Expresión matemática del pleno en los Seguros de Vida

Por **D. José María de Echeverría,**
Actuario de La Unión y El Fénix Español.

INTRODUCCION

Las Compañías de Seguros pueden compararse, desde el punto de vista matemático, a los banqueros de las casas de juego y los asegurados a jugadores que depositen sus apuestas en las cajas de las Compañías.

Si se trata de un juego equitativo el jugador más rico es el que más probabilidades tiene de arruinar a su contrario, y en particular aquel que juegue contra un adversario de fortuna ilimitada tiene la certeza absoluta de su ruina.

Así, pues, si un asegurador considera el seguro como una operación equitativa, es decir, con igual esperanza matemática para ambas partes, y se conforma, por lo tanto, con exigir a sus clientes el importe de las primas puras calculadas de acuerdo con este principio, se arruinará forzosamente al no poder disponer de recursos:

1.º—Para pagar los gastos que precisa la gestión y el desenvolvimiento de su empresa, y

2.º—Para garantizarse de las posibles diferencias que acusen los hechos reales con los previstos.

Por lo cual, para que una Compañía de Seguros no se arruine, ha de exigir a sus asegurados una prima recargada superior a la pura, para que sus compromisos sean inferiores a su esperanza matemática y lograr de esta forma que la probabilidad de obtener un beneficio tienda a la unidad cuando el número de contratos crezca indefinidamente.

Buscando estos resultados, las Compañías de Seguros sobre la Vida recargan la prima pura con los llamados gastos de administración para obtener así la de inventario y ésta a su vez la recargan con los gastos de gestión para llegar a la comercial o de tarifa.

Puede admitirse que estos últimos recargos, que engloban los de producción y cobranza, representan una suma proporcional a la prima y que su importe se retrae de ella en el momento mismo de su cobro, cualquiera que sea la suerte futura del contrato. Aun en el caso de que las comisiones que abone una Compañía superen en algunos momentos al importe de estos recargos, encontrará su compensación en el encaje con el Reaseguro, beneficio de capitalización, derechos de registro, etc., con lo que resulta que el verdadero ingreso que debemos considerar para este estudio lo constituye la prima de inventario, con cuyos recargos, después de cubrir los gastos generales y garantizarse contra toda eventualidad, puede obtener un beneficio.

Así, pues, esta será la que empleemos, y como quiera que el riesgo fundamental de una cartera lo constituyen los seguros en caso de muerte, hemos limitado el presente trabajo a las combinaciones de Vida Entera y Seguro Mixto, no solamente por ser dos categorías tipo en esta clase de seguros, sino también por constituir por sí solas el núcleo básico de contratación en las Compañías dedicadas a la explotación de esta Rama del Seguro.

PRIMERA PARTE

BENEFICIO PROBABLE DE UNA CARTERA

I

SEGUROS A VIDA ENTERA.

1.—Seguros a Vida Entera a prima única.

Supongamos S contratos diferentes a Vida Entera sobre S cabezas de una misma edad x concertados a prima única y que $p_1, p_2, \ldots$ son las probabilidades de que en los momentos 1, 2, ... obtenga la Compañía contratante en cada operación un beneficio de valor actual $\beta_1, \beta_2, \ldots$

Para determinar la probabilidad de obtener un beneficio total de valor actual B partiremos de la fórmula:

$$P_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{l^2}{2\,npq}} \qquad [1]$$

que representa la probabilidad de obtener en n pruebas una desviación $\pm l$ con respecto al valor más probable np.

Teniendo en cuenta que en el presente caso

$$pq = \Sigma p_i \, \beta_i \times \Sigma q_i \, \beta_i = \Sigma p_i \, \beta_i^2 - \Sigma p_i^2 \, \beta_i^2$$

y haciendo

$$a_i = \Sigma p_i \, \beta_i^2$$

$$b_i = \Sigma p_i \, \beta_i$$

tendremos:

$$p\,q = a - b^2$$

$$n\,p\,q = \Sigma (a - b^2)$$

$$l = B - \Sigma b$$

que nos transforma [1] en

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\Sigma(a-b^2)}} \, e^{-\frac{(B-\Sigma b)^2}{2\Sigma(a-b^2)}} \qquad [2]$$

Esta probabilidad será máxima para la obtención de un beneficio probable B cuando éste sea la suma de los beneficios probables de cada contrato, pues entonces, al ser $B = \Sigma b$ el exponente de e sería nulo.

Si hacemos variar B entre $\Sigma b + l$ y $\Sigma b - l$ e integramos la expresión [2] entre $+l$ y $-l$, tendremos:

$$\Pi = \int_{-l}^{+l} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\Sigma(a-b^2)}} \, e^{-\frac{h^2}{2\Sigma(a-b^2)}} \, dh$$

donde si hacemos

$$t = \frac{h}{\sqrt{2\Sigma(a-b^2)}}$$

llegamos a la expresión

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} \, dt = \Theta(t) \qquad [3]$$

Siendo $\Theta(t)$ la probabilidad de cometer un error absoluto comprendido entre $+t\sqrt{2\Sigma(a-b^2)}$ y $-t\sqrt{2\Sigma(a-b^2)}$.

Esta función $\Theta(t)$ adquiere valores sensiblemente iguales a la unidad para valores muy bajos de t, de tal forma, que si tomamos

$$\Theta\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}997$$

obtenemos la certeza moral de que el beneficio de la Compañía esté comprendido entre

$$\Sigma\, b \pm 3\sqrt{\Sigma(a-b^2)} \qquad [4]$$

quedando el problema reducido a la determinación de los valores

$$\Sigma\, b \;;\quad \Sigma\, b^2 \;;\quad \Sigma\, a$$

Supongamos que $c_1, c_2, \ldots$ son los capitales de los s contratos supuestos y que

$$\bar{A}_x = -\int_0^\infty \frac{l'_{x+t}}{l_x} v^t\, dt = 1 - \delta\, \bar{a}_x$$

es la prima única pura correspondiente al capital unitario en la edad x calculada al tipo de interés continuo δ.

Llamando ε al recargo y $\bar{a}_x$ a la anualidad continua para la edad x, tendremos que la prima de inventario será para el capital c_i

$$(\bar{A}_x + \varepsilon\, \bar{a}_x)\, c_i \quad .$$

El beneficio $\beta_i(t)$ que en cada contrato se puede obtener en el momento t vendrá representado por la diferencia entre el valor actual del capital a satisfacer en aquel momento, es decir, descontado por el tiempo t y el valor de la prima única recibida como precio del riesgo:

$$\beta_i(t) = (\bar{A}_x + \varepsilon\, \bar{a}_x)\, c_i - (1+i)^{-t} c_i$$

Si designamos por $p(t)\, dt$ a la probabilidad de realización de un beneficio $\beta_i(t)$ en cada contrato en el momento

$$p(t)\, dt = -\frac{l'_{x+t}}{l_x}\, dt$$

representará la probabilidad de que muera x en el intervalo t, $t + dt$ y tendremos

$$b_i = \int_0^\infty p(t)\, \beta_i(t)\, dt$$

$$a_i = \int_0^\infty p(t)\, \beta_i^2(t)\, dt$$

donde sustituyendo $\beta_i(t)$ por su valor, nos quedará

$$b_i = (\bar{A}_x + \varepsilon\, \bar{a}_x)\, c_i \int_0^\infty p(t)\, dt - c_i \int_0^\infty p(t)\, (1+i)^{-t}\, dt$$

y como

$$\int_0^\infty p(t)\, dt = 1$$

$$\int_0^\infty p(t)\, (1+i)^{-t} dt = \bar{A}_x$$

resulta

$$b_i = c_i\, \varepsilon\, \bar{a}_x$$

y por lo tanto

$$\Sigma\, b = \varepsilon\, \bar{a}_x\, \Sigma\, c_i$$

$$\Sigma\, b^2 = \varepsilon^2\, \bar{a}_x^2\, \Sigma_i^2$$

Para el valor de a_i tendremos:

$$a_i = \int_0^\infty p(t) \Big[(\bar{A}_x + \varepsilon\, \bar{a}_x)\, c_i - (1+i)^{-t}\, c_i \Big]^2 =$$

$$= (\bar{A}_x + \varepsilon\, \bar{a}_x)^2\, c_i^2 - 2\, (\bar{A}_x + \varepsilon\, \bar{a}_x)\, c_i^2\, \bar{A}_x + c_i^2\, \bar{A}_x^{(j)} = c_i^2 \left(\varepsilon^2\, \bar{a}_x^2 + \bar{A}_x^{(j)} - \bar{A}_x^2\right)$$

siendo

$$\bar{A}_x^{(j)} = \int_0^\infty p(t)\, (1+i)^{-2t}\, dt$$

es decir, la prima única pura del capital unitario calculada al tipo de interés

$$j = i\,(2+i) \quad \text{pues entonces} \quad (1+j)^{-t} = (1+i)^{-2t}$$

Tendremos, por tanto, que

$$\Sigma\, a = \Sigma\, c_i^2 \left(\varepsilon^2\, \bar{a}_x^2 + \bar{A}_x^{(j)} - \bar{A}_x^2\right)$$

y por consiguiente

$$\Sigma (a - b^2) = \left(\bar{A}_x^{(j)} - \bar{A}_x^2\right) \Sigma c_i^2$$

donde la expresión $\left(\bar{A}_x^{(j)} - \bar{A}_x^2\right)$ es el cuadrado del riesgo medio cuadrático, pues si

$$M(\bar{A}_x) = \sqrt{\int_0^\infty p\ (t)\ (\bar{A}_x - v^{-t})^2\, dt}$$

será

$$M^2(\bar{A}_x) = \bar{A}_x^2 - 2\,\bar{A}_x^2 + \bar{A}_x^{(j)} = \left(\bar{A}_x^{(j)} - \bar{A}_x^2\right)$$

Luego, en definitiva, sustituyendo valores en [4], tendremos

$$\varepsilon\, \bar{a}_x\, \Sigma\, c_i \pm 3 \sqrt{M^2\ (\bar{A}_x)\, \Sigma\, c_i^2} \qquad [5]$$

que son los límites entre los que estará comprendido el beneficio de la Compañía.

Si en vez de operar con la prima de inventario lo hacemos con la pura, demostraremos que la Compañía no solamente no obtiene beneficio, sino que forzosamente ha de arruinarse.

Tendríamos entonces que el beneficio $\beta_i\ (t)$ sería:

$$\beta_i\ (t) = \bar{A}_x\ c_i - (1 + i)^{-t}\, c_i$$

luego

$$b_i = \int_0^\infty p\ (t)\ [\bar{A}_x\ c_i - (1 + i)^{-t}\, c_i\ ]\, dt = 0$$

lo que es completamente lógico, pues al operar a prima pura, el seguro es equitativo, y su valor medio lineal, representado por b_i, ha de ser forzosamente nulo.

No ocurre igual con el valor a_i, que sería:

$$a_i = \int_0^\infty p\ (t)\ [\bar{A}_x\ c_i - (1 + i)^{-t}\, c_i\ ]^2\, dt = c_i^2\, M^2\ (\bar{A}_x)$$

y por lo tanto

$$3 \sqrt{\Sigma (a - b^2)} = 3 \sqrt{\Sigma\, a} = 3 \sqrt{M^2 (\bar{A}_x)\ \Sigma\, c_i^2}$$

2.—Seguros a Vida Entera a primas continuas.

Supongamos los mismos contratos del caso anterior pero concertados a primas continuas, y designemos por $\overline{P}_i$ al valor de la prima continua de inventario correspondiente al capital c_i.

Su valor actual será:

$$\overline{P}_i \, \bar{a}_x = c_i \, (\bar{A}_x + \varepsilon \, \bar{a}_x)$$

En este caso, el beneficio que se puede obtener en el momento t vendrá representado por la diferencia entre el valor actual del capital a satisfacer en aquella época y el valor actual de todos los pagos continuos recaudados por la Compañía hasta entonces.

$$\beta_i(t) = \int_0^t \overline{P}_i \, (1+i)^{-y} \, dy - (1+i)^{-t} c_i$$

y si designamos por $p(t)\,dt$ a la probabilidad de realización del beneficio $\beta_i(t)$ en el momento t, tendremos:

$$b_i = \int_0^\infty p(t)\,dt \int_0^t \overline{P}_i \, (1+i)^{-y} \, dy - c_i \int_0^\infty p(t)\,(1+i)^{-t} \, dt$$

y como

$$\overline{P}_i \int_0^t (1+i)^{-y} \, dy = \overline{P}_i \left[- \frac{(1+i)^{-y}}{l.(1+i)} \right]_0^t = - \frac{\overline{P}_i}{l.(1+i)} \left[(1+i)^{-t} - 1 \right]$$

tendremos

$$b_i = \overline{P}_i \, \frac{1 - \bar{A}_x}{l.(1+i)} - c_i \, \bar{A}_x$$

Del valor

$$\bar{A}_x = 1 - \bar{a}_x \, l.(1+i)$$

obtenemos

$$l.(1+i) = \frac{1 - \bar{A}_x}{\bar{a}_x}$$

que nos transforma el valor de b_i en

$$b_i = \overline{P}_i \, \bar{a}_x - c_i \, \bar{A}_x = c_i \, \varepsilon \, \bar{a}_x$$

y, por tanto,

$$\Sigma b_i = \varepsilon \bar{a}_x \Sigma c_i$$

El valor de a_i será igual a

$$a_i = \int_0^\infty p(t)\left[\int_0^t \overline{P}_i (1+i)^{-y} dy - (1+i)^{-t} c_i\right]^2 dt =$$

$$= \int_0^\infty p(t)\left[\frac{-\overline{P}_i}{l.(1+i)}\left[(1+i)^{-t}-1\right] - (1+i)^{-t} c_i\right]^2 dt =$$

$$= \frac{\overline{P}_i^2 \bar{A}_x^{(j)}}{l^2(1+i)} - \frac{2\overline{P}_i \bar{A}_x}{l^2(1+i)} + \frac{\overline{P}_i^2}{l^2(1+i)} + \frac{2c_i \overline{P}_i \bar{A}_x^{(j)}}{l.(1+i)} - \frac{2c_i \overline{P}_i \bar{A}_x}{l.(1+i)} + c_i^2 \bar{A}_x^{(j)}$$

Mas como

$$\frac{\overline{P}_i}{l.(1+i)} = \frac{(\bar{A}_x + \varepsilon \bar{a}_x) c_i}{1-\bar{A}_x}$$

sustituyendo tendremos

$$a_i = \frac{(\bar{A}_x + \varepsilon \bar{a}_x)^2 c_i^2 \bar{A}_x^{(j)}}{(1-\bar{A}_x)^2} - \frac{2(\bar{A}_x + \varepsilon \bar{a}_x)^2 c_i^2 \bar{A}_x}{(1-\bar{A}_x)^2} + \frac{(\bar{A}_x + \varepsilon \bar{a}_x)^2 c_i^2}{(1-\bar{A}_x)^2} +$$

$$+ \frac{2(\bar{A}_x + \varepsilon \bar{a}_x) c_i^2 \bar{A}_x^{(j)}}{(1-\bar{A}_x)} - \frac{2(\bar{A}_x + \varepsilon \bar{a}_x) c_i^2 \bar{A}_x}{1-\bar{A}_x} + c_i^2 \bar{A}_x^{(j)} =$$

$$= c_i^2 \bar{A}_x^{(j)} \left[\frac{(1-\bar{A}_x) + (\bar{A}_x + \varepsilon \bar{a}_x)}{1-\bar{A}_x}\right]^2 +$$

$$+ \frac{c_i^2 (\bar{A}_x + \varepsilon \bar{a}_x)\left[(\bar{A}_x + \varepsilon \bar{a}_x) - 2(\bar{A}_x + \varepsilon \bar{a}_x)\bar{A}_x - 2\bar{A}_x + 2 A_x^2\right]}{(1-\bar{A}_x)^2}$$

$$= c_i^2 \bar{A}_x^{(j)} \left[\frac{1+\varepsilon \bar{a}_x}{1-\bar{A}_x}\right]^2 + c_i \frac{\varepsilon^2 \bar{a}_x^2 - \bar{A}_x^2 - 2\bar{A}_x^2 \varepsilon \bar{a}_x - 2\bar{A}_x \varepsilon^2 \bar{a}_x^2}{(1-\bar{A}_x)^2}$$

Como

$$b_i^2 = \varepsilon^2 \bar{a}_x^2 c_i^2$$

obtendremos

$$a - b^2 = (1 + \varepsilon \bar{a}_x)^2 c_i^2 \frac{(\bar{A}_x^{(j)} - \bar{A}_x^2)}{(1-\bar{A}_x)^2} \qquad [6]$$

donde si hacemos

$$H_x = 1 + \varepsilon \bar{a}_x$$

como

$$\frac{(\bar{A}_x^{(j)} - \bar{A}_x^2)}{(1-\bar{A}_x)^2} = M^2(P_x)$$

es decir el cuadrado del riesgo medio cuadrático correspondiente al seguro contratado a prima continua, ya que

$$M(P_x) = \sqrt{\int_0^\infty p(t)\left[\int_0^t \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}(1+\quad{}^{-y}\,dy - (1+i)^{-t}\right]^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\int_0^\infty p(t)\left[-\frac{\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}\left[(1+i)^{-t} - 1\right] - (1+i)^{-t}\right]^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{\bar{A}^2{}_x}{(1-\bar{A}_x)^2}\int_0^\infty p(t)\,dt - \frac{2\,\bar{A}_x}{(1-\bar{A}_x)^2}\int_0^\infty p(t)\,dt + \frac{1}{(1-\bar{A}_x)^2}\int_0^\infty p(t)(1+i)^{-2t}dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{\bar{A}_x^{(j)} - \bar{A}_x^2}{(1-\bar{A}_x)^2}}$$

Podemos obtener de [6]

$$\Sigma(a - b^2) = H_x^2\, M^2(P_x)\, \Sigma c_i^2$$

luego la expresión [4] se transforma en

$$\varepsilon\, \bar{a}_x\, \Sigma\, c_i \pm 3\sqrt{H_x^2\, M^2(P_x)\ \Sigma\, c_i^2} \qquad [7]$$

que representa los valores máximos entre los que puede variar el beneficio probable de una serie de contratos de Vida Entera a primas continuas que descansen sobre cabezas de una misma edad.

3.—Generalización en el caso de edades diferentes.

Supongamos S_1 contratos de Vida Entera a primas continuas sobre cabezas de edad x; S_2 contratos sobre cabezas de edad y; etc.

Para los S_1 contratos primeros se cumplirá

$$\Sigma\, b_1 = \varepsilon\, \bar{a}_x\, \Sigma\, c_1$$

Para los S_2 contratos de la edad y, tendremos

$$\Sigma\, b_2 = \varepsilon\, \bar{a}_y\, \Sigma\, c_2$$

. . . .

. . . .

obteniendo, por tanto,

$$\Sigma\, b_1^2 = \varepsilon\,[\bar{a}_x\, \Sigma\, c_1 + \bar{a}_y\, \Sigma\, c_2 + \cdots]$$

Del mismo modo

$$\Sigma\left(a_1 - b_1^2\right) = H_x^2\ M^2\,(P_x)\,\Sigma\, c_1^2$$

$$\Sigma\left(a_2 - b_2^2\right) = H_y^2\ M^2\,(P_y)\,\Sigma\, c_2^2$$

....

....

y, por lo tanto,

$$\Sigma\,(a - b^2) = H_x^2\ M^2\,(P_x)\,\Sigma\, c_1^2 + H_y^2\, M^2 (P_y)\,\Sigma\, c_2^2 + \cdots$$

con lo cual la expresión [4] se nos transforma en

$$\varepsilon\,[\,\bar{a}_x\, \Sigma\ c_1 + \bar{a}_y\, \Sigma\, c_2 + \cdots\,] = 3\sqrt{[\,H_x^2 M^2 (P_x)\,\Sigma\ c_1^2 + H_y^2 M^2\,(P_y)\,\Sigma\, c_2^2 + \cdots]} \quad [8]$$

que representa los límites de oscilación del beneficio de la cartera.

II

Seguros Mixtos.

1.—Seguros Mixtos a prima única.

Si una Compañía garantizase a un asegurado el pago del capital de un Seguro Vida Entera en el momento n anterior al fallecimiento, tendría que exigirle, además de la prima del Vida Entera, la correspondiente a una Renta Diferida n años de un importe igual al interés δ del capital, para compensarse del pago adelantado del mismo.

Así, pues, la prima única de un Seguro Mixto sobre una cabeza de edad x y por un plazo n, puede considerarse establecida como sigue:

$$\bar{A}_{x\,\overline{n|}} = \bar{A}_x + {}_n/\,\bar{a}_x\,\delta = 1 - \delta\,(\bar{a}_x - {}_nE_x\ \bar{a}_{x+n}) = 1 - \delta\,\bar{a}_{x\,\overline{n|}}$$

donde $\bar{a}_{x\,\overline{n|}}$ es la anualidad continua temporal referida a la edad x y plazo n.

Supongamos ahora que c_1, c_2, ... c_s son los capitales de s Seguros Mixtos a prima única sobre s cabezas de una misma edad x y por una duración de n.

La prima de inventario sería:

$$(\bar{A}_{x\,\overline{n|}} + \varepsilon\,\bar{a}_{x\,\overline{n|}})\,c_i$$

El beneficio $\beta_i\,(t)$ que en cada contrato se puede obtener en el momento t, vendrá representado por:

$$\beta_i\,(t) = \left[[\bar{A}_{x\,\overline{n|}} + \varepsilon\,\bar{a}_{x\,\overline{n|}}] - (1+i)^{-t}\right]c_i$$

Si designamos por p (t) dt a la probabilidad de realización de dicho beneficio en cada contrato, siendo

$$p\,(t)\,dt = -\,\frac{l'_{x+t}}{l_x}\,dt$$

probabilidad de que x muera en el intervalo t, $t + dt$, tendremos

$$b_i = \int_0^n p\,(t)\,\beta_i(t)\,dt$$

$$a_i = \int_0^n p\,(t)\beta^2\,(t)\,dt$$

Si después de sustituir $\beta_i\,(t)$ por su valor continuamos operando mediante el mismo proceso empleado al tratar el Seguro Vida Entera a prima única, llegaremos a obtener los valores

$$\Sigma\,b = \bar{\varepsilon}\;\bar{a}_{x\,\overline{n|}}\,\Sigma\,c_i$$

$$\Sigma\,b^2 = \varepsilon^2\,\bar{a}^2_{x\,\overline{n|}}\,\Sigma\,c_i^2$$

$$\Sigma\,a = (\varepsilon^2\,\bar{a}^2_{x\,\overline{n|}} + \bar{A}^{(j)}_{x\,\overline{n|}} - \bar{A}^2_{x\,\overline{n|}})\,\Sigma\,c_i^2$$

$$\Sigma\,(a - b^2) = (\bar{A}^{(j)}_{x\,\overline{n|}} - \bar{A}^2_{x\,\overline{n|}})\,\Sigma\,c_i^2$$

pues la relación

$$\int_0^n p\,(t)\,dt = 1$$

se verifica con sólo considerar al Seguro Mixto como un seguro de muerte sobre la cabeza de un individuo sometido a una Ley de Supervivencia, tal que

$$l'_x = l_x\;;\quad l'_{x+1} = l_{x+1}\;;\;\ldots\ldots\;;\quad l'_{x+n-1} = l_{x+n-1}\;;\quad l'_{x+n} = 0$$

y, por lo tanto, también podemos hacer

$$(\bar{A}_x^{(j)} - \bar{A}_{x\,\overline{n|}}^2) = M^2 (\bar{A}_{x\,\overline{n|}})$$

Llevando a [4] todos los valores obtenidos, tendremos:

$$\varepsilon\, \bar{a}_{x\,\overline{n|}}\, \Sigma c_i \pm 3 \sqrt{M^2 (A_{x\,\overline{n|}})\, \Sigma c_i^2} \qquad [9]$$

que representa los límites de oscilación del beneficio probable de la cartera estudiada y guarda perfecta analogía con la expresión [5] correspondiente al Seguro Vida Entera a prima única.

2.—Seguros Mixtos a primas continuas.

Supongamos el mismo caso anterior contratados los seguros a primas continuas y designemos por $\bar{P}_{i\,\overline{n|}}$ el valor de la prima continua de inventario correspondiente al contrato de capital.

Su valor actual será

$$\bar{P}_{i\,\overline{n|}}\, \bar{a}_{x\,\overline{n|}} = (\bar{A}_{x\,\overline{n|}} + \varepsilon\, \bar{a}_{x\,\overline{n|}})\, c_i$$

El beneficio $\beta_i(t)$ que se puede obtener en cada contrato en el momento t, vendrá representado por:

$$\beta_i(t) = \int_0^t \bar{P}_{i\,\overline{n|}} (1+i)^{-y}\, dy - (1+i)^{-t} c_i$$

y si $p(t)\,dt$ es la probabilidad de realizarlo, tendremos:

$$b_i = \int_0^n p(t)\, \beta_i(t)\, dt = \varepsilon\, \bar{a}_{x\,\overline{n|}}\, c_i$$

$$a_i = \int_0^n p(t)\, \beta_i^2(t)\, dt = c_i^2\, \bar{A}_{x\,\overline{n|}}^{(j)} \left[\frac{1+\varepsilon \bar{a}_{x\,\overline{n|}}}{1-\bar{A}_{x\,\overline{n|}}} \right]^2 +$$

$$+ c_i^2 \frac{\varepsilon^2 \bar{a}_{x\,\overline{n|}}^2 - \bar{A}_{x\,\overline{n|}}^2 - 2\bar{A}_{x\,\overline{n|}}^2\, \varepsilon \bar{a}_{x\,\overline{n|}} - 2\bar{A}_{x\,\overline{n|}}\, \varepsilon^2 \bar{a}_{x\,\overline{n|}}^2}{(1-\bar{A}_{x\,\overline{n|}})^2}$$

con solo operar en igual forma que en el Seguro Vida Entera a primas continuas.

Luego:

$$(a - b^2) = (1 + \varepsilon\, \bar{a}_{x\,\overline{n|}})^2\, c_i^2\, \frac{(\bar{A}^{(j)}_{x\,\overline{n|}} - \bar{A}^2_{x\,\overline{n|}})}{(1 - \bar{A}_{x\,\overline{n|}})^2}$$

y haciendo

$$1 + \varepsilon\, \bar{a}_{x\,\overline{n|}} = H_{x\,\overline{n|}}$$

$$\frac{(\bar{A}^{(j)}_{x\,\overline{n|}} - \bar{A}^2_{x\,\overline{n|}})}{(1 - \bar{A}_{x\,\overline{n|}})^2} = M^2 (P_{x\,\overline{n|}})$$

llegamos a transformar [4] en

$$\varepsilon\, \bar{a}_{x\,\overline{n|}}\, \Sigma\, c_i \pm 3 \sqrt{H^2_{x\,\overline{n|}}\, M^2 (P_{x\,\overline{n|}})\, \Sigma\, c_i^2} \qquad [10]$$

Valor que representa las máximas desviaciones del beneficio en la cartera considerada.

3.—Generalización en el caso de edades diferentes.

Supongamos s_1 contratos de Seguro Mixto a primas continuas sobre cabezas de edad x por un plazo n; s_2 contratos sobre cabezas de edad y por el mismo plazo n; etc.

Para los s_1 contratos primeros, tendremos:

$$\Sigma\, b_1 = \varepsilon\, \bar{a}_{x\,\overline{n|}}\, \Sigma\, c_1$$

Para los s_2 ocurrirá que:

$$\Sigma\, b_2 = \varepsilon\, \bar{a}_{y\,\overline{n|}}\, \Sigma\, c_2$$

. . . .

. . . .

Obteniendo, por tanto:

$$\Sigma\, b = \varepsilon \left[\bar{a}_{x\,\overline{n|}}\, \Sigma_1\, c_1 + \bar{a}_{y\,\overline{n|}}\, \Sigma\, c_2 + \cdots \right]$$

Del mismo modo tendremos:

$$\Sigma \left(a_1 - b_1^2\right) = H^2_{x\,\overline{n|}}\, M^2 (P_{x\,\overline{n|}})\, \Sigma\, c_1^2$$

$$\Sigma \left(a_2 - b_2^2\right) = H^2_{y\,\overline{n|}}\, M^2 (P_{y\,\overline{n|}})\, \Sigma\, c_2^2$$

. . . .

. . . .

y, por lo tanto

$$\Sigma(a - b^2) = H^2_{x\,\overline{n|}} M^2(P_{x\,\overline{n|}}) \Sigma c_1^2 + H^2_{y\,\overline{n|}} M^2(P_{y\,\overline{n|}}) \Sigma c_2^2 + \cdots$$

lo que nos transforma [4] en

$$\varepsilon\left[\bar{a}_{x\,\overline{n|}} \Sigma c_1 + \bar{a}_{y\,\overline{n|}} \Sigma c_2 + \cdots\right] \pm$$
$$\pm 3\sqrt{H^2_{x\,\overline{n|}} M^2(P_{x\,\overline{n|}}) \Sigma c_1^2 + H^2_{y\,\overline{n|}} M^2(P_{y\,\overline{n|}}) \Sigma c_2^2 + \cdots} \qquad [11]$$

como límites de la oscilación del beneficio de la cartera así constituída.

En el caso más amplio del estudio de una cartera compuesta de Seguros Mixtos de distintas edades y plazos, obtendríamos una fórmula de estructura análoga, pues el beneficio global sería suma de beneficios, mientras que la desviación llevaría el signo sumatorio de riesgos, bajo el radical, pues el cuadrado del riesgo medio cuadrático de un conjunto de operaciones es igual a la suma de los cuadrados de los riesgos medios cuadráticos de cada una de ellas.

SEGUNDA PARTE

EXPRESIÓN MATEMÁTICA DEL PLENO

Determinados ya los beneficios y desviaciones probables en los Seguros Vida Entera y Mixtos, vamos ahora a ocuparnos del estudio de los Plenos.

Dada la analogía de las fórmulas obtenidas, limitaremos este estudio al Seguro Vida Entera sobre una cabeza, pues con sustituir en él los símbolos necesarios, automáticamente tendremos los correspondientes al Seguro Vida Entera sobre dos o más cabezas y al Seguro Mixto sobre una o varias cabezas en un plazo determinado.

Divideremos el estudio en tres casos:

A) Caso de edades y capitales iguales.
B) Caso de edades iguales y capitales diferentes.
C) Caso de edades y capitales diferentes.

A).—Caso de edades y capitales iguales.

Es este el caso más favorable por lo que respecta a la estabilidad de una cartera, y es casi imposible que en la práctica del Seguro pueda presentarse, y, sin embargo, en él hemos de basarnos para trazar el estudio propuesto.

Los límites de oscilación del valor probable del beneficio en una cartera así constituída, son:

$$\varepsilon\, \bar{a}_x\, s\, c \pm 3\sqrt{H_x^2\, M^2\,(P_x)}\,\sqrt{s}\, c$$

Luego el valor probable del beneficio es proporcional al número de contratos, mientras que su desviación es directamente proporcional a la raíz cuadrada de ese mismo número.

De ello se deduce que como para tener certeza de lograr un beneficio, el valor probable del mismo ha de ser superior a su desviación, será suficiente para lograrlo que *s* alcance un valor determinado.

Por Wittstein y Bohlmann ha sido denominada Reserva de Riesgo la diferencia

$$3\sqrt{H_x^2\, M^2\,(P_x)\, s\, c^2} - \varepsilon\, \bar{a}_x\, s\, c = R$$

que, como es lógico, ha de ser siempre negativa para que exista estabilidad en las operaciones.

Luego si *s* aumenta indefinidamente, también lo hará *R*, pero por valores negativos, y cuando *s* sea suficientemente grande, tendremos

$$3\sqrt{H_x^2\, M^2\,(P_x)\, s}\; c < \varepsilon\, \bar{a}_x\, s\, c$$

de donde

$$\frac{3\sqrt{H_x^2\, M^2\,(P_x)}}{\sqrt{s}} < \varepsilon\, \bar{a}_x$$

o lo que es lo mismo

$$s > \frac{9\, H_x^2\, M^2\,(P_x)}{\varepsilon^2\, \bar{a}_x^2}$$

Si en esta fórmula sustituímos el signo $>$ por el signo $=$, obtenemos el número mínimo de asegurados preciso para que la cartera no arroje pérdida.

Así, pues, si una Compañía tiene concertados *s* contratos que cumplan la condición anterior, sobre s cabezas de edad x y por un capital de c, podremos limitar la oscilación del beneficio a un valor Q, aceptando para ello en cada contrato un capital $K < c$ que cumpla la condición:

$$Q = 3\sqrt{H_x^2\, M^2(P_x)\, s\, K^2}$$

o sea

$$K = \frac{Q}{3\sqrt{H_x^2\, M^2(P_x)\, s}}$$

Este valor de Q podremos siempre igualarlo a un porcentaje d ω el beneficio probable de la cartera estudiada, y tendremos:

$$K = \frac{\omega\, \varepsilon\, \bar{a}_x}{3\sqrt{H_x^2\, M^2(P_x)}}\, c\sqrt{s}$$

Si llamamos m al número mínimo de contratos preciso para la obtención de un beneficio, como

$$m = \frac{9\, H_x^2\, M^2(P_x)}{\varepsilon^2\, \bar{a}_x^2}$$

tendremos

$$K = \omega\, c\sqrt{\frac{s}{m}}$$

Valor que representa el Pleno correspondiente al porcentaje ω del beneficio probable de la cartera fijado como oscilación máxima.

Este valor del Pleno crecerá, si mantenemos ω constante, en razón directa a la raíz cuadrada del número de contratos.

B).—Caso de edades iguales y capitales diferentes.

Los límites de oscilación del beneficio probable de una cartera así constituída, serían:

$$\varepsilon\, \bar{a}_x\, \Sigma c_i \pm 3\sqrt{H_x^2\, M^2(P_x)\, \Sigma c_i^2}$$

Para que la Reserva de Riesgo fuese negativa, tendría que suceder:

$$\frac{3\sqrt{H_x^2 M^2(P_x)}\sqrt{\frac{\Sigma c_i^2}{s}}}{\sqrt{s}} < \varepsilon\, \bar{a}_x \frac{\Sigma c_i}{s}$$

y, por lo tanto, si

$$s = \frac{9\, H_x^2 M^2(P_x)}{\varepsilon^2 \bar{a}_x^2} \left[\frac{\sqrt{\frac{\Sigma c_i^2}{s}}}{\frac{\Sigma c_i}{s}} \right]^2$$

s sería el número mínimo de asegurados necesario para que la cartera total estudiada no diese pérdida.

Puede observarse que el caso anteriormente estudiado de capitales iguales, no es más que un caso particular de éste, pues al ser iguales los capitales medios, lineal y cuadrático, el factor cociente de ambos sería la unidad.

Así, pues, si en el caso presente tomamos el capital unitario como capital asegurado en cada contrato, tendremos:

$$\varepsilon\, \bar{a}_x\, s \pm 3\sqrt{H_x^2 M^2(P_x)\, s}$$

y la relación

$$\omega = \frac{3\sqrt{H_x^2 M^2(P_x)}}{\varepsilon\, \bar{a}_x \sqrt{s}}$$

nos da el valor mínimo de ω. Su valor máximo sería:

$$\omega = \frac{3\sqrt{H_x^2 M^2(P_x)}}{\varepsilon\, \bar{a}_x \sqrt{s}} \left[\frac{\sqrt{\frac{\Sigma c_i^2}{s}}}{\frac{\Sigma c_i}{s}} \right]$$

Como quiera que el beneficio de la cartera viene representado por

$$\varepsilon\, \bar{a}_x\, \Sigma c_i = \varepsilon \bar{a}_x\, s \frac{\Sigma c_i}{s}$$

la cartera ideal sería aquella que todos sus capitales fuesen iguales al capital medio, pues obtendríamos el máximo beneficio con la mínima desviación.

A ello se tiende al fijar un capital máximo K de aceptación por cada contrato, tal que

$$1 < \frac{\Sigma c_i}{s} < K$$

pues la variabilidad de los capitales asegurados oscilará entre 1 y K en lugar de hacerlo entre 1 e ∞.

Si al capital medio le llamamos c, tendremos que cada capital aceptado será

$$c_i = c\,(1 + \Delta_i) \quad \text{donde} \quad \Delta_i \gtreqless 0$$

y, por tanto

$$\Sigma\, c_i^2 = c^2\,(s + 2\,\Sigma\,\Delta_i + \Sigma\,\Delta_i^2)$$

mas por ser c el capital medio, la suma de las diferencias positivas y la suma de las diferencias negativas entre los distintos contratos y él, han de ser iguales, y, por lo tanto, $\Sigma\,\Delta_i = 0$ mientras que $\Sigma\,\Delta_i^2 \neq 0$, pues el cuadrado de las diferencias negativas ha de ser también positivo, y, por tanto, podemos escribir

$$\Sigma c_i^2 = c^2\left(s + \Sigma \Delta_i^2\right)$$

y el beneficio probable oscilará entre

$$\varepsilon\,\bar{a}_x\,s\,c \pm 3\sqrt{H_x^2\,M^2\,(P_x)\,c^2\left(s + \Sigma\,\Delta_i^2\right)}$$

Si queremos limitar la oscilación a un porcentaje ω del beneficio probable, tendremos que

$$\omega\,\varepsilon\,\bar{a}_x\,s\,c = 3\sqrt{H_x^2\,M^2\,(P_x)}\quad c\sqrt{s + \Sigma\,\Delta_i^2}$$

y admitiendo que la diferencia entre el mayor y el menor capital que se deba asegurar y el capital medio sea tal que el valor máximo de Δ_i se convierta en

$$\Delta_m = \sqrt{\frac{\Sigma\,\Delta_i^2}{s}}$$

resulta que

$$\Sigma \Delta_i^2 = s\Delta_m^2$$

y tendremos

$$\sqrt{s + s\Delta_m^2} = \frac{\varepsilon\, \bar{a}_x\, s\, \omega}{3\sqrt{H_x^2\, M^2(P_x)}}$$

y, por lo tanto,

$$\Delta_m = \sqrt{\frac{\varepsilon^2\, \bar{a}_x^2\, s\, \omega^2}{9\, H_x^2\, M^2(P_x)} - 1}$$

Es decir, que conocido el número de contratos, podemos determinar el valor Δ_m que nos dé la máxima diferencia, positiva o negativa, en que la relación $\frac{c_i}{c}$ pueda diferir de la unidad para que el límite de oscilación del beneficio probable no exceda a un porcentaje ω del mismo.

En su consecuencia, el valor del Pleno vendrá representado por:

$$K = c\,(1 + \Delta_m) = \frac{\Sigma c_i}{s} \left[1 + \sqrt{\frac{\varepsilon^2\, \bar{a}_x^2\, s\, \omega^2}{9 H_x^2\, M^2(P_x)} - 1} \right]$$

C).—Caso de edades y capitales diferentes.

Los límites de oscilación del beneficio, serán en esta cartera:

$$\varepsilon\, [\bar{a}_x\, \Sigma c_1 + \bar{a}_y\, \Sigma c_2 + \cdots] \pm 3\sqrt{H_x^2\, M^2(P_x)\, \Sigma c_1^2 + H_y^2\, M^2(P_y)\, \Sigma c_2^2 + \cdots} \qquad [12]$$

Si designamos por c_x; c_y; ... a los capitales medios en cada edad, tendremos:

$$\Sigma c_1 = s_1\, c_x$$
$$\Sigma c_2 = s_2\, c_y$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y en cada edad, los capitales asegurados, variarán con respecto al capital medio correspondiente, en forma tal, que

$$c_i = c\,(1 + \Delta_i) \qquad \text{donde} \qquad \Delta_i \gtreqless 0$$

y, por lo tanto,

$$\Sigma c_1^2 = c_x^2 \left(s_1 + \Sigma \Delta_1^2\right)$$
$$\Sigma c_2^2 = c_y^2 \left(s_2 + \Sigma \Delta_2^2\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

que nos transforma [12] en

$$\varepsilon(\bar{a}_x s_1 c_x + \bar{a}_y s_2 c_y + \cdots) \pm$$
$$\pm 3\sqrt{H_x^2 M^2(P_x) c_x^2 s_1 \left(1 + \frac{\Sigma \Delta^2_1}{s_1}\right) + H_y^2 M^2(P_y) c_y^2 s_2 \left(1 + \frac{\Sigma \Delta^2_2}{s_2}\right) + \cdots}$$

En el caso *B)* estudiado anteriormente, hemos señalado que la cartera de mayor beneficio y mínima desviación, sería aquella en que los capitales asegurados fuesen iguales al capital medio. Si esto ocurre en cada edad, en el caso presente precisaremos, ante todo, que los capitales medios en las distintas edades sean iguales para después poder proceder de igual manera que entonces.

En la práctica es muy difícil, por no decir imposible, que este caso se presente, y, por tanto, tendremos que recurrir a la fijación de unos plenos auxiliares K_x ; K_y ; ... para hacer una limitación previa en cada grupo, que al reducir la oscilación de los capitales asegurados entre 1 y K_x ; K_y ; ..., nos iguale los capitales medios.

No es preciso conocer, y, por lo tanto, calcular, los valores de estos plenos auxiliares, pues si consideramos como capital medio de la cartera al menor entre todas las edades, en la cartera resultante tendrá forzosamente que ocurrir que

$$c_x = c_y = c_z = \cdots = c_m$$

donde c_m será el capital medio menor de la cartera primitiva

En la cartera así establecida podremos limitar la oscilación del beneficio probable a un porcentaje ω del mismo, es decir:

$$\omega\, \varepsilon\, c_m \left[\bar{a}_x s_1 + \bar{a}_y s_2 + \cdots\right] =$$
$$= 3\sqrt{\left[H_x^2 M^2(P_x)\, s_1 \left(1 + \frac{\Sigma \Delta^2_1}{s_1}\right) + H_y^2 M^2(P_y)\, s_2 \left(1 + \frac{\Sigma \Delta^2_2}{s_2}\right) + \cdots\right] c_m^2}$$

y admitiendo que la diferencia entre el mayor y el menor capital que se deba aceptar y el capital medio, sea tal que convierte el valor máximo de Δ_i en

$$\Delta_m = \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2_1 + \Sigma\Delta^2_2 + \cdots}{s_1 + s_2 + \cdots}}$$

tendremos que

$$\omega\,\varepsilon\,c_m(\bar{a}_x s_1 + \bar{a}_y s_2 + \cdots) =$$
$$= 3\sqrt{H^2_x M^2(P_x)s_1 + H^2_y M^2(P_y)s_2 + \cdots}\quad c_m\sqrt{1+\Delta^2_m}$$

y en su consecuencia el Pleno de la cartera vendrá representado por

$$K = c_m(1+\Delta_m) = c_m\left[1 + \sqrt{\frac{\omega^2_{,}\varepsilon^2(\bar{a}_x s_1 + \bar{a}_y s_2 + \cdots)^2}{9(H^2_x M^2(P_x)s_1 + H^2_y M^2(P_y)s_2 + \cdots)} - 1}\right]$$

teniendo que ser forzosamente

$$\omega > \frac{3\sqrt{H^2_x M^2(P_x)s_1 + H^2_y M^2(P_y)s_2 + \cdots}}{\varepsilon(\bar{a}_x s_1 + \bar{a}_y s_2 + \cdots)}$$

para que no existan raíces imaginarias.

Si el valor de ω se mantiene constante, el Pleno variará en función del número de contratos en cada edad y si, por el contrario, K permanece invariable, ω disminuirá en valor absoluto al aumentar el número de contratos.

Sólo hemos de añadir, para terminar, que en todos los casos la prudencia de la Compañía aseguradora será la que determine el porcentaje ω que regule los límites de oscilación del beneficio probable de su cartera y, en su consecuencia, el valor de Δ_m será siempre un número índice seguro que nos permita enjuiciar con exactitud el conjunto de sus operaciones.

APENDICE PRIMERO

Hemos creído conveniente, para dar a este trabajo una utilidad práctica, incluir en este Apéndice una serie de Baremos calculados en las Tablas de Mortalidad A. F. y H. m. al tipo de interés del 3,50 %.

Los estudios que se deseen realizar en las carteras de Seguros a Vida Entera sobre una cabeza, pueden practicarse directamente aplicando las fórmulas establecidas, ya que en los distintos Baremos se incluyen los valores precisos para el cálculo.

Cuando se trate de Carteras de Seguros Mixtos sobre una cabeza, habrá que obtener previamente estos valores con ayuda de los Simbolos de Conmutación que insertamos y que no hemos dado calculados por suponer tantos Baremos como plazos posibles.

Los valores que figuran en este Apéndice, han sido calculados como sigue:

A).—Tipos de interés.

$$i = 0.035$$

$$j = 2\,i\,(1+i) = 0.071225$$

$$\delta_{(i)} = \frac{1.\,1.035}{1.\,e} = 0.034401$$

$$\delta_{(j)} = \frac{1.\,1{,}071225}{1.\,e} = 0.068803$$

B).—Simbolos de conmutación.

$$D_x^{(j)} = l_x \frac{1}{(1{,}071225)^x}$$

$$N_x^{(j)} = D_x^{(j)} + D_{x+1}^{(j)} + \cdots$$

C).—Anualidades continuas.

$$\bar{a}_x = a_x + 0.50$$

$$\bar{a}_x^{(j)} = \frac{N_{x+1}^{(j)}}{D_x^{(j)}} + 0.50$$

D).—Primas únicas.

$$\bar{A}_x = 1 - 0{,}034401\,\bar{a}_x$$

$$\bar{A}_x^{(j)} = 1 - 0{,}068803\,\bar{a}_x^{(j)}$$

BAREMO PRIMERO

SÍMBOLOS DE CONMUTACION

Tipo de interés = 0,071225

	TABLAS A. F.		TABLAS H. m.	
Edad	$D_x^{(j)}$	$N_x^{(j)}$	$D_x^{(j)}$	$N_x^{(j)}$
0	1000000	12871776	127280	1502493
1	899891	11871776	105416	1375213
2	816966	10971885	94955	1269797
3	746743	10154919	86709	1174842
4	686117	9408176	79694	1088133
5	632898	8722059	73456	1008439
6	585515	8089161	67870	934983
7	542830	7503646	62831	867113
8	504002	6960816	58259	804282
9	468404	6456814	54086	746023
10	435566	5988410	50257	691937
11	405125	5552844	46724	641680
12	376806	5147719	43455	594956
13	350392	4770913	40425	551501
14	325713	4420521	37608	511076
15	302639	4094808	34987	473468
16	281061	3769095	32541	438481
17	260892	3488034	30258	405940
18	242060	3227142	28123	375682
19	224502	2985082	26128	347559
20	208159	2760580	24262	321431
21	192978	2552421	22520	297169
22	178901	2359443	20894	274649
23	165868	2180542	19380	253755
24	153814	2014674	17970	234375
25	142667	1860860	16660	216405
26	132344	1718193	15442	199745
27	122755	1585849	14312	184303
28	113845	1463094	13262	169991
29	105566	1349249	12288	156729

SÍMBOLOS DE CONMUTACIÓN (Continuación.)

	TABLAS A. F.		TABLAS H. m.	
Edad	$D_x^{(j)}$	$N_x^{(j)}$	$D_x^{(j)}$	$N_x^{(j)}$
30	97875,6	1243683	11384	144441
31	90729,7	1145807	10545	133057
32	84090,6	1055077	9766,7	122512
33	77921,4	970986	9044,1	112745
34	72189,0	893065	8373,4	103701
35	66862,8	820876	7751,1	95328
36	61913,5	754013	7173,4	87577
37	57314,4	692099	6637,2	80404
38	53040,4	634785	6139,5	73767
39	49068,1	581745	5677,5	67627
40	45377,5	532677	5248,7	61949
41	41946,9	487299	4850,7	56700
42	38759,3	445352	4481,1	51849
43	35795,0	406593	4137,9	47368
44	33042,7	370798	3819,5	43230
45	30483,6	337755	3523,8	39410
46	28105,1	307271	3249,2	35886
47	25894,6	279166	2994,3	32637
48	23840,5	253271	2757,7	29643
49	21930,8	229430	2537,8	26885
50	20157,0	207499	2333,8	24347
51	18508,3	187342	2144,4	22013
52	16976,8	168834	1968,4	19869
53	15553,8	151857	1805,1	17901
54	14232,5	136303	1653,6	16096
55	13005,4	122070	1512,8	14442
56	11866,6	109065	1382,2	12929
57	10809,5	97198,8	1261,1	11547
58	9829,13	86389,3	1158,8	10286
59	8920,50	76560,2	1044,6	9136,9
60	8078,33	67639,7	948,00	8092,3
61	7299,02	59561,4	858,59	7144,3
62	6578,09	52262,4	775,81	6285,7
63	5911,79	45684,3	699,22	5509,9
64	5297,31	39772,5	628,49	4810,7

SÍMBOLOS DE CONMUTACÍÓN (Continuación.)

	TABLAS A. F.		TABLAS H. m.	
Edad	$D_x^{(j)}$	$N_x^{(j)}$	$D_x^{(j)}$	$N_x^{(j)}$
65	4730,74	34475,2	563,16	4182,2
66	4209,50	29744,5	502,99	3619,0
67	3733,06	25534,6	447,79	3116,0
68	3293,36	21801,5	396,72	2668,2
69	2893,02	18508,1	350,09	2271,5
70	2528,37	15615,1	307,46	1921,4
71	2197,56	13086,7	268,63	1613,9
72	1898,23	10889,1	233,34	1345,3
73	1628,94	8990,91	201,43	1143,9
74	1387,69	7361,97	172,69	942,48
75	1172,82	5974,28	146,93	769,79
76	982,634	4801,46	123,98	622,86
77	815,643	3818,83	103,67	498,88
78	669,998	3003,19	85,835	395,21
79	544,297	2333,19	70,307	309,37
80	436,716	1788,89	56,899	239,06
81	345,705	1352,17	45,446	182,16
82	269,753	1006,46	35,790	136,71
83	207,103	736,707	27,743	100,92
84	156,266	529,604	21,141	75,180
85	115,902	373,338	15,813	52,039
86	83,8800	257,436	11,584	36,226
87	59,4525	173,556	8,2954	24,642
88	41,1089	114,104	5,7970	16,347
89	27,6641	72,9953	3,9420	10,550
90	18,0710	45,3312	2,6020	6,6083
91	11,4327	27,2602	1,6619	4,0063
92	6,98152	15,8275	1,0241	2,3444
93	4,10428	8,84598	0,60866	1,3203
94	2,31248	4,74170	0,34454	0,71164
95	1,24469	2,42922	0,18692	0,36710
96	0,637263	1,18453	0,096063	0,18018
97	0,309435	0,547265	0,046731	0,084112
98	0,141480	0,237830	0,022401	0,037381
99	0,060555	0,096350	0,009909	0,014980

BAREMO SEGUNDO

Anualidades vitalicias continuas y Primas Unicas Vida Entera

Tipo de interés = 0,35 (δ = 0,034401)

Edad	TABLAS A. F. $\bar{a}_x$	TABLAS A. F. $\bar{A}_x$	TABLAS H. m. $\bar{a}_x$	TABLAS H. m. $\bar{A}_x$
0	21,376	0,26464	19,558	0,32718
1	21,914	0,24613	21,733	0,25235
2	22,290	0,23320	22,275	0,23371
3	22,533	0,22484	22,539	0,22462
4	22,669	0,22016	22,669	0,22016
5	22,721	0,21837	22,738	0,21778
6	22,707	0,21885	22,755	0,21720
7	22,643	0,22105	22,725	0,21823
8	22,542	0,22453	22,660	0,22047
9	22,415	0,22546	22,562	0,22384
10	22,271	0,23385	22,440	0,22803
11	22,115	0,23922	22,302	0,23278
12	21,954	0,24476	22,148	0,23808
13	21,791	0,25036	21,984	0,24372
14	21,629	0,25594	21,812	0,24964
15	21,471	0,26137	21,634	0,25576
16	21,318	0,26664	21,455	0,26192
17	21,169	0,27176	21,374	0,26471
18	21,023	0,27678	21,096	0,27427
19	20,880	0,28170	20,918	0,28039
20	20,737	0,28662	20,745	0,28634
21	20,591	0,29164	20,574	0,29223
22	20,439	0,29687	20,403	0,29811
23	20,278	0,30241	20,233	0,30396
24	20,107	0,30829	20,061	0,30987
25	19,924	0,31459	19,887	0,31586
26	19,731	0,32123	19,708	0,32202
27	19,532	0,32807	19,524	0,32834
28	19,328	0,33509	19,335	0,33485
29	19,117	0,34235	19,141	0,34152

BAREMO SEGUNDO (Continuación.)

Edad	TABLAS A. F. $\bar{a}_x$	TABLAS A. F. $\bar{A}_x$	TABLAS H. m. $\bar{a}_x$	TABLAS H. m. $\bar{A}_x$
30	18,901	0,34978	18,941	0,34840
31	18,679	0,35742	18,735	0,35549
32	18,451	0,36526	18,523	0,36278
33	18,318	0,36984	18,304	0,37032
34	17,978	0,38153	18,080	0,37802
35	17,732	0,38999	17,849	0,38597
36	17,480	0,39866	17,612	0,39412
37	17,222	0,40754	17,370	0,40245
38	16,959	0,41659	17,120	0,41105
39	16,689	0,42587	16,865	0,41982
40	16,414	0,43534	16,603	0,42884
41	16,134	0,44497	16,335	0,43805
42	15,847	0,45484	16,062	0,44745
43	15,556	0,46485	15,782	0,45708
44	15,259	0,47507	15,497	0,46688
45	14,957	0,48546	15,206	0,47689
46	14,650	0,49602	14,909	0,48711
47	14,338	0,50675	14,607	0,49750
48	14,923	0,51759	14,300	0,50806
49	13,703	0,52860	13,988	0,51879
50	13,379	0,53974	13,672	0,52966
51	13,052	0,55099	13,350	0,54074
52	12,721	0,56238	13,024	0,55196
53	12,388	0,57384	12,696	0,56324
54	12,052	0,58540	12,364	0,57466
55	11,715	0,59699	12,028	0,58622
56	11,375	0,60868	11,691	0,59781
57	11,035	0,62038	11,351	0,60951
58	10,694	0,63211	11,009	0,62128
59	10,352	0,64388	10,667	0,63304
60	10,011	0,65561	10,323	0,64487
61	9,671	0,66730	9,980	0,65667
62	9,332	0,67897	9,636	0,66851
63	8,995	0,69056	9,294	0,68027
64	8,660	0,70208	8,953	0,69200

BAREMO SEGUNDO (Continuación.)

Edad	TABLAS A. F. $\bar{a}_x$	TABLAS A. F. $\bar{A}_x$	TABLAS H. m. $\bar{a}_x$	TABLAS H. m. $\bar{A}_x$
65	8,328	0,71351	8,614	0,70366
66	7,999	0,72482	8,278	0,71522
67	7,674	0,73600	7,945	0,72668
68	7,354	0,74701	7,615	0,73803
69	7,038	0,75788	7,290	0,74921.
70	6,728	0,76855	6,970	0,76022
71	6,423	0,77904	6,655	0,77106
72	6,125	0,78929	6,346	0,78169
73	5,833	0,79934	6,043	0,79211
74	5,548	0,80914	5,747	0,80229
75	5,271	0,81867	5,458	0,81224
76	5,002	0,82792	5,177	0,82190
77	4,740	0,83694	4,904	0,83129
78	4,487	0,84565	4,638	0,84045
79	4,242	0,85407	4,382	0,84925
80	4,006	0,86219	4,134	0,85778
81	3,778	0,87003	3,895	0,86600
82	3,559	0,87756	3,666	0,87388
83	3,350	0,88475	3,446	0,88145
84	3,149	0,89167	3,236	0,88868
85	2,958	0,89824	3,034	0,89562
86	2,775	0,90454	2,842	0,90223
87	2,601	0,91052	2,660	0,90849
88	2,436	0,91620	2,486	0,91448
89	2,280	0,92156	2,322	0,92012
90	2,132	0,92665	2,167	0,92545
91	1,993	0,93144	2,021	0,93047
92	1,861	0,93598	1,885	0,93515
93	1,738	0,94021	1,753	0,93969
94	1,622	0,94420	1,637	0,94368
95	1,514	0,94791	1,526	0,94750
96	1,413	0,95139	1,429	0,95084
97	1,318	0,95466	1,344	0,95376
98	1,231	0,95765	1,202	0,95865
99	1,150	0,96044	1,033	0,96446

BAREMO TERCERO (Continuación.)

	TABLAS A. F.		TABLAS H. m.	
Edad	$\bar{a}_x^{(j)}$	$\bar{A}_x^{(j)}$	$\bar{a}_x^{(j)}$	$\bar{A}_x^{(j)}$
30	12,207	0,16012	12,188	0,16143
31	12,128	0,16556	12,118	0,16625
32	12,047	0,17113	12,043	0,17141
33	11,961	0,17705	11,966	0,17671
34	11,871	0,18324	11,885	0,18228
35	11,777	0,18971	11,795	0,18847
36	11,678	0,19652	11,709	0,19439
37	11,575	0,20361	11,614	0,20092
38	11,468	0,21097	11,515	0,20774
39	11,356	0,21867	11,411	0,21489
40	11,239	0,22672	11,303	0,22232
41	11,117	0,23512	11,189	0,23016
42	10,990	0,24385	11,071	0,23828
43	10,859	0,25287	10,947	0,24681
44	10,722	0,26230	10,818	0,25569
45	10,580	0,27207	10,684	0,26491
46	10,433	0,28218	10,545	0,27447
47	10,281	0,29264	10,400	0,28445
48	10,124	0,30344	10,249	0,29484
49	9,962	0,31459	10,094	0,30550
50	9,794	0,32614	9,932	0,31665
51	9,622	0,33798	9,767	0,32800
52	9,445	0,35016	9,594	0,33991
53	9,263	0,36268	9,417	0,35208
54	9,077	0,37548	9,234	0,36467
55	8,886	0,38862	8,946	0,38449
56	8,691	0,40203	8,854	0,39082
57	8,492	0,41573	8,656	0,40444
58	8,389	0,42281	8,453	0,41841
59	8,083	0,44387	8,247	0,43258
60	7,873	0,45831	8,036	0,44710
61	7,660	0,47297	7,821	0,46189
62	7,445	0,48776	7,602	0,47696
63	7,228	0,50269	7,380	0,49223
64	7,008	0,51783	7,154	0,50778

BAREMO TERCERO (Continuación.)

Edad	TABLAS A. F. $\bar{a}_x^{(j)}$	TABLAS A. F. $\bar{A}_x^{(j)}$	TABLAS H. m. $\bar{a}_x^{(j)}$	TABLAS H. m. $\bar{A}_x^{(j)}$
65	6,787	0,53303	6,926	0,52347
66	6,566	0,54824	6,695	0,53936
67	6,340	0,56379	6,459	0,55560
68	6,120	0,57893	6,226	0,57163
69	5,898	0,59420	5,988	0,58801
70	5,676	0,60948	5,749	0,60445
71	5,455	0,62468	5,508	0,62103
72	5,236	0,63975	5,402	0,62833
73	5,019	0,65468	5,179	0,64367
74	4,805	0,66940	4,958	0,65888
75	4,594	0,68392	4,739	0,67394
76	4,386	0,69823	4,524	0,68874
77	4,182	0,71227	4,312	0,70332
78	3,982	0,72603	4,104	0,71763
79	3,787	0,73944	3,900	0,73167
80	3,596	0,75258	3,701	0,74536
81	3,411	0,76531	3,508	0,75864
82	3,231	0,77770	3,320	0,77157
83	3,057	0,78967	3,210	0,77914
84	2,889	0,80123	2,962	0,79621
85	2,621	0,81967	2,791	0,80797
86	2,569	0,82324	2,627	0,81925
87	2,419	0,83356	2,471	0,82999
88	2,276	0,84340	2,320	0,84038
89	2,139	0,85283	2,176	0,85028
90	2,009	0,86177	2,040	0,85964
91	1,884	0,87038	1,911	0,86852
92	1,767	0,87842	1,789	0,87691
93	1,655	0,88613	1,669	0,88517
94	1,550	0,89336	1,565	0,89232
95	1,452	0,90010	1,464	0,89927
96	1,359	0,90650	1,376	0,90533
97	1,269	0,91269	1,300	0,91056
98	1,181	0,91874	1,169	0,91957
99	1,091	0,92493	1,012	0,93037

APENDICE SEGUNDO

ESTUDIO DE UNA CARTERA SUPUESTA

Admitamos que una Compañía de Seguros tiene constituída una cartera en la categoría de Vida Entera sobre una cabeza de las siguientes características:

Tabla de mortalidad	A. F.
Tipo de interés	3,50 %
Recargo de administración	4,00 ‰

Edad	Capital	Número contratos	Importe-capitales	Importe capitales cuadráticos
30	5 000	90	450 000	2 250 000 000
30	10 000	100	1 000 000	10 000 000 000
30	20 000	100	2 000 000	40 000 000 000
30	25 000	80	2 000 000	50 000 000 000
30	50 000	75	3 750 000	187 500 000 000
30	100 000	15	1 500 000	150 000 000 000
30	200 000	5	1 000 000	200 000 000 000
	Total edad 30.	465	11 700 000	639 750 000 000
40	5 000	200	1 000 000	5 000 000 000
40	10 000	390	3 900 000	39 000 000 000
40	20 000	200	4 000 000	80 000 000 000
40	25 000	150	7 500 000	93 750 000 000
40	50 000	60	3 000 000	150 000 000 000
40	100 000	35	3 500 000	350 000 000 000
40	200 000	10	2 000 000	400 000 000 000
	Total edad 40.	1 045	24 900 000	1 117 750 000 000
50	5 000	400	2 000 000	10 000 000 000
50	10 000	250	2 500 000	25 000 000 000
50	20 000	225	4 500 000	90 000 000 000
50	25 000	40	2 000 000	25 000 000 000
50	50 000	50	2 500 000	125 000 000 000
50	100 000	25	2 500 000	250 000 000 000
50	200 000	—	—	—
	Total edad 50.	990	16 000 000	525 000 000 000
	TOTAL GENERAL.	2 500	52 600 000	2 282 500 000 000

Capital medio lineal a la edad 30..	25 161
Idem íd. íd. a la 40..	23 828
Idem íd. íd. a la 50..	16 162
Idem íd. íd. de la cartera..	21 040

CUADRO DE VALORES PARA EL CÁLCULO

x	$\bar{a}_x$	$\bar{a}_x^{(j)}$	$\bar{A}_x$	$\bar{A}_x^{(j)}$	H_x^2	$M^2(P_x)$	$H_x^2 \times M^2(P_x)$
30	18,901	12,207	0,34978	0,16012	1,15692	0,08935	0,103371
40	16,414	11,239	0,43534	0,22671	1,13562	0,11664	0,132458
50	13,379	9,794	0,53974	0,32614	1,10988	0,16439	0,182453

BENEFICIO PROBABLE DE LA CARTERA

El beneficio probable de la cartera vendrá representado por:

$$\varepsilon(\bar{a}_x \, \Sigma c_1 + \bar{a}_y \, \Sigma c_2 + \bar{a}_z \, \Sigma c_3) =$$

$$= 0.004(18{,}901 \times 11.700.000 + 16{,}414 \times 24.900.000 + 13{,}379 \times 16.000.000) =$$

$$= \mathbf{3.375.657 \ pesetas}$$

y la desviación será:

$$\pm 3\sqrt{H^2_x \, M^2(P_x) \, \Sigma c^2_1 + H^2_y \, M^2(P_y) \, \Sigma c^2_2 + H^2_z \, M^2(P_z) \, \Sigma c^2_3} =$$

$$\pm 3\sqrt{0.103371 \times 639.750 \times 1.000^2 + 0.132458 \times 1.117.750 \times 1.000^2 + 0.182453 \times 250.000 \times 1.000^2} =$$

$$\pm 3\sqrt{259.800.894.500} = \pm \mathbf{1.529.120 \ pesetas}$$

la máxima desviación será, pues,

$$\omega = \frac{1.529.120.—}{3.375.657.—} = 0{,}4530$$

y la mínima sería

$$\omega = \frac{3\sqrt{H^2_x \, M^2(P_x) \, s_1 + H^2_y \, M^2(P_y) \, s_2 + H^2_z \, M^2(P_z) \, s_3}}{\varepsilon(\bar{a}_x \, s_1 + \bar{a}_y \, s_2 + \bar{a}_z \, s_3)} = \frac{3\sqrt{367{,}114595}}{156{,}747} = 0{,}3667$$

FIJACIÓN DEL PLENO

Si queremos limitar al 40 % la máxima desviación del beneficio probable, tendremos:

$$1 + \delta_m^2 = \omega^2 \frac{\varepsilon^2 (\bar{a}_x \, s_1 + \bar{a}_y \, s_2 + \bar{a}_z \, s_3)^2}{9(H^2_x \, M^2(P_x) \, s_1 + H^2_y \, M^2(P_y) \, s_2 + H^2_z \, M^2(P_z) \, s_3)} =$$

$$= 0{,}16 \, \frac{24.569{,}69098}{3.304{,}03455} = 1{,}189803$$

luego el valor positivo de Δ_m, será

$$\Delta_m = \sqrt{0.189803} = 0,43566$$

y el valor del pleno, teniendo en cuenta que el capital medio menor corresponde a la edad 50, será:

$$K = c(1 + \Delta_m) = 16.162 \times 1,43566 = \mathbf{23.203}$$

Tomando, por tanto, el Pleno de 23.203 pesetas, la cartera de propia conservación quedaría constituída como sigue:

Edad	Capital	Número contratos	Importe-capitales	Importe capitales cuadráticos
30	5 000	90	450 000	2 250 000 000
30	10 000	100	1 000 000	10 000 000 000
30	20 000	100	2 000 000	40 000 000 000
30	23 203	175	4 060 525	94 216 361 575
	Total edad 30.	465	7 510 525	146 466 361 575
40	5 000	200	1 000 000	5 000 000 000
40	10 000	390	3 900 000	39 000 000 000
40	20 000	200	4 000 000	80 000 000 000
40	23 203	255	5 916 765	137 286 698 295
	Total edad 40.	1 045	14 816 765	261 286 698 295
50	5 000	400	2 000 000	10 000 000 000
50	10 000	250	2 500 000	25 000 000 000
50	20 000	225	4 500 000	90 000 000 000
50	23 203	115	2 668 345	61 913 609 035
	Total edad 50.	990	11 668 345	186 913 609 035
	TOTAL GENERAL.	2 500	33 995 635	594 666 668 905

El beneficio probable de esta cartera, sería:

$$0.004(18,901 \times 7.510.525 + 16,414 \times 14.816.765 + 13,379 \times 11.668.345) = \mathbf{2.165.078,40} \text{ pesetas.}$$

y la desviación:

$$= 3\sqrt{0.103371 \times 146.466.361.575 + 0.132458 \times 261.286.698.295 + 0.182453 \times 186.913.609.035} =$$

$$= 3\sqrt{83.850.038.940} = = \mathbf{868.707\ pesetas}$$

y la relación entre ambos valores

$$\omega = \frac{868.707}{2.165.078,40} = 0,40$$

nos cumple exactamente el supuesto.