Aplicación de la ecuación de la hipérbola a la determinación abreviada del coste y tarificación del Seguro de Responsabilidad Civil de vehículos de Motor (1)

Por Antonio Lasheras-Sanz

INTRODUCCION

A juicio del autor, el procedimiento más propio para el cálculo de una tarifa de primas para seguros de Responsabilidad Civil, a efectos de la Ley de 24 de diciembre de 1962, que ha de entrar en pleno vigor en 1.º de enero de 1965, es el que responde e interpreta la ortodoxia en este orden de cuestiones y que fue el objeto de su ponencia al tema 5.º de los coloquios sobre dicha Ley, habidos en Madrid en octubre de 1963. Pero para salvar las dificultades momentáneas que la ejecución de aquél podría significar, ofrece en el presente trabajo otro accesorio basado en la hipótesis más o menos exacta de que la curva del fenómeno sigue la trayectoria de la rama positiva de la hipérbola, cosa prácticamente admisible dado que no se ha de operar solamente sobre puntos singulares de la curva teórica, sino sobre el conjunto de puntos del intervalo determinado por los casos de no siniestralidad (o de franquicia, en su caso) y de siniestralidad coincidente con la garantía máxima cubierta, con lo que queda cumplida la compensación de las incidencias que pudieran presentarse dentro del intervalo, hecho que, además, se compadece con la naturaleza compensatoria que es peculiar del Seguro.

---

(1) Publicado en la Revista de la Dirección General de Seguros, *Riesgo y Seguro*, tercer trimestre de 1964.

SUMARIO

I. Razón de este estudio.

En la Ponencia número 5 de los "Coloquios sobre el Seguro Obligatorio de Automóviles" desarrollado en Madrid en el mes de octubre de 1963, por causa de la Ley de 24 de diciembre de 1962, relativa al "Coste y tarificación del Seguro Obligatorio de Responsabilidad Civil de Vehículos de Motor", expusimos, como punto central de la misma, la forma de calcular con sentido actuarial, las primas correspondientes a dicho Seguro de Responsabilidad Civil, basándonos en las experiencias de todas las Entidades aseguradoras de esta clase de riesgos en España, reunibles en una "Oficina centralizadora de tarificación", en un a modo de estado recapitulativo y de exposición gradual de las diferentes cuantías de la siniestralidad de tal género satisfecha, con expresión de los respectivos números de casos en los que se produjera cada grado de siniestralidad, así como de los números de pólizas siniestradas y del total de las componentes de la "cartera de pólizas" que cubriesen dicho riesgo, referido todo a un lapso de tiempo de los cinco años más inmediatos o finalizado en la fecha en que se reúna dicha recolección estadística de los datos referidos, a fin de poder deducir el promedio anual del quinquenio, que nos proporcionase el a modo de "colectivo modelo" sobre el que poder operar (de orden análogo a lo que en el Seguro sobre la Vida humana significan las "tablas" de sobrevivencia y mortalidad).

Con tales datos, expuestos o expresados en términos generales, formamos la serie sencilla "teórica" representativa del fenómeno, de la que pasábamos a su correspondiente acumulativa que ajustábamos para volver a deducir de ella la curva simple de frecuencias relativas del fenómeno convenientemente ajustada, tomando como variable independiente las cuantías, relativas graduales de siniestralidad que la integran, respecto a una garantía máxima asegurada, para un colectivo de vehículos homogéneos o admitidos como tales conforme al conjunto de circunstancias consideradas como determinantes de esa homogeneidad (clase de vehículo, marca, tipo, potencia, utilización, etc.).

El ajuste antedicho y su derivación a la fórmula correspondiente interpretativa de la serie simple "modelo" del fenómeno, nos permitió establecer la fórmula para determinar la prima *ad hoc*, básica de la comercial a aplicar, habida cuenta de las circunstancias a considerar para adaptarlas, además, a la nueva realidad creada por la Ley antes citada.

Pero algunos de nuestros más allegados colaboradores, en el orden docente, expertos aseguradores y conocedores de la situación española en el ambiente del Seguro de Responsabilidad Civil de Automóviles, nos hicieron apreciar ciertas dificultades que, por lo menos de tiempo, podrían oponerse a la aportación de las estadísticas necesarias que permitiesen calcular unas tarifas de primas para ser aplicables al comienzo de la vigencia de la Ley que ésta tenía señalado en aquellos momentos. Otros nos observaron que la traza de la curva simple del fenómeno podía no ser la que en la citada Ponencia habíamos supuesto; hubo quienes trataron de hacernos ver la conveniencia de que las Entidades aseguradoras con experiencia inspiradora de un suficiente grado de confianza pudieran establecer tarifas de primas propias en vez de acomodarse a las uniformes resultantes de la reunión de la experiencia puesta en común de todas las operantes en España, a fin de evitar los peligros que pudiera reportar en algún momento esa uniformidad; y por fin, los hubo que opusieron otras diferentes apreciaciones. Por esto, y en nuestro deseo de atender en lo más que nos fuera posible tantas sugestiones debidas al buen propósito de ayudarnos a seguir considerando la cuestión, nos decidimos a continuar el estudio a través del mayor tiempo de que podríamos disponer para ello, por no tener la limitación que nos impuso la fijeza de fechas preestablecidas en el caso de los coloquios.

El resultado, pues, de nuestro nuevo estudio es lo que exponemos a continuación.

II. Forma de la función adoptada para la traza del fenómeno.

En nuestro anterior trabajo del que éste es un complemento y no una sustitución, aceptamos hipotéticamente que la curva natural del fenómeno respondía a la traza de la rama positiva de la hipérbola, y la seguimos aceptando ahora porque la curva que interpreta la realidad de la trayectoria del fenómeno debe ser indudablemente de tendencia decreciente, bien por corresponderle ciertamente la traza antedicha, o por ser parabólica decreciente convexa o, incluso, porque, aun teniendo alguna incidencia de máximos y mínimos intermedios, circunstancial y transitoriamente podemos tomarla como regular decreciente, ya que dentro de esta idea, la mayor siniestralidad acusada en algunos puntos intermedios, supondrá no más que un descargo de ella en otros, anteriores, posteriores o de ambas clases, lo que podrá pasar inadvertido a los efectos económicos, dado que la prima no se contraerá, salvo algún rarísimo caso que consideramos inverosímil, a la siniestralidad correspondiente a un punto singular dado, sino a lo concerniente a todos los puntos del amplio intervalo comprendido entre los puntos correspondientes a las mínimas y máximas siniestralidades indemnizables. Puede suceder, no obstante, que por la rigidez impuesta por la forma de la curva, no quede rigurosamente recogida en el volumen total de la siniestralidad "teórica" resultante, toda la siniestralidad real, pero más adelante nos referiremos a cómo efectuar la corrección correspondiente si es que se hace necesaria, así como poner de relieve la existencia o no de esa necesidad. Todo esto y el que adoptando la traza de la rama positiva de la hipérbola nos es suficiente un reducido número de elementos o datos, en vez de una farragosa estadística, constituye las razones que nos han reafirmado en nuestra anterior decisión.

Por consiguiente, si en la fórmula de la hipérbola,

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

atribuimos a z la significación de una cierta cuantía de daños entre vehículos de la clase x, y a y la del número de siniestros de esa cuantía, y expresando por N_x el número de vehículos de esa clase observados, podemos reproducir la anterior fórmula adecuadamente adaptada, como sigue:

$$\frac{z^2_x : N^2_x}{a^2_x} - \frac{m^2_{z_x} : N_x}{b^2_x} = \frac{1}{N_x}$$

de donde:

$$m^2_{z_x} = \frac{b^2_x}{a^2_x} z^2_x - a^2_x$$

III. VALORES DE LOS PARÁMETROS a_x Y b_x.

Dado que los parámetros son dos, tomaremos dos pares de valores cómodamente cognoscibles:

g_x, o cuantía mínima de indemnización atendible en cada siniestro, que valdrá *cero* cuando no exista franquicia;

m_{g_x}, o número de casos en las que se ha producido y/o indemnizada (aceptada) dicha cuantía mínima;

G_x, garantía máxima convenida entre asegurado y asegurador, y

m_{g_x}, los casos en que se ha satisfecho esa garantía máxima.

Con estas condiciones, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$m^2_{g_x} = \frac{b^2_x}{a^2_x} g^2_x - b^2_x$$

$$m^2_{G_x} = \frac{b^2}{a^2_x} G^2_x - b^2_x$$

que permite obtener, para a_x y b_x las siguientes soluciones:

$$a^2_x = \frac{m^2_{g_x} \cdot G^2_x - m^2_{G_x} \cdot g^2_x}{m^2_{g_x} - m^2_{G_x}}$$

y

$$b^2_x = \frac{m^2_{g_x} \cdot G^2_x - m^2_{G_x} \cdot g^2_x}{G^2_x - g^2_x}$$

Si aquí fuese $g_x = o$, m_{gx} se convertiría en $m_{x,o}$, que significa el número de pólizas no siniestradas (porque, en absoluto, no hayan sufrido siniestro, porque no lo hayan denunciado o porque el asegurado lo haya rechazado definitivamente). En su consecuencia, se tendrá:

$$a^2_x = \frac{m^2_{x,o}}{m^2_{x,o} - m^2_{G_x}} G_x > G_x$$

y

$$b^2_x = m^2_{g_x}$$

No sucediendo así, los valores de a^2_x y b^2_x dependerán del de m_{g_x} y del de g_x, pudiendo llegar a ser negativos si $m^2_{g_x}$ no es lo suficientemente mayor que $m^2_{G_x}$ para evitarlo.

De todos modos, de las anteriores expresiones generales de a^2_x y b^2_x, se desprende que son:

a^2_x = un valor intermedio entre G^2_x y g^2_x, o sea, $G^2_x > \Upsilon^2_x > > g^2_x$

b_r^2 = análogamente, valor intermedio entre $m^2_{g_x}$ y m^2_G y lo más probable $m^2_{g_x} > \mu^2_x > m^2_{G_x}$.

IV. Siniestralidad teórica.

Obtenidas las expresiones explícitas de los valores de los parámetros a_x y b_x, en función de los datos empíricos antes utilizados, vamos a tratar de obtener las expresiones de las frecuencias individuales y totales absolutas de la siniestralidad, para lo cual, y dando ya por conocidos los valores de los parámetros, volveremos a partir de la expresión singular:

$$m^2_x = \frac{b^2_x}{a^2_x} z^2_x - b^2_x$$

$$= b^2_x \frac{z^2_x}{a^2_x} - 1 = b^2_x(\xi^2 - 1)$$

$$= b^2_x(\xi - t)$$

después de unos convenientes cambios de variables, haciendo $\xi = \frac{z}{a}$ y $\sqrt{\xi^2 - 1} = \xi - t$.

En su consecuencia, resultan:

$$t = \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \quad y \quad \xi^2 - 1 = (\xi - t)^2$$

de donde:

$$2\xi t - t^2 = 1, \quad \xi = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

y

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{4t^2 - 2(t^2 + 1)}{4t^2} = \frac{t^2 - 1}{2t^2}$$

lo que permite obtener:

$$\sqrt{\xi^2 - 1} = \sqrt{\frac{(t^2 + 1)^2}{4t^2} - 1} = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

Así, pues:

$$b \int \sqrt{\xi^2 - 1}\, d\xi = b \int \frac{t^2 - 1}{2t} \cdot \frac{t^2 - 1}{2t^2} \cdot dt =$$

$$= \frac{b}{4}\int (t - 2t^{-1} + t^{-3})dt$$

$$= \frac{b}{4}\left[\int t \cdot dt - 2\int \frac{dt}{t} + \int t^{-3}dt\right]$$

$$= \frac{b}{4}\left[\frac{t^2}{2} - 2 \log_e t - \frac{1}{2t^2}\right]$$

$$= \frac{b}{8}\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) - \frac{b}{2} \log_e t$$

De lo que acabamos de ver, también se desprende que:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{\xi^2 - (\xi^2 - 1)}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} =$$

$$= \frac{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}] \cdot [\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1}$$

y también:

$$t^2 - \frac{1}{t^2} = (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^2 - (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^2 = - 4\xi \sqrt{\xi^2 - 1}$$

y como, según hemos hecho antes, $\xi = \frac{z}{a}$,

$$- 4\xi \sqrt{\xi^2 - 1} = - 4 \frac{z}{a} \sqrt{z^2 - a^2}$$

Por todo ello

$$\frac{b}{a}\int \sqrt{z^2 - a^2 \cdot dz} = \frac{b}{8}\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) - \frac{b}{2}\log_e t$$

$$= -\frac{b}{2a}\left[\frac{z}{4a}\sqrt{z^2 - a^2} + \log_e (z - \sqrt{z^2 - a})^2\right]$$

y tomando esta integral entre los límites y y G, se tiene:

$$-\frac{b_x}{2a_x}\left\{\frac{G_x}{4a_x}\sqrt{G^2_x - a^2_x} - \frac{g_x}{4a_x}\sqrt{g^2_x - a^2_x} + \right.$$

$$\left. + a_x \log_e \frac{G_x - \sqrt{G^2_x - a^2_x}}{g_x - \sqrt{g^2_x - a^2_x}}\right\}$$

expresión en la que aparece $\sqrt{g^2_x - a^2_x}$ que, como es $g < a$, es imaginaria, pero que luego nos ocuparemos de ella, pues, como también aparece en la sección siguiente, nos ocuparemos de ella de una vez para ambas secciones.

Dividiendo el anterior número por el de unidades de sujetos de riesgo conforme a lo que se dice en la Sección VIII, tendremos la probabilidad total de un siniestro comprendido entre g_x y G_x.

V. Coste teórico de la siniestralidad teórica.

Pasemos ahora a obtener la expresión del coste teórico de la siniestralidad asimismo teórica, que resulta del adecuado manejo de los elementos empíreos conocidos y del condicionamiento que impone la fórmula de la hipérbola, al amparo de la expresión:

$$z_x \cdot m_{z_x} = z_x \frac{b_x}{a_x}\sqrt{x^2_x - a^2_x}$$

teniendo en cuenta que m_{z_x} es la frecuencia absoluta correspondiente a una cuantía de siniestralidad z_x y que estas cuantías, en la escala de su ordenación gradual racional, se diferencian, entre cada dos consecutivas, en un infinitésimo, como sucede, por consiguiente, con las frecuencias respectivas. Por tanto, la expresión de la siniestralidad global teórica es:

$$\int_{g_x}^{G_x} z_x \cdot m_z \cdot d\, z_x = \frac{b_x}{a_x} \int_{g_x}^{G_x} z_x \sqrt{z^2{}_x - a^2{}_x}\, d\, z_x$$

donde continuamos y continuaremos empleando las notaciones generales de a y b, y además, para lo sucesivo, suprimiremos el subíndice x porque no va a hacernos más que complicar y se sobreentiende, por lo dicho anteriormente, que los valores de a y b serán distintos para cada clase que hayamos establecido con los vehículos observados.

Así, pues, todo queda reducido, fundamentalmente, a efectuar la integración indefinida de $z \sqrt{z^2 - a^2}\, d\, z$. Y para ello, haciendo, en la fórmula general de la integración por partes:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du, \quad u = z \quad y \quad dv = \sqrt{z^2 - a^2}\, dz$$

de donde:

$$v = -\left[\frac{z}{8a} \sqrt{z^2 - a^2} + \frac{1}{} \log_e \left(z - \sqrt{z^2 - a^2}\right) \right]$$

tendremos:

$$\int z \sqrt{z^2 - a^2} \cdot dz =$$

$$= -\left[\frac{z^2}{8a} \sqrt{z^2 - a^2} + \frac{z}{2} \log_e \left(z - \sqrt{z^2 - a^2}\right) \right] +$$

$$+\int\left[\frac{z}{8a}\sqrt{z^2-a^2}+\frac{1}{2}\log_e\left(z-\sqrt{z^2-a^2}\right)\right]dz$$

$$=\left(1+\frac{1}{8a}+\frac{1}{(8a)^2}+\dots\right)$$

$$\left[\frac{z^2}{8a}\sqrt{z^2-a^2}+\frac{z}{2}\log_e\left(z-\sqrt{z^2-a^2}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{8a}+\frac{1}{(8a)^2}+\dots\right)\int\log_e\left(z-\sqrt{z^2-a^2}\right)dz$$

$$=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\simeq=\frac{8a}{8a-1}\left[\frac{z^2}{8a}\sqrt{z^2-a^2}+\frac{z}{2}\log_e\left(z-\sqrt{z^2-a^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{8a}{2(8a-1)}\int\log_e\left(z-\sqrt{z^2-a^2}\right)dz$$

por ser las series entre paréntesis de razón $\frac{1}{8a} < 1$ e indefinidas.

Pero aquí se plantea un nuevo problema matemático, que es el de $\int \log_e (z - \sqrt{z^2 - a^2})\, dz$, la que intentada por varios procedimientos, y en particular por la fórmula de Bernoulli para el desarrollo en serie de una integral, tiende a ∞, por ser $z > 1$. Se hace preciso, pues, acudir a un *subterfugio* para hallar una expresión del valor finito de la misma. Y para ello, observemos que:

$$\int_g^G \log_e\left(z-\sqrt{z^2-a^2}\right)dz=\left[\int\log_e\left(z-\sqrt{z^2-a^2}\right)dz\right]^G$$

$$=\int\log_e\left(G-\sqrt{G^2-a^2}\right)dG-\int\log_e\left(g-\sqrt{g^2-a^2}\right)dg$$

dado que, en definitiva, g y G son variables, lo que nos presenta a la integral como:

$$= \infty - \infty$$

Y como minuendo y sustraendo de la diferencia entre integrales son sendas funciones de las formas respectivas $f(G)$ y $f(g)$, podemos hacer:

$$f(G) - f(g) = \infty - \infty$$

$$= \frac{f(G) \cdot f(g)}{f(G) \cdot f(g)} \left[f(G) - f(g) \right] = f(G) \cdot f(g) \frac{f(G) - f(g)}{f(G) \cdot f(g)}$$

$$= \frac{\dfrac{f(G) - f(g)}{f(G) \cdot f(g)}}{\dfrac{1}{f(G) \cdot f(g)}} = \frac{\dfrac{1}{f(g)} - \dfrac{1}{f(G)}}{\dfrac{1}{f(G) \cdot f(g)}} = \frac{0}{0} = \frac{f'(G)}{f'(g)}$$

$$= \frac{d \int \log_e (G - \sqrt{G^2 - a^2})\, dG}{d \int \log_e (g - \sqrt{g^2 - a^2})\, dg} = \frac{\log_e (G - \sqrt{G^2 - a^2})}{\log_e (g - \sqrt{g^2 - a^2})}$$

lo que nos da un valor que entendemos aceptable, para dicha integral.

Pasando también a los límites en la primera parte de la expresión de la integral a que hemos llegado, podemos escribir, por fin, después de reducir los términos susceptibles de ello:

$$\int_{g_x}^{G_x} z \sqrt{z^2 - g^2} \cdot dz =$$

$$= \frac{8a_x}{8a_x - 1} \left\{ \frac{1}{8a_x} \left[G^2_x \sqrt{G^2_x - a^2_x} - g^2_x \sqrt{g^2_x - a^2_x} \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \log_e \frac{(G_x - \sqrt{G^2_x - a^2_x})^{E_n}}{(g_x - \sqrt{g^2_x - a^2_x})^{e_x}} +$$

$$\left. + \; 4a_x \frac{\log_e (G_x - \sqrt{G^2_x - a^2_x})}{\log_e (g_x - \sqrt{g^2_x - a^2_x})} \right\}$$

VI. Expresiones complejas (imaginarias) que se presentan y razón de su interpretación como reales.

En las dos últimas secciones han surgido unas expresiones de la forma $\sqrt{g^2 - a^2}$ que, dado el que, por lo visto en III ($G > a > g$), resultan imaginarias, es necesario buscar sus expresiones homólogas equivalentes en campo real, a fin de evitar la inadaptación a la realidad de cuanto hasta aquí hemos logrado obtener. Vamos, pues, a ver cómo:

1.°) Dado, pues, que $a > g$, resulta ser $\sqrt{g^2 - a^2} = \sqrt{-D}$, que podemos seguir haciendo $= \sqrt{4\delta^2} = 2\sqrt{-1\delta}$, no sirviéndonos del convenio admitido en la matemática, de expresar por i a la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$, por eludir la confusión que podría producirse en algún caso, ya que, en la matemática financiera y, por tanto, en la del Seguro, por i se expresa el tanto unitario de interés anual.

2.°) Para nuestra comodidad operatoria, hagamos $\sqrt{g^2 - a^2} = \alpha - \beta = (\gamma + \sqrt{-1\delta}) - (\gamma - \sqrt{-1\delta})$, como consecuencia de sumar y restar γ a $2\sqrt{-1\delta}$, con lo que el número de soluciones es infinito, pues siempre puede haber un par de expresiones complejas conjugadas cuya diferencia sea $2\sqrt{-1\delta} = \alpha - \beta$ y, por consiguiente, $\alpha + \beta = 2\gamma$.

3.°) Después de dicho esto, recordemos el teorema que dice que "la recta que pasa por dos puntos imaginarios conjugados, es real", cuya demostración es:

Dados dos puntos imaginarios conjugados tales que:

$$P_1\left[(\alpha_1 = \gamma + \sqrt{-1\delta}), (\alpha_2 = \xi + \sqrt{-1\delta})\right]$$

$$P_2\left[(\beta_1 = \gamma - \sqrt{-1\delta}), (\beta_2 = \xi - \sqrt{-1\delta})\right]$$

de donde se desprende:

$$x = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1) = \gamma \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta^2) = \xi$$

y, como sabemos que una expresión de la ecuación de la recta, en función de dos de sus puntos, es:

$$y - \alpha_2 = \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}(x - \alpha_1)$$

sustituyendo α_1, α_2, β_1 y β_2 por sus expresiones imaginarias respectivas anteriores, resulta:

$$y - (\xi + \sqrt{-1\delta}) =$$

$$= \frac{(\xi + \sqrt{-1\delta}) - (\xi - \sqrt{-1\delta})}{(\gamma + \sqrt{-1\delta}) - (\gamma - \sqrt{-1\delta})}[x - (\gamma + \sqrt{-1\delta}] =$$

$$= \frac{2\sqrt{-1\delta}}{2\sqrt{-1\delta}}[x - (\gamma + \sqrt{-1\delta})]$$

por lo que:

$$y = x - (\gamma + \sqrt{-1\delta}) + (\xi + \sqrt{-1\delta}) = x - (\gamma - \xi)$$

en donde no intervienen más que las partes reales de las anteriores expresiones imaginarias.

4.º) Ahora bien, del teorema que acabamos de recordar adaptado a nuestro caso, se desprende como corolario que "si la recta que pasa por dos puntos imaginarios conjugados es real, todos sus puntos son reales, *incluso los dos tenidos por imaginarios* por que pasa, puesto que pertenecen al conjunto de sus puntos".

5.º) Pero, para nuestro problema a resolver, sólo nos interesan los valores de las abscisas de los dos puntos de referencia, y la diferencia entre ellas. Y a fin de obtenerlas, volvamos a $\sqrt{g^2 - a^2} = \sqrt{-(a^2 - g^2)} = \sqrt{-1}\ \sqrt{a^2 - g^2}$, donde observamos que es: $\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(+1)}$, o sea, la media geométrica entre -1 y $+1$, concepto que coincide con la interpretación geométrica de las expresiones imaginarias. Por tanto, podemos escribir:

$$\sqrt{-1}\ \sqrt{a^2 - g^2} = \sqrt{(-1)(+1)}\ \sqrt{a^2 - g^2} =$$

$$= \sqrt{(-1)(+1)(a^2 - g^2)} =$$

$$= \sqrt{[(-1)\sqrt{a^2 - g^2}] \cdot [(+1)\sqrt{a^2 - g^2}]} =$$

$$= \sqrt[4]{[(-1)\sqrt{a^2 - g^2}]^2 \cdot [(-1)\sqrt{a^2 - g^2}]^2} =$$

$$= \sqrt[4]{(a^2 - g^2)(a^2 - g^2)} = \sqrt[4]{(a^2 - g^2)^2} = \sqrt{a^2 - g^2}$$

donde, desde luego, sabemos que, al elevar al cuadrado la expresión subradical, aunque multipliquemos, correlativamente, por 2 el índice de la raíz cuadrada, por operar en campo imaginario, hemos ampliado el campo de posibilidades, del que tomamos, no todas, sino las que nos convienen, lo que hacemos amparados en el corolario que se desprende del teorema recordado.

6.º) El razonamiento último podíamos haberlo reemplazado por el siguiente:

$$\sqrt{g^2 - a^2} = \sqrt[4]{(g^2 - a^2)^2} = \sqrt[4]{g^4 - 2a^2g^2 + a^2} =$$

$$= \sqrt[4]{a^2 - 2a^2g^2 + g^2} = \sqrt{a^2 - g^2}$$

7.º) Una hasta cierto punto comprobación de lo que acabamos de ver la encontramos en el siguiente razonamiento, que es similar del anterior:

$$\sqrt{g^2 - a^2} = \sqrt{(-1\,(a^2 - g^2)} = \sqrt{-1}\,\sqrt{a^2 - g^2} =$$

$$= \sqrt{(-1)\,(+1)\,(a^2 - g^2)} =$$

$$= \sqrt{(-\sqrt{a^2 - g^2})\,(+\sqrt{a^2 - g^2})} = \sqrt[4]{(\sqrt{a^2 - g^2})^2\,(\sqrt{a^2 - g^2})^2} =$$

$$= \sqrt[4]{(a^2 - g^2)\,(a^2 - g^2)} = \sqrt[4]{(a^2 - g^2)^2} = \sqrt{a^2 - g^2}$$

8.º) Por lo expuesto, en las expresiones finales de las secciones IV y V, tomaremos $\sqrt{g^2 - a^2} \equiv \sqrt{a^2 - g^2}$, decisión que no tiene más importancia que la de salir de un "impass", por lo que luego veremos en la sección VII. Con ello, nos quedan en definitiva y respectivamente en:

$$\frac{b_x}{a_x}\int_{g_x}^{G_x}\sqrt{z^2 - a^2_x}\cdot dz = \frac{b_x}{a_x}\left\{\frac{G_x}{4a_x}\sqrt{G^2 - a^2_x} -\right.$$

$$\left. - \frac{g_x}{4a_x}\sqrt{a^2_x - g^2_x} + a_x \log_e \frac{G_x - \sqrt{G^2_x - a^2_x}}{g_x - \sqrt{a^2_x - g^2_x}}\right\}$$

y:

$$b_x\int_{g_x}^{G_x} z_x\sqrt{z^2 - a^2_x}\cdot dz_x =$$

$$= \frac{1}{8a^x - 1}\left\{\frac{1}{a_x}\left[G_x\sqrt{G^2_x - a^2_x} - g^2_x\sqrt{a^2_x - g^2_x}\right] +\right.$$

$$+ \frac{1}{16}\log_e \frac{(G_x - \sqrt{G^2_x - a^2_x})^{G_x}}{(g_x - \sqrt{a^2_x - g^2_x})^{x}} +$$

$$+ \frac{a_x}{2} \quad \frac{\log_e (G_x - \sqrt{G^2_x - a^2_x})}{\log_e (g_x - \sqrt{a^2_x - g^2_x})} \Bigg\}$$

Los errores que pueden cometerse por razón de la anterior equivalencia aceptada, como puede apreciarse a simple vista, quedan, en gran parte compensados.

9.º) Sólo nos falta advertir que, en el caso de que no haya franquicia, será $g_x = o$ y los términos en que entra tendrán uno u otro valor según su forma de intervenir. Así, $g_x \sqrt{a^2_x - g^2_x}$ será nulo, y lo mismo el término semejante en el que intervenga g^2_x; y los otros términos de ambas expresiones en cuyos denominadores entra, tomará respectivamente los valores de o e ∞, por lo que las fracciones cuyos denominadores constituye, serán asimismo y respectivamente ∞ y o, por lo que las correspondientes expresiones serán:

$$\log_e \frac{G_x - \sqrt{G^2_x - a^2_x}}{o} = \log_e \infty$$

por lo que:

$$\log_e (G_x - \sqrt{G^2_x - a^2_x}) = \log_e \frac{\infty}{o} = \infty - \infty$$

similarmente para:

$$\log_e \frac{(G_x - \sqrt{G^2_x - a^2_x})^{G_x}}{(g_x - \sqrt{a^2_x - g^2_x})^{g_x}}$$

y:

$$\frac{\log_e (G_x - \sqrt{G^2_x - a^2_x})}{-\infty} = o$$

por lo que, en este caso:

$$\log_e (G_x - \sqrt{G^2_x - a^2_x}) = o \cdot \infty$$

Como la expresión indeterminada $o \cdot \infty$ puede ser convertida en $\frac{o}{o}$, tanto para ésta como para $\infty - \infty$, ya hemos visto en V cómo determinar las expresiones de sus respectivos verdaderos valores.

Sin embargo, entendemos preferible hacer $g_x = o$ en las respectivas expresiones finales de las secciones IV y V, y luego, tratar $\sqrt{-a^2_x}$ de la misma forma que hemos hecho con $\sqrt{g^2_x - a^2_x} = \sqrt{-D_x}$ en ésta.

VII. Ajuste de la siniestralidad teórica calculada a la real habida.

La expresión que queda expuesta al final de la inmediata anterior sección VI expresa un volumen de siniestralidad teórica en función explícita de la garantía máxima y de la franquicia establecidas para una cierta clase de vehículos reunidas en ella por homogeneidad de ciertas circunstancias previamente fijadas que en dichos vehículos concurran, y en función implícita de los números de casos en los que se han satisfecho indemnizaciones de aquellas cuantías, conforme al rígido comportamiento que impone la ecuación de la rama positiva de la hipérbola; pero esa siniestralidad teórica, referida, desde luego, a un año o a un promedio anual de un quinquenio, puede coincidir o no con la siniestralidad real habida en igual tiempo entre los vehículos asegurados de la clase de referencia, siendo lo más probable que no haya esa coincidencia entre ambas siniestralidades. Por ello, se hace necesario un reajuste de adaptación de la siniestralidad teórica a la real.

Para efectuar dicho reajuste, lo primero que hace falta es acomodar la siniestralidad real, poniéndola en condiciones para la debida comparación, pues no es suficiente tomar la siniestralidad habida en un ejercicio económico real o promedio, porque esta siniestralidad proviene de seguros cuya anualidad de cobertura de su respectivo riesgo no coincide con la del ejercicio económico en que aquélla haya tenido lugar, y además, los números de pólizas varían del comienzo al final de ese ejercicio económico, por lo que es indispensable arreglar las cosas para que puedan corresponderse con la coincidencia que requiere la teoría matemática del Seguro en cuanto a las respectivas unidades de riesgo, siniestro y tiempo, que deben guardar una exacta correspondencia biunívoca.

A tal fin, y por lo que concierne a un ejercicio económico determinado, la cifra que habrá que tomar como elemento de comparación será la que resulte de la suma algebraica siguiente:

1.° Reservas del ejercicio anterior para siniestros pendientes de liquidación y/o pago, más

2.° Siniestralidad pagada en el ejercicio actual, menos

3.° Reservas para siniestros pendientes de liquidación y/o pago al final de este ejercicio.

A esta suma la representaremos por S_r, como significación de siniestralidad real, similarmente a la S_t anterior representativa de la siniestralidad teórica.

El cociente:

$$\frac{S_r}{S_t} = \tau \gtrless 1$$

será el que habrá que aplicar a S_t para reducirlo a S_r.

Si, en lugar de a un año solamente, se hace referencia a un intervalo quinquenal, los datos antedichos deberán corresponder, respectivamente, al ejercicio anterior al del primero del quinquenio, a este intervalo (en cuanto a los siniestros pagados) y al último año del mismo, tomando, para S_r, la quinta parte de la suma algebraica correspondiente.

VIII. El tipo de primas.

En cuanto antecede, nos hemos referido a la siniestralidad global, no a la relativa por póliza. Para traducirla al promedio por póliza y unidad de garantía máxima asegurada, habrá que determinar el número computable de pólizas y respectivas sumas máximas aseguradas, a cuyo efecto, nos apoyaremos en la teoría de la cuenta corriente.

En su consecuencia, y refiriéndonos, en primer término, al número de sujetos de riesgo, al principio del año o del quinquenio, en su caso, contaremos con un número inicial, $N_{x,r}$, de sujetos de riesgo de la clase x. Durante el intervalo de tiempo a que se extienda la observación, habrá sendos números de entradas y de salidas de sujetos de riesgo en seguro u observación, de forma que, en las entradas, se producirán n, que estarán bajo nuestra observación un tiempo t_1, que será el que vaya desde el momento del ingreso de los n_1, hasta el final del intervalo de observación (independientemente de que abandonen el seguro antes, porque este hecho se tendrá en cuenta al computar las salidas); n_2, por un tiempo t_2, y así sucesivamente. En cuanto a las ceses en seguro, habrá m_1 sujetos de riesgo para los que representaremos por k_1 el tiempo que va desde el momento de su salida hasta el final del intervalo de observación; m_2 con un tiempo k_2, y así sucesivamente también. Por consiguiente, representando por T el total tiempo a que se extiende esa observación, tendremos:

$$N_{x,r} \cdot T + \sum_{h=1} n_h \cdot t_h - k \sum m_j \cdot k_j$$

que expresa el tiempo que han sido observados todos los sujetos de riesgo cuyo riesgo ha sido cubierto por el asegurador durante el intervalo de observación. El número de sujetos de riesgo observados será:

$$N_{x,r} + \sum_{h=1} n_h - \sum m_j = N_{x,r+1}$$

que representa el número de sujetos de riesgo en seguro vivo al final del intervalo de observación, o sea, que:

$$N_{x,r+1} - N_{x,r} = \sum_{h=1} n_h - \sum m_j .$$

Ahora bien, en la expresión en la que hemos incluido el cómputo de los tiempos durante los que han sido observados todos los sujetos de riesgo asegurados, podemos tomar unos tiempos medios tales que sean:

$$T\ N_{x,r} + t \sum_{h=1} n_h - k \sum m_j$$

donde puede suceder que sean $t \gtrless k$; y si los números $\Sigma\ n_n$ y $\Sigma\ m_j$ son lo suficientemente numerosos para ello, prácticamente podrán tomarse $t = k = \mu$, de lo que resulta:

$$T\,N_{x,r} + M\left(\sum_{h=1} n_h - \sum_{j=1} m_j\right)$$

que, *considerando* las entradas y salidas distribuidas uniformemente durante el intervalo de la observación, nos permitirá admitir que sea $\mu = \frac{1}{2}$ T, por lo que, el tiempo observado respecto a todos los sujetos de riesgo asegurados será:

$$T\left[N_{x,r} + \frac{1}{2}\left(\sum_{h=1} n_h - \sum_{j=1} m_j\right)\right]$$

Ahora bien:

$$N_{x,r} + \frac{1}{2}\left(\sum_{h=1} n_h - \sum_{j=1} m_j\right)$$

teniendo en cuenta que, como hemos escrito antes, es:

$$N_{x,r+1} = N_{x,0} + \sum_{h=1} n_h - \sum_{j=1} m_j$$

tendremos que el número de sujetos de riesgo de entre los que ha provenido la siniestralidad será:

$$T\left[N_{x,r} + \frac{1}{2}\left(N_{x,r+1} - N_{x,r}\right)\right] = \frac{1}{2}\,T(N_{x,r} + N_{x,r+1})$$

donde, si el período de observación es el año, T valdrá 1, y si es T = 5, como habrá que reducir el resultado de la observación al promedio anual del quinquenio, será: $\frac{1}{5}$ T = 1.

Análogamente sucederá con el total de sumas máximas aseguradas, con lo que, si la garantía la representamos —como ya lo hemos hecho— por G_x, tendremos:

$$\frac{1}{2} G_x(N_{x,r} + N_{x,r+1})$$

Finalmente, dividiendo la siniestralidad real por esta última expresión, tendremos el tipo unitario de prima, cuya expresión es:

$$P_{G_x}, g_x = \frac{S_t \cdot \tau}{\frac{1}{2} G_x(N_{x,r} + N_{x,r+1})}$$

En todas las demás cuestiones a que cabe hacer referencia aquí, no nos extendemos en más consideraciones porque, siendo este estudio, ampliatorio del que constituyo nuestra al principio referida ponencia, complementario de algunas cuestiones y suplementario de otras, a aquél remitimos al lector, a fin de no incurrir aquí en repeticiones innecesarias. Y de todas formas, como va dirigido a actuarios, éstos con la debida preparación que su título les acredita, sabrán interpretar adecuadamente.