Algunos aspectos matemáticos de la selección de carteras

Por

ANTONIO PARDO-VIVERO LOPEZ

I have called this principle, by which each slight variation, if useful, is preserved, by the term of Natural Selection.

C. R. DARWIN.

¿Selección de qué..., cuando todo está moviéndose rápidamente?

A. DE V.

1. INTRODUCCION.

La aplicación de modelos matemáticos a la "Selección de carteras de valores mobiliarios", llevada a cabo por las grandes empresas y los inversores institucionales, es muy bien conocida. En términos generales, los modelos de Markowitz, Sharpe, Pepper, Hodges-Brealey, Clarkson y Cohen-Pogue son considerados por los administradores de Fondos de Inversión, agentes de Bolsa y gerentes de Fondos de Pensiones, al menos como armas adecuadas para ayudar el correspondiente proceso de toma de decisiones. De otro lado, el uso de las técnicas del "Matching" y de la "Inmunization", por los asegurados de Vida y Pensiones, es muy frecuente en el Reino Unido y en otros países del globo, incluso si sus bases teóricas no siempre son reconocidas por sus méritos que son altos. Existe un interesante artículo por P. G. Moore en el "Journal" del InstitutodeActuarios Ingleses (J. I. A.) —vol. 98, parte II, núm. 410— que constituye una muy buena introducción a los modelos de Markowitz, Sharpe y similares que, además, pueden ser analizados completamente en diferentes ejemplares de "Management Science", "Journal of Business" y "Journal of Finance". En lo que se refiere al "Matching" y a la "Inmunization", el artículo por F. M. Redington en el J. I. A. —volumen LXXVIII, part. III, núm. 350— constituye la mejor presentación que conocemos y, consecuentemente, se recomienda como una valiosa contribución en la materia.

De cualquier manera, todos estos modelos son modelos colectivos para Carteras en un mundo sin riesgo o, por el contrario, para Carteras bajo situaciones de riesgo. Los términos: n-activos, riesgo en términos de μ y σ, criterio de utilidad, etc., son claves para comprender los principios. Los modelos son, pues, modelos Estadísticos que presuponen conducta de masas y que consideran los gastos de inversión o colocación del dinero como algo sin importancia. Naturalmente, estos modelos colectivos son importantes; para los Aseguradores, en tanto que Inversores Institucionales; sin embargo, considerando también que son Intermediarios financieros, deben de tener presentes las actividades inversoras de las economías domésticas, porque sus recursos son generados por la acumulación de las consecuencias *correspondientes a decisiones individuales; la compresión de las conductas* individuales es, pues, de importancia primordial; tal conducta está condicionada por el costo de las transacciones que, a nivel individual, puede ser relativamente muy alto. Así que los temas de este artículo serán:

— Decisiones hechas por individuos con Capitales relativamente modestos; y,

— Costo de las transacciones para invertir.

La idea fundamental es la de considerar al asegurado de Vida y Pensiones como un Inversor, incluso si su conocimiento sobre la materia no es sofisticado. Además, suponemos que tal inversor es un individuo enemigo del riesgo, motivado por la Seguridad como su principal objetivo. Naturalmente, la tendencia actual en la Industria del Seguro es la del desarrollo de la venta según el "slogan": "El mayor rendimiento y sin riesgo", pero esta política está equivocada a largo plazo, pese a algunos buenos resultados de inmediato. El Seguro es Securitas (también en épocas de crisis) y el sentido común de los contratantes comprende este significado mejor que lo que presuponen los vendedores de cantidad a ultranza. De otra parte, cierto rendimiento y *seguro* son compatibles si la intención es otra que la de luchar —a corto plazo— contra las inversiones más especulativas.

Antes de hacer otras consider aciones es conveniente presentar un retrato concreto de los inversores individuales:

— Los individuos reciben algún ingreso, periódico y fijo, que les permite ahorrar un parte sobre sus necesidades de consumo;

— Poseen efectivo, saldos en cuenta y, probablemente, algunas acciones y obligaciones;

— En general, los problemas de liquidez corriente son bien conocidos por la gente y pueden ser programados con facilidad;

— Al menos una vez al mes, los individuos hacen su presupuesto, quizá al estilo de Monsieur Jourdain; y, por último, pero importante,

— Estos inversores, como enemigos del riesgo, son sensibles a un futuro Incierto.

Es evidente que los inversores individuales, en general, necesitan ser aconsejados por alguien que conoce las complejidades de los medios de inversión. Normalmente, para este propósito prefieren a los especialistas con despacho abierto (banqueros y agentes de bolsa), en contra de los visitadores, tales como los vendedores de fondos de inversión y los agentes de seguros. De hecho, el lado inversor del Seguro de Vida, no ha sido presentado tan seriamente como lo presentan los banqueros que reocmiendan, por ejemplo, la compra de obligaciones.

2. UN MODELO MUY ELEMENTAL

El modelo más simple de cartera puede concebirse como compuesto de dinero efectivo y bonos a un período. El problema consiste en determinar las proporciones de ambos medios, considerando la liquidez, el máximo rendimiento y los costos de las transacciones. Sea:

I = Fortuna total;
c_{t-1} = Consumo corriente;
c_t = Consumo un período más tarde;
x_b = Proporción a invertir en bonos; y,
i = Tasa de interés para el período.

Para empezar, el inversor puede comprar algunos bonos, $x_b \cdot I$, y guardar el saldo $(1-x_b)\cdot I$, en efectivo. Después de un período re cibirá:

$$(1+i)\cdot x_b \cdot I$$

A fines de consumo tiene:

$$c_{t-1}=(1-x_b)\cdot I \qquad \text{y} \qquad c_t=(1+i)\cdot x_b \cdot I$$

Considerando que:

$$x_b \cdot I = I - c_{t-1} = c_t \div (1+i),$$

podemos obtener una relación directa entre c_t y c_{t-1} llamada el "conjunto de oportunidades", como sigue:

$$c_t=(1+i)\cdot I-(1+i)\cdot c_{t-1},$$

que constituye una línea recta (locus) con pendiente: $-(1+i)$, desde $c_{t-1}=0$ hasta $c_t=0$.

En el intervalo existe un conjunto de puntos, $a\,(a_{t-1};\ a_t)$, dándonos posibilidades de elección en el gasto "hoy/mañana", cuya pendiente indica la pérdida futura de ingreso resultante de un incremento unitario en el consumo actual. Otra observación importante es que la elección sobre la recta indica la proporción colocada en bonos. Por ejemplo en $a(a_{t-1};\ a_t)$, la proporción puesta en bonos, x_b, es la razón de segmentos (longitud de a a $c_{t-1}=0$, dividida por la longitud de la línea entera desde $c_{t-1}=0$ hasta $c_t=0$).

Dependiendo de la naturaleza de las preferencias de los inversores, podemos dibujar un mapa con las "curvas de indiferencia" del inversor, sabiendo que la mayor parte de éstos hacen la elección alrededor de la mitad de la línea, con una tasa de sustitución: En términos generales, la pendiente de una "curva de indiferencia", $dc_t \div dc_{t-1}$ se conoce como *la tasa marginal* o el consumo futuro que está listo para ser sacrificado a cambio del aumento unitario en el consumo corriente.

3. EL TRIANGULO

Podemos introducir ahora una tercera posibilidad de inversión que parece muy buena y que puede funcionar muy bien... ¡o muy mal! Por ejemplo, las aciones especulativas tienen el encanto de todo lo que es una aventura vital y, dependiendo de la proporción es algo que, al menos una vez, todos deseamos experimentar.

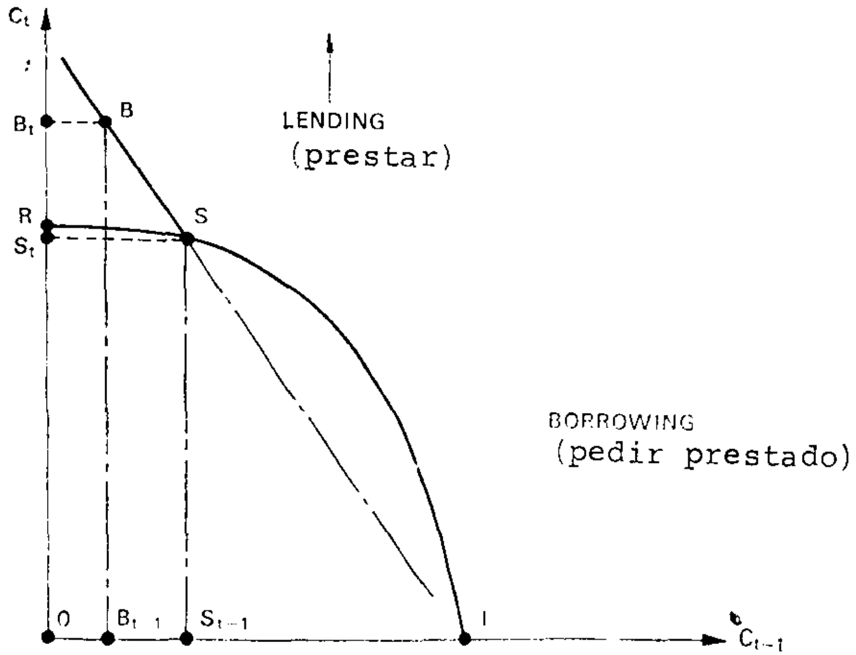
Supongamos que a nuestro inversor le gustaría comprar algunas acciones; como todos sabemos, no se promete un rendimiento fijo e, incluso, si la Teoría económica neoclásica es correcta, debemos de considerar rendimientos marginales decrecientes. Luego, nuestra recta o "locus de oportunidades" se convierte en una curva cóncava con pendiente:

$$dc_t \div d\,(I - c_{t-1}),$$

que constituye el "cambio en ingresos totales futuros, c_t, resultante de un cambio unitario en, $I - c_{t-1}$. Obviamente, empezando con efectivo y acciones nosotros también tenemos una elección óptima que viene dada por el punto donde la curva de indiferencia está en tangente con el locus de oportunidades "curvado". Suponiendo ahora que el inversor es hábil para comprar (o vender) obligaciones, esto significa que puede prestar (o pedir prestado) dinero a la "tasa de interés del mercado". ¿Cómo se incorporan estas operaciones dentro del locus de oportunidades "curvado"? Ya conocemos que la compra de bonos u obligaciones por $x_b \cdot I$, renta a su propietario $(1+i)\cdot x_b \cdot I$, en el período siguiente; de otro lado, hemos comprometido algún dinero en acciones con una elección óptima en el punto, digamos S; empezando en este punto y desplazándonos hacia la izquierda, podemos trazar una recta *con pendiente*: $-(1+i)$, *que es el locus de oportunidades* "rectilíneo", correspondiente al dinero comprando obligaciones.

Quizá es el momento de representar gráficamente todas estas observaciones, sumarizando el "menage à trois":

En esta gráfica:



IR = locus de oportunidades "curvado "para las acciones;

SB = locus de oportunidades "rectilíneo" para las obligaciones;

IS_{t-1} = dinero invertido en acciones;

$S_{t-1}B_{t-1}$ = dinero invertido en obligaciones;

$B_{t-1}O$ = dinero no comprometido; y,

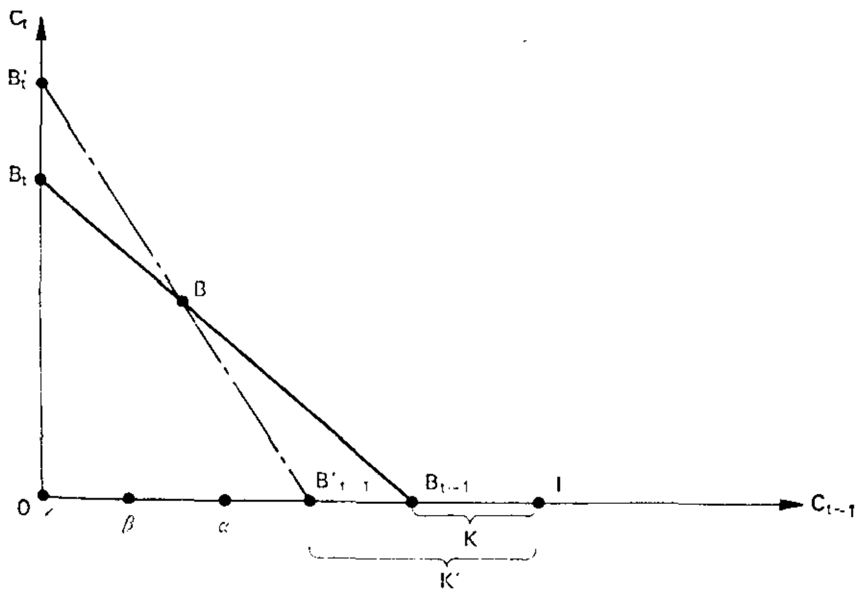
OB_t = ingresos totales durante el período.

Como se ha indicado, nuestro inversor tiene también la posibilidad de pedir presado, que está representada moviéndonos hacia la derecha desde el punto, S, a lo largo de la línea, SB, reduciendo así sus ingresos, durante el próximo período ,en $(1+i)$ por unidad.

Sobre esta gráfica podemos imaginar muchas "curvas de indiferencia", entre las cuales existe una proporcionando la mejor elección o el punto donde todo el mundo está satisfecho. El análisis de este asunto no entra en nuestros propósitos, porque nuestra hipótesis de base fue que los contratantes son muy buenos maridos y tienen excelentes esposas. Sin embargo, conviene resumir que nuestro inversor aventurero selecciona el punto sobre el locus de posibilidades "curvado", que le proporciona su más alta posibilidad de prestar (o pedir prestado); desde allí se traslada al punto que le lleva a la "curva de indiferencia" más alta que le es posible. Luego, cuando se hace intervenir el costo de las transaciones puede convenir al inversor el poseer varios tipos de activos, simultáneamente: Dinero en efectivo para el consumo corriente (¡y las oportunidades!); acciones que lo lleven a alguna parte en el futuro y obligaciones para trasladarle con *seguridad* más lejos, el período próximo.

4. NADA ES GRATIS EN ESTE MUNDO

Podemos adivinar que el costo de las transacciones tiene una influencia sobre la forma y posición de locus de oportunidades. Refiriéndonos a bonos, su compra conlleva un gasto de, digamos K. Esto significa que K unidades monetarias en efectivo deben ser deducidas, o que tenemos K unidades menos para invertir. Así el locus de oportunidades empieza ahora K unidades a la izquierda de I, pero su pendiente sigue siendo: $-(1+i)$. A fin de ver mejor este efecto, podemos considerar un segundo tipo de bono que conlleva una mayor tasa de interés, i', pero al precio de un más alto costo de la transacción, K'. Obviamente el nuevo locus de oportunidades empieza a la izquierda de ambas líneas rectas, como se observa en la gráfica que sigue:



Como podemos ver, $IB'_{t-1}=K'>K=IB_{t-1}$ y la pendiente de $B'_{t-1}B'_t$ es evidentemente mayor —en valor absoluto— que aquella de

$$B_{t-1}B_t: |-(1+i')|>|-(1+i)|$$

Las dos rectas se cortan en el punto, B, y es importante retener que $B_{t-1}B_t$ es la más alta de las dos a la derecha de B y la otra es la más alta a su izquierda: cuando se intersectan dos loci de oportunidades, uno de los cuales está por encima del otro para un valor dado de c_{t-1}, el más bajo nunca puede proporcionar una elección óptima. En nuestra gráfica podemos comprobar que con el mismo nivel de consumo corriente, $c_{-1}=\alpha 0$, el primer tipo de bono ofrece un mayor consumo futuro. De otra parte, si invertimos más, digamos $I\beta$, dejándonos con un ingreso corriente de $\beta 0$, el correspondiente nivel de $B'_{t-1}B'_t$ se convierte ahora en mayor. Así el locus eficiente o relevante es ahora,

$$B_{t-1}BB'_t$$

Resumiendo el punto, si el nivel de inversión es pequeño, compensará adquirir el bono con i, porque los ingresos totales del otro no bastan para compensar su costo de la transacción K'. Por el contrario, el bono con la tasa más alta se convierte en el más provechoso si la cantidad de capital a invertir es suficiente.

Estamos preparados ya para calcular la cartera óptima, bajo un conjunto de circunstancias que son relevantes para nuestro inversor. Sabemos que posee B_{t-1} unidades invertidas en bonos que rentan un ρ por ciento en la tasa de interés. Todo este dinero ha de estar disponible para financiar sus necesidades de consumo al final del período. La conversión puede hacerse de una sola vez o poco a poco. Cada vez que obtiene efectivo vende D unidades monetarias de bonos, incurriendo en un gasto por la transacción igual:

$$\lambda+\delta\cdot D$$

donde λ define un costo fijo independiente de la cantidad involucrada y δ es un gasto variable proporcional al tamaño de la venta de bonos. Definimos $\nu=B_{t-1}\div D$, como el número de ventas de bonos necesario para convertir el importe total B_{t-1}, en efectivo durante el período. La cartera óptima de efectivo-bonos en cualquier punto, se puede calcular valorando las ventajas e inconvenientes de cualquier valor particular de D.

Está claro que nuestro inversor ahorra gastos de transacciones, si convierte todos sus bonos en efectivo al comienzo del perído, haciendo un solo gasto por transacciones de

$$\lambda+\delta\cdot B_{t-1},$$

más bien que

$$\nu\cdot\lambda+\nu\cdot\delta\cdot D=\nu\cdot\lambda+\delta\cdot B_{t-1}$$

cuando $\nu\neq 1$.

También está claro que si procediese así perdería su potencial para ganar intereses. Operando suavemente y considerando el potencial de ganancias versus el corte de las transacciones, se puede encontrar un punto de equilibrio, como se verifica a continuación:

a) Obviamente, el costo total de las transacciones es:

$$\nu \cdot (\lambda + \delta \cdot D) = B_{t-1} \div D) \, ((\lambda + \delta \cdot D) = \lambda \cdot B_{t-1} \div D + \delta \cdot B_{t-1}$$

b) Las ganancias netas por interés son calculadas así: Tenemos B_{t-1} unidades en bonos; luego continuamos a rescatar porciones, hasta que la inversión es cero. De modo que la inversión en bonos empieza en $B_{t-1} - D$ y gradualmente descience a cero, con una inversión promedia en bonos de

$$0{,}5\,(B_{t-1} - D)$$

La ganancia periódica por interés que corresponde es:

$$0{,}5\,i(B_{t-1} - D)$$

c) El beneficio de la transacción total viene dado por,

$$\Delta = i \cdot B_{t-1} \div 2 - iD \div 2 - \lambda B_{t-1} \div \mathrm{D} - \delta \cdot B_{t-1}$$

Nuestra pregunta ahora es cómo calcular el valor óptimo de D que significa aquel maximizando Δ: La primera derivada de Δ respecto a D, igualada a cero, es nuestra respuesta. Así que

$$d\Delta \div d\Delta = -i \div 2 + \lambda B_{t-1} \div D^2 = 0, \text{ ó, } D = \sqrt{2\lambda B_{t-1} \div i}$$

De esta última expresión podemos deducir, al comienzo del X^0 período, cuál es el valor óptimo a mantener en forma de bonos:

$$B_{t-1} - X \cdot D = B_{t-1} - X \cdot \sqrt{2\lambda B_{t-1} \div i}$$

y en efectivo

$$(X \cdot D = X \cdot \sqrt{2\lambda B_{t-1} \div i})$$

Ya sabemos cómo determinar nuestra cartera óptima mediante el modelo simple. D es calculado a partir de tres parámetros conocidos del inversor, que se explican solos: si λ es alto se producirán rescates por montos relativamente altos; si el nivel de B_{t-1} es alto, mayor será el valor de cada rescate. Al contrario, cuanto mayor sea la tasa de interés, menor será el monto, D, rescatado cada vez.

Hacemos constar que el costo de las transacciones variable, δ, no entra en la ecuación de optimalidad y es irrelevante al valor óptimo de D. Es más interesante el sentido de la raíz cuadrada que aparece en D: El tamaño de los montos de rescate en efectivo, óptimos, *no* aumenta en proporción con B_{t-1}, el valor total de gasto ("Economías de Escala"); de hecho la explicación viene dada por la constancia de λ: *Cuando B_{t-1} es muy grande*, el peso de λ es despreciable y es posible incrementar la frecuencia de los rescates correspondientes, a fin de conservar el potencial de ganancias tan grande como sea posible. La conclusión es que cuando el volumen de los negocios se duplica, no es necesario doblar la cantidad de efectivo disponible y que el punto de vista del asegurador, como un inversor institucional no tiene por qué ser el mismo como los puntos de vista de quienes le dan su oportunidad de obrar.

5. CONCLUSION.

Podemos decir que los *modelos* para la selección de Carteras son importantes para el Asegurador —sobre todo el Asegurador de Vida—, pero pensamos que entre aquellos modelos los más importantes son los más simples, considerando los costos de las trasacciones y referidos a individuos que no buscan el riesgo. La razón principal es que, a fin de ser Inversor Institucional, es preciso convencer a una multitud de individuos para que ellos mismos sean inversionistas a través de las *coberturas* del Seguro de Vida. Según lo que nosotros sabemos, los Seguros Mixtos (y similares de Vida) no fueron todavía convenientemente explorados como vehículos para invertir, y, la mayor parte de los vendedores alrededor del mundo no insisten suficientemente sobre las ventajas como inversión de estos planes de ahorro-seguro.

Si neutralizamos el riesgo y consideramos el costo de las transacciones de los bonos y de las operaciones similares, los Seguros Mixtos mejoran su imagen considerablemente: De hecho, las ventajas fiscales pueden ser consideradas como un costo *positivo* que pone el locus de oportunidades a la derecha de I; de otro lado, el nivel de λ es relativamente bajo y aquel de $\mathfrak{z}$ podría ser reducido si, como es de esperar, el Seguro de Vida se vendiese como se venden las obligaciones por los banqueros. De cualquier modo, a largo plazo, el costo de las transacciones, en el Seguro de Vida, está por debajo del que corresponde a otros vehículos para invertir, sobre todo si consideramos que los préstamos sobre pólizas son una buena solución que evita la alta frecuencia de operaciones *definitivas* que cuestan dinero. Para mostrar todos estos aspectos y para comparar el Seguro de Vida con otros vehículos para la colocación de dinero, el *modelo simple*, tratado en este artículo, es esencial. Pensamos que el mismo puede ayudar a mejorar el producto que fue creado cuando las demás posibilidades de inversión no tenían su forma presente; además, es conveniente considerar que estos vehículos tienen algunos inconvenientes, que, curiosamente, no se mencionan frecuentemente, incluso por los Aseguradores. Un caso, que puede ser un ejemplo, es el coste de las transacciones, que nunca aparece en la comparación de productos; otro es el *tiempo*, que, en "cuestiones de intereses", es tan importante. Si analizamos los efectos de ambas causas utilizando el "Modelo Simple" para la Selección de Carteras, podremos verificar que el Seguro de Vida es una buena compra, equilibrando: *seguridad, liquidez* y *rendimiento*, todo ello a largo plazo, que es el *plazo* definiendo el producto.

RESUMEN

La Selección de Carteras es una de las cuestiones más importantes que interesan a los Aseguradores en tanto que Inversionistas Institucionales. Los modelos matemáticos de Markowitz, Sharpe y otros son muy bien conocidos; sin embargo, tales modelos son de tipo *estadístico* y, por lo tanto, no se aplican a los inversionistas individuales, que tienen muy limitada posibilidad de *diversificación* y que, en general, prefieren no correr riesgos. Estos últimos inversionistas constituyen el *Mercado* del Seguro de Vida y, consecuentemente, parece importante considerar su conducta individual, por cuanto la misma condiciona la actividad inversora de los Aseguradores.

Además, el costo de las transacciones es importante para los inviduos de las características de los asegurados. Un *modelo simple*, que considera opciones de inversión simples y alternadas versus el costo de las transacciones, es lo que se analiza en este artículo. Tal modelo podría ser usado para comparar el Seguro de Vida con otras fórmulas para colocar el dinero, además de servir como guía de los Aseguradores para adaptar sus productos al siempre cambiante Mercado de Capitales.

BIBLIOGRAFIA

KALMAN,J. COHEN y JERRY, A. POGUE: "An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio-Selection Models", *Journal of Business*, April 1967.

JACK HIRSHLEIFER: "On the Theory of the Optimal Investment Decision", *Journal of Political Economy*, August 1968.

H. MARKOWITZ: "Portfolio Selection: Efficient Diversification Investments", Wiley, 1959.

F. SHARPE: "A Simplified Model for Portfolio Analysis", *Management Science*, January 1963.

JAMES TOBIN: "The Theory of Portfolio Selection", *Readings on the Theory of Interest Rates*, MacMillan, 1965.