamente complejos. Preciso es señalar que son dos fundamentales y primordiales sobre los que se centrará su trabajo:

El primero, planificar para conocer a fondo la empresa.

El segundo, planificar el tiempo disponible, conocer la estructura de la empresa y relacionar su tiempo con las operaciones auditadas con información óptima.

Los dos problemas básicos generales están íntimamente ligados. Cuanto mayor tiempo se dedique a la planificación y control de la empresa, mejor conocimiento se tendrá de la misma. Pero, en general, no se trata de un conocimiento exhaustivo y total de la empresa, sino el necesario para conseguir la información precisa y en el tiempo oportuno.

Esto nos conduce a aplicar técnicas como la teoría del «minimax», coordinada con la Técnica del Muestreo, encaminada a conseguir que *con el mínimo tiempo tengamos* una información lo más amplia posible de la empresa.

3. En líneas generales, la directriz de este artículo se reduce a planificar el tiempo para obtener el rendimiento óptimo al revisar las operaciones de forma que sea el máximo importe auditado.

4. El primer capítulo lo dedicamos a la descomposición del tiempo y su planificación para el conocimiento de la forma de distribución del mismo por clases.

El segundo capítulo está destinado a relacionar los importes de las operaciones auditadas con un número de operaciones homogéneas.

Completamos este capítulo con un ejemplo aclarativo de las ideas, y que hemos escogido de una realidad, para demostrar que con un 52 % de una auditoría hemos comprobado el 94 % del importe total en un sector concreto.

El tercer capítulo lo dedicamos a estudiar modelos matemáticos estadísticos y ajustamos unos ejemplos prácticos y que puede comprobarse la exactitud de los modelos propuestos a los datos facilitados.

Nuestra meta ha sido clara: proporcionar a los profesionales que sigan estas directrices las herramientas precisas para que en poco tiempo tengan el conocimiento más completo de la empresa y no se pierdan en un laberinto de examen de documentación sin centrarse sobre las coordenadas básicas y sobre las cuales deben de guiar su política de auditoría.

CAPITULO I

GENERALIDADES

Sección 1.ª

MEDICIONES DE TIEMPOS

1. El tiempo es uno de los términos de planificar, y para esto el auditor tiene que conocer (o debiera de conocer) la forma de distribución de los tiempos.

En este sentido las operaciones deben descomponerse según su naturaleza para medir el tiempo por cada operación completa auditada.

Preciso es planificar el concepto de operación completa (y nos referimos a todas de la misma naturaleza), y después será necesario controlar *una muestra de operaciones* para formar una tabla de distribución del tiempo.

2. Centraremos nuestro estudio en la descomposición óptima del tiempo de una persona que dispone y tiene a su cargo la auditoría o control de ciertas operaciones: compras, ventas, pagos, cobros, bancos, etc. Debe elegir la forma más adecuada de dividir su tiempo, con el fin de controlar el mayor importe en cada uno de los mencionados sectores y con el mínimo tiempo posible.

3. No todos los sectores tienen la misma importancia. Nunca debe olvidarse este punto. Si denominamos t_f al tiempo invertido en el examen y control de las facturas rigurosamente expedidas; t_v al tiempo destinado a examinar las facturas de ventas (condiciones, precios, descuentos, competencia, entradas, cálculos aritméticos, etc.); t_c al de pagos, tiempo dedicado a examinar documentación, recibos, letras, etc., y los cobros; t_b a los análisis de los cargos y abonos bancarios, etc., y t_d para las demás operaciones controladas, el problema propuesto es la descomposición del tiempo en los grupos: compras, ventas, caja, bancos, etc., de forma que estableceríamos la siguiente inecuación:

$$t \lesseqgtr t_f + t_v + t_c + t_b + t_d \qquad (1)$$

4. El tiempo total disponible t siempre es limitado, y éste no podrá exceder de las sumas del segundo miembro; es decir, como máximo, será igual suponiendo una productividad máxima y control de la mayor parte de las operaciones.

Pero sucede con frecuencia que el tiempo t se trata de minimizar destinando a cada sección el tiempo necesario para controlar un tanto por ciento determinado de los importes expresados por cada una de las secciones. El planteamiento para la resolución óptima del tiempo de la inecuación (1) es el conocimiento de la forma *de distribución objetiva de la función de densidad* del tiempo de auditoría por operación para controlar el máximo de importes por sección si no podemos controlar la totalidad de los importes.

5. En estos problemas es donde se acentúan más las peculiaridades más destacables de las operaciones del Administrador, Interventor y Auditor y de sus características esenciales:

A) Extenderse a una revisión minuciosa de la totalidad de las operaciones administrativas.

B) Limitarse a una revisión parcial de la totalidad de las operaciones de un sector; por ejemplo, compras, caja, etcétera.

C) Extenderse a la totalidad, pero abarcando las de una cifra determinada en adelante.

Según el fin perseguido la auditoría se extenderá a un somero análisis en cada caso o a un análisis minucioso de la totalidad de las operaciones.

Hemos de indicar que la limitación del campo del censor o auditor es desligar la falta de coordinación de operaciones que, bien directamente o por asientos intermedios, eluden la posibilidad de fraude.

6. En auditorías públicas o semipúblicas, basadas en la normativa presupuestaria, se producen hechos concretos que determinadas partidas presupuestarias se consumen antes de finalizar el ejercicio económico.

En estas situaciones, los Administradores, para ajustar el presupuesto a los gastos reales, destinan de otras partidas presupuestarias sus excedentes.

Tales hechos son indicio de malversaciones de fondos porque no reflejan los asientos contables la verdadera situación de los hechos y puede tener trascendencia si se trata de inversiones que han sido imaginarias por haberse consumido en gasto.

7. Por eso, el conocimiento de la contabilidad y la expresión de los hechos contables puede descubrir malversación de fondos o fraudes.

La importancia del tema nos induce a orientar a los auditores para que examinen la conveniencia de distribuir su tiempo para que su actuación sea más eficaz, cuanto más tiempo disponible tengan y cumplimenten su misión con brevedad, dando una vista de conjunto de las operaciones intervenidas y examinando los defectos contables que pudieran encontrar por técnicas aplicadas erróneamente o por otras circunstancias.

8. Algunos redactan al finalizar la auditoría un informe deducido de las consecuencias del Análisis de Balances, pero esto no es el objetivo aunque pueden criticarse políticas de compras, ventas, inmovilizaciones, etc., después de obtenerse las ratios, y hacen un estudio a través de las mismas para deducir consecuencias interesantes desde el punto de vista contable de las

variaciones patrimoniales, de la estructura financiera, programa de inversiones, etc., que nos permitan rápidamente darnos cuenta de la marcha del negocio.

Este análisis, unido al típicamente económico de examen de las ventas, costos, beneficios, gastos, amortizaciones, etc., nos llevarán a poder examinar los rendimientos parciales y totales y rentabilidad de operaciones (propias o ajenas). No olvidemos que existen secciones esenciales de la auditoría: Jurídica, Fiscal, Social, etc., además de la Contable.

Sección 2.ª

PROGRAMACION DE TIEMPOS

1. En principio debemos programar un esquema de actividades: Caja, Bancos, Compras, Ventas, etc., actividades elementales para que en un tiempo breve se cumplimente el máximo objetivo de la auditoría.

2. Podremos precisar tras estimaciones del tiempo de duración de cada actividad: la primera la designaremos por t_m o tiempo mínimo; la segunda estimación, t_p, el tiempo normal conocido por experiencias anteriores, y la tercera estimación t_M, el tiempo máximo que nos cuesta la comprobación de una operación.

3. Es evidente que tenemos:

$$t_m < t_p < t_M$$

Tomando ponderaciones, podremos obtener un tiempo esperado:

$$t_e = t_m \cdot p_1 + t_p \cdot p_2 + t_M \cdot p_3 \tag{2}$$

que aconsejamos, aplicando la técnica de la Investigación Operativa del sistema PERT (Program Evaluation and Review Technique), las siguientes ponderaciones:

$$p_1 = p_3 = \frac{1}{6}\ ; \quad p_2 = \frac{2}{3}$$

Luego, el tiempo esperado será:

$$t_e = \frac{t_m + 4t_p + t_M}{6} \tag{2'}$$

La expresión (2') no es más que un caso particular de la siguiente:

$$t_p = a_1 t_m + a_2 t_p + a_3 t_M \qquad (2'')$$

donde:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

La anterior (2'') es un promedio ponderado, siendo a_1, a_2 y a_3 las ponderaciones.

En nuestro caso hemos aconsejado $a_1 = a_3 = \frac{1}{6}$ y $a_2 = \frac{4}{6}$

4. Una vez determinado el tiempo esperado por operación elemental y por determinado departamento, el problema del auditor estriba en descomponer su tiempo en la forma óptima para que pueda destinar una parte al análisis de la situación jurídica; otra al análisis fiscal, otra al social, otra al contable, etc. Es evidente que puede descomponer este análisis formando un esquema de trabajo. Por ejemplo, si descompusiéramos la contabilidad puede destinarse parte a facturas, otra al examen de ventas, a los bancos, etc., para controlar el mayor volumen total de operaciones e importes.

Insistimos sobre este punto y por eso para cada operación elemental de caja, compras, etc., tendremos un tiempo esperado como la (2'). Es decir, si hemos descompuesto el tiempo en compras, ventas, caja, bancos, etc., tendremos otros tantos tiempos esperados deducidos de fórmulas parecidas a las (2') o (2''), por ejemplo, para el examen de facturas.

$$t_{eF} = \frac{t_{mF} + 4t_{pF} + t_{MF}}{6} \qquad (3)$$

y así para las restantes.

Sección 3.ª

NUMERO DE OPERACIONES

1. Una vez planificado el tiempo para una clase de operaciones elementales deduciremos el número a determinar.

Si previamente se ha programado la descomposición del tiempo por actividad, al dividir por cada tiempo esperado de revisión de una operación nos dará el número de éstas, que podremos examinar como un promedio.

2. El problema se ha reducido a determinar el número de operaciones a analizar por cada actividad que, naturalmente, debemos relacionarlo con los importes por la correspondencia entre operaciones e importes, de forma que

si *no examinamos algunas operaciones, sus importes respectivos sean los más insignificantes.*

3. Por esto, creemos conveniente hacer la descomposición del tiempo hasta donde lo estimemos conveniente para que en el menor plazo cumplamos nuestra misión eficazmente.

Las operaciones a examinar se reducen a:

$$n = n_F + n_v + n_c + n_B + n_D \qquad (4)$$

Esta expresión la hemos obtenido deduciendo de la (1) al dividir cada término del segundo miembro por el tiempo esperado (obsérvese que en cada actividad tenemos un tiempo elemental diferente, pero la división nos dará el número esperado de operaciones al examinar que será una variable estadística).

Sección 4.ª

FORMACION DEL HISTOGRAMA DE TIEMPOS

1. Hemos dicho que el *tiempo para realizar una operación elemental estará comprendido entre un tiempo mínimo de ejecución de la operación* t_m y un tiempo máximo t_M.

Si dividimos al intervalo $t_M - t_m$ en n partes iguales de amplitud c, una actividad determinada, recogiendo datos experimentales de realización de operaciones elementales nos induciría a formar una tabla como la que a continuación exponemos:

(1) Tiempo	(2) Marca de Clase	(3) Frecuencias Observadas	(4) Frecuencia Relativa	(5) Densidad Relativa
$t_1 - \frac{c_1}{2} \rightarrow t_1 + \frac{c_1}{2}$	t_1	f_1	h_1	a_1
$t_2 - \frac{c_2}{2} \rightarrow t_2 + \frac{c_2}{2}$	t_2	f_2	h_2	a_2
$t_k - \frac{c_k}{2} \rightarrow t_k + \frac{c_k}{2}$	t_k	f_k	h_k	a_k
$t_n - \frac{c_n}{2} \rightarrow t_n + \frac{c_n}{2}$	t_n	f_n	h_n	a_n
		N	1	

La columna (1) es la división del tiempo en n partes, si esta división es igual $c_k = c$ será constante. El extremo inferior $t_1 - c_1/2$ es el tiempo mínimo y $t_n + c_n/2$ es el máximo.

La columna (2) nos indica la marca de clase de la variable tiempo. Por ser continua el valor t_k representa el conjunto de la variable $t_k \pm \frac{c_k}{2}$: Un extremo superior cualquiera coincide con el siguiente inferior:

$$t_k + \frac{c_k}{2} = t_{k+1} - \frac{c_{k+1}}{2} :$$

En la columna (3) se recopila el número de operaciones elementales observadas y clasificadas según la duración de tiempo; es decir, de las N operaciones existen f_k cuyo tiempo de cada una de ellas está comprendido entre:

$$t_k - \frac{c_k}{2} \rightarrow t_k + \frac{c_k}{2} ;$$

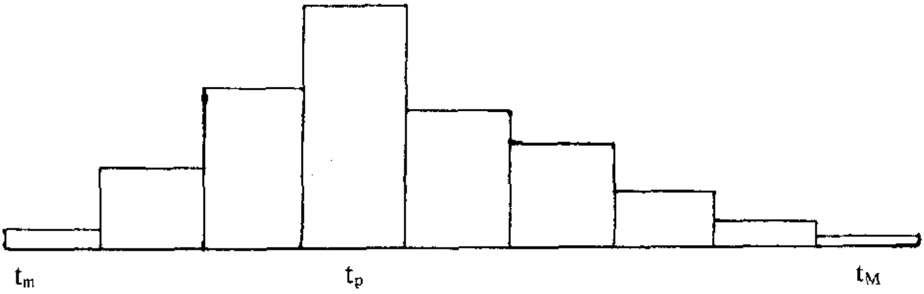
La columna (4) son frecuencias relativas; o sea, dividir los términos de la columna (3) entre el número de observaciones $h_k = \frac{f_k}{N}$:

La columna (5) es la división de la (4) por la amplitud del intervalo del grupo $y_k = a_k = \frac{h_k}{c_k}$ e indica la altura correspondiente a la marca de clase t_k.

El valor a_k nos indica la densidad de las operaciones distribuidas de manera uniforme sobre el intervalo dentro de su grupo.

Si en coordenadas cartesianas elegimos el eje de abscisas para representar los tiempos, y las ordenadas para representar las frecuencias relativas $\left(h_k = \frac{f_k}{N}\right)$. Número de observaciones estudiadas y comprendidas dentro del tiempo $t_m + (k-1)\,c \rightarrow t_m + k\,c$, divididas las observaciones f_k entre la totalidad de estas observaciones formaremos un histograma). Divididas por la amplitud de tiempos tendremos que la ordenada $y_k = \frac{h_k}{c}$ y de aquí $h_k = y_k\,c$; es decir, *el área* del mencionado histograma *representará las frecuencias relativas.*

Gráficamente será de forma análoga a la siguiente:



Eje de tiempos.

Fig. 1

Se comprenderá que no era necesaria la división $t_M - t_m = nc$ donde n es un número entero que indica las divisiones de los intervalos y c la amplitud de tiempos de cada uno.

Pudiera haberse descompuesto $t_M - t_m = \sum_{1}^{k} c_i$ en diversos intervalos de amplitud, variables sobre todo, para los extremos aunque siempre sucederá que el área sea igual a la unidad.

Por la figura comprendemos la descomposición del tiempo en la auditoria.

CAPITULO II

DIAGRAMA DE DECISION DEL AUDITOR

Sección 1.ª

RELACIONES OPERACIONES-IMPORTES

1. Las operaciones homogéneas cuantitativas auditadas (salvo excepciones) no son del mismo importe.

Este hecho nos induce a relacionar las operaciones variables auditadas, n_r, con las de mayor importe, de forma que sumadas las elegidas nos den importes mayores.

2. Si examináramos todas las operaciones obtendríamos el importe total. Pero en la auditoría no interesa un examen de todos los comprobantes sino de las operaciones representativas elegidas de forma que sea totalmente satisfactorio el porcentaje del control verificado.

Si en el caso concreto de las facturas las tuviéramos ordenadas de mayor a menor, eligiendo parte de estas n_f y considerando n_f como variable, tendríamos que los importes totales hasta n_f sería función de n_f:

$$T_m(n_f)$$

Esta función representa el máximo de importes con las n_f facturas elegidas ordenadamente.

3. Pero no quiere decir *que elegidas* n_f *facturas cualesquiera nos dará el importe máximo.* Hay que relacionarlas con los importes para que la función de las facturas revisadas el importe total sea mayor que eligiendo al azar n_f facturas desordenadas.

Por eso existe una íntima relación en la selección de las operaciones con importes.

Sección 2.ª

FORMACION DEL DIAGRAMA DE DECISION

1. Unas ideas previas antes de pasar adelante y un ejemplo concreto parcialmente aplicado a una clase de operaciones nos aclarará la forma de actuar y decidir sobre las revisiones de las operaciones para no perder la visión del conjunto.

2. Descompongamos un mes una sección, por ejemplo, compras. Debemos examinar con detalle las facturas de los proveedores, los precios, cantidades y calidades; si han sido efectivamente pedidas, y por persona autorizada; si ha entrado en los almacenes la misma cantidad, etc. Toda esta serie de tramitación necesaria de las facturas nos dará como resultado un promedio muestral del tiempo invertido en el examen por cada una de t_e y una varianza s^2.

3. Después de este examen preparatorio, la segunda fase, la clasificación de las facturas, puede ordenarse de dos formas: de mayor a menor importe o viceversa. Si ordenamos de menores importes de facturas a mayores $x_1 < x_2 < ... < x_n$ clasificaremos en grupos, número de facturas de cada grupo, e importes respectivos.

4. Supongamos que para el grupo x_k tenemos un número de facturas f_k

con un importe total de esta clase I_k dando a k los valores 1, 2, 3, ... n, tenemos la totalidad de las líneas de la tabla.

5. El número total de las facturas revisadas ha sido $N = \sum_{1}^{n} f_k$.

6. La frecuencia relativa de las facturas revisadas en el intervalo del grupo de clase x_k es la división de la frecuencia f_k entre el número total de facturas; es decir, $h_k = f_k/N$.

El cuadro de la clasificación se expone a continuación:

Importe Facturas marca de clases	Número de facturas	Total importe Grupos	Frecuencias relativas		Sumas	
			Facturas	Importe	Facturas	Importe
x_1	f_1	I_1	h_1	I_1/I	1	$1 = I_I/I$
x_2	f_2	I_2	h_2	I_2/I	$\sum_{n}^{2}$	$\sum_{n}^{2} (I_i/I)$
. . .						
x_k	f_k	I_k	h_k	I_k/I	$\sum_{n}^{k} h_i$	$\sum_{n}^{k} I_i/I$
. . .						
x_n	f_n	I_n	h_n	I_n/I	h_n	I_n/I
	N	I	1	1		

8. El cuadro se ha completado añadiendo los importes correspondientes a las f_k facturas del grupo x_k; las frecuencias relativas de las facturas e importes relativos $h_k = \frac{f_k}{N}$; $\frac{I_k}{I}$

y las sumas de estas frecuencias relativas acumuladas (tanto de las facturas como de los importes).

9. Fácilmente se deduce de estas últimas columnas de sumas que un tanto por uno $\sum_{1}^{k} h_i$ de las facturas revisadas hasta el grupo k nos da un tanto por uno del importe total de las compras hasta el mismo grupo. Si para *un pequeño tanto por uno de facturas obtenemos un tanto por uno elevado de importes, el control será eficiente y relativamente con poco trabajo.*

10. Las dos últimas columnas del cuadro son las que servirán de pauta para la planificación de la auditoría.

La formación de estas dos últimas columnas las hacemos por sumas de las frecuencias relativas *pero comenzando de abajo arriba; es decir, de mayores importes a inferiores.*

El tanto por uno de las facturas revisadas comparadas con el de las correspondientes de las facturas controladas nos indica la *posibilidad, insistimos,* de fijar una decisión para el *control de facturas:*

1.ªLas que *excedan de un importe predeterminado deben revisarse cuidadosamente.*

2.ª La correspondencia de la *cifra básica de decisión elegida* con la de los porcentajes relativos de cantidades nos indicará el control de importes totales.

3.ª Respecto a las facturas de importes inferiores a la cifra asignada previamente, *procederemos por muestreo aleatorio para completar el control o reducir la cifra y ampliar el porcentaje de control.*

Como advertencia no debe elegirse subjetivamente facturas para su revisión en este último caso. Debe seguirse mediante la técnica de muestreo aleatorio y auditar estas facturas aunque su importe no sea elevado.

Esta advertencia no es una norma sino el medio adecuado para las revisiones efectivas. Por supuesto, en casos de experiencia, un auditor detecta con habilidad hechos por circunstancias subjetivas nada despreciables.

11. La política a seguir dependerá de las circunstancias, clases de empresas, tiempo disponible, etcétera.

El cuadro precedente puede expresarse por medio de un gráfico, que nos servirá de norma en las posibles modificaciones de decisiones por circunstancias extrañas o por nuevos problemas planteados.

Dibujemos la gráfica de las sumas acumuladas.

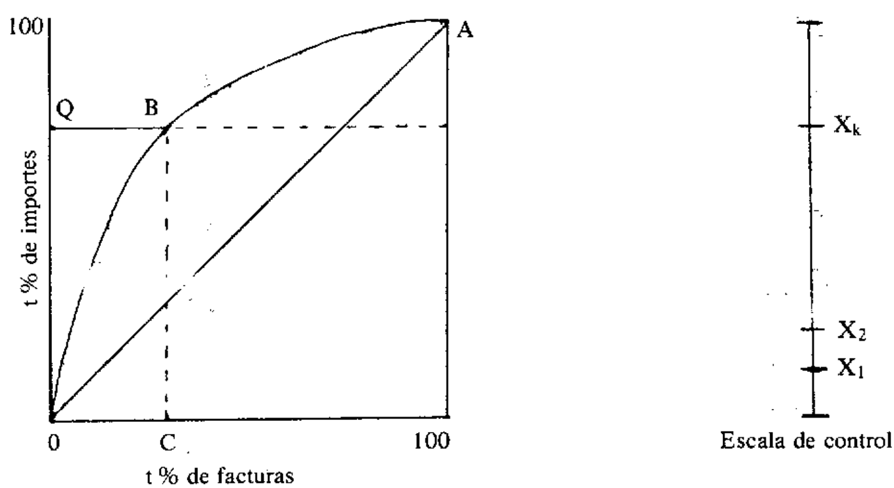


Fig. 2

La recta OA es en el caso improbable de ser todas las facturas del mismo importe.

El control de los importes totales es lo que interesa. Si es para un tanto por ciento de control eligiendo las facturas que superen a la cifra x_k y trazando por este punto una paralela al eje de facturas, tenemos la recta QB que corta a la curva OBA (que es la curva de decisión) en el punto B cuya proyección en el eje x es el punto C.

Al tanto por ciento de importes totales OQ corresponde el tanto por ciento de facturas revisadas OC y, por simple inspección en la figura, observamos es muy elevado el importe total de las facturas y muy pocas las facturas revisadas.

La escala de importes podríamos dividirla en decimales: 50, 75, 80, 85, 90, 95 y 99 por 100, haciendo corresponder por cada uno de estos puntos en el eje de facturas los porcentajes correspondientes.

12. La escala de control, según hemos dicho, nos dará una idea de que, para un tanto por ciento de importes elegido, nos marca la cifra de importe por facturas que sea igual o superior a una cifra determinada.

Para el resto de facturas procederemos por muestreo aleatorio eligiendo al azar facturas para su examen y así elevar el porcentaje de control.

Todas estas facturas las revisaremos con detalle: precios, operaciones, cantidades, calidades, sumas, etc., y si encontramos deficiencias anotaremos sus anomalías y será motivo para plasmar en el informe todos los hechos observados y de sus circunstancias sin emitir juicios que trasciendan más de los hechos observados.

Es importante si los errores provienen del mismo proveedor, procurando plasmar en nuestro informe todos los hechos observados y de sus posibles causas.

Sección 3.ª

EJERCICIO PRACTICO COMPLEMENTARIO

1. Creemos aclarará las ideas el siguiente ejercicio de una empresa real donde tuve necesidad de intervenir hace más de veinte años. Para hacer un examen a fondo de la mayoría de sus operaciones y controlar sus resultados preparé de antemano este diagrama de decisión.

Redondeamos las cifras para abreviar.

Se ha escogido dos semanas para examinar la importancia y poder aplicar lo dicho hasta aquí:

Importe de facturas en miles de pesetas	Número de facturas	Importe total en miles de ptas.	Acumulaciones		Acumulaciones Relativas	
			Facturas	Importes	Facturas	Importes
Hasta 1,5....	75	75	157	1.291	1	1
Desde 1,5 a 2,5....	16	32	82	1.216	0,52	0,94
" 2,5 a 3,5....	4	12	66	1.184	0,42	0,92
" 3,5 a 4,5....	12	48	62	1.172	0,40	0,91
" 4,5 a 5,5....	4	20	50	1.124	0,32	0,87
" 5,5 a 6,5....	2	12	46	1.104	0,29	0,85
" 6,5 a 7,5....	1	7	44	1.092	0,28	0,845
" 7,5 a 8,5....	4	38	43	1.085	0,27	0,84
" 8,5 a 9,5....	3	27	39	1.047	0,25	0,81
" 9,5 a 10,5....	1	10	36	1.020	0,23	0,79
" 10,5 a 12	7	70,5	35	1.010	0,22	0,78
" 12 a 14	2	27	28	939,5	0,18	0,73
" 14 a 18	—	—	26	912,5	0,16	0,71
" 18 a 20	3	58,5	26	912,5	0,16	0,71
" 20 a 22	1	21,5	23	854	0,15	0,66
" 22 a 24	4	92	22	832,5	0,14	0,645
" 24 a 26	4	102	18	740,5	0,11	0,575
" 26 a 28	3	82,5	14	628,5	0,09	0,495
" 28 a 30	3	89,5	11	556	0,07	0,43
" 30 a 32	2	63	8	466,5	0,05	0,36
" 32 a 34	1	33,5	6	403,5	0,04	0,31
De 40	1	40	5	370	0,03	0,29
" 50	1	50	4	330	0,025	0,255
" 60	1	60	3	280	0,02	0,215
" 70	1	70	2	220	0,01	0,17
" 100	1	150	1	150	0,005	0,115
	157	1.291			1	1

La primera columna se forma clasificando ordenadamente por grupos las facturas de un período de tiempo prudencial, que, como puede apreciarse en el cuadro, hemos desglosado las primeras en límites más pequeños y a medida que aumenta el valor de las facturas se procede a incrementar la amplitud de los intervalos. Las últimas facturas, de importe más elevado, es conveniente, o incluirlas en un grupo o indicar el importe de cada una, siempre que sean pocas.

La segunda columna de este cuadro es el número de facturas existentes por cada grupo. En nuestro caso, hemos contado 75 facturas de un importe inferior a 1.500 pesetas; 16 facturas de una cantidad superior a 1.500 pesetas e inferior o igual a 2.500 y así sucesivamente.

La tercera columna nos indica el importe total (en miles de pesetas) por cada grupo desglosado; es decir, sumando los importes de cada grupo o también, aproximadamente, multiplicando el valor medio del grupo por el número de facturas existentes en el intervalo de clase o grupo formado. Puede apreciarse que hemos seguido este procedimiento abreviado. Así, por ejemplo, siendo la marca de clase del grupo primero 1.000 pesetas y haciendo 75 facturas el importe dado es 75.000 y por estar expresado en la columna en miles de pesetas hemos anotado 75. En la fila segunda, el valor medio de 1.500 a 2.500 es 2.000 pesetas como marca de clase y habiendo 16 facturas son 32 miles de pesetas, etcétera.

Las columnas 4.ª y 5.ª son de acumulaciones de facturas y de importes respectivamente. Estas columnas *las hemos formado acumulando de abajo a arriba las columnas 2.ª y 3.ª*. Se observará que las facturas anotadas e importes totales de columnas 2.ª y 3.ª coinciden con las acumulaciones de las columnas 4.ª y 5.ª (en éstas en la primera fila). Por ejemplo, en la columna 4.ª y en la línea que figuran 28 facturas de más de 12.000 pesetas, obtenidas sumando 2 + 0 + 3 + 1 ... de la segunda columna. De forma semejante, en la columna 5.ª y en la misma línea, la acumulación de 939,5 pesetas la obtenemos acumulando la columna 3.ª de importes 27 + 0 + 58,5 + ... + 150.

Las columnas 6.ª y 7.ª de Acumulaciones Relativas de facturas y de importes, se forman a partir de las columnas 4.ª y 5.ª sin más que dividir por los números totales de facturas formando la columna 6.ª, o por el de importes, en cuyo caso habremos formado la columna 7.ª.

La importancia de estas dos columnas es extraordinaria si nos detenemos en su interpretación. Por ejemplo, en la segunda línea de la columna 6.ª y 7.ª nos dan como valores relativos 0,52 para las facturas y 0,94 para importes. Esto quiere decir que el 52 por 100 de las facturas examinadas, elegidas de forma adecuada (si son precisamente las superiores a 1.500 pesetas) nos dan una información de que controlamos el 94 por 100 de los importes totales.

Examinando otra línea cualquiera (0,29, 0,85) nos indica que podemos controlar el 85 por 100 de las compras sin más que examinar el 29 por 100 de las facturas, o más concretamente, la norma de decisión del auditor para el control del 85 por 100 del importe de las compras será examinar detenidamente las facturas que superen a 5.500 pesetas y así sucesivamente para los demás puntos.

Si llevamos a un papel milimetrado los puntos de las acumulaciones relativas en porcentajes, tomando para las abscisas el tanto por ciento de facturas y para las ordenadas dos escalas, una el porcentaje del importe máximo de control y otra para adoptar el criterio de decisión a seguir para alcanzar ese máximo revisando las facturas de cantidades superiores a cifras dadas, obtendremos la política a seguir para la distribución más eficaz de nuestro tiempo.

La figura expresa con claridad nuestras ideas, y nos permite adaptar nuestro tiempo a las exigencias de la auditoría. Con el resto de las facturas según hemos indicado, puede procederse para su examen por muestreo aleatorio y así garantizar aún más el buen funcionamiento del control y que éste sea totalmente eficaz.

La marcada separación de la curva con respecto a línea de equidistribución (la bisectriz del cuadrante) nos permite seguir una política de examen de facturas para controlar un importe total de compras previamente determinado.

Si elegimos, por ejemplo, el 90 por 100, debemos examinar facturas que superen a 3.000 pesetas y no tendremos más que revisar aproximadamente un 40 por 100 del total de facturas.

Las facturas restantes (el 60 por 100) pueden controlarse por muestreo aleatorio.

2. De forma semejante se descomponen las otras actividades, y creemos necesario indicar que, de acuerdo con la estructura de la empresa, pueden verificarse esquemas de ordenación de operaciones para que, partiendo de una operación, seguir su análisis de la ruta normal contable por si hubiera derivaciones no justificadas dentro del ciclo contable.

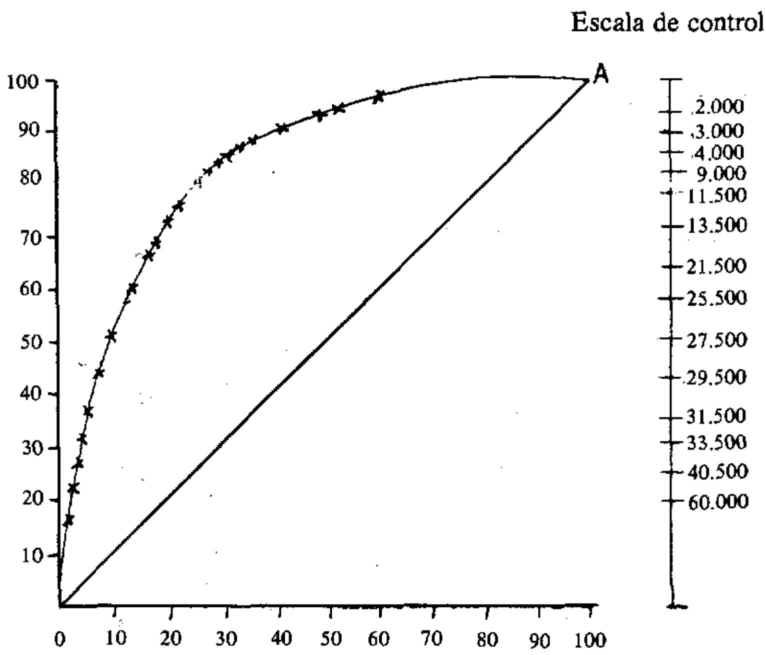


Fig. 3

Con papel milimetrado resolvemos fácilmente el ejercicio propuesto y nos da una idea aproximada de la decisión si deseamos el control de 90, 95, etc., por 100 del importe total de facturas.

Repetimos: cada punto corresponde a un par de la tabla de acumulaciones del ejercicio resuelto. Así, por ejemplo, 0,52, 0,94, representaremos en el eje de abscisas (facturas) una distancia 52 y en el de ordenadas (importe correspondiente a estas facturas) el 94 por 100, y la primera columna de la mencionada tabla nos indica que desde 1.500 pesetas en adelante son las facturas que hemos de revisar, es decir, nos sirve esta columna para el control o norma de conducta a seguir.

Lo mismo diremos de los otros puntos. Construimos así nuestra escala de decisión de auditoría y tenemos la seguridad que con el menor tiempo posible controlamos el porcentaje de importes de compras previamente determinado. Existen, naturalmente, variaciones en las muestras. Estas variaciones no influyen en la forma de la curva de acumulaciones y podemos prácticamente guiarnos por la escala de control construida partiendo de una muestra de facturas representativas del colectivo ideal al que pertenece.

3. Para ser representativa la curva de decisión elegiremos al azar las facturas (de un período de una, dos semanas, un mes, etc.) y, después, confeccionar los gráficos como lo hemos hecho.

El gráfico guarda una relación perfecta con los datos obtenidos.

4. Nos hemos detenido en la aplicación de las compras y como resumen diremos:

1.º Debemos revisar una factura cuando sea superior a la cifra de control elegida.

2.º Examinaremos con detenimiento precios, descuentos ofertados y facturados, precios de la competencia, circunstancias extrañas, si las hubiera y emitir un informe que recoja los hechos calificados como erróneos, dudosos o anormales.

3.º Confrontaremos las compras comprobando la realidad de los cálculos, entradas, calidad, etcétera.

4.º Las facturas de cantidades inferiores podemos examinarlas con menos detenimiento, no prescindiendo de comprobaciones y estas facturas serán seleccionadas aleatoriamente.

Siguiendo este método, garantizamos a nuestros compañeros la visión de conjunto completo en cuanto a estas operaciones auditadas a la vez que se realiza en el menor tiempo posible.

En general, las operaciones se realizan en serie (esto es posible en la mayoría de las veces) el tiempo elemental será inferior, lo que nos permite dedicar nuestro precioso tiempo a otras comprobaciones.

CAPITULO III

MODELO MATEMATICO

Sección 1.ª

FORMA DE LA DISTRIBUCION

1. En esta parte estudiamos modelos matemáticos que corresponden a diversos conceptos expuestos y que por la forma del histograma creemos puede admitirse una idealización representativa del fenómeno experimental.

Primero haremos un detenido estudio sobre la curva ideal correspondiente a la distribución del histograma de operaciones, y esta curva ideal se denomina la función de densidad de probabilidad del fenómeno estudiado..

2. Calculamos las características principales de esta función de densidad (momentos en general, esperanza matemática o media aritmética teórica de duración de una operación, dispersión, etcétera).

Conocidas estas características, aplicamos el teorema central del límte para la variable suma de un determinado número de operaciones y así estudiamos el análisis del tiempo de verificación o control de un número determinado de operaciones.

3. Indicamos cómo se construye un nomograma para las aplicaciones a decisiones y controles con las líneas probabilísticas correspondientes.

Este nomograma nos indica la relación del tiempo y operaciones revisadas con cierta probabilidad; nos resolverá dos problemas importantes: fijada una probabilidad y un número determinado de operaciones deduciremos con una probabilidad el intervalo de tiempo que tardaremos en el control; o, también, dado un tiempo fijo, con una probabilidad determinada, deseamos conocer el número mínimo y máximo de operaciones a controlar.

Otro de los modelos teóricos será la idealización de los diagramas de concentración de importes relativos y su relación con el número relativo de operaciones.

4. Hacemos dos tipos de ajustes de las curvas más aconsejables y el procedimiento de estimación de los parámetros por mínimos cuadrados a los logaritmos de los datos.

Las propiedades analíticas de estas curvas están íntimamente relacionadas con las distribuciones de Rentas de Paretto y la distribución Beta.

Sección 2.ª

HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS DE COMPROBACION DE OPERACIONES

1. Dividamos en un número k de partes de igual amplitud el intervalo de tiempos $t_m \rightarrow t_M$ (tiempo mínimo y máximo de observación) del tiempo de control de una sola operación de una clase determinada. Tenemos una serie de frecuencias y en el intervalo de marca de clase t_i estarán comprendidas las operaciones que hayan durado un tiempo comprendido entre $t_i - \frac{c}{2}$;$t_i + \frac{c}{2}$ donde c es igual a la amplitud, o sea, de cociente de dividir $t_M - t_m$ entre el número k. Este número k es el número de partes en que hemos dividido el tiempo.

2. En una clase de operaciones un dato concreto (por ejemplo, examen de una factura, comprobaciones de pedidos, precios, entradas, cálculos, etc.), nos da un tiempo.

El tiempo de una operación pertenece a una y solamente a una de las divisiones del intervalo (t_m, t_M). Dado que el tiempo es una variable continua, necesitamos aclarar los extremos de los intervalos para que no exista confusión al incluir las frecuencias en una de las divisiones cuando sean adyacentes.

Esto se consigue formando intervalos semiabiertos, es decir, uno de los extremos es abierto. Así:

$$\left(t_i - \frac{c}{2},\ t_i + \frac{c}{2}\right]$$

es un intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha. Una operación cuyo tiempo sea de duración superior a $t_i - \frac{c}{2}$ (*no igual*) e *inferior* o *igual* a $t_i + \frac{c}{2}$ pertenecerá a este intervalo. Y este intervalo está representado por t_i que representa a todo él y que se denomina marca de clase.

Escribimos con la observación anterior que una clase t_i comprende el tiempo entre $t_i \pm \frac{c}{2}$ y abreviadamente el intervalo de clase: se representa por t_i.

3. De la experiencia obtendremos un conjunto de frecuencias (por ejemplo, facturas), formaremos la *tabla estadística* correspondiente, como la siguiente:

tiempos:

$$t_m \quad t_2 \quad \ldots \quad t_i \quad \ldots \quad t_M$$

operaciones clasificadas según los tiempos a que pertenecen:

$$f_1 \ f_2 \ \dots \ f_i \ \dots \ f_M$$

siendo la suma:

$$\sum f_i = N$$

las operaciones totales experimentales para la formación del gráfico.

4. El gráfico correspondiente a la tabla precedente, será análogo al histograma representado en la figura dibujada en I, de la Sección 4.ª del capítulo anterior.

El área es igual a la unidad si las frecuencias son relativas. Las abscisas son el eje de tiempos y un rectángulo determinado representa el número de observaciones relativas h_i comprendidas entre los límites extremos que indica su base.

Hemos considerado que las amplitudes fueran todas iguales, sin que esto restrinja nuestras consideraciones. En este caso es preciso determinar la altura del histograma (que se haría dividiendo por la amplitud) para que el área de la figura sea la unidad.

5. La altura a_i debe ser proporcional a h_i; es decir, $a_i = \frac{h_i}{a}$ (Esta consideración es interesante desde el punto de vista probabilístico). En este caso el área es igual a la unidad.

Si aumentamos el número N de observaciones elementales, y a la vez el eje de tiempos, disminuimos la amplitud de los rectángulos, el histograma tenderá hacia una *curva límite ideal* que *denominaremos distribución de probabilidad* de clase D de operaciones de tiempos.

El polígono de frecuencias, cuando éstas aumentan, tenderá a idealizarse, pudiendo ser representado por la figura:

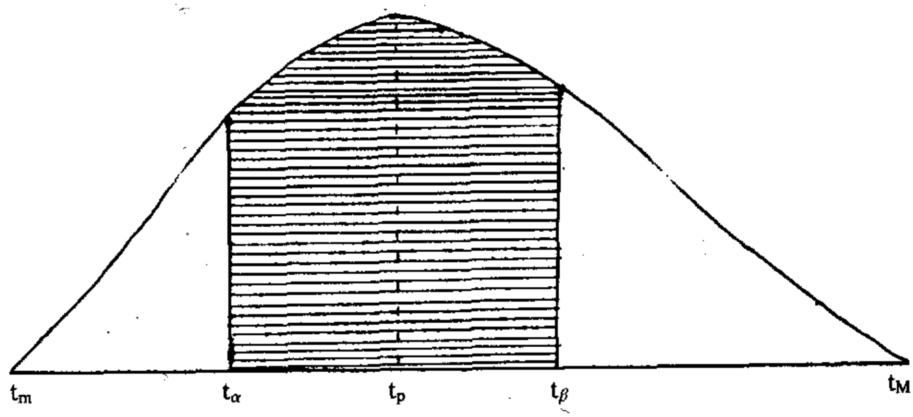


Fig. 4

El área debajo de la curva, el eje de tiempos y las ordenadas por los puntos t_α y t_β nos indica la probabilidad de que una sola operación dure un tiempo entre t_α y t_β.

Sección 3.ª

FORMA MATEMATICA

1. Entre las diversas representaciones ideales examinando la forma de la curva nos sugiere la idea de que sea de un tipo análogo a la dada por la expresión:

$$f(t) = c(t - t_m)^{p-1} (t_M - t)^{q-1} \tag{1}$$

donde p y q son mayores que la unidad y c es una constante que se determina con la condición de ser el área igual a la unidad, o sea:

$$\int_{t_m}^{t_M} f(t)\, d\, t = c \int_{t_m}^{t_M} (t - t_m)^{p-1} (t_M - t)^{q-1}\, d\, t = 1 \tag{2}$$

Si hacemos el cambio de variable $t - t_m = x\,(t_M - t_m)$

tenemos: $t_m - t = t_M - t_m - x\,(t_M - t_m) = (t_M - t_m)\,(1 - x)$ (3)

t	x
t_m	0
t_M	1

(4)

sustituido en la expresión tenemos la nueva integral:

$$c \int_0^1 x^{p-1} (t_M - t_m)^{p-1} (t_M - t_m)^{q-1} (1 - x)^{q-1} (t_M - t_m)\, d\, x =$$

$$= c\,(t_M - t_m)^{p+q-1} \int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1}\, d\, x = 1$$

La integral es una Eureliana tipo B y, por tanto, tendremos:

$$c\,(t_M - t_m)^{p+q-1}\, B\,(p, q) = 1$$

La constante la deducimos despejando de la anterior:

$$c = \frac{1}{(t_M - t_m)^{p+q-1}\, B\,(p, q)} \tag{5}$$

y que sustituida en (1) nos dará la fórmula de la función de densidad, es decir:

$$f(t) = \frac{(t - t_m)^{p-1} (t_M - t)^{q-1}}{(t_M - t_m)^{p+q-1} B(p, q)} \tag{5}$$

siendo la probabilidad de que una operación de la clase D, facturas por ejemplo, nos lleve una revisión un tiempo t entre t_α y t_β (ver figura 4) será la integral:

$$p(t_\alpha < t \leq t_\beta) = \int_{t_a}^{t_\beta} f(t)\, dt \tag{6}$$

Sección 4.ª

CARACTERISTICAS ELEMENTALES

Nos interesa estudiar las características de la curva ideal (5) de la clase de operaciones que estudiamos; entre ellas: la media aritmética y la varianza, como más importantes.

El momento de orden k con respecto al origen, se define como la esperanza matemática de la variable t^k, es decir:

$$\alpha_k = E(t^k) = \int_{t_m}^{t_M} f(t)\, t^k\, dt = \int_{t_m}^{t_M} [(t - t_m) + t_m]^k f(t) dt =$$

$$= \int_{t_M}^{t_M} (t - t_m)^k f(t)\, dt + \binom{k}{1} t_m \int_{t_m}^{t_m} f(t) (t - t_m)^{k-1}\, dt +$$

$$+ \binom{k}{2} t_m^2 \int_{t_m}^{t_M} (t - t_m)^{k-2} f(t)\, dt + \ldots + \binom{k}{k} t_m^k \int_{t_m}^{t_M} f(t)\, dt \tag{7}$$

Pero sustituyendo f(t) por su valor (5) tendremos que un sumando cualquiera de la última expresión:

$$\int_{t_m}^{t_M} (t - t_m)^h f(t)\, dt = \gamma_h = \int_{t_m}^{t_M} \frac{(t - t_m)^{h+q-1} (t_M - t)^{q-1}}{(t_M - t_m)^{p+q-1} B(p, q)}\, dt \tag{8}$$

siendo γ_h el momento con respecto a t_m.

Haciendo el cambio (3) tenemos:

$$\gamma_h = \frac{(t_M - t_m)^{p+q+h-1}}{(t_M - t_m)^{p-q-1}} \int_0^1 \frac{x^{p+b-1} (1 - x)^{q-1}}{b(p,q)}\, dx = (t_M - t_m)^h \frac{B(p + h,q)}{B(p,q)} \tag{8}$$

Dando valores a h = 0, 1, 2, 3, ... k, y sustituidas las integrales en (7), tendremos que el momento de orden k puede expresarse:

$$\alpha_k = E\,(t^h) = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} t_m^{k-h}\,(t_M - t_m)^h \frac{B(h+p,q)}{B\,(p,q)} =$$

$$\alpha_k = \frac{t_m^k\,B(p,q) + \binom{k}{1} t_m^{k-1}(t_M - t_m)\,B(p+1,q) + \ldots +}{B(p,q)}$$

$$+ \binom{k}{h} \frac{t_m^{k-h}\,(t_M - t_m)^h\,B\,(p+h,q)}{B\,(p,q)} + \ldots + \binom{k}{k} \frac{(t_M - t_m)^k\,B\,(p+k,q)}{B\,(p,q)} \qquad (7')$$

El momento primero coincide con la esperanza matemática o media teó-ica del tiempo de revisión de una operación (k = 1).

$$\alpha_1 = (t_M - t_m)\,\frac{B(p+1,q)}{B\,(p,q)} + t_m \qquad (9)$$

La integral Euleriana de primera especie está relacionada con la segunda pecie por la fórmula:

$$B\,(p,q) = \frac{\Gamma\,(p)\,\Gamma\,(q)}{\Gamma\,(p+q)} \text{ donde } \Gamma\,(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}\,e^{-x}\,d\,x \qquad (10)$$

Es también una integral Euleriana gamma de segunda especie, siendo fá-comprobar que es una generalización factorial. La propiedad (10) nos fa-rece para determinar (9).

$$= (t_M - t_m)\,\frac{\dfrac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}}{\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}} + t_m = (t_M - t_m)\,\frac{\dfrac{p\Gamma(p)}{(p+q)\Gamma(p+q)}}{\dfrac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}} + t_m =$$

$$= \frac{(t_M - t_m)\,p}{p+q} + t_m = \frac{p\,t_M + q\,t_m}{p+q} = \alpha_1 \qquad (9')$$

or ser:

$$\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1)$$

De forma semejante obtendríamos α_2 y conocido α_1 tenemos la va-anza.

Sección 5.ª

ANALISIS DE ν OPERACIONES

1. Si examinamos ν operaciones con la f de densidad; de media α_1 y varianza σ por operación elemental, interesa determinar la f de densidad de la variable:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_\nu \tag{11}$$

donde τ es el tiempo suma de la comprobación o verificación de ν operaciones independientes.

Existe un teorema que, siendo ν suficientemente grande, la variable τ *tiende a distribuirse como una normal de parámetros media:*

$$E(\tau) = E(\Sigma \tau_1) = \nu E(\tau_1) = \frac{\nu(p\, t_M + q\, t_m)}{p + q} = \nu\alpha_1$$

y la varianza:

$$\sigma_\nu^2 = \frac{\nu\, p\, q\, (t_M - t_m)^2}{(p+q)^2\,(p+q+1)^2} = \nu\sigma^2 \tag{12}$$

Siendo σ^2 la varianza de una operación y la (12) la varianza de la suma de ν operaciones independientes.

El teorema central del límite es un poco complicado, pero puede consultarse en cualquier tratado de estadística matemática.

Calculamos la variable tipificada, que es:

$$x = \frac{\tau - \nu\alpha_1}{\sigma_\nu} = \frac{\tau - \nu\alpha_1}{\sqrt{\nu}\,\sigma} \tag{13}$$

Esta variable tiende hacia una normal de parámetros (0,1), o sea, de media cero y desviación típica la unidad y puede aplicarse la distribución normal para el estudio de análisis de las ν operaciones con un tiempo τ máximo dado que disponemos para su examen.

2. La variable aleatoria x está tabulada y para un tanto por uno p de área comprendida en la función de distribución normal.

$$p = F(x_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_p} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \tag{14}$$

tendremos una relación entre las x_p, el tiempo τ y el número de operaciones ν. De la (13) deducimos:

$$\tau = \alpha_1 \nu + \sigma x_p \sqrt{\nu} \tag{15}$$

3. La anterior (15) se compone de dos sumandos. El primero:

$$\alpha_1 \nu$$

y como $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ podemos considerar exclusivamente válidos los puntos de la recta:

$$\alpha_1 \nu \qquad \nu \,\varepsilon\, R$$

cuando $\nu \,\varepsilon\, N$ pertenece a los números naturales.

Dibujando esta recta, la probabilidad que:

$$p(\tau < \alpha_1 \nu) = p(\tau > \alpha_1 \nu)$$

divide en dos semiplanos el gráfico: El tiempo de las ν operaciones que tarden menos que la media teórica y aquél que supere la media.

El segundo término de la (15) es:

$$x_p \, \sigma \sqrt{\nu}$$

que hay que sumar (o restar) según el valor de la variable tipificada x_p.

Este término (positivo o negativo) depende de x_p. A la recta $\alpha_1 \nu$ hay que sumarle (o restarle) el término parabólico $x_p \sigma \sqrt{\nu}$. A la recta $\alpha \nu$ sumado el término $x_p \sigma \sqrt{\nu}$ (si $x_p > o$) variando $\nu \,\varepsilon\, R$ formamos curvas que nos permiten conocer las probabilidades de que:

$$p(\tau < \alpha_1 \nu + x_p \sigma \sqrt{\nu})$$

o dicho de otra forma: la probabilidad de precisar un tiempo inferior a (15) para auditar ν operaciones.

De forma semejante si $x_p < o$ las curvas (15) nos indican que están por debajo de la recta $\alpha_1 \nu$.

4. En la expresión (15) son constantes α_1 y σ. Podemos representar gráficamente la (15) para diversos valores de x, indicando el tanto por uno p —probabilidad— de que examinadas ν operaciones el tiempo sea inferior a τ.

Los valores de x_p para sustituirlos en la (15) figuran en cualquier tabla estadística de la función de distribución normal.

Hemos elegido los más usuales de la curva normal. Las probabilidades de la función de distribución hasta la variable tipificada:

Probabilidades P	**Desviación tipificada** X_p
0.0014	− 3,00
0.0082	− 2,50
0.0228	− 2,00
0.0669	− 1,50
0.1587	− 1,00
0.03086	− 0,50
0.50	− 0,00
0.6914	+ 0,50
0.8413	+ 1,00
0.9331	+ 1,30
0.9772	+ 2,00
0.9918	+ 2,50
0.9986	+ 3,00

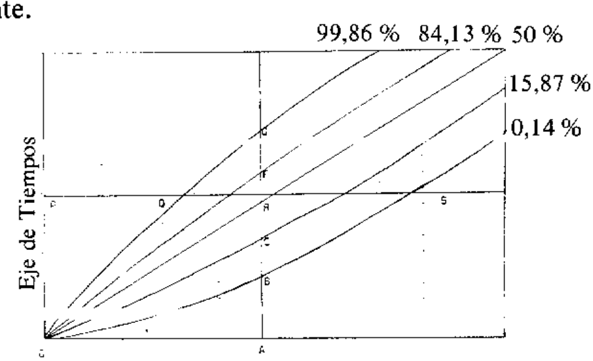
Tabla de la curva normal

Dando valores ν elegidos de la tabla y llevados a la expresión (15) para un valor fijo de x_p representará una curva; y para un conjunto de valores característicos de x_p, tendremos una familia de curvas o nomogramas parecido al de la figura siguiente. Decimos curvas y no rectas.

El eje de las abscisas indica el número ν de operaciones y el de ordenadas el tiempo. La recta OR tiene una pendiente (dibujando a escala normal) de tangente igual a α_1 y pasa por el origen, es decir, la recta analíticamente se representa por $\alpha_1 \nu$.

A partir de esta recta se suma o resta el valor $\sigma x_p \nu^{1/2}$. Por esta razón las distancias, por ejemplo: R C = R F para $|x_p| = |x_{1-p}|$. Estas ideas facilitan la construcción del nomograma.

Los valores porcentuales son 100 p obtenidos de la tabla para el valor de x correspondiente.



Eje de operaciones   Nomograma de revisión de operaciones
Fig. 5

Tomemos un número determinado de operaciones ν_1 = O A y tracemos por el punto A una parelela al eje de tiempos; corta las líneas determinadas de la distribución en puntos como son el B, C y F, entre otros. En la recta R (50 %) está el tiempo medio ν, α_1.

La longitud A G indica el tiempo que tardaremos como máximo en revisar ν_1 operaciones con una probabilidad de ser inferior a 99,86 por 100. De igual modo A F es el tiempo máximo que tardaríamos con probabilidad de un 84,13 por 100 en revisar el mismo número de operaciones.

La revisión de la O A = ν_1 operaciones tenemos la probabilidad de 0,14 por 100 de hacerlas en tiempo inferior a A B.

5. También deducimos de la figura que durante el tiempo comprendido entre A B < τ < A G para la revisión de las mismas operaciones, tenemos una probabilidad de 99,72 por 100 de haberlas verificado. Este valor se obtiene por diferencia de los dos números de líneas probabilísticas a que pertenecen los puntos G y B (99,86) − 0,14), (diferencia de funciones de distribución).

6. La separación de las curvas de la recta O R depende de la dispersión porque aumenta la desviación típica.

Si hacemos variar el punto A y por el mismo trazamos una perpendicular, existirá mayor dispersión si el desplazamiento de A es en el sentido positivo porque la desviación aumenta con $\sqrt{\nu}$.

Sección 6.ª

OPERACIONES CONTROLADAS EN TIEMPO FIJO

1. Anteriormente hemos considerado el tiempo variable aleatoria para confrontación, examen o ejecución de determinada clase de operaciones, por ejemplo, ν fijas.

Nos encontramos ahora con otro problema distinto: la distribución de nuestro tiempo para analizar un número de operaciones; por ejemplo, compras, C; ventas, V; Bancos, B, etc.; y toda esta clase pertenece a un conjunto

Cada una de las clases mencionadas tiene una gráfica parecida a la de la figura 5, variando las líneas según el valor de la desviación típica y la media.

2. Nos proponemos ahora dedicar un tiempo fijo a la revisión o control de una clase determinada de operaciones; el problema es determinar la probabilidad de prever el número mínimo de operaciones y controlar ν, que en este caso es la variable aleatoria, durante un tiempo previamente determinado.

Hemos de señalar que la variable ν no sigue una ley normal ni es combinación lineal de la variable aleatoria τ, aún cuando por el teorema central del límite cuando ν es grande tenderá a distribuirse en forma normal.

Para resolver el problema propuesto, recurriremos a la figura haciendo O P = τ tiempo fijo. Por el punto P trazaremos una parelala al eje de operaciones ν; cortando a las líneas probabilísticas en puntos tales como el P, Q y S. Las distancias al origen de los puntos proyectados sobre el eje de operaciones, nos darán el número mínimo de éstas que podemos revisar con las probabilidades señaladas en mencionadas líneas a las que pertenecen los puntos proyectados.

En nuestro caso, la línea probabilística del 99,86 por 100 es la A Q G, y la distancia P Q, o su proyección sobre el eje de las abscisas, es el número mínimo de operaciones en el tiempo fijo dado O P, revisemos como mínimo P Q = ν_m operaciones.

Las distancias como P Q, P S, etc., es decir, paralelas al eje de abscisas y medidas con la misma unidad, nos resuelven el problema de las operaciones revisables de las líneas indicatrices de las probabilidades de los puntos a que pertenecen en un tiempo fijo dado.

Hemos obtenido de este nomograma un número mínimo de operaciones a auditar con una gran probabilidad (99,86 %), por ejemplo, de que las efectuemos.

En este caso será preciso, para cumplir los objetivos, establecer la política de decisión de niveles de control para asegurarnos nuestros objetivos fundamentales.

También la línea P S corta a la curva de probabilidad 0,14 y su proyección nos da el número máximo de operaciones auditadas.

Sección 7.ª

MODELOS DE IMPORTES DE OPERACIONES

En el ejemplo que hemos considerado, observamos la forma del gráfico 2, muy semejante al de concentración de rentas y otros fenómenos económicos.

No influye para nuestro estudio la inversión de abscisas en ordenadas, ya que existe similitud con el gráfico de concentración de rentas.

1. Modelos simples. Método potencial (1)

Por estas razones, y si denominamos x al tanto por uno de operaciones, podemos proponer la siguiente curva ideal para los ajustes de acumulaciones e importes:

$$y = x^p \qquad (16)$$

Estudiemos la curva. Cumple las condiciones propuestas:

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad \text{si} \quad p > 0$$
$$x = 1 \qquad y = 1 \qquad o \leq x \leq 1 \tag{17}$$

(es decir, si no revisamos ninguna factura no tendremos ningún importe, y si las revisamos todas tendremos la totalidad).

La derivada nos da la tangente en cada punto de la curva:

$$y' = p\, x^{p-1} \tag{18}$$

observemos que es positiva, lo cual nos dice que la curva y crece al crecer x.

En los puntos extremos debieran cumplirse las condiciones de ser la tangente vertical para el punto $x = 0$ (es decir, la tangente valdrá infinito) y en el punto $x = 1$, la tangente deberá tender hacia la horizontal; es decir, tangente en el punto $x = 1$, deberá ser aproximadamente paralela al eje de las abscisas (véanse las figuras 2 y 3).

Para cumplirse la primera condición p debe ser inferior a 1, ya que $p - 1$ deberá ser negativo para que $y = p\, x^{p-1} \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$.

La segunda condición por ser la unidad elevada a cualquier número (positivo o negativo) si se debe de cumplir la segunda condición nos indicará que en el punto $x = 1$, $y' = p$, de donde p tiene que ser pequeño.

La segunda derivada es:

$$y'' = p\,(p - 1)\, x^{p-2} \tag{19}$$

y por ser $0 < p < 1$ es negativa; es decir, la función acumulativa queda debajo de la tangente.

De esta forma podremos adaptarla a las acumulaciones de importes y operaciones relativas una curva de la forma expresada en la figura 2.

1.2. *Ajuste por mínimos cuadrados*

Si de la (16) tomamos logaritmos, tenemos la siguiente:

$$\text{Lg}\, y = p\, \text{Lg}\, x \tag{20}$$

es decir, una recta de pendientes p en papel logarítmico. Si los valores experimentales relativos son y, tendremos diferencias con los teóricos obtenidos al ajustar referida curva.

Imponiendo la condición al ajuste de hacer mínima la suma de las desviaciones al cuadrado entre los valores teóricos y los experimentales, tendremos el ajuste por mínimos cuadrados.

En efecto:

$$\varphi(p) = \sum_{1}^{n} [\mathrm{Lg}\, y_e - p\mathrm{Lg}\, y]^2 = \sum_{1}^{n} [\mathrm{Lg}\, y_e - p\, \mathrm{Lg}\, x_e]^2 \qquad (21)$$

La expresión cuadrática depende sólo de p. Derivando con respecto al parámetro p, la condición necesaria para la existencia de máximo, mínimo es que la derivada se anule.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = -2\sum_{1}^{n}[\mathrm{Lg}\, y_e - p\, \mathrm{Lg}\, x_e]\, \mathrm{Lg}\, x_e \qquad (22)$$

Simplificando tenemos:

$$\sum_{1}^{n} (\mathrm{Lg}\, y_e)\, \mathrm{Lg}\, x_e = p \sum_{1}^{n} (\mathrm{Lg}\, x_e)^2$$

donde:

$$\hat{p} = \frac{\sum (\mathrm{Lg}\, y_e)\, \mathrm{Lg}\, x_e}{\sum (\mathrm{Lg}\, x_e)^2} \qquad (23)$$

es el parámetro estimado por este método de mínimos cuadrados.

Para la resolución práctica del cálculo de $\hat{p}$ dispondremos el esquema en la siguiente tabla:

columnas:	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	x_e	y_e	$\mathrm{Lg}\, x_e$	$\mathrm{Lg}\, y_e$	$(\mathrm{Lg}\, x_e\, (\mathrm{Lg}\, y_x)$	$(\mathrm{Lg}\, x_e)^2$

la suma de los valores de la columna (5) dividido por la suma de los de la columna (6) nos dará la estimación p del parámetro.

Advertimos que para obtener las columnas (3) y (4), por ser valores relativos x e y, el logaritmo del número inferior a la unidad es un número negativo, y las columnas mencionadas serán negativas.

2. Modelo tipo función beta

1. El ajuste de este modelo puede hacerse para el diagrama de decisión con las frecuencias relativas como variable independiente y el número de facturas como frecuencias observadas. *La integral de esta expresión sería el verdadero modelo de decisión.*

El modelo propuesto es de forma:

$$y^t = c\, x^p (1 - x)^q \qquad 0 < x < 1 \tag{24}$$

donde t indica es el valor teórico no exponente.

Puede comprobarse que este modelo también puede aplicarse a la medida de tiempos mediante el cambio de escala que hicimos en su momento.

En los extremos el valor teórico es cero.

2. Para ajustar estos datos a los experimentales tomemos logaritmos neperianos de la (24) y tenemos:

$$\ln y^t = \lg c + p \ln x + q \ln (1 - x) \tag{25}$$

Hagamos:

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{Lg}\, C \\ X_1 &= \mathrm{Lg}\, X \\ X_2 &= \mathrm{Lg}\,(1 - x) \end{aligned} \tag{26}$$

La (25) se nos convierte en:

$$\mathrm{Lg}\, y^t = A + p\, X_1 + q\, X_2 \tag{25'}$$

3. De los datos experimentales los logaritmos neperianos de y_i llamaremos otra nueva variable:

$$\lg y_i = y$$

Haciendo la expresión cuadrática:

$$\varphi(A, p, q) = \sum (Y - A - p\, X_1 - q\, X_2)^2$$

erá mínima cuando las derivadas parciales respecto a A, p y q, sean ulas:

$$\begin{aligned} \frac{\sum Y}{n} &= A + p \frac{\sum X_1}{n} + q \frac{\sum X_2}{n} \\ \frac{\sum X_1 Y}{n} &= A \frac{\sum X_1}{n} + p \frac{\sum X_1^2}{n} + q \frac{\sum X_1 X_2}{n} \\ \frac{\sum X_2 Y}{n} &= A \frac{\sum X_2}{n} + p \frac{\sum X_1 X_2}{n} + q \frac{\sum X_2^2}{n} \end{aligned} \tag{27}$$

es el número de grupos que hemos descompuesto las observaciones.

Las ecuaciones anteriroes son las denominadas normales para este ejemplo concreto.

4. El esquema necesario:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
X	Y	Y = Lg y	X_1 = Lg X	X_2 = lg(1 − x)	X_1^2	X_2^2	X_1 X_2	Y X_1	Y X_2

En general son 10 columnas que precisamos para este ajuste.

Las dos primeras columnas son: la X la variable $0 < X < 1$, y la Y la frecuencia observada. Son los datos o deducidos de los datos si la variable X se pone en frecuencias relativas.

Las restantes columnas se forman como indica la cabecera.

Las columnas 3.ª, 4.ª y 5.ª son los logaritmos neperianos de Y, de X y de $1 \leq X$.

Las restantes se obtienen a partir de las columnas 3.ª a la 5.ª.

Los totales divididos por el número de términos nos dan los valores necesarios que se sustituirán en la (27) para formar el sistema de ecuaciones.

5. Un ejercicio práctico resolverá las dudas existentes; ajustemos las (24) a los siguientes datos observados:

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Y	3	4	5	6	8	5	4	3	2

Formemos el esquema indicado en 4:

X	**Y**	**Y = Lg y**	**X_1 = Lg X**	**X_2 = Lg(1 − x)**
0,1	3	1,098612289	− 2,302585093	− 0,105360515
0,2	4	1,386294361	− 1,609437912	− 0,223143551
0,3	5	1,609437912	− 1,203972804	− 0,356674943
0,4	6	1,791759469	− 0,916290731	− 0,510825623
0,5	8	2,079441542	− 0,693147180	− 0,693147180
0,6	5	1,609437912	− 0,510825623	− 0,916290731
0,7	4	1,386294361	− 0,356674943	− 1,203972804
0,8	3	1,098612289	− 0,223143551	− 1,609437912
0,9	2	0,693147180	− 0,105360515	− 2,302585093
		12,753037320	− 7,9214383520	− 7,9214383520

Por la simetría respecto a 0,5 (en este caso concreto) de los datos facilitados las sumas de $X_1 = X_2$ y las $\sum X_1^2 = \sum X_2^2$, por lo que prescindimos de esta columna.

Prescindiendo de la columna $\sum X_2^2$, innecesaria para calcular las otras columnas, aunque es evidente necesitamos su valor para sustituirlo en la (27). Las restantes columnas son:

X_1^2	$X_1 X_2$	$Y X_1$	$Y X_2$
5,301898111	0,242601551	− 2,529648280	− 0,115750356
2,590290393	0,359135690	− 2,231154702	− 0,309342646
1,449550513	0,429426931	− 1,937719476	− 0,574046175
0,839588705	0,468064783	− 1,641772594	− 0,915276647
0,480453013	0,480453013	− 1,441359041	− 1,441359041
0,260942817	0,468064783	− 0,822142124	− 1,474713041
0,127217015	0,429426931	− 0,494456462	− 1,669060709
0,049793044	0,359135690	− 0,245148247	− 1,768148268
0,011100838	0,242601551	− 0,073030343	− 1,596030365
11,110834450	3,478910923	− 11,416431270	− 9,863727248

Los valores de la tabla hay que dividirlos por n (9 en este caso) y llevarlos a la (27), teniendo las siguientes ecuaciones normales:

$$1{,}417004147 = A - 0{,}880159816\ P - 0{,}880159816\ q$$
$$-1{,}268492363 = -0{,}880159816\ A + 1{,}234537161\ p + 0{,}3865456589$$
$$-1{,}095969694 = -0{,}880159816\ A + 0{,}386545658\ p + 1{,}2345371619$$

Resuelto el sistema, las constantes, son:

$$A = 3{,}011376656$$
$$p = 0{,}804004710$$
$$q = 1{,}00745327$$

Luego la (25') en este caso es:

$$Y = \lg y' = 3{,}011376656 + 0{,}804004710\ X_1 + 1{,}0074532$$

$$\boxed{y' = e^{3.011376656}\ x^{0.80400471}\ (1 - x)^{1.007455327}}$$

La constante $c = e^A$ puede ponerse $c = 20,31534793$.

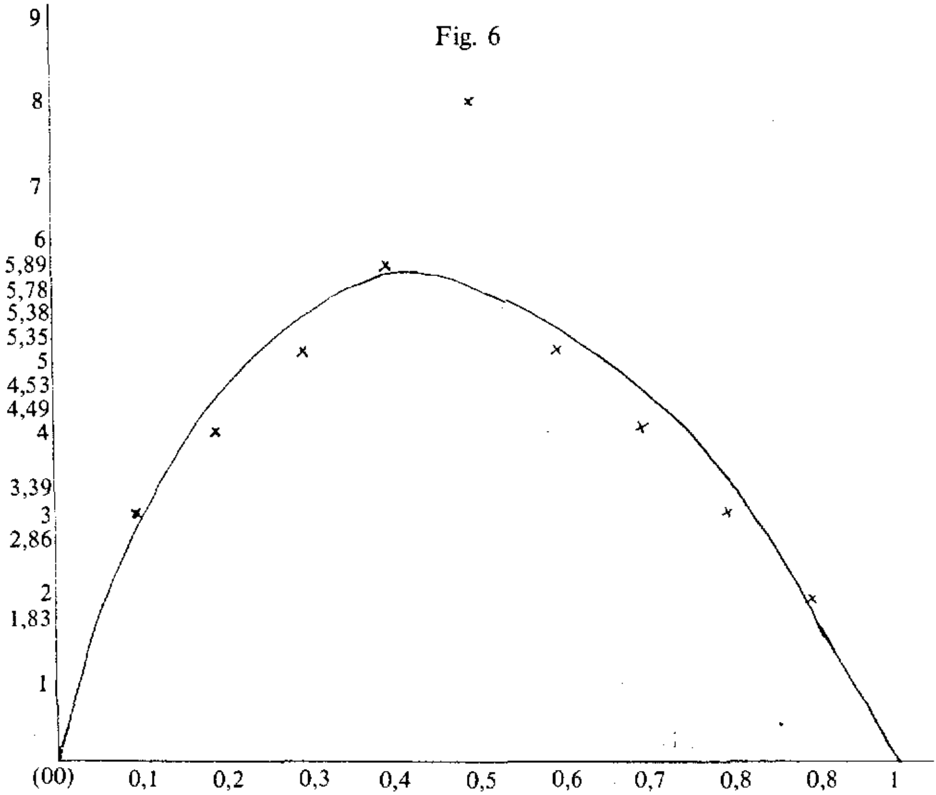


Fig. 6

Examinemos los valores teóricos y comparemos con los experimentales:

x	y	y'
0,1	3	2,8689
0,2	4	4,4485
0,3	5	5,3872
0,4	6	5,8928
0,5	8	5,7788
0,6	5	5,3524
0,7	4	4,5342
0,8	3	3,3552
0,9	2	1,8348

No comprobamos la bondad de este ajuste por no alargar este trabajo, pero el gráfico complementa esta información.

Los puntos con asterisco son los datos observados.

Finalizamos este artículo con estas ideas orientativas para una acertada planificación en el empleo de nuestro tiempo con el mayor acierto. No hemos descompuesto el tiempo en cada campo según indica la fórmula (1) por que nos extenderíamos demasiado, ni tampoco nos hemos ocupado de los aspectos jurídicos, fiscales, sociales, tan interesantes, que procuraremos escribir en otro momento algún artículo.