

Instituto de Ciencias del Seguro

**INVESTIGACIONES  
EN SEGUROS  
Y GESTIÓN DEL RIESGO:  
RIESGO 2013**

Emilio Gómez Déniz  
Montserrat Guillén Estany  
Francisco J. Vázquez Polo  
Editores

PONENCIAS DEL V CONGRESO "RIESGO 2013"  
PAPERS OF THE 5<sup>TH</sup> WORKSHOP "RISK 2013"

17 y 18 de octubre  
Gran Canaria (España)

**FUNDACIÓN MAPFRE**

FUNDACIÓN MAPFRE no se hace responsable del contenido de esta obra, ni el hecho de publicarla implica conformidad o identificación con la opinión del autor o autores.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin el permiso escrito del autor o del editor.

© 2013, FUNDACIÓN MAPFRE  
Paseo de Recoletos 23  
28004 Madrid (España)

[www.fundacionmapfre.org/cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.org/cienciasdelseguro)  
[publicaciones.ics@fundacionmapfre.org](mailto:publicaciones.ics@fundacionmapfre.org)

ISBN: 978-84-9844-417-9  
Depósito Legal: M-25540-2013  
Printed by DiScript Preimpresión, S. L.

## PRESENTACIÓN

Desde 1975, FUNDACIÓN MAPFRE desarrolla actividades de interés general para la sociedad en distintos ámbitos profesionales y culturales, así como acciones destinadas a la mejora de las condiciones económicas y sociales de las personas y los sectores menos favorecidos de la sociedad. En este marco, el Instituto de Ciencias del Seguro de FUNDACIÓN MAPFRE promueve y desarrolla actividades educativas y de investigación en los campos del seguro y de la gerencia de riesgos.

En el área educativa, su actuación abarca la formación académica de post grado y especialización, desarrollada en colaboración con la Universidad Pontificia de Salamanca, así como cursos y seminarios para profesionales, impartidos en España e Iberoamérica. Estas tareas se extienden a otros ámbitos geográficos mediante la colaboración con instituciones españolas e internacionales, así como a través de un programa de formación a través de Internet.

El Instituto promueve ayudas a la investigación en las áreas científicas del riesgo y del seguro y mantiene un Centro de Documentación especializado en seguros y gerencia de riesgos, que da soporte a sus actividades.

Asimismo, el Instituto promueve y elabora informes periódicos y publica libros sobre el seguro y la gerencia de riesgos, con objeto de contribuir a un mejor conocimiento de dichas materias. En algunos casos estas obras sirven como referencia para quienes se inician en el estudio o la práctica del seguro, y en otros, como fuentes de información para profundizar en materias específicas.

Dentro de estas actividades se encuadra la publicación de este libro que recoge los textos presentados en la V Reunión de Investigación en Seguros y Gestión de Riesgos 2013, celebrada en Gran Canaria el 17 y 18 de octubre.

Desde hace unos años, Internet es el medio por el que se desarrollan mayoritariamente nuestras actividades, ofreciendo a los usuarios de todo el mundo la posibilidad de acceder a ellas de una manera rápida y eficaz mediante soportes web de última generación a través de:

[www.fundacionmapfre.org\cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.org\cienciasdelseguro)

## RIESGO 2013

### COMITÉ CIENTÍFICO

Pilar Abad Romero, *Universidad Rey Juan Carlos de Madrid*

Aman Agarwal, *Indian Institute of Finance, Business School*

Edward Altman, *Stern School of Business, New York Univ.*

Mercedes Ayuso Gutiérrez, *Universidad de Barcelona*

Catalina Bolancé Losilla, *Universidad de Barcelona*

David Camino Blasco, *Universidad Carlos III de Madrid*

Marcelo Cruz, *Stern School of Business, New York Univ.*

Alejandro Balbás de la Corte, *Universidad Carlos III de Madrid*

Enrique Calderín Ojeda, *University of Melbourne*

José M. Feria Domínguez, *Universidad Pablo de Olavide de Sevilla*

Fernando Fernández, *Universidad de Las Palmas de Gran Canaria*

Emilio Gómez Déniz, *Universidad de Las Palmas de Gran Canaria*

Antonio Díaz Pérez, *Universidad de Castilla-La Mancha*

Flor M<sup>a</sup> Guerrero Casas, *Universidad Pablo de Olavide de Sevilla*

Montserrat Guillén Estany, *Universidad de Barcelona*

Agustín Hernández Bastida, *Universidad de Granada*

Antonio J. Heras Martínez, *Universidad Complutense de Madrid*

Enrique J. Jiménez Rodríguez, *Universidad Pablo de Olavide de Sevilla*

José Antonio Ordaz Sanz, *Universidad Pablo de Olavide de Sevilla*

José María Sarabia Alegría, *Universidad de Cantabria*

Ola Sholarin, *Westminster Business School of London*

Shahin Shojai, *Capco Institute*

Miguel Angel Sordo Díaz, *Universidad de Cádiz*

Francisco José Vázquez Polo, *Universidad de Las Palmas de Gran Canaria*

José Luis Vilar Zanón, *Universidad Complutense de Madrid*

# ÍNDICE

PRÓLOGO.....	1
Emilio Gómez Déniz, Montserrat Guillén Estany y Francisco J. Vázquez Polo	
I. GESTIÓN Y MEDICIÓN DE LOS RIESGOS DE CRÉDITO, MERCADO Y OPERACIONAL. CRISIS FINANCIERA Y BANCARIA .....	3
Ponencia 1. Pilar Abad, Sonia Benito and Carmen López <i>Evaluating the performance of parametric approach under a skewness distributions.....</i>	5
Ponencia 2. Olivia Peraita-Ezcurra and José Luis Vilar-Zanón <i>Risk neutral valuation with linear programming.....</i>	19
Ponencia 3. Pilar Abad and Helena Chuliá <i>European Bond Markets and Macroeconomic News .....</i>	39
II. NUEVOS DESARROLLOS DE PRODUCTOS ASEGURADORES.....	55
Ponencia 4. Mercedes Ayuso, Lluís Bermúdez y Miguel Santolino <i>Análisis de los días de baja impeditivos utilizados en el cálculo de la indemnización básica por incapacidad temporal derivada de accidentes de tráfico.....</i>	57
Ponencia 5. Manuela Alcañíz, Mercedes Ayuso y Ana María Pérez <i>El seguro PAYD: efecto de los factores asociados al uso del vehículo sobre la siniestralidad .....</i>	71

Ponencia 6. José Enrique Devesa, Mar Devesa, Inmaculada Domínguez, Borja Encinas, Robert Meneu y Amparo Nagore <i>La rentabilidad actuarial como método de comparación de las operaciones financieras y aseguradoras</i> .....	85
III. DEMOGRAFÍA, SEGUROS DE VIDA Y DEPENDENCIA .....	99
Ponencia 7 Arely Ornelas y Montserrat Guillén <i>Aplicación del Modelo Brass Type a la mortalidad de la población asegurada mexicana</i> .....	101
Ponencia 8. Montserrat Hernández-Solis, Cristina Lozano-Colomer y José Luis Vilar-Zanón <i>Estimación del recargo implícito en un seguro vida entera</i> .....	113
Ponencia 9. Marta Domínguez y José Enrique Devesa <i>El precio de los seguros de dependencia en España: ¿son actuarialmente justos?</i>	123
IV. MÉTODOS ESTADÍSTICOS EN SEGUROS Y FINANZAS .....	143
Ponencia 10. Zuleyka Díaz, José Fernández, Antonio Heras, Eva del Pozo y José Luis Vilar <i>Modelos Aditivos Generalizados aplicados al análisis de la probabilidad de siniestro en el seguro del automóvil</i> .....	145
Ponencia 11. Jaume Belles-Sampera y Miguel Santolino <i>Algunas reflexiones sobre los problemas de asignación de capital y la aplicación de ciertas medidas de riesgo</i> .....	161
Ponencia 12. José Manuel Pavía, Francisco G. Morillas y Juan Carlos Bosch <i>Construcción de tablas de mortalidad recargadas. Introducción de la incertidumbre de la experiencia adquirida vía simulación</i> .....	177
Ponencia 13. Zuhair Bahraoui, Catalina Bolancé y Ramón Alemany <i>Estimación núcleo transformada corregida: doble transformación versus núcleos asimétricos en la estimación del riesgo de pérdida</i> .....	189
Ponencia 14. Emilio Gómez, Faustino Prieto and José María Sarabia <i>On the use of the discrete Lomax distribution in actuarial analysis</i> .....	197
Ponencia 15. Miguel Angel Sordo, Alfonso Suárez y Alfonso J. Bello <i>Cotas para distribuciones condicionadas bajo dependencia: una aplicación ...</i>	211
Ponencia 16. Emilio Gómez, Francisco J. Vázquez-Polo y Victoriano García <i>Una distribución Borel-Tanner modificada y aplicaciones</i> .....	221

Ponencia 17. Emilio Gómez, Francisco J. Vázquez-Polo y Victoriano García <i>El modelo de Borel-Tanner como distribución primaria en modelos de riesgo colectivo</i> .....	233
Colección “Cuadernos de la Fundación” Instituto de Ciencias del Seguro.....	243

## PRÓLOGO

La recesión económica que venimos padeciendo desde el año 2008 en muchos países desarrollados ha sido objeto de mención en el prólogo de los Cuadernos de la Fundación, así como en algunos de los capítulos integrantes del mismo, en las dos últimas ediciones, y puesto que aquella aún no se ha superado parece obvio que algún comentario al respecto debería estar presente también en este ejemplar. Muchos analistas apuntan directamente a la pésima gestión de los riesgos como la culpable de esta crisis económica, de ahí que el número de trabajos de investigación sobre dicha gestión haya crecido enormemente en los últimos años. Es por ello que la gestión de riesgos constituye un tema de obligada presencia en muchos trabajos de investigación en métodos cuantitativos económicos y financieros y así se pone de manifiesto también en este volumen.

El presente volumen recoge una gran parte de las ponencias presentadas a la 5ª Reunión en Investigación en Seguros y Gestión de Riesgos. Las jornadas RISK2013 celebradas en Gran Canaria el 17 y 18 de octubre de 2013 constituyen la continuación natural de los encuentros celebrados en Barcelona (2005), Cantabria (2007), Madrid (2009) y Sevilla (2011). Este Congreso constituye, al día de hoy, el único foro para la presentación y debate de trabajos de investigación relacionados con la temática de la gestión de riesgos y seguros en España, contando desde su primera edición con la presencia de prestigiosos investigadores internacionales.

Los trabajos seleccionados para su publicación en este volumen aparecen agrupados en cuatro grandes bloques de afinidad, tratando de darle un formato parecido a las ediciones anteriores de los Cuadernos de la Fundación en los que se han publicado las ponencias presentadas en dichos encuentros. Estos cuatro grandes bloques de afinidad son los siguientes: (I) Gestión y medición de los riesgos de crédito, mercado y operacional. Crisis financiera y bancaria; (II) Nuevos desarrollos de productos aseguradores; (III) Demografía, seguros de vida y dependencia; y (IV) Métodos estadísticos en seguros y finanzas.

Nos gustaría agradecer el apoyo recibido por parte de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, del Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión de dicha Universidad, así como de la FUNDACIÓN MAPFRE que financia este volumen. Agradecer también al Instituto de Ciencias del Seguro de la



FUNDACIÓN MAPFRE, a su Directora General Dña. Mercedes Sanz, a Dña. Ana Sojo, así como a los restantes miembros del departamento de publicaciones de dicha institución por el cuidadoso trabajo realizado y que han hecho posible la edición de este volumen. Por supuesto que no podemos olvidarnos tampoco de la labor encomiable que han realizado los miembros de los Comités Científicos y Organizador del Congreso, revisando y seleccionando los trabajos que finalmente forman parte de este Cuaderno.

Emilio Gómez Déniz  
Montserrat Guillén Estany  
Francisco J. Vázquez Polo

**I. GESTIÓN Y MEDICIÓN DE LOS RIESGOS  
DE CRÉDITO, MERCADO Y OPERACIONAL.  
CRISIS FINANCIERA Y BANCARIA**

## Ponencia 1

# EVALUATING THE PERFORMANCE OF PARAMETRIC APPROACH UNDER A SKEWNESS DISTRIBUTIONS

Pilar Abad, Sonia Benito and Carmen López

### ABSTRACT

This paper evaluates the performance of several skewed and symmetric distributions in modeling the tail behavior of daily returns on six stocks indexes. First, we analyze the maximum likelihood estimates of these distributions and test which distribution best fits the data. The results show that the skewed distributions (especially, Skewness t-Generalised) performance better in modeling the tail behavior of portfolio returns. Second, we evaluate the performance of the Skewness t-Generalised distribution in estimating VaR in two periods (one stable and one volatile). To evaluate the forecasting VaR we use several accurate tests and a loss function. In both samples, the empirical results indicate that the Skewness t-Generalised distribution provides more accurate out of sample forecast VaR and provides lowest losses..

**Key Words:** Value at Risk, Parametric model, Skewness t-Generalised Distribution, GARCH Model, Risk Management.

### 1. INTRODUCCIÓN

A primary tool for financial risk assessment is Value at Risk (VaR) which is defined as the maximum loss expected on a portfolio of assets over a certain holding period at a given confidence level (probability). Since the Basel Committee on Bank Supervision at the Bank for International Settlements requires a financial institution to meet capital requirements on the basis of VaR estimates, allowing them to use internal models for VaR calculations, this measurement has become a basic market risk management tool for financial institutions.

Despite VaR's conceptual simplicity, its calculation is not easy. To forecasting VaR many approaches have been development: non parametric approaches, e.g. Historical Simulation; semi-parametrics approaches, e.g. Extreme Value Theory and

the Dynamic quantile regression CaViar model (Engle and Manganelli, 2004); and parametric approaches e.g. Riskmetrics (JP. Morgan, 1996).

Parametric approach is one of the most used by financial institution. This approach usually assumes that the asset returns follow a normal distribution. This assumption simplifies the computation of VaR considerably. However, it is inconsistent with the empirical evidence of asset returns which finds that the distribution of asset returns is skewed, fat-tailed, and peaked around the mean (see Bollerslev (1987)). This implies that extreme events are much more likely to occur in practice than would be predicted by the symmetric thinner-tailed normal distribution. Furthermore, the normality assumption can produce VaR numbers that are inappropriate measures of the true risk faced by financial institutions.

As student- $t$  distribution has fatter tails than normal distribution, this distribution has been commonly used in finance and risk management, particularly to model conditional asset return (Bollerslev (1987)). The empirical evidence of this distribution performance in estimating VaR is ambiguous. Some papers show that the student- $t$  distribution performs better than the normal distribution (see Abad and Benito (2012) and Polanski and Stoja (2010)) while other papers report that the student- $t$  distribution overestimates the proportion of exceptions (see Angelidis *et al.* (2007) and Guermat and Harris (2002)).

The student- $t$  distribution can often account well for the excess kurtosis found in common asset returns, but this distribution does not capture the skewness of the returns. Taking this into account, one direction for research in risk management involves searching for other distribution functions that capture these characteristics. Some applications of other distributions to forecasting VaR can be found Chen *et al.* (2012), Polanski and Stoja (2010), Bali and Theodossiou (2008), Bali *et al.* (2008), Haas *et al.* (2004), Zhang and Cheng (2005), Haas (2009), Ausín and Galeano (2007), Xu and Wirjanto (2010) and Kuester *et al.* (2006). They found that the skewness distributions provided a more accurate VaR estimate. Some of these papers showed that in the context of the parametric method, the VaR estimations obtained with models involving a mixture with normal distributions (and student- $t$  distributions) are generally quite precise.

This paper contributes to the existing literature showing that skewed distributions performance better than the normal in modelling the tail behaviour of asset returns. Moreover, in a comparison of several skewed distributions, we find that the skewness generalised- $t$  distribution (SGT) is the best one in fitting data. In addition, we find that this distribution produces accurate VaR estimates considering several statistical accuracy tests and minimizes the loss functions considered.

In the next section, we present the methodology used to estimate VaR and resume the statistical test and the loss function that used to evaluate the performance of the VaR estimates methods. In section three, we present the empirical results. The last section includes the main conclusions.

## 2. METHODOLOGY

According to Jorion (2001), VaR measure is defined as the worst expected loss over a given horizon under normal market conditions at a given level of confidence. The VaR is thus a conditional quantile of the asset return loss distribution. Let  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  be identically distributed independent random variables representing the financial returns. Use  $F(r)$  to denote the cumulative distribution function,  $F(r) = \Pr(r_t < r | \Omega_{t-1})$ , conditionally on the information set  $\Omega_{t-1}$  that is available at time  $t-1$ . Assume that  $\{r_t\}$  follows the stochastic process  $r_t = \mu + \varepsilon_t$  where  $\varepsilon_t = z_t \sigma_t$   $z_t \sim iid(0,1)$ ,  $\mu$  is the conditional mean,  $\sigma_t$  the conditional standard deviation of returns and  $z_t$  has the conditional distribution function  $G(z)$ ,  $G(z) = \Pr(z_t < z | \Omega_{t-1})$ . The VaR with a given probability  $\alpha \in (0,1)$ , denoted by  $VaR(\alpha)$ , is defined as the  $\alpha$  quantile of the probability distribution of financial returns:  $F(VaR(\alpha)) = \Pr(r_t < VaR(\alpha)) = \alpha$

Under the framework of the parametric techniques (Jorion, 2001), the conditional VaR estimate for one day holding period is obtained as  $VaR_t = \mu_t + \hat{\sigma}_t K_\alpha$ , where  $K_\alpha$  denotes the corresponding quantile of the distribution of the standardized returns at a given confidence level 1-.

In this paper we assume the conditional mean is zero. As it will be discussed later in the paper, having obtained significant evidence from Engle and Ng (1993) test on the fact that good and bad news have a different impact on conditional volatilities of asset returns, we use the Exponential GARCH model of Nelson (1991) to estimate  $\sigma_t$ . Finally, we estimate the distribution of the standardized returns by Normal,  $t$ -Student, Skewness  $t$ -Generalised (SGT) of Theodossiou (1998), Skewness Error Generalised (SGED) of Theodossiou (2001), Skewness  $t$ -Student (SSD) of Hansen (1994) and Inverse Hyperbolic Sign (IHS) distribution of Johnson (1949).

In a second stage, we test *the accuracy* of VaR estimates under these distributions. We use four standard tests: unconditional and conditional coverage tests, the Back-Testing criterion and the dynamic quantile test. We have an exception when  $r_{t+1} < VaR(\alpha)$  and then the exception indicator variable ( $I_{t+1}$ ) is equal one (zero in other case). Kupiec (1995) shows that the *unconditional coverage test* has as a null hypothesis  $\hat{\alpha} = \alpha$ , with a likelihood ratio statistic  $(LR_{uc} = 2 \left[ \log(\hat{\alpha}^x (1-\hat{\alpha})^{N-x}) - \log(\alpha^x (1-\alpha)^{N-x}) \right])$  which follows an asymptotic  $\chi^2(1)$  distribution. A similar test for the significance of the departure of  $\hat{\alpha}$  from  $\alpha$  is the *back-testing criterion* statistic  $Z = (N\hat{\alpha} - N\alpha) / \sqrt{N\alpha(1-\alpha)}$  which follows an asymptotic  $N(0,1)$  distribution. The *conditional coverage test* (Christoffersen, 1998) jointly examines if the percentage of exceptions is statistically equal to the ex-

pected one and the serial independence of  $I_{t+1}$ . The likelihood ratio statistic of the conditional coverage test is  $LR_{cc}=LR_{uc}+LR_{ind}$ , which is asymptotically distributed  $\chi^2(2)$ , and the  $LR_{ind}$  statistic is the likelihood ratio statistic for the hypothesis of serial independence against first-order Markov dependence. Finally, the dynamic quantile test proposed by Engle and Manganelli (2004) examines if the exception indicator is uncorrelated with any variable that belongs to the information set  $\Omega_{t-1}$  available when the VaR was calculated. This is a Wald test of the hypothesis that all slopes are zero in a regression of exception indicator variable on a constant, 5 lags and the VaR. Additionally, we evaluate the magnitude of the losses experienced (the distance between the observed returns and the forecasted VaR) when an exception occurs. We penalize when exception occurs with the square distance.

### 3. EMPIRICAL RESULTS

#### 3.1 Data and descriptive statistics

The data consist of closing daily returns<sup>1</sup> on six composite indexes from 1/1/2000 to 11/30/2012 (around 3250 observation). The indexes are: Japanese Nikkei, Argentine Merval, US S&P 500 and Dow Jones, French CAC40 and the Spanish IBEX-35.

Figure 1 show the daily returns of the data and Table 1 provides basic descriptive statistics of the data. For all index, the unconditional mean of daily return is very close to zero. The unconditional standard deviation is especially high for Merval (2.14). For the rest of stock index returns the standard deviation moves between 1.27 and 1.58. Taking back to the Figure 1, we can see that the range fluctuation of the returns is not constant, which means that the variance of these returns change in the time. From 2003 to the beginning of 2007 was very quiet period. In August 2007 the financial market tensions started which were followed by a global financial and economic crisis led to significantly rising volatility of returns. This increase was especially important after August 2008 coinciding with the fall of Lehman Brothers. In the last two years of the sample, we observe a stable period.

---

<sup>1</sup> Returns are calculated as  $r_t = \ln(I_t) - \ln(I_{t-1})$ , where  $I_t$  is the value of the stock market index at time  $t$ .

**Table 1**  
Descriptive Statistics

	<b>NIKKEY</b>	<b>MERVAL</b>	<b>S&amp;P500</b>	<b>DJ</b>	<b>CAC</b>	<b>IBEX</b>
Mean	-0.02	0.05	-0.001	0.01	-0.02	-0.01
Median	0.00	0.09	0.05	0.05	0.02	0.06
Maximum	13.234	16.117	10.957	10.089	10.595	13.484
Minimum	-12.111	-12.952	-9.470	-8.70	-9.472	-9.5858
Std. Dev.	1.568	2.140	1.354	1.265	1.572	1.5760
Skeweness	-0.393**	-0.093*	-0.158**	-0.185**	0.038	0.1227**
	(0.04)	(0.04)	(0.04)	(0.04)	(0.04)	(0.04)
Kurtosis	9.686**	7.944**	10.293**	9.372**	7.494**	7.8219**
	(0.09)	(0.09)	(0.09)	(0.09)	(0.09)	(0.09)
Jarque Bera	5996	3243	7212	5515	2782	3177
Probability	(0.000)	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.001)

$\sqrt{6/n}$  and  $\sqrt{24/n}$  respectively. The JB statistic is distributed as the Chi-square with two degrees of freedom. \*, \*\* denote significance at the 5% and 1% level respectively.

The skewness  $s\kappa = 2$  and  $\eta = \infty$ ) which indicates that the set of returns are characterized by excess kurtosis.

The above results provide strong support to the hypothesis that stock returns are not normal. As the normal distribution is nested within the SGT, SGED and SSD distributions we can use log-likelihood ratio for testing the null hypothesis of normality against that of SGT, SGED and SSD (see Table 2)<sup>2</sup>. For all indexes considered, the  $LR_{NORMAL}$  statistics are statistically significant at the 1% level, providing evidence against the normality hypothesis. The SGT nets several distributions we have considered in this paper<sup>3</sup>. Overall, for all indices considered, the  $LR_{SGT}$  statistic indicates rejection of the SGED, the SSD, and the student- $t$  in favor of the SGT (see Table 2).

<sup>2</sup> For  $\lambda=0$ ,  $\kappa = 2$  and  $\eta = \infty$  the SGT give a normal distribution. For  $\lambda=0$ ,  $\eta = \infty$  and  $\kappa = 2$  the SGED and SSD give a normal distribution. The LR ratio for IHS has not been calculated because the normal distribution is not nested within HIS.

<sup>3</sup> Specifically, it gives for  $\eta = \infty$  the skewed generalized error distribution (SGED), for  $k = 2$  the skewed  $t$  of Hansen (1994), for  $\lambda=0$  and  $k = 2$  the student- $t$  distribution and for  $\lambda=0$ ,  $n = \infty$  and  $k = 2$  the normal distribution [see Hansen, McDonald and Theodossiou (2007) for a comprehensive survey on the skewed fat tailed distributions].

**Table 2**  
Maximum likelihood estimates of alternative distribution functions

	$\mu$	S.E.	$\sigma$	S.E.	$\lambda$	S.E.	$\eta$	S.E.	$\kappa$	S.E.	Log-L	LR <sub>NORMAL</sub>	LR <sub>SGT</sub>
<b>NIKKEI</b>													
SGT	-0.000	(0.000)	0.016**	(0.001)	-0.047*	(0.021)	4.766**	(0.282)	1.896**	(0.078)	8920.4	463.2**	--
SGED	-0.000	(0.000)	0.015**	(0.000)	-0.041**	(0.004)			1.133**	(0.033)	8897.4	417.2**	46.0**
SSD	-0.000	(0.000)	0.016**	(0.000)	-0.048*	(0.021)	4.442**	(0.236)			8920.3	463.0**	0.2
IHS	-0.000	(0.000)	0.015**	(0.000)	-0.086**	(0.032)			1.472**	(0.054)	8918.6	--	--
Symmetric t	0.000	(0.000)	0.016**	(0.001)			4.404**	(0.232)			8918.2	--	4.4
Normal	-0.000	(0.000)	0.016**	(0.000)							8688.8	--	--
<b>MERVAL</b>													
SGT	0.000	(0.000)	0.022**	(0.001)	-0.043*	(0.018)	4.456**	(0.241)	1.531**	(0.051)	8016.9	612.6**	--
SGED	0.000	(0.000)	0.021**	(0.000)	-0.033**	(0.002)			0.998**	(0.028)	8003	584.8**	27.8**
SSD	0.000	(0.000)	0.023**	(0.000)	-0.047**	(0.018)	3.083**	(0.075)			8012.5	603.8**	8.8*
IHS	0.000	(0.000)	0.022**	(0.000)	-0.068*	(0.027)			1.171**	(0.029)	8017	--	--
Symmetric t	0.001*	(0.000)	0.023**	(0.001)			3.088**	(0.078)			8010.4	--	13.0**
Normal	0.000	(0.000)	0.021**	(0.000)							7710.6	--	--
<b>S&amp;P 500</b>													
SGT	-0.000	(0.000)	0.014**	(0.001)	-0.064**	(0.013)	5.735**	(0.430)	1.239**	(0.038)	9777.7	824.2**	--
SGED	-0.000	(0.000)	0.013**	(0.000)	-0.062	(--)			0.902**	(0.008)	9769.2	807.2**	17.0**
SSD	-0.000	(0.000)	0.016**	(0.000)	-0.069**	(0.016)	2.760**	(0.046)			9762.2	793.2**	31.0**
IHS	0.000	(0.000)	0.014**	(0.000)	-0.087**	(0.024)			1.079**	(0.023)	9769.2	--	--
Symmetric t	0.000	(0.000)	0.015**	(0.001)			2.770**	(0.049)			9757.1	--	41.2**
Normal	-0.000	(0.000)	0.014**	(0.000)							9365.6	--	--
<b>DOW JONES</b>													
SGT	0.000	(0.000)	0.013**	(0.001)	-0.058**	(0.017)	4.496**	(0.241)	1.524**	(0.051)	9929.7	682.6**	--
SGED	0.000	(0.000)	0.012**	(0.000)	-0.057**	(0.002)			0.983**	(0.027)	9914.2	651.6**	31.0**
SSD	0.000	(0.000)	0.014**	(0.000)	-0.059**	(0.018)	3.122**	(0.078)			9925.1	673.4**	9.2**
IHS	0.000	(0.000)	0.013**	(0.000)	-0.088**	(0.026)			1.178**	(0.029)	9928.4	--	--
Symmetric t	0.000	(0.000)	0.014**	(0.001)			3.122**	(0.080)			9921.6	--	16.2**
Normal	0.000	(0.000)	0.013**	(0.000)							9588.4	--	--
<b>CAC 40</b>													
SGT	-0.000	(0.000)	0.016**	(0.001)	-0.062**	(0.018)	4.545**	(0.249)	1.673**	(0.059)	9297.4	523.6**	--
SGED	0.000	(0.000)	0.015**	(0.000)	-0.044*	(0.021)			1.065**	(0.030)	9281.0	490.8**	32.8**
SSD	0.000	(0.000)	0.016**	(0.000)	-0.066**	(0.019)	3.540**	(0.120)			9295.3	519.4**	4.2*
IHS	0.000	(0.000)	0.016**	(0.000)	-0.094**	(0.028)			1.277**	(0.036)	9297.4	--	--
Symmetric t	0.000	(0.000)	0.016**	(0.001)			3.533**	(0.122)			9291.1	--	12.6**
Normal	0.000	(0.000)	0.016**	(0.000)							9035.6	--	--
<b>IBEX 35</b>													
SGT	-0.000	(0.000)	0.016**	(0.001)	-0.073**	(0.017)	7.127**	(0.717)	1.380**	(0.045)	9176.8	484.2**	--
SGED	-0.000	(0.000)	0.016**	(0.000)	-0.068	(--)			1.050**	(0.030)	9169.8	470.2**	14.0**
SSD	-0.000	(0.000)	0.017**	(0.000)	-0.069**	(0.018)	3.548**	(0.125)			9167.1	464.8**	19.4**
IHS	-0.000	(0.000)	0.016**	(0.000)	-0.092**	(0.028)			1.270**	(0.037)	9170.9	--	--
Symmetric t	0.000	(0.000)	0.016**	(0.001)			3.584**	(0.132)			9162.4	--	28.8**
Normal	-0.000	(0.000)	0.016**	(0.000)							8934.7	--	--

Note: Parameter estimates of the Normal, SGT of Theodossiou (1998), SGED of Theodossiou (2001), SSD of Hansen (1994), IHS of Johnson (1949) and Student-t distribution. S.E. denote standard errors (in parentheses). Six stock market returns in the period 1/1/2000-11/30/2012.  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$  and  $\eta$  are the estimated mean, standard deviation, skewness parameter, and tail-tickness parameter;  $\kappa$  represents the peakness parameter; Log-L is the maximum likelihood value.  $LR_{Normal}$  is the LR statistic from testing the null hypothesis that the daily returns are distributed as Normal against they are distributed as SGT, SGED or SSD.  $LR_{SGT}$  is the LR statistic from testing the null hypothesis of alternative distribution against the SGT. An (-\*) denote significance at the 5%(1%) level.



### 3.2. Estimating the conditional volatility

To represent the dynamic behaviour of conditional variances, GARCH specifications were used. To identify the orders p,q of the process, traditional Box-Jenkins techniques were used, together with more formal Lagrange multipliers tests. To test for the possible existence of this leverage effect in volatility, the behaviour of standardized residuals was examined from the estimation of the conditional mean model, using the bias and sign tests proposed by Engle and Ng (1993). The sign-bias test focuses on the different impacts that positive and negative innovations have on volatility. In all cases, the results of the test (not reported) detect a leverage effect. Having obtained significant evidence on the fact that good and bad news have a different impact on conditional volatilities of asset returns, we use the Exponential GARCH model of Nelson (1991) to estimate the conditional variance returns needed for conditional VaR analysis.

Table 3 present the EGARCH estimated parameter. For all indexes consider the coefficient  $\gamma$  is negative and statistically significant, which means that volatility increases at a higher rate when yields are negative compared with when they are positive. Parameter  $\beta_1$  is positive and statistically significant. It means that the innovations superior to the mean have a deeper impact on current volatility than those inferior.

**Table 3**  
EGARCH(1,1) Models

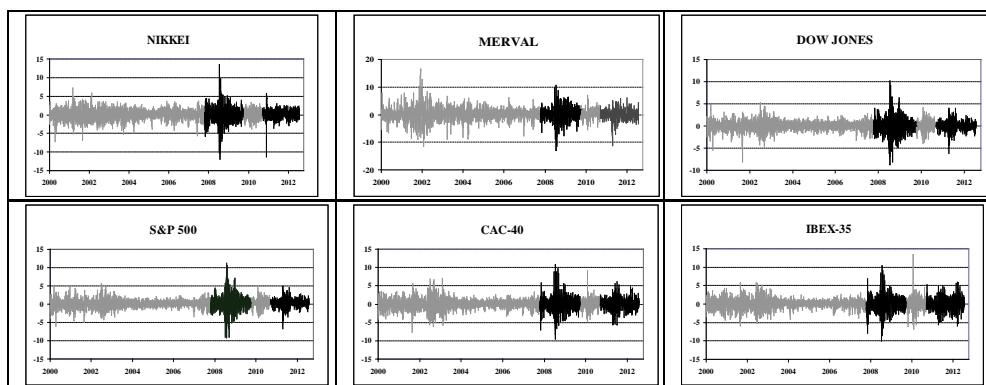
$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 [ |z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|) ] + \beta_2 \ln \sigma_{t-1}^2 + \gamma z_{t-1}$$

	$\alpha_0$	$\beta_2$	$\beta_1$	$\gamma$
<b>NIKKEI</b>	-0.438** (0.042)	0.966** (0.004)	0.189** (0.016)	-0.101** (0.009)
<b>MERVAL</b>	-0.411** (0.032)	0.966** (0.003)	0.190** (0.011)	-0.0494** (0.006)
<b>S&amp;P 500</b>	-0.263** (0.022)	0.980** (0.017)	0.107** (0.012)	-0.133** (0.008)
<b>DOW JONES</b>	-0.250** (0.022)	0.981** (0.002)	0.098** (0.012)	-0.122** (0.007)
<b>CAC 40</b>	-0.228** (0.021)	0.983** (0.002)	0.093** (0.012)	-0.140** (0.009)
<b>IBEX 35</b>	-0.261** (0.023)	0.981** (0.002)	0.118** (0.013)	-0.115** (0.007)

Note: Standard error in parenthesis. An \*\*(\*) denote significance at the 1% (5%) level.

### 3.3. Forecasting VaR

In this section we compare SGT and normal distribution in terms of VaR. The comparison is carrying out evaluating accurate VaR estimates and calculating a loss function. For each distribution we use parametric approaches to forecasting VaR out-of-sample one-step-ahead at 1% and 0.25% confidence level. To guarantee the robustness of the results, we compare these distributions in two different samples: a volatility period (2008-2009) and a more stable and recent period (2011-2012). In Figure 1, we delimit between bars both periods.



**Figure 1**

Stock index returns. This figure illustrates the daily evolution of returns of some indexes (Japanese Nikkei, Merval and S&P 500, US Dow Jones Industrial Average, French CAC40 and the Spanish IBEX-35) from January 3, 2000 to November 30, 2012. Source: Bloomberg.

**Table 4**  
Accuracy test, 1% level

	Nikkei	Merval	S&P500	DJ	CAC	IBEX
<b>Panel A: 2008-09 (1%)</b>						
<b>VaR_Normal</b>	<b>2.87%</b>	<b>2.24%</b>	<b>3.56%</b>	<b>2.77%</b>	<b>2.34%</b>	<b>2.17%</b>
LR <sub>UC</sub>	4.970*	2.45	8.770**	4.696*	2.943	2.27
BTC	4.149**	2.762**	5.792**	4.003**	3.056**	2.640**
LR <sub>IND</sub>	0.31	0.219	0.579	0.348	0.251	0.212
LR <sub>CC</sub>	5.28	2.67	9.349**	5.043	3.193	2.482
DQ	1.9688	2.77	0.362	0.578*	1.053	2.477
<b>VaR_SGT</b>	<b>1.84%</b>	<b>1.22%</b>	<b>1.19%</b>	<b>1.19%</b>	<b>2.15%</b>	<b>1.77%</b>
LR <sub>UC</sub>	1.221	0.009	0.074	0.074	2.229	1.079
BTC	1.874	0.494	0.425	0.425	2.611 <sup>□□</sup>	1.748
LR <sub>IND</sub>	0.116	0.064	0.063	0.063	0.210	0.141
LR <sub>CC</sub>	1.338	0.164	0.137	0.137	2.439	1.221
DQ	0.333	0.075	0.437	0.227	0.691	3.949*
<b>Panel B: 2011-12 (1%)</b>						
<b>VaR_Normal</b>	<b>1.27%</b>	<b>1.28%</b>	<b>2.28%</b>	<b>1.45%</b>	<b>0.61%</b>	<b>1.21%</b>
LR <sub>UC</sub>	0.136	0.15	2.551	0.38	0.389	0.093
BTC	0.582	0.613	2.829 <sup>□□</sup>	0.998	-0.877	0.479
LR <sub>IND</sub>	1.568	0.068	0.224	0.090	0.016	0.064
LR <sub>CC</sub>	1.703	0.218	2.774	0.469	0.405	0.158
DQ	2.052	2.035	0.763	1.495	0.095	0.221
<b>VaR_SGT</b>	<b>0.63%</b>	<b>1.07%</b>	<b>1.45%</b>	<b>1.45%</b>	<b>1.01%</b>	<b>1.01%</b>
LR <sub>UC</sub>	0.322	0.009	0.38	0.38	0	0
BTC	-0.803	0.149	0.998	0.998	0.027	0.027
LR <sub>IND</sub>	2.908	0.047	0.09	1.311	0.045	0.045
LR <sub>CC</sub>	3.23	0.056	0.469	1.69	0.045	0.045
DQ	11.043**	3.283	9.392**	2.753	0.538	0.196

Note: The statistics are as follows: (i) the unconditional coverage test (LR<sub>UC</sub>); (ii) the back-testing criterion (BTC); (iii) statistics for serial independence (LR<sub>IND</sub>); (iv) the Conditional Coverage test (LR<sub>CC</sub>) and (v) the Dynamic Quantile test (DQ). An \* denote that the rejection of the VaR estimate is accurate. The shaded cells indicate that the null hypothesis that the VaR estimate is accurate is not rejected by any test.

The results of accurate test are presented in tables 4 and 5 for 1% and 0.25% respectively. In both tables, there are two panels: the high volatility period (panel A) and the stable period (panel B). In both panels, we present the percentage of exceptions obtained with each distribution (SGT and normal). Below these percentages, we present the five statistics used to test the accuracy of the VaR estimates. When the null hypothesis that “*the VaR estimate is accurate*” has not been rejected by any test, we have shaded the region of the figure that represents the percentage of exception.

**Table 5**  
Accuracy test, 0.25% level

	<b>Nikkei</b>	<b>Merval</b>	<b>S&amp;P500</b>	<b>DJ</b>	<b>CAC</b>	<b>IBEX</b>
<b>Panel A: 2008-09 (0.25%)</b>						
<b>VaR_Normal</b>	<b>0.82%</b>	<b>0.81%</b>	<b>1.19%</b>	<b>0.59%</b>	<b>0.98%</b>	<b>1.18%</b>
LR <sub>UC</sub>	1.718	1.703	4.028*	0.749	2.698	4.003*
BTC	2.520*	2.506*	4.222**	1.548	3.292**	4.201**
LR <sub>IND</sub>	0.016	0.029	0.063	0.016	0.043	0.062
LR <sub>CC</sub>	1.734	1.732	4.09	0.764	2.741	4.065
DQ	0.023	0.044	0.08	0.089	0.08	9.833**
<b>VaR_SGT</b>	<b>0.61%</b>	<b>0.20%</b>	<b>0.20%</b>	<b>0.20%</b>	<b>0.78%</b>	<b>0.79%</b>
LR <sub>UC</sub>	0.801	0.02	0.026	0.026	1.603	1.621
BTC	1.614	-0.206	-0.234	-0.234	2.407 <sup>□</sup>	2.426*
LR <sub>IND</sub>	0.007	0.002	0.002	0.002	0.027	0.028
LR <sub>CC</sub>	0.809	0.021	0.027	0.027	1.63	1.649
DQ	0.008	0.139	0.045	0.107	0.063	0.065
<b>Panel B: 2011-12 (0.25%)</b>						
<b>VaR_Normal</b>	<b>0.42%</b>	<b>0.64%</b>	<b>1.24%</b>	<b>1.24%</b>	<b>0.40%</b>	<b>0.40%</b>
LR <sub>UC</sub>	0.202	0.867	4.222*	4.222*	0.174	0.174
BTC	0.75	1.694	4.374**	4.374**	0.689	0.689
LR <sub>IND</sub>	3.811	0.017	0.066	0.066	0.007	0.007
LR <sub>CC</sub>	4.013	0.884	4.288	4.288	0.181	0.181
DQ	54.681**	10.678**	2.167	2.18	0.03	0.044
<b>VaR_SGT</b>	<b>0.42%</b>	<b>0.64%</b>	<b>0.62%</b>	<b>0.41%</b>	<b>0.61%</b>	<b>0.20%</b>
LR <sub>UC</sub>	0.202	0.867	0.821	0.19	0.782	0.021
BTC	0.75	1.694	1.637	0.725	1.59	-0.212
LR <sub>IND</sub>	3.811	0.017	0.016	0.007	0.016	0.002
LR <sub>CC</sub>	4.013	0.884	0.837	0.198	0.798	0.023
DQ	54.681**	10.998**	0.023	0.551	0.511	0.255

Note: The statistics are as follows: (i) the unconditional coverage test (LR<sub>UC</sub>); (ii) the back-testing criterion (BTC); (iii) statistics for serial independence (LR<sub>IND</sub>); (iv) the Conditional Coverage test (LR<sub>CC</sub>) and (v) the Dynamic Quantile test (DQ). An \* denote that the rejection of the VaR estimate is accurate. The shaded cells indicate that the null hypothesis that the VaR estimate is accurate is not rejected by any test.

In the volatile period, VaR estimate obtained under a SGT distribution are accurate for four of the six indexes consider (Nikkei, Merval, Dow Jones and S&P 500). Just only CAC 40 and IBEX 35 fail to pass back-testing tests. These results doesn't depend on the confidence level. The results obtained by normal distribution are very poor. At 1% level, anyone of the indexes considered pass backtesting tests. At 0.25% level, this distribution provide accurate VaR estimate just only Dow-Jones. In second sample or stable period, the results are pretty similar. At 1% level, SGT distribution provide accurate VaR estimate for four of the six indexes considered. At this level, the results obtained by normal distribution are as good as SGT providing accurate VaR estimate for five of the six indexes consider. For this level the superiority of SGT is not so clear. At 0.25% level, SGT distribution performance as well as at 1% level. This distribution provides accurate VaR estimates in four of the six indexes considered. However, normal distribution performances very poorly. At this level, normal distribution provides accurate VaR estimate just only for CAC 40 and IBEX 35. From this results we can conclude that SGT distribution provide more accurate VaR estimate than normal distribution. This superiority is more evident at higher level.

Finally, Table 6 reports the average of the penalty scores from a loss function obtained by VaR under SGT and normal distribution in both periods. In volatile period, the values indicate that SGT distribution produces the lowest losses, except in the Nikkey index. These results doesn't depend on the confidence level. In the stable period, we detect similar results. SGT distribution produces the lowest losses, except in the Nikkey and CAC index. Overall, SGT distribution provides the lowest losses for almost all indexes, both confidence levels and both periods.

**Table 6**  
Magnitude of the losses experienced

	Level	2008-2009		2011-2012	
		EGARCH-N	EGARCH-SGT	EGARCH-N	EGARCH-SGT
NIKKEI	1.00%	<b>0.00338</b>	0.00418	0.00786	0.01871
	0.25%	<b>0.00065</b>	0.00132	<b>0.00463</b>	0.01563
MERVAL	1.00%	0.00667	<b>0.00269</b>	0.01131	<b>0.00963</b>
	0.25%	0.00191	<b>0.00020</b>	0.00718	<b>0.00338</b>
S&P 500	1.00%	0.00617	<b>0.00297</b>	0.00248	<b>0.00082</b>
	0.25%	0.00293	<b>0.00099</b>	0.00104	<b>0.00003</b>
DOW JONES	1.00%	0.00220	<b>0.00059</b>	0.00175	<b>0.00055</b>
	0.25%	0.00044	<b>0.00001</b>	0.00063	<b>0.00002</b>
CAC 40	1.00%	0.00568	<b>0.00447</b>	<b>0.00098</b>	0.00215
	0.25%	0.00282	<b>0.00155</b>	0.00050	0.00090
IBEX 35	1.00%	0.00554	<b>0.00521</b>	0.00113	<b>0.00070</b>
	0.25%	0.00274	<b>0.00197</b>	0.00029	<b>0.00000</b>

Note: report the average of the loss function of each VaR model in both periods. The average was multiplied by 1,000. Boldface figures denote the minimum value for the average of the loss function for each index.

## 4. CONCLUSION

This paper evaluates the performance of several skewed and symmetric distributions in modeling the tail behavior of daily returns on six stocks indexes. The skewed distributions considered are the skewness student- $t$  distribution of Hansen (1994), the exponential generalized beta of the second kind of McDonald and Xu (1995), the skewness generalised- $t$  distribution of Theodossiou (1998) and the inverse hyperbolic sign of Johnson (1949). The symmetric distributions are normal and student- $t$ .

The maximum likelihood estimates show that the skewness, tail-thickness and peakness parameters of these distributions are statistically significant. The tests indicate strong rejection of the other distributions in favour of the SGT distribution. These results show that the skewed distributions performance better than normal distribution in modeling the tail behavior of portfolio returns.

In addition, we also evaluate the performance of the SGT distribution in estimating VaR thresholds at 1% and 0.25% confidence level. The out of sample forecasting period covers a long period, encompassing both stable and high fluctuation periods, including the most unsteady period of the global financial crisis. To evaluate the forecasting VaR we use several accurate tests and a loss function. In both samples, the empirical results indicate that the SGT distribution provides more accurate out of sample forecast VaR than the normal distribution and provides lowest losses for almost all indexes.

## REFERENCES

- Abad P. and Benito S. (2012). "A detailed comparison of Value at Risk in international stock exchanges". *Mathematics and Computers in Simulation*, forthcoming.
- Angelidis T.; Benos A; Degiannakis S. (2007). "A robust VaR model under different time periods and weighting schemes". *Review of Quantitative Finance and Accounting*, vol. 28, nº 2, 187-201.
- Ausín M.; Galeano P. (2007). "Bayesian estimation of the gaussian mixture GARCH model". *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 51, nº 5, 2636-2652.
- Bali T.; Theodossiou P. (2008). "Risk measurement performance of alternative distribution functions". *The Journal of Risk and Insurance*, vol. 75, nº 2, 411-437.
- Bali T.; Theodossiou P. (2007). "A conditional-SGT-VaR approach with alternative GARCH models". *Annals of Operations Research*, 151, 241-267.
- Bali T.; Hengyong M.; Tang Y. (2008). "The role of autoregressive conditional skewness and kurtosis in the estimation of conditional VaR". *Journal of Banking & Finance*, vol. 32, nº 2, 269-282.

- Bollerslev T. (1987). "A Conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return". *Review of Economics and Statistics*, 69, 542-547.
- Chen C.; Gerlach R.; Lin E.; Lee W. (2012). "Bayesian forecasting for financial risk management, pre and post the global financial crisis". *Journal of Forecasting*, vol. 31, 8, 661-687.
- Christoffersen P. (1998). "Evaluating Interval forecasting". *International Economic Review*, 39, 841-862.
- Engle R.; Manganelli S. (2004). *CAViaR*: "Conditional autoregressive Value at Risk by regression quantiles". *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 22, nº 4, 367-381.
- Engle R.; Ng V. (1993). "Measuring and testing the impact of news on volatility". *Journal of Finance*, 48, 1749-1778.
- Guermat C.; Harris R. (2002). "Forecasting Value-at-Risk allowing for time variation in the variance and kurtosis of portfolio returns". *International Journal of Forecasting*, 18, 409-419.
- Haas M. (2009). "Modelling skewness and kurtosis with the skewed Gauss-Laplace sum distribution". *Applied Economics Letters*, vol. 16, nº 10-12, 1277-1283.
- Haas M.; Mitnik S.; Paoletta M. (2004). "Mixed normal conditional heteroskedasticity". *Journal of Financial Econometrics*, vol.2, nº 2, 211-250.
- Hansen B. (1994). "Autoregressive conditional density estimation". *International Economic Review*, 35, 705-730.
- Hansen C.; McDonald J; Theodossiou P. (2007). *Some flexible parametric models for partially adaptive estimators of econometric models*. [Web] 2007 <http://www.economics-ejournal.org/economics/discussionpapers/2007-13> [6 junio 2013]
- Morgan JP. (1996). *Riskmetrics technical document*. New York: 4th ed., 1996.
- Johnson N.L. (1949). "Systems of frequency curves generated by methods of translations". *Biometrika*, 36, 149-176.
- Jorion P. (2001). *Value at Risk: The new benchmark for managing financial risk*. McGraw-Hill.
- Kuester K.; Mitnik S; Paoletta M. (2006). "Value-at-Risk prediction: A comparison of alternative strategies". *Journal of Financial Econometrics*, vol. 4, nº 1, 53-89.
- Kupiec P. (1995). "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models". *Journal of Derivatives*, 2, 73-84.

McDonald J.; Xu Y. (1995). "A generalization of the Beta distribution with applications". *Journal of Econometrics*, March-April, vol. 66, nº 1-2, 133-152.

Nelson D. (1991). "Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach". *Econometrica*, vol. 59, nº 2, 347-370.

Polanski A.; Stoja E. (2010). "Incorporating higher moments into Value-at-Risk forecasting". *Journal of Forecasting*, vol. 29, nº 6, 523-535.

Theodossiou P. (2001). "Skewness and kurtosis in financial data and the pricing of options". *Working Paper*. Rutgers University.

Theodossiou P. (1998). "Financial data and skewed generalized t distribution". *Management Science*, 44, 1650-1661.

Xu D.; Wirjanto T. (2010). "An empirical characteristic function approach to VaR under a mixture-of-normal distribution with time-varying volatility". *The Journal of Derivatives*, vol. 18, nº 1, 39-58.

Zhang M.H.; Cheng Q.S. (2005). "An approach to VaR for capital markets with gaussian mixture". *Applied Mathematics and Computations*, vol. 168, 1079-1085.

## Ponencia 2

# RISK NEUTRAL VALUATION WITH LINEAR PROGRAMMING<sup>1</sup>

Olivia Peraita Ezcurra and José Luis Vilar Zanón

### ABSTRACT

Avellaneda *et al.*, 2001) develop a methodology for calculating risk neutral probabilities by means of the relative entropy minimization criteria subject to the market value of a certain set of traded assets (benchmarks). This is also known as Weighted Monte Carlo, and is part of a rather practical method for valuing assets and hedging risk (Arrieta, 2012). In this paper we explore an alternative method to calculate risk neutral probability, which consists also in an optimization criteria based in relative entropy, though considering another utility function that results in a different pseudo-distance between prior and posterior probabilities. This pseudo-distance is in fact the absolute difference between prior and posterior probability masses. The minimization can then be expressed in terms of a linear goal program, yielding the risk neutral probability as the solution. Numerical calculations have been carried with the help of MATLAB, GAMS and CPLEX.

### 1. INTRODUCTION

The topic of this paper is the retrieval of risk neutral probabilities from the option prices. This has been traditionally an important field of research since the last quarter of the twentieth century. The reasons underlying that interest are both practical and theoretical.

On the practical side, the construction of models for the valuation of options like the Black Scholes model (Black and Scholes, 1973) allowed a wide growth of the option market until the 1987 crash. Since then economic agents started to consider more thoroughly the model they were using detecting some inconsistencies that affected the core of the theory. Particularly serious was the conclusion that, after the crash, markets seemed to follow no longer the hypothesis of a constant volatility across different strikes when the rest of the parameters were set constant in the Black-Scholes formula. Volatilities for different strikes recovered from the market

---

<sup>1</sup> Research granted under project ECO2010-22065-C03-01, from MICIN.



were called implied volatilities and the plots denouncing divergence from the theoretical constant case were named “smiles”. Also, the inadequacy of the normal hypothesis for the rate of return was made evident by many statistical tests applied to data sets. Thus the usual modelling procedure consisting in postulating some hypothesis, constructing the model, obtaining conclusions and finally applying them trying to match real world, appeared as inadequate. In few words, economic agents were aware that the formulation of unrealistic hypothesis could drive them to ill conclusions resulting in heavy losses. Then a new methodology began to arise, whose main goal was not trying to guess the best model going from theoretical hypothesising to practical testing, but rather trying to infer the model from reality in some kind of inverse engineering exercise. This strategy stood to overcome the mentioned drawbacks. The main idea was not to formulate any prior hypothesis but better tracking some theoretical milestones against the real world trying to learn the more the better from the occurrence of events in the market. That methodology consists today in a variety of techniques inside some of which we place our work, and as a whole is referred as *inverse methods* (J. Jackwerth, 2004).

On the theoretical side, everybody agrees that obtaining conclusions about the risk neutral prices or probabilities, to some extent free of theoretical miss-assumptions and mainly deduced from the market behaviour, is such an interesting research program. For instance it could be very interesting to find risk neutral probabilities that may be used to value new assets, like illiquid options or even futures prices that could even give us a sight in the term interest structure. It is not difficult to agree that the knowledge of risk neutral probabilities could, in the frame of Arrow-Debreu economy model and Arbitrage Pricing Theory (Luenberger, 1997) (Avellaneda and Lawrence, 2000), constitute an interesting tool in some disciplines like valuing derivatives-hedging risk, portfolio management or the study of market risk aversion.

One of the first main attempts to retrieve state prices from observed option prices can be found in (Breedon and Litzenberg, 1978). They suppose a continuous set of call options with strikes  $K$  so the value can be expressed as a function of the strike prices  $K$ . Then they show how the state prices in which spot price  $S$  equals the strike price  $K$  can be obtained as the second derivative of the call price function:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \pi_{S=K} \quad (1.1)$$

This opened a way for recovering state prices from observed option prices though market scarceness of strikes made this approach so much difficult to apply. Few strikes mean few points to interpolate resulting in gross errors to face. No doubt anyhow this is one of the most influential works ever written, still being referred in many papers.

(Sempieri, 1997), (Luenberger, 2002), (J. Jackwerth, 1994) discussed option prices in incomplete markets when many risk neutral probabilities (RNP) exists, presenting the possibility of choosing one of them by means of the maximization of the decision maker utility function. They discussed also characterisation of those RNP

by means of bounds deduced from linear dual programs that express relationships between state prices and options replicating portfolios. Combining these state price bounds with the former relationship (1.1), it is possible to characterize the whole set of RNP fulfilling feasibility (with respect to the bounds) and smoothness requirements (J. Jackwerth, 2004).

(Jackwerth and Rubinstein, 1996) and (Rubinstein and Jackerth, 1997) compare the different methods for RNP recovery. All these methods share the same main-frame consisting in:

- (a) Choosing some frequency distribution for the underlying asset price to be used as a prior seed for the method.
- (b) The prior distribution  $(q_i)_{i=1}^M$  can be either some well-known parametric model (as for instance the log-normal in a Black-Scholes world) or a uniform distribution (as for instance the one obtained by means of a Monte Carlo simulation of the prices).
- (c) Choosing a set of liquid assets (benchmarks) with observed market prices  $(C_j)_{j=1}^N$  then writing them as discounted expectations with respect to the RNP.
- (d) Targeting a posterior distribution  $(p_i)_{i=1}^M$  that will be the RNP. Two main streams have been followed here:
  - (e)
    - Trying to determine the “best” member among a parametric family previously fixed: these are called parametric methods. Think for instance in the log-normal RNP of the Black-Scholes world. The “best” member is calculated by means of some optimization criteria determining the optimal values of the parameters of that family.
    - Not restricting the calculation to any parametric family, giving way to the data for a maximum influence into the result, and a minimum influence for the theoretical model. This last will be restricted to the only design of the underlying price trajectories.
  - (f) Selecting some optimization process whose optimum is the former target, called the posterior distribution. This optimization process consists in a set of constraints and an objective to optimize among the feasible set.
- (g)
  - The feasible set must always take into account the facts that both the result must be a probability distribution and the prices of the benchmarks written as discounted expectation with respect to the RNP must be equal, or at least be near to the market prices. Equality or closeness depends on the kind of applied methodology.
  - The objective expresses some condition to be fulfilled by the posterior with respect the prior distribution. Usually this condition is expressed as

a deviation or pseudo-distance between them, able to be financially and/or mathematically interpreted in some way.

In each case, the mathematical program built up determines the degree of mathematical complexity and numerical stability of a particular method. Also, some smoothness or regularity for the posterior distribution is also welcomed.

As indicated some lines earlier, the methods can be divided in two families, parametric and non-parametric ones.

Examples of parametric methods are (Chang and Tabak 2002) who recovers a parametric form of the RNP through the second derivatives of the option values (Breedon and Litzenberg 1978) applying nonlinear least squares. (Melick and Thomas 1997) and (Cheng 2010) calculate the RNP among mixtures of log-normal distributions. In (Ritchey 1990) the RNP is supposed to be a mixture of normal distributions. Another trend deals with the adscription of the RNP to a family (not a mixture) of distributions. For instance, in (de Jong C., Huisman R. 2000) a student-t distribution is assumed, or in (Corrado 2001) where a generalised Lambda distribution is used.

The non-parametric methods can also be divided in subfamilies depending on which technique is used to track the posterior distribution. We find here Kernel estimation (Bondarenko 2000), least squares (Yatchev A., Härdle W. 2006), curve fitting (Monteiro, Tütüncü and Vicente 2008), and finally maximum entropy (Rubinstein and Jackerth 1997) (Branger 2003) and (Rockinger and Jondeau 2002). From this last branch evolves another line of research deepening in maximum entropy by means of the use of Kullback-Leibler (KL) relative entropy (Samperi 1997) (Avellaneda, 1998) (Avellaneda *et al.* 2001) (Arrieta 2012). The advantage of using entropy is that it furnishes a distribution minimizing the amount of information contained in it, so we can think about as a carrier of the market efficiency hypothesis.

Our work grows up inside this last category. Our aim is to apply a neighbouring technique to KL to retrieve a RNP by means of linear programming (LP), a very simple and well known optimization technique. We will compare our results with those obtained applying the technique explained in (Avellaneda 1998) which has revealed to be quite practical and useful (Arrieta 2012).

We have run a synthetic example simulating European options as benchmarks and, after obtaining the RNP with KL and the LP method proposed in this paper, we have valued other options, obtaining very accurate results in this pricing. For this purpose, we have used Matlab for the KL solution and GAMS for the goal programming using CPLEX as a solver.

In section 2 we introduce the fundamentals on RNP theory linking it to Utility Theory. Section 3 is devoted to resume the KL methodology introduced by (Avellaneda *et al.* 2001) implying the resolution of an equality constrained differential program by means of Lagrange multipliers, while in section 4 we derive our own method

deduced by means of the same way of reasoning though resulting in a linear goal program solvable by means of the simplex algorithm. In section 4 we retrieve a RNP applying the former method while in section 5 we do the same applying our method. We finally write down our conclusions in section 6.

## 2. RISK NEUTRAL PROBABILITIES, UTILITY AND RELATIVE ENTROPY

We first introduce the Arrow-Debreu state prices. We will suppose a market consisting in a single time period,  $i = 1, \dots, N$  assets and  $j = 1, \dots, M$  equally probable market states. The assets cash-flows can be summarised in matrix form:

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N1} & \dots & D_{NM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_{1\bullet} \\ \vdots \\ \bar{D}_{N\bullet} \end{pmatrix} = (\bar{D}_{\bullet 1} \quad \dots \quad \bar{D}_{\bullet M}) \quad (2.1)$$

The vector price for the  $N$  assets is:

$$\bar{p} = (p_1, \dots, p_N), p_i > 0, \quad \forall i \quad (2.2)$$

A portfolio is any vector  $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ ,  $\theta_i < (>)0$  short (long) . There are no transaction costs or taxes. The price of a portfolio  $\bar{\theta}$  is

$$\bar{p}\bar{\theta} = \sum_{i=1}^N p_i \theta_i, \quad (2.3)$$

and the cash-flow of the portfolio corresponding to state  $j = 1, \dots, M$  is given by

$$\bar{\theta}\bar{D}_{\bullet j} = \sum_{i=1}^N \theta_i D_{ij}. \quad (2.4)$$

An arbitrage portfolio is a portfolio  $\bar{\theta}$  such that either

- (a)  $\bar{\theta}\bar{p} = 0$  and  $\bar{\theta}\bar{D}_{\bullet j} \geq 0, \forall j = 1, \dots, M$  with some  $j$  such that  $\bar{\theta}\bar{D}_{\bullet j} > 0$ . This means that there is a possibility of achieving a profit at a zero initial cost.

or

- (b) and  $\bar{\theta}\bar{D}_{\bullet j} > 0, \forall j = 1, \dots, M$ . This means that there is an immediate profit with no final cost.

Then the necessary and sufficient condition that guarantees absence of arbitrage is the following (Luenberger 1997), (Luenberger 2002), (Avellaneda and Lawrence 2000):

$$\begin{aligned} & \text{An arbitrage portfolio does not exist} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \exists \bar{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_M) > \bar{0} / \bar{p} = D\bar{\pi}, \text{ i.e.: } \forall i = 1, \dots, N: p_i = \sum_{j=1}^M D_{ij}\pi_j \end{aligned} \quad (2.5)$$

The state price vector is  $\bar{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_M)$ , also referred to as Arrow-Debreu state prices. We can normalize it to obtain the risk neutral probabilities (RNP):

$$\hat{\pi}_j = \left( \sum \pi_j \right)^{-1} \pi_j \quad (2.6)$$

Then we may rewrite the statement (2.5) in the following way:

$$\bar{p} = D\bar{\pi} = \left( \sum_{j=1}^M D_{ij}\pi_j \right)_{i=1}^N = \left( \left( \sum \pi_j \right) \sum_{j=1}^M D_{ij}\hat{\pi}_j \right)_{i=1}^N = \left( \left( \frac{1}{1+R} \right) E_{\pi} \{ \bar{D}_i \} \right)_{i=1}^N \quad (2.7)$$

Then we see that the assets are valued by means of the discounted expectation of their cash-flows with respect to the RNP. Discounting is made with respect to the risk free interest given by the state prices, i.e.  $1+R = \left( \sum \pi_j \right)^{-1}$ . We see that the state prices are the prices of the assets that reward with 1 m.u. in each one of the market states  $j = 1, \dots, M$ . It is said that the RNP  $\hat{\pi}$  makes the investor risk neutral as it makes him value an asset calculating a simple discounted expectation. This is expressed in the Fundamental Pricing Theorem enounced in the Arbitrage Pricing Theory (APT) that can be found for instance in (Luenberger 1997) or (Avellaneda and Lawrence 2000).

A complete market is such that for any cash-flow vector  $\bar{E} = (E_1, \dots, E_M)$ , there exists a portfolio of assets  $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$  that has cash-flow  $E_j$  for each state  $1 \leq j \leq M$ . In other words,

$$\bar{\theta}D = E \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \theta_i D_{ij} = E_j, \quad 1 \leq j \leq M, \quad (2.8)$$

has a solution  $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^N, \forall E \in \mathbb{R}^M$ .

Thus from linear algebra we know that it must be  $rank(D) = M$ , the columns of matrix  $D$  spanning the entire  $\mathbb{R}^M$  space. In case of completeness, the existence condition (2.5) becomes also a uniqueness one (Avellaneda and Lawrence 2000):

Suppose an arbitrage portfolio does not exist.  
Then there is a unique set of state prices  $\Leftrightarrow$  (2.9)  
 $\Leftrightarrow$  The market is complete.

In a complete market the pricing of a new asset with cash-flow  $\bar{E} \in \mathbb{R}^M$  is easy, because there will always exist a portfolio  $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^N$  consisting of traded assets (or benchmarks) with the same cash-flow, and by virtue of the non-arbitrage assumption both prices must therefore be the same.

In an incomplete market  $\text{rank}(D) = k < M$ , so we can no longer span the entire space  $\mathbb{R}^M$  with the help of the columns in matrix  $D$ . Moreover, uniqueness is no longer valid, so we may get many state price vectors  $\bar{\pi}$  with their corresponding RNPs  $\hat{\pi}$ . This is usually the case in real world and, for this reason we can usually find more than one RNP satisfying the rule of valuing for the observed benchmark prices. Though given a new asset with cash-flow  $\bar{E} \in \mathbb{R}^M$ , it is still possible to find an interval where its price  $p_{\bar{E}}$  should lie for the non-arbitrage condition still being fulfilled (Luenberger 2002):

Assume there exists no arbitrage.  
Then there are lower and upper bounds  $p_{\bar{E}}^{\min}, p_{\bar{E}}^{\max}$  for the price  $p_{\bar{E}}^{\min}$ ,  
such that no arbitrage is possible if  $p_{\bar{E}}^{\min} \in (p_{\bar{E}}^{\min}, p_{\bar{E}}^{\max})$ .  
These bounds are given by the following LPs : (2.10)

$$p_{\bar{E}}^{\min} = \sup_{\bar{\theta}} \{ \bar{p}\bar{\theta} : \bar{\theta}D \leq \bar{E} \}$$

$$p_{\bar{E}}^{\max} = \inf_{\bar{\theta}} \{ \bar{p}\bar{\theta} : \bar{\theta}D \geq \bar{E} \}$$

It is rather interesting to write down the respective dual programs (Luenberger 2002):

$$p_{\bar{E}}^{\min} = \min_{\bar{w}} \bar{w}\bar{E}$$

$$\text{s.t. : } \begin{cases} D\bar{w} = \bar{p} \\ \bar{w} \geq 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

For the upper bound we must assume that there exists a portfolio such that  $\bar{\theta}D \geq 1$  (this is assured by the existence of a risk free asset), then:

$$\begin{aligned}
p_E^{\max} &= \max_{\bar{w}} \bar{w} \bar{E} \\
\text{s.t. : } &\begin{cases} D\bar{w} = \bar{p} \\ \bar{w} \geq 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

These two last LPs may be read in terms of state prices so we see how duality translate an idea enounced in terms of portfolio (hedging problem) to its equivalent written in terms of state prices (pricing problem). This may give a possibility to price (i.e. retrieving a state price vector) while simultaneously being able to hedge risk (i.e. find a replicating portfolio) of a new asset lying out of the matrix  $D$  columns linear span.

Another important way of reasoning, which is connected with risk neutral pricing and is given by the Utility Theory (Sempieri 1997), (Luenberger 2002), considers the problem faced by an investor with utility function  $u(x)$  defined for positive values of wealth at the end of the time period. Assets cash-flows  $x$  are ranked thanks to their expected utility  $E[u(x)]$ . Assume that  $u$  is continuous, increasing and concave. Investor's initial wealth  $W > 0$  must be allocated among the available  $N$  assets. Then the following problem is to solve, as in (Luenberger 2002):

$$\begin{aligned}
&\max_{\bar{\theta}} E[u(x)] \\
\text{s.t. : } &\begin{cases} \bar{p}\bar{\theta} \leq W \\ \bar{\theta}D = x \\ x \geq 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

A way for relating RNP to utility is asking the former as being consistent with the utility maximization (2.13). In fact, Arrow-Debreu state prices coincide with the marginal utilities obtained by maximizing the expectation of the utility by investing in a portfolio of benchmarks (Samperi 1997) (Avellaneda *et al.* 2001).

In order to find the calibrated probability RNP (Avellaneda *et al.* 2001) propose to minimize the  $KL^2$  relative entropy of the non-uniformly sampled simulation with respect to the prior. As discussed in that paper, the relative entropy of  $p$  with respect to  $q$  is defined as  $D(p|q) = \sum_i p_i \log\left(\frac{p_i}{q_i}\right)$  which corresponds to the special case of penalization function  $\psi(x) = x \log x$  for a general pseudo-distance of the form (Avellaneda *et al.* 2001):

---

<sup>2</sup> The Kullback-Leibler divergence or relative entropy is a measure of the information lost when  $p$  is used to approximate  $q$ . KL divergence is a special case of a broader class of divergences called  $f$ -divergences, which includes, among others, the total variation distance  $|x-1|$ , the largest possible difference between the probabilities that the two probability distributions can assign to the same event. See for instance (Liese F. and Vajda I. 2006).

$$\tilde{D}_\psi(p|q) = \sum_i \psi\left(\frac{p_i}{q_i}\right) q_i \quad (2.14)$$

with  $\psi(x)$  a convex function.

According to (Samperi 1997) there exists a concave utility function  $u(x)$  for each penalization function  $\psi(x)$ , obtained via a Legendre transformation. This is the utility function mentioned in (2.13). The marginal utilities for consumption obtained by maximizing the expectation of the utility function  $u(x) = -\exp(-\alpha x)$  by investing in a portfolio of benchmark instruments correspond to a set of state prices calculated through minimization of  $\tilde{D}_\psi(p|q)$ . Remember that the two convex functions  $\psi(x) = x \log x$ , and  $u(x) = -\exp(-\alpha x)$  are Legendre transform<sup>3</sup> of each other.

Consequently, other pseudo-distances for Arrow-Debreu probabilities of the form  $\tilde{D}_\psi(p|q)$  can be used instead of KL relative entropy. For each such penalization function  $\psi$ , there exists a corresponding concave utility  $u(x)$ , obtained via a Legendre transformation, such that the Arrow-Debreu probabilities are consistent with an agent maximizing his/her expected utility for terminal wealth by investing in a portfolio of benchmarks. Each one of these possibilities will drive us to an open optimization problem that will have to be solved to retrieve the posterior-RNP. The following selection is justified by the fact that it drives us into a linear optimization problem that can be fast and easily solved.

Thus another example of that correspondence is the Legendre transform of the risk neutral utility function  $u(x) = x, x \in \mathbb{R}$  which can be managed so as to be driven into the convex penalization function  $\psi(x) = |x - 1|, x \in \mathbb{R}$ . This justifies the use of the pseudo-distance function  $D_\psi(p|q) = \sum_i \left| \frac{p_i}{q_i} - 1 \right| q_i$ , that will have to be minimized following the general procedure a) to d) described in the introduction. Further details of the methods are explained in sections 4 and 5.

### 3. APPLICATION OF KULLBACK-LEIBLER RELATIVE ENTROPY CRITERIA

(Avellaneda *et al.* 2001) maximizes the agents wealth by implicitly maximizing the utility function  $u(x) = -\exp(-\alpha x)$ , which corresponds to explicitly minimizing a pseudo-distance  $D_\psi$  coming from the penalization function  $\psi(x) = x \log x$ :

---

<sup>3</sup> For a brief introduction to Legendre transform see, for instance, (R. K. P. Zia , Edward F. Redish , Susan R. McKay, 2009).



$$D_{\nu} (p|q) = \log M \sum_I p_i \log p_i \quad (3.1)$$

The minimization is done under linear constraints expressing the benchmark prices (2.7) general rule. Introducing the Lagrange multipliers  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  this can be reformulated as a min-max program

$$\min \max \left\{ -D(p|u) + \sum_{j=1}^N \lambda_j \left( \sum_{i=1}^{\nu} p_i D_{ij} - C_j \right) \right\}, \quad (3.2)$$

The probability vector that maximises for each  $\lambda$  has the Boltzmann-Gibbs form

$$p_i = p(w^{(i)}) = \frac{1}{Z(\lambda)} \exp \left( \sum_{j=1}^N D_{ij} \lambda_j \right), \quad (3.3)$$

where  $Z(\lambda)$  is the normalisation factor

$$Z(\lambda) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \exp \left( \sum_{j=1}^N D_{ij} \lambda_j \right), \quad (3.4)$$

The algorithm proposed in (Avellaneda *et al.* 2001) to compute the RNP is the following:

- i. Construct a set of sample paths using a model for the prices and a pseudo-random-number generator.
- ii. Compute the benchmarks cash flow matrix  $D = \{D_{ij}; i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N\}$ .
- iii. Using a gradient-based optimization routine, minimise the function  $W(\lambda) = \log(Z(\lambda)) - \sum_{j=1}^N \lambda_j C_j$
- iv. Compute the risk-neutral probabilities  $p_i; i = 1, \dots, M$  for each path using  $Z(\lambda)$  and the optimal values of the multipliers  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ .

Function  $W(\lambda)$  can be approximated using a Taylor approximation

$$W(\lambda) \approx W(\hat{\lambda}) + \nabla_{\lambda} W(\hat{\lambda})(\lambda - \hat{\lambda}) + \frac{1}{2} (\lambda - \hat{\lambda})^T J(\lambda - \hat{\lambda}), \quad (3.5)$$

where

$$J_{ab} = \text{cov}^P(D_a, D_b), \quad (3.6)$$

and

$$\nabla_{\hat{\lambda}} W(\hat{\lambda}) = \begin{pmatrix} E^P(D_1) - C_1 \\ \vdots \\ E^P(D_N) - C_N \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

#### 4. APPLICATION OF THE ABSOLUTE DEVIATION CRITERIA

The Legendre transform of the utility function  $u(x) = x, x \in \mathbb{R}$  can be related to the convex function

$$\psi(x) = |x - 1|, x \in \mathbb{R}, \quad (4.8)$$

which would correspond to the penalization of the following pseudo-distance between the uniform *prior* and the risk neutral probability vector:

$$D_\psi(p|q) = \sum_i \left| \frac{p_i}{q_i} - 1 \right| q_i = \sum_i |p_i - q_i|, \quad (4.9)$$

where  $q_i$  correspond to the simulated prior uniform probability vector  $(q_i)_{i=1}^M$  so that  $q_i = \frac{1}{M}$ .

The price relations for the benchmark instruments can be written for the particular case of a free interest rate  $r = 0$  in the form

$$E^P \{D_j(w)\} = \sum_{i=1}^M p_i D_{ij} = C_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.10)$$

Remember  $(p_i)_{i=1}^M$  are the RNP that we want to calculate. Therefore, the formulation of the minimization problem is

$$\min_{\bar{p}} \sum_i |p_i - q_i|, \quad (4.11)$$

Subject to proper constraints expressing the relationships for the benchmark prices and the probabilistic characteristic of the solution  $\bar{p}$ , which are all linear ones.

This problem can be solved by means of the following linear goal program:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_i (y_i^- + y_i^+) \\
& \text{s.t.} \\
& p_i - q_i + y_i^- - y_i^+ = 0, i = 1, \dots, M \\
& \sum_{i=1}^M p_i D_{ij} - C_j = 0, j = 1, \dots, N \quad , \\
& \sum_{i=1}^M p_i = 1 \\
& p_i, y_i^+, y_i^- \geq 0, i = 1, \dots, M
\end{aligned} \tag{4.12}$$

where  $y_i^+, y_i^-$  are the positive and negative deviations from the probability vector to the uniform *prior*,  $(p_i)_{i=1}^M$  are the calibrated state probabilities,  $(q_i)_{i=1}^M$  is the uniform *prior*,  $(D_{ij})_{i=1, \dots, M}^{j=1, \dots, N}$  is the matrix containing the cash-flows for all benchmarks in every state, and finally  $(C_j)_{j=1}^N$  are the observed prices for each of the  $N$  benchmarks.

## 5. NUMERICAL CALCULATIONS

European stock options have been priced for different maturities and strike prices, assuming a lognormal price with constant volatility on a stock with a spot price of 100 with no dividends. The interest rate was taken equal to zero.

We used as benchmarks all European put and call options with maturities of 30, 60 and 90 days and strikes of 90, 100 and 110, as well as forward contracts with maturities of 30, 60 and 90 days. We assumed that the prices of the benchmarks were given by the Black Scholes formula with a volatility of 25% were all Monte Carlo runs had 2000 paths.

The test consisted of pricing various options (target options) with strike/maturity distributed along a regular grid (maturities from 20 days to 120 days and strike prices from 80 to 120).

We have run the optimization problem consisting in minimizing the KL relative entropy as in (Avellaneda *et al.* 2001) using the algorithm proposed in (Elices and Giménez, 2006).

- i. Simulate  $M$  paths at different maturities with regular Monte Carlo.
- ii. Calculate the prices  $C_j$  of the calibration set.

- iii. Calculate the discounted payoffs  $D_{ij}$  of all these instruments for each of the simulated paths.
- iv. Fix the initial value for the Lagrange multipliers  $\lambda_i$  equal to zero (all paths are equally weighted).
- v. Calculate the gradient vector in (3.7) and Jacobian matrix in (3.6).
- vi. Calculate the optimum for the second order approximation in (3.5) solving 
$$\lambda = \hat{\lambda} - J^{-1} \nabla_k W(\hat{\lambda}).$$
- vii. Go to step v until the gradient is close enough to zero.

After obtaining the RNP with KL and the goal programming method proposed in this paper, we have valued other options, obtaining very accurate results in the pricing. For this purpose, we have used Matlab for the KL solution, as well as GAMS for introducing the linear program together with CPLEX to solve it in the case of the absolute deviations case.

Table 1 and Table 2 show deviations obtained under the weighted Monte Carlo approach calibrated with the KL pseudo-distance. As already shown in (Avellaneda *et al.* 2001), the method prices correctly the stock options used as benchmarks to calibrate the vector of risk neutral probabilities. The deviations from the weighted Monte Carlo to the Black-Scholes prices are very small for all other options with strike price and maturity near to the ones of the benchmarks.

**Table 1**  
Deviations under the Kullback-Leibler approach, pricing call options

Maturity (days)	Strike								
	80	85	90	95	100	105	110	115	120
20	0.42%	0.57%	1.00%	2.14%	3.80%	4.45%	6.13%	4.73%	161.25%
<b>30</b>	0.01%	0.02%	0.00%	0.18%	0.00%	1.25%	0.00%	5.77%	35.56%
45	0.10%	0.17%	0.28%	0.15%	1.31%	2.43%	3.61%	5.93%	2.62%
<b>60</b>	0.04%	0.04%	0.00%	0.09%	0.00%	0.74%	0.00%	5.53%	7.66%
75	0.14%	0.20%	0.21%	0.28%	0.11%	0.52%	2.06%	5.38%	10.53%
<b>90</b>	0.07%	0.03%	0.00%	0.16%	0.00%	0.15%	0.00%	0.98%	4.14%
120	1.03%	1.33%	1.72%	2.24%	2.56%	2.11%	1.21%	0.99%	2.01%

**Table 2**

Deviations under the Kullback-Leibler approach, pricing put options

Maturity (days)	Strike								
	80	85	90	95	100	105	110	115	120
20	100.00%	90.81%	24.66%	4.76%	0.13%	1.17%	1.10%	0.70%	0.55%
30	65.06%	0.96%	0.00%	0.15%	0.00%	0.24%	0.00%	0.01%	0.01%
45	8.79%	8.05%	1.98%	0.80%	1.77%	0.80%	0.33%	0.18%	0.10%
60	11.33%	1.66%	0.00%	0.36%	0.00%	0.18%	0.00%	0.16%	0.07%
75	7.72%	0.98%	1.40%	1.02%	1.00%	0.55%	0.24%	0.14%	0.14%
90	5.13%	0.11%	0.00%	0.61%	0.00%	0.11%	0.00%	0.02%	0.03%
120	11.34%	4.93%	1.97%	0.55%	0.54%	1.28%	1.34%	1.23%	0.96%

Using the same cash flow matrix generated for the replication above, the goal programming method has been used to calibrate the RNP. Table 3 and Table 4 show the results obtained after pricing with the probability vector coming from the goal programming weighted Monte Carlo. Benchmarks are also priced exactly and options with more extreme strike and maturities compared to those used to calibrate the model are priced, in general, more accurately than with the minimum KL relative entropy weighted Monte Carlo method.

**Table 3**

Deviations under the linear programming model, pricing call options

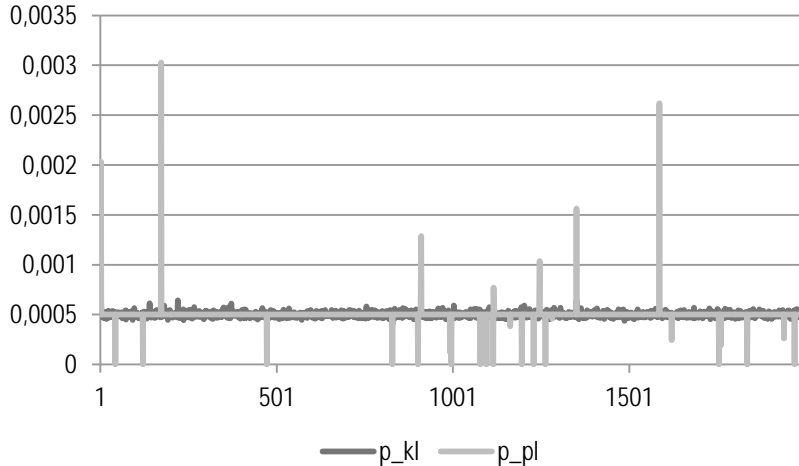
Maturity (days)	Strike								
	80	85	90	95	100	105	110	115	120
20	0.55%	0.77%	1.30%	2.49%	4.58%	6.42%	0.43%	29.72%	23.90%
30	0.01%	0.00%	0.00%	0.02%	0.00%	1.34%	0.00%	1.53%	15.40%
45	0.17%	0.28%	0.41%	0.33%	0.82%	1.20%	0.20%	2.62%	19.19%
60	0.03%	0.02%	0.00%	0.10%	0.00%	0.59%	0.00%	5.82%	8.15%
75	0.11%	0.16%	0.13%	0.06%	0.37%	0.51%	0.07%	0.93%	0.01%
90	0.04%	0.00%	0.00%	0.22%	0.00%	0.29%	0.00%	0.37%	1.19%
120	1.21%	1.58%	2.07%	2.69%	3.09%	2.59%	1.89%	0.53%	1.14%

**Table 4**

Deviations under the linear programming model, pricing put options

Maturity (days)	Strike								
	80	85	90	95	100	105	110	115	120
20	100.00%	47.09%	21.12%	6.10%	0.27%	0.92%	0.90%	0.56%	0.43%
30	65.93%	12.63%	0.00%	1.09%	0.00%	0.22%	0.00%	0.03%	0.03%
45	23.63%	9.42%	2.83%	0.42%	1.77%	0.85%	0.38%	0.20%	0.09%
60	19.25%	3.02%	0.00%	0.33%	0.00%	0.22%	0.00%	0.15%	0.06%
75	10.62%	2.03%	1.51%	0.76%	0.74%	0.33%	0.10%	0.02%	0.04%
90	8.39%	1.03%	0.00%	0.44%	0.00%	0.06%	0.00%	0.05%	0.09%
120	11.84%	4.74%	1.80%	0.57%	0.39%	1.05%	1.15%	1.12%	0.89%

In Figure 1 we plot the RNPs obtained with both methodologies. The RNP obtained with the goal programming method gives more extreme probabilities to some paths and also gives zero probability of occurrence to some other paths. Needless to say that the RNP obtained by means of KL is much more regular than that obtained via LP. Though both seems to perform very nearly when pricing new assets.



**Figure 1**  
Risk neutral probability vectors

The entropies of the two RNPs have also been compared. It is supposed that the higher would be the entropy of the RNP the more efficient would be the market.

The entropy is given by:

$$H(\bar{x}) = E\{I(\bar{x})\} = E\{-\ln(p(\bar{x}))\}, \quad (5,1)$$

where  $\bar{x}$  is a random variable,  $p$  is the probability mass function and  $|x-1|$  is the information content of the random variable. Both methods have quite near entropies as shown in Table 5.

**Table 5**  
Entropy

KL	LP
3.30	3.29

## 6. CONCLUSIONS

After the 1987 crash, markets seemed to follow no longer the hypothesis of a constant volatility across different strikes when the rest of the parameters were set constant in the Black-Scholes formula. Also, the normal hypothesis began to be considered inadequate. The need of non-parametrical models for valuing directly from the data aroused and new methodologies with this aim have been explored since then.

Following (Avellaneda *et al.* 2001) we have developed a method to retrieve the RNP that minimizes a pseudo-distance to the maximum entropy uniform probability vector. In order to achieve this we have used linear programming techniques. We have found a RNP vector that values new options very near to the one found with the KL distance, with a very close entropy also.

Thus a new methodology has been explored consisting in a linear model that is solved by means of goal programming techniques. This is an advantage as LP is such a well-known and easy to apply optimization technique. Moreover, it shares with the KL methodology the advantage that the benchmark prices are exactly matched. This is an interesting characteristic from the market point of view. This is generally not satisfied when applying other non-parametric methods as for instance least squares or curve fitting.

Concerning the European options data used to calibrate the model, this has been synthetically simulated. After simulating the different prices for each path we have used the same data for calibrating both the model using the KL pseudo-distance and the one that uses absolute deviation and linear programming studied in this paper. After doing so, we have priced European call and put options and have compared results from both models.

One of the key findings of this paper is that both methods result in similar prices for the European options considered and even the entropy of the two RNPs is quite similar. However, the shape of both distributions is very different. A disadvantage of our method is clearly the lack of regularity of its RNP. This may be another disadvantage of our case. Another one is its correspondence with a risk neutral decision maker. This is the reason why it gives a RNP very near to the uniform one (the prior).

Some avenues that we propose for future research are the following. Firstly, to investigate if there would be room for deducing a dual LP that would allow us to construct a replicating benchmarks portfolio to help hedging the risk of the new asset. Secondly, to apply the LP techniques to track arbitrage opportunities in new assets prices. Finally it would be rather interesting if we succeeded in considering a non-neutral risk decision maker while still being able to apply LP, because this would generalize the use of a fast and well known optimization method.

## REFERENCES

Arrieta, Daniel (2012). "Entropía Relativa Mínima, Weighed Monte Carlo y cobertura de derivados." *Análisis Afi* 2º semestre, 46-55.

Arrow, Kenneth Joseph and Gerard Debreu (1954). "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy." *Econometrica*, 22.3, 265-290.

Avellaneda, Marco and Peter Lawrence (2000). *Quantitative Modeling of Derivative Securities: From Theory to Practice*. Chapman & Hall/CRC.

Avellaneda, Marco (1998). "Minimum-relative-entropy calibration of asset pricing models." *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 1.4, 447-472.

Avellaneda M., Buff R, Friedman C., Grandechamp N., Kruk L., Newman J. (2001). "Weighted Monte Carlo: A new Technique for calibrating Asset-Pricing Models." *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 4.1, 91-119.

Black, Fisher and Myron Scholes (1973). "Pricing of options and corporate liabilities." *Journal of Political Economy* 81.3. 637-659.

Bondarenko, Oleg (2000). "Recovering Risk-Neutral Densities: A New Nonparametric Approach." September. EFA 2000. <<http://ssrn.com/abstract=246063>>.

Branger, N. (2003). *Pricing derivatives securities using cross entropy: an economic analysis*.

Breeden, Douglas T. and Robert H. Litzenberg. (1978). "Prices of state-contingent claims Implicit in option prices", *Journal of Business* 51.4, 621-651.



Chang, Eui Jung and Benjamin Miranda Tabak (2002). "Risk neutral probability densities. Financial stability report". Banco do Brasil.

Cheng, K.C. (2010). *A new framework to estimate the risk neutral probability functions embedded in option prices*.

Corrado, C.J. (2001). "Option pricing based on the generalized Lambda distribution", *Journal of Futures Markets*, 21.3, 213-236.

de Jong C., Huisman R.(2000), *From skews to a skewed-t: modelling option implied retruns by a skewed Student-t*.

Elices, Alberto and Eduard Giménez (2006). "Weighted Monte Carlo: Calibrating the Smile", *Risk Magazine*, 19.5.

Jackwerth, J.C. (2004). *Option-Implied Risk-Neutral Distributions and Risk Aversion*. The Research Foundation of AIMR™. URL: <http://www.ub.uni-konstanz.de/kops/volltexte/2008/5288/>: Konstanzer Online-Publikations-System (KOPS).

Jackwerth, Jens Carsten and Mark Rubinstein (1996). "Recovering Probability Distributions from Option Prices", *Journal of Finance*, 51.5, 1611-1631.

Liese F. and Vajda I. (2006). *On Divergences and Informations in Statistics and Information Theory*. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 52, N<sup>o</sup>. 10, October, 4394-4412.

Luenberger, D. (2002). "Arbitrage and universal pricing", *Journal of Economic Dynamics & Control*, 26, 1613-1628.

Luenberger, D. (1997). *Investment Science*, Oxford University Press.

Melick, William Robert and C. P. Thomas (1997). "Recovering an asset's implied PDF from option prices: an application to crude oil during the gulf crisis", *Journal of Financial and Cuantitative Analysis*, 32.1, 91-115.

Monteiro, Ana Margarida, Reha H. Tütüncü and Luís N. Vicente (2008). "Recovering risk-neutral probability density functions from options prices using cubic splines and ensuring nonnegativity", *European Journal of Operations Research*, 187, 525-542.

Ritchey, R. (1990). "Call option valuation for discrete normal mixtures", *Journal of Financial Research*, 13.4, 285-295.

Rockinger, Michael and Eric Jondeau (2002). "Entropy densities with an application to autoregressive conditional skewness and kurtosis", *Journal of Econometrics*, 106.1, 119-142.

Rubinstein, Michael and Jens Carsten Jackerth (1997). "Recovering Probabilities and Risk Aversion from Options Prices and Realized Returns", University of California at Berkeley.

Sempieri, D. (1997). *Inverse Problems, model selection and entropy in derivatives security pricing*, New York University: PhD Thesis.

Yatchew A., Härdle W. (2006). "Nonparametric state density estimation using constrained least squares and the bootstrap", *Journal of Econometrics*, 133, 579-599.

Zia, Royce K. P., Edward F. Redish and Susan R. McKay (2009). "Making Sense of the Legendre Transform", Mars, *arXiv: 0806.1147 [physics.ed-ph]*. <<http://arxiv.org/abs/0806.1147>>.

## Ponencia 3

# EUROPEAN BOND MARKETS AND MACROECONOMIC NEWS\*<sup>1</sup>

Pilar Abad and Helena Chuliá

### ABSTRACT

In this paper we investigate the bond market response to macroeconomic news announcements in the Euro area. Specifically, we analyze the impact of (un)expected changes in the interest rate, unemployment rate, consumer confidence index and industrial production index on returns, volatility and correlations of European Government Bond markets. Overall, our results suggest that, bond return volatility strongly reacts to news announcements and that the response is asymmetric. However, the influence of macroeconomic news announcements appears insignificant for bond returns. Finally, our results paint a complex picture of the effect of macroeconomic news releases on correlations.

**Key Words:** Monetary integration; Bond markets integration, Macroeconomic news.

### 1. INTRODUCTION

The extent of international bond market linkages merits investigation, as it may have important implications for the cost of financing fiscal deficit, monetary policy-making independence, modeling and forecasting long-term interest rates, and bond portfolio diversification. After the launch of the euro in January 1999, markets virtually priced the debt of different member states as identical. During the period 2003-2007, the spreads were very small and did not reflect the differences in fiscal positions between countries, even when ratings changed. This period was therefore characterized by a significant underpricing of risk, with investors searching for yield in an environment of abundant global liquidity. This progress towards financial integration was interrupted and reversed by the global financial crisis and, more recently by the European sovereign debt crisis. Sovereign bond markets have been dominated by sharp differentiation, especially across borders.

---

<sup>1</sup> This work has been funded by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness (ECO2011-23959 and ECO2012-35584).

The issue of European Government Bond markets integration has been addressed in the recent literature under different perspectives. One strand of the literature has assessed the relative importance of systemic and idiosyncratic risk in EMU sovereign yield spreads (see Geyer *et al.* (2004), Gomez-Puig (2009) and Pagano and von Thadden (2004) among others). Another perspective is given by Christiansen (2003), who assesses volatility spillovers in European bond markets. Finally, a number of papers have studied financial integration exploiting the implications of asset pricing models (see Barr and Priestley (2004), Hardouvelis *et al.* (2006 and 2007) and Abad *et al.* (2010 and 2011)). This paper adopts a different perspective and ties together the market integration and news announcement literature by examining the reaction of European Government Bond markets returns, volatilities and correlations to macroeconomic news announcements. In a unified bond market, returns, volatilities and correlations of bonds of different countries should respond similarly to the same information.

Numerous papers have studied the impact of macroeconomic news releases on financial markets (see Fleming and Remolona (1999a,b), Gürkaynak *et al.* (2005), and Andersen *et al.* (2007) among others). These studies differ in terms of the panel of economic news considered, the financial instrument, the frequency of observation and the time period examined. Hence, findings regarding which news systematically moves markets, as well as their relative importance, are sometimes conflicting.

Our study makes a number of contributions to the relevant literature. First, we analyze the evolution of the correlation between European Government Bond markets and the representative European Union bond in an attempt to assess the evolution of the convergence process. Second, we analyze the effects of macroeconomic news announcements not only on European Government Bond returns and volatilities but also on correlations. The prior literature does not consider the effect of news announcements on correlations. Third, our sample includes the financial crisis which enables us to analyze whether the effects of news announcements has changed since the beginning of the crisis and if the global financial turmoil has had a negative effect on the convergence process.

To carry out our study, we use the Dynamic Conditional Correlation (DCC) multivariate model of Engle (2002). Our main findings can be summarized as follows. First, we find little impact of macroeconomic news announcements on bond returns. On top of that, the crisis has not changed the level of bond return and their response to macroeconomic news announcements. Second, we confirm that bond volatility responds asymmetrically to news releases. Before and during the crisis, bad news has a meaningful impact on the dynamics of bond market volatility. Finally, our results indicate a significant heterogeneity in the impact of the release of good or bad news announcements on bond correlations.

The remainder of the paper is organized as follows. Section 2 describes our data. Section 3 lays out the methodology we use. Section 4 discusses the empirical results and, finally, Section 5 concludes.

## 2. DATA

### 2.1. Bond data

We use daily data covering the period from January 2004 to July 2011. The data consist of the 10-year JPMorgan Government Global Bond Index (JPMGBI), in terms of a common currency, the euro, and the sample includes 16 European countries. Our study focuses on 10 EMU EU-15 (Austria, Belgium, France, Germany, Greece, Ireland, Italy, the Netherlands, Portugal and Spain) and 4 non-EMU countries (Denmark, Czech Republic, Poland and Sweden).<sup>2</sup> As a proxy for the entire Eurozone we use the JP Morgan EMU Government Index. These bond market indices are transformed into returns taking the first difference of the natural log of each bond-price index. Data have been collected from Thompson Datastream.

### 2.2 Announcement data

We examine the effects of four macroeconomic announcements for the Eurozone: the industrial production index<sup>3</sup> (IPI), the unemployment rate<sup>4</sup> (UNE), the consumer confidence index<sup>5</sup> (CONF) and the ECB's interest rate decisions (RATE).

We obtain the announcement data from Bloomberg. For each macroeconomic announcement except for the interest rate announcement, we obtain a time series of the realized values as well as market forecasts based on survey expectations. In the empirical analysis we follow the previous literature [see Balduzzi *et al.* (2001)], and use the surprise defined as the standardized news for announcement  $e$  ( $S_{et}$ ):

$$S_{et} = \frac{A_{et} - E_{et}}{\sigma_e} \quad (1)$$

where  $A_{et}$  is the realized value for announcement  $e$  at time  $t$ ,  $E_{et}$  is the corresponding expected value and, finally,  $\sigma_e$  is the standard deviation of the announcement surprise ( $A_{et} - E_{et}$ ) across the entire sample.

---

<sup>2</sup> The earliest data available for the Czech Republic is November 2004.

<sup>3</sup> Eurostat Index of Industrial production (Total industry excluding construction) Data is adjusted for working days.

<sup>4</sup> The basis for the calculation of a monthly unemployment rate is the Community Labour Force Survey, where the main statistical objective is to describe the population in three exhaustive and mutually exclusive groups (employed, unemployed and inactive). The unemployment rate is the number of people unemployed as a percentage of the labour force.

<sup>5</sup> This indicator represents the arithmetic average of the answers (balances) to the four questions on the financial situation of households and general economic situation (past and future) together with that on the advisability of making major purchases. Source: European Commission.

In the case of the interest rate announcement, we use the methodology proposed by Kuttner (2001) to obtain a measure of the surprise in the announcement from the change in the current-month Federal funds futures rate on the day of the announcement. In sum, we compute the unexpected target rate change or the “surprise”  $S_{RATE,t}$  as

$$S_{RATE,t} = f_t - f_{t-1} \quad (2)$$

Where  $f_t$  is the current-month futures rate at the end of the announcement day  $t$ . Kuttner (2001) uses a scaled version of the one-day change in current month federal funds future rate as a proxy for the unanticipated component on the day of the policy rate change. This is because in the US the futures contract's payoff depends on the monthly average Federal funds rate, and the scaled factor is included to reflect the number of remaining days in the month, which are affected by the change. Given the focus of this study is the impact of news announcements on European Government Bond markets, following Bredin *et al.* (2007), we proxy surprise changes in the ECB policy rate by the one-day change in the three-month Euribor futures rate.<sup>6</sup>

It must be highlighted that, depending on the macroeconomic news announcements, the sign of the surprise will indicate good or bad news. In the case of the interest rate announcement, a positive (negative) surprise indicates that the European Central Bank announced either a surprisingly large rate increase (cut) or a surprisingly small rate cut (increase), this is bad (good) news. For the unemployment announcement, a positive (negative) surprise means that the unemployment rate has either increased (decreased) surprisingly much or decreased (increased) surprisingly little with respect to the previous month, this is bad (good) news. In the case of IPI, a positive (negative) surprise indicates that the IPI rate has either increased (decreased) surprisingly much or decreased (increased) surprisingly little with respect to the previous announcement, this is good (bad) news. Finally, for the consumer confidence index, a positive (negative) surprise indicates that the CONF rate has either increased (decreased) surprisingly much or decreased (increased) surprisingly little with respect to the previous announcement, this is good (bad) news. Therefore, positive (negative) surprises mean bad (good) news in the case of the interest rate and unemployment rate announcements and good (bad) news in the case of IPI and CONF announcements.

---

<sup>6</sup> Bernoth and Von Hagen (2004) find that the three month Euribor futures rate is an unbiased predictor of Euro area policy rate changes.

**Table 1**  
Descriptive statistics of news announcements surprises

	Sample from January 2004 to July 2011				During the crisis			
	UNE	CONF	IPI	RATE	UNE	CONF	IPI	RATE
<i>All surprises</i>								
N	88	80	86	79	32	27	34	31
Mean	1.664	-0.040	0.248	0.001	0.899	0.166	-0.140	-0.002
Standard deviation	1.000	1.000	1.000	0.045	0.891	1.442	1.219	0.052
Max	3.949	3.513	3.587	0.125	3.113	3.513	3.587	0.125
Min	-0.511	-3.238	-2.586	-0.155	-0.511	-3.238	-2.586	-0.115
<i>Positive surprises</i>								
N	86	37	53	43	30	16	14	18
Mean	1.713	0.720	0.864	0.029	0.990	0.982	0.989	0.033
Standard deviation	0.956	0.805	0.649	0.030	0.844	1.111	0.895	0.034
Max	3.949	3.513	3.587	0.125	3.113	3.513	3.587	0.125
Min	0.046	0.069	0.083	0.005	0.046	0.069	0.083	0.005
<i>Negative surprises</i>								
N	2	43	33	36	2	11	20	13
Mean	-0.465	-0.695	-0.741	-0.032	-0.465	-1.021	-0.930	-0.049
Standard deviation	0.066	0.614	0.579	0.035	0.066	0.972	0.661	0.030
Max	-0.418	-0.069	-0.083	-0.005	-0.418	-0.207	-0.167	-0.015
Min	-0.511	-3.238	-2.586	-0.155	-0.511	-3.238	-2.586	-0.115

Note: N is the number of observations for each macroeconomic announcement surprises. Max and Min are the maximum and minimum for the surprise, respectively.

Table 1 reports summary statistics of macroeconomic news surprises. According to this table, the number of surprises is very similar for the four macroeconomic announcements considered, showing that there is no a particular type of macroeconomic event that surprises more frequently the market. In the case of UNE and RATE there are more positive surprises, i.e. bad news, CONF shows a higher number of negative surprises which means bad news, and finally, in the case of IPI there are more positive surprises, i.e. good news. During the crisis there is a reversal in the sign of the surprises for CONF (higher number of positive surprises) and IPI (lower number of positive surprises).

### 3. METHODOLOGY

Our methodology for testing the effect of macroeconomic news announcements on conditional returns, returns volatility and the integration or comovement between European Government Bond markets and our proxy for the entire European Union is

based on the Dynamic Conditional Correlation (DCC) multivariate model of Engle (2002). The DCC model has the flexibility of univariate GARCH models but does not suffer from the curse of dimensionality of multivariate GARCH models. The estimation consists of two steps. First, the conditional variance of each variable is estimated using a univariate GARCH procedure. Second, the standardized regression residuals obtained in the first step are used to model conditional correlations that vary through time.

To analyze the response of bond markets to the arrival of European macroeconomic news taking into account the effect of the financial crisis and including the possibility, as suggested in the literature, that the response of asset prices, volatility and correlations depends on the surprise being positive or negative, we model the evolution of bond return and volatility of country  $i$  as

$$\begin{aligned} r_t^i &= \mu_i^e + \rho_i^e r_{t-1}^i + csr_t^i + \varepsilon_t^i \\ \varepsilon_t^i &= \sqrt{h_t^i} e_t^i \quad e_t^i | F_{t-1} \sim N(0,1) \\ h_t^i &= csh_t^i [\omega_i^e + \alpha_i^e (e_{t-1}^i)^2 + \beta_i^e h_{t-1}^i] \end{aligned} \quad (3)$$

where  $F_{t-1}$  denotes the information set at time  $t-1$ ,

$$csr_t^i = (\gamma_i^{+e} I_t^{+e} + \gamma_i^{-e} I_t^{-e}) S_t^e + \rho_i C_t + (\xi_i^{+e} I_t^{+e} + \xi_i^{-e} I_t^{-e}) S_t^e C_t$$

and

$$csh_t^i = 1 + (\delta_i^{+e} I_t^{+e} + \delta_i^{-e} I_t^{-e}) |S_t^e| + \nu_i C_t + (\theta_i^{+e} I_t^{+e} + \theta_i^{-e} I_t^{-e}) |S_t^e| C_t .$$

In the above specification,  $C_t$  is a dummy variable taking on the value of one during the financial crisis (from September 15, 2008<sup>7</sup> onwards) and zero otherwise,  $I_t^{+e}$  ( $I_t^{-e}$ ) is a dummy variable taking on the value of one during the event window ( $t-1$ ,  $t+1$ ) if a positive (negative) surprise macroeconomic event of type  $e$  occurred at time  $t$  and zero otherwise and, finally,  $S_t^e$  are news surprises standardized by their simple standard deviation to control for differences in units of measurement across announcements in the event window.

The above specification allows for asymmetric effects of surprises on conditional bond returns and volatility. The coefficient  $\gamma_i^{+e}$  ( $\gamma_i^{-e}$ ) captures the impact of a positive (negative) surprise announcement on the mean return around the announcement dates during the total sample, and  $\gamma_i^{+e} + \xi_i^{+e}$  ( $\gamma_i^{-e} + \xi_i^{-e}$ ) captures the impact of a positive (negative) surprise announcement on the mean return around the announcement

---

<sup>7</sup> We set the start of the financial crisis coinciding with the collapse of Lehman Brothers.



dates during the financial crisis. Similarly, the dummy coefficient  $\delta_i^{e+}$  ( $\delta_i^{e-}$ ) proxy for the impact of positive (negative) absolute standardized macroeconomic news surprises on conditional return variance around the announcement dates during the total sample, and  $\delta_i^{+e} + \theta_i^{+e}$  ( $\delta_i^{-e} + \theta_i^{-e}$ ) proxy for the impact of positive (negative) absolute standardized announcement on conditional return variance around the announcement dates during the financial crisis.<sup>8</sup> Finally, to give flexibility to the model,  $\rho_i$  and  $\nu_i$  enable the crisis to have an effect on the returns and volatility level, respectively.

To analyze the impact of news announcements on conditional correlations the following exponential smoothing function is used:

$$q_t^{ij} = csq_t^{ij} \left[ \lambda q_{t-1}^{ij} + (1-\lambda) \eta_{t-1}^i \eta_{t-1}^j \right] \quad (4)$$

where  $csq_t^{ij} = 1 + (\alpha_{i,j}^{+e} I_t^{+e} + \alpha_{i,j}^{-e} I_t^{-e}) |S_t^e| + \beta_{i,j} C_t + (\kappa_{i,j}^{+e} I_t^{+e} + \kappa_{i,j}^{-e} I_t^{-e}) |S_t^e| C_t$ . To deal with the problem suggested by Forbes and Rigobon (2002) that shocks to the conditional covariance among asset returns in proximity to certain macroeconomic announcements may be due to shocks to return volatility, we use residuals standardized as follows:

$$\eta_t^i = \frac{\varepsilon_t^i}{\sqrt{csh_t^i \cdot h_t^i}} \quad \text{and} \quad \eta_t^j = \frac{\varepsilon_t^j}{\sqrt{csh_t^j \cdot h_t^j}} \quad (5)$$

In equation (4), the coefficient  $\alpha_{i,j}^{+e}$  ( $\alpha_{i,j}^{-e}$ ) captures the impact of a positive (negative) surprise announcement on the conditional covariance between any pair of standardized residuals (countries  $i$  and  $j$ ) around the announcement dates during the total sample, and  $\alpha_{i,j}^{+e} + \kappa_{i,j}^{+e}$  ( $\alpha_{i,j}^{-e} + \kappa_{i,j}^{-e}$ ) captures the impact of a positive (negative) surprise announcement on the covariance around the announcement dates if it takes place during the financial crisis.  $\beta_{i,j}$  enables the crisis to have an effect on the covariance level.

In order to estimate the model in Equations (3) and (4), a conditional normal distribution for the innovation vector is assumed and the quasi-maximum likelihood method is applied. Bollerslev and Wooldridge (1992) show that the standard errors calculated by this method are robust even when the normality assumption is violated.

#### 4. EMPIRICAL RESULTS

Tables 2 to 5 display the estimation results. As pointed out by other studies (see Brenner *et al.* (2009), Christiansen (2000) and Konrad (2009) among others), we

---

<sup>8</sup> Following Brenner *et al.* (2009) macroeconomic news announcement surprises enter the variance equation in absolute value due to the existence evidence (Jones *et al.* (1998) and Bomfim (2003) among others) that it is the mere occurrence of a macroeconomic announcement surprise, regardless of their sign, what impacts conditional return variance.

find weak or no evidence of a relation between bond returns and the release of macroeconomic news announcements. Hence, this provides evidence that releases of macroeconomic news are not associated with risk premium in the sense of higher returns on announcement days, which is consistent with the findings of Li and Engle (1998) for the US Treasury futures market. The arrival of unemployment news has the greatest impact on government returns, while interest rates news has the lowest.

Regarding volatility, we find that volatility responds asymmetrically to announcement shocks.<sup>9</sup> Before and during the crisis, bad news has a meaningful impact on the dynamics of bond market volatility. Releases of the employment situation are especially influential.<sup>10</sup> In general, after bad news there is an increase in the volatility, independently of the market and the news announcement. These results are in line with the findings in Jones *et al.* (1998) Fleming and Remolona (1999b), Christie-David and Chaudhry (1999), Christie-David *et al.* (2002, 2003), Christiansen (2000) and Goeij and Marquering (2006). These authors analyze the response of Treasury bond market volatility to macroeconomic news releases and find significant increases in bond market volatility on announcement days and its persistence.

Although there are some differences between countries<sup>11</sup>, in general, looking at good news, announcements on the Consumer Confidence Index and the interest rates also increases volatility during the crisis. Before the crisis, good CONF news reduces the volatility whereas good news about interest rates increases volatility. We also find that the crisis has increased the volatility of all bond markets.

Finally, we find a significant heterogeneity in the impact of the release of good or bad news announcements on bond correlations.<sup>12</sup> If we look at the sample period before the crisis, good news on Consumer Confidence Index and Industrial Production Index are more likely to increase the integration of European Government markets. Good unemployment news releases have no effect on correlation and interest rate news releases have a mixed effect depending on the country. Bad news before the crisis on unemployment, IPI and CONF increases correlation, however, expansionary ECB rate decisions decreases correlation.

---

<sup>9</sup> This result is consistent with the analysis of Li and Engle (1998).

<sup>10</sup> Christie-David *et al.* (2003) examine the effects of eleven macroeconomic news announcements on futures on Treasury bonds and (ten-year) Treasury notes finding that the Employment Report has the most pervasive effects on volatility. Goeij and Marquering (2006) also find that releases of the employment situation and producer price index are especially influential in the volatility of US Treasury bonds.

<sup>11</sup> Christie-David *et al.* (2002), using intraday data observe that the U.S. Treasury Bond, the British Long Gilt, and the German Government Bond futures respond strongly to the US news releases, while the response of the Japanese Government Bond futures is less pronounced and the Italian Government Bond futures display weak responses at best.

<sup>12</sup> This result is in line with the findings in Christie-David *et al.* (2002). These authors use a completely different methodology to assess the effect of US news announcements on the integration of the bond markets in the U.S, Great Britain, Germany, Japan and Italy.

**Table 2**  
Response of bond markets to the arrival of European macroeconomic news: The unemployment rate (UNE).

Countries	Impact on returns				Impact on variance				Impact on the covariance level				
	$\gamma_i^{+e}$	$\gamma_i^{+e} + \xi_i^{+e}$	$\gamma_i^{+e} + \xi_i^{+e}$	$\rho_i$	$\delta_i^{e-}$	$\delta_i^{+e} + \theta_i^{+e}$	$\delta_i^{e-} + \theta_i^{e-}$	$v_i$	$\alpha_{i,j}^{+e}$	$\alpha_{i,j}^{e-}$	$\alpha_{i,j}^{+e} + \kappa_i^{+e}$	$\alpha_{i,j}^{e-} + \kappa_i^{e-}$	$\beta_{i,j}$
Germany	0.092		-0.002		0.201	0.201		0.369	-0.014		0.122		-0.097
Austria	0.058		-0.002	0.000		0.199		0.062	1.206		-0.151		0.190
Belgium	-0.065		-0.003			0.145		0.044	-0.108		0.075		-0.080
Denmark	-0.081		-0.004			0.189		0.206	0.144		0.144		0.018
France	-0.064		-0.003			0.189		0.084	0.520		0.520		-0.019
Greece	0.071		-0.003		-0.065	-0.065	-4.213	1.285	0.458	391.3	0.090	391.3	0.029
Italy					-0.041	0.083		0.046	0.046		-0.119		0.034
Netherlands	-0.054		-0.002			0.152		0.066	0.598		0.153		
Portugal	0.000	-0.074	0.000		0.161	0.123		0.074	-0.135		-0.068	-1.823	
Spain		-0.049	-0.002			0.122		0.092	-0.055	-1.096	0.107	-1.096	-0.090
Ireland					-0.041	0.083		0.046	0.046		-0.119		0.034
Poland	0.001	0.071	0.001			0.105	1.267				0.843		-0.098
Czech Republic			-0.012		-0.140	0.146		-0.091	7.531		0.281		0.434
Sweden		-0.085	-0.007	0.000		0.140		0.138	0.159		1.455		-0.108

Note: For ease of reading we only show significant coefficients at the 5% level.

**Table 3**  
Response of bond markets to the arrival of European macroeconomic news: the Consumer Confidence Index (CONF).

Countries	Impact on returns					Impact on variance					Impact on the covariance level				
	$\gamma_i^e$	$\gamma_i^{-e}$	$\gamma_i^{+e} + \xi_i^{+e}$	$\gamma_i^{-e} + \xi_i^{-e}$	$\rho_i$	$\delta_i^{0+}$	$\delta_i^{0-}$	$\delta_i^{+e} + \theta_i^{+e}$	$\delta_i^{-e} + \theta_i^{-e}$	$V_i$	$\alpha_{i,j}^{+e}$	$\alpha_{i,j}^{-e}$	$\alpha_{i,j}^{+e} + \kappa_i^{+e}$	$\alpha_{i,j}^{-e} + \kappa_i^{-e}$	$\beta_{i,j}$
Germany		-0.002		0.000		1.790	0.205	0.337	0.544	0.323	-0.548	3.456	-0.273	2.455	-0.040
Austria		-0.001		0.001	0.000	-0.199	0.114	0.153	0.259	0.075	2.758	0.458	0.152	0.097	0.120
Belgium		-0.001		0.000		-0.162	0.135	0.173	0.290	0.048	0.482	0.222	-0.124	-0.038	
Denmark		-0.001		-0.001		-0.240	0.205	0.135	0.205	0.217	1.903		-0.156	0.961	
France		-0.001		0.001		-0.184	0.159	0.197	0.291	0.091	0.254	0.218	0.079	1.135	-0.059
Greece		-0.001	0.001	-0.001		-0.349		-0.349		1.497	0.120	0.614	-0.282	-0.137	0.062
Italy		-0.001		0.001		-0.245		0.126	0.216	0.048	-0.347	-0.103	-0.100	-0.103	0.011
Netherlands		-0.001		0.001		-0.178	0.140	0.156	0.276	0.072	9.651	0.625	-0.097	0.236	0.055
Portugal		0.000		0.002		-0.089	3.742	0.299	0.011	0.130	-0.214	-0.556	0.316	-0.040	-0.048
Spain		-0.002		-0.002		-0.221	0.163	0.102	0.163	0.103	0.226	-0.294	-0.073	-0.010	-0.046
Ireland		-0.001		0.001		-0.218	0.209	-0.029	0.027	0.280	11.930	-0.345	4.529	-0.118	-0.029
Poland							-0.171	0.126	0.029		0.346	0.131	0.838	2.349	-0.076
Czech Republic						-0.048	0.337	0.089	0.117	-0.028	-0.328		-0.055	0.603	-0.026
Sweden	-0.002		0.000		0.000	-0.154		0.166	0.187	0.127	3.700	1.305	-0.059	1.305	0.022

Note: For ease of reading we only show significant coefficients at the 5% level.

**Table 4**  
Response of bond markets to the arrival of European macroeconomic news: the industrial production index (IPI).

Countries	Impact on returns					Impact on variance					Impact on the covariance level				
	$\gamma_1^{+e}$	$\gamma_1^e$	$\gamma_1^{+e} + \xi_1^{+e}$	$\gamma_1^e + \xi_1^e$	$\rho_1$	$\delta_1^{e+}$	$\delta_1^{e-}$	$\delta_1^{+e} + \theta_1^{+e}$	$\delta_1^e + \theta_1^e$	$v_1$	$\alpha_{i,j}^{+e}$	$\alpha_{i,j}^{-e}$	$\alpha_{i,j}^{+e} + \kappa_i^{+e}$	$\alpha_{i,j}^{-e} + \kappa_i^{-e}$	$\beta_{i,j}$
Germany		-0.002	0.002	-0.002						0.338	0.185	6.416	0.569	0.158	
Austria		-0.002		0.001	0.000				0.189	0.078	3.433	1.060	-0.224	-0.135	0.160
Belgium		-0.002		0.000		0.077			0.169	0.060	0.138	0.185	0.028	-0.026	-0.023
Denmark		-0.002		-0.002		0.116			0.241	0.217	-0.297		-0.118	0.200	-0.089
France		-0.002		0.000		0.104			0.216	0.097	0.293	0.321	-0.079	0.129	-0.027
Greece		-0.002	0.002	-0.002						0.338	0.185	6.416	0.569	0.158	
Italy	0.001	-0.002	0.001	0.000			0.085		0.237	0.046		0.329	0.194	0.053	
Netherlands		-0.002		0.000					0.152	0.076	0.841	0.706	-0.144	0.064	
Portugal	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	61.239			0.738	0.066	-0.271	-1.281	0.016	-0.050	-0.029
Spain		-0.003		-0.001		0.105			0.243	0.099	0.007	-0.984	0.202	0.060	-0.084
Ireland		-0.002		-0.002		0.148	-0.221		0.259	0.303	0.553	-0.911	0.038	-0.021	
Poland			0.002	-0.002		-0.052	-0.102		0.060			1.362		1.362	-0.068
Czech Republic															
Sweden		-0.001	0.002	0.001	0.000				0.224	0.147	0.679	1.770	1.086	1.770	-0.090

Note: For ease of reading we only show significant coefficients at the 5% level.

**Table 5**  
Response of bond markets to the arrival of European macroeconomic news: the interest rate (RATE).

Countries	Impact on returns					Impact on variance					Impact on the covariance level				
	$\gamma_i^e$	$\gamma_i^{-e}$	$\gamma_i^{+e} + \xi_i^{+e}$	$\gamma_i^{-e} + \xi_i^{-e}$	$\rho_i$	$\delta_i^{e+}$	$\delta_i^{e-}$	$\delta_i^{+e} + \theta_i^{+e}$	$\delta_i^{-e} + \theta_i^{-e}$	$v_i$	$\alpha_i^{+e}$	$\alpha_i^e$	$\alpha_{i,j}^{+e} + \kappa_i^{+e}$	$\alpha_{i,j}^e + \kappa_i^e$	$\alpha_{i,j}^{-e} + \kappa_i^{-e}$
Germany							6.477		6.477	0.274	-2.586	4.893	-4.959	28.689	-0.013
Austria				0.000		2.531	4.010	2.531	4.010	0.093	-6.230	-5.565	-1.301	2.141	-0.101
Belgium						2.464	3.857	2.464	3.857	0.070		12.080	-3.159	-2.186	-0.029
Denmark						5.085	9.147	5.085	9.147	0.544	-7.914	-5.333	-4.631	-5.333	0.016
France						2.721	4.712	2.721	4.712	0.115	-3.429		2.426	31.980	-0.085
Greece							15.708	-9.283	15.708	1.475	-8.556	-5.062	4.102	-5.062	-0.042
Italy						2.603	4.163	2.603	4.163	0.064	-4.435	-3.631	-0.259	38.093	-0.030
Netherlands						2.855	3.709	2.855	3.709	0.092	-3.925	-2.566	-0.204	10.691	-0.082
Portugal	-0.016		-0.016			3.275	2.375	-1.407	0.119	0.053		-2.783	6.920	-6.662	0.010
Spain						3.591	5.010	0.109	5.010	0.122	1.389	62.667	-7.882	-6.504	0.037
Ireland	0.020		0.020	-0.030		2.674	6.211	-1.220	12.849	0.280	-7.022	-6.018	-4.807	-6.018	
Poland	-0.049	0.030	0.033	0.030				3.947			-3.316		8.968	21.461	-0.062
Czech Republic			0.037			2.580	-3.522	2.580	0.643	-0.045	-3.023	62.260	-4.657	13.160	0.027
Sweden	0.022		0.022		0.001			5.154		0.129	24.125	-4.032	1.611	25.137	-0.059

Note: For ease of reading we only show significant coefficients at the 5% level.

When we look at the effect of news releases during the crisis period, we find that good unemployment news announcements have no effect on correlation yet and the effect of bad news has a heterogeneous effect. Both, good and bad news releases on IPI increase correlations and in the case of CONF and interest rate releases have a mixed effect.

## 5. CONCLUSIONS

The analysis of European Government Bond markets have been recently addressed in the literature due to the convergence process that started after the launch of the European Monetary Union (EMU) and the reversal of financial integration during the sovereign debt market crisis. Our paper contributes to this literature by providing a comprehensive analysis of the impact of macroeconomic news releases on European Government Bond returns, volatilities and correlations. We study the period from 2004-2011, using news releases for the Unemployment rate, the Industrial Production Index, the Consumer Confidence Index and the ECB's Interest rates decisions.

Our setting provides interesting insights into the effects of macroeconomic news announcements on European bond markets. While we observe a little response of bond returns to the release of macroeconomic news announcements, we find that bond return volatility strongly reacts to surprise and that the response is asymmetric. Our estimates paint a complex picture of the effect of macroeconomic news releases on correlations. Bond return comovement most often increases in correspondence with news releases. Finally, we find that financial crises do not necessarily increase the sensitivity of bond returns, volatilities and correlations to macroeconomic news announcements.

## 6. REFERENCES

- Abad, P., Chuliá, H., and M. Gómez-Puig. (2010). "EMU and European government bond market integration". *Journal of Banking and Finance*, 34, 2851-2860.
- Abad, P., Chuliá, H., and M. Gómez-Puig. (2013). "Time-varying integration in European Government Bond Markets". *European Financial Management*, forthcoming.
- Andersen, T., Bollerslev, T., Diebold, F., and C. Vega. (2007). "Real Time Price Discovery in Global Stock, Bond, and Foreign Exchange Markets". *Journal of International Economics*, 73(2), 251-277.
- Balduzzi, P., Elton, E. and C. Green. (2001). "Economic News and Bond Prices: Evidence from the U.S. Treasury Market". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 36, 523-543.
- Barr, D.G., and R. Priestley. (2004). "Expected returns, risk and the integration of international bond markets". *Journal of International Money and Finance*, 23, 71-97.

Bernoth, K., and J. Von Hagen.(2004). "Euribor futures market: efficiency and the impact of ECB policy announcements". *International Finance*, 7, 1-24.

Bredin, D., Hyde, S., Nitzsche, D., and G. O'Reilly. (2007). "European Monetary Policy Surprises: The aggregate and sectoral stock market response". *International Journal of Finance and Economics*, 14(2), 156-171.

Christie-David, R., Chaudhry, M. (1999). " Liquidity and maturity effects around news releases". *Journal of Financial Research*, 22-1, 47-67.

Christie-David, R., Chaudhry, M. and Khan, W.(2002). "News Releases, Market Integration, and Market Leadership". *Journal of Financial Research*, 25: 223-245.

Christie-David, R., Chaudhry, M. and Lindley, J. T. (2003). "The Effects of Unanticipated Macroeconomic News on Debt Markets". *Journal of Financial Research*, 26: 319-339.

Christiansen, C. (2000). "Macroeconomic announcement effects on the covariance structure of government bond returns". *Journal of Empirical Finance*, 7, 479–507.

Fleming, M.J., Remolona, E.M. (1999a). "Price Formation and Liquidity in the U.S. Treasury Market: The Response to Public Informatio". *Journal of Finance* , 54(5), 1901-15.

Fleming, M.J., Remolona, E.M. (1999b). "The Term Structure of Announcement Effects". *Staff report, Federal Reserve Bank of New York*.

Geyer, A., Kossmeier, S., and S. Pichler.(2004). "Measuring systematic risk in EMU government yield spreads", *Review of Finance*, 2004, 8, 171-197.

Goeij, P. and Marquering, W. (2006). "Macroeconomic announcements and asymmetric volatility in bond returns". *Journal of Banking & Finance*, 30-10, 2659-2680.

Gómez-Puig, M. (2009a). "The immediate effect of monetary union over EU-15's sovereign debt yield spreads". *Applied Economics*, 41, 929-939.

Gürkaynak, R., Sack, B., and E. Swanson.(2005), "The Sensitivity of Long-Term Interest Rates to Economic News: Evidence and Implications for Macroeconomic Models". *American Economic Review*, 95(1), 425-436.

Hardouvelis, G.A., Malliaropulos, D., and R. Priestley. (2006). "EMU and European stock market integration". *Journal of Business*, 79, 365-392.

Hardouvelis, G.A., Malliaropulos, D., and R. Priestley.(2007). "The impact of EMU on the equity cost of capital". *Journal of International Money and Finance*, 26, 305-327.



Konrad, E.(2009). "The impact of monetary policy surprises on asset return volatility: the case of Germany". *Financial Markets and Portfolio Management*, 23-2, 111-135.

Kuttner, K. (2001). "Monetary policy surprises and interest rates: evidence from the fed funds futures market". *Journal of Monetary Economics*, 47, 523-544.

Jones, C.M., Lamont, O., and R.L. Lumsdaine. (1998). "Macroeconomic news and bond market volatility". *Journal of Financial Economics*, 47, 315-337.

Li, L., and R.F. Engle. (1998). "Macroeconomic announcements and volatility of Treasury futures". *Discussion Paper 98-27*, Department of Economics, University of California, San Diego.

Pagano, M., and E.L. von Thadden. (2004). "The European bond markets under EMU", *Oxford Review of Economic Policy*, 20, 531-554.

## **II. NUEVOS DESARROLLOS DE PRODUCTOS ASEGURADORES**

## Ponencia 4

# ANÁLISIS DE LOS DÍAS DE BAJA IMPEDITIVOS UTILIZADOS EN EL CÁLCULO DE LA INDEMNIZACIÓN BÁSICA POR INCAPACIDAD TEMPORAL DERIVADA DE ACCIDENTES DE TRÁFICO

Mercedes Ayuso, Lluís Bermúdez y Miguel Santolino

### RESUMEN

En España, la indemnización básica por incapacidad temporal derivada de accidentes de tráfico es valorada, según lo expuesto en el Baremo, a partir del número de días de baja que ha reportado el lesionado. Mediante una base de datos de una entidad aseguradora, en primer lugar, se analizan los factores que influyen en el número de días de baja impeditivos y las distribuciones de probabilidad discretas que mejor modelizan esta variable. A continuación, se proponen modelos de regresión con el objetivo de detectar qué factores inciden en la duración de la baja impeditiva y en qué medida. Finalmente, a modo de conclusión, se discuten las implicaciones que sobre la reforma del baremo y el cálculo de la provisión técnica de prestaciones pueden extraerse de los resultados obtenidos.

### 1. INTRODUCCIÓN

En España, la valoración de la indemnización económica del daño sufrido por las víctimas de accidentes de tráfico se ha de cuantificar de manera obligatoria de acuerdo con el “Sistema para la Valoración de los Daños y Perjuicios causados a las Personas en Accidentes de Circulación” publicado como Anexo de la Ley de Responsabilidad Civil y Seguro en la Circulación de Vehículos a Motor (LRCSCVM). Este sistema de valoración, conocido popularmente como Baremo de indemnizaciones, se articula mediante unas tablas que incluyen los conceptos indemnizables así como las cuantías indemnizatorias a otorgar.

Las indemnizaciones por incapacidad temporal se concretan en la Tabla V del Baremo de indemnizaciones. La indemnización básica por este concepto es una cuantía fija y diaria ligada a los días de baja que la víctima ha necesitado para su total recuperación o estabilización. En la tabla se distinguen tres tipos de días de baja. En primer lugar, aquellos días que la víctima ha permanecido en el hospital

(días de baja hospitalarios); en segundo lugar, los días que la víctima no está hospitalizada pero no puede desarrollar en absoluto su ocupación o actividad habitual (días de baja improductivos); y, finalmente, los días que la víctima puede desarrollar parcialmente su ocupación o actividad habitual (días de baja no improductivos). En este artículo nos centraremos, por sus peculiares características, en los días de baja improductivos.

Las indemnizaciones por incapacidad temporal suponen un elevado porcentaje del total de las indemnizaciones percibidas por las víctimas de accidentes de tráfico que, en su mayoría, son liquidadas por las entidades aseguradoras en virtud de sus obligaciones contractuales ligadas a los seguros de automóvil. A pesar de su predominante peso en el coste asociado a los accidentes de tráfico, no existen, en la literatura actuarial, estudios empíricos sobre los días de baja derivados de la siniestralidad por accidentes de tráfico.

Paralelamente, coinciden en la actualidad dos procesos de reformas legales que pueden requerir un mayor conocimiento de los datos y variables relacionados con las indemnizaciones por incapacidad temporal. Nos referimos, en primer lugar, a la reforma del sistema español de valoración del daño personal y, en segundo lugar, a la reforma de la Ley de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados (LOSP). Ambas reformas tienen su origen, en parte, en la necesidad de adaptar al marco legislativo español sendas directivas de la UE. Por un lado, la Directiva 2005/14/CE del Parlamento Europeo y del Consejo de 11 de mayo de 2005, relativa al seguro de responsabilidad civil derivada de la circulación de vehículos (Quinta Directiva), que modifica determinados aspectos de las cuatro directivas anteriores con una finalidad claramente reforzadora de la protección a los perjudicados en accidentes de circulación, así como la de conseguir una mayor celeridad en la percepción de las indemnizaciones. Y, por otro lado, la Directiva 2009/138/EC del Parlamento Europeo y del Consejo de 25 de Noviembre de 2009 sobre el acceso y ejercicio de la actividad aseguradora y reaseguradora, también conocida como Solvencia II, que marca la puesta en marcha de medidas legislativas de control de riesgo en entidades aseguradoras.

Por lo que a la reforma del baremo se refiere, según Illescas (2011), tras numerosos años de práctica jurisdiccional, la estructura de la Tabla V puede mejorarse tomando en consideración una mayor individualización del daño. Por otro lado, en Solvencia II se considera que las provisiones técnicas deben ser el primer pilar del nuevo sistema de solvencia. Taylor y Campbell (2002) proponen calcular las provisiones por siniestros pendientes de liquidación y pago mediante la estimación del coste pendiente de cada siniestro abierto y subrayan que, de este modo, tienen en cuenta los atributos particulares de los siniestros en el cálculo de las provisiones correspondientes.

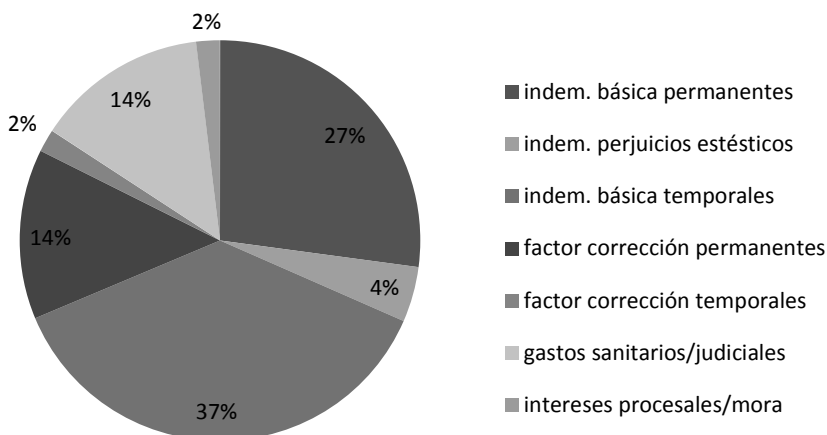
Finalmente, a continuación, detallamos la estructura del resto del artículo. En el apartado 2 se realiza una breve descripción de la base de datos utilizada. En el apartado 3 se describen los resultados obtenidos del análisis empírico de los factores relacionados con los días de baja improductivos. En el apartado 4, se discute qué

ajustes paramétricos pueden llevarse a cabo para esta variable. En el apartado 5 se presentan modelos de regresión que tratan de explicar cómo influyen los factores analizados en el apartado 3 en los días de baja impeditivos. Y, en el apartado 6, se resumen las principales conclusiones.

## 2. DATOS

Para llevar a cabo los objetivos planteados en la sección anterior, disponemos de una base de datos de una compañía aseguradora española. La misma base de datos ya ha sido utilizada con propósitos diferentes en otros trabajos realizados por los autores (Bermúdez *et al.*, 2009; Boucher y Santolino, 2010; Ayuso *et al.*, 2011 y 2012; Santolino *et al.*, 2012).

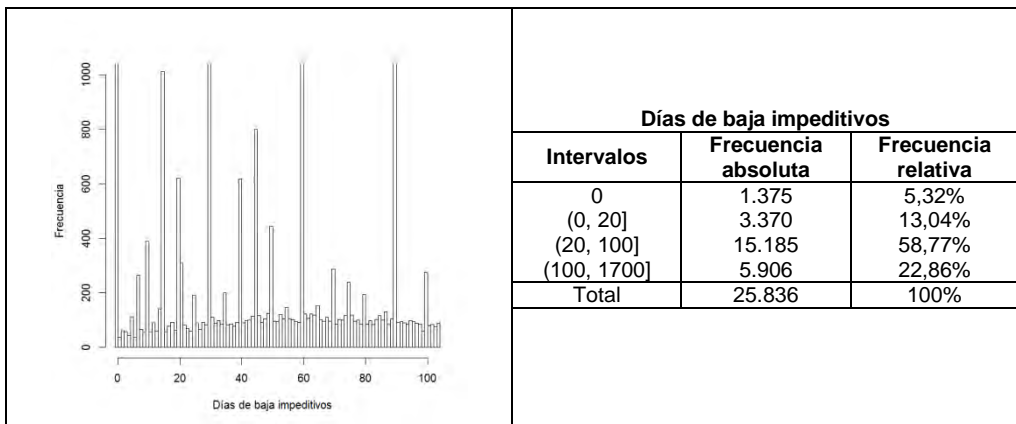
Esta base de datos contiene información sobre los daños sufridos por las víctimas de 22.709 accidentes de tráfico ocurridos en España entre 2000 y 2007, en los que se ha producido al menos una víctima con daños corporales. Los datos hacen referencia fundamentalmente a las lesiones y secuelas sufridas por los individuos, los días de baja y las indemnizaciones concedidas por lesiones permanentes y por incapacidades temporales. Todos los siniestros se liquidaron en el año 2007 mediante el pago de una indemnización. En la Figura 1, se muestra el peso de cada uno de los conceptos que constituyen la indemnización por daños corporales. Concretamente, el coste asociado a la indemnización básica por incapacidades temporales, calculada en el baremo a partir de los días de baja reportados por cada víctima, representa casi un 40% del coste total de las indemnizaciones por daños corporales.



**Figura 1**  
Descomposición del coste total asociado a los daños corporales

Tras depurar la base de datos, disponemos de información sobre 25.836 lesionados. Por un lado, sobre la variable de interés, esto es, el número de días de baja impeditivos que ha reportado cada lesionado. Y, por otro lado, sobre una serie de factores relacionados con las características intrínsecas del lesionado (género y edad) y otros vinculados al siniestro (posición/situación del lesionado en el momento del accidente, tipo de vehículo causante del accidente, tipo de liquidación, años hasta la liquidación, tipo y zona de la lesión producida). Los días de baja impeditivos presentan una media de 79,04 días, con una desviación estándar de 87,18. En la Tabla 1, se muestra el histograma (para los 100 primeros días) y la distribución por intervalos de los días de baja impeditivos.

**Tabla 1**  
Histograma y distribución por intervalos de los días de baja impeditivos



Señalar el peculiar comportamiento de esta variable. En el histograma de la Tabla 1, se aprecia que las frecuencias no están escalonadas gradualmente, como cabía esperar, y se observan puntas cada 5, 7 o 30 días. Especialmente relevantes son las puntas a los 30, 60, o 90 días. El alta impeditiva se produce cuando el lesionado acude a la visita concertada con su médico y éste último considera que el lesionado ya puede ejercer su actividad habitual con absoluta normalidad. Las visitas no se concertan diariamente y por tanto la medición, en días, de la baja impeditiva puede no coincidir con su duración real. Esto produce una acumulación de los casos observados en aquellos números de días que coinciden con la periodicidad con la que se concertan las visitas médicas, esto es, cada 5 días, cada 7 días, o cada 30 días. De este modo, es muy probable que el lesionado que recibe el alta a los 30 días estuviera en condiciones de reincorporarse a su actividad habitual unos días antes, pero espera la visita concertada con el médico para recibir el alta.

Las categorías para cada uno de los factores tomados en consideración en los siguientes apartados son:

*Género:* Hombre, Mujer.

*Edad:* Menores de 20 años, Entre 20 y 50 años, Entre 50 y 65 años, Mayores de 65 años.

*Posición/Situación del lesionado:* Conductor del vehículo contrario (v/c), Pasajero del vehículo asegurado (v/a), Pasajero del vehículo contrario, Peatón o ciclista.

*Tipo de vehículo asegurado (o causante):* Turismo, Camión, Motocicleta.

*Tipo de liquidación:* Negociación, Juicio.

*Años hasta la liquidación:* Menos de 1, Entre 1 y 2, Entre 2 y 4, 4 o más.

*Tipo de lesión:* Herida, Fractura, Contusión, Pérdida de conocimiento, Luxación/esguince, Abrasión, Amputación, Nerviosa, Vascular, Muscular, Trauma.

*Zona de la lesión:* Cabeza, Cuello, Tórax, Abdomen, Extremidad superior, Extremidad inferior, Policontusión.

### 3. FACTORES INFLUYENTES EN LOS DÍAS DE BAJA IMPEDITIVOS

En este apartado, utilizando la base de datos descrita en el apartado anterior, se presentan los resultados del análisis empírico de los factores asociados a la indemnización básica por incapacidad temporal. Para cada factor, se calcula la media y la desviación estándar de cada categoría y la distribución por intervalos de los días de baja de los lesionados de la muestra. Además, se comentan los resultados de los contrastes de hipótesis de igualdad de medias realizados entre las categorías de cada factor para, de este modo, comprobar si el factor en cuestión es significativo a la hora de explicar el número de días de baja. Para ello se ha escogido un contraste paramétrico (análisis de la varianza o test de la F) y uno no paramétrico (Kruskal-Wallis).

Sobre el género de los lesionados, en la Tabla 2, puede apreciarse que las mujeres presentan un período de recuperación o estabilización de sus lesiones superior al de los hombres. Realizados los contrastes de igualdad de medias, se rechaza la hipótesis nula, por lo que podemos considerar el género del lesionado como un factor estadísticamente significativo. A un nivel más detallado, se observa que un 26% de las mujeres necesitan más de 100 días para su recuperación, frente a un 21% de los hombres.

**Tabla 2**

Media y desviación estándar de los días de baja impeditivos por género del lesionado

Género	Días de baja impeditivos	
	Media	Desv. estándar
Hombre	75,43	80,52
Mujer	86,62	97,32

El siguiente factor considerado, la edad del lesionado, resulta también estadísticamente significativo. A parte de los contrastes de igualdad de medias para las cuatro categorías, se ha realizado un contraste dos a dos de las tres últimas categorías respecto de la primera, obteniéndose que se rechaza la hipótesis de igualdad de medias en todos los casos. En la Tabla 3 puede observarse como una mayor edad supone un aumento del número de días de baja impeditivos.

**Tabla 3**

Media y desviación estándar de los días de impeditivos por intervalos de edad del lesionado

Edad	Días de baja impeditivos	
	Media	Desv. estándar
(0, 20]	71,51	90,70
(20, 50]	77,24	84,35
(50, 65]	88,38	95,15
(65, 100]	89,42	86,11

La posición o situación del lesionado en el momento del accidente también incide significativamente en el número de días de baja impeditivos. Probablemente, dicha influencia está directamente relacionada con la gravedad de las lesiones sufridas. Así, en la Tabla 4, se observa como los lesionados que se encontraban en el vehículo no responsable del accidente y los peatones/ciclistas requieren un período de recuperación mayor. Los peatones y ciclistas pueden presentar una mayor gravedad que el resto de lesionados por la falta de protección que supone el automóvil. El conductor y en mayor grado los pasajeros del vehículo no responsable del accidente puede que experimenten una gravedad mayor que los pasajeros del vehículo asegurado, responsable del accidente, por la falta de anticipación a la ocurrencia del accidente. No se tienen datos del conductor del vehículo asegurado por no estar cubierto éste por el seguro obligatorio.

**Tabla 4**

Media y desviación estándar de los días de baja impeditivos por posición/situación del lesionado

Posición	Días de baja impeditivos	
	Media	Desv. estándar
Conductor v/c	75,44	81,59
Pasajero v/a	67,25	77,65
Pasajero v/c	87,01	100,79
Peatón/ciclista	104,72	100,08

Tan sólo cerca de un 5% de los casos observados ha obtenido su indemnización por vía judicial. En estos casos, las medias de los días de baja impeditivos son



significativamente superiores a los casos en que la indemnización se ha obtenido tras una negociación entre las partes. De nuevo, el hecho que la mayoría de casos resueltos por la vía judicial revistan mayor gravedad que el resto de casos explica las diferencias que se observan en la Tabla 5. Con más detalle, las víctimas que optan por la vía judicial han requerido más de 100 días de baja impeditiva en un 40% de los casos frente al 22% de las víctimas que optan por la negociación.

**Tabla 5**  
Media y desviación estándar de los días de baja impeditivos por tipo de liquidación del siniestro

Tipo de liquidación	Días de baja impeditivos	
	Media	Desv. estándar
Negociación	76,83	83,98
Juicio	117,70	124,61

Si atendemos al tipo de vehículo causante del siniestro, una vez realizados los contratos de hipótesis pertinentes, nos encontramos ante niveles de significación que oscilan, tan sólo, entre el 90% y el 95%, según los casos. Una mera observación de la Tabla 6, ya nos indica que las diferencias en las medias de los días de baja no son elevadas. En este caso, la propia naturaleza de la base de datos, en un 95% de los casos referida a lesionados por turismos, podría explicar la baja significabilidad de este factor.

**Tabla 6**  
Media y desviación estándar de los días de baja impeditivos por tipo de vehículo causante del siniestro

Tipo de Vehículo	Días de baja impeditivos	
	Media	Desv. estándar
Turismo	76,36	82,97
Camión	82,00	83,09
Motocicleta	73,93	74,81

El tiempo hasta que un siniestro es liquidado depende en gran parte de la complejidad y severidad del siniestro. En el caso que nos ocupa, un número elevado de años hasta la liquidación puede indicarnos que el siniestro ha ocasionado graves lesiones y, por tanto, un número elevado de días de baja impeditivos. En la Tabla 7, podemos observar como la media de los días de baja impeditivos aumenta a la vez que los siniestros han necesitado un mayor número de años para su liquidación. Con los contratos de hipótesis realizados, podemos concluir que el número de años hasta la liquidación del siniestro es un factor estadísticamente significativo para explicar el número de los días de baja impeditivos.

**Tabla 7**

Media y desviación estándar de los días de baja impeditivos por número de años hasta la liquidación

Años hasta liquidación	Días de baja impeditivos	
	Media	Desv. estándar
(0, 1]	59,08	46,03
(1, 2]	100,28	94,01
(2, 4]	159,94	166,60
(4, 11]	216,17	229,88

Por último, en la Tabla 8, presentamos las medias y desviaciones estándar de los días de baja impeditivos diferenciando por tipos de lesiones y zonas del cuerpo afectadas. Destacar que las amputaciones y las lesiones nerviosas son, con diferencia, las que más días de baja reportan. Consecuentemente, las extremidades, superiores e inferiores, y la cabeza son las zonas del cuerpo que aumentan el número de días de baja cuando se ven afectadas por el accidente. En sentido contrario, con menos de días de baja reportados, encontramos las contusiones, luxaciones y esguinces. Si al mismo tiempo, atendemos a la zona del cuerpo que menos días de baja presenta, el cuello, nos encontramos ante la lesión más común, el esguince cervical.

**Tabla 8**

Media y desviación estándar de los días de baja impeditivos por tipo y zona de lesión

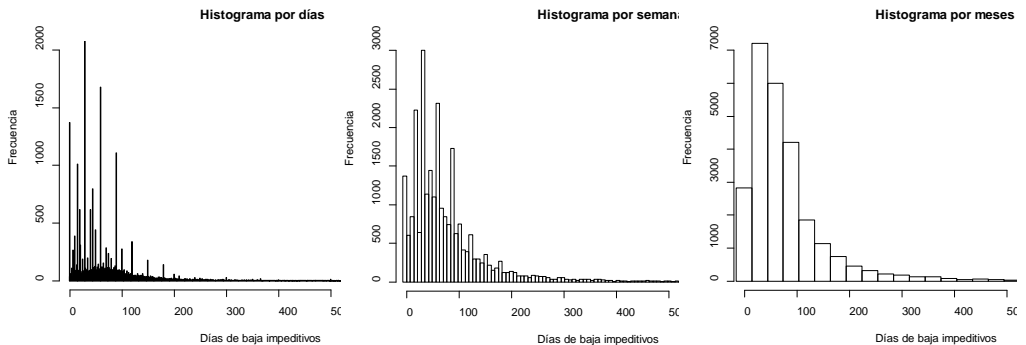
Tipo de lesión	Media	Desv. Est.	Zona de lesión	Media	Desv. Est.
Herida	90,90	108,90	Cabeza	100,59	113,49
Fractura	143,11	130,65	Cuello	64,85	60,56
Contusión	70,09	69,70	Tórax	78,61	86,66
Pérd. conocim.	152,27	152,43	Abdomen	77,94	78,26
Luxación	66,80	64,24	Extrem. Sup.	94,80	100,11
Abrasión	67,24	80,04	Extrem. Inf.	103,42	113,71
Amputación	195,38	193,36	Policontusión	72,19	79,78
Nerviosa	228,81	164,77			
Vascular	182,03	158,68			
Muscular	110,03	109,05			
Trauma	167,95	153,57			

#### 4. AJUSTE PARAMÉTRICO DE LOS DÍAS DE BAJA IMPEDITIVOS

Una vez analizados los factores que pueden influir en el número de días de baja, a continuación, comprobamos qué distribuciones de probabilidad se ajustan mejor a los datos sobre los días de baja impeditivos. Siendo la variable aleatoria analizada

un conteo, de días, en este caso, consideramos la variable aleatoria como discreta y, por tanto, pasamos a comprobar qué distribuciones discretas de probabilidad presentan un mayor ajuste a los datos de la muestra analizada. Concretamente, se han tenido en cuenta las siguientes distribuciones de probabilidad discreta: Poisson, binomial negativa (NB), Poisson-inversa gaussiana (PIG), Poisson cero inflada (ZIP), Poisson cero ajustada (ZAP), binomial negativa cero inflada (ZINB), binomial negativa cero ajustada (ZANB), logarítmica cero ajustada (ZALG) y Poisson-inversa gaussiana cero inflada (ZIPIG).

El ajuste paramétrico de las diferentes distribuciones discretas sobre los datos de los días de baja impeditivos no recogería las puntas observadas. Una posible solución, para efectuar un ajuste paramétrico con ciertas garantías, pasaría por buscar la manera de hacer coincidir la periodicidad de las visitas médicas con la periodicidad en la medición de la baja impeditiva. En la Figura 2 se muestran los histogramas de los días de baja impeditivos agrupando la información por días, semanas o meses. Puede verse como paulatinamente se consigue el comportamiento gradual característico de las distribuciones discretas utilizadas. De este modo, utilizando los datos agrupados en meses de baja impeditiva, se ha realizado el ajuste paramétrico con las diferentes distribuciones. En la Tabla 9, se muestran las frecuencias ajustadas para las dos distribuciones con mejor AIC, la binomial negativa y la binomial negativa cero ajustada. En la segunda columna de esta tabla, se muestran los intervalos de días utilizados para la agrupación de éstos en meses. Con los cortes escogidos, la media de los meses de baja impeditiva es 2,67 que multiplicada por 30 da una media en días de 80,19, muy cercana a los 79,04 días de media de los datos originales.



**Figura 2**  
Histogramas de los días de baja impeditivos agrupados por días, semanas y meses

Por último, respecto a las puntas detectadas en el histograma de los días de baja impeditivos, debidas a la periodicidad con la que se conciertan las visitas médicas, cabe preguntarse qué sobrecoste en número de días representa para las compañías de seguros. Efectivamente, algunos lesionados ya podrían haber recibido el

alta unos días antes, pero esperan a la visita concertada para recibirla. Para responder a esta pregunta hemos repartido el número de lesionados que reciben el alta en las puntas detectadas cada 15 días de manera uniforme en los 7 días anteriores a ésta. El número total de días que resulta es aproximadamente un 5% inferior al contabilizado con los datos de la muestra.

**Tabla 9**

Frecuencia observada y ajustada, para la binomial negativa y su versión cero ajustada, de los primeros 20 meses de baja impeditiva

Meses	Intervalo	Frec. obs.	NB	ZANB
0	[0, 14]	2828	4509,23	2828,00
1	[15, 44]	7216	5420,06	8103,34
2	[45, 74]	6005	4748,84	4994,40
3	[75, 104]	4204	3644,96	3230,62
4	[105, 134]	1856	2599,75	2139,01
5	[135, 164]	1137	1769,55	1435,83
6	[165, 194]	747	1166,02	972,57
7	[195, 224]	455	750,25	663,02
8	[225, 254]	327	473,99	454,16
9	[255, 284]	220	295,17	312,25
10	[285, 314]	183	181,68	215,32
11	[315, 344]	126	110,74	148,83
12	[345, 374]	134	66,96	103,08
13	[375, 404]	75	40,21	71,52
14	[405, 434]	43	24,00	49,69
15	[435, 464]	55	14,25	34,57
16	[465, 494]	41	8,42	24,07
17	[495, 524]	35	4,96	16,78
18	[525, 554]	34	2,91	11,71
19	[555, 584]	19	1,70	8,18
20	[585, 614]	16	0,99	5,71
<b>AIC</b>			<b>108.177,6</b>	<b>105.661,9</b>

## 5. MODELOS DE REGRESIÓN PARA LOS DÍAS DE BAJA IMPEDITIVOS

Una vez detectadas las distribuciones de probabilidad que mejor ajuste presentan a los datos, y teniendo en cuenta los factores analizados en el tercer apartado que pueden incidir en el número de días de baja reportado por los lesionados, en este apartado, planteamos separadamente diferentes modelos de regresión. En este caso, como ya ha sido comentado, para conseguir un ajuste paramétrico aceptable, debemos utilizar los datos acumulados en meses de baja impeditivos. Para

estos datos, las distribuciones binomial negativa y binomial negativa cero ajustada son aquellas que proporcionan un mejor ajuste. A partir de estas distribuciones, diferentes modelos de regresión han sido planteados con el objetivo de detectar qué factores inciden en la duración de la baja impeditiva y en qué medida.

La parametrización utilizada para la distribución binomial negativa es una de las apuntadas en Johnson *et al.* (1993), concretamente, aquella con parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , valor esperado  $E[Y] = \mu$  y varianza  $V[Y] = (1 + \sigma) \cdot \mu$ , por lo que  $\sigma$  representa el parámetro de dispersión. De acuerdo con nuestro objetivo, en la Tabla 10, se presentan los resultados para el modelo de regresión binomial negativo que considera el parámetro  $\sigma$  como fijo y utiliza la función logaritmo como función link para el parámetro  $\mu$ . A modo de comprobación, aunque no mostrado aquí, también se ha aplicado el modelo de regresión sin considerar el parámetro  $\sigma$  como fijo, obteniéndose un AIC similar al modelo expuesto en la Tabla 10. Este segundo modelo puede ser de interés si queremos conocer, por ejemplo, qué factores inciden en la dispersión.

La distribución binomial negativa cero ajustada, con parámetros  $\mu$ ,  $\sigma$  y  $\nu$ , presenta un valor esperado  $E[Y] = (1 - \nu) \cdot \mu \cdot (1 - c)^{-1}$ , con  $c = (1 + \sigma\mu)^{-\nu/\sigma}$ , y una varianza  $V[Y] = \mu \cdot (1 - c)^{-1} \cdot [\mu + (\sigma + 1)\mu^2] - (E[Y])^2$  siendo la interpretación de los dos primeros parámetros similar a la realizada para la distribución binomial negativa y siendo  $\nu$  el parámetro correspondiente al cero inflado de la variable. En la Tabla 10, se presentan los resultados para el modelo que considera los parámetros  $\sigma$  y  $\nu$  como fijos y utiliza la función logaritmo como función link para el parámetro  $\mu$ . En este caso, también se ha aplicado el modelo de regresión sin considerar el parámetro  $\nu$  como fijo, obteniéndose un AIC similar al del modelo expuesto en la Tabla 10. Este segundo modelo puede ser de interés si queremos conocer, por ejemplo, qué factores inciden en la probabilidad de no presentar ningún día de baja impeditivo.

El nivel de ajuste (AIC) del segundo modelo de regresión (ZANB) es significativamente mejor que el del primer modelo (NB). Por lo que a resultados se refiere, ambos modelos presentan niveles similares de significación de los coeficientes de las variables incluidas en ambos modelos de regresión. Tan sólo se observa alguna diferencia en la variable Posición, variable que podemos considerar como poco explicativa de la duración de la baja impeditiva, y en alguna zona o tipo de lesión.

**Tabla 10**

Modelos de regresión binomial negativo y binomial negativo cero ajustado para los meses de baja impeditivos

Variables	NB			ZANB		
	Coef.	Err. St.	p-valor	Coef.	Err. St.	p-valor
Constante	0,5981	0,0358	0,0000	-0,0056	0,0437	0,8982
Género (mujer)	0,0169	0,0176	0,3354	0,0275	0,0222	0,2147
Edad ((20, 50])	0,2186	0,0268	0,0000	0,3260	0,0331	0,0000
Edad ((50, 65])	0,2428	0,0317	0,0000	0,3872	0,0399	0,0000
Edad ((65, 100])	0,1618	0,0385	0,0000	0,2043	0,0480	0,0000
Posición (pasajero v/a)	-0,0251	0,0228	0,2718	-0,0549	0,0273	0,0444
Posición (pasajero v/c)	0,0211	0,0246	0,3926	0,0302	0,0320	0,3459
Posición (peatón)	0,0599	0,0271	0,0272	0,0599	0,0359	0,0953
Liquidación (juicio)	-0,1365	0,0319	0,0000	-0,1466	0,0422	0,0005
Vehículo (camión)	-0,0009	0,0360	0,9802	0,0497	0,0465	0,2854
Vehículo (motocicleta)	-0,1559	0,0816	0,0562	-0,1646	0,1027	0,1091
Años liquid. ((1,2])	0,2937	0,0196	0,0000	0,5415	0,0232	0,0000
Años liquid. ((2,4])	0,6092	0,0252	0,0000	0,9805	0,0351	0,0000
Años liquid. ((4,11])	0,9166	0,0393	0,0000	1,4155	0,0651	0,0000
Zona lesión (cabeza)	0,0175	0,0272	0,5210	0,0738	0,0368	0,0450
Zona lesión (cuello)	-0,0921	0,0344	0,0073	-0,2179	0,0489	0,0000
Zona lesión (tórax)	0,0467	0,0227	0,0399	0,0413	0,0295	0,1609
Zona lesión (abdomen)	0,1482	0,0242	0,0000	0,1996	0,0313	0,0000
Zona lesión (ext. sup.)	0,0957	0,0200	0,0000	0,1242	0,0268	0,0000
Zona lesión (ext. inf.)	0,1203	0,0218	0,0000	0,1151	0,0296	0,0001
Zona lesión (policont.)	-0,0357	0,0395	0,3662	-0,0333	0,0484	0,4911
Tipo lesión (herida)	-0,0783	0,0292	0,0074	-0,0695	0,0398	0,0809
Tipo lesión (fractura)	0,4685	0,0236	0,0000	0,5659	0,0331	0,0000
Tipo lesión (contusión)	-0,0952	0,0234	0,0000	-0,1216	0,0306	0,0001
Tipo lesión (pérd. con.)	0,1988	0,0413	0,0000	0,2700	0,0661	0,0000
Tipo lesión (luxación)	0,0812	0,0338	0,0163	0,0409	0,0494	0,4076
Tipo lesión (abrasión)	-0,2241	0,0603	0,0002	-0,3241	0,0717	0,0000
Tipo lesión (amputac.)	0,1959	0,1773	0,2691	0,2191	0,3192	0,4924
Tipo lesión (nerviosa)	0,3837	0,0587	0,0000	0,5261	0,1477	0,0004
Tipo lesión (vascular)	0,1334	0,1375	0,3318	0,2539	0,2519	0,3135
Tipo lesión (muscular)	0,2211	0,0298	0,0000	0,3550	0,0437	0,0000
Tipo lesión (trauma)	0,0243	0,0466	0,6011	0,0655	0,0764	0,3915
Sigma	2,0018			0,7582		
Nu				0,1097		
	<b>AIC = 81.634,89</b>			<b>AIC = 77.260,32</b>		

Como en el caso de la posición del lesionado, otras variables resultan no incidir en la duración de la baja impeditiva. Por ejemplo, el género de la víctima y el tipo de vehículo causante de las lesiones. La existencia de lesiones en la cabeza, el tórax o las policonfusiones tampoco parecen incidir en la duración de la baja impeditiva. Del mismo modo, tampoco lo hacen las luxaciones, las amputaciones, los traumas y las lesiones vasculares. Entre las variables que sí inciden en la duración de la baja impeditiva, la edad del lesionado y los años hasta la liquidación del siniestro lo hacen de manera positiva, esto es, aumentándola. Mientras que si se opta por la vía judicial, los días de baja impeditivos son menores que si se opta por la negociación con la compañía aseguradora. Por zonas de lesión, tan sólo la existencia de lesiones en el cuello conllevan una duración de la baja impeditiva menor. Del mismo modo, las contusiones y abrasiones presentan un número de días de baja impeditivos menor que el resto de tipos de lesiones.

## 6. CONCLUSIONES

Según la base de datos utilizada en este trabajo, el coste asociado a la indemnización básica por incapacidades temporales representa casi un 40% del coste total de las indemnizaciones por daños corporales. Teniendo en cuenta que dicha indemnización es calculada en el baremo a partir de los días de baja reportados por cada víctima, se pone de relieve la importancia de conocer en profundidad las características de la variable aleatoria días de baja impeditivos. Éste ha sido el objetivo de nuestro análisis.

Mediante simples contrastes de medias, se puede concluir que la mayoría de factores y variables disponibles en la base de datos utilizada inciden de alguna manera en los días de baja impeditivos.

Para la variable días de baja impeditivos, los diferentes ajustes paramétricos son muy pobres debido a las puntas observadas en el histograma. La solución adoptada en este caso, ha sido la conversión de la variable en meses de baja impeditivos. La distribución binomial negativa cero ajustada es la que obtiene un mayor nivel de ajuste. El modelo de regresión estimado a partir de dicha distribución nos indica que factores como el género del lesionado o la posición de éste en el vehículo no inciden en el número de meses impeditivos reportado.

Del estudio realizado pueden extraerse algunas conclusiones que tienen que ver con la futura reforma del Baremo de indemnizaciones. La primera de ellas afecta a la propia definición de los días de baja hospitalarios e impeditivos. Por un lado, por razones económicas de gestión de las plazas hospitalarias, se procede a dar el alta hospitalaria a pacientes que en su domicilio deben permanecer en absoluto reposo y recibir ayuda de terceras personas, situación ésta del todo equivalente a la de su estancia hospitalaria, si bien esos días serán reconocidos como días de baja impeditivos y, por tanto, con menor remuneración. Por otro lado, con el mecanismo dispuesto para recibir el alta impeditiva, ya comentado, es muy probable que el lesionado que recibe el alta a los 30 días estuviera en condiciones de reincorporarse a su actividad habitual unos días antes, pero espera la visita concertada con el médico para recibir el alta. En una primera aproximación, se estima que este desajuste puede suponer un 5% de incremento en el coste de las indemniza-

ciones por días de baja impeditivos. Tanto en un sentido como en otro, una mayor individualización del daño sufrido por el lesionado en el nuevo Baremo, puede ayudar a resarcir éste de una manera más justa.

De acuerdo con Solvencia II, las entidades aseguradoras necesitan obtener la mejor estimación posible de los compromisos adquiridos. En este sentido, la utilización de modelos de regresión que permitan la estimación del coste pendiente por días de baja impeditivos de cada siniestro abierto ofrece una excelente opción para el cálculo de la provisión por siniestros de daños corporales pendientes de liquidación y pago mediante un método individual de cálculo, tal como sugieren Taylor y Campbell (2002). Los resultados obtenidos por los modelos de regresión planteados en la sección 5, permiten tener en cuenta los atributos particulares de los siniestros en el cálculo de las provisiones correspondientes. Sin embargo, esta opción no está exenta de limitaciones. El ajuste en la cola de las distribuciones no es óptimo lo que unido al escaso número de observaciones dificulta la estimación correcta del coste pendiente. A tal efecto, sería aconsejable contar con una política de reaseguro adecuada para los casos con un número muy elevado de días de baja.

## REFERENCIAS

Ayuso, M., Bermúdez, L., Santolino, M. (2011). “Las indemnizaciones a las víctimas de accidentes de tráfico ante diferentes vías de resolución de conflictos: un análisis empírico”. *Revista Española de Seguros*, vol. 147, 655-674.

Ayuso, M., Bermúdez, L., Santolino, M.(2012).” Influence of the parties’ behavioural features on motor compensation outcomes”. *Journal of Risk Research*, vol. 15, nº 6, 673-691.

Bermúdez, L., Ayuso, M., Santolino, M.(2009). *Perspectivas y análisis económico de la futura reforma del sistema español de valoración del daño corporal*. Cuadernos de la Fundación Mapfre, nº 145, Madrid.

Boucher, J.-P., Santolino, M. (2010). Discrete distributions when modelling the disability severity score of motor victims. *Accident Analysis and Prevention*, vol. 42, nº 6, 2041-2049.

Illescas A.V. (2011). “Hacia la reforma del sistema de valoración del daño corporal: lesiones permanentes e incapacidad temporal”. *Revista española de seguros*, vol. 146, 463-474.

Johnson, N. L., Kotz, S., Kemp, A. W. (1993). *Univariate Discrete Distributions*, 2nd ed. Wiley, New York.

Santolino, M., Bolance, C., Alcañiz, M. (2012). “Factors affecting hospital admission and recovery stay duration of in-patient motor victims in Spain”. *Accident Analysis and Prevention*, vol. 49, 512-519.

Taylor, G., Campbell, M.(2002). *Statistical case estimation*. Research paper number 104, Centre for Actuarial Studies, The University of Melbourne, Australia.



## Ponencia 5

### EL SEGURO PAYD: EFECTO DE LOS FACTORES ASOCIADOS AL USO DEL VEHÍCULO SOBRE LA SINIESTRALIDAD

Manuela Alcañiz Zanón, Mercedes Ayuso Gutiérrez  
y Ana María Pérez Marín

#### RESUMEN

No cabe duda de que los kilómetros anuales recorridos por un conductor o sus hábitos al volante guardan una relación directa con su probabilidad de siniestro. No obstante, los sistemas tradicionales de tarificación no consideran este tipo de variables a la hora de determinar la prima. Es por este motivo que surge el seguro *Pay-As-You-Drive (PAYD)* que, al incorporar este tipo de variables, ofrece una prima más personalizada a cada conductor en función del uso que hace del vehículo. El objetivo de este artículo es doble: por una parte, llevar a cabo una revisión bibliográfica sobre los efectos que tienen las variables asociadas al uso en la siniestralidad y, en segundo lugar, realizar un estudio empírico a partir de una muestra de jóvenes conductores con una póliza *PAYD* que nos permita constatar la importancia de estos factores en la probabilidad de siniestro.

**Palabras clave:** tarificación en el seguro del automóvil, seguro basado en el uso, pay-as-you-drive, exposición al riesgo, kilometraje.

#### 1. INTRODUCCIÓN

En el seguro del automóvil la prima se fija en función de una serie de variables como el tipo de vehículo, la edad del conductor o los años de antigüedad del permiso de conducir, pero no se tienen en cuenta variables relativas al uso del vehículo a pesar de tener una relación directa con la siniestralidad. Concretamente, aquéllos que utilizan más su vehículo y por tanto realizan más kilómetros están más expuestos al riesgo de accidente que los que lo utilizan menos. Lo mismo ocurre con los que exceden los límites de velocidad en mayor medida o los que circulan más frecuentemente por vías urbanas.

Con objeto de poder incorporar variables de ese tipo, surgen los seguros basados en el uso, también llamados *Pay-As-You-Drive* (*PAYD*). Estos seguros consideran el kilometraje, el tipo de vía, la franja horaria de conducción y el porcentaje de exceso de velocidad sobre los límites permitidos a la hora de determinar la prima. El diseño de este tipo de productos es novedoso y complejo, existiendo además escasa información estadística y una dispersa bibliografía sobre el tema.

El objetivo de este trabajo es doble. Por una parte, realizar una revisión bibliográfica de los trabajos publicados sobre los efectos de las variables asociadas al uso del vehículo en la siniestralidad en el marco de los productos *PAYD*. Por otra parte, llevar a cabo una aplicación empírica basada en una base de datos reales sobre pólizas *PAYD* facilitada por una entidad aseguradora de nuestro país, que nos permite analizar el efecto de estas variables sobre la siniestralidad.

La estructura del artículo es la siguiente. En la sección segunda analizamos las conductas al volante y su relación con la siniestralidad. En la tercera se describen los sistemas de tarificación de pólizas *PAYD* y los efectos positivos de su comercialización. En la sección cuarta se presentan los resultados de la aplicación empírica llevada a cabo a partir de una muestra de 25.014 pólizas *PAYD*. Finalmente, en la sección quinta se realizan una serie de consideraciones finales.

## **2. CONDUCTAS AL VOLANTE Y ACCIDENTES DE TRÁFICO**

A continuación, analizamos algunos factores de riesgo asociados al uso del vehículo y su relación con la siniestralidad.

### **2.1. El kilometraje**

El número de kilómetros recorridos guarda una relación directa con la exposición al riesgo y con la probabilidad de siniestro. Además, diversos autores, como Litman (2005) y Langford *et al.* (2008), concluyen que esta relación no es proporcional, dado que los conductores que usan más el vehículo tienden a tener menos accidentes por unidad de distancia recorrida que aquellos que lo utilizan poco. Según Litman (2005), esto ocurre por diversos motivos. Por una parte, los conductores más habituales tienen mayor destreza al volante que los que conducen menos. Además, los vehículos nuevos (y, por tanto, más seguros) suelen conducirse más. Por último, este mismo autor también argumenta que los conductores más habituales suelen hacer un mayor uso de vías seguras, como autopistas.

### **2.2. La velocidad de conducción**

Resulta evidente que la velocidad está relacionada con la severidad de los accidentes que puedan ocurrir (OMS, 2004; Jun *et al.* 2007, 2011). En concreto, Elvik *et al.* (2004) concluyen que existe una fuerte asociación estadística entre veloci-

dad y siniestralidad vial, de modo que si la velocidad media del tráfico disminuye un 10%, el número de muertos en accidente desciende un 37,8% (a partir de datos de Suecia y Noruega). Otra de sus conclusiones es que la relación entre velocidad y siniestralidad es causal, de modo que la velocidad es la variable que más incidencia tiene sobre la probabilidad de accidente, con independencia del país, período temporal o tipo de vía. En definitiva, ha quedado demostrado que si la velocidad media disminuye, el número de accidentes se reduce.

### **2.3. El tipo de vía de circulación más frecuente**

El tipo de vía por el que el vehículo circula más frecuentemente es otro de los factores que se relacionan con el riesgo de sufrir un accidente. Existen numerosos estudios que identifican las vías urbanas como las más peligrosas. En concreto, Laurie (2011) cuantificó que en Gran Bretaña la tasa de accidentalidad en vías urbanas es 8,26 veces más elevada que en autopistas.

### **2.4. La franja horaria y el día de conducción**

El momento/franja horaria del día y los días de la semana en los que un conductor circula con mayor frecuencia inciden también en su riesgo de accidente. En este sentido, Akerstedt *et al.* (2001) estudian la probabilidad de sufrir un accidente en función de las diferentes horas del día (a partir de datos de Suecia). Al analizar los accidentes en los que no concurre alcoholemia, concluyen que el momento de mayor peligrosidad se encuentra alrededor de las 4 de la madrugada, hora a la que hay 5,7 veces más probabilidad de resultar herido en accidente, y 11,4 veces más de morir. Este mismo patrón se observa en la probabilidad de tener accidentes sin concurrencia de otros vehículos, como, por ejemplo, salidas de vía. Por contra, los accidentes ocasionados por adelantamientos no siguen un patrón estacional asociado a las 24 horas del día. Según este mismo estudio, si se consideran también los accidentes en los que concurre alcoholemia, el período nocturno resulta aún más claramente diferenciado como el más peligroso.

Igualmente, los días en que el conductor usa con más frecuencia su vehículo tienen incidencia en su riesgo de sufrir accidentes. Por ejemplo, es ampliamente conocido que la peligrosidad aumenta entre los jóvenes conductores las noches de fin de semana, más si conducen un vehículo potente (Williams *et al.*, 2012 y Doherty *et al.* 1998). En este sentido, también existen numerosos estudios que muestran que la conducción nocturna entre los jóvenes incrementa de forma muy significativa la siniestralidad (Rice *et al.*, 2003 y Calafat *et al.*, 2008).

### **2.5. El motivo por el que se utiliza el vehículo**

Elias *et al.* (2010) estudian el tipo de actividad diaria y los patrones de desplazamiento de los conductores (a partir de datos de Israel). Sus resultados muestran

que las personas que usan el vehículo para desplazarse a su lugar de trabajo, aunque realicen también otras actividades aprovechando los mismos trayectos, tienen menos probabilidades de sufrir siniestros que aquellos que usan el vehículo para actividades diferentes del trabajo o el estudio. Se demuestra asimismo que el riesgo de accidente es mayor en trayectos que no tienen un propósito específico.

## 2.6. Desaceleraciones bruscas del vehículo

Otra variable relevante asociada al estilo de conducción es el número de desaceleraciones bruscas o frenazos que lleva a cabo un conductor. En concreto, Jun *et al.* (2007) muestran que el número de desaceleraciones bruscas es una variable que sirve para explicar la probabilidad de verse involucrado en un accidente. El efecto es especialmente intenso en viajes matinales por cualquier vía, y en desplazamientos nocturnos por carreteras locales. Estos períodos del día no son propicios a presentar congestión, de modo que este hecho podría atribuirse a un descuido en la distancia de seguridad o a las distracciones causadas por el uso de móviles, etc. (Farmer *et al.*, 2010).

## 3. EL SEGURO PAYD: ANTECEDENTES Y EFECTOS POSITIVOS

En la actualidad el avance tecnológico ha hecho posible que la utilización del vehículo por parte del asegurado pueda ser controlada de forma objetiva. Ello ha motivado la implementación del denominado seguro *PAYD* (también llamado en Estados Unidos “Usage Based Insurance”, UBI) que consigue ofrecer al asegurado primas más personalizadas.

No obstante, las primeras referencias sobre este tipo de productos datan ya del año 1925, según señala Khazzoom (2000). Estas primeras propuestas hacen referencia al seguro del automóvil *Pay-at-the-pump (PATP)*, que pretendía introducir un mecanismo por el cual los conductores pagasen por su seguro cada vez que repostasen combustible, o al sistema “*insured tyres*” o de “ruedas aseguradas” en el que la entidad aseguradora asociada al número de serie de los neumáticos del vehículo sería responsable de indemnizar a las víctimas del accidente. Ambas propuestas fueron criticadas dadas las dificultades de su implementación y la no consideración de las características del asegurado y su historial de siniestralidad a la hora de determinar la tarifa a aplicar (Guensler *et al.*, 2003).

Tal y como apuntábamos, el desarrollo tecnológico en la actualidad ofrece nuevas alternativas para el control de la utilización del vehículo y los hábitos de conducción. En concreto, en los seguros *PAYD* se han adoptado diferentes sistemas de tarificación, recogidos por Litman (2011).

- *Mileage Rate Factor (MRF)*: se considera el kilometraje anual del asegurado como una variable más en la determinación de la prima ofreciendo des-

cuentos a los asegurados que conducen menos de un determinado número de kilómetros anuales. El problema de este sistema es que se basa en la estimación del kilometraje anual declarada por el propio asegurado, pudiendo estar sesgada a la baja.

- *Per-Mile-Premium (PMP)*: a los asegurados se les asigna una tarifa de precio por unidad de distancia recorrida, basándose en variables tradicionalmente utilizadas en el ámbito actuarial para la tarificación del seguro del automóvil. La principal desventaja de estos sistemas radica en cómo medir y controlar la distancia recorrida por cada vehículo (Guensler *et al.*, 2003). En la mayoría de casos, se mide a través del cuentakilómetros (lo que puede conllevar un comportamiento fraudulento por parte de los asegurados cuando es manipulado).
- *Sistema basado en el GPS*: ofrece la posibilidad de establecer una tarifa por kilómetro recorrido también considerando el tipo de vía, la franja horaria de conducción, el porcentaje de exceso de velocidad según tipo de vía, e incluso las desaceleraciones bruscas. Este tipo de sistemas es el más utilizado en la actualidad y se ofrece como opcional siempre contando con el consentimiento del asegurado para la instalación de un GPS.

Lo que en cualquier caso está fuera de discusión, es que bajo el sistema *PAYD*, las primas reflejan con mayor exactitud los costes de aseguramiento de cada vehículo, lo cual es más justo y eficiente en términos económicos (Litman, 2011). Además, los conductores consiguen un ahorro si reducen el kilometraje o mejoran sus hábitos de conducción (Peña, 2007). De hecho existen trabajos en los que se analiza en qué medida la comercialización de seguros *PAYD* puede inducir cambios en la conducción de los asegurados.

En concreto, Buxbaum (2006) cuantificó el descenso esperado en el kilometraje motivado por reducciones en la prima *PAYD* a través de un estudio llevado a cabo en Estados Unidos. Concluyó que el descenso en la distancia recorrida depende de diversas características del individuo (familiaridad con las nuevas tecnologías, conciencia ambiental, etc.), así como del uso que se da al vehículo. Por ejemplo, en los fines de semana el descenso observado en el kilometraje fue aproximadamente de un 8%, en tanto que la circulación en horas punta se redujo casi en un 10%.

Por otra parte, Bolderdijk *et al.* (2011) demuestran que en efecto la comercialización de seguros *PAYD* en los que se aplica un descuento a los conductores jóvenes respetuosos con los límites de velocidad consigue reducir significativamente las infracciones por sobrepasar el límite permitido. Los efectos positivos de cara a reducir los problemas derivados de la congestión de tráfico también han sido estudiados en diversos trabajos. En concreto, Parry (2004 y 2005) constató los beneficios de la comercialización de pólizas *PAYD* de cara a reducir el consumo de carburantes y las externalidades negativas de los accidentes de tráfico, llegando a ser, bajo determinadas circunstancias, una medida más efectiva que una subida en los impuestos de los combustibles.

En definitiva, de la revisión bibliográfica realizada concluimos que los seguros basados en el uso se perfilan como una nueva tendencia en tarificación y un punto de partida para el diseño de productos aseguradores cada vez más personalizados y ajustados al perfil real de riesgo que tiene cada asegurado.

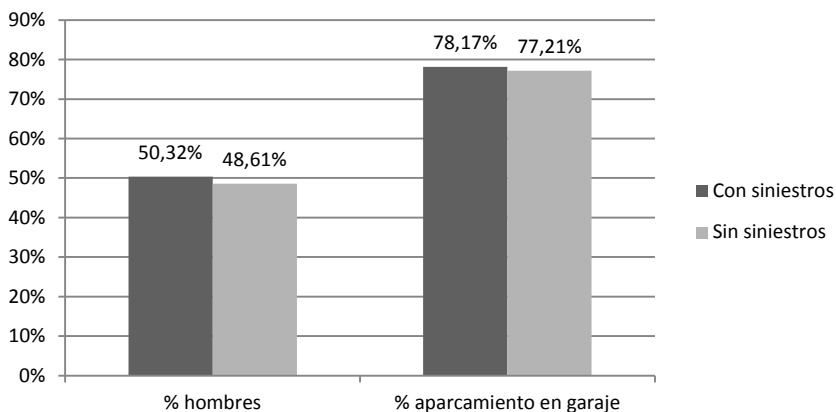
#### 4. UNA APLICACIÓN EMPÍRICA DEL SEGURO *PAYD*

A continuación, presentamos el resultado del análisis empírico llevado a cabo sobre una muestra de 25.014 asegurados jóvenes de una compañía española, que suscribieron una póliza *PAYD* que estuvo en vigor durante todo el año 2011. Sabemos que el 17,6% de las pólizas registró algún siniestro y el 82,4% no registró ninguno.

A continuación mostramos los resultados del análisis descriptivo de las variables tradicionales utilizadas en tarificación y de los factores asociados al uso del vehículo, diferenciando en cada caso entre los conductores con y sin siniestros.

##### 4.1. Variables tradicionales en tarificación: estadísticos descriptivos

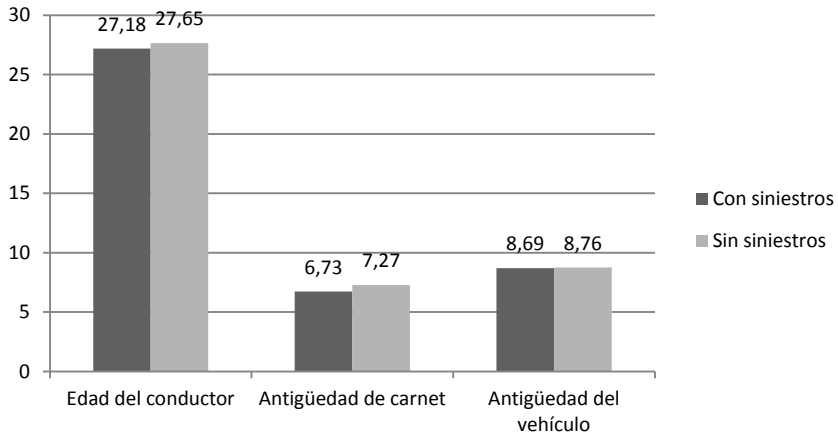
En la Figura 1 se describen las dos variables cualitativas consideradas en este estudio: género y tipo de aparcamiento. Respecto al género, observamos como el porcentaje de hombres es ligeramente superior en el colectivo de asegurados con siniestros respecto al colectivo sin siniestros. Por otra parte, observamos también que el porcentaje de conductores que aparcan en garaje su vehículo es ligeramente superior para los conductores con siniestros que para los que no los han tenido.



**Figura 1**

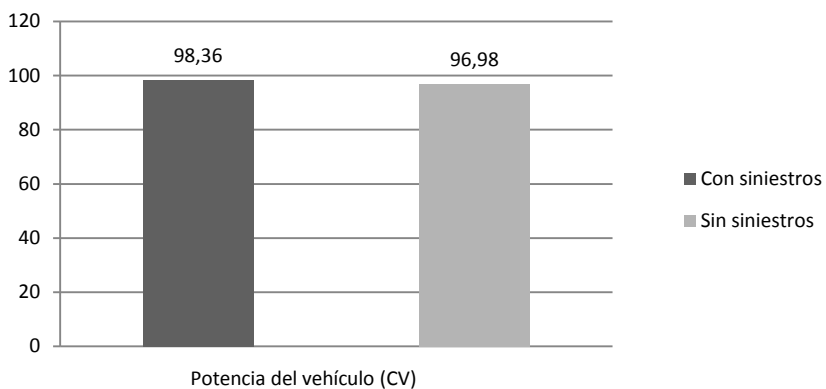
Variables cualitativas. Porcentaje de hombres y de conductores que aparcan en garaje para los que han tenido siniestros y los que no

En las Figuras 2 y 3 se representan los promedios de las variables numéricas analizadas. En concreto, en la Figura 2 se muestra como los conductores con siniestros son en promedio ligeramente más jóvenes y más inexpertos al volante que los que no han tenido siniestros. Por otra parte, la antigüedad del vehículo es en promedio prácticamente la misma para los conductores con y sin siniestros. Por último, en la Figura 3 se representa el promedio de la potencia del vehículo conducido, y observamos cómo ésta es superior para los asegurados con siniestros respecto a los que no han tenido ninguno.



**Figura 2.**

Variables numéricas. Promedio de la edad del conductor, antigüedad de carnet y del vehículo para conductores con y sin siniestros

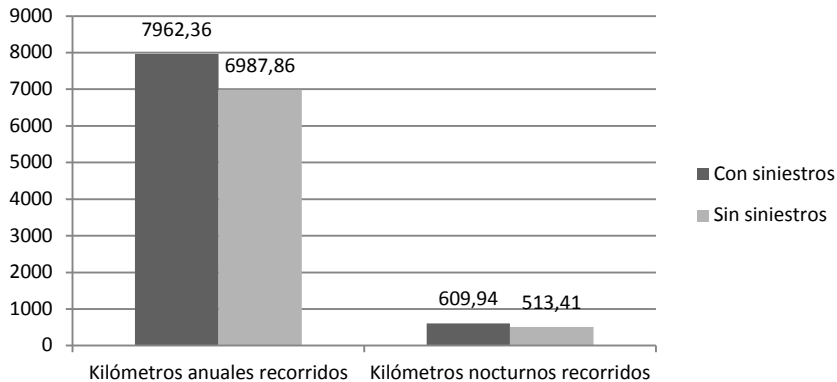


**Figura 3.**

Variables numéricas. Promedio de la potencia del vehículo (CV) para conductores con y sin siniestros

## 4.2. Variables asociadas al uso del vehículo: estadísticos descriptivos

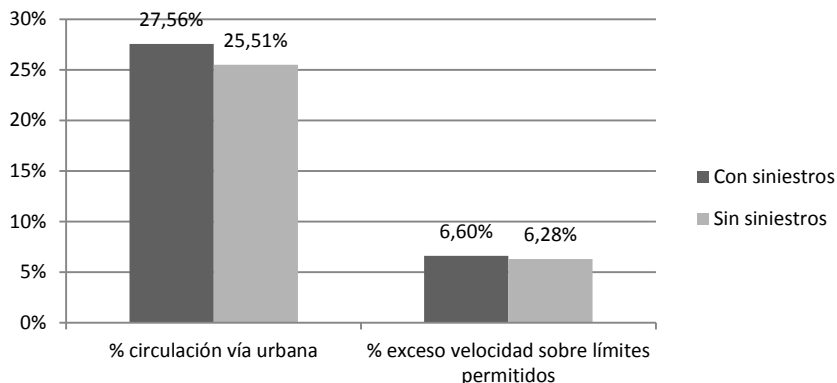
En la Figura 4 representamos el promedio del kilometraje anual, que resulta ser superior para los conductores con siniestros (7962.36 km) respecto a los que no han tenido ningún accidente (6987.86 km). Del mismo modo, también es superior el kilometraje nocturno promedio para los asegurados con siniestros (609.94 km) respecto a los que no han declarado ningún siniestro (513.41 km).



**Figura 4**

Kilometraje anual medio (total y nocturno) para asegurados con y sin siniestros

Por otra parte, observamos en la Figura 5 como el porcentaje de circulación por vía urbana es en promedio superior entre los que han tenido siniestros respecto a los que no los han tenido (27.56% vs. 25.51%). Finalmente, también observamos como los conductores con siniestros sobrepasan en promedio los límites de velocidad en mayor medida que los que no han registrado ningún siniestro (6.60% vs. 6.28%).



**Figura 5**

Porcentaje de circulación por vía urbana y porcentaje de exceso de velocidad sobre los límites permitidos para asegurados con y sin siniestros



### 4.3. Resultados de la modelización

Hemos ajustado un modelo de regresión logística para la predicción de la probabilidad de siniestro en función de las variables tradicionales usadas en tarificación y los nuevos factores asociados al uso del vehículo. En la Tabla 1 se recogen las variables finalmente utilizadas para predecir la probabilidad de siniestro y en la Tabla 2 se presentan los resultados de la estimación del modelo. Comentamos a continuación el efecto de cada una de las variables sobre la probabilidad de siniestro.

**Tabla 1**  
Variables incluidas en la modelización

<i>Variable explicada</i>	
$y_i$	1, si el conductor asegurado ha sufrido uno o más siniestros en el periodo de estudio; 0, en caso contrario.
<i>Variables explicativas</i>	
$x_{1i}$	Edad del conductor asegurado (codificada en tres categorías: hasta 24 años; desde 25 hasta 28 años; y 29 años o más).
$x_{2i}$	Sexo del conductor asegurado (1 si hombre; 0 mujer).
$x_{3i}$	Antigüedad de carnet del conductor asegurado.
$x_{4i}$	Antigüedad del vehículo asegurado.
$x_{5i}$	Potencia del vehículo asegurado.
$x_{6i}$	Lugar donde duerme el vehículo (1 en garaje; 0 en vía pública).
$x_{7i}$	Número de kilómetros recorridos en el año.
$x_{8i}$	Número de kilómetros nocturnos recorridos en el año.
$x_{9i}$	Porcentaje de kilómetros nocturnos respecto al total de kilómetros recorridos en el año (codificada en cuatro categorías: hasta el 10%; del 10 al 20%; del 20 al 30%; y más del 30%).
$x_{10i}$	Porcentaje de exceso de velocidad sobre los límites legalmente permitidos (codificada en cuatro categorías: hasta el 2%; del 2 al 5%; del 5 al 11%; y más del 11%).
$x_{11i}$	Porcentaje de circulación por vía urbana

$i = 1, \dots, N$ ;  $N = 25014$ .

Observamos cómo a medida que aumenta la experiencia al volante del conductor disminuye la probabilidad de siniestro. Por otra parte, los coeficientes asociados a los grupos de edad definidos no resultan significativos, probablemente debido a la elevada correlación existente entre la edad del conductor y la antigüedad del carnet. Respecto a la potencia del vehículo, nuestros resultados indican que una mayor potencia aumenta la probabilidad de siniestro. Por otra parte, ni el género, ni el lugar de aparcamiento ni la antigüedad del vehículo inciden de forma significativa en la probabilidad de siniestro.

**Tabla 2**  
Resultados de la estimación del modelo de regresión logística

	<b>Coef.</b>	<b>S.E.</b>	<b>p-valor</b>	<b>Odds Ratio</b>
Constante	-2,487	0,128	0,000 <sup>a</sup>	0,083
Edad 25-28	-0,037	0,047	0,436	0,964
Edad $\geq$ 29	-0,034	0,059	0,563	0,967
Varón	-0,035	0,036	0,329	0,966
Antigüedad de carnet del conductor asegurado	-0,060	0,008	0,000 <sup>a</sup>	0,941
Antigüedad del vehículo asegurado	0,005	0,004	0,205	1,005
Potencia del vehículo asegurado	0,003	0,001	0,000 <sup>a</sup>	1,003
Aparcamiento: garaje	0,031	0,041	0,451	1,032
Número de kilómetros anuales recorridos	7,8e <sup>-5</sup>	5,7e <sup>-6</sup>	0,000 <sup>a</sup>	1,0001
Número de kilómetros nocturnos recorridos en el año	5,5e <sup>-5</sup>	4,4e <sup>-5</sup>	0,212	1,0001
Kilómetros nocturnos: entre el 11 y el 20% del total	-0,115	0,057	0,042 <sup>b</sup>	0,891
Kilómetros nocturnos: entre el 21 y el 30% del total	-0,189	0,123	0,123	0,828
Kilómetros nocturnos: más del 30% del total	0,088	0,227	0,699	1,092
Porcentaje de exceso de velocidad: entre el 0 y el 2%	-0,150	0,056	0,007 <sup>a</sup>	0,861
Porcentaje de exceso de velocidad: entre el 3 y el 5%	-0,004	0,054	0,943	0,996
Porcentaje de exceso de velocidad: entre el 6 y el 11%	0,049	0,054	0,368	1,050
Porcentaje de circulación por vía urbana	0,020	0,001	0,000 <sup>a</sup>	1,020
Categorías de referencia: edad ( $\leq$ 24 años); género (mujer); aparcamiento (vía pública); porcentaje de kilómetros nocturnos respecto al total (0 - 10%); porcentaje de exceso de velocidad sobre el límite permitido ( $\geq$ 12%). Chi-Cuadrado: 608,932 ( $p$ -valor=0,000); -2log-verosimilitud: 22677,913; grados de libertad: 16; <sup>a</sup> significación al 1%; <sup>b</sup> significación al 5%; <sup>c</sup> significación al 10%.				

En relación con las variables asociadas al uso del vehículo, observamos como a medida que aumenta el kilometraje total, también aumenta la probabilidad de siniestro. Igualmente, un mayor porcentaje de circulación por vía urbana se asocia de manera significativa con una mayor probabilidad de siniestralidad.

Respecto a la franja horaria de conducción, la probabilidad de siniestro para los que conducen entre un 11 y un 20% de los kilómetros por la noche es menor que la probabilidad de siniestro de los que registran menos kilometraje nocturno. Del mismo modo, el hecho de conducir más de un 20% de los kilómetros por la noche no se asocia de manera significativa a una mayor siniestralidad. Estos resultados posiblemente se deban a una mayor siniestralidad observada para los individuos que no conducen su vehículo por la noche asiduamente, sino solo en ocasiones concretas.

Por último, respecto a la velocidad, observamos que los asegurados que sobrepasan los límites de velocidad en un 2% como máximo son aquéllos que tienen una menor probabilidad de siniestro. Cuando el exceso de velocidad se sitúa por encima de este umbral, no se observan diferencias significativas en la siniestralidad respecto a la categoría de referencia (excesos de velocidad superiores al 11%).

## 5. CONSIDERACIONES FINALES

Concluimos que los resultados obtenidos ponen de manifiesto la importancia que los nuevos factores de riesgo (basados en el uso del vehículo) pueden tener en la tarificación del seguro del automóvil con el fin de obtener primas más personalizadas. De este modo, el seguro *PAYD* supone el cambio hacia un nuevo concepto de producto asegurador, el seguro basado en el uso, que puede extenderse a otros tipos de pólizas, como el seguro del hogar (en el que ya existe la distinción entre vivienda habitual y segunda residencia) o incluso el seguro de accidentes en el ámbito laboral (en el que el conocimiento de cuáles son los hábitos y conductas del individuo en la actividad laboral diaria puede ser tenido en cuenta a la hora de calcular la prima, estando además cubierto el riesgo de accidente *in itinere*, por lo que el seguro de automóviles basado en el uso sería de aplicación).

Consideramos, por tanto, que en los próximos años el seguro basado en el uso puede consolidarse como nueva tendencia en tarificación. De este modo, a medida que esta consolidación se produzca, y las compañías recopilen más información histórica sobre este tipo de pólizas, será también posible conocer en qué medida la comercialización de estos productos induce cambios en la conducción de los asegurados. Se abre así una línea de investigación que sin duda aportará mucho conocimiento al sector y a la ciencia actuarial en su conjunto.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Akersted, T., Kecklund, G., Hörte, L.G. (2001). "Night Driving, Season, and the Risk of Highway Accidents", *Sleep*, vol. 24, 4.

Bolderdijk, J.W., Knockaert, J., Steg, E. M., Verhoef, .E. T. (2011). "Effects of Pay-As-You-Drive vehicle insurance on young drivers' speed choice: results of a Dutch field experiment", *Accident Analysis and Prevention*, vol. 43, 1181-1186.

Buxbaum, J. (2006). "Mileage-Based User Fee Demonstration Project: Potential Public Policy Implications of Pay-As-You-Drive Leasing and Insurance Products". *Cambridge Systematics, Inc.*

Calafat, A., Adrover, D., Juan, M. y Blay, N.T. (2008). "Relación del consumo de alcohol y drogas de los jóvenes españoles con la seguridad vial durante la vida recreativa nocturna en tres Comunidades Autónomas en 200", *Revista Española de Salud Pública*, vol. 82, 323-331.

Doherty, S.T., Andrey, J.C. y MacGregor, C. (1998). "The situational risks of young drivers: The influence of passengers, time of day and day of week on accident rates", *Accident Analysis and Prevention*, vol. 30, nº 1, 45-52.

Elias, W., Toledo, T., y Shiftan, Y. (2010). "The effect of daily-activity patterns on crash involvement", *Accident Analysis and Prevention*, vol. 42, nº 6, 1682-1688.

Elvik, R., Christensen, P. y Amundsen, A.(2004). "Speed and road accidents. An evaluation of the Power Model", *TØI report 740/2004*, Institute of Transport Economics TOI, Oslo.

Farmer, C.M., Braitman, K.A. y Lund, A.K. (2010). "Cell Phone Use While Driving and Attributable Crash Risk", *Traffic Injury Prevention*, vol. 11, nº 5, 466-470.

Guensler, R., Amekudzi, A., Williams, J., Mergelsberg, S., Ogle, J. (2003). "Current state regulatory support for Pay-As-You-Drive automobile insurance options", *Journal of Insurance Regulation*, National Association of Insurance Commissioners, vol. 21, 3.

Jun, J., Guensler, R. y Ogle, J. (2011). "Differences in observed speed patterns between crash-involved and crash-not-involved drivers: Application of in-vehicle monitoring technology", *Transportation Research Part C*, vol. 19, 569-578.

Jun, J., Ogle, J. y Guensler, R. (2007). "Relationships between Crash Involvement and Temporal-Spatial Driving Behavior Activity Patterns: Use of Data for Vehicles with Global Positioning Systems", *Transportation Research Record*, vol. 2019, 246-255.

Khazzoom, J.D. (2000). "Pay-at-the-Pump auto Insurance: Review of criticisms and proposed modifications", *Journal of Insurance Regulation*, vol. 18, 448-496.

Langford, J.; Koppel, S.; McCarthy, D. y Srinivasan, S. (2008). "In defence of the 'low-mileage bias'", *Accident Analysis and Prevention*, vol. 40, 1996-1999.

Laurie, A. (2011) "Telematics: the new auto insurance", en *Emphasis. -New York: Towers Watson*, vol. 1, 20-25.

Litman, T. (2005). "Pay-As-You-Drive pricing and insurance regulatory objectives", *Journal of Insurance Regulation*, National Association of Insurance Commissioners, vol. 23, 3.

Litman, T. (2011). "Pay-As-You-Drive insurance: recommendations for implementation", *Victoria Transport Policy Institute*.

Organización Mundial de la Salud. (2004). *Informe mundial sobre prevención de los traumatismos causados por el tránsito*. Washington, D.C.: OPS.

Parry, I.W.H.(2004). "Comparing alternative policies to reduce traffic accidents", *Journal of Urban Economics*, vol. 56, 346-368.

Parry, I.W.H.(2005). "Is Pay-As-You-Drive insurance a better way to reduce gasoline than gasoline taxes?", *American Economic Review*, vol. 95, nº 2, 288-293.

Peña Pérez, L. (2007). "Nuevos modelos de gestión de seguros: Mapfre, su proyecto Generación Y", *Carreteras*, noviembre-diciembre, vol. 156, 54-68.

Rice, T.M., Peek-Asa, C. y Kraus, J.F. (2003), "Nighttime driving, passenger transport, and injury crash rates of young drivers", *Injury Prevention*, vol. 9, nº 3, 245-250.

Williams, A.F., West, B.A. y Shults, R.A. (2012). "Fatal crashes of 16- to 17-year-old drivers involving alcohol, nighttime driving, and passengers", *Traffic Injury Prevention*, vol. 13, nº 1, 1-6.

## Ponencia 6

# LA RENTABILIDAD ACTUARIAL COMO MÉTODO DE COMPARACIÓN DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS Y ASEGURADORAS

José Enrique Devesa Carpio, Mar Devesa Carpio,  
Inmaculada Domínguez Fabián, Borja Encinas Goenechea,  
Robert Meneu Gaya y Amparo Nagore García

### RESUMEN

El objetivo de este trabajo es el de definir un nuevo método que permita llevar a cabo la comparación entre las distintas operaciones que tienen un componente asegurador o actuarial. Además, se pretende que sirva como herramienta para comparar con otras operaciones, como son las financieras, de tal forma que haya un tratamiento único para todas ellas. La aplicación de la metodología propuesta permite establecer una ordenación de los distintos productos en función de su rentabilidad actuarial-fiscal, al incorporar el componente asegurador que explícita o implícitamente poseen algunas de las operaciones que se comercializan en el mercado financiero. A continuación, se obtienen los valores de las rentabilidades para algunas de las operaciones más importantes.

### 1. INTRODUCCIÓN

La rentabilidad financiero-fiscal de las operaciones financieras ciertas es un indicador muy utilizado<sup>1</sup> para poder comparar distintas operaciones financieras cuando se incorporan las características fiscales, las cuales se han mostrado de gran importancia en cuanto a las decisiones de ahorro que toman los inversores.

Incluso aquellas operaciones que tienen un componente asegurador se tratan desde el punto de vista de la rentabilidad como operaciones ciertas y no se incorpora el componente aleatorio que tienen.

---

<sup>1</sup> Es un tema que se incluye en los programas de los primeros cursos de matemática financiera en todas las universidades.

El objetivo de este trabajo es el de presentar una metodología que permita obtener la rentabilidad financiero-actuarial-fiscal de todos los productos financieros y aseguradores, de tal forma que permita, por un lado, jerarquizar todos ellos y, por otro, detectar posibles incongruencias de su tratamiento fiscal. Además, se va a desarrollar el cálculo de las rentabilidades financiero-actuarial-fiscal de algunas operaciones de seguros más relevantes.

En 2013, la utilización de una rentabilidad actuarial toma un mayor protagonismo, debido a que el gobierno ha introducido en la Ley 1/2013, de 14 de mayo, de medidas para reforzar la protección a los deudores hipotecarios, reestructuración de deuda y alquiler social, una modificación del Texto Refundido de la Ley de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, donde se establece que: “En aquellas modalidades de seguro de vida en las que el tomador no asuma el riesgo de la inversión se informará de la rentabilidad esperada de la operación, considerando todos los costes. Las modalidades a las que resulta aplicable así como la metodología de cálculo de la rentabilidad esperada se determinarán reglamentariamente”.

Esta rentabilidad actuarial serviría para:

- Comparar operaciones de seguros con operaciones financieras.
- Comparar operaciones de seguros con distintas características fiscales<sup>2</sup>.
- Tratar operaciones de seguros como tales, y no asimilándolas a operaciones financieras<sup>3</sup>.
- Analizar la sostenibilidad de los sistemas de Seguridad Social<sup>4</sup>, mediante la comparación de la rentabilidad actuarial del sistema de pensiones con el crecimiento promedio del PIB.

El siguiente epígrafe se dedica a revisar sucintamente la teoría para la determinación de la rentabilidad de las operaciones financieras, revisando algunos de los casos más significativos de operaciones financieras. En el tercer epígrafe se define la rentabilidad actuarial y se dedica a exponer la metodología para las operaciones con componente asegurador, desarrollando el cálculo de algunas de las operaciones de seguros más significativas y presentando los resultados de las rentabilidades financiero-actuarial-fiscal más relevantes. En el cuarto epígrafe se exponen las conclusiones y por último se referencia la bibliografía.

---

<sup>2</sup> Véase Domínguez *et al.* (2011).

<sup>3</sup> Puede verse en Devesa *et al.* 2012; Devesa *et al.* (2013a) y Devesa *et al.* (2013b).

<sup>4</sup> Existen numerosos trabajos sobre el tema como, por ejemplo, Domínguez *et al.* (2011).

## 2. RENTABILIDAD FINANCIERO-FISCAL

La rentabilidad financiero-fiscal de las operaciones financieras ciertas es un indicador utilizado para poder comparar distintos productos financieros cuando se incorporan las características fiscales. Se puede obtener de dos formas:

- El tipo de interés que tendría que aplicarse a una operación sin características fiscales para que proporcionara el mismo resultado que la operación con fiscalidad.
- El tipo de interés de la ley de capitalización compuesta que hace que sean financieramente equivalentes los capitales, netos de impuestos y deducciones fiscales, entregados y recibidos por un individuo.

La primera opción es viable sólo si la operación es simple, es decir, si se invierte un único capital y también se recibe sólo uno. Sin embargo, la segunda opción permite analizar todas las operaciones financieras (simples y compuestas) y es la que se utiliza.

A su vez, la comparación entre operaciones se puede hacer de dos formas:

- Se parte de una rentabilidad financiera igual para todos los productos, de tal forma que se resalte cuál es el que tiene mejor tratamiento fiscal y bajo qué condiciones.
- Además de contemplar los aspectos fiscales, se tiene en cuenta la distinta rentabilidad financiera de cada producto; para lo cual se utiliza la rentabilidad histórica, con la posibilidad de introducir algún elemento corrector.

### 2.1. Rentabilidad financiero-fiscal de las operaciones financieras

Se va a plantear el supuesto de un individuo que invierte una unidad monetaria en una "Operación de ahorro", a un plazo de " $n$ " años y que obtiene una rentabilidad financiera  $i$ .

#### 2.1.1. Operación de ahorro

Con esta denominación, estamos contemplando todas aquellas operaciones que tienen el mismo tratamiento fiscal, como depósitos, cuentas corrientes, fondos de inversión, etc.

Veamos en primer lugar cómo va a ser el planteamiento para poder obtener la rentabilidad.

- Cada unidad monetaria, al cabo de  $n$  años, se convierte, si utilizamos capitalización compuesta, en:  $(1+i)^n$



- Los impuestos que tiene que pagar al final de la operación son:  $T_n = [(1+i)^n - 1] t_n$ .
- Siendo  $t_n$  el tipo impositivo aplicable que se calcula según la base liquidable.

Como no existe deducción por la aportación, los capitales que intervienen en la operación al incluir las características fiscales son:

Prestación real =  $\{(1, 0), (T_n, n)\}$ .

Contraprestación real =  $\{((1 + i)^n, n)\}$ .

A partir de los capitales que intervienen hay que plantear la ecuación de equivalencia financiera con capitalización compuesta y donde la incógnita será el tipo de interés que hace que sean equivalentes la prestación y la contraprestación. Este tipo de interés se interpreta como la rentabilidad financiero-fiscal de la operación.

Por lo tanto, la ecuación para el cálculo de la rentabilidad financiero-fiscal,  $i_{\text{fff}}$ , es:

$$(1 + i_{\text{fff}})^n = (1 + i)^n - T_n = (1 + i)^n - [(1 + i)^n - 1] t_n = (1 + i)^n (1 - t_n) + t_n$$

Con lo que:

$$i_{\text{fff}} = [(1 + i)^n (1 - t_n) + t_n]^{(1/n)} - 1 < i$$

La rentabilidad financiero-fiscal, con la tributación aplicable a partir de 1 de enero de 2011 (sin considerar aportaciones anteriores), es inferior a la rentabilidad financiera promedio, “ $i$ ”.

### **2.1.2. Plan de Pensiones y otras operaciones con tratamiento fiscal similar (como operación cierta)**

Tradicionalmente, el cálculo de la rentabilidad financiero-fiscal de los Planes de Pensiones se ha planteado como si fuera una operación cierta.

Se va a suponer que sólo se invierte una unidad monetaria a un plazo de “ $n$ ” años y que se recupera todo el capital constituido de una sola vez. Se va a obtener con la fiscalidad aplicable a partir de 1 de enero de 2007, sin considerar aportaciones anteriores.

Cada unidad monetaria, al cabo de  $n$  años se convierte en:  $(1 + i)^n$ .

Los impuestos que tiene que pagar al final de la operación son:  $T_n = (1 + i)^n t_n$ .

Sin embargo, en el momento inicial la aportación al fondo es deducible, según el tipo impositivo del inversor:  $1 - t_0$ .

Por lo tanto, los capitales que intervienen en la operación al incluir las características fiscales son:

Prestación real =  $\{(1, 0), (T_n, n)\}$ .

Contraprestación real =  $\{(t_0, 0), ((1 + i)^n, n)\}$ .

Con todo ello, la ecuación para el cálculo de  $i_{\text{ff}}$  es:

La rentabilidad financiero-fiscal con la fiscalidad aplicable a partir de 1 de enero de 2007 es:

$$(1 - t_0) (1 + i_{\text{ff}}^*)^n = (1 + i)^n - T_n = (1 + i)^n - (1 + i)^n t_n = (1 + i)^n (1 - t_n)$$

de donde:

$$i_{\text{ff}}^* = (1 + i) \left( \frac{1 - t_n}{1 - t_0} \right)^{1/n} - 1$$

$i_{\text{ff}}^* > i$ , si  $1 - t_n > 1 - t_0$ ; es decir,  $t_0 > t_n$

siendo “ $i$ ” la rentabilidad financiera anual (que se supone constante), “ $t_0$ ” el tipo impositivo inicial y “ $t_n$ ” el tipo impositivo final del inversor,  $i_{\text{ff}}$  rentabilidad financiero-fiscal.

### 3. RENTABILIDAD ACTUARIAL

Dada la naturaleza de las operaciones de seguros, la rentabilidad financiero-actuarial-fiscal se puede calcular de dos formas:

- “A priori”, es decir, antes de haber comenzado la operación.
- “A posteriori”, es decir, en el momento presente o actual de la operación; pudiendo ser esta rentabilidad muy diferente de la rentabilidad “a priori” porque la operación cambia continuamente al transcurrir los periodos de tiempo. Estos cambios se pueden deber a varias causas: por modificación de los flujos futuros (ingresos y pagos), de las probabilidades futuras, de las rentabilidades futuras, etc.

Se puede definir la rentabilidad actuarial como el tipo de interés de la ley de capitalización compuesta que, dada una tabla de mortalidad-supervivencia, permite igualar el valor actuarial de las primas o aportaciones y el valor actuarial de las indemnizaciones o prestaciones, teniendo en cuenta las características comerciales que incorpora la operación.

Más formalmente, diremos que  $i^*$  es la rentabilidad actuarial de una operación cualquiera, cuando se verifique la ecuación:

$$\sum_{t=0}^{n-1} A_t (1 + i^*)^{-t} p_x = \sum_{r=s}^z R_r (1 + i^*)^{-r} / q_x$$

donde:

$A_t$ : Aportación realizada por un individuo en el momento " $t$ ". Puede ser un número concreto de aportaciones o tener carácter vitalicio.

$(1+i^*)^{-t}$ : Factor de actualización financiero.

$i^*$ : Rentabilidad actuarial.

${}_t p_x$ : Probabilidad de que un individuo de edad " $x$ " sobreviva " $t$ " años.

$R_t$ : Prestación recibida por un individuo en el momento " $t$ ". Puede ser un número concreto de prestaciones o tener un carácter vitalicio.

${}_t q_x$ : Probabilidad de que un individuo de edad " $x$ " tenga derecho a cobrar una determinada prestación en el momento " $t$ ".

Como la matemática financiera es un caso particular de la matemática actuarial, ya que en aquella todas las probabilidades son iguales a la unidad; la rentabilidad actuarial también puede utilizarse para calcular la rentabilidad de una operación financiera sin más que obviar la tabla de mortalidad-supervivencia a que hace referencia la definición anterior.

Así pues, podemos pasar a denominar a esta nueva rentabilidad como actuarial, ya que comprende todas las operaciones, ya sean financieras o actuariales. También se pueden incluir aquí todas las características comerciales de la operación, como la fiscalidad, comisiones, etc.

Por lo tanto, metodológicamente es similar a la desarrollada para las operaciones financieras, sin más que añadir las probabilidades correspondientes a cada tipo de operación.

### 3.1. Rentabilidad de las operaciones de seguros más relevantes

A modo de ejemplo, vamos a calcular la rentabilidad actuarial de dos operaciones de seguros para mostrar su funcionamiento.

#### 3.1.1. Seguro de Capital Diferido (SCD)

En esta modalidad, si el asegurado vive en la fecha de vencimiento, previamente determinada, el asegurador se compromete a abonarle el capital estipulado en la póliza.

Partimos de un individuo de edad " $x$ ", siendo el tipo de interés técnico, " $i$ ", constante y la cuantía invertida de una unidad monetaria. Al cabo de " $n$ " años, la unidad monetaria se convierte en:

$$C_P^{CD} = \frac{(1+i)^n}{{}_n p_x} = \frac{1}{{}_n E_x}$$

siendo:

$C_p^{CD}$ : Cuantía recibida en caso de supervivencia en la modalidad de Seguro de Capital Diferido, puro.

${}_n p_x$ : probabilidad de que un individuo de edad "x" alcance la edad "x + n".

$\frac{1}{{}_n E_x}$ : factor de capitalización actuarial, para un individuo de edad "x" y un plazo de "n" años. Es mayor que el correspondiente factor financiero, ya que sólo se cobra en caso de que sobreviva.

En el caso de que sobreviva y se cobre como capital único, el impuesto,  $T_{nP}^{CD}$ , que tiene que pagar al final de la operación es:

$$T_{nP}^{CD} = t_n (C_p^{CD} - 1) = t_n \left[ \frac{(1+i)^n}{{}_n p_x} - 1 \right]$$

condicionado a que sobreviva a la edad "x + n" y siendo " $t_n$ " el tipo impositivo aplicable a esta operación.

No existe deducción por la aportación, por lo que los capitales que intervienen en la operación al incluir las características fiscales son:

Prestación actuarial =  $\{(1, 0), (T_{nP}^{CD}, n)\}$ .

Contraprestación actuarial =  $\{(\frac{1}{{}_n E_x}, n)\}$ .

Con todo ello, la ecuación para el cálculo de la rentabilidad actuarial  $i^*$ , planteada en el momento final de la operación, es:

$$(1+i^*)^n = (C_p^{CD} - T_{nP}^{CD}) \cdot {}_n p_x = \left[ \frac{(1+i)^n}{{}_n p_x} - t_n \left( \frac{(1+i)^n}{{}_n p_x} - 1 \right) \right] \cdot {}_n p_x = (1-t_n) \cdot (1+i)^n + t_n \cdot {}_n p_x$$

de donde:

$$i^* = [(1-t_n) (1+i)^n + t_n \cdot {}_n p_x]^{1/n} - 1 < i_{C_{iff}} < i$$

que es menor que la rentabilidad financiero-fiscal,  $i_{C_{iff}}$ , que se puede obtener con una operación cierta similar, como es el depósito a plazo, ya que en el seguro se tributaría por la diferencia entre la cuantía recibida (mayor que en el depósito) y la aportación realizada. A su vez, esta rentabilidad también es menor que la financiera,  $i$ , por la existencia de los impuestos.

Esto permitiría justificar que los Seguros de Capital Diferido deberían tener un tratamiento fiscal ventajoso, respecto a las operaciones de ahorro similares, para que la rentabilidad financiero fiscal “a priori” fuera igual en todos los casos.

También se podría añadir cualquiera de las características aseguradoras que presentara la operación, como diferimiento, contraseguro, etc.

### **3.1.2. Plan de Pensiones y otros productos con el mismo tratamiento fiscal**

En este apartado se va a desarrollar el caso donde se considera a los Planes de Pensiones como operaciones aleatorias, ya que siempre hay un grado de incertidumbre en cuanto a la fecha en la que recibirá la prestación de jubilación o sobre la cuantía y fecha de cobro de la posible indemnización por fallecimiento, invalidez, dependencia, etc.

A continuación, se va a plantear el estudio de un Plan de Pensiones (PP) de aportación definida, que incorpora implícitamente un seguro para caso de fallecimiento, puesto que la cuantía acumulada en la cuenta del partícipe es el capital asegurado en cada momento. Esto significa que, aunque no exista una prestación definida para caso de fallecimiento, esta contingencia está implícita, aunque por una cuantía no conocida a priori.

Se va a analizar el caso de una única aportación, recuperando la cuantía en la fecha de jubilación como capital único. No se va a contemplar otras contingencias, como incapacidad, dependencia, rentas de supervivencia (viudedad y orfandad).

Las restantes hipótesis son las siguientes:

- Plan de aportación definida.
- Como el Plan de Pensiones es una operación postdeterminada, y, por lo tanto, no se puede conocer a priori el rendimiento, se va a suponer que la rentabilidad del PP,  $i_p$ , es constante.
- $x$ : edad inicial de la aportación al PP.
- $j$ : edad inicial del cobro del capital acumulado en el PP. Suponemos que coincidirá con la edad de jubilación.
- $n = j - x$ : Número de periodos entre la aportación inicial y la edad de jubilación.

La aportación inicial, de una unidad monetaria, al cabo de “ $n$ ” periodos, se transforma en:

$$(1 + i_p)^n$$

Pero esta cuantía sólo la recibirá el partícipe si sobrevive a la edad “ $j$ ”, es decir si llega vivo al momento “ $n$ ”.

En cuanto a las deducciones y pagos de impuestos que aparecen en la operación, son los siguientes:

- (a) De la aportación al PP, una unidad monetaria, podrá deducirse, en el momento inicial,  $t = 0$ , la cuantía siguiente:

$$D_0 = 1 \cdot t_0 = t_0$$

donde:

$t_0$ : es el tipo impositivo del partícipe en el momento "0".

$D_0$ : es la cuantía deducida en el momento de la aportación.

con lo que la aportación neta de impuestos es:

$$A'_0 = 1 - t_0$$

- (b) Al final de la operación, tributa por la totalidad de lo recibido, pero siempre condicionado a que sobreviva a ese momento:

$$T_n = t_n (1 + i_P)^n$$

donde:

$T_n$ : Impuesto correspondiente al capital recibido en el momento "n".

$t_n$ : Tipo impositivo del partícipe en el momento "n".

con lo que la cuantía neta de impuestos,  $Q'_n$ , que recibirá es:

$$Q'_n = (1 - t_n) (1 + i_P)^n$$

- (c) En caso de que se produzca el fallecimiento del partícipe antes de la fecha de jubilación, sus beneficiarios recibirían la cuantía acumulada en el PP, pero tendrían que tributar como rendimiento del trabajo. Se va a suponer que el fallecimiento se produce, por término medio, a mitad de periodo, con lo que la cuantía acumulada,  $C_r$ , hasta ese momento en un periodo cualquiera "r", será:

$$C_r = (1 + i_P)^{r-0,5}, \quad \text{con } r \leq n$$

Además, suponiendo que el tipo impositivo, en el periodo "r", es  $t_r$ , tendremos que, la cuantía neta de impuestos que recibirán los herederos, será:

$$C'_r = (1 - t_r) (1 + i_P)^{r-0,5}, \quad \text{con } r \leq n$$

donde

$C'_r$ : Cuantía, neta de impuestos, que recibirían los herederos durante el periodo "r", ya que se supone que el "seguro de fallecimiento", cuyo capital asegu-

rado es el valor acumulado por el PP, hasta el momento “ $r$ ”, se paga a mitad de ese año, es decir en el momento “ $r - 0,5$ ”.

Por lo tanto, los capitales que intervienen en la operación al incluir las características fiscales son:

$$\text{Aportaciones} = \{(1 - t_0, 0)\}$$

$$\text{Indemnizaciones} = \{(C_1, 0,5), (C_2, 1,5), \dots, (C_n, n - 0,5), (Q_n, n)\}$$

Con todo ello, la ecuación para el cálculo de la rentabilidad financiero-fiscal,  $i_{\text{ff}}$ , es:

$$(1 - t_0) = Q_n \cdot {}_n p_x (1 + i^*)^{-n} + \sum_{r=1}^n C_r \cdot {}_{r-1} q_x (1 + i^*)^{-(r-0,5)}$$

$$(1 - t_0) = (1 - t_n) (1 + i_p)^n \cdot {}_n p_x (1 + i^*)^{-n} + \sum_{r=1}^n (1 - t_r) (1 + i_p)^{r-0,5} \cdot {}_{r-1} q_x (1 + i^*)^{-(r-0,5)}$$

donde:

$i^*$ : es la rentabilidad actuarial.

${}_n p_x$ : probabilidad de que un individuo de edad “ $x$ ” sobreviva a la edad “ $x + n$ ” o, tras el cambio de variable, a la edad “ $j$ ”.

${}_{r-1} q_x$ : probabilidad de que un individuo de edad “ $x$ ” fallezca exactamente a la edad “ $x+r-1$ ”.

En este caso no se puede despejar la rentabilidad financiero-fiscal.

En el supuesto de que los tipos impositivos de los beneficiarios fueran constantes,  $t_B$ , se puede reescribir la ecuación de equivalencia en función del factor actuarial y del seguro para caso de fallecimiento:

$$(1 - t_0) = (1 - t_n) (1 + i_p)^n \cdot {}_n E_x^* + (1 - t_B) (1 + i_p)^{0,5} \cdot {}^{ip} \bar{A}_{x:\overline{n}}^{*1}$$

donde:

${}^{ip} \bar{A}_{x:\overline{n}}^{*1}$ : es el valor de un seguro para caso de fallecimiento, pagadero a mitad de año, creciente en progresión geométrica de razón  $i_p$ , para un individuo de edad “ $x$ ” por un plazo de “ $n$ ” años. El asterisco indica que el tipo de interés utilizado para la valoración es la rentabilidad actuarial.

$i_p$ : es la rentabilidad anual, constante, esperada para el PP.

${}_n E_x^*$ : el factor de actualización actuarial hasta la edad “ $x$ ” durante “ $n$ ” periodos. Igualmente, el asterisco indica que el tipo de interés utilizado para la valoración es la rentabilidad actuarial.

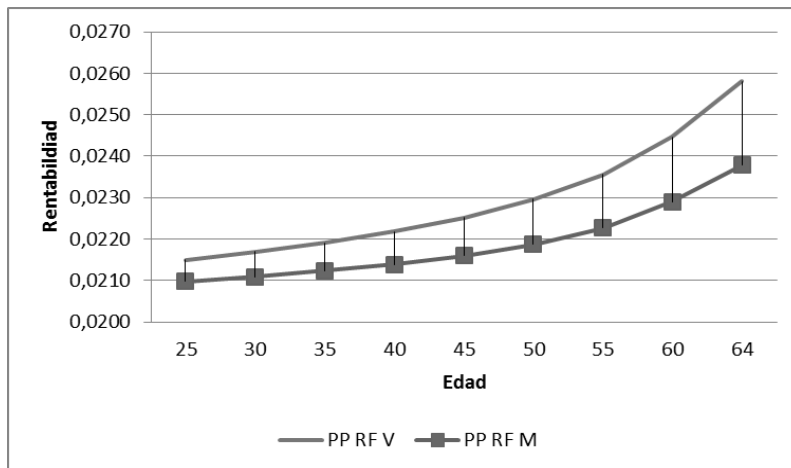
$(1 + i_p)^{0,5}$ : el primer capital asegurado. Al suponer que se paga en el momento del fallecimiento, en promedio, el capital constituido se puede situar a mitad del periodo.

### 3.2. Algunos resultados de la rentabilidad actuarial

Veamos los resultados del cálculo de la rentabilidad actuarial a una serie de operaciones tanto financieras como actuariales.

En el Gráfico 1 podemos ver la rentabilidad actuarial de un Plan de Pensiones con cobro en forma de renta financiera. Se puede observar que la rentabilidad actuarial permite diferenciar para varones y para mujeres, ya que se utilizan tablas de mortalidad-supervivencia diferentes. No hay ninguna dificultad en añadir cualquier otra característica, ya sea fiscal, comercial o de diseño del producto. En este caso la ecuación para el cálculo de la rentabilidad actuarial es:

$$(1 - t_0) = (1 - t_B) (1 + i)^{0,5} {}_i p \bar{A}_{x:\bar{d}}^{*1} + \frac{(1 + i)^d}{\ddot{a}_{\bar{e}|i}} (1 - t_P) {}_d E_x^* \ddot{a}_{\bar{e}|i}^*$$



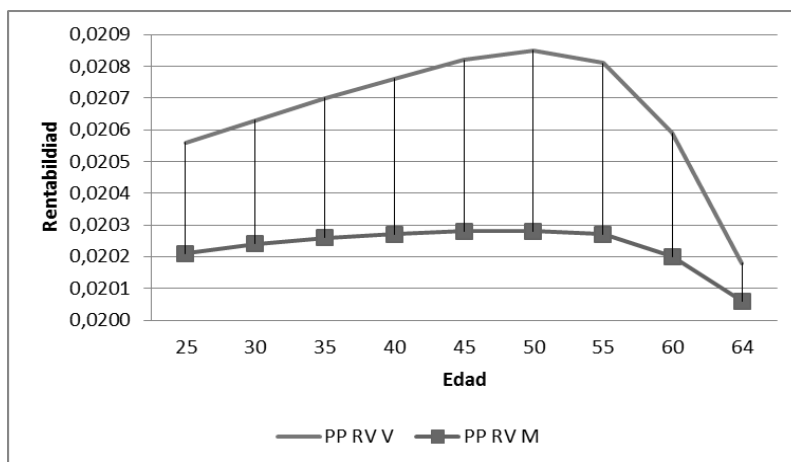
**Gráfico 1**

Rentabilidad actuarial de Plan de Pensiones cobrado como Renta Financiera,  $i = 2\%$   
(Fuente: Domínguez *et al.* (2011))

En el Gráfico 2 se puede observar la rentabilidad en el caso de que el plan de pensiones se cobre en forma de renta vitalicia. Siendo la ecuación final para calcular la rentabilidad actuarial.

$$(1 - t_0) = (1 - t^H) (1 + i)^{0,5} {}_i p \bar{A}_{x:\bar{d}|}^{*1} + \frac{(1 + i)^d}{\ddot{a}_j} (1 - t^R) {}_d E_x^* \ddot{a}_j^*$$

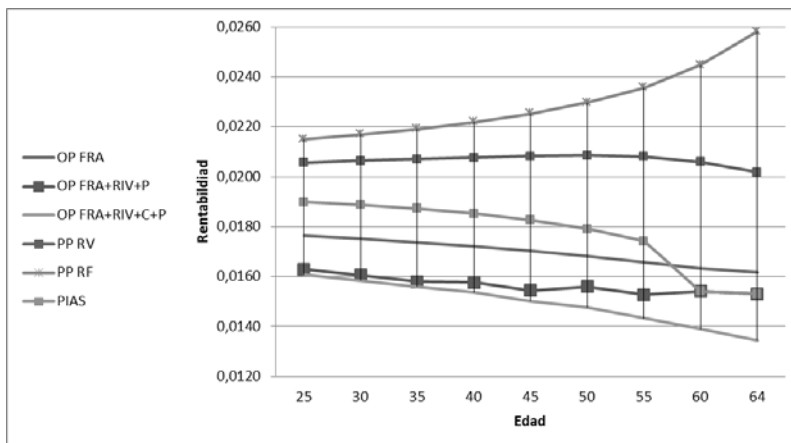




**Gráfico 2**

Rentabilidad actuarial de Plan de Pensiones cobrado como Renta Vitalicia,  $i=2\%$ .  
(Fuente: Domínguez *et al.* (2011))

En el Gráfico 3 se puede ver la rentabilidad actuarial de varios productos simultáneamente.



**Gráfico 3**

Rentabilidad actuarial de varias operaciones financieras y de seguros,  $i = 2\%$ .  
(Fuente: Domínguez *et al.* (2011))

**Leyenda del Gráfico.** OP FRA: Operación financiera; RIV: Renta Inmediata Vitalicia; P: Peaje Fiscal; C: Contraseguro de Primas; PP: Plan de Pensiones; RV: Renta Vitalicia; RF: Renta Financiera; PIAS: Plan Individual de Ahorro Sistemático.

#### 4. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Por analogía con la rentabilidad financiera, la rentabilidad actuarial se puede definir como el tipo de interés técnico que, dada una tabla de mortalidad, permite igualar el valor actuarial de las primas y el valor actuarial de las indemnizaciones, teniendo en cuenta las características comerciales que incorpora la operación.

La rentabilidad financiero-fiscal se puede considerar como un caso particular de la “rentabilidad actuarial” de una operación cualquiera.

Permite introducir mayor número de posibilidades en todas las operaciones: seguros implícitos, contraseguros de primas, peaje fiscal, cobro como Renta Vitalicia, como Renta Financiera.

La modificación del Texto Refundido de la Ley de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, permitirá:

- Mayor transparencia de las operaciones de seguros, que tienen un cierto oscurantismo tradicional.
- Útil para los asegurados porque les va a permitir comparar distintas operaciones de seguros.
- Falta conocer la metodología, que se va a desarrollar reglamentariamente.

Todo ello permite resaltar la importancia que puede llegar a tener este concepto, ya que a su aplicación investigadora, se le suma su utilidad para los asegurados, tras la inclusión de este concepto en la Ley 1/2013.

#### BIBLIOGRAFÍA

Alegre, P. y Sáez, J. (1991). “Sobre la denominada ‘tasa de rentabilidad financiero fiscal’”, *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, Vol. XXI, Núm. 67, Abril-Junio, pp. 465-487.

Devesa, E.; Meneu, R. y Nagore, A. (2013a). “El ahorro individual tras la reforma del sistema de pensiones español”, capítulo del libro *El sector asegurador ante las transformaciones del estado de bienestar*, Fundación de Estudios Financieros, Madrid, pp. 231-250.

Devesa, J.E.; Devesa, M.; Domínguez, I.; Encinas, B.; Meneu, R. y Nagore, A. (2012). “Análisis Financiero Fiscal de la Hipoteca Inversa en España”, *Innovar Journal*, Vol. 22, Nº. 45, Julio-Septiembre, pp. 117-132.

Devesa, J.E.; Devesa, M.; Domínguez, I.; Encinas, B.; Meneu, R. y Nagore, A. (2013b). *Sobre la Rentabilidad Actuarial de las Operaciones de Seguros de Vida*. IV Congreso Ibérico de Actuarios, 19 a 21 de junio. Barcelona.

Domínguez, I.; Devesa, J.E.; Devesa, M.; Encinas, B.; Meneu, R. y Nagore, A. (2011). *¿Necesitan los futuros jubilados complementar su pensión?*, 1-155, Fundación Edad & Vida. Madrid.

González, L.; Ortí F.J. y Sáez, J. (2006). "Rentabilidad financiero fiscal. Cálculo simplificado para personas físicas", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, Vol. XXXIV, Núm. 126, Julio-Septiembre, pp. 755-770.

Palomo Zurdo, R. J. (2006): "Comparativa financiero fiscal en diferentes productos de inversión", *Estrategia Financiera*, Nº 226, Marzo.

### **III. DEMOGRAFÍA, SEGUROS DE VIDA Y DEPENDENCIA**

## Ponencia 7

# APLICACIÓN DEL MODELO BRASS TYPE A LA MORTALIDAD DE LA POBLACIÓN ASEGURADA MEXICANA

Arely Ornelas y Montserrat Guillén

## RESUMEN

Estudiamos la mortalidad de la población asegurada mexicana y analizamos su comportamiento respecto a la población general a fin de estimar cuál es la diferencia entre la mortalidad de ambas poblaciones y cuantificar el riesgo de longevidad en la población asegurada a través de modelos que parten de la población general. Se utilizan datos de 2000, 2005 y 2010 y se concluye que en la última década se mantiene estable la diferencia que existe entre ambas poblaciones. Se concluye que se ha producido un incremento del riesgo de longevidad en la población asegurada en los últimos diez años.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el área de las ciencias actuariales es relevante modelar la mortalidad para realizar una gestión eficiente del riesgo que permita el correcto cálculo de reservas y tarifas para los diferentes productos de sector vida como son las rentas vitalicias, los planes de pensiones y los seguros tradicionales con cobertura de muerte. De acuerdo a los productos del seguro de vida, los riesgos que se deben cuantificar son el riesgo de longevidad y el riesgo de mortalidad.

En este trabajo estudiamos la mortalidad de la población asegurada mexicana y analizamos su comportamiento respecto a toda la población de México (población general). El objetivo es estimar cuál es la diferencia entre la mortalidad de ambas poblaciones y cuantificar el riesgo de longevidad en la población asegurada a través de modelos que parten de la población general.

Desde el punto de vista de un asegurador, el riesgo de longevidad y el riesgo de mortalidad se han ido transformando al pasar los años, debido a las mejoras sanitarias y tecnológicas que se han desarrollado en las últimas décadas. La esperanza de vida al nacimiento sigue en crecimiento. En el caso de México, de acuerdo al Banco Mundial (2013), en el año 1990 la esperanza de vida para los hombres se esperaba que alcanzara los 68 años y para las mujeres los 74 años. Para el año

2000 estos números se incrementaron a 72 y 77 años, respectivamente. Más recientemente, en el año 2010, la esperanza de vida para los hombres resultó ser de 74 años y para las mujeres de 79 años. La diferencia en años de la esperanza de vida entre hombres y mujeres se ha mantenido casi inalterable alrededor de los 5 años, en las últimas dos décadas.

A lo largo de los años, en ciencias actuariales se han explorado diferentes modelos para describir la mortalidad. En la literatura occidental del siglo XIX ya se mencionan aspectos relacionados con la mortalidad en seguros, las rentas vitalicias y la selección adversa de riesgos. En el Reino Unido se crearon las primeras tablas de mortalidad que incluyeron cierto margen que previera los cambios en la mortalidad, con la finalidad de proteger a las aseguradoras contra pérdidas. Estas tablas se construyeron con datos relativos a las aseguradoras en el período 1900-1920 (Pitacco, 2009).

Si bien en tanto en el ámbito demográfico como en el actuarial se han realizado trabajos destinados a modelar y proyectar la mortalidad en México, no hay tablas de mortalidad que reflejen su situación real. Las compañías aseguradoras utilizan actualmente para el cálculo de las reservas las tablas de mortalidad publicadas en Diciembre del año 2000. Estas tablas reflejan la experiencia de la mortalidad observada por las diferentes aseguradoras en México para los años 1991 a 1998 (ver Mendoza, Madrigal y Martínez, 2000). La Comisión Nacional de Seguros y de Fianzas (CNSF) es quien supervisa la correcta operación de los sectores asegurador y financiero, tanto del cumplimiento de la normativa como de la solvencia necesaria para cumplir con las obligaciones contraídas.

De manera interna algunas compañías de seguros construyen tablas de mortalidad para tarificar los seguros de vida. Más recientemente la Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros (AMIS) ha calculado tablas de mortalidad de forma quinquenal con la experiencia de algunas compañías del sector asegurador, las cuales han sido empleadas para este trabajo y se describirán más adelante.

Contemplar la mortalidad de los asegurados, es suponer que la mortalidad se mantendrá estable dentro de este subconjunto de la población, cuando en realidad este subconjunto no se comporta de forma análoga a la población a la que pertenece, sino que es un grupo con características específicas. El utilizar de manera única la mortalidad de la población general para el subgrupo de los asegurados llevaría a un sesgo en la estimación del riesgo.

La selección adversa viene relacionada a los hábitos de los asegurados, ya que estos poseen información que la aseguradora no podrá obtener. A este fenómeno se le llama información asimétrica, por ejemplo, la aseguradora podrá tener información recolectada con los cuestionarios y en algunos casos de exámenes médicos, sin embargo no puede llegar a conocer con absoluta certeza el historial de la familia o los motivos por los cuales se ha adquirido un seguro. Si los asegurados llegan a ocultar características que indiquen un mayor riesgo de muerte, entonces la aseguradora, no siendo consciente de dicho sesgo, podría estar subestimando el verdadero riesgo. Más información al respecto se puede encontrar en Chiappori y Salanié (2000).

En el caso opuesto, cuando el control de la selección adversa es efectivo, si sólo se considerara la experiencia de la población en general en lugar de la subpoblación de asegurados, este supuesto conduciría a primas demasiado elevadas, debido a la sobre estimación del riesgo. Es bien sabido que los ciudadanos que suscriben un seguro tienen un buen poder adquisitivo que trasciende en un estilo de vida que les permite estar más saludables.

Según Plat (2009), los problemas en la información de mortalidad de los asegurados no se reduce a la antiselección, sino que también hay problemas intrínsecos del manejo de información. Las bases de datos de las aseguradoras, en muchos casos, van poco más allá de los 15 años. Otra deficiencia es que el porcentaje de personas del total de la población global que contrata un seguro es pequeño. También subraya el hecho de que los asegurados con mayores sumas aseguradas son los que presentan menor mortalidad.

En el caso particular de la población asegurada en México, estos tres puntos se cumplen: hay un posible efecto de selección adversa, se utiliza la mortalidad de la población general para calcular el riesgo de mortalidad en poblaciones aseguradas y, finalmente, la información para los asegurados es insuficiente. Si bien en los últimos años la CNSF ha hecho pública parte de la información de aseguradoras recolectada anualmente mediante las SESA (Sistema Estadístico del Sector Asegurador), no hay información por un largo periodo de años. En cuanto a la participación del seguro de vida en el total del mercado asegurador, según la CNSF, las primas directas del seguro de vida en México conformaban el 34,3% del total de primas recaudadas en el año 2000, para el año 2010 este porcentaje se vio incrementado al 40%. Los planes de pensiones en cambio han sufrido una caída abrupta pasando del 13% en el 2000 a 5,13% en 2010. Sin embargo en cuanto a número de personas se refiere, el número de asegurados en planes individuales vida es de 11.678.327 según registra la SESA del año 2010. Lo que representa el 14,6% de la población censada en México en edad de adquirir un seguro, en el mismo año, que asciende a 79.983.893 personas.

El método sobre como relacionar la experiencia de mortalidad de la población general y la experiencia de mortalidad de la población asegurada, afecta directamente a la valoración de los riesgos. De los posibles modelos relacionales hemos elegido los modelos Brass-Type, que son frecuentemente usados en la literatura actuarial.

## **2. METODOLOGÍA**

### **2.1. Modelo Brass-type**

El modelo de Brass fue propuesto por Brass (1971). Trataba de establecer una relación lineal entre el logit de dos curvas de supervivencia, explicando de esta manera la mortalidad de un grupo a cada edad en función del otro. Así se puede

crear una tabla de vida nueva a partir de una tabla de referencia cambiando los parámetros que establecen la relación lineal.

El modelo escrito de manera más general establece la relación lineal a través de una función de las tasas de mortalidad que puede ser el logaritmo o la función logística. La ecuación (1) especifica el modelo Brass-type con la función logaritmo como link. Por lo tanto, si  $m_{x,t}$  es la tasa de mortalidad en el instante  $t$  de un individuo de edad  $x$  perteneciente a una población dada y  $m_{x,t}^{ref}$  es la tasa de mortalidad en el instante  $t$  de un individuo de edad  $x$  perteneciente a una población de referencia, entonces

$$\log(m_{x,t}) = \alpha + \beta \log(m_{x,t}^{ref}) + \varepsilon_{x,t}. \quad (1)$$

El parámetro  $\beta$  se interpreta como el cambio en mortalidad que hay de una población a otra. En cuanto a  $\alpha$  es un incremento o decremento constante, que varia el nivel de mortalidad de acuerdo a la mortalidad de referencia. El término  $\varepsilon_{x,t}$  captura las fluctuaciones aleatorias entre los logaritmos de las tasas de mortalidad.

La mortalidad para asegurados de edad  $x$  en el año  $t$  se obtiene directamente despejando la ecuación (1)

$$E(m_{x,t}) = \exp \hat{\alpha} + \{(m_{x,t}^{ref})\}^{\hat{\beta}}. \quad (2)$$

De acuerdo a Brouhns, Denuit y Vermunt (2002) el suponer un modelo lineal implica suponer que los residuales son homocedásticos y que además se distribuyen como una normal, lo cual no sucede. Por ello, dichos autores implementan una modificación al modelo suponiendo que las muertes  $d(x,t)$  de individuos de edad  $x$  en el periodo  $t$ , se comportan como una Poisson ( $L(x,t)m_{x,t}$ ), por lo que el modelo queda de la siguiente manera:

$$E(m_{x,t}) = \exp\{\alpha + \beta \log(m_{x,t}^{ref})\}. \quad (3)$$

Con esta especificación las desviaciones estándar de los parámetros estimados son menores a los que se obtendrían con la ecuación (1).

Esta versión del modelo Brass-type se utilizará para explorar la mortalidad de los asegurados en función de la mortalidad del total de la población mexicana.

### 3. DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS

El interés principal es cuantificar la diferencia en las tasas de mortalidad entre la población Mexicana y la mortalidad de los asegurados, así como explorar la posibi-



lidad de crear tablas de mortalidad como una mezcla de la mortalidad de ambos grupos. Esto con el propósito de eliminar la selección adversa, ya que si se sólo se tomara en cuenta la mortalidad observada por las aseguradoras en un periodo de tiempo se puede caer en una subestimación de la mortalidad.

Se tienen tres años de estudio  $t$ : 2000, 2005 y 2010.

Ha sido necesario emplear diferentes fuentes para la obtención de datos. Los datos de la población Mexicana se han extraído directamente de la página web del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) y la página web del Consejo Nacional de Población (Conapo). Estos datos reflejan el comportamiento demográfico de los 31 estados y un Distrito Federal en México. El número de personas vivas proviene de los censos de población efectuados en los años 2000 y 2010 y el conteo de población efectuado en el año 2005. Los conteos de población se realizan cada 5 años en años donde no se realiza censo y se hacen de acuerdo a una muestra aleatoria estratificada del total de población y representan un soporte estadístico para identificar y actualizar los cambios que el país experimenta en sus aspectos demográficos, económicos y sociales.

Tanto el número de personas vivas como muertas la información se tiene segmentada por sexo y edad de 0 a 100 años y más. De estos se excluyeron las cifras que no estaban clasificadas en sexo y/o edad. Se tomó esta decisión tratando de evitar el sesgo en la información ya que la omisión de dicha información pudiera ser causada por muertes a edades muy tempranas por lo que no se declaran el género, o en el caso de edades avanzadas que se desconozca la edad exacta del difunto. Se supone entonces que el error no es aleatorio y que el realizar una distribución proporcional de los no especificados puede alterar la distribución de la población que si declaró tanto edad como sexo. El porcentaje de datos no clasificados es, sin embargo, pequeño y asciende al 0,23% del total.

Las tasas crudas de mortalidad de la población general  $m_{x,t}$  se calcularon como el cociente del número de defunciones registradas a la edad  $x$  en el tiempo  $t$ ,  $d(x,t)$ , y el número de personas vivas con edad cumplida  $x$  en el año  $t$ ,  $L(x,t)$ .

$$m_{x,t} = \frac{d(x,t)}{L(x,t)}, \quad (4)$$

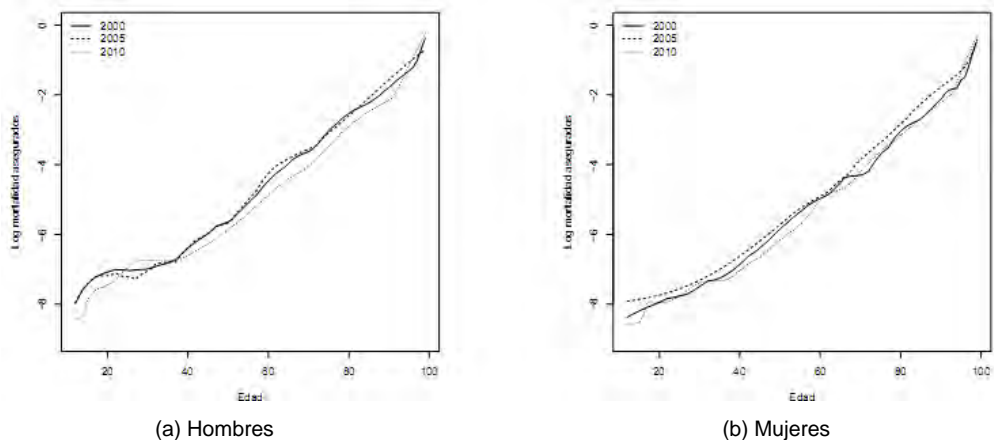
En cuando a las tasas de mortalidad del sector asegurador, estas fueron obtenidas de la Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros (AMIS), quienes en convenio con la Asociación Mexicana de Aseguradoras (AMA) fueron los encargados de calcularlas. El detalle de la construcción de las tablas del año 2000 se encuentra publicado en Rendon (2000). En cambio la metodología del cálculo de las tasas de mortalidad del año 2005 y 2010 se encuentra en Rendon (2012). En resumen, estas últimas tablas emplean información sólo de las cuatro compañías de seguros más grandes en México, además sólo se tuvo en cuenta las pólizas con más de 4 años de antigüedad. Se dividió el número de muertos en un año calen-

dario entre los vivos al principio del mismo año. Con la idea de reflejar el movimiento de altas y bajas que tienen las pólizas, se utilizó la fórmula exponencial de decrementos múltiples hasta llevarla a una tabla con un sólo decremento. Al también modelarse la mortalidad infantil hizo falta tomar la experiencia de otros países como son Canadá y Estados Unidos.

Ambas tablas contienen información desglosada por género y para las edades de 0 a 100. Suponiendo 100 como la edad máxima, es decir, a esta edad todos los asegurados se habrían extinguido. Para el ajuste realizado en este trabajo, se ha tomado como edad mínima los doce años de edad, ya que a partir de esta edad se ofrecen los diferentes coberturas del seguro de vida.

#### 4. RESULTADOS

Con los datos descritos anteriormente se han realizado los cálculos necesarios para obtener los parámetros estimados del modelo relacional Brass-Type. En la figura 1 se muestra el logaritmo de la mortalidad de los asegurados para los 3 años de estudio: 2000, 2005 y 2010. El logaritmo de las tasas de mortalidad en los hombres y las mujeres son muy similares en la infancia y la edad adulta, las mayores diferencias se encuentran en la juventud que es cuando los hombres son más propensos a tener accidentes. En el gráfico de los hombres se nota un comportamiento diverso en los datos de 2010, respecto a los otros años, la joroba relacionada con los accidentes se alarga hasta la edad de 40 años, mientras que para 2000 y 2005 esta acaba en la edad 30 aproximadamente. Además, el máximo de mortalidad en este periodo se traslada de la edad 20 años a la edad 30.



**Figura 1**

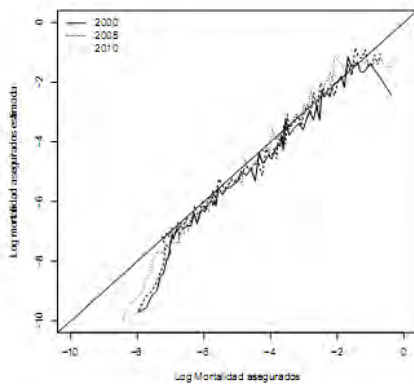
Logaritmo de la tasa cruda de mortalidad de los asegurados en México de edad 12 a 100. Año 2000, 2005 y 2010.

En la tabla 1 se presentan los resultados obtenidos suponiendo que el número de muertos sigue una distribución Poisson. La estimación que corresponde a la pendiente de la recta estimada, en todos los casos es mayor que uno, indicando que la mortalidad de los asegurados es menor que la mortalidad de la población en general. En el caso de las mujeres los parámetros estimados indican que la mortalidad de ambas poblaciones son similares, pues los parámetros estimados  $\hat{\beta}$  son muy cercanos a uno en los tres años de estudio. Cuando el logaritmo de la mortalidad se acerca a cero, es decir cuando la mortalidad crece es cuando más diferencias se encuentran entre ambos.

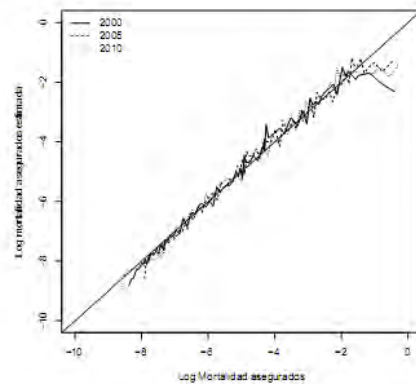
**Tabla 1**

Parámetros estimados por el modelo Brass-type de acuerdo a la regresión Poisson. Ecuación (3).

Mujeres	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	SD $\hat{\alpha}$	SD $\hat{\beta}$	BIC
2000	- 0,030	1,065	0,007	0,002	20.758
2005	0,179	1,059	0,006	0,001	14.946
2010	- 0,025	1,081	0,006	0,002	17.313
Hombres	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	SD $\hat{\alpha}$	SD $\hat{\beta}$	BIC
2000	0,690	1,322	0,008	0,002	28.489
2005	0,875	1,308	0,006	0,002	21.958
2010	0,754	1,369	0,006	0,002	23.418



(a) Hombres



(b) Mujeres

**Figure 2**

Comparativo entre el logaritmo de la mortalidad real de los asegurados y el logaritmo de la mortalidad estimada por el modelo Brass-Type Poisson. Año 2000, 2005 y 2010.

En el caso de los hombres, los parámetros estimados  $\hat{\beta}$  son más grandes que los estimados para la población femenina. Por ejemplo para el año 2010, si el logarit-

mo de la mortalidad en la población general aumenta, el logaritmo de la mortalidad en los asegurados aumenta en 1,369. Este incremento se puede explicar con la curva de los accidentes, que es más pronunciada en la población general que en los asegurados.

Los residuales más grandes se observan siempre cuando se incrementa la edad, que es cuando se comienzan a tener menos observaciones y existe más variabilidad en los datos.

Al estar interesados en el análisis de la longevidad es útil e importante calcular el riesgo de que una persona llegue a una cierta edad. En el artículo Ornelas, Guillén y Alcañiz (2013) se usa el valor en riesgo (VaR) como medida del riesgo de longevidad. El cuantil obtenido es el número de años que se espera sobreviva la población a partir de una edad determinada, según un nivel de confianza. Es posible obtener el VaR suponiendo que la supervivencia empírica sigue una distribución Weibull( $\rho, \lambda$ ), y para ello estimar los parámetros  $\rho$  y  $\lambda$  empleando la relación lineal entre la función de supervivencia Weibull y los parámetros.

Para llegar al cálculo del VaR, se emplean las tasas de mortalidad estimadas por el modelo relacional Brass-type, con estas se calcula la función de supervivencia y enseguida el VaR. Se han fijado dos niveles de confianza: 90% y 95%. Ya que estamos interesados en el riesgo de longevidad, se calcularon el número de años a vivir una vez se han cumplido 65 años.

**Tabla 2**

Valor en riesgo (VaR). Número de años a vivir después de la edad 65. Ajuste Weibull a las tasas de mortalidad: reales de los Asegurados, estimadas por el modelo Poisson y estimadas por el modelo lineal.

<b>Hombres</b>	<b>VaR 90%</b>		<b>VaR 95%</b>	
	<b>2000</b>	<b>2010</b>	<b>2000</b>	<b>2010</b>
Asegurados	30,47	35,67	35,47	41,22
Regresión Poisson	32,79	33,07	37,76	37,86
Regresión Lineal	30,06	34,52	34,84	39,84
<b>Mujeres</b>	<b>VaR 90%</b>		<b>VaR 95%</b>	
	<b>2000</b>	<b>2010</b>	<b>2000</b>	<b>2010</b>
Asegurados	40,14	39,14	46,50	45,05
Regresión Poisson	37,39	38,20	43,32	44,07
Regresión Lineal	37,82	38,12	43,89	44,03

La tabla 2 muestra el VaR obtenido en tres casos diferentes, la primera línea corresponde a la mortalidad real de los asegurados (AMIS), la segunda línea a la mortalidad estimada por la regresión Poisson y finalmente la tercera línea muestra el VaR de la mortalidad estimada por la regresión lineal.

La diferencia entre hombres y mujeres es evidente. En todos los casos se espera que las mujeres, después de los 65 años, vivan más años que los hombres.

Considerando un nivel de confianza de 90%, por ejemplo en el año 2010, se espera que las mujeres aseguradas vivan 39 años más allá de los 65. Sin embargo cuando se hace la corrección de la selección adversa según el modelo Poisson el número de años baja a 38. El VaR para las mujeres no tiene cambios substanciales entre usar el una regresión Poisson o una regresión lineal. Esto se podría explicar con el hecho de que la mortalidad de las mujeres es más estable a través de los años que la de los hombres, como se puede observar en la figura 1. Además de que la mortalidad en mujeres aseguradas es más cercana a la mortalidad de la población general.

En cambio para los hombres asegurados, en el mismo nivel de confianza y año, se espera que vivan 35 años. Cuando se toma en cuenta la mortalidad de la población general mediante el modelo Poisson, al igual que las mujeres, el número de años baja a 33. Sin embargo aquí si se notan diferencias entre estimaciones. El ajuste lineal aminora el número de años pero muy poco en comparación con lo que lo hace el modelo Poisson.

Comparando estos resultados con los presentados en Ornelas, Guillén y Alcaniz (2013), en donde se hizo el mismo ejercicio pero considerando la población general únicamente, se puede observar que, los asegurados hombres tienen una mayor esperanza de vida, achacado principalmente al estilo de vida. Para el año 2000 a un nivel de confianza de 95% se espera que los hombres sobrevivan 38,8 años y a un nivel de confianza de 90% se espera que sobrevivan 32,93 años.

Sin embargo esto no pasa siempre, para las aseguradas femeninas. Para el año 2000 a un nivel de confianza de 95% se espera que sobrevivan 41,31 años y a un nivel de confianza de 90% 35,35 años.

## 5. CONCLUSIONES

Al existir diferencias entre la mortalidad de los asegurados y la mortalidad general, para la construcción de tablas de mortalidad en una compañía aseguradora el tomar en cuenta ambas experiencias debería ser un ejercicio cotidiano. El cálculo del VaR siempre será útil para conocer la situación del portfolio, ya que indica a que edad es probable que llegue la población una vez se ha fijado un nivel de confianza  $\alpha$ . En general se puede leer que  $\alpha / 100$  personas vivirán  $x$  años (donde  $x$  es justamente el valor obtenido del VaR).

La recomendación de estudiar la mortalidad de forma separada por hombres y mujeres sigue vigente, pues hasta la fecha no se ha encontrado evidencia con los datos de que las diferencias en la mortalidad entre sexos haya disminuido y por lo tanto se pueda obviar el factor sexo.

La probabilidad de muerte de un individuo a una edad determinada  $x$ , depende en gran medida de su edad actual como de su género. Sin embargo existen otros factores, tales como la ocupación, estilo de vida y hábitos diarios, que pueden influir o alterar dicha probabilidad. Aunque la solicitud de información detallada sobre los hábitos de los asegurados puede ser impreciso y fácil de manipular. Por otra parte, algunos de los cuestionarios pueden omitir información relevante. Los factores que no son fácilmente verificables por el asegurador, a priori, deberían ser excluidos de la tarifa. En Kuh *et al.* (2009), los autores explican la implicación de los diferentes factores de la mortalidad.

A menudo se argumenta que la eliminación de los factores de riesgo en la tarificación puede crear selección adversa. Esto significa que las personas de bajo riesgo, cuando ven que los precios aumentan decide cancelar su póliza y, por lo tanto, la cartera de seguros sufre un desequilibrio, ya que sólo los clientes de alto riesgo renuevan sus pólizas. Por ejemplo en el caso del seguro de vida, los hombres se benefician de precios más bajos lo cual es más atractivo para los nuevos clientes hombres, mientras que las mujeres al ver aumentadas las primas, podrán optar por no comprar un seguro. En el límite, la compañía de seguros sólo se quedaría con clientes hombres, lo cual la obligaría a ajustar el precio de nuevo. Algunos estudios indican que sin tener en cuenta ciertos factores de riesgo puede aumentar la cobertura de la pérdida, es decir, el monto total de las pérdidas cubiertas. Ejemplos detallados se pueden encontrar en Ornelas, Guillén y Romero (2013).

En el ámbito de los seguros no es suficiente con calcular la probabilidad de muerte, si no que también interesa la esperanza de vida, que define el tiempo promedio de años que se espera que una persona sobreviva. Según Vaupel, Zhang y van Raalte (2011) para aumentar la esperanza de vida de una población se debe poner atención en los medios para reducir las muertes en edades prematuras, algo que se consigue, por ejemplo, con las políticas de prevención en salud adecuadas. Como se ha analizado el riesgo de longevidad, es decir, el número de años que sólo una pequeña fracción de la población sobrevive, se ha aplicado el concepto de valor en riesgo a la duración vida.

## REFERENCES

Brass, William (1971). "On the scale of mortality", en Brass, W., (ed.), *Biological Aspects of Demography*, London:Taylor and Francis.

Brouhns, Natacha; Denuit, Michel y Vermunt, Jeroen K. (2002). "A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables", *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 31, n° 3, 373-393.

Chiappori, Pierre-André y Salanie, Bernard (2000). "Testing for asymmetric information in insurance markets", *Journal of Political Economy*, vol. 108, 56-78.

Kuh, Diana; Hardy, Rebecca; Hotopf, Matthew; Lawlor, Debbie; Maughan, Barbara; Westendorp, Rudi; Cooper, Rachel; Black, Stephanie y Mishra, Gita (2009). "A review of lifetime risk factors for mortality", *British Actuarial Journal*, vol. 15, 17-64.

Mendoza, Manuel; Madrigal, Ana María y Martínez, Evangelina (2000). *Tablas de mortalidad CNSF 2000-I y CNSF 2000-G*. Documentos de Trabajo de la CNSF, vol. 80.

Ornelas, Arely; Guillén, Montserrat y Alcañiz, Manuela (2013). "Implications of unisex assumptions in the analysis". *Modeling and Simulation in Engineering, Economics, and Management*, Springer Berlin Heidelberg, 99-107.

Ornelas, Arely; Guillén, Montserrat y Romero, Maria Jesus (2013). "La igualdad una exigencia para el seguro: problemas derivados de las tablas unisex", *El Sector Asegurador ante las Transformaciones del Estado del Bienestar*. Fundación de Estudios Financieros, Madrid.

Pitacco, Ermanno; Denuit, Michel; Haberman, Steven y Olivieri, Annamaria (2009). *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. Oxford: Oxford University Press.

Plat, Richard (2009). "Stochastic portfolio specific mortality and the quantification of mortality basis risk", *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 45, n° 1, 123-132.

Rendón, Jorge (2000). *Tablas de mortalidad México 2000, AMIS-AMA*. Instituto Tecnológico Autónomo de México, ITAM.

Rendón, Jorge (2013). *The construction of multiple decrement models from associated single decrement experiences*, Presentación IAALS, Ciudad de México.

Vaupel, James W; Zhang, Zhen y A van Raalte, Alyson (2011). *Life expectancy and disparity: an international comparison of life table data*. *BMJ open*, vol. 1, n° 1, 1-6.

Consejo Nacional de Población (2012), Conapo. [Web] <http://www.conapo.gob.mx/>, [Consulta: 2012].

Instituto Nacional de Estadística y Geografía, INEGI (2013). [Web] <http://www.inegi.org.mx/>, [Consulta: 2013].

Worldbank (2013). [Web] <http://www.worldbank.org/>. [Consulta: Junio-2013].

## Ponencia 8

# ESTIMACIÓN DEL RECARGO IMPLÍCITO EN UN SEGURO VIDA ENTERA

Montserrat Hernández-Solís, Cristina Lozano-Colomer  
y José Luis Vilar-Zanón

### RESUMEN

En la tarificación en el ramo de los seguros generales (Wang (1995)) plantea una prima recargada utilizando la función de distorsión. (Hernández y otros (2013)) extienden este proceso al ramo de vida para una función de distorsión concreta transformada proporcional del tanto instantáneo que es una potencia de la función de supervivencia con exponente  $1/\rho$ ,  $\rho \geq 0$ .

Quedaba abierto el proceso de estimar  $1/\rho$ , tarea que se aborda en este trabajo mediante un argumento de solvencia aplicando el teorema central del límite. Dicha aplicación se ilustra con un ejemplo numérico con la primera ley de Makenham y una cartera de seguros vida entera.

**Palabras clave:** Recargo implícito, Parámetro de distorsión, Esperanza distorsionada.

### 1. INTRODUCCIÓN

Las compañías de seguro del ramo de vida establecen un recargo en la prima neta para así poder hacer frente a las desviaciones desfavorables de la siniestralidad real con respecto a la esperada, dicho recargo suele estar implícito en las propias bases de cálculo contenidas en las tablas de mortalidad. Para el caso de los seguros con cobertura de fallecimiento, es práctica común incrementar la probabilidad de fallecimiento, o bien considerar tablas de mortalidad con probabilidades de fallecimiento superiores. En (Hernández y otros (2013)) se plantea un principio de cálculo de prima para seguros de vida basado en la medida de riesgo coherente “transformada proporcional del tanto instantáneo”. Se obtiene una prima recargada equivalente a la prima pura de una nueva variable cuya función de supervivencia posee un tanto instantáneo de mortalidad proporcional a la de la variable original, pero no se establece ningún método para la elección del mejor valor del factor de proporcionalidad  $1/\rho$ .



En este trabajo se va a estimar este factor de proporcionalidad en base al Var de la cartera y con la aplicación del teorema central del límite.

Se comienza con un resumen del fundamento teórico de la obtención de la prima recargada, basada en la transformada proporcional del tanto instantáneo, para un seguro vida entera obteniéndose la expresión de la prima en función del exponente  $\frac{1}{\rho} \geq 1$  que coincide con el valor por el que hay que multiplicar el tanto instantáneo de fallecimiento. A continuación para estimar el valor de  $\rho$  se considera una cartera de asegurados con la misma edad  $x$ . Aplicando a la variable pérdida total el teorema central del límite, se trata de obtener para que valor de  $\rho$  la probabilidad de que los ingresos sean menores que los gastos sea menor que un  $\alpha$  suficientemente pequeño fijado previamente. Los cálculos numéricos han sido codificados en Maple.

Se concluye con un ejemplo para el caso de seguro con cobertura de fallecimiento vida entera con la primera ley de Makenham.

## 2. PRIMA RECARGADA BASADA EN LA TRANSFORMADA PROPORCIONAL DEL TANTO INSTANTÁNEO

Dado un riesgo definido por la variable aleatoria  $X \geq 0$  con función de distribución y función de supervivencia:

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

$$S(x) = 1 - F(x).$$

**Definición 1.** La prima neta basada en el valor esperado se puede expresar por medio de la función de supervivencia es:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} S(x) dx.$$

La prima recargada basada en la función de distorsión de (Wang, 1995).

**Definición 2.** Dado un riesgo  $X$  con función de supervivencia  $S(x)$  y una función no decreciente  $g : [0,1] \rightarrow [0,1]$  con  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$  llamada función de distorsión, la prima de riesgo ajustada a la medida de riesgo probabilidad distorsionada es:

$$E_g(X) = \int_0^{\infty} g(S(x)) dx.$$

Se va a considerar un caso particular de función de distorsión (Yiu-Kuen Tse. (2009)), que consiste en una función en forma de potencia de la función de supervivencia. Este tipo de función es muy aplicada en los seguros no vida por verificar las propiedades de una medida de riesgo coherente. Además se verifica que tomando una función potencial de la función de supervivencia, el tanto instantáneo o fuerza de mortalidad se multiplica por una constante, siendo esta una característica que tiene una interesante interpretación en seguros de vida.

**Definición 3.** Se denomina transformada proporcional del tanto instantáneo a toda medida de riesgo cuya función de distorsión tenga la siguiente forma:

$$g(u) = u^{1/\rho} \quad \text{con } \rho > 0$$

En este caso se define una nueva variable  $Y$  con función de supervivencia y prima neta dadas por:

$$S_Y(x) = (S(x))^{1/\rho}, \quad \rho > 0$$

$$\Pi_\rho(X) = E(Y) = \int_0^{+\infty} (S(x))^{1/\rho} dx.$$

De la definición 3 se deduce (Hernández y otros (2013)):

$$\mu_Y(t) = \frac{1}{\rho} \mu_x(t), \quad \rho > 0, \quad t \geq 0.$$

Siendo  $\mu_x(t)$  el tanto instantáneo de mortalidad a la edad  $x$ . Así se justifica la práctica común de incrementar el tanto de fallecimiento para el recargo de la prima.

### 3. PRIMA RECARGADA PARA UN SEGURO VIDA ENTERA

Se considera un seguro vida entera, con capital asegurado unitario, para una cabeza de edad  $x$ . En este caso, el riesgo está representado por la variable aleatoria  $T_x$ , vida residual o tiempo de vida desde la contratación de la póliza hasta el fallecimiento del asegurado, siendo la edad de contratación la edad actuarial  $x$ .

Se parte de las siguientes premisas:

1. Se paga una unidad monetaria en el momento del fallecimiento.
2. El tipo de interés técnico es  $i$ .
3. Dada la variable aleatoria continua, edad de fallecimiento  $X$ , para un recién nacido, con función de supervivencia  $S(x)$ , la variable aleatoria  $T_x$  tiene una

función de distribución denominada  $G_x(t)$  y una función de supervivencia  $S_x(t)$  cuyas expresiones en función de  $S(x)$  vienen dadas por:

$$G_x(t) = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

$$S_x(t) = 1 - G_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

Aplicando el principio de equivalencia actuarial para obtener la prima pura única se obtiene la expresión (Bowers *et al.* (1997)):

$$P = \int_0^{+\infty} v^t dG_x(t)$$

siendo  $v = \frac{1}{1+i}$  el factor de actualización.

Para adaptar este principio de equivalencia actuarial al cálculo de primas basado en la función de distorsión, se expresa esta integral en función de  $S_x(t)$ .

$$P = \int_0^{+\infty} v^t dG_x(t) = - \int_0^{+\infty} v^t dS_x(t)$$

Haciendo un cambio de variable e integrando por partes se obtiene una expresión para la prima neta basada en  $S_x(t)$

$$\Pi(Z) = 1 - \int_0^1 S_x \left( \frac{\ln z}{\ln v} \right) dz.$$

Ahora la prima recargada se obtiene sustituyendo la función de supervivencia por una potencia suya

$$\Pi_\rho(Z) = 1 - \int_0^1 \left( S_x \left( \frac{\ln z}{\ln v} \right) \right)^{1/\rho} dz. \quad (1)$$

Es claro que el exponente deberá ser  $\rho \leq 1$  para que la prima recargada sea mayor que la prima pura. Se demuestra en (Hernández y otros (2013)) que este principio de cálculo de primas constituye una medida de riesgo coherente.

El problema consiste en obtener un valor para el parámetro  $\rho$ . Por ello se presenta un método de estimación para este parámetro empleando el Var de la cartera en el

supuesto en que el número de pólizas sea suficientemente grande para poder aplicar el Teorema Central del Límite.

#### 4. ESTIMACIÓN DEL PARÁMETRO $\rho$

Se trata ahora de obtener una distribución aproximada para la variable pérdida de toda la cartera, para ello nos apoyaremos en el siguiente teorema:

##### 3.1. Teorema Central del Límite

Sea  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_N\}$  una muestra aleatoria simple de una población con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  ambas finitas. Entonces la función de distribución de la variable  $\sum_{i=1}^N Z_i$  tiende a la función de distribución de una distribución Normal con media  $N\mu$

y varianza  $N\sigma^2$  cuando  $N$  tiende a infinito. Por tanto,  $\frac{\sum_{i=1}^N Z_i - N\mu}{\sqrt{N\sigma^2}}$  tenderá a distribuirse como una Normal (0,1).

Consideremos una cartera de  $N$  pólizas de un seguro vida entera, con asegurados con la misma edad  $x$ , independientes entre sí y tal que la variable aleatoria vida residual a la edad  $x$  tenga la misma distribución de probabilidad para todos ellos  $T(x)$ .

El coste total asociado a cada póliza  $j$  vendrá dado por la variable aleatoria

$$Z_j = v^{T(x)} \quad \text{con} \quad v = (1+i)^{-1}.$$

Supuesta una cartera, grande, de  $N$  pólizas el coste total tenderá a distribuirse aplicando el teorema central del límite

$$\sum_{j=1}^N Z_j \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N(NE[Z_j], \sqrt{NV[Z_j]}).$$

La esperanza y la varianza de  $Z_j$  se obtienen a partir de la función de supervivencia de los diferentes modelos de leyes de mortalidad con las siguientes expresiones:

$$E[Z] = -\int_0^{\infty} v^t dS_x(t) = 1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right) dz \quad (2)$$

Obteniéndose la última expresión con el cambio de variable  $z = v^t$  y una integración por partes.

Y de la misma forma se obtiene:

$$V[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2$$

$$E[Z^2] = -\int_0^{\infty} v^{2t} dS_x(t) = 1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right) dz$$

Por tanto:

$$V[Z] = \left[1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right) dz\right] - \left[1 - \int_0^1 S_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right) dz\right]^2. \quad (3)$$

El coste total de la cartera estará dado por la variable aleatoria  $\sum_{j=1}^N Z_j$  y si se cobra a cada asegurado la prima recargada, los ingresos totales serán  $N\Pi_\rho$ .

Se trata de obtener el valor de  $\rho$  para la probabilidad de que el coste total se superior a los ingresos totales sea un valor  $\alpha$  suficientemente pequeño. Es decir:

$$\Pr\left[\sum_{j=1}^N Z_j \geq N\Pi_\rho\right] = \alpha$$

Dado que  $N$  es grande y que se cumplen las condiciones del teorema central del límite se trata de dada una probabilidad  $\alpha$ , obtener el valor de  $\rho$  para que en una distribución Normal  $(0,1)$  se verifique:

$$\Pr\left[\frac{\sum_{j=1}^N Z_j - NE[Z_j]}{\sqrt{NV[Z_j]}} \geq \frac{N\Pi_\rho - NE[Z_j]}{\sqrt{NV[Z_j]}}\right] = \alpha$$

Si  $K_\alpha$  es el valor que deja a la derecha la probabilidad  $\alpha$  se tiene la ecuación siguiente:

$$K_\alpha = \frac{N\Pi_\rho - NE[Z_j]}{\sqrt{NV[Z_j]}} \quad (4)$$

Que como  $\Pi_\rho$  es función de  $\rho$  se trata de despejarlo de esta ecuación.

## 5. APLICACIÓN A LA PRIMERA LEY DE MAKENHAM

Se considera una cartera de  $N$  pólizas independientes de un seguro vida entera de asegurados de edad  $x$ . Se supone que todos siguen la primera ley de Makenham.

En este caso la expresión de la función de supervivencia de la variable aleatoria vida residual y la del tanto están dados por (Ayuso, M; y otros (2007)):

$$S_x(t) = S^t g^{C^x(C^t-1)} \quad 0 < g, \quad S < 1, \quad C > 1$$
$$\mu_x(t) = -\ln S - C^t \ln g \ln C$$

El tanto instantáneo de la nueva variable aleatoria  $Y$  obtenida con la función de distorsión

$$\mu_Y(t) = \frac{1}{\rho}(-\ln S - C^t \ln g \ln C) = -\ln S^{\frac{1}{\rho}} - C^t \ln g^{\frac{1}{\rho}} \ln C$$

Que como se puede ver corresponde a la primera ley de Makenham con parámetros

$$S^{\frac{1}{\rho}}, \quad g^{\frac{1}{\rho}} < 1, \quad C > 1 \quad \text{y} \quad \rho < 1.$$

Por tanto la probabilidad de fallecimiento para los nuevos valores de los parámetros vendrá dada por:

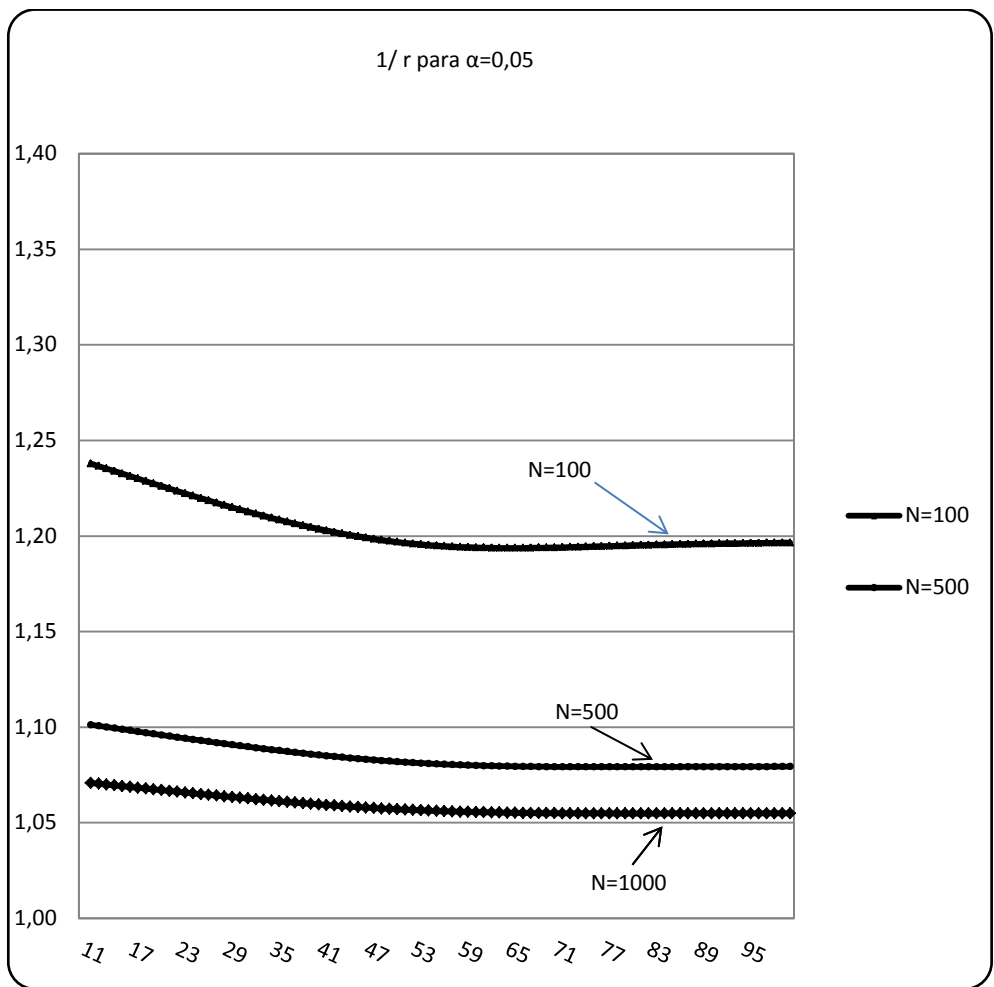
$${}_nq_x = 1 - (S^{1/\rho})^x (g^{1/\rho})^{C^x(C^n-1)}$$

Vamos a tomar los valores para los parámetros  $S = 0,9$ ,  $g = 0,9$  y  $C = 1,1$ . (Ayuso M. y otros (2001)), el tipo de interés técnico  $i = 3\%$  y las edades  $x = 11, \dots, 100$ .

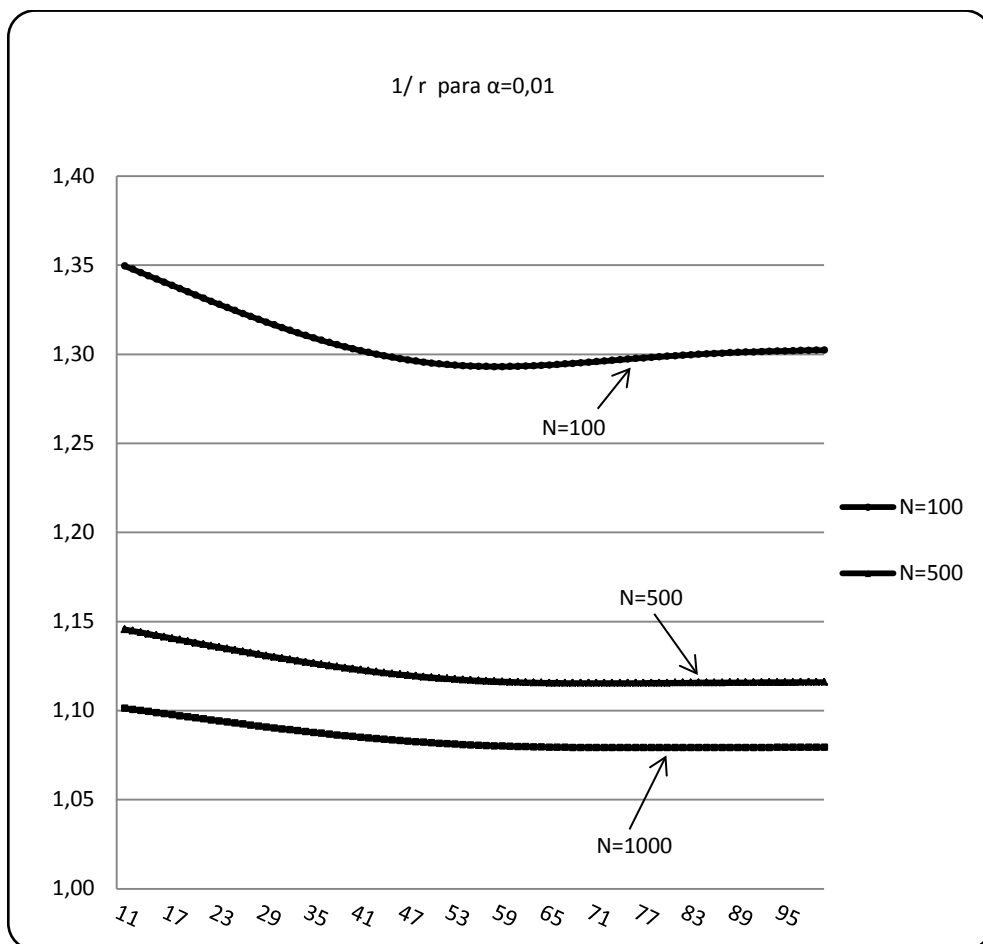
Los cálculos numéricos han sido codificados en Maple para obtener los resultados que buscamos.

Se estima el valor del parámetro  $\rho$  para la modalidad de seguro vida entera para cada edad en los siguientes casos  $\alpha = 0,05$  y  $\alpha = 0,01$  y para tres tamaños de colectivos con la misma edad  $N = 100$ ,  $N = 500$  y  $N = 1000$

Los resultados obtenidos se reflejan en el gráfico 1 para  $\alpha = 0,05$  y en el gráfico 2 para  $\alpha = 0,01$



**Gráfico 1**



**Gráfico 2**

## 6. CONCLUSIONES

En resumen se ha encontrado un sistema para recargar las tablas de mortalidad haciendo uso en un principio de cálculo de primas basado en una medida de riesgo coherente. Se ha encontrado un fundamento teórico para una práctica actuarial extendidísima.

Respecto de los valores obtenidos para  $1/\rho$  se observa:

- Es superior a 1 en todos los casos como cabía esperar.
- Es decreciente con la edad.



- Los valores van desde un mínimo de 1,07 para  $N = 1000$  y  $\alpha = 0,05$  a un máximo de 1,35 para  $N = 100$  y  $\alpha = 0,01$ .
- Es mayor cuanto mayor es el tamaño del colectivo, esto tiene sentido puesto que cuanto mayor es el tamaño de la muestra menor es la dispersión respecto de la media, mientras que la prima recargada es igual para todos los riesgos.
- Existen menos diferencias entre las edades menores y mayores cuanto mayor es el valor de  $N$ , hasta tal punto que se podría, si la cartera es suficientemente grande, recargar de la misma forma todas las probabilidades de fallecimiento.

## BIBLIOGRAFÍA

Ayuso, M., Corrales, H., Guillén, M., Pérez-Marín, A.M., Rojo, J.L. (2007). *Estadística Actuarial Vida*, Universitat de Barcelona.

Bowers, J.R., Newton, L., Gerber, H., Jones, D. (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, Illinois.

Hernández, M., Lozano, C., Vilar, J.L. (2013). "La prima de riesgo recargada en un seguro de rentas: tarificación mediante el uso de una medida de riesgo coherente". *Revista de métodos cuantitativos para la economía y la empresa*, núm. 15. pp. 151-167. Facultad Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad Pablo de Olavide.

Hernández, M., Lozano, C., Vilar, J.L. (Submitted, 2013). "A note on life insurance ratemaking with proportional hazard transform". *Anales del Instituto de Actuarios de Seguros*.

Hernández, M., Lozano, C., Vilar, J.L. (2013). "El cálculo de la prima única de riesgo mediante la medida de riesgo transformada proporcional del tanto instantáneo", *Atlantic Review of Economics*, Vol. I, Colegio de Economistas de A Coruña.

Wang, S. (1995). "Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms", *Insurance Mathematics and Economic*, 17.

Yiu-Kuen, Tse (2009). *Nonlife Actuarial Models. Theory, Methods and Evaluation*, Cambridge University Press.

## Ponencia 9

# EL PRECIO DE LOS SEGUROS DE DEPENDENCIA EN ESPAÑA: ¿SON ACTUARIALMENTE JUSTOS?

Marta Domínguez Díaz y José Enrique Devesa Carpio

### RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo es la comparación de los precios que aplican las aseguradoras en los seguros de dependencia con respecto a los precios teóricos que se pueden calcular en función de las tablas de dependencia que se manejan en la literatura. De esta forma se puede analizar si las entidades utilizan criterios actuariales para la comercialización de sus productos o intentan fidelizar a sus clientes mediante unos precios por debajo de los actuarialmente justos. Para ello se han elaborado unas tablas de dependencia mediante la incorporación de las esperanza de vida restante para los distintos grados de dependencia de Alcañiz *et al.* (2011) a las tablas generadas por Pociello *et al.* (2001) y por Artís *et al.* (2007).

**Palabras clave:** Seguros privados, tablas de dependencia, justicia actuarial.

### 1. INTRODUCCIÓN

La dependencia se ha convertido en muy pocos años en uno de los pilares básicos en los que se asienta el Estado de Bienestar de los países de nuestro entorno, y en el que España no podía quedarse al margen.

La normativa de referencia en el caso español es muy reciente, ya que data de 2006, con la aprobación de la Ley 39/2006, de 14 de diciembre, de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia. A partir de ese momento es cuando las aseguradoras empiezan a plantearse la posibilidad de introducir seguros específicos que cubran esta nueva contingencia, bien como seguro complementario o bien como seguro principal.

Dado el poco tiempo que ha transcurrido desde entonces, se puede decir que las aseguradoras han asumido el nuevo reto y han incorporado la dependencia como un nuevo producto. Así, 17 entidades han ofrecido o están ofreciendo actualmente seguros privados de dependencia en España. El abanico de productos que co-

mercianizan es muy variado, lo que hace difícil llevar a cabo una comparación de los mismos.

El bajo volumen de primas y la escasa información que hay sobre la siniestralidad de los seguros de dependencia, dada su reciente implantación, hace difícil fijar los precios de estos seguros. No existen unas tablas de dependencia “oficiales” en el mercado, si bien, hay dos tablas de dependencia, elaboradas por investigadores académicos, Pociello *et al.* (2001) y Artís *et al.* (2007); donde el rango de edades empieza a los 65 años, siendo ésta una edad poco interesante para las aseguradoras, ya que prefieren que este tipo de productos se contrate por personas más jóvenes.

Existen bastantes trabajos que analizan la dependencia desde el punto de vista actuarial; así, se pueden citar: Alcañiz *et al.* (2011), donde analizan los costes de los cuidados de larga duración de los dependientes y calculan la esperanza de vida restante en cada grado de dependencia, que ha sido utilizada en nuestro trabajo, como se comentará más adelante. En Alegre *et al.* (2008) se expone el tratamiento actuarial de un seguro de fallecimiento con anticipo de parte de la cuantía del seguro en caso de que se convierta en dependiente o agrave su situación de dependencia. En Alegre *et al.* (2004) se aplica el modelo markoviano de transiciones a la dependencia. En Alegre *et al.* (2006) se calcula la prima única y la provisión de un seguro y de una renta para el caso de tres estados de dependencia, siendo la cuantía asegurada variable según el grado de dependencia. Artís *et al.* (2007) realizan una estimación del coste de la dependencia, para lo cual generan unas tablas de dependencia. En este mismo sentido, Pociello *et al.* (2001) construyen otras tablas de dependencia. En Vicente *et al.* (2007) se modeliza la construcción de bases técnicas de dependencia, basadas en la teoría de procesos estocásticos de Markov. Por otro lado, Ricote (2003) analiza el riesgo actuarial del contraseguro y de la carencia en los seguros de dependencia. Sánchez (2009) obtiene una tarifa a partir de un modelo incidencia-renta y realiza un análisis de sensibilidad de los distintos parámetros que intervienen en su cálculo. Vidal y Devesa (2013) hacen una extensa revisión, desde el punto de vista actuarial, de las distintas características que se suelen presentar en los seguros. Por último, Pedruelo (2011) analiza las principales características de los seguros privados, si bien no desde una perspectiva estrictamente actuarial.

Sin embargo, no existen estudios que analicen los precios de los seguros privados de dependencia. Por este motivo, uno de los objetivos de este trabajo es analizar el grado de introducción de los seguros de dependencia en España, sus características más importantes y si utilizan criterios comerciales o técnicos para la determinación de las primas. Es decir, si han incluido este nuevo seguro para fidelizar a sus clientes o si han hecho un verdadero análisis técnico, teniendo en cuenta el enfoque actuarial.

Para conseguir todo ello hemos tenido que relacionar las tablas de dependencia agregada de distintos investigadores (Artís *et al.* (2007) y Pociello *et al.* (2001)), con la esperanza de vida restante de Alcañiz *et al.* (2011) para poder obtener pro-

babilidades desagregadas por niveles de dependencia. Todo ello con la finalidad de poder comparar los precios de las aseguradoras con los obtenidos de las tablas elaboradas en este trabajo.

En el epígrafe 2 se analiza brevemente la situación general de la dependencia en España. En el epígrafe 3 se estudia el mercado de seguros privados de dependencia, mientras que en el cuarto epígrafe se desarrolla actuarialmente los casos concretos de aquellos productos para los que ha sido posible obtener el importe de las primas. En el epígrafe 5 se comparan los precios de los distintos seguros para los que hemos podido obtener las primas. En los dos últimos epígrafes se presentan las principales conclusiones y la bibliografía.

## 2. LA DEPENDENCIA EN ESPAÑA

La “Ley de Dependencia”, **Ley 39/2006 de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia**, fue aprobada el 14 de Diciembre de 2006. Se trata de una ley a la que tienen derecho todos los ciudadanos españoles en situación de dependencia, y con ella nace el **Sistema de Autonomía y Atención a la Dependencia (SAAD)**. Éste representa el cuarto pilar del **Estado de Bienestar**, ofreciendo un conjunto de prestaciones y servicios con el objetivo de garantizar a las personas dependientes unos niveles básicos de protección, teniendo en cuenta los principios de universalidad, equidad y accesibilidad.

Por otro lado, **la ley fija unos requisitos** que deben ser cumplidos por las personas dependientes para tener acceso a las prestaciones y recursos que proporcionan los distintos niveles de financiación de la Ley de Dependencia.

La **dependencia**, según el artículo 2 de la Ley de Dependencia, es el estado de carácter permanente en que se encuentran las personas que, por razones derivadas de la edad, la enfermedad o la discapacidad, y ligadas a la falta o a la pérdida de autonomía física, mental, intelectual o sensorial, precisan de la atención de otra u otras personas o ayudas importantes para realizar actividades básicas de la vida diaria o, en el caso de las personas con discapacidad intelectual o enfermedad mental, de otros apoyos para su autonomía personal<sup>1</sup>.

En este mismo artículo, la ley define las actividades básicas de la vida diaria (AVD) como “las tareas más elementales de la persona, que le permiten desenvolverse con un mínimo de autonomía e independencia, tales como: el cuidado personal, las actividades domésticas básicas, la movilidad esencial, reconocer personas y objetos, orientarse, entender y ejecutar órdenes o tareas sencillas”.

---

<sup>1</sup> La autonomía se define como la capacidad de controlar, afrontar y tomar, por propia iniciativa, decisiones personales acerca de cómo vivir de acuerdo con las normas y preferencias propias así como de desarrollar las actividades básicas de la vida diaria.

En resumen, la dependencia es la situación en la que el individuo no es capaz de gestionar su propia vida cotidiana ni los aspectos primarios de su entorno más inmediato, en mayor o menor grado.

En el artículo 26, se definen los **tres grados** de dependencia:

**Grado I. Dependencia moderada:** cuando la persona necesita ayuda para realizar varias actividades básicas de la vida diaria, al menos una vez al día o tiene necesidades de apoyo intermitente o limitado para su autonomía personal.

**Grado II. Dependencia severa:** cuando la persona necesita ayuda para realizar varias actividades básicas de la vida diaria dos o tres veces al día, pero no quiere el apoyo permanente de un cuidador o tiene necesidades de apoyo extenso para su autonomía personal.

**Grado III. Gran dependencia:** cuando la persona necesita ayuda para realizar varias actividades básicas de la vida diaria varias veces al día y, por su pérdida total de autonomía física, mental, intelectual o sensorial, necesita el apoyo indispensable y continuo de otra persona o tiene necesidades de apoyo generalizado para su autonomía personal.

En general, en otros países como Francia, Alemania, EE.UU. y Suiza, los grados de dependencia y el catálogo de las formas de atención a la misma son bastante similares al caso español, pero existen algunas diferencias<sup>2</sup>.

### 3. LOS SEGUROS PRIVADOS DE DEPENDENCIA EN ESPAÑA

#### 3.1. Consideraciones generales

En España, al igual que en muchos otros países europeos, la financiación es mixta, es decir, combina la provisión pública y la privada, de tal forma que la cobertura que ofrece es universal e intervienen los ciudadanos para financiar la misma.

A raíz de la publicación de la Ley de Dependencia empiezan a aparecer seguros privados para cubrir los huecos que deja la Administración Pública. Surgen para dar respuesta a los problemas de financiación que se derivan del aumento de la demanda de cuidado para personas dependientes, siendo previsible que continúe incrementándose debido a una serie de factores socio-demográficos, siendo los más relevantes<sup>3</sup>: el envejecimiento demográfico, la evolución del modelo de familia y la incorporación de la población femenina al mercado laboral.

---

<sup>2</sup> Un análisis extenso del tema puede verse en Ministerio de Sanidad, Política Social e Igualdad (2011) y Scor (2012).

<sup>3</sup> Obtenido de Vidal y Devesa (2013).

Así, el *seguro de dependencia* se puede definir como un contrato mediante el cual el asegurador se obliga a pagar una renta, un capital o prestar un servicio, en los casos en que el asegurado entre en una situación de dependencia recogida en la cobertura del contrato, y a cambio recibirá del asegurado una cantidad de dinero en concepto de prima. Este seguro presenta cierta peculiaridad, dado que indemniza la deficiencia en la capacidad que posee una persona para realizar determinadas actividades, en lugar de un daño. Además, la aseguradora se ve obligada a satisfacer la prestación durante un periodo de tiempo o en un momento puntual.

En cuanto al volumen de primas pertenecientes al ramo de dependencia, es muy bajo, debido a su reciente implantación. Así, según la DGSFP sólo llega a 140.000 euros en 2011, mientras que según ICEA subiría hasta 3 millones de euros. Los datos son poco significativos, siendo previsible un rápido crecimiento en los próximos años. Así parece deducirse del aumento de compañías aseguradoras que ofertan algún seguro de dependencia y de los recortes previstos por parte de las administraciones públicas.

### 3.2. Modalidades de Seguro de Dependencia en España

En este subepígrafe, se hace un estudio de los diversos seguros comercializados para la cobertura de la dependencia, basándose en el análisis de 17 entidades (Compañías de seguro, Mutualidades de Previsión Social o Entidades bancarias). Estas aseguradoras son: Aegón, Agrupación Mutua, Allianz, AG2R La Mondiale, AXA, Caixa Terrasa Previsió, Caja de Ávila, Caja de Burgos, Caja Madrid, Caser, CNP Vida, Mapfre Vida, Montepío de Conductores, Mutual Médica, Previsión Sanitaria Nacional, Surne y VidaCaixa<sup>4</sup>.

A continuación, se realiza una breve descripción de las características anteriores.

- (a) *Edades de contratación*: La edad mínima es bastante diferente, dado que a pesar de que la mayoría de las entidades la fijan en 18 años, otras consideran los 30 y 35 años como mínimo. Respecto a la edad máxima, se encuentra entre el rango de los 64 a los 74 años. Algunas de las compañías analizadas no especifican los requisitos de edad.
- (b) *Cobertura principal*: En todas las entidades se hace referencia a la Dependencia salvo en dos casos, Mapfre y Allianz, donde la cobertura principal es el fallecimiento. En este último caso, si ha surgido la situación de dependencia antes de fallecer, serán deducidas de la indemnización por fallecimiento las cantidades que hayan sido pagadas hasta el momento anterior a la muerte del asegurado. Asimismo, Caixa Terrasa Previsió comercializa como garantía principal un seguro de hogar.
- (c) *Cobertura complementaria*: A parte de la garantía básica, las entidades prestan otro tipo de servicios o pagan capitales para afrontar los gastos

---

<sup>4</sup> Información obtenida de [www.inese.es](http://www.inese.es) y páginas web de las aseguradoras.

iniciales, los cuales complementan a la garantía principal. Entre los servicios ofertados se encuentran: la Teleasistencia, asesoramiento médico, asesoramiento fiscal y jurídico telefónico, cobertura por invalidez absoluta y permanente, asistencia de viaje y asistencia sanitaria a domicilio.

- (d) *Dependencia cubierta*: las entidades ofrecen distintos tipos de cobertura, basándose en los grados de dependencia fijados en la Ley, los cuales ya fueron explicados en el apartado de la “Ley de dependencia”. La mayoría lo ofrecen para “Dependencia severa” y “Gran dependencia”, y sólo tres de las diecisiete compañías cubre la “Dependencia moderada”. En definitiva, los productos de dependencia han sido diseñados, casi exclusivamente, para la cobertura del segundo grado y el tercer grado de la Ley de dependencia.
- (e) *Forma de pago*: El pago de la prestación a recibir es llevada a cabo, por la mayor parte de las entidades, mediante una renta vitalicia, ya sea constante o revalorizable, pero algunas como AXA o AG2R-La Mondiale ofrecen únicamente el pago de un capital.
- (f) *Cuántías prestación*: En general los valores mínimos y máximos son pequeños, sobre todo si se comparan con las prestaciones de otros países.
- (g) *Plazo de carencia*: Si el siniestro ocurre durante este periodo, la aseguradora queda exenta del pago de la prestación correspondiente, y se devuelven las primas pagadas. En general, no se contempla si la causa de la dependencia es un accidente, pero suele ser de 1 año cuando se deriva de enfermedades físicas y de 3 años si éstas son neuropsiquiátricas. Sólo en 5 de las 17 entidades aseguradoras se establecen plazos de carencia.
- (h) *Franquicia*: Es el periodo transcurrido desde que se acepta el siniestro hasta que se empieza a hacer efectivo el pago. Durante ese periodo la aseguradora queda libre de pagar la prestación que le corresponde al asegurado. De las 17 entidades, sólo se han encontrado 3 que contemplan dicho plazo, siendo éste de 3 o 6 meses.
- (i) *Forma y plazo de la prima a pagar*: Respecto a la forma de realizar el pago puede tratarse de una *prima nivelada*, donde el pago será constante, o una *prima pura actuarial* cuyo importe irá variando en función de la edad. Por otro lado, también se pueden pagar como prima única o como prima periódica; esta última fraccionada en meses, trimestres o semestres.
- (j) *Otras características*: Algunas compañías tienen en cuenta la mejora de la situación de dependencia y otras establecen límites en la edad de renovación.

Cabe añadir que la **contratación** del seguro de dependencia puede ser **individual o colectiva**. En el primer caso el tomador pacta el contrato de forma individual, de tal manera que, a su vez, es el asegurado del mismo.

Sin embargo, en el seguro colectivo hay un solo tomador para ofrecer cobertura a varios asegurados pertenecientes a un mismo grupo, en cuyo caso existen segu-

ros para empleados (empresa-empleados), para profesionales (ente profesional-grupo de profesionales) y para no profesionales (ente no profesional-pertencientes a ese grupo).

## **4. ANÁLISIS ACTUARIAL DE LOS SEGUROS DE DEPENDENCIA**

El estudio desde el punto de vista actuarial de la dependencia<sup>5</sup> tiene cierta similitud con el análisis de la incapacidad, dado que, respecto del análisis exclusivo de la contingencia de fallecimiento, supone la introducción de nuevos estados (distintos grados de incapacidad o dependencia), la posibilidad añadida de agravamiento o mejora (pasar de un grado de incapacidad o dependencia a otro) e incluso de la vuelta a la vida autónoma.

En este subepígrafe vamos a obtener las ecuaciones que se necesitan para calcular las primas de las distintas compañías de las que hemos podido obtener información concreta de sus precios.

### **4.1. Axa**

El producto que ofrece Axa es muy sencillo desde el punto de vista actuarial y está suficientemente estudiado desde el punto de vista teórico. Es un seguro temporal, anual, renovable, con prima única (aunque se puede fraccionar) y con pago de un capital único, donde se asegura la dependencia severa y la gran dependencia, pagando en este último caso el doble de capital que en el primero. No hay por lo tanto posibilidad de agravamiento ni de reversibilidad. Los datos de las primas de Axa comprenden desde los 18 años hasta los 70 años.

### **4.2. Agrupació Mutua**

Esta empresa ofrece dos productos relacionados con la dependencia: Una Renta Vitalicia y un Seguro de Capital. En este caso, las primas que nos han proporcionado empiezan en los 35 años y terminan a los 71 años de edad.

#### **4.2.1. Seguro de Renta Vitalicia**

Este producto es bastante complejo desde el punto de vista actuarial, si bien sólo cubre la gran dependencia. Proporciona, como garantía principal, una renta men-

---

<sup>5</sup> Existen muchos estudios actuariales, donde han ido incorporando diferentes grados de dependencia, reversibilidad del grado de dependencia, seguros de capital, seguros de rentas, carencia, franquicia, etc... De entre todos ellos destacamos: Vicente *et al.* (2007), Alcañiz *et al.* (2011), Alegre *et al.* (2004), Alegre *et al.* (2006), Alegre *et al.* (2008), Artís *et al.* (2007), Pociello *et al.* (2001), Ricote (2003) y Sánchez (2009), entre otros.



sual pagadera hasta el fallecimiento o recuperación de la autonomía y como garantía complementaria un capital asegurado en caso de gran dependencia, además de asistencia. La prima es nivelada, pagadera mientras el asegurado sea autónomo. Hay un periodo de carencia de 1 año con carácter general<sup>6</sup>, de tal forma que si el asegurado fallece o pasa a gran dependencia durante ese periodo de tiempo, se le devuelve la prima pagada (contraseguro o reembolso de primas). También existe una franquicia de tres meses, de tal forma que una vez ocurrido el siniestro, los tres primeros meses no se le abonará ninguna cantidad. Existe participación en beneficios, quedando limitada la revalorización de las garantías al crecimiento del IPC.

La valoración actuarial de la franquicia ha sido determinada por Sánchez (2009), mediante la utilización de valores mensuales, lo cual complica excesivamente el cálculo de la prima, siendo, de todas formas, un valor aproximado el que se obtiene. Por ese motivo, en este trabajo vamos a proponer un método también aproximado, que se basa en ajustar los valores de la cuantía esperada del primer año de cobro de la prestación, siendo el resto de años, recogido por una renta vitalicia.

Para plantear la ecuación de equivalencia nos vamos a basar en el estudio dinámico, para lo cual se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones:

- Se ha calculado para el caso de primas anuales<sup>7</sup>.
- La renta contratada en caso de entrar en gran dependencia es mensual, vitalicia, constante, de cuantía R.
- El primer sumando del segundo miembro de la ecuación (1) recoge el reembolso de primas en caso de que el asegurado fallezca o pase a gran dependiente durante el periodo de carencia, que hemos considerado de duración un año.
- Cada uno de los siguientes sumandos del segundo miembro de la ecuación (1), recoge el riesgo que representa la entrada en dependencia durante los restantes años. A su vez, cada uno de dichos sumandos se compone de dos elementos:
  - El primero está ajustado para recoger el efecto de la franquicia ( $15/4 R$ ).
  - El segundo nos permite sumar actuarialmente el resto de términos de la renta hasta que el asegurado dependiente fallezca, por lo tanto se ha utilizado una renta vitalicia, mensual para su valoración.

---

<sup>6</sup> Se eleva a tres años si es como consecuencia de demencia o enfermedad neuropsiquiátrica y no hay carencia en el caso de que sea consecuencia de accidente.

<sup>7</sup> También existe la posibilidad de pago mensual, trimestral o semestral.

$$\begin{aligned}
\Pi \ddot{a}_x^{aa} &= \Pi(1-p_x^{aa}) v^{1/2} + {}_1/\varepsilon_x^{ad3} \left( \frac{15}{4} R v^{1+1/2} + 12 R {}^{(12)}\ddot{a}_{x+2}^{d3} v^2 \right) + \\
&+ {}_2/\varepsilon_x^{ad3} \left( \frac{15}{4} R v^{2+1/2} + 12 R {}^{(12)}\ddot{a}_{x+3}^{d3} v^3 \right) + \\
&+ {}_3/\varepsilon_x^{ad3} \left( \frac{15}{4} R v^{3+1/2} + 12 R {}^{(12)}\ddot{a}_{x+4}^{d3} v^4 \right) + \\
&+ \dots + {}_{\omega-x-2}/\varepsilon_x^{ad3} \left( \frac{15}{4} R v^{\omega-x-2+1/2} + 12 R {}^{(12)}\ddot{a}_{\omega-1}^{d3} v^{\omega-x-1} \right) + \\
&+ {}_{\omega-x-1}/\varepsilon_x^{ad3} \left( \frac{15}{4} R v^{\omega-x-1+1/2} + 12 R {}^{(12)}\ddot{a}_{\omega}^{d3} v^{\omega-x} \right) = \\
&= \underbrace{\Pi(1-p_x^{aa})v^{1/2}}_{\text{Contraseguro}} + \underbrace{\sum_{t=1}^{\omega-x-1} t/\varepsilon_x^{ad3} \left( \frac{15}{4} R v^{t+1/2} + \frac{12 R {}^{(12)}\ddot{a}_{x+t+1}^{d3} v^{t+1}}{\text{Ajuste Franquicia}} \right)}_{\text{Renta vitalicia por entrar en Gran Dependencia}}
\end{aligned} \tag{1}$$

donde:

$\Pi$  = Prima anual constante.

$\ddot{a}_x^{aa}$  = Valor actual de una renta prepagable, unitaria, pagadera a un individuo de edad  $x$ , mientras siga en estado autónomo.

$1-p_x^{aa}$  = Probabilidad de que un individuo autónomo de edad  $x$ , no siga en ese estado a la edad  $x+1$ . Puede ser por fallecimiento o por pasar a dependiente.

$v^t$  = Factor financiero de actualización. Equivalente a  $(1+i)^{-t}$ , siendo  $i$  el tipo de interés de valoración.

${}_t/\varepsilon_x^{ad3} = {}_t p_x^{aa} \varepsilon_{x+t}^{ad3}$  = Probabilidad de que un individuo autónomo de edad  $x$  pase a gran dependiente, exactamente a la edad  $x+t$ . Se ha utilizado esta notación por su similitud con el tanto de incapacidad diferido. Esta probabilidad se puede obtener como el producto de la probabilidad de que un individuo autónomo de edad  $x$  alcance la edad  $x+t$  en estado autónomo ( ${}_t p_x^{aa}$ ) por la probabilidad de que un individuo autónomo pase a dependiente grado 3 a la edad  $x+t$  ( $\varepsilon_{x+t}^{ad3}$ ).

$R$  = Cuantía mensual de la renta contratada.

$\frac{15}{4}R$  = Suma anualizada de la cuantía esperada durante el primer año que el individuo pase a dependiente, como consecuencia de la franquicia.

${}^{(12)}\ddot{a}_{x+t+1}^{d3}$  = Valor actual de una renta vitalicia, prepagable, fraccionaria, mensual, pagadera a un gran dependiente de edad  $x+t+1$ .

A su vez,

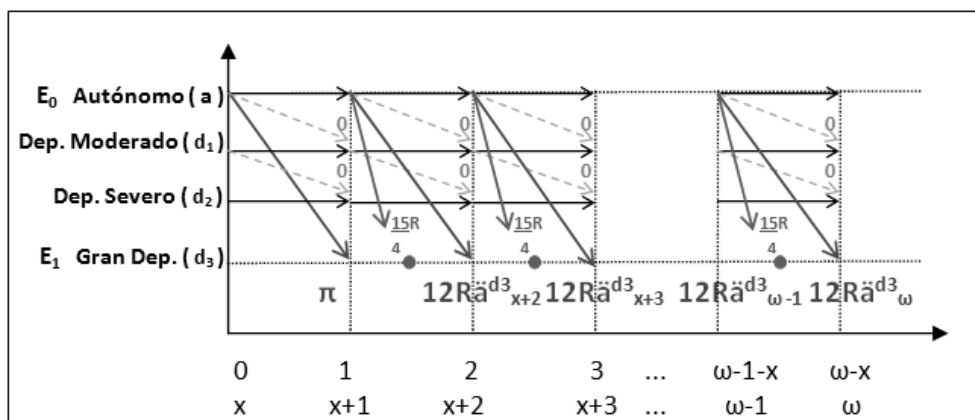
$${}^{(12)}\ddot{a}_{x+t+1}^{d3} = \underbrace{\ddot{a}_{x+t+1}^{d3}}_{\text{Renta ordinaria}} - \underbrace{\frac{11}{24}}_{\text{Ajuste fraccionamiento}} = \sum_{s=0}^{\omega-x-t-1} v^s {}_s p_{x+t+1}^{d3d3} - \frac{11}{24} \tag{2}$$

donde:

${}_s p_{x+t+1}^{d3d3}$  = Probabilidad de que un gran dependiente de edad  $x + t + 1$  siga en el mismo estado a la edad  $x + t + 1 + s$ .

$-\frac{11}{24}$  = Factor de ajuste para las rentas constantes, vitalicias, fraccionarias, mensuales, respecto de las ordinarias, constantes, vitalicias, anuales.

El esquema 1 recoge todo ello, si bien se ha incluido el estado dependiente moderado y el estado dependiente severo, cuya cuantía es cero al no estar contemplada esta contingencia en el seguro.



**Esquema 1**

Primas y prestaciones del seguro de Renta Vitalicia de Agrupación.

(Fuente: Elaboración propia)

#### 4.2.2. Seguro de dependencia

Consiste en el cobro de un capital en caso de que el asegurado entre en gran dependencia, a cambio del pago de una prima, bien hasta su fallecimiento o bien hasta que entre en gran dependencia. Como es un seguro suficientemente conocido no vamos a entrar en más detalles.

### 5. COMPARACIÓN DEL PRECIO DE LOS SEGUROS DE DEPENDENCIA EN ESPAÑA

Una vez realizado el estudio actuarial de los seguros para los que se ha conseguido el importe de las primas, se va a analizar el precio de los seguros de depen-

dencia en España. Se comparará el precio de los seguros de aquellas compañías para los que se haya podido obtener suficiente información, con los precios obtenidos a partir de las tablas de dependencia que se han elaborado por la literatura académica en España. Este ejercicio puede permitirnos conocer cuál es la política de precios que siguen las compañías y si utilizan alguna de las tablas teóricas. En caso de que sea así, se intentará analizar la rentabilidad actuarial<sup>8</sup> de las operaciones, entendiendo ésta como una medida de la rentabilidad que ofrece un producto asegurador, teniendo en cuenta las probabilidades de ocurrencia.

Sólo ha sido posible obtener la información necesaria para hacer el análisis de dos aseguradoras: Axa y Agrupació. A la hora de hacer la comparación, se ha tenido en cuenta una serie de hipótesis:

- (a) Se han utilizado inicialmente los datos de probabilidad de que un autónomo pase a dependencia de las tablas de Pociello *et al.* (2001) y Artís *et al.* (2007). Estas dos tablas tienen el inconveniente de que las probabilidades que ofrecen son para edades comprendidas entre 65 y 99 años de edad (mientras que las compañías ofertan el producto a personas mucho más jóvenes, a partir de 18 años, y con un límite superior de 71 años) y sólo para la dependencia considerada globalmente, es decir, sin particularizar por grados; con lo cual la intersección sólo abarca desde los 65 hasta los 70 o 71 años.
- (b) Para pasar de los datos agregados de dependencia que aparecen en las tablas de Pociello y en las de Artís a los datos de dependencia según el grado, se ha seguido el siguiente método: Se ha distribuido la probabilidad total de dependencia entre los distintos grados, en función de la proporción que cada grado tiene sobre la “esperanza de vida restante” respecto de la total. Los datos de esperanza de vida restante en cada estado se han obtenido de Alcañiz *et al.* (2011). Esta proporción se ha asignado de tal manera que se ha repartido la probabilidad de dependencia total de Artís y Pociello a los distintos grados de dependencia. A las tablas así obtenidas las denominaremos, respectivamente, Artís-Alcañiz y Pociello-Alcañiz<sup>9</sup>. La fórmula de asignación aplicada es la siguiente:

$$e_x^{ad_2} = e_x^{ad} \frac{e_x^{d_2}}{e_x^d} \quad (3)$$

donde,  $e_x$ , es la esperanza de vida restante en el grado de dependencia correspondiente. Así,  $d$  indica dependencia total (conjunta para los tres

---

<sup>8</sup> Es una rentabilidad análoga a la financiera, si bien, en la actuarial tenemos que tener en cuenta las distintas probabilidades que aparecen en la operación. También se puede definir como el tipo de interés que, aplicado a la operación con una de las tablas de mortalidad permite obtener la misma prima que con las tablas de mortalidad de referencia. Véase a este respecto Devesa (2013).

<sup>9</sup> Todas las tablas que se comentan están a disposición de los que las soliciten.

grados) y  $d_2$ , dependencia severa. Además, como los datos de la esperanza de vida restante son quinquenales, hemos utilizado una aproximación lineal para obtener los valores intermedios.

- (c) Se ha supuesto que la mortalidad de los dependientes es igual a la de la población general. Como se comenta en Alcañiz *et al.* (2011), en España no existen estudios específicos que justifiquen que la probabilidad de muerte es mayor para los dependientes<sup>10</sup>. Esta hipótesis también ha sido establecida en el denominado “Modelo Danés” por Haberman y Pitacco (1999), para el caso de los discapacitados<sup>11</sup>. Por lo tanto, para la mortalidad de activos y dependientes se han utilizado las tablas unisex del INE (2012) para el año 2011.
- (d) Se ha utilizado un tipo de interés del 3%<sup>12</sup> para Agrupació, mientras que para Axa se ha aplicado el 0% porque es el que figura en su nota técnica.

### 5.1. El seguro de dependencia comercializado por Axa

En primer lugar vamos a comparar las primas proporcionadas por Axa con las que obtenemos al aplicar las probabilidades de dependencia de las Tablas Pociello-Alcañiz y Artís-Alcañiz.

Como se puede ver en el Gráfico 1 para el caso de dependencia severa, existe bastante diferencia entre las primas calculadas con los tres métodos, siendo los valores más próximos a los de Axa, los que hemos construido con el nombre de Pociello-Alcañiz. Para el caso de Gran Dependencia, Gráfico 2, ocurre algo similar: las tablas de Pociello-Alcañiz se aproximan más a las de Axa pero siguen estando lejos, excepto en las últimas edades de la comparación. Esta diferencia entre las primas calculadas por Axa y las obtenidas con las tablas que hemos construido no nos permite obtener una razonable rentabilidad actuarial para la operación<sup>13</sup>.

La conclusión es que la aseguradora no ha tenido en cuenta las tablas de dependencia que existen en la literatura académica. Dando por supuesto que las tablas iniciales de Pociello y las de Artís están bien construidas y aunque puede haber diferencias en cuanto a la definición de lo que es dependiente en cada país, pensamos que tampoco parece probable que hayan utilizado tablas de dependencia de otros países por la gran diferencia entre las primas. La tercera posibilidad es

---

<sup>10</sup> La explicación de este hecho se basa en la mayor atención, control médico, cuidados generales y específicos que reciben.

<sup>11</sup> Esta hipótesis también se ha utilizado, entre otros, en: Albarrán *et al.* (2005) y Crimmins *et al.* (1994).

<sup>12</sup> Es un tipo de interés conservador y que no supera el máximo permitido por la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones para el cálculo de la provisión de los Seguros de Vida, para el año 2013, que fue de 3,34%.

<sup>13</sup> En la mayoría de los casos se han obtenido valores muy altos, que no sirven para comparar con otros productos.

que “vendan” un producto a un precio inferior al de mercado para fidelizar a sus propios clientes que están demandando un seguro de dependencia.

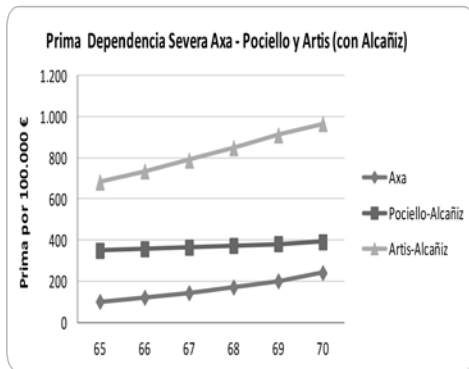


Gráfico 1

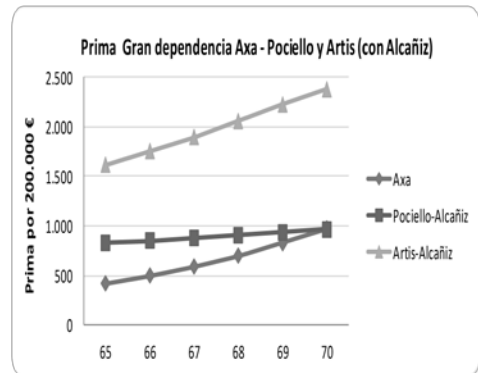


Gráfico 2

(Fuente: Elaboración propia)

A la vista de todo lo anterior, pensamos que también puede ser interesante la utilización de unas tablas obtenidas a partir de las primas ofrecidas por Axa, para poder compararlas con el resto de seguros de dependencia. Sin embargo, como, para poder llevar a cabo la comparación con los seguros comercializados por Agrupació, necesitamos tener todas las probabilidades hasta los 100 años, no se ha podido llevar a cabo este análisis, si bien consideramos que puede ser interesante en un futuro ampliar las tablas de Axa hasta los 100 años de edad.

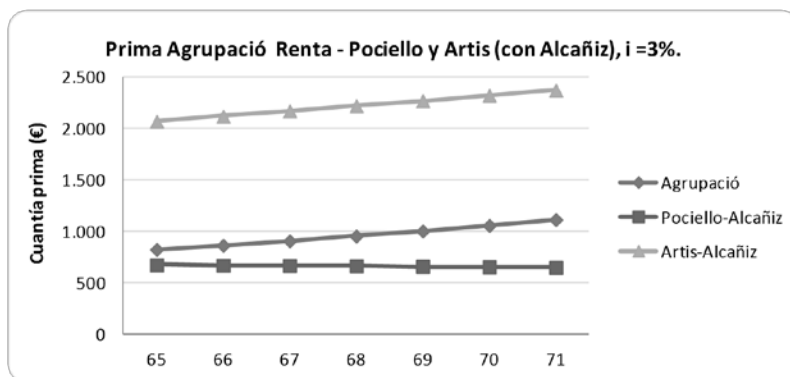
## 5.2. El seguro de dependencia comercializado por Agrupació

Compararemos en primer lugar las primas proporcionadas por Agrupació con las que obtenemos al aplicar las probabilidades de dependencia de las Tablas Pociello-Alcañiz y Artis-Alcañiz.

### 5.2.1. Seguro de Renta Vitalicia

Como se puede ver en el Gráfico 3, existe bastante diferencia entre las primas calculadas con las dos tablas, siendo la más próxima y por debajo de las de Agrupació, la que hemos construido con la de Pociello-Alcañiz, mientras que la calculada con la de Artis-Alcañiz está muy por encima de las otras dos. Concretamente la de Pociello-Alcañiz tiene una prima ligeramente decreciente, lo cual es factible teniendo en cuenta que la prima es vitalicia<sup>14</sup>.

<sup>14</sup> Vicente *et al.* (2007) también obtienen primas vitalicias casi constantes para las diferentes edades.

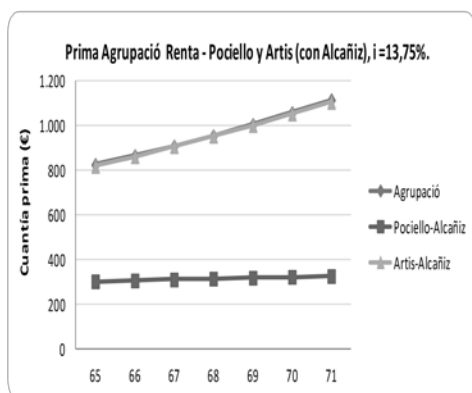


**Gráfico 3**

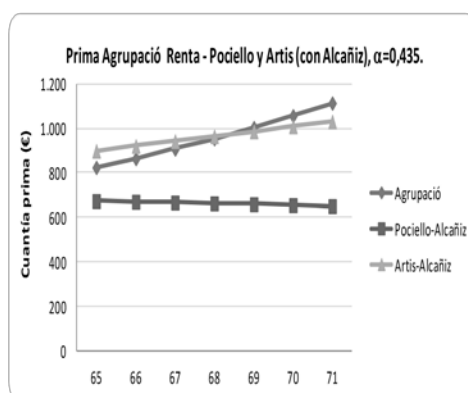
(Fuente: Elaboración propia)

Esta diferencia entre las primas calculadas por Agrupació y las obtenidas con las tablas que hemos construido sólo nos permite obtener unos valores razonables para la rentabilidad actuarial en el caso de comparar las primas de Agrupació con las de Pociello-Alcañiz; en concreto, la rentabilidad actuarial varía entre 0,6% para la edad de 65 años y  $-4,27\%$  para la de 71.

Sin embargo, para un tipo de interés del 13,75% las curvas que representan las primas de Agrupació y Artis-Alcañiz, prácticamente se superponen, como se puede ver en el Gráfico 4. Es decir, con las tablas de Artis-Alcañiz y un tipo de interés técnico del 13,75%, se obtiene el mismo resultado que el calculado por Agrupació. En definitiva, las dos curvas tienen la misma forma pero para igualarlas hay que aumentar mucho el tipo de interés o, la interpretación más plausible, se han utilizado probabilidades más bajas que las de Artis-Alcañiz. Así, en el Gráfico 5 se puede observar que multiplicando las probabilidades de Artis-Alcañiz por un coeficiente  $\alpha = 0,435$  se obtienen unas primas muy similares, para un tipo de interés del 3%.



**Gráfico 4**

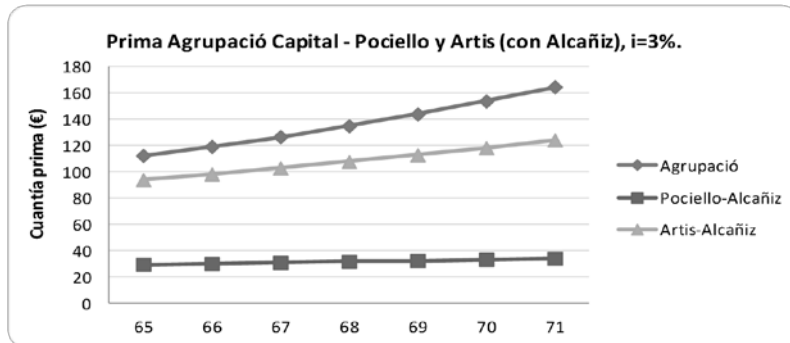


**Gráfico 5**

(Fuente: Elaboración propia)

## 5.2.2. Seguro de Capital

Veámoslo ahora para el seguro de **capital** en caso de dependencia. La prima calculada con Artís-Alcañiz es más cercana a la proporcionada por Agrupació, quedando mucho más alejada la de Pociello-Alcañiz, como se puede ver en el Gráfico 6.

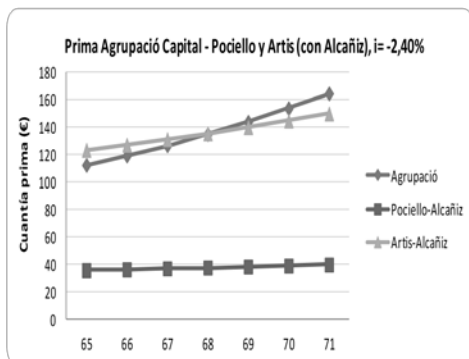


**Gráfico 6**

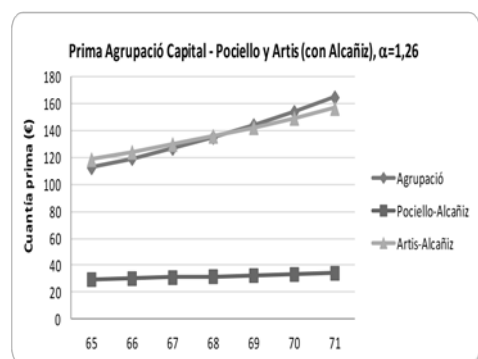
(Fuente: Elaboración propia)

Esta diferencia entre las primas calculadas por Agrupació y las obtenidas con las tablas que hemos construido sólo nos permite obtener unos valores razonables para la rentabilidad actuarial en el caso de comparar las primas de Agrupació con las de Artís-Alcañiz; en concreto varían entre  $-0,14\%$  para la edad de 65 años y  $-4,20\%$  para la de 71 años.

Por otro lado, para un tipo de interés del  $-2,40\%$  (rentabilidad actuarial) las curvas que representan las primas de Agrupació y Artís-Alcañiz, son muy similares, como se puede ver en el Gráfico 7. En definitiva, las dos curvas tienen una forma similar pero para igualarlas hay que disminuir algo el tipo de interés o, nuevamente, la interpretación más plausible: se han utilizado probabilidades más altas que las de Artís-Alcañiz. Así en el Gráfico 8 se puede observar que multiplicando las probabilidades de Artís-Alcañiz por un coeficiente  $\alpha = 1,26$  se obtienen unas primas muy similares, para un tipo de interés del  $3\%$ .



**Gráfico 7**



**Gráfico 8**

(Fuente: Elaboración propia)



Si tenemos en cuenta los productos de Agrupació, vemos que en uno de ellos, Renta Vitalicia, necesitaríamos unas primas de alrededor de un 60% inferiores a las de Artís-Alcañiz, mientras que en el Seguro de Capital, habría que multiplicarlas por 1,26, lo cual nos lleva a afirmar que se han utilizado distintos criterios para cada uno de los productos por parte de Agrupació.

## 6. CONCLUSIONES

Los seguros de dependencia que se comercializan en España están muy lejos de poder ofrecer una buena protección frente al riesgo de dependencia, ya que las cuantías máximas de las rentas y de los capitales son muy bajas. Todo ello puede explicarse por su reciente implantación, por la falta de datos estadísticos para el cálculo de la prima y por ser considerado como un seguro complementario del ofrecido por la previsión pública.

Además, en general, las aseguradoras no parecen estar interesadas en ofrecer cobertura para la dependencia moderada, siendo éste el único grado cuya contratación no presenta ventajas fiscales.

En otros países, como EE.UU., existen seguros más sofisticados, principalmente porque la experiencia es mayor (en EE.UU. desde 1974) y por el bajo nivel de atención pública a la dependencia. Por tanto, en el caso español habrá que ser cautos y esperar unos años para ver la evolución de los seguros de dependencia, en función de la línea que siga la cobertura pública, que previsiblemente va a ser a la baja.

Cada aseguradora suele ofrecer productos diferentes para ocupar las oportunidades que van dejando el resto. Al parecer todas tienen como objetivo común no dejar escapar a sus propios clientes, ofreciéndoles un producto con ciertas singularidades.

Otra medida para incentivar la demanda de seguros privados sería la de aproximar el caso español al alemán, es decir, excluir del sistema a aquellos dependientes con una renta media-alta, obligándoles a contratar un seguro privado de dependencia.

En el presente trabajo se ha propuesto un nuevo método aproximado para calcular las primas de los seguros en el caso de que exista franquicia. Hasta ahora, en los trabajos anteriores se había optado por mensualizar todos los datos, lo cual no deja de ser una forma aproximada pero mucho más compleja que la que se propone aquí.

Del análisis efectuado con las tablas que hemos tenido que elaborar para poder obtener las primas de los productos comercializados por las dos únicas compañías de las que se ha podido obtener información, se puede concluir lo siguiente:

- En el caso de Axa las primas ofertadas por la compañía tienen un comportamiento irregular, ya que son constantes desde los 18 hasta los 55 años y luego crecen rápidamente. Parece desprenderse que la aseguradora no ha tenido en cuenta las tablas de dependencia que existen en la literatura académica, que consideramos que están bien elaboradas. Por otro lado, aunque puede haber diferencias en cuanto a la definición de lo que es dependiente en cada país, pensamos que tampoco parece probable que hayan utilizado tablas de dependencia de otros países por la gran diferencia entre las primas. La tercera posibilidad es que “vendan” un producto a un precio inferior al de mercado para fidelizar a sus propios clientes, que están demandando un seguro de dependencia.
- En el caso de Agrupació, podemos distinguir:
  - Para el Seguro de Renta Vitalicia, se observa que las primas de Agrupació y las calculadas con las tablas de Artís-Alcañiz tienen la misma forma pero para igualarlas hay que aumentar mucho el tipo de interés o, la interpretación más plausible, se han utilizado probabilidades más bajas por parte de Agrupació que las de Artís-Alcañiz. Así, multiplicando las probabilidades de Artís-Alcañiz por un coeficiente  $\alpha = 0,435$  se obtienen unas primas muy similares.
  - Para el Seguro de Capital, se observa que para un tipo de interés del -2,40% las curvas que representan las primas de Agrupació y Artís-Alcañiz, son muy similares. En definitiva, las dos curvas tienen una forma similar pero para igualarlas hay que disminuir algo el tipo de interés o, la interpretación más plausible, se han utilizado probabilidades más altas que las de Artís-Alcañiz. Así, se puede observar que multiplicando las probabilidades de Artís-Alcañiz por un coeficiente  $\alpha = 1,26$  se obtienen unas primas muy similares.

Todo lo anterior nos lleva a concluir que las primas de Agrupació presentan unas curvas similares a las que se deducen de las Tablas de Artís-Alcañiz pero sus probabilidades son muy diferentes, siendo menores las de Agrupació en el caso del seguro de renta vitalicia y mayores en el del seguro de capital, lo cual parece indicar un cierto grado de incongruencia en el cálculo de los precios de los seguros de Agrupació.

Otra de las principales aportaciones del trabajo ha sido la de construir dos tablas a partir de información de tres trabajos diferentes, para poder concluir que las primas de las dos aseguradoras que hemos utilizado en el estudio no parecen utilizar ninguna de las tablas conocidas. Parece desprenderse de todo ello que no siguen un criterio técnico sino de fidelización de los clientes. Incluso resulta curioso que los dos productos de Agrupació tienen probabilidades diferentes: para el caso del seguro de renta vitalicia con probabilidades mucho más bajas que las de Artís-Alcañiz, mientras que para el seguro de capital son algo más elevadas.

Conviene destacar que todas estas conclusiones hay que tomarlas con cautela ya que hemos tenido que generar las tablas que utilizamos para la comparación a

partir de dos fuentes diferentes: las tablas de Pociello o de Artís, combinadas con los datos de esperanza de vida restante de Alcañiz *et al.* Además, sólo ha sido posible obtener información de primas de dos aseguradoras. En ningún momento se ha pretendido elaborar unas tablas técnicamente buenas desde el punto de vista estadístico, sino obtener unas tablas sencillas a partir de las que existían.

Un reto para futuras investigaciones es tratar de elaborar unas tablas de dependencia para edades anteriores a los 65 años (por ejemplo a partir de las primas de Axa) porque estos individuos deberían ser el principal objetivo de las aseguradoras, como así lo demuestra el abanico de edades para las que se comercializan los distintos productos. También sería interesante ampliar el número de aseguradoras que den suficiente información para poder comparar sus precios con los obtenidos a partir de las tablas que hemos construido.

## BIBLIOGRAFÍA

Albarrán, I.; Ayuso, M.; Guillén, M. y Monteverde, M. (2005). "A multiple state model for disability using the decomposition of death probabilities and cross-sectional data", *Communications in Statistics: Theory and Methods*, vol. 24, pp. 2063-2076.

Alcañiz, M.; Alemany, R.; Bolancé, C. y Guillén, M. (2011). "El coste de los cuidados de larga duración en la población española: análisis comparativo entre los años 1999 y 2008", *Revista de Métodos cuantitativos para la economía y la empresa*, 12, Diciembre 2011, pp. 111-131.

Alegre, A.; Pons, M. A.; Sarrasí, F. J.; Varea, J. (2008). "Seguro de fallecimiento con anticipación parcial de la prestación por dependencia", *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 14, pp. 47-72.

Alegre, A.; Pons, M. A.; Sarrasí, F. J.; Varea, J. (2006). "Rentas y seguros privados de dependencia: un complemento a las prestaciones públicas de dependencia", *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, Tercera Época, 12-2006, Madrid.

Alegre, A.; Pociello, E., Pons, M.A.; Sarrasí, F. J.; Varea, J. (2004). "Modelo discreto de transiciones entre estados de dependencia", *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, Tercera Época-10. Año 2004.

Artís, M.; M. Ayuso; M. Guillén y M. Monteverde (2007). "Una estimación actuarial del coste individual de la dependencia en la población de mayor edad en España", *Estadística Española*, Vol. 49, nº 165, pp. 373-402.

AXA (2012). *Vida Dependencia. Parte II*. Septiembre.

Crimmins, E., Hayward, M. y Saito, Y. (1994). "Changing mortality and morbidity rates and the health status and life expectancy of the older population", *Demography*, Vol. 31, pp. 159-175.

- Devesa, J.E. (2013). *Apuntes de Seguros de Vida*, Mimeo. Universidad de Valencia.
- Haberman, S. y Pitacco, H. (1999). *Actuarial Models for disability insurance*, CRC Press, London.
- INE (2012). *Tablas de Mortalidad de 2012*.
- Ministerio de Sanidad, Política Social e Igualdad (2011). *Informe del gobierno para la evaluación de la ley de promoción de la autonomía personal y atención a las personas en situación de dependencia*.
- Monteverde, M. (2004). *Discapacidades de las Personas Mayores en España: Prevalencia, Duraciones e Impacto sobre los Costes de Cuidados de Larga Duración*. Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona.
- Pedruelo, J. (2011). *Seguros Privados de Dependencia*, Fundación Mapfre, Madrid.
- Pociello, E. y J. Varea (2004). *El seguro de dependencia: una visión general*, Fundación Mapfre Estudios, Número 81, Madrid.
- Pociello, E.; Varea, J. y Martínez, A. (2001). "Construcción de tablas de dependencia: una aproximación metodológica", *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, Madrid.
- Ricote Gil, F. (2003). *El tratamiento actuarial de los periodos de carencia y el contraseguro de primas en el seguro de dependencia*. XI Congreso Asepuma XI, Oviedo.
- Sánchez, E. (2009). *Bases técnicas dinámicas del seguro de dependencia en España: una aproximación en campo discreto*, Fundación Mapfre, Instituto de Ciencias del Seguro, Madrid.
- Sánchez, E. y Castelblanque, J. (2005). "El Seguro de Dependencia (II). Experiencia Internacional y Reaseguro", *Trébol*, 34, Mapfre.
- SCOR Global Life (2012). *El Seguro de Dependencia*. Focus, octubre.
- Vicente, A.; E. Pociello y J. Varea (2004). "Cobertura de la dependencia: una comparación internacional", *Actuarios*, 22, mayo-junio, Dossier.
- Vicente, A.; E. Pociello y J. Varea (2007). "Elaboración de bases técnicas del seguro de dependencia", *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, Tercera Época, Número 10, Año 2004, pp. 9-26.
- Vidal, C. y Devesa, J.E. (2013). *Apuntes de Prestaciones y Seguros de Salud y Dependencia*. Mimeo. Universidad de Valencia.

## **IV. MÉTODOS ESTADÍSTICOS EN SEGUROS Y FINANZAS**

## Ponencia 10

# MODELOS ADITIVOS GENERALIZADOS APLICADOS AL ANÁLISIS DE LA PROBABILIDAD DE SINIESTRO EN EL SEGURO DEL AUTOMÓVIL

Zuleyka Díaz Martínez, José Fernández Menéndez, Antonio Heras Martínez, Eva del Pozo García y José Luis Vilar Zanón

### RESUMEN

Desde los años 90 del siglo pasado los Modelos Lineales Generalizados se han convertido en la herramienta estadística estándar para el análisis de la tarificación en el sector del seguro no vida y, en particular, en el sector del automóvil. De acuerdo con esta metodología las primas son calculadas tras un análisis de regresión en el que se toman como variables dependientes una serie de ratios —como el número de siniestros por unidad de tiempo o el importe de las indemnizaciones por unidad de tiempo de duración de la póliza— y se toman como variables explicativas una serie de factores relacionados fundamentalmente con las características del tomador de la póliza, las características del objeto asegurado o factores geográficos. Estas variables explicativas, aunque con frecuencia son continuas, se suelen discretizar para convertir las en categóricas. De este modo, se pueden tener en cuenta de forma sencilla posibles efectos no lineales de las variables explicativas sobre las variables dependientes, pero con algunos inconvenientes, como el de la arbitrariedad a la hora de establecer las distintas categorías. En este trabajo se pretende mostrar cómo solventar alguno de estos problemas mediante el uso de Modelos Aditivos Generalizados. Se trata de modelos de regresión basados en polinomios continuos por intervalos (*splines*) que proporcionan una potente alternativa a la discretización como herramienta para introducir variables explicativas continuas con efectos no lineales sobre la variable dependiente.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los Modelos Lineales Generalizados (GLM –*Generalized Linear Models*–), introducidos a comienzos de los años 70 (Nelder y Wedderburn, 1972), sintetizan dentro de un marco homogéneo un conjunto muy amplio de métodos de regresión (logística, Poisson, gamma, etc.), previamente consideradas de forma independiente, y se han convertido en una de las principales herramientas de análisis es-

tadístico en toda clase de áreas. La utilización de un mismo enfoque general para formular una serie de problemas en principio heterogéneos no solo resulta interesante desde un punto de vista teórico, sino que permite trasladar con facilidad de unos a otros de estos problemas algoritmos de estimación, software y métodos de cálculo numérico, herramientas de diagnóstico de los resultados, etc. Todo ello explica la amplia difusión que han tenido los GLM hasta el punto de convertirse en el enfoque estándar para abordar los métodos de regresión para los que resulta aplicable, especialmente desde la aparición de la obra de referencia sobre la materia, McCullagh y Nelder (1989), cuya primera edición data de 1983. En el campo de la Estadística Actuarial el uso de GLM comenzó en los años 90, a partir de trabajos como los de Brockman y Wright (1992) o Haberman y Renshaw (1996) y ha acabado convirtiéndose en una herramienta estándar para cuestiones como la tarificación (Guillén Estany *et al.*, 2005; Ohlsson y Johansson, 2010).

Los GLM constituyen una generalización de los clásicos Modelos Lineales (LM - *Linear Models*). En uno de estos LM se asume que el valor esperado de la variable dependiente condicionado a los valores de las variables independientes se puede expresar como una combinación lineal de esos valores de las variables independientes:

$$E(Y|x_i) = \sum_i \beta_i x_i$$

La diferencia entre los valores observados de  $Y$  y los estimados por medio del “predictor lineal”  $\eta = \sum_i \beta_i x_i$  serán unos términos de error  $\varepsilon$  que siguen una distribución normal de media cero y varianza constante  $\sigma^2$ . El papel privilegiado que juega en los LM el término de error se pierde en alguna medida en los GLM. Para formular éstos se parte del hecho de que para un LM la variable dependiente, condicionada a los valores de las  $x_i$ , sigue una distribución de probabilidad normal de media dada por el predictor lineal y varianza  $\sigma^2$ :

$$Y | x_i \sim N\left(\eta = \sum_i \beta_i x_i, \sigma^2\right)$$

Un GLM generaliza la expresión anterior en tres sentidos. Por una parte, la distribución de la variable dependiente condicionada a los valores de las independientes ya no tiene que ser normal, sino que puede ser cualquiera perteneciente a la familia exponencial, que incluye no solo a la normal, sino a muchas otras de las más usadas en las aplicaciones, como la binomial, Poisson, gamma, etc.

Por otra parte, la esperanza de la variable dependiente,  $\mu = E(Y|x_i)$ , ya no viene dada directamente por el valor del predictor lineal  $\eta$ , sino que la relación entre ambas cantidades viene dada por una “función de enlace” (*link function*) “ $l$ ” de forma que se tiene que  $\eta = l(\mu)$ .

Por último, la varianza de  $Y | x_i$  deja de ser una constante  $\sigma^2$  y se convierte en una función de  $\mu$ :  $var(Y | x_i) = \varphi \cdot V(\mu)$ , donde  $\varphi$  es un parámetro de “dispersión” y  $V(\mu)$  es la función de varianza.

Este planteamiento es, como se puede ver, mucho más amplio y general que el de los modelos LM, pero también, como cabe esperar, complica la estimación de los modelos, que ya no puede hacerse por mínimos cuadrados, sino que requiere de una estimación por máxima verosimilitud a través de un procedimiento iterativo de tipo Newton-Raphson denominado *Iteratively Reweighted Least Squares* (McCullagh y Nelder, 1989).

Una exposición detallada pero muy accesible de todo lo anterior puede verse en Dobson (2002).

Pese a su notable generalidad los GLM no están exentos de limitaciones. Una de las más relevantes deriva de su carácter de modelos “lineales”. Las variables explicativas  $x_i$  entran en el modelo a través del predictor lineal  $\eta$  que no es más que una combinación lineal de esas variables explicativas:  $\eta = \sum_i \beta_i x_i$ . Una forma de

introducir efectos no lineales en el modelo es discretizando las variables  $x_i$ , como se hace con las *tariff cells*: las variables independientes, aunque con frecuencia son continuas, como por ejemplo la edad del conductor de un vehículo, se suelen discretizar para convertirlas en categóricas. Las combinaciones de los distintos niveles de las variables explicativas utilizadas dan lugar a “celdas” para cada una de las cuales se calcula la prima adecuada que permite cubrir los costes derivados de las reclamaciones esperadas para las pólizas pertenecientes a cada celda. La discretización o categorización de las variables explicativas permite tener en cuenta de forma sencilla, aunque no muy precisa, posibles efectos no lineales de las variables explicativas sobre las variables dependientes (por ejemplo, el riesgo puede ser mayor tanto para conductores noveles como para los muy veteranos), pero tiene inconvenientes como la pérdida de información, una cierta -como mínimo- arbitrariedad a la hora de establecer los límites que determinan cada una de las celdas, la aparición de celdas con muy pocas observaciones para las que resulta difícil obtener estimaciones precisas, etc. Una alternativa más satisfactoria y elaborada viene dada por los Modelos Aditivos Generalizados (*Generalized Additive Models* –GAM–) introducidos por Hastie y Tibshirani (1990).

Los GAM son una generalización de los GLM de los que se diferencian únicamente porque el predictor lineal ya no es simplemente una combinación lineal de las variables explicativas, sino que es una combinación lineal de funciones de dichas variables explicativas, lo que permite introducir en el modelo todo tipo de efectos y relaciones no lineales entre variables:

$$\eta = \sum_i \beta_i f_i(x_i)$$

Como funciones  $f_i$  se pueden usar funciones suficientemente suaves de las  $x_i$  que cumplan algunos requisitos de continuidad, derivabilidad, etc. La opción más



frecuente consiste en utilizar *splines* (Wood, 2006), pero no es la única. Las características concretas de las funciones  $f_i$  deben ser calculadas como parte del proceso de estimación del modelo. Con esto el modelo pierde su carácter puramente paramétrico (ya no solo es necesario estimar los parámetros  $\beta_i$ ), con lo que es frecuente referirse a los GAM como modelos “semiparamétricos” (Wang, 2011), y suponen un buen compromiso entre los modelos lineales puramente paramétricos (fáciles de construir e interpretar, pero poco flexibles) y modelos totalmente no-paramétricos en los que las  $f_i$  serían completamente arbitrarias, lo que supondría modelos muy flexibles, pero difíciles de estimar y de interpretar (Faraway, 2006).

El objetivo de este trabajo es mostrar un ejemplo de aplicación de GAM al cálculo de la probabilidad de siniestro para una amplia muestra de una cartera de pólizas del sector del automóvil. Para hacer los cálculos se utilizará el paquete “mgcv” de R, paquete descrito en Wood (2006).

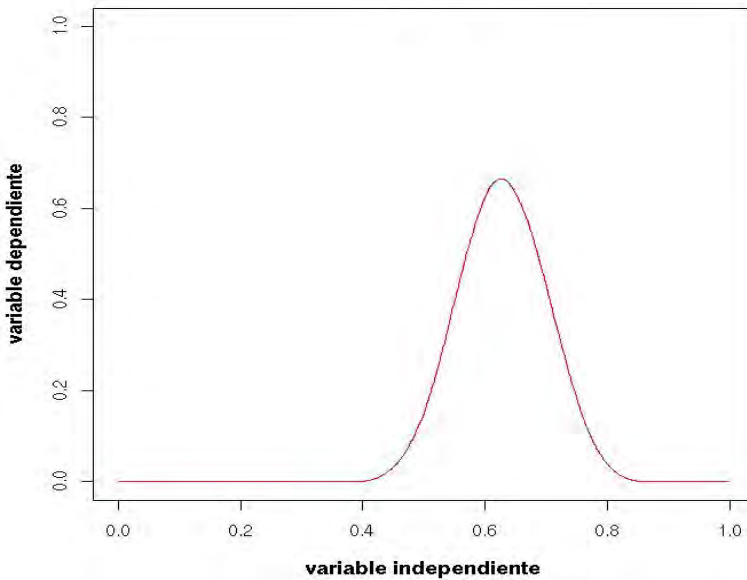
## 2. MODELOS ADITIVOS GENERALIZADOS

Los Modelos Aditivos Generalizados son modelos de regresión similares a los GLM pero en los que  $Y/x_i$  sigue una distribución de la familia exponencial en la que la media viene dada por  $\mu = I^{-1}\left(\sum_i \beta_i f_i(x_i)\right)$ . Las  $f_i$  son funciones suaves que

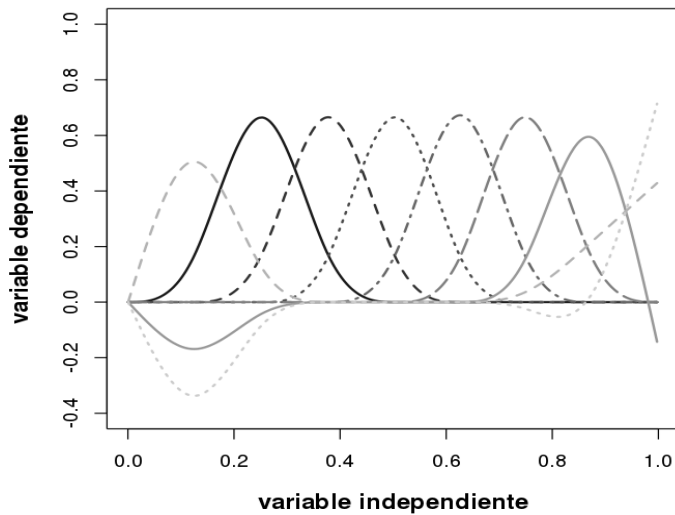
permiten reflejar efectos no lineales de las variables  $x_i$  sobre la variable  $Y$ . Una solución sencilla para tener en cuenta estos efectos no lineales hubiese sido incorporar en el predictor lineal términos cuadráticos, cúbicos, etc., de las variables explicativas (es decir, términos de la forma  $x^2$ ,  $x^3$ , etc.) de forma que el predictor deje de ser lineal y se convierta en un polinomio de las variables explicativas. Sin embargo, esta solución plantea problemas bien conocidos derivados del hecho de que los polinomios son funciones de soporte no acotado (su dominio se extiende sobre todo el eje real), de manera que, en general, cualquier intento de mejorar su ajuste en un punto determinado se consigue a expensas de empeorarlo en otros puntos muy alejados. Esto supone que los polinomios pueden proporcionar una solución adecuada cuando se busca un buen ajuste en el entorno de un punto concreto, pero no sobre todo un intervalo.

Una alternativa ampliamente utilizada consiste en emplear *splines*. Los *splines* son polinomios definidos sobre intervalos y que toman valor nulo fuera de esos intervalos. Con esto se consigue graduar el ajuste de la regresión de forma que los cambios que se produzcan para mejorar ese ajuste tengan un efecto local y no se extiendan más allá de los intervalos en los que están definidos los *splines* involucrados en cada caso. En las dos figuras siguientes se pueden observar un *spline* y un conjunto de ellos:

## spline



## Conjunto de splines



Los intervalos sobre los que se definen los *splines* vienen determinados por un conjunto de puntos denominados *knots*. Un conjunto de  $q - 2$  *knots* determinan  $q - 1$  intervalos, que pueden estar contenidos dentro de un intervalo acotado  $[a, b]$  o extenderse hasta  $-\infty$  y  $+\infty$ . Habitualmente se utilizan *splines* cúbicos, que son polinomios de

grado 3, con lo que cada uno de ellos queda determinado por 4 parámetros. En consecuencia el espacio vectorial de los *splines* formados por combinaciones lineales de polinomios cúbicos definidos sobre cada uno de los  $q-1$  intervalos determinados por  $q-2$  *knots* y nulos en el resto de intervalos, es un espacio de dimensión  $4(q-1)$ . Sin embargo, se introducen una serie de restricciones que reducen la dimensión de este espacio. Estas restricciones consisten en que se exige que los *splines* y sus primeras y segundas derivadas sean continuas en los  $q-2$  *knots*. Son entonces  $3(q-2)$  condiciones que hacen que la dimensión del espacio vectorial de los *splines* cúbicos definidos sobre el intervalo  $[a, b]$  sea  $4(q-1) - 3(q-2) = q+2$ . Para los *splines* denominados “naturales” también es habitual exigir que su derivada segunda se anule en los extremos del intervalo  $[a, b]$ , lo que da lugar a otras dos restricciones adicionales que hacen que finalmente la dimensión del espacio vectorial de los *splines* naturales cúbicos definidos por  $q-2$  *knots* sea  $q$ .

Existen muchas formas distintas de expresar una base de tal espacio vectorial. Una es, por ejemplo, la denominada base de potencias truncadas (Hastie *et al.*, 2008), que se obtiene a partir de potencias de funciones “parte positiva” de la forma  $(X - \xi_j)_+$ , en donde  $\xi_j$  es un *knot*, y que se definen como 0 si su argumento es negativo y como si este argumento es positivo.

En cualquier caso, si denominamos  $s_k$  a las funciones de la base del espacio de los *splines* cúbicos naturales definidos en un determinado intervalo, tendremos que cualquier función suave definida sobre ese intervalo se puede aproximar con una combinación lineal de las  $s_k$ . De acuerdo con esto, las funciones  $f_i$  del predictor lineal de los modelos GAM se podrán expresar como combinaciones lineales de las funciones  $s_k$ , y la estimación del predictor lineal se reduce a la estimación de los coeficientes de las combinaciones lineales de las funciones  $s_k$ . Esto equivaldría a minimizar la cantidad  $\|Y - X\beta\|^2$ , donde los valores de  $X$  serán los que adopten las funciones  $s_k$  en las observaciones disponibles.

Planteadas de esta manera la estimación de un GAM sería esencialmente idéntica a la estimación de un GLM. Sin embargo, existe una complicación adicional derivada de la mayor o menor “suavidad” (o “rugosidad”) exigida a las funciones que se estiman. Esta rugosidad depende fundamentalmente del número de *knots* que se utilicen, pues cuanto mayor sea este número mayor la rugosidad de las funciones estimadas, y un número de *knots* elevado conducirá a un sobreajuste.

Considerando que una medida global de la rugosidad de una curva viene dada por la expresión  $\int [f''(x)]^2 dx$ , conviene introducir en el proceso de estimación una penalización de esta rugosidad para evitar el sobreajuste. El objetivo del proceso de estimación será entonces minimizar la cantidad siguiente:

$$\|Y - X\beta\|^2 + \lambda \int [f''(x)]^2 dx$$

El parámetro  $\lambda$  se denomina parámetro de alisado y controla el grado de alisado (o de rugosidad) de la función estimada. Un valor bajo de  $\lambda$  hace que la rugosidad penalice poco, lo que conducirá a un sobreajuste (se ajusta el ruido además de la señal), mientras que un valor alto de  $\lambda$  hará que se penalice mucho esa rugosidad, con lo que se estimará una línea recta. El valor adecuado para este parámetro se suele seleccionar recurriendo a alguna variante de *cross-validation*, es decir, se van extrayendo observaciones de una en una, se ajusta el modelo para las observaciones restantes, se predice la respuesta correspondiente a la observación eliminada y se compara con el valor real omitido. Combinando los resultados para todas las observaciones se obtiene una medida global de ajuste del modelo. Finalmente se selecciona el valor de  $\lambda$  para el cual ese ajuste es mejor. En la práctica se suelen usar como medidas de ajuste las cantidades denominadas UBRE (*Un-Biased Risk Estimator*) o GCV (*Generalized Cross Validation*), según que el parámetro de dispersión sea conocido o estimado, respectivamente (Wood, 2006).

Por otra parte se puede ver con facilidad que la rugosidad global puede ser expresada como una forma cuadrática de los parámetros  $\beta$ :  $\int [f''(x)]^2 dx = \beta^t S \beta$ , con lo que el estimador de estos parámetros se puede expresar como:

$$\hat{\beta} = (X^t X + \lambda S)^{-1} X^t Y$$

y la *hat matrix*  $A$  que permite obtener los valores estimados a partir de los observados ( $\hat{\mu} = AY$ ) será  $A = X\hat{\beta}$ .

Al igual que en un modelo lineal convencional la *hat matrix* es una matriz de proyección cuya traza proporciona la dimensión del espacio sobre el que se proyecta, y por lo tanto el número de grados de libertad del modelo, se definen en los GAM los grados de libertad del modelo como  $tr(A)$ . El número de grados de libertad será una medida de la complejidad (y rugosidad) del modelo. Un modelo con muchos grados de libertad será un modelo muy complejo, con muchos parámetros y sobreajustado, mientras que uno con pocos grados de libertad probablemente deje sin ajustar aspectos relevantes de las observaciones. Conviene resaltar también que esos grados de libertad totales se pueden descomponer como suma de grados de libertad correspondientes a cada una de las variables del modelo, o con mayor precisión, a cada una de las funciones  $f_i$  que aparecen en el predictor lineal.

### 3. DATOS

Para la realización del presente estudio hemos utilizado una muestra de 94.385 pólizas de seguros de automóvil de una compañía española correspondientes al año 2007, descritas por 7 factores de riesgo, que son: antigüedad de la póliza, edad del conductor, años de carné, tipo de vehículo, uso al que está destinado, potencia y naturaleza. Todas las pólizas son anteriores al 1 de enero de 2007 y,

por tanto, han estado expuestas al riesgo durante todo este año. De entre las 94.385 pólizas, 43.878 han tenido algún tipo de siniestro y las 50.507 restantes no. Es importante señalar que la propia compañía ha seleccionado esta muestra de su cartera y se trata de lo que se denomina un *unmatched case-control study* (Hosmer y Lemeshow, 2000; Vittinghoff *et al.*, 2005), es decir, no se ha seguido ningún criterio de emparejamiento para obtener un número de pólizas sin siniestro similar al de pólizas con siniestro.

#### 4. APLICACIÓN DE GAM AL CÁLCULO DE PROBABILIDADES DE SINIESTRO

Como se ha indicado, la muestra de la que se dispone corresponde a un *unmatched case-control study*, en donde el número de pólizas no siniestradas se ha seleccionado para ser similar al de las siniestradas. En una situación como ésta, no tiene sentido analizar la distribución marginal del número de pólizas siniestradas (ya que la proporción entre siniestradas y no siniestradas es 1 a 1 por construcción de la muestra), ni la distribución condicionada a las categorías definidas por los distintos valores de las variables explicativas (Vittinghoff *et al.*, 2005). Sin embargo, sí resulta perfectamente posible analizar los *odds-ratios* para las probabilidades de siniestro según los diferentes valores de las variables explicativas (Agresti, 2007). Como los coeficientes del predictor lineal de una regresión logística están directamente relacionados con los *odds-ratios* lo que se va a hacer es modelizar las probabilidades de siniestro por medio de una regresión logística realizada con GAM, para tener en cuenta posibles efectos no lineales de las variables. La posibilidad de hacer esto en los *case-control studies* es precisamente una de las grandes ventajas de la regresión logística (que no comparte con ningún otro tipo de regresión binaria) y explica en buena medida su amplia utilización (Hosmer y Lemeshow, 2000; Vittinghoff *et al.*, 2005). La única precaución que es necesario adoptar es la de no prestar atención al valor estimado para el intercepto  $\beta_0$  del predictor lineal, ya que constituye un nivel de base que depende de la proporción entre siniestradas y no siniestradas, que en nuestro caso es completamente arbitraria. El resto de coeficientes  $\beta_j$ , retienen su interpretación habitual como logaritmos de los *odds-ratios* para la probabilidad de siniestro ante un cambio unitario de la correspondiente variable explicativa.

Comenzamos analizando el efecto que tendrían sobre la probabilidad de siniestro la edad del conductor y la potencia del vehículo. Se plantea entonces una regresión logística en la que la variable dependiente es si la póliza es siniestrada o no. Para detectar posibles efectos no lineales por parte de las variables edad del conductor ("edad") y potencia del vehículo ("cv"), estas variables se introducen no directamente sino por medio de *splines*. Se tratará entonces de un modelo GAM.

El resultado de la regresión aparece a continuación:

##### Fórmula:

$$\text{siniestrada} \sim s(\text{edad}) + s(\text{cv})$$

## Coeficientes:

Estimación Error estándar valor de  $z$   $\Pr(>|z|)$   
(Intercepto)  $-0.141447$   $0.006542$   $-21.62$   $<2e-16$  \*\*\*

## Significatividad aproximada de los splines:

	edf	Ref.df	Chi.cuadrado	p-valor
$s(\text{edad})$	6.015	6.962	156.9	$< 2e-16$ ***
$s(\text{cv})$	3.182	4.022	253.7	$< 2e-16$ ***

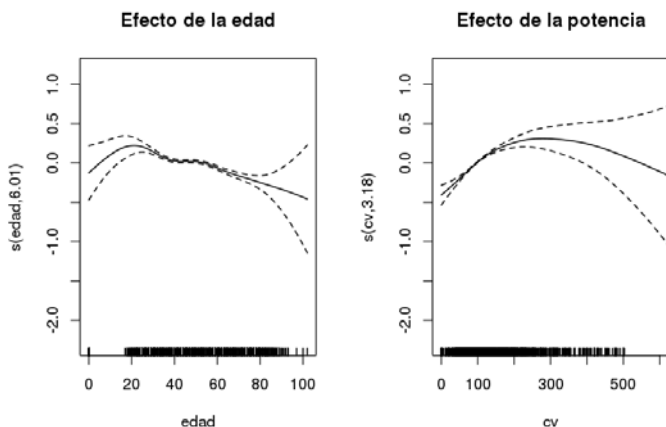
Valor de UBRE = 0.37662 Parámetro de escala = 1  $n = 94385$

Los términos  $s(\text{edad})$  y  $s(\text{cv})$  se refieren a los *splines* construidos con las variables “edad” y “cv”, respectivamente. En el resultado aparece su significatividad (ambos son muy significativos) y también se recoge otra información, como los grados de libertad asociados a cada uno de ellos, indicados como “edf” (*estimated degrees of freedom*). Unos grados de libertad muy próximos a 1 indicarían que el *spline* al que se refieren es una línea recta, con lo que la variable correspondiente podría ser introducida en la regresión directamente, de la forma usual, sin necesidad de usar *splines*.

Además, al tratarse de una regresión logística, como es bien sabido, el parámetro de escala o de dispersión se toma con valor 1, y como medida de ajuste para determinar el valor de  $\lambda$  se usa UBRE (en lugar de GCV).

Con un modelo GAM no tiene en general demasiado sentido buscar la expresión analítica de los *splines* estimados, sino que para ver el efecto, eventualmente no lineal, de cada variable explicativa sobre la respuesta lo más conveniente es representar gráficamente dichos *splines* estimados.

Si se hace esto para el modelo anterior se obtienen las siguientes figuras, en donde las líneas discontinuas indican un intervalo de confianza del 95% en torno a los valores estimados:



Estas imágenes ponen claramente de manifiesto la existencia de efectos no lineales de la edad del conductor y la potencia del vehículo sobre la probabilidad de siniestro. Analizándolo con un cierto detalle se puede ver que el efecto de la edad sobre la probabilidad de siniestro es máximo a los 21 años y presenta un mínimo local a los 44 y un máximo local a los 48, momento en el que empieza a decaer de forma lineal. En cuanto al efecto de la potencia del vehículo, resulta ser máximo para 277 cv.

Se puede sospechar la existencia de una interacción entre edad del conductor y potencia del vehículo, de forma que el efecto conjunto de ambas variables para edades bajas y potencias altas sea superior al que existiría si edad y potencia fuesen independientes. Para comprobarlo se construye un modelo con un *spline* dependiente de estas dos variables de forma conjunta (ya no será una suma de *splines* univariantes). El resultado de este modelo es el siguiente:

**Fórmula:**

$$\text{siniestrada} \sim \text{s}(\text{edad}, \text{cv})$$

**Coefficientes:**

Estimación	Error estándar	Valor de z Pr(> z )
(Intercepto)	-0.141563 0.006543	-21.64 < 2e-16 ***

**Significatividad aproximada de los splines:**

Edf	Ref.df	Chi.cuadrado	p-valor
s(edad,cv)	20.72	24.86	473.6 < 2e-16 ***

Valor de UBRE = 0.37659 Parámetro de escala = 1  $n = 94385$

Como se puede observar, el nuevo *spline* bivalente resulta ser significativo y con una estructura más compleja (lógicamente) que los *splines* univariantes del modelo anterior (su número de grados de libertad es bastante mayor). Para comprobar si efectivamente el modelo con interacción es superior al modelo sin ella se debe tener en cuenta que se trata de modelos anidados (el modelo sin interacciones es un caso particular del otro), con lo que se puede construir una tabla ANOVA con ambos modelos para contrastar la hipótesis nula de que el modelo más sencillo sin interacción es válido, o si por el contrario debe ser descartado en beneficio del modelo más complejo. Para contrastar esta hipótesis se usa un test Chi-cuadrado aproximado (en lugar de un test F, al tratarse de una distribución binomial) basado en un cociente de verosimilitudes entre los dos modelos (Wood, 2006). El resultado es el siguiente:

**Análisis de la tabla de desviación:**

Modelo 1: siniestrada ~ s(edad) + s(cv)

Modelo 2: siniestrada ~ s(edad, cv)

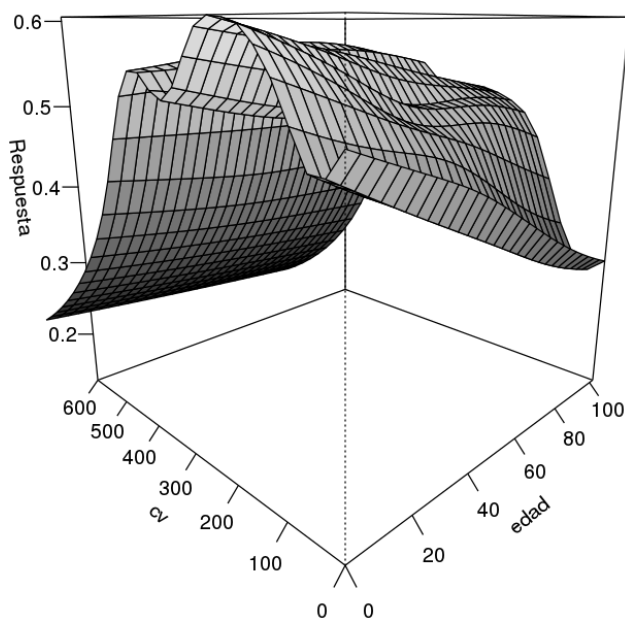
Resid.	Df Resid. Desv	Df Desviación Pr(>Chi)
1	94375	129912
2	94363	129886 11.524 25.863 0.008896 **

Códigos de significatividad: 0 '\*\*\*\*' 0.001 '\*\*\*' 0.01 '\*\*' 0.05 '\*' 0.1 '.' 1

Se puede ver que efectivamente el modelo con interacción es preferible al modelo más sencillo sin ella (se descarta la hipótesis nula).

La representación gráfica bidimensional del efecto conjunto de las variables “edad” y “cv” puede verse en la imagen siguiente, que muestra claramente la existencia de una interacción puesta de manifiesto por un “pico” por encima de lo esperado en la probabilidad de siniestro para edades bajas y potencias del vehículo en el entorno de los 230 caballos:

**Interacción edad x potencia**



En esta imagen el eje z está en la escala de la variable respuesta (probabilidad) y no en la del predictor lineal. Debido a la construcción de la muestra, y como se ha indicado previamente, esta probabilidad no debe ser interpretada literalmente (ya que en la muestra las pólizas siniestradas y no siniestradas se reparten al 50% aproximadamente), pero permite hacerse una idea de cómo varía la probabilidad de siniestro con la edad y la potencia.



En cuanto al resto de variables explicativas disponibles en los datos, tras un estudio preliminar se ha optado por descartar la variable “naturaleza”, por no tener ésta un efecto significativo, y se han agrupado algunas categorías con muy pocas observaciones de las variables “uso” y “tipo”. Si ahora se introducen en el modelo el resto de variables explicativas, es decir, los años de carné (“carne”), la antigüedad de la póliza (“fecha.poliza”), el tipo de vehículo (“tipo”) y el uso del vehículo (“uso1”), se obtienen los siguientes resultados:

**Fórmula:**

Siniestrada ~uso1 + tipo+ s(edad, cv) + s(carne) + s(as.numeric(fecha.poliza))

**Coefficientes:**

Estimación	Error estándar	Valor de z Pr(> z )
(Intercepto)	-0.19429 0.18562	-1.047 0.29524
uso1PARTICULAR	-0.08749 0.09201	-0.951 0.34170
uso1TRANSPORTE	0.27654 0.11762	2.351 0.01872 *
uso1UTILIZACION EM-PRESA	0.11502 0.11574	0.994 0.32030
tipoCAMION	0.42734 0.19600	2.180 0.02923 *
tipoFURGONETA	0.46126 0.16732	2.757 0.00584 **
tipoTODO TERRENO	0.07455 0.17129	0.435 0.66340
tipoTURISMO	0.07027 0.16691	0.421 0.67377

**Significatividad aproximada de los splines:**

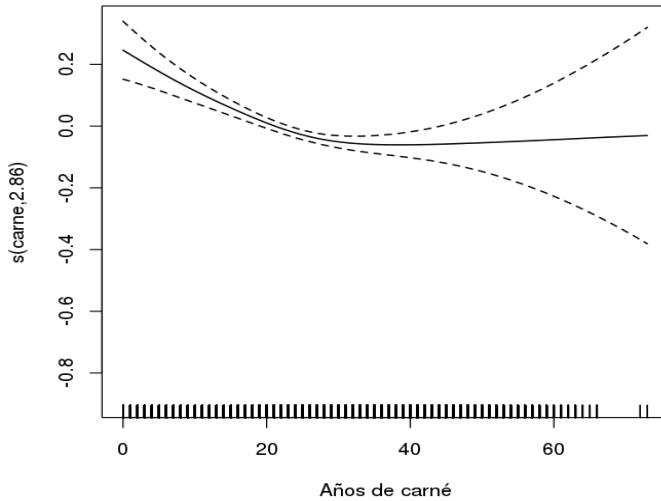
Edf	Ref.df	Chi.cuadrado	p-valor
s(edad,cv)	17.088	21.568	189.7 < 2e-16 ***
s(carne)	2.858	3.641	38.1 1.11e-07 ***
s(as.numeric(fecha.poliza))	4.702	5.746	537.9 < 2e-16 ***

Códigos de significatividad: 0 ‘\*\*\*\*’ 0.001 ‘\*\*\*’ 0.01 ‘\*\*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘.’ 1

Valor de UBRE = 0.36293 Parámetro de escala = 1 n = 94385

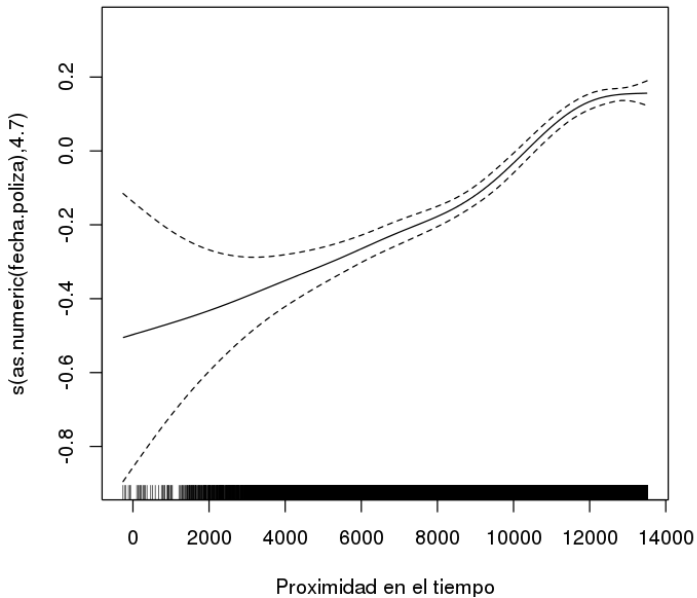
El efecto de los años de carné se refleja en la siguiente imagen:

### Efecto de los años de carné



Mientras que el efecto de la antigüedad de la póliza es el siguiente (debe tenerse en cuenta que la antigüedad de la póliza se mide por los días transcurridos desde el 1 de enero de 1970 hasta la fecha de formalización de la póliza, con lo que valores más grandes corresponderán a pólizas más recientes, más próximas en el tiempo):

### Efecto de la antigüedad de la póliza



## 5. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se han descrito las características fundamentales de los Modelos Aditivos Generalizados, se ha mostrado cómo la teoría que los fundamenta se integra de forma sencilla y natural dentro de la de los modelos estadísticos convencionales, y se ha presentado un ejemplo de aplicación al campo de las Ciencias Actariales con una amplia muestra de datos reales de seguros de automóvil. Esta aplicación se ve facilitada enormemente por la existencia de software disponible de gran calidad, como es el caso del paquete *mgcv* de R, que es el que aquí se ha utilizado. Este paquete implementa una gran cantidad de herramientas que facilitan considerablemente la aplicación de los GAM y que convierten esta aplicación en una tarea apenas más compleja que la que supone la aplicación de un GLM, pero que proporciona unos resultados y unas conclusiones mucho más ricos y con mayor capacidad de incorporar en el modelo realidades más complejas que las que pueden reflejar los GLM. Con la realización de este trabajo, por lo tanto, creemos haber puesto de manifiesto la sencillez y la conveniencia del uso de los GAM en el campo de la estadística actuarial.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

Agresti, A. (2007). *An Introduction to Categorical Data Analysis*. Hoboken, New Jersey: John Wiley and Sons.

Brockman, M.J.; Wright, T.S. (1992). "Statistical motor rating: making efficient use of your data", *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. 119, nº 3, pp. 457-543.

Dobson, A.J. (2002). *An Introduction to Generalized Linear Models*. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC.

Faraway, J.J. (2006). *Extending the Lineal Model with R*. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC.

Guillén Estany, M.; Ayuso Gutiérrez, M.; Bolancé Losilla, C.; Bermúdez Morata, L.; Morillo López, I.; Albarrán Lozano, I. (2005). *El seguro de automóviles: estado actual y perspectiva de la técnica actuarial*. Madrid: Fundación Mapfre Estudios.

Haberman, S.; Renshaw, A.E. (1996). "Generalized Linear Models and Actuarial Science", *Journal of the Royal Statistical Society D*, vol. 45, nº 4, pp. 407-436.

Hastie T.; Tibshirani, R. (1990). *Generalized Additive Models*. London: Chapman and Hall.

Hastie T.; Tibshirani, R.; Friedman, J. (2008). *The elements of statistical learning*. New York: Springer.

Hosmer, D.W.; Lemeshow, S. (2000). *Applied Logistic Regression* (2nd. Ed.). Hoboken, New Jersey: John Wiley and Sons.

McCullagh, P.; Nelder, J.A. (1989). *Generalized Linear Models*. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC.

Nelder, J.A.; Wedderburn, R.W.M. (1972), "Generalized Linear Models", *Journal of the Royal Statistical Society A*, vol. 135, n° 3, pp. 370-384.

Ohlsson, E.; Johansson, B. (2010). *Non-Life Insurance Pricing with Generalized Linear Models*. Heidelberg: Springer.

Vittinghoff, E.; Shiboski, S.C.; Glidden, D.V.; McCulloch, C.E. (2005). *Regression Methods in Biostatistics*. New York: Springer.

Wang, Y. (2011). *Smoothing Splines. Methods and Applications*. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC.

Wood, S. (2006). *Generalized Additive Models: an introduction with R*. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC.

## Ponencia 11

# ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LOS PROBLEMAS DE ASIGNACIÓN DE CAPITAL Y LA APLICACIÓN DE CIERTAS MEDIDAS DE RIESGO

Jaume Belles-Sampera y Miguel Santolino

### RESUMEN

En este artículo introducimos algunas reflexiones relacionadas con el alcance del marco teórico propuesto en Dhaene *et al.* (“Optimal capital allocation principles” *Journal of Risk and Insurance*, 2012, 79(1), 1-28) para describir los problemas de asignación de capital y sus soluciones, haciendo especial énfasis en las medidas de riesgo contempladas. Por una parte, ponemos de manifiesto la enorme versatilidad de la propuesta realizada y, por otra, sugerimos relajar algunas de las hipótesis asumidas por los autores. El objetivo principal es englobar en el marco teórico algunas tipologías básicas de asignación de capital que, sin relajar las hipótesis, quedan excluidas. Las mejoras que se derivan de la flexibilización permiten generar nuevos tipos de asignaciones de capital que encajan en el modelo. El atractivo de estas propuestas radica en las familias de medidas de riesgo consideradas.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de asignación de capital en el sector asegurador y financiero aparecen cuando alguna unidad responsable de gestión debe encargarse de distribuir una determinada cuantía entre distintas líneas o unidades de negocio. Esta cuantía puede ser el total de costes o gastos de la compañía, el capital de solvencia total requerido para la compañía o el monto total disponible en la compañía para retribución variable, por poner algunos ejemplos. Este tipo de problemas emergen en múltiples situaciones. Si la entidad considera que el reparto debe realizarse en función de la exposición al riesgo (individual o conjunta) de las unidades de negocio, estamos frente a un tipo de problemas especialmente relevantes en la práctica del *Enterprise Risk Management* (ERM). En numerosas ocasiones la asignación de capital es meramente nocional, es decir, no termina repartiéndose una cuantía física a cada unidad de negocio. Pero esta peculiaridad no le resta importancia al estudio de este tipo de problemas, puesto que la asignación es útil en varios tipos de análisis del negocio de la compañía desde un enfoque de gestión del riesgo.

La literatura relacionada con los problemas de asignación de capital es extensa y los campos en los que se presentan problemas de asignación de capital entre diferentes agentes son muy diversos. Algunos de los puntos de vista desde los que se han abordado los problemas de asignación de capital son el económico (Tasche, 2004; Buch et al., 2011), el de la teoría de juegos (Denault, 2001) o el axiomático (Kalkbrenner, 2005), por mencionar unos pocos. Remitimos al lector interesado a las revisiones que se realizan en Trigo *et al.* (2011) y en la introducción de van Gulick *et al.* (2012) sobre los distintos principios de asignación existentes en la literatura académica.

Dhaene *et al.* (2012) proponen un marco teórico en el que se unifican gran parte de dichos principios de asignación de capital. En este marco teórico, una vez fijado el capital a repartir, se requieren tres elementos para poder describir cualquier problema de asignación del capital entre distintas unidades de negocio: un conjunto de pesos para las unidades de negocio, una función norma y un conjunto de variables aleatorias auxiliares.

Las reflexiones que plasmamos en este artículo hacen referencia al alcance del marco teórico anteriormente mencionado<sup>1</sup>. Por una parte, destacamos la gran versatilidad de este modelo para describir numerosos problemas de asignación de capital y sus soluciones. Por otra parte, dos cuestiones particulares motivan nuestros comentarios adicionales. La primera de ellas es la siguiente: imaginemos que debemos repartir un capital  $K$  entre distintas unidades de negocio, tomando en cuenta de algún modo el riesgo de pérdida en cada una de ellas. Imaginemos también que medimos el riesgo de las pérdidas asociadas a cada unidad de negocio mediante una medida de riesgo o función similar. Un criterio aparentemente fácil de reparto sería asignar a la unidad de negocio  $i$ -ésima el capital  $K$  multiplicado por el cociente entre el riesgo de pérdida de la unidad  $i$ -ésima y la suma de los riesgos de pérdida de todas las unidades. Un principio de asignación que siga este criterio se conoce en la literatura como *Proportional Allocation Principle*, y queda perfectamente explicado por el MTR. A pesar de ello, en el caso en que para todas las unidades de negocio se esté usando como medida de riesgo el  $p$ -cuantil de cada unidad de negocio (es decir, el *Value-at-Risk* al nivel de confianza  $p$ ), los autores señalan que no han conseguido conciliar en su modelo este tipo de reparto proporcional, conocido en la literatura como *Haircut Allocation Principle* (Dhaene et al., 2012, pág.10). La sorpresa que produce encontrar este fleco en el marco teórico propuesto, que por otra parte cubre un vasto abanico de principios de asignación de capital, nos hizo reflexionar sobre si algunas de las hipótesis del modelo podían relajarse con el fin de abarcar también dicho principio. En este artículo proponemos encuadrar el principio de asignación de capital *Haircut Allocation Principle* mediante una modificación menor de las hipótesis del modelo.

La segunda cuestión de interés en este artículo, estrechamente conectada con la primera, es la introducción de medidas de riesgo poco habituales en los esquemas

---

<sup>1</sup> En adelante, emplearemos la nomenclatura MTR (Marco Teórico de Referencia en este artículo) para hacer referencia al marco teórico propuesto por Dhaene *et al.* (2012).

de asignación de capital. Se persigue explotar la flexibilidad que el MTR proporciona, incorporando el uso de dos familias de medidas de riesgo en los *Proportional Allocation Principles*. Ambas tipologías de medidas de riesgo incorporan mayor grado de subjetividad del decisor que el habitual en otras medidas de riesgo. Por una parte, las GlueVaR (Belles-Sampera *et al.*, 2013) pueden entenderse como medidas en las que tres escenarios de riesgo son ponderados, con el fin de obtener una imagen del riesgo incurrido acorde al apetito o aversión al riesgo del decisor. Asimismo, las medidas de riesgo propuestas en van der Hoek y Sherris (2001) permiten al decisor fijar un umbral de pérdidas que separa dos perspectivas distintas de aversión al riesgo, identificadas mediante funciones de distorsión similares a las de las medidas de riesgo de distorsión de Wang (1995; 1996).

Dedicamos la sección 2 a presentar el MTR. En la sección 3 sugerimos relajar algunas de las hipótesis del anterior modelo para conseguir encuadrar en él el *Haircut Allocation Principle*. La sección 4 está dedicada a presentar brevemente las dos familias de medidas de riesgo que se considerarán en la sección 5, en la que se proponen nuevos principios de asignación de capital de tipo proporcional basados en dichas medidas de riesgo. Cerramos el artículo con una discusión final acerca de las aportaciones realizadas.

## 2. PROBLEMAS DE ASIGNACIÓN DE CAPITAL

El punto de partida es el siguiente: quiere distribuirse un capital  $K > 0$  entre  $n > 1$  unidades de negocio, y la asignación debe ser completa (es decir, si  $K_i$  denota la cuantía asignada a la  $i$ -ésima unidad de negocio, entonces debe cumplirse que  $\sum_{i=1}^n K_i = K$ ). Además, se supone que esta distribución se enmarca en un contexto de gestión cuantitativa de riesgos, por lo que debe realizarse teniendo en cuenta el riesgo en el que incurren las unidades de negocio.

Desde nuestro punto de vista, en un problema de asignación de capital pueden distinguirse los siguientes elementos:

- El capital a repartir.
- Los agentes entre los que repartir dicho capital.
- Las variables aleatorias, asociadas a cada agente, que se tendrán en consideración para el reparto (en el caso de la gestión cuantitativa de riesgos, las pérdidas de cada unidad de negocio).
- Una colección de funciones que dependen de las variables aleatorias anteriores, también asociadas a cada agente, que sirven para simplificar la información proporcionada por dichas variables aleatorias (en el caso de la gestión cuantitativa de riesgos, las medidas de riesgo empleadas para las pérdidas de cada unidad de negocio).

- El criterio de reparto.
- La solución final al problema de asignación o, dicho de otro modo, la asignación final de capital a cada agente. Usaremos también la denominación ‘principio de asignación’ para referirnos a dicha solución.

## 2.1. Marco teórico

El modelo que proponen Dhaene *et al.* (2012) para unificar los problemas de asignación de capital consiste en interpretar cualquiera de estos problemas como un problema de optimización, cuya forma general puede expresarse como

$$\begin{aligned} \min_{K_1, K_2, \dots, K_n} \sum_{i=1}^n v_i \cdot E \left[ \zeta_i \cdot D \left( \frac{X_i - K_i}{v_i} \right) \right] \\ \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^n K_i = K \end{aligned} \quad (1)$$

siendo  $K$  el capital total a asignar;  $v_i > 0$ ,  $i=1, \dots, n$  es el peso de la  $i$ -ésima unidad de negocio<sup>2</sup> tal que  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ ;  $K_i$ ,  $i=1, \dots, n$  es el capital a asignar a la  $i$ -ésima unidad de negocio;  $X_i$ ,  $i=1, \dots, n$  es la variable asociada a las pérdidas aleatorias de la  $i$ -ésima unidad de negocio;  $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que cuantifica las desviaciones que sufren las pérdidas aleatorias  $X_i$  respecto del capital  $K_i$  a asignar a la unidad de negocio  $i$ -ésima (lo habitual es considerar la función  $D$  como una norma); y, finalmente, las  $\zeta_i$ ,  $i=1, \dots, n$  son variables aleatorias auxiliares<sup>3</sup> no negativas cuyo papel consiste en ponderar ciertos eventos aleatorios al calcular las esperanzas de  $D \left( \frac{X_i - K_i}{v_i} \right)$ . Una condición que deben cumplir las variables aleatorias  $\zeta_i$  es que tengan esperanza igual a 1.

Cuando las variables aleatorias  $\zeta_i$  son funciones no negativas y no decrecientes de las pérdidas  $X_i$  para todo  $i$ , entonces a los principios de asignación se les denomina *Business Unit Driven Allocations*. Si, en cambio, las  $\zeta_i$  son funciones no negativas y no decrecientes de la suma de las pérdidas  $S = \sum_{i=1}^n X_i$ , entonces se refieren a dichos principios de asignación como pertenecientes a los *Aggregate Portfolio Driven Allocations*. Y, por último, si las  $\zeta_i$  dependen de características o

<sup>2</sup> Estos pesos pueden estar ligados a valores financieros, contables, de volumen de las unidades de negocio o no estar relacionados con ninguno de estos conceptos. Una posible interpretación de estos pesos es que permiten establecer el grado de relevancia de cada una de las unidades de negocio.

<sup>3</sup> Podría pensarse que estas variables aleatorias auxiliares ayudan a focalizar el interés en eventos aleatorios particulares o en rangos de pérdidas específicos para el problema de asignación que estemos planteando.



condiciones del mercado, entonces estamos ante principios de asignación del tipo *Market Driven Allocations*. En este trabajo nos centramos en los principios de asignación proporcionales que puedan representarse eligiendo como función  $D$  la norma euclídea. De ahora en adelante, supondremos que el capital total a repartir  $K$  está fijado de antemano. Remitimos a aquellos lectores interesados en un mayor detalle sobre las particularidades del modelo a Dhaene *et al.* (2012).

### 2.1.1. Proportional Allocation Principles

En el ámbito de las entidades aseguradoras y financieras los principios de asignación de capital proporcionales están basados en un sencillo criterio de reparto: calcular el riesgo de pérdida de cada unidad de negocio, sumar estos valores y, finalmente, asignar a la unidad  $i$ -ésima el capital  $K$  multiplicado por el riesgo de pérdida de la unidad dividido entre la suma de los riesgos de pérdida de todas las unidades. Matemáticamente, denotando por  $X_i$  las pérdidas de la unidad de negocio  $i$ -ésima y por  $\rho_i$  la medida de riesgo elegida para dicha unidad,  $i = 1, \dots, n$ , entonces:

$$K_i = K \cdot \frac{\rho_i(X_i)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(X_j)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

A pesar de su simplicidad, un gran número de los principios de asignación de capital que pueden encontrarse en la literatura están basados en este criterio. Por ejemplo, siguiendo la notación y la denominación usada en MRT, cuando se tiene en consideración la misma medida de riesgo para todas las unidades de negocio (i.e.,  $\rho_i = \rho$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) se cuentan entre los *Proportional Allocation Principles* los siguientes principios de asignación:

- *Haircut Allocation Principle*:  $\rho(X_i) = F_{X_i}^{-1}(\rho)$ , con  $\rho \in (0,1)$  un nivel de confianza. La asignación final es la siguiente:  $K_i = K \left[ \frac{F_{X_i}^{-1}(\rho)}{\sum_{j=1}^n F_{X_j}^{-1}(\rho)} \right]$ .
- *Quantile Allocation Principle*:  $\rho(X_i) = F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(K))$ , siendo  $S^c$  la suma comonotónica de las pérdidas  $X_i$ ,  $i=1, \dots, n$  y  $\alpha$  tal que  $K = F_{S^c}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(K))$ . La asignación resultante es:  $K_i = K \cdot \left[ \frac{F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(K))}{\sum_{j=1}^n F_{X_j}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(K))} \right]$ .
- *Covariance Allocation Principle*:  $\rho(X_i) = \text{Cov}[X_i, S]$ , siendo  $S = \sum_{i=1}^n X_i$ . Con lo que el reparto final queda  $K_i = K \cdot \left[ \frac{\text{Cov}[X_i, S]}{\text{Var}[S]} \right]$ .

- *Conditional Tail Expectation (CTE) Allocation Principle:*  
 $\rho(X_i) = E[X_i | S > F_S^{-1}(p)]$ , siendo  $S = \sum_{i=1}^n X_i$  y  $p \in (0,1)$  un nivel de confianza. El reparto resultante es el siguiente:  
 $K_i = K \cdot [E[X_i | S > F_S^{-1}(p)] / \text{TVaR}(S)]$ .

A la vista de la lista anterior, podemos pensar que el grado de “sofisticación” de las asignaciones de capital, en estos casos, depende más de la medida de riesgo seleccionada que del criterio de reparto subyacente.

### 2.1.2. Criterio de optimización cuadrático

Si de los tres elementos caracterizadores (pesos  $v_i$ , función  $D$  y variables auxiliares  $\zeta_i$ ) se fija la función  $D$  igual a la norma euclídea ( $D(x) = x^2$ ), entonces estos principios de asignación son denominados principios de asignación basados en el criterio de optimización cuadrático. En tales situaciones, la expresión (1) se transforma en:

$$\begin{aligned} \min_{K_1, K_2, \dots, K_n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i} \cdot E[\zeta_i \cdot (X_i - K_i)^2] \\ \text{s.a. } \sum_{i=1}^n K_i = K \end{aligned} \quad (3)$$

Las soluciones a este tipo de problemas de optimización pueden escribirse, en forma general, como

$$K_i = E[\zeta_i \cdot X_i] + v_i \cdot \left( K - \sum_{j=1}^n E[\zeta_j \cdot X_j] \right), \quad i=1, \dots, n. \quad (4)$$

Si adicionalmente se fija el conjunto de pesos  $v_i$  (es decir, la importancia relativa de las unidades de negocio) tal que  $v_i = \frac{E[\zeta_i \cdot X_i]}{\sum_{j=1}^n E[\zeta_j \cdot X_j]}$  para todo  $i$ , las soluciones

(4) quedan simplificadas en

$$K_i = K \left[ \frac{E[\zeta_i \cdot X_i]}{\sum_{j=1}^n E[\zeta_j \cdot X_j]} \right], \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

Comparando las expresiones (2) y (5), si existen medidas de riesgo  $\rho_i$  tales que  $\rho_i(X_i) = E[\zeta_i \cdot X_i]$  para ciertas variables aleatorias  $\zeta_i$   $i=1, \dots, n$ , queda claro que el MTR recoge el *Proportional Allocation Principle* asociado a dicho conjunto de medidas de riesgo. Es más, tenemos un argumento adicional para afirmar que la “sostificación” de determinados principios de asignación proviene mayoritariamente del conjunto de medidas de riesgo contempladas y no tanto del criterio de reparto asumido. Los autores proporcionan una extensa lista de principios de asignación de capital que son resumidos en la Tabla 1. Nótese que al criterio de asignación proporcional presentado en esta forma puede añadirse un matiz: si tiene o no tiene en consideración posibles efectos producidos por la diversificación de riesgos en cartera. El principio de asignación tendrá en cuenta los posibles efectos de diversificación mediante las variables aleatorias auxiliares  $\zeta_i$ : si dependen solo de  $X_i$  no se tendrá en cuenta este efecto, mientras que si dependen de  $S$  sí.

De la Tabla 1 se deduce la diversidad de medidas de riesgo  $\rho$  tales que su valor para un riesgo  $X$  puede escribirse como  $\rho(X) = E[\zeta \cdot X]$ . Por otro lado, se observa que los principios de asignación proporcional *Quantile Allocation Principle* y *Haircut Allocation Principle* no pueden explicarse en el MRT de la misma forma que el resto de principios que aparecen en la Tabla 1. Los autores encajan el *Quantile Allocation Principle* en su modelo eligiendo como función  $D$  la norma 1 ( $D(x) = |x|$ ), todas las variables aleatorias auxiliares no negativas  $\zeta_i$  igual a 1 ( $\zeta_i \equiv 1$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ ) y limitando los posibles valores de  $K$  ( $F_{sc}^{-1+}(0) < K < F_{sc}^{-1}(1)$ ). En cambio, para el caso del *Haircut Allocation Principle*, los autores no concilian este principio de asignación con en su modelo.

**Tabla 1**

Resumen de criterios de asignación proporcionales basados en el criterio de optimización cuadrático y en pesos proporcionales al riesgo.  
(Fuente: Dhaene et al. (2012) y elaboración propia)

Criterio de reparto	Función de reducción de la información ( $E(\xi_1, X_1)$ )	Conjunto de variables aleatorias que intervienen en el problema $\xi_1$	Comentario	Criterio de reparto	Función de reducción de la información ( $E(\xi_1, X_1)$ )	Conjunto de variables aleatorias que intervienen en el problema $\xi_1$	Comentario
Proporcional al riesgo de las pérdidas individuales, sin considerar efectos de diversificación en la cartera	Varianza de las pérdidas individuales $\sigma_{X_1}^2$	$X_1 - E(X_1)$	Nótese que, aun-que este principio no se menciona explícitamente en Dhaene et al. (2012), es la versión <i>Business Unit Driven Allocations del Covariance Allocation Principle</i> .	Proporcional al riesgo de las pérdidas individuales, pero teniendo en cuenta posibles efectos de diversificación en la cartera.	Covarianza de las pérdidas individuales respecto de la pérdida total $Cov(X_1, S)$	$S - E(S)$	<i>Covariance Allocation Principle</i> (Overbeck, 2000)
	$E(X_1) + a \cdot \sigma_{X_1}$ $a \geq 0$	$1 + a \frac{X_1 - E(X_1)}{\sigma_{X_1}}$	<i>Standard deviation principle</i> (Bühlmann, 1970)		$E(X_1) + a \cdot \frac{Cov(X_1, S)}{\sigma_n}$ $a \geq 0$	$1 + a \frac{S - E(S)}{\sigma_S}$	Overbeck (2000)
	Tail Value-at-Risk de las pérdidas individuales, con nivel de confianza $p$ $TVaR_p(X_1)$ $p \in (0, 1)$	$\frac{1}{1-p} \cdot I(X_1 > F_X^{-1}(p))$	Usamos una denominación de la medida de riesgo diferente a la que aparece en Dhaene et al. (2012). En lugar de CTE, consideramos que la función $\xi_1$ hace referencia al $TVaR_p$ . Ambas medidas de riesgo coinciden para variables aleatorias continuas. <i>Conditional Tail Expectation principle</i> (Overbeck, 2000)		Esperanza de las pérdidas individuales condicionada a que la pérdida total supere su $p$ -cuantil, con nivel de confianza $p$ (siempre que la v.a. de pérdida total sea continua) $E(X_1   S > F_S^{-1}(p))$ $p \in (0, 1)$	$\frac{1}{1-p} \cdot I(S > F_S^{-1}(p))$	Overbeck (2000)

Tabla 1 (Continuación)

Resumen de criterios de asignación proporcionales basados en el criterio de optimización cuadrático y en pesos proporcionales al riesgo.  
(Fuente: Dhaene et al. (2012) y elaboración propia)

Criterio de reparto	Función de reducción de la información $(E(\xi_i, X_i))$	Conjunto de variables aleatorias que intervienen en el problema $\xi_i$	Comentario	Criterio de reparto	Función de reducción de la información $(E(\xi_i, X_i))$	Conjunto de variables aleatorias que intervienen en el problema $\xi_i$	Comentario
	Medida de riesgo de distorsión de las pérdidas individuales, asociada a una función de distorsión $g$ cóncava y diferenciable en $[0, 1]$ . $\rho_\lambda(X_i) = E(g'(F_x(X_i)))$ (Wang, 1996; Acerbi, 2002)	$g'(F_x(X_i))$ $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ $g' > 0$ $g' < 0$	La función de distorsión del $\text{VaR}_p$ no es continua y la del $\text{TVaR}_p$ no es diferenciable, por lo que ambas medidas de riesgo quedan excluidas de estos principios de asignación.		Contribución de cada pérdida individual al valor que devuelve la medida de riesgo de distorsión asociada a una función $g$ cóncava y diferenciable en $[0, 1]$ al aplicarla a la pérdida total. $\rho_\lambda(X_i) = E(g'(F_S(S))) \cdot \lambda$	$g'(F_S(S))$ $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ $g' > 0$ $g' < 0$	Tsanakos (2004). Queremos señalar que es nuestra interpretación de la función de reducción de la información, que denotamos por $\rho_{\lambda, a}(X_i)$
$\frac{1}{a} \ln \{E[\exp(a \cdot X_i)]\}$ $a > 0$ (Gerber, 1974)		$\int_0^1 \ln \{ \exp(\lambda \cdot a \cdot X_i) \} d\lambda$ $\int_0^1 E[\exp(a \cdot X_i)] d\lambda$	Exponential principle		$E \left[ X_i \cdot \frac{\int_0^1 \exp(\lambda \cdot a \cdot S) d\lambda}{\int_0^1 E[\exp(a \cdot S)]} \right]$ (Gerber, 1974)	$\int_0^1 \exp(\lambda \cdot a \cdot S) d\lambda$ $\int_0^1 E[\exp(a \cdot S)]$	Tsanakos (2009)
	$\frac{E[X_i \cdot \exp(a \cdot X_i)]}{E[\exp(a \cdot X_i)]}$ (Gerber, 1981)	$\frac{\exp(a \cdot X_i)}{E[\exp(a \cdot X_i)]}$	Escher principle		$\frac{E[X_i \cdot \exp(a \cdot S)]}{E[\exp(a \cdot S)]}$	$\frac{\exp(a \cdot S)}{E[\exp(a \cdot S)]}$	Wang (2007)

### 3. PROPUESTA DE MODIFICACIÓN EN LAS HIPÓTESIS DEL MODELO

En esta sección exponemos cómo conciliar el *Haircut Allocation Principle* en el modelo mediante la relajación de las hipótesis sobre  $\zeta_i$  relativas a ser no negativas y con esperanza igual a 1. En concreto, permitimos que  $\zeta_i$  tome valores negativos y únicamente requerimos que tengan esperanza finita  $E[\zeta_i] < +\infty$  para todo  $i=1, \dots, n$ . Una vez flexibilizadas las hipótesis, los tres elementos que caracterizarán a este principio de asignación son:

- *Conjunto de pesos*. La importancia relativa de las unidades de negocio está marcada por el cociente entre el riesgo individual y la suma de los riesgos individuales de la cartera ( $v_j = \frac{E[\zeta_j \cdot X_j]}{\sum_{j=1}^n E[\zeta_j \cdot X_j]}$ ,  $i = 1, \dots, n$ );
- *Función norma*. La norma euclídea ( $D(x) = x^2$ ).
- *Conjunto de variables aleatorias auxiliares*. Para cada pérdida aleatoria  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sea  $d_i \geq 1$  el primer entero para el que el momento de orden  $d_i$  de  $X_i$  es finito y distinto de cero ( $d_i = \min\{d \geq 1 \mid 0 < M^d[X_i] < +\infty\}$ ). Entonces, la variable aleatoria auxiliar asociada a la  $i$ -ésima unidad de negocio debe ser

$$\zeta_{i'} = \frac{X_i^{d_i}}{M^{d_i}[X_i]} \cdot F_{X_i}^{-1}(p) \quad (6)$$

Observemos que, con esta parametrización, se cumple que  $E[\zeta_i \cdot X_i] = E\left[\frac{X_i^{d_i}}{M^{d_i}[X_i]} \cdot F_{X_i}^{-1}(p)\right] = F_{X_i}^{-1}(p)$  para todo  $i=1, \dots, n$  y que el reparto tiene la forma expresada en (5), por lo que el criterio de asignación representado es, de hecho, el *Haircut Allocation Principle* (tal y como pretendíamos):

$$K_i = K \cdot \frac{F_{X_i}^{-1}(p)}{\sum_{j=1}^n F_{X_j}^{-1}(p)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Así pues, relajando las condiciones sobre el conjunto de variables aleatorias auxiliares conseguimos incluir en el MTR uno de los principios de asignación que parecen más sencillos de antemano, el que combina un criterio de asignación simple (el proporcional), con una de las medidas de riesgo más populares en el sector (el *Value-at-Risk*). Nótese que el diseño de la variable aleatoria auxiliar  $\zeta_i$  es tal que

puede ser adaptado para representar cualquier medida de riesgo como  $E[\zeta_i \cdot X_i]$ , si existe al menos un momento finito no nulo de  $X_i$ . No obstante, mediante este diseño, la interpretación sobre la transformación que ejerce  $\zeta_i$  en  $X_i$  no es trivial. Sugerimos, por tanto, que este diseño de la variable auxiliar sea utilizado cuando no se disponga de una alternativa interpretable.

#### 4. OTRAS MEDIDAS DE RIESGO A CONSIDERAR

El MTR descrito ofrece una gran flexibilidad para generar principios de asignación de tipo proporcional. Esta flexibilidad radica en el juego que ofrecen las variables aleatorias auxiliares o, dicho de otro modo, en el tipo de funciones de reducción de la información que queramos usar. Más concretamente, en el ámbito de la gestión cuantitativa de riesgos en los sectores asegurador y financiero, en las medidas de riesgo que se consideren en el problema de asignación. Para ilustrar esta flexibilidad, analizamos dos familias de medidas de riesgo que pueden emplearse para generar nuevos principios de asignación de tipo proporcional. Ambas familias de riesgo incorporan un elevado nivel de subjetividad.

##### 4.1. Medidas de riesgo GlueVaR

En Belles-Sampera *et al.* (2013) se introduce una nueva familia de medidas de riesgo denominada GlueVaR. Las principales características de estas medidas son que generalizan el *Value-at-Risk* y el *Tail Value-at-Risk*, su cálculo no requiere complicaciones adicionales al cálculo del VaR y el TVaR y, algunas de ellas, satisfacen la propiedad que los autores denominan “subaditividad en colas”. Pertenecen a la clase de las medidas de riesgo de distorsión (Wang 1995; 1996) y pueden entenderse como medidas de riesgo en las que tres escenarios adversos son ponderados, tal y como muestran las siguientes expresiones<sup>4</sup>:

$$\begin{cases} \omega_1 = h_1 - \frac{(h_2 - h_1)}{q - p} \cdot (1 - q) \\ \omega_2 = \frac{(h_2 - h_1)}{q - p} \cdot (1 - p) \\ \omega_3 = 1 - \omega_1 - \omega_2 = 1 - h_2 \end{cases}$$

$$\text{GlueVaR}_{q,p}^{h_1,h_2}(X) = \omega_1 \cdot \text{TVaR}_q(X) + \omega_2 \cdot \text{TVaR}_p(X) + \omega_3 \cdot \text{VaR}_p(X). \quad (7)$$

---

<sup>4</sup> Una medida de riesgo GlueVaR depende de cuatro parámetros: dos niveles de confianza ( $p$  y  $q$  con  $p \leq q$ ) y dos alturas ( $h_1$  y  $h_2$ , con  $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq 1$ ) que representan la distorsión en las probabilidades de supervivencia  $1 - q$  y  $1 - p$ , respectivamente.

La última expresión permite interpretar las medidas de riesgo GlueVaR como unas herramientas más flexibles que el VaR o el TVaR para incorporar la subjetividad del gestor de riesgos en lo que se refiere a la medición de dichos riesgos.

## 4.2. Medidas de riesgo de van der Hoek y Sherris

Las medidas de riesgo propuestas en van der Hoek y Sherris (2001) son otro ejemplo de herramientas de medición de riesgo que habilitan un mayor grado de subjetividad del decisor. La perspectiva habitual es considerar que las variables aleatorias  $X$  representan pérdidas, mientras que en este trabajo la perspectiva de los autores es el análisis de beneficios. Para definir las, es necesario fijar un umbral de pérdidas ( $\alpha \leq 0$ ) y dos funciones  $g$  y  $h$  no decrecientes definidas en el intervalo  $[0,1]$ , cóncava la primera y convexa la segunda, que además satisfagan que  $g(0) = h(0) = 0$ ,  $g(1) = h(1) = 1$ . En tal caso, la expresión general de una medida de riesgo perteneciente a esta familia es la siguiente:

$$H_{\alpha,g,h}(X) = \alpha + \int_0^{+\infty} h[\bar{F}_{(X-\alpha)^+}(t)] dt - \int_0^{+\infty} g[\bar{F}_{(\alpha-X)^+}(t)] dt \quad (8)$$

Se ha empleado la notación  $a^* = \max\{a, 0\}$ . Sin entrar en detalles, el umbral de pérdidas  $\alpha$  separa dos actitudes distintas hacia el riesgo incurrido, determinadas por las funciones de distorsión  $g$  y  $h$ .

Teniendo en cuenta que si  $t \geq 0$  entonces  $\bar{F}_{(X-\alpha)^+}(t) = \bar{F}_X(\alpha + t)$  y  $\bar{F}_{(\alpha-X)^+}(t) = F_X(\alpha - t)$ , la expresión (8) puede reescribirse como

$$H_{\alpha,g,h}(X) = \alpha + \int_{\alpha}^{+\infty} h[\bar{F}_X(t)] dt - \int_{-\infty}^{\alpha} g[F_X(t)] dt \quad (9)$$

Esta última representación de las medidas de riesgo de van der Hoek y Sherris será especialmente útil en la siguiente sección puesto que, conjuntamente con las siguientes equivalencias obtenidas mediante el Teorema de Fubini, permitirán obtener nuevos principios de asignación proporcional basados en las medidas de riesgo  $H_{\alpha,g,h}$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot h'[\bar{F}_X(t)] \cdot \mathbf{1}_{[\alpha,+\infty)}(t) \cdot dF_X(t) = \alpha \cdot h[\bar{F}_X(\alpha)] + \int_{\alpha}^{+\infty} h[\bar{F}_X(t)] dt \quad (10)$$

## 5. NUEVOS PRINCIPIOS DE ASIGNACIÓN DE TIPO PROPORCIONAL

Tras todo lo expuesto, estamos en disposición de proponer nuevos principios de asignación de tipo proporcional.



## 5.1. Principio de asignación proporcional basado en las GlueVaR sin efecto diversificación

Tomando como conjunto de variables aleatorias auxiliares el siguiente,

$$\begin{aligned} \zeta_i = & \omega_1 \cdot \frac{1}{1-q} \cdot E[X_i | X_i \geq F_{X_i}^{-1}(q)] + \omega_2 \cdot \frac{1}{1-p} \cdot E[X_i | X_i \geq F_{X_i}^{-1}(p)] + \\ & + \omega_3 \cdot \frac{X_i^{d_i-1}}{M^d[X_i]} \cdot F_{X_i}^{-1}(p) \end{aligned} \quad (11)$$

para todo  $i=1, \dots, n$ , donde los pesos  $\omega_i$  son como en (7), obtenemos un nuevo principio de asignación proporcional que está basado en las medidas de riesgo GlueVaR y que no tiene en consideración posibles efectos de diversificación en la cartera gestionada. Puede comprobarse que  $E[\zeta_i \cdot X_i] = \text{GlueVaR}_{q,p}^{h_1, h_2}(X_i)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

## 5.2. Principio de asignación proporcional inspirado en las GlueVaR con efecto diversificación

Supongamos que existe un nivel de confianza  $p_s \in (0,1)$  asociado a otro nivel de confianza  $p \in (0,1)$  y a la suma  $S$  de riesgos de todas las unidades de negocio, tal que se cumple que  $F_S^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(p_s)$ . Entonces, tomando como conjunto de variables aleatorias auxiliares el siguiente,

$$\begin{aligned} \zeta_i = & \omega_1 \cdot \frac{1}{1-q} \cdot E[X_i | S \geq F_S^{-1}(q)] + \omega_2 \cdot \frac{1}{1-p} \cdot E[X_i | S \geq F_S^{-1}(p)] + \\ & + \omega_3 \cdot \frac{X_i^{d_i-1}}{M^d[X_i]} \cdot F_{X_i}^{-1}(p_s) \end{aligned} \quad (12)$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ , obtenemos un nuevo principio de asignación proporcional que tiene en cuenta posibles efectos de diversificación en la cartera gestionada. Queremos remarcar que, en esta situación,

$$\sum_{i=1}^n E[\zeta_i \cdot X_i] = \omega_1 \cdot \text{TVaR}_q(S) + \omega_2 \cdot \text{TVaR}_p(S) + \omega_3 \cdot \text{VaR}_p(S) = \text{GlueVaR}_{q,p}^{h_1, h_2}(S).$$

### 5.3. Principio de asignación proporcional basado en las medidas de riesgo de van der Hoek y Sherris sin efecto diversificación

Tomando como conjunto de variables aleatorias auxiliares el siguiente,

$$\zeta_i = \alpha \left( \cdot 1 - h[\bar{F}_{X_i}(\alpha)] - g[F_{X_i}(\alpha)] \right) \cdot \frac{X_i^{d_i-1}}{M^d[X_i]} + h'[\bar{F}_{X_i}(X_i)] \cdot 1_{[\alpha, +\infty)}(X_i) + g'[F_{X_i}(X_i)] \cdot 1_{(-\infty, \alpha]}(X_i) \quad (13)$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ , obtenemos un nuevo principio de asignación proporcional que está basado en las medidas  $H_{\alpha, g, h}$  y que no tiene en consideración posibles efectos de diversificación. Puede comprobarse que  $E[\zeta_i \cdot X_i] = H_{\alpha, g, h}(X_i)$  para todo  $i$ , puesto que se cumple que

$$E\left[ h'[\bar{F}_{X_i}(X_i)] \cdot 1_{[\alpha, +\infty)}(X_i) \cdot X_i \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot h'[\bar{F}_{X_i}(t)] \cdot 1_{[\alpha, +\infty)}(t) \cdot dF_{X_i}(t).$$

La deducción final es directa combinando las expresiones (10) y (13).

### 5.4. Principio de asignación proporcional basado en las medidas de riesgo de van der Hoek y Sherris con efecto diversificación

Tomando como conjunto de variables aleatorias auxiliares el siguiente,

$$\zeta_i = \alpha \left( \cdot 1 - h[\bar{F}_S(\alpha)] - g[F_S(\alpha)] \right) \cdot \frac{X_i^{d_i-1}}{M^d[X_i]} + h'[\bar{F}_S(S)] \cdot 1_{[\alpha, +\infty)}(S) + g'[F_S(S)] \cdot 1_{(-\infty, \alpha]}(S) \quad (14)$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ , obtenemos un nuevo principio de asignación proporcional que está basado en las medidas  $H_{\alpha, g, h}$  y que tiene en consideración posibles efectos de diversificación entre los riesgos de las unidades de negocio.

Como comentario final, destacar que si mantenemos como función  $D$  la norma euclídea pero no imponemos restricciones a los pesos  $v_i$ , los principios de asignación de tipo proporcional anteriores pueden considerarse casos particulares de unos más generales, aquellos cuyo reparto responde a la expresión (4) pero considerando las variables aleatorias  $\zeta_i$  propuestas en esta sección.

## 6. CONCLUSIONES

En este artículo demostramos que al relajar las condiciones requeridas para uno de los conjuntos de elementos que Dhaene *et al.* (2012) proponen para describir cualquier tipo de problema de asignación de capital, es posible incluir en su modelo el *Haircut Allocation Principle*. Aprovechando la flexibilidad inherente al modelo, proponemos nuevos principios de asignación de capital. Todos ellos siguen un criterio de reparto proporcional, por lo que su novedad reside primordialmente en las medidas de riesgo subyacentes. Consideramos que pueden ser principios de asignación de utilidad en los programas de ERM de las compañías del sector financiero y asegurador, porque permiten contemplar un diverso abanico de actitudes frente al riesgo de los encargados de la toma de decisiones, facilitando la inclusión cuantitativa de un mayor grado de subjetividad en el proceso.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a los ponentes de los seminarios del Riskcenter sus valiosos comentarios, que sin duda han contribuido positivamente en el artículo. Especialmente relevantes fueron las sugerencias realizadas por S. Vanduffel y por E. Valdez. Miguel Santolino agradece la ayuda recibida por el Ministerio de Economía y Competitividad (ECO2012-35584).

## REFERENCIAS

- Acerbi, C. (2002). "Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion", *Journal of Banking and Finance*, vol. 26, nº 7, pp. 1505-1518.
- Belles-Sampera, J.; Guillén, M; Santolino, M. (2013). "Beyond Value-at-Risk: GlueVaR distortion risk measures", *Risk Analysis*, doi:10.1111/risa.12080.
- Buch, A.; Dorfleitner, G.; Wimmer, M. (2011). "Risk capital allocation for RORAC optimization", *Journal of Banking and Finance*, vol. 35, nº 11, pp. 3001-3009.
- Bühlmann, H. (1970). *Mathematical methods in risk theory*, Berlin: Springer-Verlag.
- Denault, M. (2001). "Coherent allocation of risk capital", *Journal of Risk*, vol. 4, nº 1, pp. 1-34.
- Dhaene, J.; Tsanakas, A.; Valdez, E. A.; Vanduffel, S. (2012). "Optimal capital allocation principles", *Journal of Risk and Insurance*, vol. 79, nº 1, pp. 1-28.
- Gerber, H.U. (1974). "On additive premium calculation principles", *ASTIN Bulletin*, vol. 7, nº 3, pp. 215-222.

Gerber, H.U. (1981). "The Escher premium principle: A criticism Comment", *ASTIN Bulletin*, vol. 12, nº 2, pp. 139-140.

Kalkbrener, M. (2005). "An axiomatic approach to capital allocation", *Mathematical Finance*, vol. 15, nº 3, pp. 425-437.

Overbeck, L. (2000). "Allocation of economic capital in loan portfolios", en: Franke, J; Haerdle, W.; Stahl, G. (eds.), *Measuring risk in complex systems*. New York: Springer.

Tasche, D. (2011), "Allocating portfolio economic capital to sub-portfolios", en: Dev, A. (ed.), *Economic capital: A practitioner's guide*. London: Risk Books.

Trigo, E.; Moreno, R.; de la Peña, I.; Iturricastillo, I. (2011). "Principios de asignación de capital en el ámbito de las entidades bancarias" en: J.M. Fera, E. J. Jiménez and M. Guillén (ed.), *Investigaciones en Seguros y Gestión del Riesgo: Riesgo 2011*. Madrid: Fundación Mapfre.

Tsanakas, A. (2004). "Dynamic capital allocation with distortion risk measures", *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 35, nº 2, pp. 223-243.

Tsanakas, A. (2009). "To split or not to split: Capital allocation with convex risk measures", *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 44, nº 2, pp. 268-277.

van der Hoek, J.; Sherris, M. (2001). "A class of non-expected utility risk measures and implications for asset allocations", *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 28, nº 1, pp. 69-82.

van Gulick, G.; de Waegenaere, A.; Norde, H. (2012). "Excess based allocation of risk capital", *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 50, nº 1, pp. 26-42.

Wang, S.S. (1995). "Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazard transforms", *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 17, nº 1, pp. 43-54.

Wang, S.S. (1996). "Premium calculation by transforming the premium layer density", *ASTIN Bulletin*, vol. 26, nº 1, pp. 71-92.

Wang, S.S. (2007). "Normalized exponential tilting: Pricing and measuring multivariate risks", *North American Actuarial Journal*, vol. 11, nº 3, pp. 89-99.

## Ponencia 12

# CONSTRUCCIÓN DE TABLAS DE MORTALIDAD RECARGADAS. INTRODUCCIÓN DE LA INCERTIDUMBRE DE LA EXPERIENCIA ADQUIRIDA VÍA SIMULACIÓN

Jose M. Pavía, Francisco G. Morillas y Juan Carlos Bosch Rodríguez

### RESUMEN

Este trabajo presenta un proceso de elaboración de tablas de mortalidad recargadas incorporando la incertidumbre de la experiencia adquirida, de modo que al recargo sobre la cartera que se viene realizando tradicionalmente se sume esta otra fuente de variación habitualmente ignorada. A través de un ejemplo se muestra el proceso de elaboración de unas tablas de mortalidad recargadas que incorporan las dos potenciales fuentes de incertidumbre. De esta forma, se consigue que la entidad aseguradora pueda mostrarse más segura y solvente para afrontar sus compromisos y las posibles desviaciones adversas de la siniestralidad que se puedan producir en su cartera.

**Palabras clave:** Tablas de mortalidad, Recargo de seguridad, Graduación, Simulación.

### 1. INTRODUCCIÓN

Una entidad aseguradora debe obtener suficientes ingresos por primas como para cubrir las indemnizaciones de los siniestros que se produzcan en el futuro. En el caso de los seguros de vida, la capacidad de predicción de la mortalidad de la cartera por parte del asegurador es fundamental para la sostenibilidad financiera de la entidad a largo plazo.

Tradicionalmente, el actuario calcula la prima a partir de unas tablas de mortalidad recargadas, donde las probabilidades de la tabla base (o estandarizada) son recargadas debido a la incertidumbre existente en el número de fallecimientos/supervivientes en cada edad (Prieto y Fernández, 1994). Esta estrategia tiene por objeto proteger a la compañía de las posibles fluctuaciones adversas que se puedan producir en el nivel de siniestralidad de la cartera.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Alternativamente, la prima de riesgo puede ser calculada de unas tablas estandarizadas para, a continuación, aplicar un recargo de seguridad a dicha prima (American Academy of Actuaries, 2002).

La predicción adecuada de las probabilidades de fallecimiento, así como el recargo de seguridad aplicado, constituyen, por tanto, uno de los ejes centrales de la reducción del riesgo que se asume. Una estrategia típica podría consistir en (i) la obtención, a partir de la experiencia de siniestralidad observada en la compañía, de unas estimaciones iniciales de las probabilidades de fallecimiento en cada edad (Forfar, McCutcheon y Wilkie, 1988), (ii) la graduación de esas probabilidades (extrapolándolas temporalmente si es preceptivo) a fin de lograr unas estimaciones finales con un perfil de cambio entre edades más suave y teóricamente más razonable (Ayuso *et al.*, 2007) y (iii) la elaboración, a partir de las probabilidades obtenidas en (ii), de unas tablas de recargadas para salvaguardar a la compañía de fluctuaciones adversas (Pavía y Escuder, 2003).

El mecanismo anterior, sin embargo, trata las probabilidades iniciales como valores fijos, obviando el hecho de que son valores estimados sujetos a error e incertidumbre. Las probabilidades de fallecimiento observadas (estimadas) a partir de la experiencia no necesariamente han de coincidir con las probabilidades reales a las que están expuestos los asegurados. Estas estimaciones son obtenidas a partir de una realización del proceso aleatorio subyacente, el cual por azar podría haber producido un número de fallecidos diferente al efectivamente observado y, consecuentemente, haber dado lugar a una estimación inicial distinta.

El objetivo de este trabajo es introducir la incertidumbre anterior en el proceso de construcción de tablas recargadas y estudiar su posible impacto. Para ello, y tomando como base la experiencia observada de la compañía, se propone simular  $S$  escenarios de fallecimiento alternativos, a partir de los cuales se puedan elaborar  $S$  tablas recargadas, siguiendo la estrategia en tres etapas descrita anteriormente, de modo que se acabe disponiendo de una estimación empírica de la distribución de las tablas recargadas que incluya la incertidumbre asociada a la experiencia de la compañía.

En concreto, y a fin de ilustrar el proceso, se considera la cartera clásica de seguros de vida de hombres del Reino Unido disponible en Forfar, McCutcheon y Wilkie (1988, pp. 116-7), se fija en  $S = 10\,000$  el número de escenarios a simular y se visualiza utilizando diferentes aproximaciones las consecuencias de incorporar la incertidumbre asociada a la experiencia.

El resto del documento está estructurado como sigue. La sección segunda está dedicada a cuestiones metodológicas, donde se explicitan los procedimientos concretos seguidos para dar respuesta al problema planteado. La sección tercera muestra los principales resultados para la cartera analizada. Las conclusiones cierran el documento. Un anexo gráfico y otro numérico completan el trabajo.

## 2. METODOLOGÍA

La implementación del proceso descrito en la introducción para la simulación de experiencias de mortalidad y la construcción de las correspondientes tablas recargadas requiere fijar los procedimientos específicos que se van a seguir, decidiendo

entre posibles alternativas. La primera cuestión a responder es cómo simular los escenarios de mortalidad a partir de la experiencia observada.

Para ello, se parte de considerar que en la cartera el número de fallecidos a cada edad  $x$ ,  $F_x$ , se distribuye de acuerdo a un modelo Binomial con parámetros,  $r_x$ , el número de expuestos al riesgo a la edad  $x$  y  $q_x$ , la probabilidad de fallecimiento a la edad  $x$ ,  $F_x \sim Bi(r_x, q_x)$ .<sup>2</sup>

El número de expuestos al riesgo (o expuestos iniciales al riesgo) con edad  $x$  en la cartera,  $r_x$ , no suele plantear especiales dificultades de cálculo. El problema reside en que  $q_x$  es desconocido, por lo que para poder generar realizaciones aleatorias de  $F_x$  es preciso disponer de una estimación del mismo. Para ello, y a fin de garantizar que los escenarios simulados constituyan desviaciones *verosímiles* de la experiencia observada se ha tomado como estimador de  $q_x$  para generar las simulaciones el cociente entre el número de fallecidos observados con edad  $x$  durante el periodo de estudio en la cartera,  $f_x$  (la realización disponible de la variable aleatoria  $F_x$ ), y los expuestos al riesgo,  $r_x$ . El estimador seleccionado tiene la característica de ser insesgado como estimador  $q_x$  y su elección garantiza que la media de las realizaciones simuladas coincida con la experiencia observada.

Una vez obtenidas las realizaciones aleatorias y calculadas para cada escenario las estimaciones iniciales de las probabilidades de fallecimiento a cada edad  $x$ , se aborda la siguiente etapa: la de graduación; que tiene como finalidad reducir las fluctuaciones aleatorias de las estimaciones iniciales. En efecto, las probabilidades brutas que se obtienen de la experiencia constituyen estimadores insesgados pero altamente variables de los verdaderos riesgos  $q_x$  de fallecimiento, por lo que a fin de reducir su error cuadrático medio global (a costa quizás de introducir algo de sesgo) estas probabilidades son suavizadas/ajustadas utilizando algún procedimiento paramétrico o no paramétrico.

De acuerdo con Debón (2003), las técnicas de graduación paramétrica tienen como principal ventaja las posibilidades predictivas que ofrecen al permitir modelizar el comportamiento de la cartera. Como contrapartida, conllevan para el actuario la necesidad de asumir que las observaciones se distribuyen según un determinado modelo teórico de supervivencia.

En este sentido, y siguiendo el trabajo de Forfar, McCutcheon y Wilkie (1988), la graduación de las probabilidades de fallecimiento se ha realizado mediante la utilización del modelo de Gompertz-Makeham,  $GM_{\beta}^{i,s}(x)$ ; el cual asume que el tanto instantáneo de fallecimiento,  $\mu(x)$ , se puede aproximar mediante la suma de un polinomio en  $x$  de orden  $r$  (grado  $r$

De suerte que, dado que bajo hipótesis de uniformidad de fallecimientos el tanto instantáneo de mortalidad a edad  $x$  puede ser aproximado a través de la expresión,

$$\mu_x \approx \frac{q_x}{p_x} = \frac{q_x}{1 - q_x}$$

se tiene que el modelo de Gompertz-Makeham permite establecer que la probabilidad de fallecimiento a edad  $x$ ,  $q_x$ , se puede estimar a través de lo que se conoce como la fórmula Logit Gompertz-Makeham de tipo  $(r, s)$ ,  $LGM_{\beta}^{r,s}(x)$ :

$$q_x \approx \frac{GM_{\beta}^{r,s}(x)}{1 + GM_{\beta}^{r,s}(x)} = LGM_{\beta}^{r,s}(x)$$

Por ejemplo, con esta terminología la segunda ley de Makeham quedaría:

$$\mu_x \approx \frac{q_x}{p_x} = A + Hx + BC^x = \beta_0 + \beta_1 x + e^{\beta_3 + \beta_4 x} = GM_{\beta}^{2,2}(x).$$

Una vez decida la familia funcional a la cual ajustar los datos, para la selección de los órdenes  $(r, s)$  concretos de la función  $GM$  se ha utilizado el criterio de información de Akaike, AIC, (e.g., Sakamoto, Ishiguro y Kitagawa, 1986), buscando entre un conjunto de modelos suficientemente parsimoniosos que verificaban:  $r + s \leq 6$ ,  $0 \leq r \leq 2$  y  $2 \leq s \leq 4$ .

La selección de los órdenes del modelo se ha realizado a partir de la experiencia realmente observada, no aplicándose la búsqueda de los mejores órdenes a cada escenario simulado. Para cada simulación concreta los parámetros  $\beta$  del modelo se estiman condicionando a que los órdenes del modelo coinciden con los del modelo derivado de la experiencia. La estimación de los parámetros se realiza por máxima verosimilitud bajo la hipótesis de que los fallecidos a cada edad  $x$  siguen un modelo binomial y son independientes. Es decir, denotando por  $n$  y  $m$ , respectivamente, a las edades mínima y máxima para la que se dispone de información, la estimación de los parámetros se obtiene maximizando la función de verosimilitud,

$$L(\beta) = \prod_{x=n}^m [q_x(\beta)]^{d_x} [1 - q_x(\beta)]^{n - d_x}$$



A partir del modelo estimado, se obtienen las probabilidades graduadas  $q_x(\beta) = \hat{q}_x$ , y de ahí las tablas recargadas. En concreto, en este trabajo, las probabilidades recargadas se han calculado siguiendo la estrategia II propuesta en Pavía y Escuder (2003), que para un nivel de recargo (o probabilidad)  $1 - \alpha$ , se obtienen a partir de:<sup>3</sup>

$$q_x^- = \min \left( 1 - \frac{p_x - z_\alpha \sqrt{p_x(1-p_x)}/l_x}{1 - z_\alpha \sqrt{(1-p_{x-1})}/l_x}, 1 \right)$$

$$p_x^+ = \max \left( \frac{p_x + z_\alpha \sqrt{p_x(1-p_x)}/l_x}{1 + z_\alpha \sqrt{(1-p_{x-1})}/l_x}, 0 \right)$$

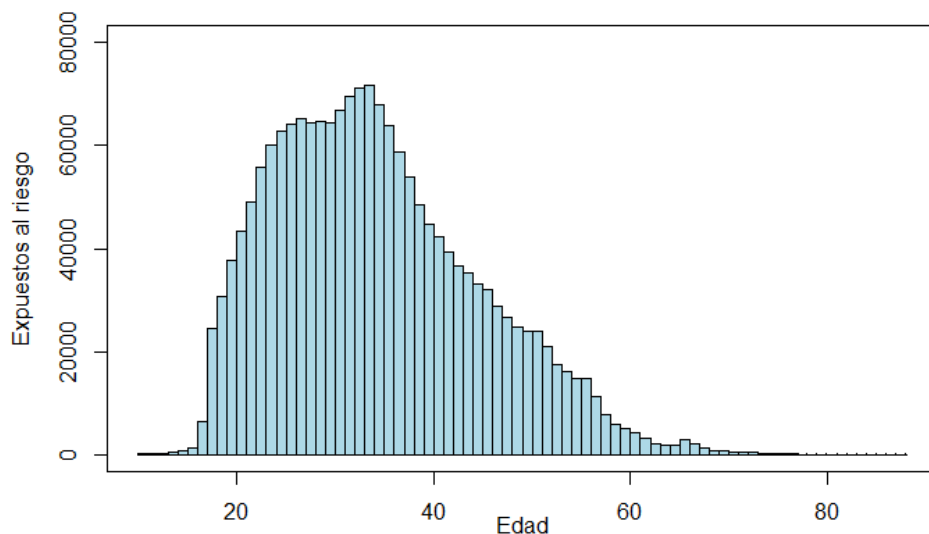
donde  $q_x^-$  y  $p_x^+$  representan, respectivamente, las probabilidades recargadas de fallecimiento y de supervivencia,  $p_x = 1 - q_x$ ,  $z_\alpha$  es el percentil de orden  $1 - \alpha$  en una normal tipificada, y  $l_x$  es el número de supervivientes que alcanzan la edad  $x$  en la tabla de mortalidad de un colectivo inicial de tamaño  $l_0$ .

### 3. RESULTADOS

A fin de ilustrar el impacto de la incorporación de la incertidumbre asociada a la experiencia en la construcción de las tablas recargadas, los pasos metodológicos descritos en el apartado anterior han sido aplicados a la cartera de seguros de vida de hombres con duración cero del Reino Unido disponible en Forfar, McCutcheon y Wilkie (1988, pp. 116-7). Los cálculos y análisis se han circunscrito al rango de edades de 10 a 88 años, ya que la cartera solo dispone de expuestos al riesgo para tales edades; si bien como se observa en la Figura 1 con una distribución muy desigual. De hecho, y aunque obviamente los riesgos de fallecimiento no son nulos ninguna edad, no se contabilizó ningún fallecido en la cartera en los rangos de edad de 10-14 y de 79-88 años debido al escaso número de expuestos al riesgo de tales edades en la cartera. Esta circunstancia provoca que las estimaciones brutas que se derivan directamente de la experiencia en esos rangos sean nulas. Por lo que, a fin de evitar lo que hubiesen supuesto simulaciones degeneradas (sistemáticamente valores nulos) para tales edades, se estimaron en esos rangos unas probabilidades brutas iniciales utilizando de manera secuencial el modelo propuesto en Helligman y Pollard (1980), y haciendo uso de un operador de shrinkage.

---

<sup>3</sup> Esta estrategia genera, para un mismo nivel de recargo, menores recargos que la propuesta de Prieto y Fernández (1994).



**Figura 1**  
Número de expuestos al riesgo por edad en la cartera analizada

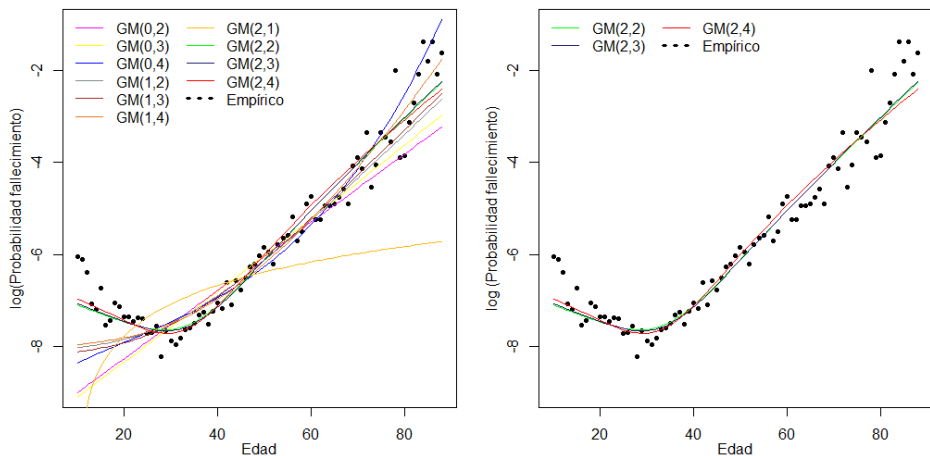
Un resumen gráfico de las distribuciones de las probabilidades brutas obtenidas en las simulaciones se ofrece en el anexo gráfico, donde se observa claramente que, como era de esperar, la variabilidad asociada a las estimaciones de las probabilidades brutas es mayor cuanto menor es el tamaño de la población expuesta al riesgo a esa edad.

Una vez se dispone de las simulaciones de las probabilidades de fallecimiento, comienza la fase de graduación de las mismas, para lo cual previamente es preciso determinar los órdenes  $(r, s)$  la función  $GM$  que serán utilizados. Las probabilidades iniciales que sirvieron de base para la simulación (observadas y estimadas), junto a todos los modelos  $GM_{\beta}^{r,s}(x)$  ajustados para esos datos, empleando todas las posibles combinaciones de  $(r, s)$  que cumplan las restricciones señaladas en la sección 2, se muestran (en escala logarítmica) en la Figura 2. Mientras que las estimaciones de los parámetros obtenidos en los ajustes realizados se ofrecen en la Tabla 1 donde para facilitar la interpretación de los coeficientes se emplean las expresiones  $r_j$  para la parte polinómica y  $s_j$  para la exponencial.

**Tabla 1**  
Estimaciones de los parámetros, graduaciones Gompertz-Makeham

Modelo	$r_0+r_1x$		$exp(s_0+s_1x+s_2x^2+s_3x^3)$			
	$r_0$	$r_1$	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$
GM(0,2)	-	-	-9.742564	0.073978	-	-
GM(0,3)	-	-	-9.833606	0.073816	0.000047	-
GM(0,4)	-	-	-8.881307	0.058989	-0.000784	0.000013
GM(1,2)	0.000286	-	-11.057930	0.095702	-	-
GM(1,3)	0.000259	-	-11.080240	0.095697	0.000019	-
GM(1,4)	0.000311	-	-11.066280	0.091537	-0.000103	0.000003
GM(2,1)	-0.677044	0.000042	-0.3906320	-	-	-
GM(2,2)	0.001112	-0.000035	-10.619600	0.095173	-	-
GM(2,3)	0.001155	-0.000037	-10.610560	0.095172	0.000002	-
GM(2,4)	0.001345	-0.000047	-10.536590	0.099254	0.000013	-0.000001

Fuente: Elaboración propia. Cálculos realizados usando la versión 2.15.2 (2012-10-26) de R (R Core Team, 2012).



**Figura 2**  
Graduaciones Gompertz-Makeham y experiencia observada

La bondad de ajuste, medida a través del coeficiente AIC, de los modelos considerados se muestra en la Tabla 2, donde se han sombreado las celdas correspondientes a los tres mejores modelos  $GM(2,2)$ ,  $GM(2,3)$  y  $GM(2,4)$ . Como era de esperar, dado los desiguales tamaños de las poblaciones expuestas al riesgo a cada edad (ver Figura 1), las modelos GM con mejores AIC (Figura 2 derecha) prestan más atención al rango de edades donde los tamaños poblacionales son sensible-

mente mayores: no se ajustan especialmente bien en las edades extremas (donde la experiencia es escasa) y presentan un mejor ajuste en las edades centrales.

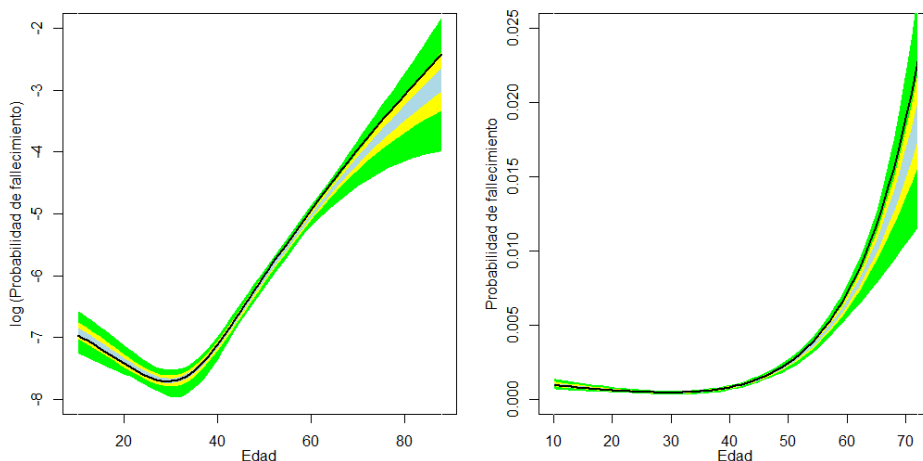
**Tabla 2**

Bondad del ajuste de las graduaciones de los datos observados medidas a través de la información de Akaike,  $AIC = -2 \log L(\hat{\beta}) + 2(r + s)$ .

$(r,s)$	1	2	3	4
0	-	27128.28	27125.16	27031.58
1	-	27000.94	26999.96	26986.04
2	27693.4	26913.58	26915.44	26910.62

Fuente: Elaboración propia. Cálculos realizados usando la versión 2.15.2 (2012-10-26) de R (R Core Team, 2012).

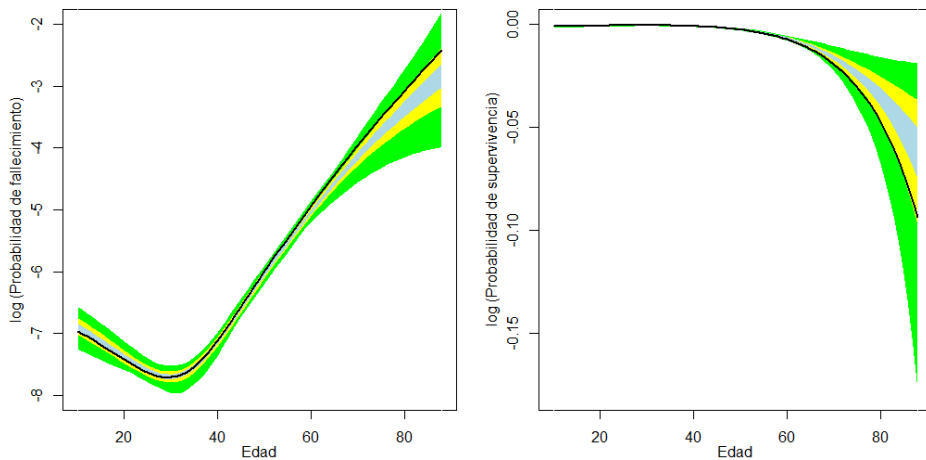
A fin de no sobrecargar la exposición, en lo que resta, nos centraremos en los resultados logrados con el modelo  $GM(4, 4)$  dado que es el modelo que mejor se adapta a la experiencia observada y a que, además, para las 10000 experiencias de mortalidad simuladas fue el que mostró, en media, también los mejores ajustes en términos de AIC (con un valor medio en las 10000 simulaciones de 27279.45).



**Figura 3**

Proyecciones en el plano de las distribuciones de las probabilidades de fallecimiento graduadas con  $GM(2,4)$ . La línea negra corresponde a la graduación de los datos realmente observados, la banda azul contiene el 50% de las graduaciones centrales (entre percentiles 25 y 75), los límites de la banda amarilla marcan las probabilidades graduadas que se encuentran entre los percentiles 5 y 95 a cada edad y la zona verde señala los límites máximo y mínimo. En la figura de la izquierda se representa (en escala logarítmica) el rango completo (de 10 a 89). En la figura derecha se presenta (en escala normal) el rango de 10 a 72 años.

La Figura 3 muestra las proyecciones en el plano de las distribuciones de las probabilidades de fallecimiento graduadas. Comparando las proyecciones de las distribuciones de las probabilidades graduadas con las de las probabilidades brutas (Figuras A1 y A2) se observa un suavizado considerable de las probabilidades brutas, reduciéndose significativamente la varianza de las estimaciones iniciales. Asimismo, como era de esperar, para los rangos de edades extremas, donde la cantidad de información es sensiblemente menor, las bandas de variación de las probabilidades graduadas son notablemente mayores. Es más, son más amplias para las edades más avanzadas donde el número de expuestos al riesgo es claramente menor y las probabilidades de fallecimiento/supervivencia menos extremas.

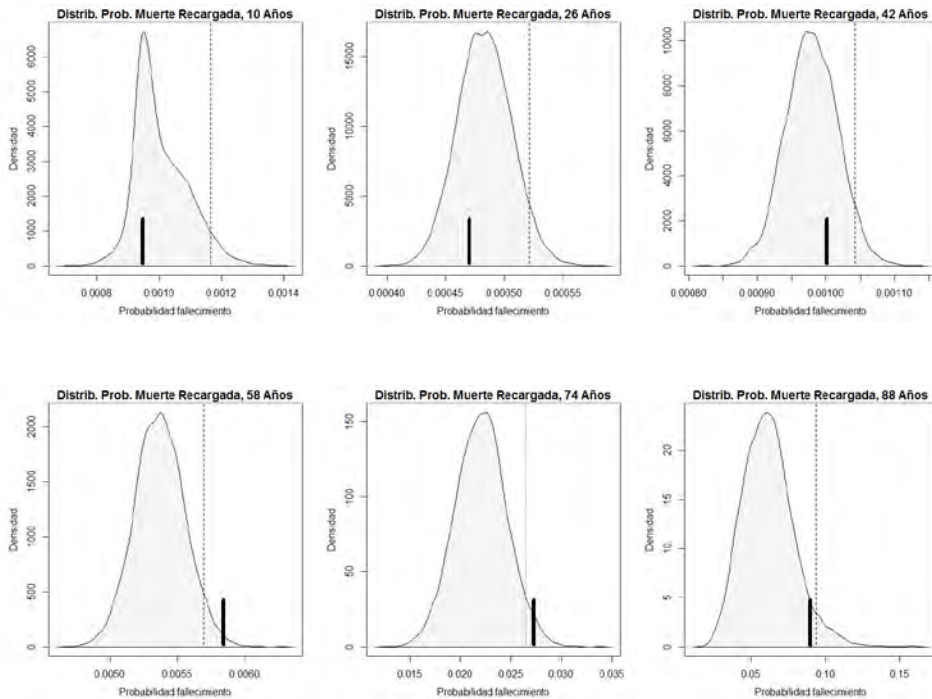


**Figura 4**

Proyecciones de las distribuciones de las probabilidades de fallecimiento (izquierda) y supervivencia (derecha) recargadas a cada edad con  $1 - \alpha = 0.95$  y  $I_{10} = 100000$ . Las líneas negras corresponden a las probabilidades que se logran recargando las probabilidades graduadas de los datos realmente observados, la banda azul contiene el 50% de los valores centrales (entre percentiles 25 y 75), los límites de la banda amarilla marcan las probabilidades recargadas que se encuentran entre los percentiles 5 y 95 y la zona verde señala los límites máximo y mínimo. En la figura de la izquierda se representa (en escala logarítmica) las probabilidades de fallecimiento. En la figura derecha se presenta (en escala logarítmica) las de supervivencia.

Finalmente, y a partir de cada uno de los 10000 conjuntos de probabilidades graduadas, se calcularon las correspondientes tablas de probabilidades recargadas empleando la estrategia II de Pavía y Escuder (2003) para un recargo  $1 - \alpha = 0.95$  y un tamaño de población en riesgo inicial  $I_{10} = 100000$ . La Figura 4 muestra de manera esquemática para todas las edades las proyecciones de las distribuciones de las probabilidades de fallecimiento y supervivencia recargadas. Comparando los paneles izquierdos de las Figuras 3 y 4 se observa que ambas figuras son muy similares, con las probabilidades recargadas de los datos observados situándose

en el rango inferior de las distribuciones para las edades bajas y en los rangos superiores para las edades avanzadas.



**Figura 5**

Ejemplos de distribuciones de probabilidades de fallecimiento recargadas para algunas edades. De izquierda a derecha y de arriba abajo, para 10, 26, 42, 58, 74 y 88 años. Marcado con una línea vertical discontinua el percentil 95 de la distribución y con pequeño segmento la probabilidad recargada que se obtiene a partir de la experiencia observada.

La incertidumbre asociada a cada probabilidad recargada se observa más claramente a partir de representaciones como las que aparecen en la Figura 5, donde para una selección de edades se ofrecen las estimaciones núcleo de las funciones de densidad para algunas probabilidades recargadas. En las gráficas se ha incluido además, a través de una línea vertical, el percentil 95 de la distribución y, con pequeño segmento, el valor de la probabilidad recargada que se deriva de la experiencia observada.

Para esta cartera concreta y con la estrategia de suavizado y recargo considerada, se podría inferir de los resultados obtenidos que en edades tempranas la compañía estaría infravalorando las probabilidades de fallecimiento, mientras que se podría afirmar que, en general, estaría sobreestimado ligeramente las probabilidades para las edades más avanzadas. En el Anexo numérico se pueden consultar

(en tanto por mil) las probabilidades recargadas que se derivan de la experiencia observada y las que se obtendrían tomando el percentil 95 de las distribuciones de probabilidades recargadas, donde el patrón comentado es claramente observable.

Con la metodología empleada en el rango de edad de 10 a 40 años las probabilidades recargadas que se derivan de la experiencia serían por término medio un 12.96% inferiores a aquellas que se obtendrían incluyendo la incertidumbre asociada a la experiencia; mientras que para el rango de 55 a 85 años la inclusión de esta incertidumbre reduciría por término medio las probabilidades recargadas en un escaso 2.98%.

#### **4. CONCLUSIONES**

Las probabilidades brutas de fallecimiento, que se obtienen de la experiencia, son el germen a partir del cual las compañías de seguros fijan sus primas en seguros de vida. Este trabajo aboga por la introducción, en el cálculo de las tablas recargadas, de la incertidumbre asociada a su estimación. A la luz de los resultados obtenidos en el ejemplo desarrollado, se puede afirmar que la introducción de la incertidumbre de la experiencia adquirida puede tener un efecto significativo sobre el recargo de seguridad que una compañía aseguradora aplica a sus primas para prevenir desviaciones adversas en la siniestralidad.

Con la aplicación de esta técnica una entidad aseguradora podría descubrir que está sobrevalorando las probabilidades de fallecimiento y, por tanto, decidir reducir sus primas haciéndolas más competitivas o, por el contrario, podría percatarse de que está asumiendo un riesgo más elevado del esperado y, como consecuencia, tomar la decisión de elevar sus primas a fin de garantizar la solvencia de la entidad a largo plazo.

Finalmente, aunque no presentado en este trabajo, es preciso notar que para el ejemplo desarrollado se ha observado que a medida que aumentaba la bondad del ajuste de la fórmula Gompertz-Makeham, mayores han sido las diferencias observadas entre el recargo de seguridad aplicado teniendo en cuenta solamente la experiencia observada y el recargo medio obtenido mediante simulación, una cuestión que merecería ser explorada en mayor profundidad a fin de discernir si este resultado se repetiría para otras carteras o de tratar de descubrir sus posibles fundamentos teóricos.

#### **REFERENCIAS**

American Academy of Actuaries (2002). *Report of the American Academy of Actuaries' Commissioners Standard Ordinary Task Force*, papel presentado a National Association of Insurance Commissioners' Life and Health Actuarial Task Force, Philadelphia, Junio 2002.

Ayuso, M., Corrales, H., Guillén, M., Pérez-Marín, A.M. y Rojo, J.L. (2007). *Estadística Actuarial Vida*. Barcelona: Edicions Universitat de Barcelona.

Debón, A. (2003). *Graduación de tablas de mortalidad. Aplicaciones actuariales*, PhD Dissertation, Valencia: Universitat de Valencia.

Forfar, D.O., McCutcheon, M.A. y Wilkie, M.A. (1988). "On Graduation by Mathematica Formula", *Journal of Institute of Actuaries*, 115-I, pp. 1-149.

Helligman, L.M.A., y Pollard, J.H. (1980). "The Age Pattern of Mortality", *Journal of the Institute of Actuaries* 107-I, pp. 49-82.

Pavía Miralles, J.M. y Escuder Vallés, R. (2003). "El proceso estocástico de muerte. Diferentes estrategias para la elaboración de tablas recargadas. Análisis de sensibilidad", *Estadística Española* 153 (45), pp. 253-274.

Prieto, E. y Fernández, M.J. (1994). *Tablas de mortalidad de la población española de 1950 a 1990. Tabla proyectada del año 2000*. Madrid: UNESPA.

R Core Team. *R*. (2012). *A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna: R Foundation for Statistical Computing. <http://www.R-project.org/>

Sakamoto, Y., Ishiguro, M. y Kitagawa, G. (1986). *Akaike Information Criterion Statistics*. Dordrecht: D. Reidel.



## Ponencia 13

# ESTIMACIÓN NÚCLEO TRANSFORMADA CORREGIDA: DOBLE TRANSFORMACIÓN VERSUS NÚCLEOS ASIMÉTRICOS EN LA ESTIMACIÓN DEL RIESGO DE PÉRDIDA

Zuhair Bahraoui, Catalina Bolancé y Ramon Alemany

### RESUMEN

En este trabajo introducimos un nuevo estimador de la función de distribución y de los cuantiles, en el que se combina el estimador núcleo doble transformado propuesto por Alemany *et al.* (2013) y la corrección en muestra finita propuesta por Kim *et al.* (2006). Este estimador se compara con uno de los estimadores analizados en Charpentier y Oulidi (2010).

### 1. INTRODUCCIÓN

La evaluación del riesgo en el campo financiero y actuarial está relacionada con el análisis del comportamiento estocástico de los valores extremos, lo que implica modelizar la forma de la distribución de pérdidas. En un conjunto de pérdidas observadas, expresadas en cantidades positivas, estos valores extremos se sitúan en lo que se denomina “la cola derecha de la distribución”. En función de la forma de la distribución y de su dominio, dicha cola es más o menos pesada o más o menos larga. El ajuste de la distribución con tal comportamiento juega un papel decisivo en la estimación del riesgo de pérdida.

Una medida de riesgo ampliamente utilizada es el valor en riesgo (VaR, *Value-at-Risk*). Para una variable aleatoria  $X$  cuya función de distribución es  $F_X(x)$ , el valor en riesgo a un nivel de confianza  $\alpha$  equivale a:

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x | F_X(x) \geq 1 - \alpha\}. \quad (1)$$

En este trabajo proponemos un nuevo estimador núcleo de  $F_X(x)$  a partir del cual estimamos el VaR con mayor eficiencia que la que se obtiene con estimadores núcleo alternativos.

Aun disponiendo de un elevado número de pérdidas en la muestra, el número de observaciones que podrían situarse en la cola de la distribución y, por tanto, ser consideradas valores extremos, es reducido. En muchos casos esto se debe a que no se dispone del suficiente periodo de observación o, incluso, en contextos como el del riesgo operacional, es difícil detectar ciertos errores que pueden llegar a provocar grandes pérdidas (Bolancé, *et al.*, 2013). Por todo ello, el ajuste de la cola de la distribución de las pérdidas supone un reto para los estadísticos, que se encuentran con dos dificultades fundamentales: por un lado, determinar una forma de la cola que se ajuste a la distribución de los pocos datos disponibles y, por otro, establecer cómo es el comportamiento de la distribución por encima del máximo muestral, es decir, ¿cómo extrapolamos el comportamiento de la cola cuando ya no disponemos de información muestral sin necesidad de imponer una forma paramétrica?. La estimación núcleo transformada, la cual puede considerarse una estimación semiparamétrica, permite ajustar la cola de la distribución y extrapolar su comportamiento por encima del máximo observado en la muestra, todo ello sin imponer un modelo paramétrico determinado y con mayor eficiencia que otras alternativas no paramétricas como la estimación núcleo clásica.

Alemaný *et al.* (2013) proponen la estimación núcleo doble transformada y demuestran que este método de estimación tiene un error cuadrático medio menor que otros métodos no paramétricos alternativos cuando el tamaño de muestra es grande (Alemaný *et al.*, 2013 presentan los resultados de un ejercicio de simulación con tamaños de muestra 500 y 5000), incluso en la estimación de cuantiles muy extremos.

En este trabajos analizamos las propiedades de la estimación núcleo doble transformado incorporando la corrección en muestra finita propuesta por Kim *et al.* (2006), a la que denominamos estimación núcleo doble transformado corregido (ENDTC). Comparamos nuestro nuevo método de estimación con alguno de los propuestos en Charpentier y Oulidi (2010), en los que se utilizan núcleos asimétricos.

Finalmente, mostramos los resultados de la estimación del Valor en Riesgo (VaR, *value-at-risk*) en una muestra de costes de los siniestros en una cartera de autos.

## 2 ESTIMACIÓN NÚCLEO TRANSFORMADA CON NÚCLEOS ASIMÉTRICOS

Sea  $X_i$ ,  $i=1,\dots,n$  una muestra de observaciones independientes e igualmente distribuidas generadas por una variable aleatoria  $X$  definida en  $[0,\infty)$ , la estimación núcleo clásica de la función de distribución  $F_X$  es:

$$\hat{F}_X(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{b}\right), \quad (2)$$

donde  $K(u) = \int_{-\infty}^u k(t)dt$ , siendo  $k(\cdot)$  el núcleo de la estimación, que se corresponde con una función de densidad simétrica, acotada y centrada en el cero (ver

Silverman, 1986);  $b$  es el parámetro de alisamiento el cual debemos calcular utilizando un criterio de optimalidad (Azzalini, 1981).

Chen (1999), para una variable aleatoria  $Y$  definida en el intervalo  $[0,1]$ , propone utilizar núcleos asimétricos en la estimación definida en (2), concretamente la función de densidad de una Beta con parámetros  $a=\frac{y}{b}+1$  y  $\beta=\frac{1-y}{b}+1$ , modificada para corregir el sesgo en las cotas:

$$k_{\beta}(u,b,y)=\begin{cases} k_{\frac{y}{b},\frac{1-y}{b}}(u) & y\in[2b,1-2b] \\ k_{\rho_b(y),\frac{1-y}{b}}(u) & y\in[0,2b] \\ k_{\frac{y}{b},\rho_b(1-y)}(u) & y\in(1-2b,1] \end{cases}, \quad (3)$$

donde  $\rho_b(y)=2b^2+2.5-\sqrt{4b^4+6b^2+2.25-y^2}-\frac{y}{b}$ .

Partiendo de la estimación núcleo propuesta por Chen (1999), posteriormente Charpentier y Oulidi (2010) analizan una estimación núcleo basada en la transformación propuesta por Buch-Larsen *et. al.* (2005). Esta transformación equivale a la función de distribución de la Champernowne modificada:

$$T(x)=\frac{(x+c)^{\delta}-c^{\delta}}{(x+c)^{\delta}+(M+c)^{\delta}-2c^{\delta}}, \quad x>0, M,\delta>0 \text{ y } c\geq 0$$

Tal y como describen Charpentier y Oulidi (2010), el método consiste en transformar los datos originales  $Y_i=T(X_i)$ ,  $i=1,\dots,n$ , de modo que, dado que la transformación utilizada equivale a una función de distribución, los datos transformados proceden de una Uniforme(0,1). Por lo tanto, puede utilizarse el estimador de Chen (1999) en los datos transformados, corregido para que tome valores entre 0 y 1.

$$\hat{F}_Y(y)=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_0^{\frac{y-Y_i}{b}}k_{\beta}(t)dt}{\int_0^1\hat{f}_Y(t)dt} \quad (4)$$

donde  $\hat{f}_Y(y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nk_{\beta}(Y_i,b,y)$ .

Al estimador definido en (4) lo denominamos Beta transformado (BT).

Para estimar el VaR con un nivel de confianza  $\alpha$  a partir de (4) se utiliza el método de Newton-Raphson para calcular la inversa  $\hat{F}_Y^{-1}(\alpha)$ , y al resultado se le aplica la inversa de la transformación para volver a la escala original. El parámetro de ali-  
samiento de esta estimación es el propuesto por Harrel y Davis (1982):

$$b = \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{n+1}}$$

### 3 ESTIMADOR NÚCLEO DOBLE TRANSFORMADO CORREGIDO

Partiendo del estimador núcleo doble transformado de  $F_x$  propuesto por Alemany *et al.* (2013), en esta sección proponemos un nuevo estimador basado en la corrección propuesta por Kim *et al.* (2006). La idea básica consiste en buscar una relación de convexidad entre dos puntos cercanos al punto  $x$ , donde se pretende estimar la función de distribución:

$$\tilde{F}_Y(y) = \frac{\lambda_1 \hat{F}_1(y) + \hat{F}(y) + \lambda_2 \hat{F}_2(y)}{\lambda_1 + 1 + \lambda_2} = \tilde{F}_X(x) \quad (5)$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2 \geq 0$  son pesos. Entonces el estimador núcleo doble transformado (ENDT) propuesto por Alemany *et al.* (2013) es:

$$\hat{F}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{H^{-1}(T(x)) - H^{-1}(T(X_i))}{b}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{y - Y_i}{b}\right)$$

y

$$\hat{F}_j(H^{-1}(T(x))) = \hat{F}(H^{-1}(T(x))) + l_j b \hat{f}(H^{-1}(T(x)) + l_j b), \quad j=1,2,$$

siendo  $\hat{f}(y) = \hat{F}'(y)$  la función de densidad y  $l_1 \leq 0$  y  $l_2 \geq 0$  son constantes a determinar.

En este caso como segunda transformación  $H^{-1}$  utilizamos la inversa de la función de distribución de una *Beta*(5,5), que minimiza el funcional  $\int (f'''(t))^2 dt$  y, por tanto, minimiza el error al cuadrado integrado medio del estimador definido en (5) (ver Alemany *et al.* 2013).

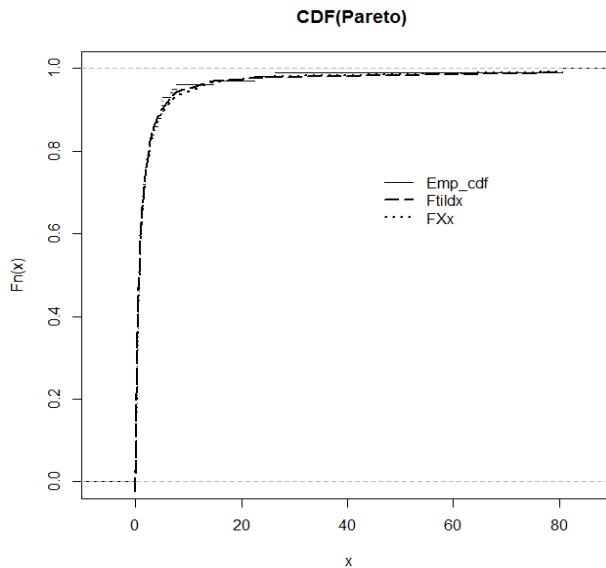
$$H(t) = \frac{1}{256} (35t^4 - 175t^3 + 345t^2 - 325t + 128)(t+1)^5$$

Dado que los datos transformados están generados por una distribución  $Beta(5,5)$ , podemos calcular de forma exacta el parámetro de alisamiento que minimiza el error cuadrático medio de  $\tilde{F}_Y(y)$ :

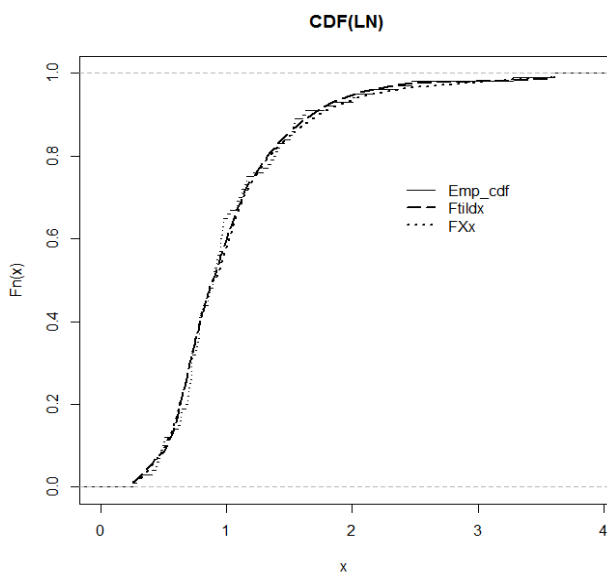
$$b_y^{MSE} = n^{-1} \left( \frac{h(y)V(\lambda)}{\frac{h''(y)^2}{576} \left( \mu_4 - \frac{3(1+6\lambda)\mu_2^2}{2\lambda} \right)} \right)^{\frac{1}{7}},$$

donde  $h$  es la función de densidad de la  $Beta(5,5)$ . Siendo  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$  y  $-l_1 = l_2 = l$ ,  $V(\lambda)$  es una función que depende del núcleo y alcanza el mínimo cuando utilizamos el núcleo de Epachnikov (ver Kim *et al.* 2006).

A partir de dos muestra de 500 observaciones procedentes de una distribución Log-Normal y una Pareto, en las figuras 1 y 2 representamos  $\tilde{F}(x)$  (Ftildx) y lo comparamos con la propuesta de Alemany *et al.* (2013) y la distribución empírica. Observamos que para la distribución Log-Normal (Figura 2) los tres estimadores son casi idénticos, sin embargo, para la distribución Pareto (Figura 1)  $\tilde{F}(x)$  es el mejor.



**Figure 1**  
Ajuste para la distribución de Pareto



**Figure 2**  
Ajuste para la distribución Log-Normal

## 4 APLICACIÓN

Analizamos una base de datos que se corresponde con una muestra de 5.122 costes de siniestros de automóviles. Los datos originales se dividen en dos grupos: las reclamaciones de los asegurados que tenían menos de 30 años de edad (los asegurados más jóvenes) y las reclamaciones de los asegurados con 30 años o más (los asegurados mayores). El primer grupo está formado por 1.061 observaciones en el intervalo de costes entre 1 a 126.000 y el segundo grupo está formado por 4.061 observaciones en el intervalo que va desde 1 a 17.000. Los costes se expresan en unidades monetarias. En la Tabla 1 se presentan algunos estadísticos descriptivos. Las distribuciones de pérdidas tanto de los asegurados más jóvenes como de los mayores presentan asimetría hacia la derecha y, además, la distribución asociada a las pérdidas de los asegurados más jóvenes presenta una cola más pesada que la asociada a los asegurados mayores (ver Bolancé *et al.* 2003).

**Tabla 1**  
Estadísticos descriptivos

	<b><i>n</i></b>	<b>Media</b>	<b>Mediana</b>	<b>Desviación Std.</b>	<b>Coef. de Variación</b>
Todos	5.122	276,1497	67	1.905,5420	690,0394
<30	1.061	402,7012	66	3.952,2661	981,4388
≥30	4.061	243,0862	68	704,6205	289,8644

En las tablas 2 y 3 se muestran los resultados del VaR estimado, con distintos niveles de confianza, a partir de la distribución empírica y con distintos tipos de estimación núcleo transformada: la estimación núcleo doble transformada (ENDT), la estimación Beta transformada (BT) y la nueva propuesta denominada estimación núcleo doble transformada corregida (ENDTC). En todos los casos los valores estimados con las estimaciones núcleo analizadas se sitúan por encima del empírico, cosa que no sucede si utilizamos la estimación núcleo clásica.

Los resultados muestran como para los individuos con 30 años o más (Tabla 3) las tres estimaciones núcleo transformadas proporcionan riesgos similares. Sin embargo, para los asegurados más jóvenes, cuya distribución de pérdidas posee una cola más pesada, existen algunas diferencias, sobre todo en el cuantil más extremo (0.999), donde con el método ENDT se obtiene un riesgo mayor.

**Tabla 2**  
VaR para asegurados menores de 30 años

$\alpha$	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>	<b>0.999</b>
Empírica	1.104,000	4.283,200	5.311,800	15.823,920
ENDT	1.252,472	4.951,788	7.526,730	33.616,140
ENDTC	1.266,923	4.815,579	6.052,271	19.005,040
BT	1.242,471	4.887,536	7.099,085	19.109,380

**Tabla 3.**  
VaR para asegurados con 30 años o más

$\alpha$	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>	<b>0.999</b>
Empírica	1.000,000	3.000,000	3.974,200	8.343,120
ENDT	1.005,931	3.073,633	4.424,620	1.0481,480
ENDTC	1.020,422	3.101,456	4.443,068	9.653,891
BT	1.014,708	3.137,364	4.501,455	10.333,250

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo describimos un nuevo estimador núcleo que resulta de combinar el estimador núcleo doble transformado propuesto por Alemany *et al.* (2013) con la corrección propuesta por Kim *et al.* (2006), con el objetivo de que el nuevo estimador posea mejores propiedades en muestra finita para la estimación del riesgo de pérdida. Es importante destacar que el análisis de nuevos estimadores no paramétricos o semiparamétricos que mejoren la eficiencia de los más clásicos es fundamental, ya que permiten obtener estimaciones que dan más peso, del que dan las estimaciones estrictamente paramétricas, a la escasa información muestral disponible en la cola derecha de la distribución.

## REFERENCIAS

- Alemaný, R.; Bolancé, C.; Guillén, M. (2013). "Non-parametric estimation of Value-at-Risk", *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 52, nº 2, pp. 255-262.
- Azzalini, A. (1981). "A note on the estimation of a distribution function and quantiles by a kernel method", *Biometrika*, vol. 68, nº 1, pp. 326-328.
- Bolancé, C.; Guillén, M.; Nielsen, J.P. (2003). "Kernel density estimation of actuarial loss functions", *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 32, nº 1, pp. 19-36.
- Bolancé, C.; Guillén, M.; Gustafsson, J.; Nielsen, J.P. (2013). *Quantitative Operational Risk Models*, New York: Chapman & Hall/CRC Finance Series.
- Charpentier, A.; Ouilidi, A. (2010). "Beta kernel quantile estimators of heavy-tailed loss distributions", *Statistics and Computing*, vol. 20, nº 1, pp. 35-55.
- Chen, S.X. (1999). "A beta kernel estimator for density functions", *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 31, nº 2, pp. 131-145.
- Harrel, F.E.; Davis, C.E. (1982). "A new distribution-free quantile estimator", *Biometrika*, vol. 69, nº 3, pp. 635-640.
- Kim, C.; Kim, S.; Park, M.; Lee, H. (2006). "A bias reducing technique in kernel distribution function estimation", *Computational Statistics*, vol. 21, nº 3-4, pp. 589-601.
- Silverman, B.W. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. London: Chapman & Hall.



## Ponencia 14

# ON THE USE OF THE DISCRETE LOMAX DISTRIBUTION IN ACTUARIAL ANALYSIS

Emilio Gómez-Déniz, Faustino Prieto y José María Sarabia

### ABSTRACT

In this paper, a new discrete probability function is introduced by discretizing the continuous Pareto type II distribution, also known as Lomax distribution. The model obtained results suitable for actuarial discrete data where the unimodality property is generally present. The new distribution depends on two parameters and estimation for these is provided by the maximum likelihood method. Later we concentrate on the one parameter discrete distribution which is obtained from the last by assuming that one of the parameters is equal to one. This discrete distribution is also unimodal and infinitely divisible. Some methods of estimations are also provided and applications in traffic accidents show that the new distribution proposed here is a candidate to fit these kind of data.

**Key Words:** Collective Risk Model, Discretizing, Estimation, Lomax Distribution.

### 1. INTRODUCTION

The Lomax distribution, also known as Pareto type II distribution, is a particular case of the generalized Pareto distribution and has been used in statistical literature in a variety of surveys. For instance, it has been used as a heavy tailed distribution comparing with the exponential distribution (Bryson, 1974); it has been extensively used for reliability modelling and life testing (Balkema and de Haan, 1974); it also has been studied, from a Bayesian point of view, by many authors (Arnold *et al.*, 1998; Mohie *et al.*, 2013; among others); finally, the Lomax distribution has applications in economics, actuarial modelling, queuing problems and biological sciences, for details we refer to Johnson *et al.* (1994).

The probability density function of the Lomax distribution is given by

$$f(x) = \frac{\lambda}{(1 + \lambda x)^{\lambda + 1}} \quad (1)$$

where  $\alpha$  and  $\lambda$ . Here  $\alpha$  and  $\lambda$  are the shape and the scale parameters, respectively. The survival function associated to Eq. (1) is given by

$$\bar{F}(x) = \frac{\lambda}{\lambda + x} \quad (2)$$

This work is concerned with the discretization of the Lomax distribution. It is well known (see for example: Gómez-Déniz, 2010; Krishna and Singh, 2009) that a continuous failure time model can be used to generate a discrete model by introducing a grouping on the time axis. If the underlying continuous failure time has the survival function  $\bar{F}(x)$ , the probability mass function of the discrete random variable associated with that continuous distribution can be written as

$$r(x) = \bar{F}(x) - \bar{F}(x+1) \quad (3)$$

This method, applied to generate new discrete distribution, has received attention in the past and a lot of attention again in the last years. Thus, Nakagawa and Osaki (1975) obtained the discrete Weibull distribution; Roy (2004) analysed the discrete Rayleigh distribution; Kemp (2008) examined the discrete half-normal distribution; Krishna and Singh (2009) obtained the Burr discrete and the Pareto discrete distribution as a particular case of the former; Gómez-Déniz (2010) obtained a generalization of the geometric distribution and Gómez-Déniz and Calderín-Ojeda (2011) the discrete Lindley distribution.

After obtaining the quantiles and the median of the new distribution we demonstrate the unimodality property of the distribution with a zero vertex. Later, our attention will be concentrated specifically in the discrete Lomax distribution when the parameter  $\alpha$  takes the value 1. We study some of the most important properties of this distribution and investigate the question of parameter estimation. The new (one-parameter) distribution is infinitely divisible and has decreasing failure rate for all the values of the parameter.

The paper is organized as follows: in Section 2, we present the discrete Lomax distribution. An empirical application to mortality data in road networks is included in Section 3. Some final comments are given in Section 4.

## 2. THE DISCRETE LOMAX DISTRIBUTION

When Eq. (3) is applied to Eq. (2) we obtain directly the probability mass function of the discrete Lomax distribution, given by

$$r(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right) - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x+1}\right) \quad (4)$$

The cumulative distribution function of the discrete Lomax distribution with probability mass function in Eq. (4) is given by

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha} \quad (5)$$

while the survival function of the discrete version of the Lomax distribution coincides, obviously, with Eq. (2).

From Eq. (5) we can obtain the quantiles,  $x_p$ , given by

$$\left\lceil \left(\frac{1-p}{\alpha}\right)^{-1/\alpha} \right\rceil \quad (6)$$

where  $\lceil \cdot \rceil$  denotes the integer part. In particular, the median is given by

$$\left\lceil \left(\frac{1/2}{\alpha}\right)^{-1/\alpha} \right\rceil. \quad (7)$$

The  $r$ th moment around the origin is

$$E(X^r) = \sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(\frac{k}{\alpha}\right)^{-\alpha}.$$

In particular, the mean and the 2nd order moment about the origin are given by

$$E(X) = \alpha^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^\alpha} \quad (8)$$

$$E(X^2) = \alpha^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^\alpha}. \quad (9)$$

The series (8) is convergent if  $\alpha > 2$  and the series (9) is convergent when  $\alpha > 4$ .

It is a simple exercise to verify that  $E(X)/\alpha < 1$  and  $E(X^2)/\alpha^2 > 1$  and therefore the mean decreases with both,  $\alpha$  and  $\alpha^2$ .

In order to study the behavior of the distribution for different values of  $\alpha$  and  $\beta$ , the ratio between mean and the variance has been computed. These values are shown in Table 1. As it can be observed, this ratio seems always be larger than 1 and therefore the distribution seems overdispersed.

It is well-known that the unimodality property is a significant feature in many statistical distributions. The following result shows that the new discrete distribution is unimodal with a zero vertex.

**Table 1**  
Ratio between variance and mean of discrete Lomax distribution  
for different values of  $\alpha$  and  $r$ .

$\alpha \backslash r$	3	4	5	6	7	8	9	10
0.1	16.47	7.70	5.04	3.79	3.08	2.63	2.31	2.08
0.2	9.05	4.40	2.99	2.33	1.96	1.72	1.56	1.44
0.3	6.58	3.31	2.32	1.86	1.60	1.44	1.33	1.25
0.4	5.36	2.77	1.99	1.63	1.43	1.30	1.22	1.16
0.5	4.63	2.45	1.80	1.49	1.33	1.23	1.16	1.11
0.6	4.14	2.24	1.67	1.41	1.26	1.18	1.12	1.08
0.7	3.79	2.09	1.58	1.34	1.22	1.14	1.09	1.06
0.8	3.54	1.98	1.51	1.30	1.19	1.12	1.08	1.05
0.9	3.34	1.89	1.46	1.26	1.16	1.10	1.06	1.04
1.0	3.18	1.82	1.42	1.24	1.14	1.09	1.05	1.03
2.0	2.45	1.51	1.24	1.12	1.06	1.03	1.02	1.01
3.0	2.21	1.41	1.18	1.09	1.04	1.02	1.01	1.00
4.0	2.09	1.36	1.15	1.07	1.03	1.02	1.01	1.00
5.0	2.02	1.33	1.14	1.06	1.03	1.01	1.00	1.00
6.0	1.97	1.31	1.13	1.06	1.03	1.01	1.00	1.00
7.0	1.94	1.29	1.12	1.05	1.02	1.01	1.00	1.00
8.0	1.91	1.28	1.12	1.05	1.02	1.01	1.00	1.00
9.0	1.89	1.28	1.11	1.05	1.02	1.01	1.00	1.00
10.0	1.87	1.27	1.11	1.05	1.02	1.01	1.00	1.00

*Proposition 1: The probability mass function given in Eq. (4) is unimodal with a modal value at  $r = \alpha$ .*

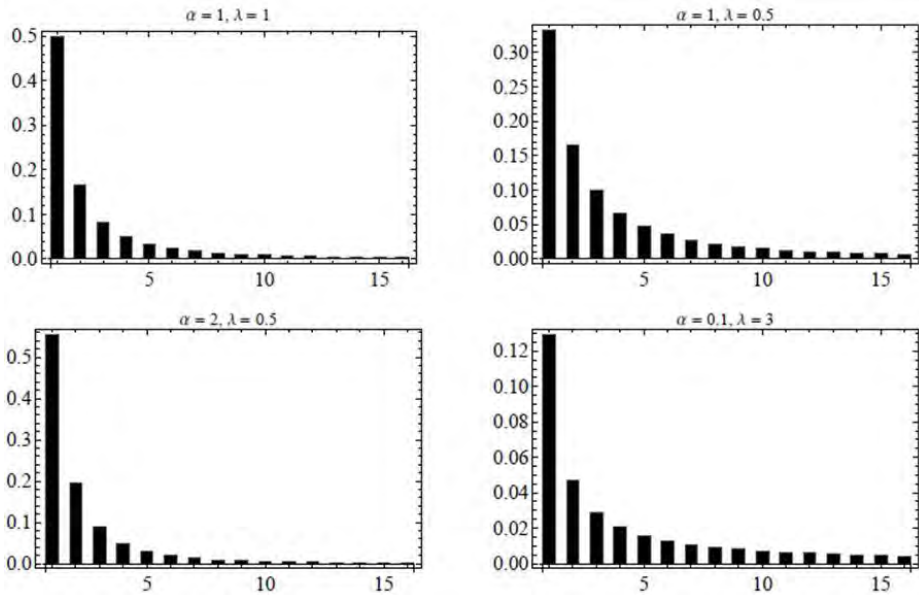
*Proof:* Letting Eq. (4) define  $r$  for non-integer values of  $x$ , then we obtain that for

$$- \binom{\alpha}{r} \left[ \frac{\binom{\alpha}{r-1}}{\binom{\alpha}{r}} - \frac{\binom{\alpha}{r+1}}{\binom{\alpha}{r}} \right]$$

which clearly is negative. Hence,  $r$  is decreasing and the result is proven. ■

The failure or hazard rate can be obtained easily from Eq. (4) and Eq. (2).

Finally, the probabilities for different values of  $x$  were calculated and graphs were plotted for various values of the two parameters. These are shown in Figure 1.



**Figure 1**  
Some examples of probability mass functions of Eq. (4) for selected values of the parameters  $\alpha$  and  $\lambda$

### 2.1. The one-parameter case

We concentrate now our attention to the one-parameter discrete Lomax distribution obtained from Eq. (4) and by taking  $\lambda = 1$ . Although the mean of this distribution does not exist we will see some interesting properties of this distribution can be obtained easily. To the best of our knowledge, the discrete distribution presented here has not been previously addressed in statistical literature.

In this case after straightforward computation we get the probability mass function of this simple distribution given by

$$r(x) = \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^{x+1}} \quad (10)$$

The quantiles and the median are obtained from Eq. (6) and Eq. (7) after putting  $\lambda = 1$ . The hazard function (failure rate)  $r(x)$  is given by

$$r(x) = \frac{(1 + \alpha)^{-x}}{(1 + \alpha)^{-x-1}}$$

from which it is easy to see that the distribution is monotonically decreasing failure rate (DFR) for all  $\lambda > 0$ .

Some computations provide the probability generating function of a discrete random variable following the pmf (10), which is given by

$$G(s) = [ \zeta(s, \lambda) / \zeta(s) ]^{1/\lambda} \quad (11)$$

where  $\zeta(s, \lambda)$  is the Hurwitz-Lerch transcendent function given by

$$\zeta(s, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \lambda)^s}.$$

In the other hand it is verified that

$$\zeta'(s) = -\zeta(s, \lambda) \psi(s, \lambda)$$

where  $\psi(s, \lambda) = \zeta'(s, \lambda) / \zeta(s, \lambda)$  is the digamma function and  $\gamma$  is Euler's constant with approximate numerical value 0.577216.

It must be reported that the Hurwitz-Lerch transcendent function and the digamma function are available in the Mathematica package (Wolfram, 2003).

From Eq. (10) we have

$$r(x) = \frac{1}{\lambda} \zeta(x, \lambda) \quad (12)$$

and the remaining probabilities can be calculated recursively using Eq. (12) together with

$$r(x) = \frac{1}{\lambda} \zeta(x, \lambda) - r(x-1)$$

Let us prove that the new discrete distribution presented in this paper is infinitely divisible (log-convex) for  $\lambda > 0$ .

*Theorem 1: The pmf given in Eq. (10) is infinitely divisible.*

*Proof:* Firstly, we have that  $r(x) = \frac{1}{\lambda} \zeta(x, \lambda)$ . Then, we must prove that  $r(x)/r(x-1)$  forms a monotone increasing sequence. If we define  $r(x)$  also for non-integer values of  $x$ , we have that for

$$\frac{r(x)}{r(x-1)} = \frac{\zeta(x, \lambda)}{\zeta(x-1, \lambda)}$$

from which the result follows by applying Theorem 1. in Warde and Katti (1977).

Moreover, as any infinitely divisible distribution defined on nonnegative integers is a compound Poisson distribution (see Proposition 9 in Karlis and Xekalaki, 2005), we conclude that the new pmf given in Eq. (10) is a compound Poisson distribution. Furthermore, when a distribution  $G$  is infinitely divisible then for any integer  $x$  then exists a distribution  $G_x$  such that  $G$  is the  $x$ -fold convolution of  $G_x$  namely,  $G = G_x^{*x}$ .

Since the new distribution is infinitely divisible, an upper bound for the variance can be obtained when  $x=1$  (see Johnson and Kotz, 1982, p. 75), which is given by

$$\text{var}(X) = \frac{r'(0)}{r(0)}.$$

### 2.3. Estimation of parameters

In this section, different methods of estimation of the parameters are given.

#### 2.3.2. The general case

In this case, the log-likelihood function is as follows,

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^n \left[ (x_i) \log (r(x_i)) - (r(x_i)) \right]. \quad (14)$$

from which we have that the normal equations are given by

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{r'(x_i)}{r(x_i)} [x_i - r(x_i)] = 0$$

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{r'(x_i)}{r(x_i)} [x_i - r(x_i)] = 0$$

which should be solve to obtain the maximum likelihood estimators.

#### 2.3.1. The one parameter case

Here we give an alternative to the method of moments based on the zeros frequency. The zero proportion method tends to work well only when the mode of the distribution is at zero and its proportion of zeros is relatively high (Alanko and Duffy, 1996). In the one parameter case, we will need only one equation in order to estimate the parameter. It is a simple exercise to see that, in this case, the moment estimator based on the proportion of zeros observed, say  $\tilde{p}$ , is given by

$$\tilde{p} = \frac{r(0)}{r(0)}$$

In the other hand the inverse moment provided above can be used to obtain also an estimator of the parameter. The maximum likelihood estimators can be obtained by using equations above after putting  $\alpha$  .

### 3. EMPIRICAL APPLICATION TO MORTALITY DATA IN ROAD NETWORKS

Road networks constitute one of the key ingredients in the socio-economic development of any country – on the one hand, they are an important determinant of transport costs (Limao and Venables, 2001), they help to achieve an efficient distribution of people and income (Queioz and Gautam, 1992; Shenggen and Chan-Kang, 2005); on the other hand, they have different negative consequences for the environment (Liu *et al.*, 2008; Julia *et al.*, 2000).

From the risk analysis point of view, road networks have been studied widely: the transport of hazardous substances (Bagheri *et al.*, 2013; Leonelli *et al.* 2000); the road traffic accidents (Phillips and Sagberg, 2013; Fort *et al.*, 2010), are two examples of that. In particular, the mortality due to road accidents has attracted the interest of many risk researchers – road traffic accidents were the 10<sup>th</sup> cause of death in the world in 2008 and caused 1.21 million of deaths, the 2.1% of deaths of that year (World Health Organization, 2011).

In this paper, we focus on black spots (spatial concentrations of road accidents) and on the mortality on these dangerous sites. Previous works related have been devoted to the identification of black spots (Geurts *et al.* 2004) or to the development of techniques for modelling their accident frequency and accident severity (see Guerts and Wets, 2003, for a extense review of them), among many others. This paper categorizes the black spots by their number of deaths occurred each year and models them by the discrete Lomax distribution.

#### 3.1. The Data

We considered mortality data due to road traffic accidents on Spanish black spots, from Spanish General Directorate of Traffic (D.G.T, 2003-2007). Note that, although the internationally commonly adopted definition of road traffic fatality (Convention on Road Traffic, Vienna, 1968) includes to any person who dies within 30 days as a result of an road accident, D.G.T considers only a period of 24 hours instead of that 30 days period. Additionally, there is no a consensus about the definition and identification of a black spot – D.G.T. considers a black spot as a road section of 100 meters where three or more traffic accident has occurred in one year (D.G.T, Instruction 01/TV-29).

The database includes 4029 observations on the following selected variable: yearly number of deaths due to road traffic accidents on each Spanish black spot from 2003 to 2007.



Table 4 shows the number of black-spots and the number of deaths occurred each year in them, in the period considered.

**Table 4**

Number of black spots in Spain and their number of deaths (24 hours), from 2003 to 2007.  
(Source: D.G.T.)

	Year				
	2003	2004	2005	2006	2007
<b>Number of black spots in Spain</b>	959	780	739	749	802
<b>Number of deaths (24 hours)</b>	220	191	180	171	134

Table 5 shows the number of black-spots ordered by their number of deaths in the period considered.

**Table 5**

Number of black spots in Spain ordered by their number of deaths (24 hours), from 2003 to 2007. (Source: D.G.T.)

Number of black spots with number of deaths (24 hours) equals to	Year				
	2003	2004	2005	2006	2007
<b>0</b>	798	636	612	633	693
<b>1</b>	126	108	95	84	92
<b>2</b>	19	27	23	19	12
<b>3</b>	12	7	3	9	4
<b>4</b>	2	2	3	1	0
<b>5</b>	0	0	1	1	0
<b>6</b>	2	0	1	1	1
<b>7</b>	0	0	1	1	0
<b>Total</b>	959	780	739	749	802

### 3.2. Results

First, we fitted the Discrete Lomax model, defined in Eqs. (4,5) and described in section 2, by maximum likelihood.

Table 6 shows the parameter estimates and their standard errors (in parenthesis) obtained from the Discrete Loma distribution  $\alpha$  and parameters), fitted to the

black-spots mortality data (see table 5) in Spain from 2003 to 2007, by maximum likelihood.

**Table 6**

Parameter estimates obtained from the fitting of the discrete Lomax model ( $\alpha$ ,  $\beta$  parameters) to the black-spots mortality data in Spain by maximum likelihood.

Parameter estimates	Year				
	2003	2004	2005	2006	2007
$\hat{\alpha}$	6.5461 (2.0601)	13.8596 (9.8951)	5.5713 (1.7194)	4.3352 (1.1547)	10.8251 (5.8841)
$\hat{\beta}$	0.3148 (0.1182)	0.1285 (0.0999)	0.3733 (0.1412)	0.5366 (0.1860)	0.2039 (0.1245)

Then, and as a measure of how close the observed values (see table 5) are to the expected values given by the fitted discrete model (see table 6), we took in consideration the Chi-Square goodness-of-fit test, with the chi-square test statistics given by

$$\sum (O_i - E_i)^2 / E_i$$

where  $O_i$  is the observed frequency for bin  $i$  and  $E_i$  is the expected frequency for that bin (with bins combined if the expected frequency is less than 5, and  $k$  as the resulting number of bins); with the null hypothesis

$H_0$ : the data follow the discrete Lomax model;

with the selected level of significance:  $\alpha$ ; and where the null hypothesis can be rejected at that level of significance if

where  $\chi^2_{\alpha, k-3}$  is the chi-square critical value with  $k-3$  degrees of freedom, considering that Discrete Lomax distribution has 2 parameters. Additionally, the corresponding  $p$ -values can be obtained, and the null hypothesis can be rejected if  $p$ -values  $< 0.05$ .

Table 7 shows the values of the chi-square test statistic obtained in each year of the period considered, and the corresponding degrees of freedom and chi-square critical values. In all the five years considered, chi-square test statistics is smaller than the chi-square critical value. For that, the discrete Lomax distribution cannot

be rejected at 0.05 level of significance for Spanish black spots mortality data in the period considered.

**Table 7**

Chi-square goodness-of-fit test statistics values, obtained for discrete Lomax distribution fitted to Spanish black-spots mortality data in the period 2003-07.

Parameter estimates	Year				
	2003	2004	2005	2006	2007
Chi-square test statistics	3.6340	0.5897	0.5463	0.2021	0.9180
Chi-square critical value	3.841	3.841	3.841	3.841	3.841

Table 8 shows the one-tailed (right-tail) probability value ( $p$ -value) for the chi-square test corresponding to each year from 2003 to 2007. The  $p$ -value obtained confirms that the null hypothesis (the data follow the discrete Lomax model) cannot be rejected at 0.05 level of significance in any year.

**Table 8**

$p$ -value for the chi-square test, corresponding to each year from 2003 to 2007, from fitting the discrete Lomax model to Spanish black-spots mortality.

Parameter estimates	Year				
	2003	2004	2005	2006	2007
$p$ -value for the chi-square test	0.0566	0.4425	0.4598	0.6530	0.3380

#### 4. FINAL COMMENTS

This paper offers a new two-parameter family of univariate discrete distributions as a possible alternative to the negative binomial and the Poisson-inverse Gaussian distributions which are usually used in actuarial statistics for modeling discrete data. We have studied properties of the distribution and the particular case of being  $\alpha = 1$ . The new distribution has proved to be very useful for modelling count data which present inflated-zero and long tailed count data.

#### AGRADECIMIENTOS

The authors thank to Ministerio de Economía y Competitividad (Projects ECO2009-14152 (EGD) and ECO2010-15455 (JS y FP)), for partial support of this work.

## REFERENCES

- Alanko, T.; Duffy, J.C. (1996). "Compound binomial distributions for modelling consumption data" *The Statistician*, vol. 45, n° 3, pp. 269-286.
- Arnold, B.C.; Castillo, E; Sarabia, J.M. (1998). "Bayesian analysis for classical distributions using conditionally specified priors" *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, vol. 60, series B, pt. 2, pp. 228-245.
- Bagheri, Morteza; Verma, Manish; Verter, Vedat. (2013). "Transport Mode Selection for Toxic Gases: Rail or Road?" *Risk Analysis*, In press.
- Bryson, M.C. (1974). "Heavy-tailed distributions: properties and tests" *Technometrics*, vol. 16, n° 1, pp. 61-68.
- Balkema, A.; de Haan, L. (1974). "Residual life time at great age" *Annals of Probability*, vol. 2, n° 5, pp. 792-804.
- D.G.T. Dirección General de Tráfico, Ministerio del Interior, Gobierno de España. Estudios e informes de seguridad vial. Puntos negros 2003-2007. [Web] [http://www.dgt.es/portal/es/informacion\\_carreteras/](http://www.dgt.es/portal/es/informacion_carreteras/) [11/06/13].
- Fort, E.; Pourcel, L.; Davezies, Ph.; Renaux, C.; Chiron, M.; Charbotel, B. (2010). "Road accidents an occupational risk" *Safety Science*, vol. 48, n° 10, pp. 1412-1420.
- Gómez-Déniz, E. (2010). "Another generalization of the geometric distribution" *Test*, n° 19, pp. 399-415.
- Gómez-Déniz, E.; Calderín-Ojeda, E. (2011). "The discrete Lindley distribution: properties and applications" *Journal of Statistical Computation and Simulation*, vol. 81, n° 11, pp. 1405-1416.
- Geurts, K.; Wets, G.; Brijs, T.; Vanhoof, K. (2004). "Identification and Ranking of Black Spots: Sensitivity Analysis" *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, vol. 1897, pp. 34-42.
- Guerts, K., Wets, G. (2003). *Black Spot Analysis Methods: Literature Review*. RA 2003-07, Flemish Research Center for Traffic Safety, Diepenbeek, Belgium, [Web], 2003. <http://doclib.uhasselt.be/dspace/bitstream/1942/5004/1/17.pdf> [11/06/13].
- Gupta, P.L.; Gupta, R.C.; Tripathi, R.C. (1997). "On the monotonic properties of discrete failure rates" *Journal of Statistical Planning and Inference*, n° 65, pp. 255-268.

Johnson, N.L.; Kotz, S. (1982). "Developments in discrete distribution 1969-1980, *International Statistical Review*, n° 50, pp. 71-101.

Jones, J. A.; Swanson, Frederick J.; Wemple, B.C.; Snyder, K.U. (2000). "Effects of Roads on Hydrology, Geomorphology, and Disturbance Patches in Stream Networks" *Conservation Biology*, vol. 14, n° 1, pp. 76-85.

Karlis, D., Xekalaki, E. (2005). "Mixed poisson distributions" *International Statistical Review*, n° 73, pp. 35-58.

Kemp A.W. (2008). "The discrete half-normal distribution" in: *Advances in mathematical and statistical modeling*. Birkhäuser, Basel, pp. 353-365.

Klugman, S.A.; Panjer, H.H.; Willmot, G.E. (2008). *Loss models*, 3rd Ed., Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ.

Krishna, H.; Singh, P. (2009). "Discrete Burr and discrete Pareto distributions" *Statistical Methodology*, vol. 6, n° 2, pp. 177-188.

Leonelli, P.; Bonvicini, S.; Spadoni, G. (2000). "Hazardous materials transportation: a risk-analysis-based routing methodology" *Journal of Hazardous Materials*, vol. 71, n° 1-3, pp. 283-300.

Limao, N.; Venables, A.J. (2001). "Infrastructure geographical disadvantage transport costs and trade" *World Bank Economic Review*, n° 15, pp. 451-479.

Liu, S.L.; Cui, B.S.; Dong, S.K.; Yang, Z.F.; Yang, M.; Holt, K. (2008). "Evaluating the influence of road networks on landscape and regional ecological risk – A case study in Lancang River Valley of Southwest China" *Ecological Engineering*, vol. 34, n° 2, pp. 91-99.

Mohie, M.; Okasha, H.M.; Al-Zahrani, B. (2013). "Empirical Bayes estimators of Reliability Performances using Progressive Type-II Censoring from Lomax Model" *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*, vol. 5, n° 1, pp. 74-83.

Nadarajah, S.; Kotz, S. (2006a). "Compound mixed poisson distributions I" *Scandinavian Actuarial Journal*, n° 3, pp. 41-162.

Nadarajah S. Kotz S. (2006b) "Compound mixed poisson distributions II" *Scandinavian Actuarial Journal*, n° 3, pp. 163-181.

Nakagawa, T.; Osaki, S. (1975). "The discrete Weibull distribution" *IEEE Transactions of Reliability*, vol. 24, n° 5, pp. 300-301.

Phillips, R.O; Sagberg, F. (2013). "Road accidents caused by sleepy drivers: Update of a Norwegian survey" *Accident Analysis & Prevention*, vol. 50, pp. 138-146.

Queiroz, C.; Gautam, S. (1992). "Road infrastructure and economic development: some diagnostic indicators", *Policy Research Working Paper*, nº 092, The World Bank, 1992.

Rolski, T.; Schmidli, H.; Schmidt, V.; Teugels, J. (1999). *Stochastic processes for insurance and finance*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester.

Roy, D. (2004). *Discrete Rayleigh distribution*. IEEE Transactions of Reliability, vol. 53, nº 2, 255–260.

Shenggen Fan; Chan-Kang, Connie. (2005). *Road Development, Economic Growth and Poverty Reduction in China*. International Food and Policy Research Institute, Washington, D, C. U.S.A.

United Nations. Convention on road traffic, Vienna, (1968). [Web] <http://www.unece.org/trans/conventn/crt1968e.pdf> [11/06/13].

Warde, W.D.; Katti, S.K.. 97 . "Infinite divisibility of discrete distributions II". *The Annals of Mathematical Statistics*, 1971, vol. 42, nº 3, 1088–1090.

Willmot, G.E. (1987). "The Poisson-inverse Gaussian distribution as an alternative to the negative binomial". *Scandinavian Actuarial Journal*, nº 3-4, 113 - 127.

World Health Organization (2011). The 10 leading causes of death by broad income group (2008), [Web], 2011. <http://who.int/mediacentre/factsheets/fs310/en/> [11/06/13].

## Ponencia 15

### COTAS PARA DISTRIBUCIONES CONDICIONADAS BAJO DEPENDENCIA POSITIVA: UNA APLICACIÓN

Miguel A. Sordo, Alfonso Suárez-Lloréns y Alfonso J. Bello

#### RESUMEN

Recientemente, Sordo, Suárez-Lloréns y Bello (2013) han obtenido cotas estocásticas para las distribuciones de los riesgos individuales de una cartera cuando estos se condicionan a que el riesgo agregado de cartera supera su valor en riesgo. Las esperanzas de estas distribuciones condicionadas pueden ser interpretadas como las contribuciones marginales al riesgo agregado. En este trabajo se ilustran estos resultados mediante una aplicación con datos reales del sector asegurador español.

#### 1. INTRODUCCIÓN

Durante el proceso de gestión de riesgos de una cartera de seguros, las entidades asignan un capital de riesgo a cada uno de sus departamentos o líneas de negocio. Este proceso requiere descomponer el riesgo global de la cartera en las distintas contribuciones individuales o marginales. Cada contribución marginal describe la parte de riesgo de una determinada línea de negocio y posteriormente estas contribuciones determinan la asignación de capital. Cummins (2000) proporciona una recopilación de las diversas técnicas de asignación de capital que han sido propuestas en la literatura actuarial.

Consideremos una cartera compuesta por  $n$  riesgos individuales  $X_1, \dots, X_n$  y llamemos  $S = X_1 + \dots + X_n$  al riesgo agregado de la cartera. Supongamos que la posible dependencia entre los riesgos individuales viene modelada por la cópula del vector aleatorio  $X = (X_1, \dots, X_n)$ . Sea  $F_i$  la función de distribución de  $X_i$  y sea  $F_i^{-1}$  su correspondiente función cuantil, definida por

$$F_i^{-1}(p) = \inf \{x : F_i(x) \geq p\}, \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Denotemos por  $F_S$  la función de distribución de  $S$  y sea  $F_S^{-1}$  la correspondiente función cuantil. Una de las medidas habitualmente empleadas para evaluar el riesgo agregado es la esperanza condicionada en la cola, denotada **TCE** (tail conditional expectation), que para la variable  $S$  se define:

$$TCE_S(p) = E[S | S > F_S^{-1}(p)], \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (1)$$

El **TCE**, que para distribuciones continuas coincide con el denominado **TVaR** (tail value at risk, ver Sección 2.4 en Denuit *et al.*, 2005) es una medida de riesgo coherente (en el sentido de Artzner *et al.*, 1999) que representa el riesgo esperado en el caso de que el riesgo global exceda el cuantil  $p$ . Teniendo en cuenta que

$$TCE_S(p) = \sum_{i=1}^n E[X_i | S > F_S^{-1}(p)], \quad (2)$$

cada esperanza condicionada

$$E[X_i | S > F_S^{-1}(p)], \quad (3)$$

constituye una medida natural de la contribución marginal del riesgo  $i$ -ésimo al riesgo agregado (cuando éste se evalúa por medio de (1)). Mediante esta expresión, la entidad gestiona el capital de forma sencilla: el capital requerido para la línea de negocio  $i$ -ésima es la contribución esperada al riesgo agregado cuando este excede, para cierto  $p \in (0,1)$  determinado de antemano, su valor en riesgo. Las contribuciones de la forma de (3) se denominan contribuciones de Euler (ver Tasche, 1999, y Overbeck, 2000); son aditivas y verifican propiedades muy convenientes desde el punto de vista económico. Algunas referencias sobre este tipo de contribuciones son Venter (2004), Kalkbrenner (2005), Dhaene *et al.* (2011) y Asimit *et al.* (2011).

Algunos autores, incluidos Panjer (2002), Landsman y Valdez (2003), Cai y Li (2005), Chiragiev y Landsman (2007), Furman y Landsman (2005, 2008, 2010) y Furman y Zitikis (2008), han obtenido la expresión explícita de (3) bajo diferentes modelos paramétricos. Obviamente, el cálculo preciso de (3) necesita el conocimiento exacto de la distribución conjunta del vector  $X$ : En muchos casos, desafortunadamente, la estructura de dependencia del vector  $(X_1, \dots, X_n)$  es desconocida o bien se conoce sólo parcialmente. En la práctica, cuando sólo se conocen las distribuciones marginales, la desigualdad (Aubin, 1981)

$$E[X_i | S > F_S^{-1}(p)] \leq TCE_{X_i}(p) \quad \text{para todo } i=1, \dots, n, \quad (4)$$



nos lleva a tomar  $TCE_{X_i}(p)$  como una medida de la contribución marginal (3), tomada en el peor de los escenarios posibles. La desigualdad (4) motiva la siguiente cuestión más general ¿podemos acotar estocásticamente, tanto superior como inferiormente, las distribuciones de probabilidad condicionadas de la forma

$$\{X_i | S > F_S^{-1}(p)\}, \quad i=1, \dots, n, \quad (5)$$

cuando sólo se conocen las funciones de distribución marginales? Recientemente, Sordo, Suárez-Lloréns y Bello (2013) estudian este problema y prueban que, para  $p \in (0, 1)$  e  $i=1, \dots, n$ , se verifica

$$\{X_i | X_i > F_i^{-1}(1-p)\} \leq_{st} \{X_i | S > F_S^{-1}(p)\} \leq_{st} \{X_i | X_i > F_i^{-1}(p)\} \quad (6)$$

donde  $\leq_{st}$  indica el orden estocástico usual. La desigualdad (6) presenta las siguientes ventajas frente a la desigualdad (4): (1) Como el orden estocástico implica la ordenación entre las esperanzas, la segunda desigualdad de (6) claramente es más fuerte y contiene más información que (4); (2) en particular, (6) acota los **VaRs** de las variables aleatorias (5), para cualquier nivel  $p$  de probabilidad; (3) el hecho de que (6) suministre una cota inferior para (5) permite controlar el error al aproximar la contribución del riesgo marginal de  $X_i$  por el **TCE**.

Sordo, Suárez-Lloréns y Bello (2013) demuestran que la cota superior se alcanza en vectores comonótonos. Es de sobra conocido que el concepto de comonotonía juega un importante papel en la teoría actuarial (ver Dhaene et al., 2002ab). Un vector aleatorio  $(X_1, \dots, X_n)$  se dice que es comonótono si existe una variable aleatoria  $Z$  y funciones no decrecientes  $f_1, \dots, f_n$  en  $R$  tales que

$$(X_1, \dots, X_n) \equiv_{st} (f_1(Z), \dots, f_n(Z)).$$

La comonotonía es usada para modelar situaciones donde los riesgos individuales están generados por un mecanismo externo común. En particular, en el citado artículo se demuestra que el vector  $X$  es comonótono si y sólo si

$$\{X_i | S > F_S^{-1}(p)\} \equiv_{st} \{X_i | X_i > F_i^{-1}(p)\}, \quad \text{para todo } p \in (0, 1). \quad (7)$$

Obsérvese que cuando  $p$  está próximo a 1 (lo cual es habitual en la práctica) la cota inferior en (6) no aporta mucha información. La intuición de que (3) pudiese ser mayor bajo dependencia positiva de  $X$  que bajo independencia, sugiere considerar la estructura de dependencia del vector para refinar dicha cota. Sordo, Suárez-Lloréns y Bello (2013) formalizan la idea de dependencia positiva consideran-

do el concepto de “crecimiento condicional” (**CI**) de vectores aleatorios introducido por Müller y Scarsini (2001), que está relacionada con la noción **CIS** introducida por Lehmann (1966). Recordemos que un vector aleatorio  $(X_1, \dots, X_n)$  es condicionalmente creciente en secuencia (**CIS**) si

$$\{X_i | X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}\} \equiv_{st} \{X_i | X_1 = x'_1, \dots, X_{i-1} = x'_{i-1}\}$$

siempre y cuando  $x_j \leq x'_j$ ,  $j=1, \dots, i-1$ .

La noción **CIS** ha sido estudiada, entre otros autores, por Lehmann (1966) y Barlow y Proschan (1975). Müller y Scarsini (2001) consideraron una noción de dependencia positiva más fuerte, denominada **CI**. Un vector es **CI** si al permutar sus componentes tenemos una estructura **CIS**, cualquiera que sea la permutación. Formalmente, el vector aleatorio  $(X_1, \dots, X_n)$  es condicionalmente creciente (**CI**) si el vector aleatorio

$$X_\pi = (X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})$$

es **CIS** para toda permutación  $\pi \in \Pi_n$ .

Hay muchos ejemplos de distribuciones **CI** en Karlin y Rinott (1980), Sarkar y Chang (1997) y Shaked y Spizzichino (1998). Entre los ejemplos más destacados incluimos el caso de riesgos independientes y la distribución normal multivariante con correlaciones no negativas (ver, para detalles, Müller y Scarsini, 2005). Para aplicaciones recientes de vectores **CI** en un entorno actuarial, consultar Balakrishnan et al. (2012), Belzunce, Suárez-Lloréns y Sordo (2012), Cai y Wei (2012a,b) y Lu et al. (2012).

Para vectores con estructura de dependencia **CI**, Sordo, Suárez-Lloréns y Bello (2013) prueban que

$$X_i \leq_{st} \{X_i | S > F_S^{-1}(p)\}, \text{ para } i=1, \dots, n, \text{ para todo } p \in (0, 1), \quad (8)$$

obteniendo así una cota inferior para (5) que mejora sustancialmente la cota inferior dada en (6). Esta desigualdad formaliza la idea intuitiva de que  $X_i$  necesitará una asignación de capital mayor en el caso de que  $X_i$  forme parte de un vector aleatorio con crecimiento condicional que en el caso de formar parte de un vector de componentes independientes.

El objetivo del presente trabajo es ilustrar, con una aplicación basada en datos reales del sector asegurador español, los resultados del trabajo Sordo, Suárez-Lloréns y Bello (2013) que han sido recopilados en esta introducción.

## 2. UNA ILUSTRACIÓN

Al objeto de ilustrar gráficamente los resultados, hemos realizado un estudio a partir de datos reales extraídos de la base de datos suministrada por la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones<sup>1</sup>, órgano administrativo dependiente del Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España. Los datos se han extraído de la cuenta técnica del seguro no vida, considerada para el total del sector (entidades aseguradoras españolas), perteneciente a la cuenta de pérdidas y ganancias de cada boletín trimestral. Nuestro propósito es estudiar la contribución de cada uno de los ramos del sector multirriesgo al riesgo total del sector, cuando éste se evalúa mediante el **TCE** de las primas agregadas para cierto cuantil. La tabla 1 contiene las primas devengadas (expresadas en miles de euros) de cada uno de los ramos para los 31 trimestres comprendidos entre el primer trimestre de 2005 y el tercer trimestre del 2012.

Tabla 1

Año	Trim.	MULTIRRIESGO HOGAR	MULTIRRIESGO COMERCIO	MULTIRRIESGO COMUNIDADES	MULTIRRIESGO INDUSTRIALES	OTROS MULTIRRIESGOS	TOTAL MULTIRRIESGOS
2005	1	608.470.937	146.418.881	141.001.508	342.687.503	43.894.741	1.282.473.570
2005	2	1.219.789.683	290.278.294	274.527.124	596.658.776	81.159.815	2.462.413.692
2005	3	1.789.354.789	406.692.767	377.192.280	807.247.014	93.607.899	3.474.094.749
2005	4	2.418.244.090	552.612.163	507.098.866	1.073.503.378	115.753.822	4.667.212.320
2006	1	870.996.175	156.562.430	153.014.530	308.120.096	34.956.709	1.405.456.470
2006	2	1.372.422.201	311.182.284	299.249.202	697.230.010	66.253.929	2.746.338.627
2006	3	2.010.051.378	435.497.521	411.494.894	956.011.063	91.715.080	3.904.769.937
2006	4	2.697.622.279	590.230.504	553.720.963	1.254.675.646	142.339.617	5.238.588.009
2007	1	741.036.325	166.666.557	166.867.618	428.160.046	40.323.556	1.543.054.102
2007	2	1.501.913.137	329.730.579	325.121.954	757.481.666	80.869.297	2.995.116.633
2007	3	2.169.639.466	460.832.166	447.181.843	1.017.366.327	110.952.763	4.205.972.566
2007	4	2.917.175.205	624.503.057	600.074.218	1.324.910.502	150.722.470	5.617.392.058
2008	1	798.487.651	176.409.200	183.295.148	469.542.193	42.615.735	1.660.444.916
2008	2	1.608.369.057	348.516.530	357.137.540	845.400.758	89.351.821	3.248.765.706
2008	3	2.358.235.181	501.481.138	492.828.470	1.137.499.892	118.215.078	4.608.258.729
2008	4	3.187.317.132	621.561.189	662.218.243	1.516.485.696	142.994.573	6.130.556.834
2009	1	863.835.198	174.659.837	198.361.304	485.054.618	36.098.419	1.758.009.366
2009	2	1.727.987.299	351.731.021	384.392.694	881.010.811	67.137.650	3.412.238.474
2009	3	2.516.232.755	485.229.343	528.298.495	1.200.140.230	89.104.716	4.819.003.539
2009	4	3.379.570.364	654.297.347	707.100.046	1.572.043.850	124.000.350	6.437.100.585
2010	1	880.310.338	166.547.758	199.628.548	393.716.161	33.790.885	1.673.993.691
2010	2	1.761.494.416	330.073.166	387.439.538	771.165.999	62.037.356	3.312.210.475
2010	3	2.562.595.860	454.243.017	531.877.968	1.090.842.975	85.160.122	4.724.719.341
2010	4	3.448.532.486	615.170.557	708.490.034	1.441.274.371	115.213.809	6.329.681.258
2011	1	913.934.949	185.456.120	209.421.260	420.086.490	34.026.961	1.742.925.779
2011	2	1.824.426.053	332.162.367	407.832.190	834.406.461	62.166.646	3.480.993.317
2011	3	2.054.037.208	458.205.070	500.051.245	1.197.072.959	80.432.328	4.956.458.469
2011	4	3.574.351.696	611.956.321	751.275.317	1.551.947.961	106.027.702	6.595.462.027
2012	1	954.684.778	158.061.753	215.920.976	465.149.136	30.768.641	1.826.495.233
2012	2	1.905.104.288	324.993.457	419.405.984	908.761.377	59.882.317	3.617.947.433
2012	3	2.751.664.728	444.971.593	573.736.438	1.326.700.902	82.438.274	5.179.511.936

Denotamos por  $(R_1, \dots, R_5)$  a la cartera con los 5 ramos del sector multirriesgo y por  $S = \sum_{i=1}^5 R_i$  al riesgo agregado. Comenzamos estudiando la dependencia entre

<sup>1</sup> <http://www.dgsfp.mineco.es/>

los distintos ramos. Haciendo uso del paquete “copula” del software estadístico *R* obtenemos la matriz de correlaciones que se muestra en la tabla 2.

**Tabla 2**

	<b>Comercio</b>	<b>Comunid.</b>	<b>Hogar</b>	<b>Industria</b>	<b>Otros</b>
<b>Comercio</b>	1.0000000	0.9616665	0.9673242	0.9678848	0.9468435
<b>Comunid.</b>	0.9616665	1.0000000	0.9990166	0.9909416	0.8410998
<b>Hogar</b>	0.9673242	0.9990166	1.0000000	0.9917267	0.8525066
<b>Industria</b>	0.9678848	0.9909416	0.9917267	1.0000000	0.8670767
<b>Otros</b>	0.9468435	0.8410998	0.8525066	0.8670767	1.0000000

La elevada correlación evidencia una fuerte estructura de dependencia entre los distintos ramos. Por otra parte, el test de Kolmogorov-Smirnoff sugiere la normalidad de cada uno de los ramos (la tabla 3 muestra los correspondientes p-valores).

**Tabla 3**

<p>Comercio (<math>p</math>-valor) = 0.7123,  Comunidades (<math>p</math>-valor) = 0.7193,  Hogar (<math>p</math>-valor) = 0.7123,  Industria (<math>p</math>-valor) = 0.7553,  Otros (<math>p</math>-valor) = 0.8022.</p>
--

Para ajustar la estructura de dependencia hemos realizado un test de bondad de ajuste basado en la comparación de la cópula empírica y una estimación paramétrica de una cópula gaussiana. Los parámetros de ajuste de la cópula (las correlaciones entre los 5 componentes del vector) así como los errores de muestreo se muestran en la tabla 4. El p-valor obtenido, 0.4181, nos permite admitir razonablemente que el vector en estudio sigue una distribución Normal Multivariante.

**Tabla 4**

<b>Estimate</b>	<b>Std. Error</b>	<b>z value</b>	<b>Pr(&gt; z )</b>
rho.1	0.9454378	0.022305936	42.38503
rho.2	0.9985361	0.001443062	691.95645
rho.3	0.9888079	0.007177038	137.77382
rho.4	0.7926101	0.036287414	21.84256
rho.5	0.9363206	0.023949915	39.09494
rho.6	0.9721593	0.015183118	64.02896
rho.7	0.9434842	0.018891274	49.94286
rho.8	0.9864811	0.007236143	136.32693
rho.9	0.7758805	0.039312241	19.73636
rho.10	0.8539483	0.036543621	23.36792

Es conocido que la cópula gaussiana multivariante con correlaciones no negativas verifica la propiedad **CI** (ver, por ejemplo, Muller y Scarsini, 2005). Por tanto, (6) y (8) nos aseguran que para  $i=1,\dots,5$  y para cada  $p \in (0,1)$  se tiene

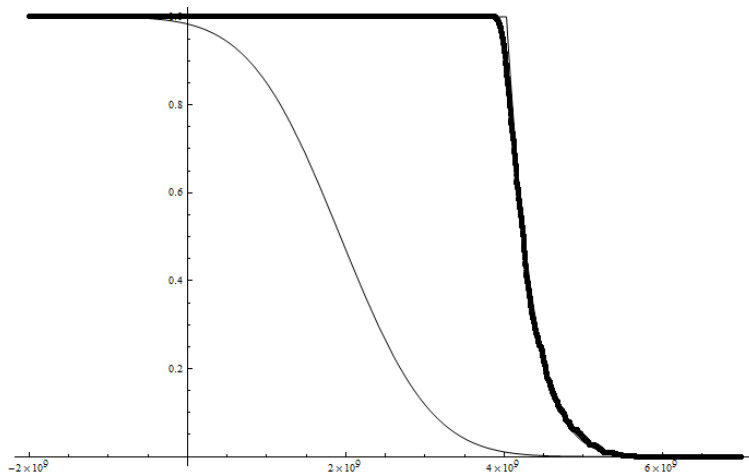
$$R_i \leq_{st} \{R_i | S > F_S^{-1}(p)\} \leq_{st} \{R_i | R_i > F_i^{-1}(p)\}$$

La expresión anterior nos dice que la distribución condicionada que describe la contribución de cada ramo al riesgo total está comprendida entre la distribución marginal del ramo y su truncamiento en el p-cuantil. Dado que las cotas sólo requieren la distribución marginal, su tratamiento es mucho más simple que la distribución condicionada que se acota.

Es interesante observar que la función de supervivencia de la variable

$$\{R_i | S > F_S^{-1}(p)\}$$

estará más cerca de una cota u otra en función del grado de dependencia de las componentes del vector. Al objeto de ilustrar esta afirmación, hemos simulado, a partir de una muestra de 50000 observaciones del vector, dicha función de distribución cuando  $R_i$  describe las reclamaciones del ramo HOGAR. La figura 1 describe las cotas inferior y superior así como dicha función de distribución simulada.



**Figura 1**

En línea gruesa se representa la función de supervivencia simulada de la variable aleatoria

$$\{R_i | S > F_S^{-1}(0.99)\},$$

cuando  $R_i$  describe el ramo HOGAR. En líneas más finas, se representan las cotas inferior y superior, donde se ha tenido en cuenta que el vector bajo estudio tiene una estructura CI.

Como se observa en la figura 1, la función de distribución simulada está muy próxima a la cota superior. Esto se debe a la fuerte relación de dependencia entre los distintos ramos, próxima a la relación de comonotonía, situación en la que, según (7) se alcanza la cota superior. Por tanto, para evaluar probabilidades referentes a la contribución marginal de cada ramo con respecto al sector multirriesgo global es suficiente considerar las probabilidades marginales de dichos ramos.

## AGRADECIMIENTOS

Miguel A. Sordo y Alfonso Suárez-Lloréns agradecen la financiación del Ministerio de Ciencia e Innovación (proyecto MTM2009-08326) y de la Consejería de Economía, Innovación y Ciencia (proyecto P09-SEJ-4739).

## BIBLIOGRAFÍA

Artzner, P.; Delbaen, F.; Eber, J.M.; Heath, D. (1999). "Coherent measures of Risk". *Mathematical Finance*, 9, 203-228.

Asimit, A.V.; Furman, E.; Tang, Q.; Vernic, R. (2001). "Asymptotics for risk capital allocations based on Conditional Tail Expectation". *Insurance: Mathematics and Economics*, 49, 310-324.

Aubin, J.P. (1981). "Cooperative fuzzy games". *Mathematics of Operation Research*, 6, 1-13.

Barlow, R.E.; Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. New York: Holt, Rinehart, and Winston.

Bhalakrishan, N.; Belzunce, F.; Sordo, M.A.; Suárez-Lloréns, A. (2012). "Increasing directionally convex orderings of random vectors having the same copula and their use in comparing ordered data". *Journal of Multivariate Analysis*, 105, 45-54.

Belzunce, F.; Suárez-Lloréns, A.; Sordo, M. A.(2012). "Comparison of increasing directionally convex transformations of random vectors with a common copula". *Insurance: Mathematics and Economics*, 50, 385-390.

Cai, J.; Li, H. (2005). "Conditional tail expectations for multivariate phase-type distributions". *Journal of Applied Probability*, 42, 810-825.

Cai, J.; Wei, W. (2012a). "On the invariant properties of notions of positive dependence and copulas under increasing transformations". *Insurance: Mathematics and Economics*, 50, 43-49.

Cai, J.; Wei, W. (2012b). "Optimal reinsurance with positively dependent risks". *Insurance: Mathematics and Economics*, 50, 57-63.

Chiragiev, A.; Landsman, Z. (2007). "Multivariate Pareto portfolios: TCE-based capital allocation and divided differences". *Scandinavian Actuarial Journal*, 4, 261–280.

Cummins, J.D. (2000). "Allocation of capital in the insurance industry". *Risk Management and Insurance Review*, 3, 7-27.

Denuit, M.; Dhaene, J.; Goovaerts, M.J.; Kaas, R.(2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks*. John Wiley & Sons.

Dhaene, J.; Denuit, M.; Goovaerts, M.; Kaas, R.; Vyncke, D. (2002a)."The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory". *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 3-33.

Dhaene, J.; Denuit, M.; Goovaerts, M.; Kaas, R.; Vyncke, D.(2002b)"The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications". *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 133-161.

Dhaene, J.; Tsanakas, A.; Valdez, E.; Vanduffel, S.(2011). "Optimal capital allocation principles". *Journal of Risk and Insurance*, 78.

Furman, E.; Landsman, Z. (2005). "Risk capital decomposition for a multivariate dependent gamma portfolio". *Insurance: Mathematics and Economics*, 37, 635-649.

Furman, E.; Landsman, Z. (2008). "Economic capital allocations for non-negative portfolios of dependent risks". *ASTIN Bulletin*, 38, 601-619.

Furman, E.; Landsman, Z. (2010). "Multivariate Tweedie distributions and some related capital-at-risk analyses". *Insurance: Mathematics and Economics*, 46, 351-361.

Furman, E.; Zitikis, R. (2008). "Weighted premium calculation principles". *Insurance: Mathematics and Economics*, 42, 459-465.

Kalkbrener, M. (2005). "An axiomatic approach to capital allocation". *Mathematical Finance*, 15, 425-437.

Karlin, S.; Rinott, Y. (1980). "Classes of orderings of measures and related correlation inequalities". *Journal of Multivariate Analysis*, 10, 467-498.

Landsman, Z.; Valdez, E. (2003). "Tail conditional expectation for elliptical distributions". *North American Actuarial Journal*, 7, 55-118.

Lehmann, E. L. (1966). "Some concepts of dependence". *Annals of Mathematical Statistics*, 37, 1137-1153.

Lu, Z.; Liu, L.; Zhang, J.; Meng, L. (2012). "Optimal insurance under multiple sources of risk with positive dependence". *Insurance: Mathematics and Economics*, 51, 462-471.

Müller, A.; Scarsini, M. (2001). "Stochastic comparison of random vectors with a common copula". *Mathematics of Operation Research*, 26, 723-740.

Müller, A.; Scarsini, M. (2005). "Archimedean copulae and positive dependence". *Journal of Multivariate Analysis*, 93, 434-445.

Overbeck, L. (2000). "Allocation of economic capital in loan portfolios". In J. Franke, W. Haerdle and G. Stahl (eds.), *Measuring Risk in Complex Systems*, Springer.

Panjer, H. (2002). "Measurement of risk, solvency requirements, and allocation of capital within financial conglomerates". *Institute of Insurance and Pension Research*, University of Waterloo Research Report, 01-15.

Sarkar, S. K.; Chang, C.K. (1997). "The Simes method for multiple hypothesis testing with positively dependent test statistics". *Journal American Statistics Association*, 92, 1601-1608.

Shaked, M.; Spizzichino, F. (1998). "Positive dependence properties of conditionally independent random lifetimes". *Mathematics of Operation Research*, 23, 944-959.

Sordo, M.A.; Suárez-Lloréns, A.; Bello, A. (2013). "Stochastic Bounds for Conditional Distributions under Positive Dependence". Aceptado en *Insurance: Mathematics and Economics*.

Tasche, D. (1999). "Risk contributions and performance measurement". *Working paper*, Technische Universität München.

Venter, G.G. (2004). "Capital allocation survey with commentary". *North American Actuarial Journal*, 2, 96-107.



## Ponencia 16

### UNA DISTRIBUCIÓN DE BOREL–TANNER MODIFICADA Y APLICACIONES

Emilio Gómez-Déniz, Francisco J. Vázquez–Polo y Victoriano J. García

#### RESUMEN

En este trabajo se estudia una familia uniparamétrica de distribuciones de probabilidad discretas que presenta algunas ventajas al compararla con la distribución de Poisson para describir datos relativos a seguros. La distribución estudiada tiene un rango de valores no negativos, con un peso notable en la probabilidad del valor cero, y es sobre-dispersa. En consecuencia, puede ser adecuada para modelar datos con alta frecuencia de ceros y mostrando alta dispersión. La distribución se obtiene a partir de una sencilla modificación de la distribución de Borel-Tanner, prácticamente no utilizada por la comunidad científica de estadísticos hasta el momento.

**Key Words:** Distribución Borel-Tanner, Modelo de Riesgo Colectivo, Covariable, Estimación, Seguro sanitario.

#### 1. INTRODUCCIÓN

La distribución de Borel-Tanner es un modelo probabilístico discreto, propuesto hace más de medio siglo y que, hasta donde los autores conocemos, no ha recibido atención en la comunidad estadística. La función de masa de probabilidad de esta distribución aparece en Haight and Breuer (1960), definida por:

$$\Pr(X = x) = A(x, r)e^{-\alpha x}\alpha^{x-r}, \quad x = r, r + 1, \dots \quad (1)$$

donde  $\alpha > 0$  y  $r$  es un entero positivo, y donde

$$A(x, r) = \frac{r}{(x - r)!}x^{x-r-1}.$$

Por otro lado, Haight (1961) propone una función de probabilidad *análoga a la Borel-Tanner*, definida como:

$$\Pr(X = x) = B(x, r) \frac{\alpha^{x-r}}{(1 + \alpha)^{2x-r}}, \quad (2)$$

donde

$$B(x, r) = \frac{r}{x} \binom{2x - r - 1}{x - 1}.$$

En el presente trabajo, centraremos nuestra atención en la distribución con la f.m.p. definida en (2). Propondremos una versión modificada de esta distribución, con soporte en los enteros no negativos, adecuada para modelar datos relativos a seguros. Se puede probar empíricamente que, por ejemplo, en seguros de responsabilidad civil de automóviles, el valor cero es extremadamente frecuente, es decir, se observa una clara unimodalidad en el valor cero. Esto ocurre igualmente en otros tipos de seguros, como los de salud, de los que es también una característica habitual la sobre-dispersión, i.e. la varianza es mayor que la media de los datos. Estas dos características están presentes en el modelo que proponemos, lo que nos lleva a considerarlo adecuado para este y otros tipos de datos relativos a seguros. Para conocer más detalles acerca de la importancia del vértice cero y la sobre-dispersión, ver Klugman *et al.* (1998), Meng *et al.* (1999), Kokonendji and Khoudar (2004) y Gómez--Déniz *et al.* (2008, 2011), entre otros.

Ponemos de manifiesto la aplicabilidad del modelo aquí propuesto mediante un ejemplo práctico. Realizamos un ajuste al número de ingresos hospitalarios en Estados Unidos entre la población de 65 años o más de edad, usando distintas variables exploratorias y datos reales usados en Deb and Trivedi (1997). En este ejemplo real se comprueba el buen funcionamiento del modelo en comparación con el más habitual, de Poisson, ajustados mediante el método de máxima log-verosimilitud.

El resto de contenidos del trabajo se estructura como sigue: en la Sección 2 presentamos la versión modificada de la distribución Borel-Tanner que proponemos, y mostramos algunas de sus propiedades, incluyendo algunos resultados importantes relacionados con su aplicación a modelos de seguros. En la Sección 3 mostramos métodos de estimación de parámetros. En la Sección 4 mostramos un ejemplo con datos reales, y concluimos con una sección final de conclusiones.

## 2. VERSIÓN MODIFICADA DE LA DISTRIBUCIÓN DE BOREL-TANNER

En esta sección proponemos una versión modificada de la distribución de Borel-Tanner definida en (2), trasladando su conjunto soporte a los enteros no negati-

vos. Se obtiene fácilmente que la función de masa de probabilidad resultante puede escribirse en la forma:

$$\Pr(X = x) = \frac{\Gamma(2x + 1)}{\Gamma(x + 2)\Gamma(x + 1)} \frac{\alpha^x}{(1 + \alpha)^{2x+1}}, \quad x = 0, 1, \dots \quad (3)$$

siendo  $0 < \alpha < 1$ .

En adelante, denotaremos que una variable aleatoria  $X$  sigue la función de probabilidad (3) por  $X \sim MBT$ , recordando que se trata de una versión modificada de la distribución de Borel-Tanner.

La media y la varianza de esta variable aleatoria son:

$$E(X) = \frac{\alpha}{1 - \alpha}, \quad (4)$$

$$\text{var}(X) = \frac{\alpha(1 + \alpha)}{(1 - \alpha)^3}, \quad (5)$$

Puesto que

$$\frac{\text{var}(X)}{E(X)} = 1 + \frac{\alpha(3 - \alpha)}{(1 - \alpha)^2} > 1$$

podemos afirmar que la distribución es sobre-dispersa.

Adicionalmente, obtenemos una expresión de su función generatriz de probabilidad:

$$G_X(z) = \frac{1 + \alpha}{2\alpha z} \left[ 1 - \frac{\sqrt{1 + \alpha(\alpha - 4z + 2)}}{1 + \alpha} \right], \quad |z| < 1.$$

La función de distribución de esta variable aleatoria también puede expresarse de forma explícita. Dado que

$$F(x) = \sum_{j=0}^x \frac{\Gamma(2j + 1)}{\Gamma(j + 2)\Gamma(j + 1)} \frac{\alpha^j}{(1 + \alpha)^{2j+1}},$$

la FDD de una variable  $MBT$  se puede escribir como:

$$\Pr(X \leq x) = 1 - \frac{\Gamma(x + \frac{3}{2})(4\alpha)^{x+1}}{\Gamma(x + 3)\sqrt{\pi}(1 + \alpha)^{2x+3}} {}_2F_1 \left( 1, x + \frac{3}{2}; x + 3; \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2} \right), \quad (6)$$

donde

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!},$$

es la función hipergeométrica, y

$$\begin{aligned} (a)_j &= a(a+1) \dots (a+j-1) = \Gamma(a+j)/\Gamma(a), \quad j \geq 1, \\ (a)_0 &= 1, \end{aligned}$$

es el símbolo de Pochhammer.

Para la computación de las probabilidades de esta distribución puede ser de ayuda la siguiente fórmula recursiva:

$$\Pr(X = x) = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} \frac{2x-1}{x+1} \Pr(X = x-1), \quad x = 1, 2, \dots,$$

siendo  $\Pr(X = 0) = 1/(1+\alpha)$ .

Al verificarse la relación

$$\frac{\Pr(X = x)}{\Pr(X = x-1)} - \frac{\Pr(X = x+1)}{\Pr(X = x)} = \frac{-6\alpha}{(1+\alpha)^2} \frac{1}{(x+1)(x+2)} < 0,$$

se puede afirmar que la distribución *MBT* es log-convexa (infinitamente divisible) y que tiene razón de fallo decreciente (DFR). Para más detalles sobre estas propiedades, ver Gupta *et al.* (1997) y Warde and Katti (1971). El hecho de que la razón de probabilidades  $\Pr(X = j)/\Pr(X = j-1)$ ,  $j = 1, 2, \dots$  forme una secuencia monótona creciente implica que  $\Pr(X = x)$  sea a su vez una secuencia decreciente (ver Johnson and Kotz, 1982: 75). De esta forma, se obtiene que la distribución es unimodal, con moda en el valor  $X = 0$ .

Por otra parte, según la Proposición 9 de Karlis and Xekalaki (2005), cualquier distribución infinitamente divisible se puede obtener como un modelo de Poisson compuesto, por lo que concluimos que la f.m.p. definida en (3) puede obtenerse como modelo de Poisson compuesto.

Además, las distribuciones infinitamente divisibles juegan un importante papel en muchas áreas de la estadística como, por ejemplo, los procesos estocásticos y la estadística actuarial. Cuando una distribución  $G$  es infinitamente divisible para cualquier entero  $x \geq 2$ , entonces existe una distribución  $G_x$  tal que  $G$  es la  $x$ -veces convolución de  $G_x$ , lo que se denota por  $G = G_x^{*x}$ .

Desde el momento en que la nueva distribución *MBT* es infinitamente divisible, el valor de su varianza se acota superiormente por el valor correspondiente a  $\alpha = 1$  (ver Johnson and Kotz, 1982, p. 75), es decir:

$$\text{var}(X) \geq \frac{\Pr(X = 1)}{\Pr(X = 0)} = \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2}.$$

### 3. ESTIMACIÓN

En esta sección estudiamos diferentes métodos de estimación del parámetro  $\alpha$  de la distribución *MBT*.

Usando (4), es inmediato que un estimador insesgado de  $\alpha$  es el estadístico

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x}}{1 + \bar{x}}, \quad (7)$$

donde  $\bar{x}$  es la media muestral.

La alta frecuencia esperada del valor cero lleva a considerar un método alternativo de estimación. El método de la proporción de ceros, comentado a continuación, funciona asintóticamente bien cuando la frecuencia relativa del valor cero es relativamente alta (ver Alanko and Duffy, 1996). En el caso uniparamétrico es necesario tan sólo resolver una ecuación para obtener la estimación del parámetro.

Denotando por  $\tilde{p}_0$  la proporción muestral de ceros, la estimación del parámetro viene dada por

$$\hat{\alpha} = \frac{1 - \tilde{p}_0}{\tilde{p}_0}.$$

Consideremos una muestra  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  del modelo (3). A partir de ella, la función de log-verosimilitud es proporcional a la expresión

$$\ell(\alpha) \propto n [\bar{x} \log \alpha - (2\bar{x} + 1) \log(1 + \alpha)]. \quad (8)$$

De esta expresión (8) se deduce la ecuación normal:

$$\frac{\partial \log \ell(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\bar{x}}{\alpha} - \frac{2\bar{x} + 1}{1 + \alpha} = 0,$$

a partir de la cual se obtiene el EMV de  $\alpha$ , que coincide con el obtenido en (7). De este modo, al igual que ocurre en la distribución de Poisson, el estimador por el

método de los momentos y el de máxima verosimilitud son coincidentes, para cualquier tamaño de muestra,  $n$ .

La derivada parcial de segundo orden evaluada sobre (7) es igual a

$$-\frac{(1 + \bar{x})^3}{\bar{x}(2\bar{x} + 1)} < 0,$$

lo que nos asegura que en el estimador  $\alpha_{MV}$  del parámetro  $\alpha$  se alcanza el máximo de verosimilitud.

**Proposición 1.** *El único estimador de máxima verosimilitud,  $\alpha_{MV}$ , del parámetro  $\alpha$  es consistente y asintóticamente normal, de modo que*

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha) \xrightarrow{d} N(0, I^{-1}(\alpha)),$$

donde  $I(\alpha)$  es la Información de Fisher sobre el parámetro  $\alpha$ .

#### **Demostración:**

La distribución de probabilidad discreta con f.m.p. (2) verifica las condiciones de regularidad (ver Lehmann and Casella, 1998, p. 449) bajo las cuales el único estimador de máxima verosimilitud  $\hat{\alpha}$  de  $\alpha$ , es consistente y asintóticamente normal. La comprobación de las condiciones de regularidad es la siguiente. Primero, el parámetro  $\alpha$  está en un subconjunto de la recta real y el rango de la variable es independiente del valor de  $\alpha$ . A partir de (log), se comprueba que  $E(\partial \log \Pr(X = x; \alpha) / (\partial \alpha)) = 0$ . Como  $\partial^2 \ell(\alpha) / (\partial \alpha^2) |_{\alpha = \hat{\alpha}} < 0$ , la Información de Fisher es positiva. Finalmente, tomando la función  $M(x) = 2x/\alpha^3$ , obtenemos que

$$\left| \frac{\partial^3 \log \Pr(X = x; \alpha)}{\partial \alpha^3} \right| = \left| \frac{2x}{\alpha^3} - \frac{2(2x + 1)}{(1 + \alpha)^3} \right| \leq M(x),$$

donde  $E(M(x)) = 2/(\alpha(1-\alpha)) < \infty$ . Con lo que concluye la demostración.

Utilizando el Corolario 3.11 de Lehmann and Casella (1998, p. 450), concluimos que el estimador de máxima verosimilitud de  $\alpha$  es asintóticamente eficiente.

## **4. APLICACIÓN NUMÉRICA**

En esta sección examinamos una aplicación del modelo propuesto para la descripción del número de ingresos hospitalarios, en Estados Unidos, de personas

mayores (con 65 o más años). Estas hospitalizaciones suponen una parte importante del gasto anual en atención hospitalaria del sector público dado que, en los programas de seguros del gobierno estadounidense, se destina el mayor porcentaje de costes de atención sanitaria a esta población, cuyo peso poblacional se prevé aumentará en un futuro próximo.

Los datos analizados proceden de los archivos de datos de la revista *Journal of Applied Econometrics*, 1997, y fueron empleados originalmente en Deb and Trivedi (1997) para analizar varias medidas del uso de atenciones sanitarias, a partir de una muestra de 4406 hogares unipersonales en 1987. En el presente estudio, utilizaremos el número de ingresos hospitalarios (HOSP) como variable dependiente. Esta variable presenta dos características interesantes: la sobre-dispersión y la existencia de un elevado número de no-usuarios (80,36%). La media muestral es 0,30 y la desviación típica es 0,75. Las variables explicativas son: (1) una variable dicotómica (EXCLHLTH) a la que se asigna el valor 1 cuando la auto-percepción de salud es excelente; (2) una variable dicotómica (POORHLTH) a la que se asigna valor 1 si dicha percepción es mala; (3) una variable (NUMCHRON) con el recuento de enfermedades crónicas y condiciones (cáncer, ataques cardíacos, etc.); (4) Edad (AGE) dividida por 10; (5) una variable dicotómica (MALE) asignando el valor 1 a los varones; (6) una variable dicotómica (MARRIED) para el estado civil; (7) ingresos familiares (FAMINC) en decenas de miles de dólares; (8) una variable dicotómica (EMPLOYED) a la que se asigna el valor 1 si el paciente tiene contrato laboral; y (9) una variable dicotómica (PRIVINS) a la que se asigna el valor 1 si el paciente tiene un seguro sanitario privado. Ver Deb and Trivedi (1997) para más detalles sobre la definición de estas variables y el resumen estadístico de los mismos. *Medicaid* es el programa estadounidense de asistencia sanitaria para personas con pocos ingresos o recursos, fundado conjuntamente por el gobierno federal y los estados, administrado por éstos últimos.

Dado que la variable dependiente es sobre-dispersa, el modelo de Poisson puede resultar inadecuado para la estimación a partir de estos datos. En Table 1 mostramos los valores de ajuste usando la distribución de Poisson con parámetro  $\alpha > 0$  y la distribución *MBT*. Se detecta en los datos un repunte excesivo de ceros (representando la no hospitalización de personas mayores) respecto del valor predicho por la distribución de Poisson. Además, la distribución *MBT* produce claramente un mejor ajuste global, evaluado tanto mediante la función de log-verosimilitud como mediante el test  $\chi^2$ .

**Table 1**

Valores de ajuste para el número de estancias hospitalarias in Deb and Trivedi (1997)

Number of stays	Observed	Expected	
		Poisson	MBT
0	3541	3277.26	3586.86
1	599	969.94	542.87
2	176	143.53	164.32
3	48	14.17	62.17
4	20	1.04	26.35
5	12	0.06	11.96
6	5	0.00	5.69
7	1	0.00	2.80
8	4	0.00	1.41
9	0	0.00	0.72
Total	4406	4406	4404.15
$\hat{\alpha}$		0.295	0.295
S.E.		0,008	0.011
$\ell_{\max}$		-3304.51	-3012.01
$\chi^2(5)$		> 10000	12.02

Sin embargo, la línea de trabajo en los servicios sanitarios es que la variable dependiente es una variable de recuento, y que el método apropiado de análisis requiere tener en cuenta las covariables. Para más información sobre este detalle, ver por ejemplo Duan *et al.* (1983), Christenses *et al.* (1987), Cameron *et al.* (1988), Cartwright *et al.* (1992) y Deb and Trivedi (1997), entre otros.

Siguiendo esta premisa, se puede realizar una reparametrización de la función de probabilidad (3) a partir de (4), asumiendo  $\alpha = \theta/(1+\theta)$ ,  $\theta > 0$ , donde  $\theta$  es el valor de la media de la distribución. Esta modificación facilita el uso de las covariables, como explicamos a continuación. La f.m.p. (nd) se re-escrive ahora en la forma

$$\Pr(X = x) = \frac{1}{1+x} \frac{\Gamma(2x+1)}{(\Gamma(x+1))^2} \frac{\theta^x (1+\theta)^{1+x}}{(1+2\theta)^{2x+1}}, \quad (9)$$

para  $x = 0, 1, \dots$ , y  $\theta > 0$ .



El modelo *a priori* más habitual es el Exponencial, asegurando la no negatividad del mismo. Esto es:

$$\log \theta_i = \sum_{s=1}^q x_{is} \beta_s, \quad i = 1, \dots, t, \quad (10)$$

obteniendo el convencional modelo log-lineal de modo que  $E(X) = \exp\{\beta^t \mathbf{x}\}$ , donde  $\mathbf{x}$  es el vector de covariables y  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)^t$  es el vector de coeficientes de regresión, desconocido.

Denotemos ahora por  $(y_i, \mathbf{x}_i)$  los datos de una muestra aleatoria de tamaño  $n$  con variable de recuento  $y_i$ , y vector de covariables  $\mathbf{x}_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ . Entonces, la función de log-verosimilitud, supuesto el modelo (9) y (10), viene dada por

$$\ell \equiv \ell(\beta_1, \dots, \beta_q) \propto \sum_{i=1}^n y_i \theta_i + \sum_{i=1}^n (1 + y_i) \log(1 + \theta_i) - \sum_{i=1}^n (2y_i + 1) \log(1 + 2\theta_i).$$

Las ecuaciones normales que se obtienen son

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n y_i x_{ij} + \sum_{i=1}^n \frac{x_{ij} \theta_i (1 + y_i)}{1 + \theta_i} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_{ij} \theta_i (1 + 2y_i)}{1 + 2\theta_i} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q.$$

Las derivadas parciales de segundo orden que se obtienen son

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_j^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_{ij}^2 (1 + y_i) \theta_i}{(1 + \theta_i)^2} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_{ij}^2 (1 + 2y_i) \theta_i}{(1 + 2\theta_i)^2}, \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_j \partial \beta_l} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_{ij} x_{il} (1 + y_i) \theta_i}{(1 + \theta_i)^2} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_{ij} x_{il} (1 + 2y_i) \theta_i}{(1 + 2\theta_i)^2} \end{aligned}$$

para  $j = 1, 2, \dots, q$ , y  $j \neq l$ .

**Table 2**

Estimaciones de la distribución de Borel-Tanner modificada y la distribución de Poisson  
(in paréntesis)

Variable	$\hat{\beta}_j$	S.E.	$t$ -Wald	Pr >   $t$
INTERCEPT	-4.051(-3.376)	0.55(0.34)	-7.41(-9.78)	0.00(0.00)
EXCLHLTH	-0.681(-0.726)	0.20(0.17)	-3.27(-4.13)	0.00(0.00)
POORHLTH	0.621(0.618)	0.12(0.06)	4.96(9.12)	0.00(0.00)
NUMCHRON	0.316(0.263)	0.03(0.02)	8.87(14.34)	0.00(0.00)
AGE	0.271(0.178)	0.07(0.04)	3.85(4.09)	0.00(0.00)
MALE	0.217(0.131)	0.09(0.06)	2.32(2.11)	0.02(0.03)
MARRIED	-0.054(-0.039)	0.10(0.06)	-0.48(-0.59)	0.62(0.55)
FAMINC	-0.003(0.007)	0.01(0.01)	-0.19(0.76)	0.84(0.45)
EMPLOYED	0.036(0.022)	0.15(0.10)	0.24(0.20)	0.80(0.84)
PRIVINS	0.151(0.197)	0.12(0.07)	1.23(2.53)	0.21(0.01)
MEDICAID	0.170(0.236)	0.16(0.09)	1.00(2.36)	0.31(0.02)

$L_{\max} = -2888.46(-3042.83)$   
 AIC = 5788.91(6107.66)

En la Tabla 2 se recogen las estimaciones de máxima verosimilitud de los modelos de regresión con la distribución de Poisson y de *MBT*. Todos ellos, con las excepciones de MARRIED, FAMINC, EMPLOYED, PRIVINS y MEDICAID, son significativos al 5%. Empleamos el valor de la función de log-verosimilitud y el Criterio de Información de Akaike (AIC) (ver Akaike, 1973) para comparar los modelos estimados. El modelo con menor valor de AIC es el preferible, según este criterio. En la *Tabla 2* se muestra que la distribución propuesta en este trabajo mejora los resultados usando el modelo con la distribución de Poisson según ambos criterios de comparación.

## 5. COMENTARIOS FINALES

En este trabajo se ha presentado una versión modificada de la distribución de Borel-Tanner. La modificación consiste en permitir que el conjunto soporte de la nueva distribución sean los enteros no negativos, es decir, incluido el valor cero. El conjunto soporte de la distribución de Borel-Tanner original se limita a valores enteros positivos.

Debido a esto se obtiene una distribución uniparamétrica sobre-dispersa (con la varianza mayor que la media) y unimodal, con un vértice en el valor cero. Además, la distribución es infinitamente divisible (log-convexa) y, por lo tanto, se puede obtener como modelo de Poisson compuesto. También se verifican Algunas otras propiedades basadas en los resultados en Bardwell (1960).

Además, una simple modificación sobre la función de probabilidad permite incorporar covariables al modelo de manera sencilla. En la aplicación numérica presentada en este trabajo se comparan los resultados obtenidos utilizando el modelo de Poisson y el aquí propuesto, mostrando que la utilización de la distribución Borel-Tanner modificada aquí se propuesta no sólo produce una mejoría significativa con respecto a la distribución de Poisson, sino también una mayor flexibilidad, debido a sus principales propiedades, como la sobre-dispersión.

## **AGRADECIMIENTOS:**

EGD y FJVP parcialmente financiados por el proyecto ECO2009-14152 (MICINN, Spain). VJG por la Consejería de Innovación y Ciencia (P09-SEJ-4739).

## **REFERENCIAS**

Bardwell, E. (1960). "On Certain Characteristics of Some Discrete Distributions". *Biometrika*, 47, 3/4, 473-475.

Cartwright, W., Hu, S.T. and Huang, L.-F. (1992). "Impact of varying Medigap insurance coverage on the use of medical services of the elderly". *Applied Economics*, 2, 4, 529-539.

Christensen, S, Long, S. and Rodgers, J. (1987). "Acute health care costs for the aged Medicare population: overview and policy options". *Millbank Quarterly*, 65, 397-425.

Deb, P. and Trivedi, P.K. (1997). "Demand for Medical Care by the Elderly: A Finite Mixture Approach". *Journal of Applied Econometrics*, 12, 3, 313-336.

Duan, N., Manning, W., Morris, C. and Newhouse, J. (1983). "A comparison of alternative models for the demand for medical care". *Journal of Business and Economic Statistics*, 1, 115-126.

Gómez-Déniz, E., Sarabia, J.M. and Calderín, E. (2008). "Univariate and multivariate versions of the negative binomial-inverse Gaussian distributions with applications". *Insurance: Mathematics and Economics*, 42, 39-49.

- Gómez-Déniz, E., Sarabia, J.M. and Calderín, E. (2011). "A new discrete distribution with actuarial applications". *Insurance: Mathematics and Economics*, 48, 406-412.
- Gupta, P.L., Gupta, R.C. and Tripathi, R.C. (1997). "On the monotonic properties of discrete failure rates". *Journal of Statistical Planning and Inference*, 65, 255-268.
- Haight, F.A. (1961). "A distribution analogous to the Borel-Tanner". *Bimetrika*, 48, 1,2, 167-168.
- Haight, F.A. and Breuer, M.A. (1960). "The Borel-Tanner distribution". *Biometrika*, 47, 1,2, 143-150.
- Klugman, S., Panjer, H. and Willmot, G. (1998). *Loss Models. From Data to Decisions*. John Wiley and Sons, New York.
- Kokonendji, C. and Khoudar, M. (2004). "On strict arcsine distribution. Communications in Statistics". *Theory and Methods*, 33, 5, 993-1006.
- Lehmann, E.L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*. Springer, New York.
- Meng, S., Yuan, W., Whitmore, G.A. (1999). "Accounting for individual overdispersion in a bonus-malus automobile insurance system". *Astin Bulletin*, 29, 2, 327-337.
- Warde, W.D. and Katti, S.K. (1971). "Infinite divisibility of discrete distributions II". *The Annals of Mathematical Statistics*, 42, 3, 1088-1090.

## Ponencia 17

### EL MODELO DE BOREL–TANNER COMO DISTRIBUCIÓN PRIMARIA EN MODELOS DE RIESGO COLECTIVO

Emilio Gómez-Déniz, Francisco J. Vázquez-Polo y Victoriano J. García

#### RESUMEN

Consideramos una distribución uni-paramétrica discreta como distribución primaria en modelos de riesgo colectivo cuando la distribución secundaria es la Exponencial. El modelo que proponemos presenta algunas ventajas respecto al modelo de Poisson compuesto, habitual en la literatura actuarial. La distribución de probabilidad propuesta se obtiene a partir de la Borel-Tanner, distribución discreta propuesta hace varias décadas, pero nunca antes utilizada para estadística actuarial. Mostramos, en unos ejemplos, cómo el modelo propuesto resulta más apropiado que el habitual de Poisson compuesto para la evaluación de probabilidades acumuladas para valores extremos superiores en las reclamaciones agregadas.

**Keywords:** Distribución Borel-Tanner, Modelo de Riesgo colectivo, Distribución de Poisson compuesta.

#### 1. INTRODUCCIÓN

Entre las ventajas de esta distribución de probabilidad discreta resaltamos que, al contrario que la distribución de Poisson, la de Borel-Tanner es sobre-dispersa, es decir, tiene un valor mayor para la varianza que para la media, y que muestra mayor flexibilidad que aquélla para modelar datos actuariales, que habitualmente incluyen características sobre-dispersas.

La aplicabilidad del modelo se pone en evidencia en este trabajo mediante la modelización de datos empíricos correspondientes a frecuencia de reclamaciones en seguros automovilísticos, lo que nos sitúa en el campo de modelos de riesgo colectivo. El par de datos  $(X, Y)$  representa las dos variables aleatorias de interés. La variable  $X$ , de recuento, representa el número de reclamaciones, mientras que  $Y$  es la suma total de los importes de las reclamaciones (aggregate claim size). Para conocer más detalles sobre modelos de riesgo colectivo, ver Klugman *et al.* (2008), Rolski *et al.* (1999) y Sarabia and Guillén (2008). El principal resultado de

este trabajo es la obtención de la función de densidad de la variable aleatoria *importe total de reclamación* en una expresión cerrada. Esta formulación puede considerarse como una alternativa al modelo de Poisson compuesto, en el que el importe de una reclamación individual se describe mediante una distribución Exponencial, y el número de reclamaciones mediante una distribución de Poisson.

Las restantes secciones de este trabajo se organizan como sigue: en la Sección 2 mostramos algunas propiedades de la distribución de Borel-Tanner modificada. En la Sección 3, presentamos un modelo de riesgo colectivo utilizando la citada distribución de Borel-Tanner modificada como distribución primaria, con la Exponencial como distribución secundaria. Mostramos, en la Sección 4, un análisis comparativo de este modelo con el modelo de Poisson compuesto. Finalmente, añadimos unos breves comentarios en la última Sección 5.

## 2. LA DISTRIBUCIÓN PRIMARIA

En Haight (1961) puede encontrarse la función de masas de probabilidad de la distribución de Borel-Tanner, dada por

$$\Pr(X = x) = B(x, r) \frac{\alpha^{x-r}}{(1 + \alpha)^{2x-r}}, \quad (1)$$

donde

$$B(x, r) = \frac{r}{x} \binom{2x - r - 1}{x - 1}.$$

Proponemos ahora una versión modificada de esta distribución, cuyo soporte es el conjunto de los enteros no negativos (i.e., incluyendo el cero). La función de probabilidad propuesta se define como

$$\Pr(X = x) = \frac{\Gamma(2x + 1)}{\Gamma(x + 2)\Gamma(x + 1)} \frac{\alpha^x}{(1 + \alpha)^{2x+1}}, \quad x = 0, 1, \dots \quad (2)$$

con  $0 < \alpha < 1$ . Alternativamente, se puede escribir en la forma

$$\Pr(X = x) = C_x \frac{\alpha^x}{(1 + \alpha)^{2x+1}}, \quad x = 0, 1, \dots$$

donde  $C_x$  son los números de Catalan. Ver Johnson *et al.* (2005, p. 13).

La media y varianza de una variable aleatoria con esta distribución (2) vienen dadas por las expresiones:

$$E(X) = \frac{\alpha}{1 - \alpha}, \quad (3)$$

$$\text{var}(X) = \frac{\alpha(1 + \alpha)}{(1 - \alpha)^3}. \quad (4)$$

Comprobando que

$$\frac{\text{var}(X)}{E(X)} = 1 + \frac{\alpha(3 - \alpha)}{(1 - \alpha)^2} > 1$$

se concluye que la distribución es sobre-dispersa. La función de distribución de una v.a. con f.m.p. (2) puede escribirse como sigue:

$$\Pr(X \leq x) = 1 - \frac{\Gamma(x + \frac{3}{2})(4\alpha)^{x+1}}{\Gamma(x + 3)\sqrt{\pi}(1 + \alpha)^{2x+3}} {}_2F_1\left(1, x + \frac{3}{2}; x + 3; \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}\right), \quad (5)$$

donde  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  es la función hipergeométrica. Las probabilidades de esta distribución verifican la siguiente propiedad recursiva:

$$\Pr(X = x) = \frac{2\alpha}{(1 + \alpha)^2} \frac{2x - 1}{x + 1} \Pr(X = x - 1), \quad x = 1, 2, \dots,$$

siendo  $\Pr(X = 0) = 1/(1 + \alpha)$ .

Comprobamos también que la distribución es log-convexa o infinitamente divisible. Basta, para ello, tener en cuenta que:

$$\frac{\Pr(X = x)}{\Pr(X = x - 1)} - \frac{\Pr(X = x + 1)}{\Pr(X = x)} = \frac{-6\alpha}{(1 + \alpha)^2} \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} < 0.$$

Como consecuencia de esta última propiedad, podemos decir que esta distribución es unimodal, con moda en el valor cero. Utilizando el hecho de que toda distribución infinitamente divisible definida en los enteros no negativos se puede obtener como un modelo de Poisson compuesto (ver Proposition 9 en Karlis and Xekalaki, 2005), podemos decir que el modelo propuesto en (2) es una distribución de Poisson compuesta.

Además, la propiedad de ser infinitamente divisible tiene otras implicaciones en diversas áreas de la Estadística como, por ejemplo, los modelos estocásticos y la Estadística actuarial. Cuando una distribución  $G$  es infinitamente divisible, entonces, para cualquier entero  $x$  mayor que 1, existe una distribución  $G_x$  tal que  $G$  se obtiene como la convolución,  $x$  veces, de  $G_x$ . Esto se denota como  $G = G_x^{*x}$ .

Es sencillo comprobar que la distribución de Borel-Tanner modificada pertenece a la familia exponencial, lo cual implica algunas propiedades interesantes de cara a la estimación, como la certeza de existencia de una distribución conjugada a priori para el parámetro  $\alpha$ .

### 3 LA DISTRIBUCIÓN DE LA RECLAMACIÓN TOTAL

En la Teoría de riesgo colectivo, la principal variable a considerar es el montante global de reclamación, definido como

$$Y = \sum_{i=1}^X Y_i,$$

donde  $Y_i$  representa el coste de la  $i$ -ésima reclamación, mientras que la variable  $X$  representa el número de reclamaciones. Se asume que los costes de cada reclamación individual son independientes e idénticamente distribuidos, y a su vez independientes del número de reclamaciones,  $X$ . Es sencillo obtener la función de densidad de probabilidad de la variable  $Y$  (ver Nadarajah and Kotz (2006a, 2006b), Klugman *et al.* (2008) y Rolski *et al.* (1999), entre otros), cuya expresión es la siguiente:

$$f_S(y) = \sum_{x=0}^{\infty} \Pr(X = x) f^{x^*}(y),$$

donde  $f^{x^*}(y)$  representa la convolución  $x$  veces de la densidad de la distribución secundaria.

La evaluación numérica de distribuciones compuestas es una de las tareas más importantes en las matemáticas de este campo. Entre los métodos más importantes para llevarla a cabo podemos mencionar la recursión de Panjer y los métodos de transformación. Sobre éste último, varios autores han indicado que los errores de redondeo conducen a la necesidad de considerar la distribución completa, lo cual supone un inconveniente potencial en el caso concreto de las distribuciones de colas pesadas.

Las reclamaciones de gran tamaño son, como es natural, un tema de capital importancia, sobre todo al asociarlo con los reaseguros. En la estadística actuarial, es un hecho completamente asumido que la extrapolación a la cola superior de la distribución ajustada al global de los datos, para la estimación de la probabilidad de un valor extremadamente alto de reclamación puede conducir a la sobrevaloración de ésta. Este hecho tiene un efecto notable al aplicarlo sobre las primas de reaseguros. En esta situación, el reasegurador necesita asegurarse de que la distribución empleada no tiene una cola cuyo peso decrece a cero demasiado rápidamente. Por este motivo, en la computación de primas de reaseguros se han venido usando habitualmente las distribuciones de Pareto y Log-normal. No obstante, cuando el tamaño de la reclamación individual se ha descrito mediante un modelo exponencial, se ha usado habitualmente el modelo de Poisson compuesto,



principalmente por su mayor simplicidad de evaluación. En esta sección, consideramos el modelo discreto alternativo definido en (2).

**Teorema 1:** Si consideramos (1) como distribución primaria y la Exponencial como distribución secundaria, obtenemos que la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $Y$ , definida anteriormente, puede escribirse en la forma:

$$f_S(y) = \frac{1}{(1+\alpha)y} I_1 \left( \frac{2\alpha\sigma y}{(1+\alpha)^2} \right) \exp \left[ -\frac{\sigma(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^2} y \right], \quad y > 0, \quad (6)$$

mientras que  $f_S(0) = 1/(1+\alpha)$ , siendo

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

es decir, la función de Bessel modificada de primera clase.

Para probar este resultado, basta utilizar resultados sobre la convolución  $x$ - veces contenidos en Klugman *et al.* (2008) y Rolski *et al.* (1999), y una serie de tediosos cálculos.

Nótese que la densidad así obtenida tiene una discontinuidad de salto en el origen.

**Proposición 1:** La media y la varianza de una v.a. con la densidad definida en el Teorema 1 se pueden expresar en la forma:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{\sigma} \frac{\alpha}{1-\alpha}, \\ \text{var}(Y) &= \frac{1}{\sigma^2} \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\alpha^2 - \alpha + 2}{(1-\alpha)^2}, \end{aligned}$$

respectivamente.

Para probar estas expresiones, usamos los siguientes resultados probados en Rolski *et al.* (1999):

$$E(Y) = E(X) E(Y_1),$$

$$\text{var}(Y) = E(X) \text{var}(Y_1) + E^2(Y_1) \text{var}(X),$$

y tenemos en cuenta los valores de la media y varianza de la distribución exponencial de parámetro  $\sigma > 0$ , que son, respectivamente,  $1/\sigma$  y  $1/\sigma^2$ .

#### 4. EJEMPLO NUMÉRICO

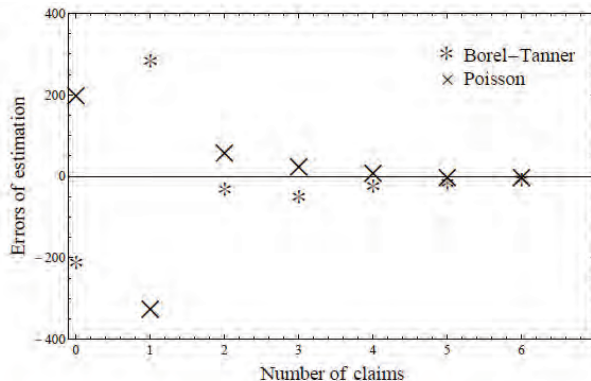
El modelo más habitual para la reclamación global asume las distribuciones de Poisson y Exponencial como primaria y secundaria, respectivamente, de modo que se obtiene (ver Rolski *et al.* (1999), entre otros), como función de densidad para la reclamación global  $Y$ , la siguiente:

$$f_s(y) = \sqrt{\frac{\sigma\alpha}{y}} e^{-(\alpha+\sigma y)} I_1(2\sqrt{\alpha\sigma y}), \quad y > 0, \quad (8)$$

$$f_s(0) = e^{-\alpha}.$$

En este modelo, los parámetros  $\alpha > 0$  y  $\sigma > 0$  se corresponden, respectivamente, a los parámetros de la distribución de Poisson y de la Exponencial, mientras que  $I_1(\cdot)$  es la función de Bessel modificada de primera clase.

Realizamos un estudio comparativo entre este modelo y el aquí propuesto de la distribución Borel-Tanner modificada (Secciones 2 y 3) ajustando unos datos procedentes de un protfolio de seguro automovilístico en Bélgica, del año 1958. Estos datos aparecen, entre otras referencias, en Gossiaux and Lemaire (1981) y en Willmot (1987). Hemos reproducido los datos, cuyas frecuencias son {7840, 1317, 239, 42, 14, 4, 4, 1}. En ellos, se observa sobre-dispersión, dado que la media es 0.2144, para una varianza de 0.2889. A partir de este hecho, el modelo de Borel-Tanner modificada parece más apropiado para el ajuste. Nótese, igualmente, la alta proporción de ceros en los datos.



**Figura 1**  
Differences between observed and expected frequencies (errors of estimation) for data in example

Para la estimación del parámetro  $\alpha$  en ambos modelos (Borel-Tanner modificada y Poisson), emplearemos el método de máxima verosimilitud. Las estimaciones obtenidas son 0.176 y 0.214, respectivamente. Los errores estándar computados son, también respectivamente, 0.0042 y 0.0047.

**Table 1**  
Right-tail cumulative probability of the aggregate claim distribution  
for the set of data considered

Compound Poisson distribution					
$y$	$\sigma = 0.25$	$\sigma = 0.50$	$\sigma = 0.75$	$\sigma = 1.00$	$\sigma = 2.00$
1	0.153942	0.122984	0.098232	0.078446	0.031843
2	0.122984	0.078446	0.049998	0.031843	0.005203
3	0.098232	0.049998	0.025406	0.012889	0.000842
4	0.078446	0.031843	0.012889	0.005203	0.000135
5	0.062633	0.020266	0.006530	0.002095	0.000021
6	0.049998	0.012889	0.003303	0.000842	3.413E-6
7	0.039905	0.008192	0.001669	0.000337	5.377E-7
8	0.031843	0.005203	0.000842	0.000135	8.427E-8
9	0.025406	0.003303	0.000424	0.000054	1.314E-8
10	0.020266	0.002095	0.000213	0.000021	3.042E-9
11	0.016164	0.001329	0.000107	8.584E-6	3.162E-10
12	0.012889	0.000842	0.000054	3.413E-6	4.878E-11
13	0.010277	0.000533	0.000027	1.355E-6	7.500E-12
14	0.008192	0.000337	0.000013	5.377E-7	1.149E-12
15	0.006530	0.000213	6.817E-6	2.129E-7	1.749E-13
16	0.005203	0.000135	3.413E-6	8.427E-8	2.597E-14
17	0.004146	0.000085	1.708E-6	3.330E-8	3.330E-15
18	0.003303	0.000054	8.539E-7	1.314E-8	2.220E-16
19	0.002631	0.000034	4.266E-7	5.185E-9	6.661E-16
20	0.002095	0.000021	2.129E-7	2.042E-9	6.661E-16

**Table 2**  
Right-tail cumulative probability of the aggregate claim distribution  
for the set of data considered

Compound Borel-Tanner distribution					
$y$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.15$	$\sigma = 0.20$	$\sigma = 0.25$	$\sigma = 1.0$
1	0.124973	0.104464	0.087407	0.073208	0.036377
2	0.104464	0.073208	0.051506	0.036377	0.009387
3	0.087407	0.051506	0.030615	0.018349	0.002553
4	0.073208	0.036377	0.018349	0.009387	0.000726
5	0.061376	0.025789	0.011085	0.004866	0.000214
6	0.051506	0.018349	0.006748	0.002553	0.000065
7	0.043265	0.013102	0.004137	0.001354	0.000020
8	0.036377	0.009387	0.002553	0.000726	6.423E-6
9	0.030615	0.006748	0.001585	0.000392	2.071E-6
10	0.025789	0.004866	0.000990	0.000214	6.770E-7
11	0.021743	0.003519	0.000622	0.000117	2.237E-7
12	0.018349	0.002553	0.000392	0.000065	7.467E-7
13	0.015498	0.001857	0.000248	0.000036	2.512E-8
14	0.013102	0.001354	0.000158	0.000020	8.514E-9
15	0.011085	0.000990	0.000101	0.000011	2.903E-9
16	0.009387	0.000726	0.000065	6.423E-6	9.956E-10
17	0.007955	0.000533	0.000041	3.641E-6	3.430E-10
18	0.006748	0.000392	0.000027	2.071E-6	1.187E-10
19	0.005728	0.000289	0.000017	1.182E-6	4.126E-11
20	0.004866	0.000214	0.000011	6.770E-7	1.438E-11

Para la comparación de los ajustes empleamos el criterio de la Log-verosimilitud. Esto nos indica que el modelo de la Borel-Tanner modificada (Log-verosimilitud: -5403.79) obtiene mejor resultado que el modelo de Poisson (Log-verosimilitud: -5490.78). Particularmente, el ajuste de ésta última es peor en la cola superior de la distribución. En Fig. 1 se representan las distancias entre datos y frecuencias esperadas en ambos modelos, ilustrando el comportamiento de los ajustes.

Para ilustrar la mejora del modelo propuesto en las probabilidades para la cola superior, añadimos las Tablas 1 y 2, donde se registran estos valores para diversos valores de los parámetros y distintas amplitudes de las colas. Obsérvese cómo el nuevo modelo propuesto obtiene valores sensiblemente superiores.

## 5 COMENTARIOS FINALES

En este trabajo hemos utilizado la distribución de Borel-Tanner modificada actuando como distribución primaria en el modelo de riesgo colectivo con la Exponencial como distribución secundaria. Se ha obtenido una expresión cerrada de la distribución de la reclamación total, utilizando la función de Bessel modificada de primera clase.

Hemos usado la citada distribución en un estudio de reclamaciones a datos de una compañía de seguros automovilísticos, como alternativa al modelo clásico más utilizado, el de Poisson compuesto. Se comprueba de este modo que el nuevo modelo resulta competitivo frente al clásico, tradicionalmente utilizado en Estadística actuarial, cuando las variables "*número de reclamaciones*" y "*coste de una reclamación individual*" son analizadas en el contexto de modelos de riesgo colectivo.

## AGRADECIMIENTOS:

Trabajo parcialmente financiado por ECO2009--14152 (MICINN, Spain) y por la Consejería de Innovación y Ciencia (P09-SEJ-4739).

## REFERENCIAS

Borel, E. (1942). "Sur l'emploi du théorème de Bernoulli pour faciliter le calcul d'un infinié de coefficients. Application au problème de l'attente iL un guichet". *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 214, 452-456.

Gossiaux, A-M.; Lemaire, J. (1981). "Méthodes d'ajustement de distributions de sinistres. Mitteilungen der Vereinigung schweiz". *Versicherungsmathematiker*, Heft, 1, 87-95.

Haight, F.A. (1961). "A distribution analogous to the Borel-Tanner". *Biométrica*, 48, 1, 2, 167-168.

Haight, F.A.; Breuer, M.A. (1960). "The Borel-Tanner distribution". *Biometrika*, 47, 1,2, 143-150.

Jain, G.C.; Consul, P.C. (1971). "A generalized negative binomial distribution". *SIAM J. Appl. Math.* 21, 501-513.

Jain, G.C.; Singh, N. (1975). "On bivariate power series distributions associated with Lagrange expansion". *Journal of the American Statistical Association*, 70, 352, 951-954.

Johnson, N.L.; Kemp, A.W.; Kotz, S. (2005). *Univariate Discrete Distributions*. Third Edition. John Wiley, New York.

Karlis, D.; Xekalaki, E. (2005). "Mixed Poisson distributions". *International Statistical Review*, 73, 35-58.

Klugman, S.A.; Panjer, H.H.; Willmot, G.E. (2008). *Loss Models: From Data to Decisions*. Third Edition, Wiley.

Kupper, J. (1965). "Some aspects of cumulative risk". *Astin Bulletin*, 3, 85-103.

Nadarajah, S.; Kotz, S. (2006a). "Compound mixed Poisson distributions I". *Scandinavian Actuarial Journal*, 3, 141-162.

Nadarajah, S.; Kotz, S. (2006b). "Compound mixed Poisson distributions II". *Scandinavian Actuarial Journal*, 3, 163-181.

Rolski, T.; Schmidli, H.; Schmidt, V.; Teugel, J. (1999). *Stochastic processes for insurance and finance*. John Wiley & Sons.

Sarabia, J.M.; Guillén, M. (2008). "Joint modelling of the total amount and the number of claims by conditionals". *Insurance: Mathematics and Economics*, 43, 466-473.

Tanner, J. C. (1953). "A problem of interference between two queues". *Biometrika*, 40, 58-69.

Willmot, G.E. (1987). "The Poisson-inverse Gaussian distribution as an alternative to the negative binomial". *Scandinavian Actuarial Journal*, 113-127.

## **COLECCIÓN “CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN”**

Instituto de Ciencias del Seguro

**Para cualquier información o para adquirir nuestras publicaciones  
puede encontrarnos en:**

FUNDACIÓN MAPFRE

Publicaciones

Paseo de Recoletos 23 – 28004 Madrid – (España)

Tel.: +34 915 818 768 Fax: +34 915 818 409

[www.fundacionmapfre.org/cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.org/cienciasdelseguro)

194. Investigaciones en Seguros y Gestión del Riesgo: RIESGO 2013
193. Viability of Patent Insurance in Spain. 2013
192. Viabilidad del seguro de patentes en España. 2013
191. Determinación de zonas homogéneas de riesgo para los rendimientos de distintos cultivos de la región pampeana en Argentina. 2013
190. Género y promoción en los sectores financiero y asegurador. 2013
189. An Introduction to Reinsurance. 2013
188. El control interno y la responsabilidad penal en la mediación de seguros privados. 2013
187. Una introducción al gobierno corporativo en la industria aseguradora en América Latina. 2013
186. Mortalidad de jóvenes en accidentes de tráfico. 2012
185. Las reclamaciones derivadas de accidentes de circulación por carretera transfronterizos. 2012
184. Efecto disuasorio del tipo de contrato sobre el fraude. 2012
183. Claves del Seguro Español: una aproximación a la Historia del Seguro en España. 2012
182. La responsabilidad civil del asegurador de asistencia sanitaria. 2012

181. Colaboración en el contrato de Reaseguro. 2012
180. Origen, situación actual y futuro del seguro de Protección Jurídica. 2012
179. Experiencias de microseguros en Colombia, Perú y Brasil. Modelo socio agente. 2012
178. El agente de seguros y su Responsabilidad Civil. 2012
177. Riesgo operacional en el marco de Solvencia II. 2012
176. Un siglo de seguros marítimos barceloneses en el comercio con América. (1770-1870). 2012
175. El seguro de Caución. 2012
174. La contabilidad de los corredores de seguros y los planes y fondos de pensiones. 2012
173. El seguro de Vida en América Latina. 2011
172. Gerencia de riesgos sostenibles y Responsabilidad Social Empresarial en la entidad aseguradora. 2011
171. Investigaciones en Seguros y Gestión del Riesgo. RIESGO 2011
170. Introdução ao Resseguro. 2011
169. La salud y su aseguramiento en Argentina, Chile, Colombia y España. 2011
168. Diferencias de sexo en conductas de riesgo y tasa de mortalidad diferencial entre hombres y mujeres. 2011
167. Movilización y rescate de los compromisos por pensiones garantizados mediante contrato de seguros. 2011
166. *Embedded Value* aplicado al ramo No Vida. 2011
165. Las sociedades cautivas de Reaseguro. 2011
164. Daños del amianto: litigación, aseguramiento de riesgos, y fondos de compensación. 2011
163. El riesgo de tipo de interés: experiencia española y Solvencia II. 2011
162. I Congreso sobre las Nuevas Tecnologías y sus repercusiones en el Seguro: Internet, Biotecnología y Nanotecnología. 2011

161. La incertidumbre bioactuarial en el riesgo de la longevidad. Reflexiones bioéticas. 2011
160. Actividad aseguradora y defensa de la competencia. La exención antitrust del sector asegurador. 2011
159. Estudio empírico sobre la tributación de los seguros de vida. 2010
158. Métodos estocásticos de estimación de las provisiones técnicas en el marco de Solvencia II. 2010
157. Introducción al Reaseguro. 2010
156. Encuentro Internacional sobre la Historia del Seguro. 2010
155. Los sistemas de salud en Latinoamérica y el papel del seguro privado. 2010
154. El Seguro de Crédito en Chile. 2010
153. El análisis financiero dinámico como herramienta para el desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II. 2010
152. Características sociodemográficas de las personas con doble cobertura sanitaria. Un estudio empírico. 2010
151. Solidaridad impropia y seguro de Responsabilidad Civil. 2010
150. La prevención del blanqueo de capitales en las entidades aseguradoras, las gestoras y los corredores de seguros 2010
149. Fondos de aseguramiento agropecuario y rural: la experiencia mexicana en el mutualismo agropecuario y sus organizaciones superiores. 2010
148. Avaliação das Provisões de Sinistro sob o Enfoque das Novas Regras de Solvência do Brasil. 2010
147. El principio de igualdad sexual en el Seguro de Salud: análisis actuarial de su impacto y alcance. 2010
146. Investigaciones históricas sobre el Seguro español. 2010
145. Perspectivas y análisis económico de la futura reforma del sistema español de valoración del daño corporal. 2009
144. Contabilidad y Análisis de Cuentas Anuales de Entidades Aseguradoras (Plan contable 24 de julio de 2008). 2009



143. Mudanças Climáticas e Análise de Risco da Indústria de Petróleo no Litoral Brasileiro. 2009
142. Bases técnicas dinámicas del Seguro de Dependencia en España. Una aproximación en campo discreto. 2009
141. Transferencia Alternativa de Riesgos en el Seguro de Vida: Titulización de Riesgos Aseguradores. 2009
140. Riesgo de negocio ante asegurados con múltiples contratos. 2009
139. Optimización económica del Reaseguro cedido: modelos de decisión. 2009
138. Inversiones en el Seguro de Vida en la actualidad y perspectivas de futuro. 2009
137. El Seguro de Vida en España. Factores que influyen en su progreso. 2009
136. Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos. RIESGO 2009.
135. Análisis e interpretación de la gestión del fondo de maniobra en entidades aseguradoras de incendio y lucro cesante en grandes riesgos industriales. 2009
134. Gestión integral de Riesgos Corporativos como fuente de ventaja competitiva: cultura positiva del riesgo y reorganización estructural. 2009
133. La designación de la pareja de hecho como beneficiaria en los seguros de vida. 2009
132. Aproximación a la Responsabilidad Social de la empresa: reflexiones y propuesta de un modelo. 2009
131. La cobertura pública en el seguro de crédito a la exportación en España: cuestiones prácticas-jurídicas. 2009
130. La mediación en seguros privados: análisis de un complejo proceso de cambio legislativo. 2009
129. Temas relevantes del Derecho de Seguros contemporáneo. 2009
128. Cuestiones sobre la cláusula *cut through*. Transferencia y reconstrucción. 2008
127. La responsabilidad derivada de la utilización de organismos genéticamente modificados y la redistribución del riesgo a través del seguro. 2008

126. Ponencias de las Jornadas Internacionales sobre Catástrofes Naturales. 2008
125. La seguridad jurídica de las tecnologías de la información en el sector asegurador. 2008
124. Predicción de tablas de mortalidad dinámicas mediante un procedimiento bootstrap. 2008
123. Las compañías aseguradoras en los procesos penal y contencioso-administrativo. 2008
122. Factores de riesgo y cálculo de primas mediante técnicas de aprendizaje. 2008
121. La solicitud de seguro en la Ley 50/1980, de 8 de octubre, de Contrato de Seguro. 2008
120. Propuestas para un sistema de cobertura de enfermedades catastróficas en Argentina. 2008
119. Análisis del riesgo en seguros en el marco de Solvencia II: Técnicas estadísticas avanzadas Monte Carlo y *Bootstrapping*. 2008
118. Los planes de pensiones y los planes de previsión asegurados: su inclusión en el caudal hereditario. 2007
117. Evolução de resultados técnicos e financeiros no mercado segurador iberoamericano. 2007
116. Análisis de la Ley 26/2006 de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2007
115. Sistemas de cofinanciación de la dependencia: seguro privado frente a hipoteca inversa. 2007
114. El sector asegurador ante el cambio climático: riesgos y oportunidades. 2007
113. Responsabilidade social empresarial no mercado de seguros brasileiro influências culturais e implicações relacionais. 2007
112. Contabilidad y análisis de cuentas anuales de entidades aseguradoras. 2007
111. Fundamentos actuariales de primas y reservas de fianzas. 2007
110. El *Fair Value* de las provisiones técnicas de los seguros de Vida. 2007

109. El Seguro como instrumento de gestión de los M.E.R. (Materiales Especificados de Riesgo). 2006
108. Mercados de absorción de riesgos. 2006
107. La exteriorización de los compromisos por pensiones en la negociación colectiva. 2006
106. La utilización de datos médicos y genéticos en el ámbito de las compañías aseguradoras. 2006
105. Los seguros contra incendios forestales y su aplicación en Galicia. 2006
104. Fiscalidad del seguro en América Latina. 2006
103. Las NIC y su relación con el Plan Contable de Entidades Aseguradoras. 2006
102. Naturaleza jurídica del Seguro de Asistencia en Viaje. 2006
101. El Seguro de Automóviles en Iberoamérica. 2006
100. El nuevo perfil productivo y los seguros agropecuarios en Argentina. 2006
99. Modelos alternativos de transferencia y financiación de riesgos "ART": situación actual y perspectivas futuras. 2005
98. Disciplina de mercado en la industria de seguros en América Latina. 2005
97. Aplicación de métodos de inteligencia artificial para el análisis de la solvencia en entidades aseguradoras. 2005
96. El Sistema ABC-ABM: su aplicación en las entidades aseguradoras. 2005
95. Papel del docente universitario: ¿enseñar o ayudar a aprender? 2005
94. La renovación del Pacto de Toledo y la reforma del sistema de pensiones: ¿es suficiente el pacto político? 2005
92. Medición de la esperanza de vida residual según niveles de dependencia en España y costes de cuidados de larga duración. 2005
91. Problemática de la reforma de la Ley de Contrato de Seguro. 2005
90. Centros de atención telefónica del sector asegurador. 2005
89. Mercados aseguradores en el área mediterránea y cooperación para su desarrollo. 2005

88. Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación. 2004
87. Dependencia en el modelo individual, aplicación al riesgo de crédito. 2004
86. El margen de solvencia de las entidades aseguradoras en Iberoamérica. 2004
85. La matriz valor-fidelidad en el análisis de los asegurados en el ramo del automóvil. 2004
84. Estudio de la estructura de una cartera de pólizas y de la eficacia de un Bonus-Malus. 2004
83. La teoría del valor extremo: fundamentos y aplicación al seguro, ramo de responsabilidad civil autos. 2004
81. El Seguro de Dependencia: una visión general. 2004
80. Los planes y fondos de pensiones en el contexto europeo: la necesidad de una armonización. 2004
79. La actividad de las compañías aseguradoras de vida en el marco de la gestión integral de activos y pasivos. 2003
78. Nuevas perspectivas de la educación universitaria a distancia. 2003
77. El coste de los riesgos en la empresa española: 2001.
76. La incorporación de los sistemas privados de pensiones en las pequeñas y medianas empresas. 2003
75. Incidencia de la nueva Ley de Enjuiciamiento Civil en los procesos de responsabilidad civil derivada del uso de vehículos a motor. 2002
74. Estructuras de propiedad, organización y canales de distribución de las empresas aseguradoras en el mercado español. 2002
73. Financiación del capital-riesgo mediante el seguro. 2002
72. Análisis del proceso de exteriorización de los compromisos por pensiones. 2002
71. Gestión de activos y pasivos en la cartera de un fondo de pensiones. 2002
70. El cuadro de mando integral para las entidades aseguradoras. 2002

69. Provisiones para prestaciones a la luz del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados; métodos estadísticos de cálculo. 2002
68. Los seguros de crédito y de caución en Iberoamérica. 2001
67. Gestión directiva en la internacionalización de la empresa. 2001
65. Ética empresarial y globalización. 2001
64. Fundamentos técnicos de la regulación del margen de solvencia. 2001
63. Análisis de la repercusión fiscal del seguro de vida y los planes de pensiones. Instrumentos de previsión social individual y empresarial. 2001
62. Seguridad Social: temas generales y régimen de clases pasivas del Estado. 2001
61. Sistemas Bonus-Malus generalizados con inclusión de los costes de los siniestros. 2001
60. Análisis técnico y económico del conjunto de las empresas aseguradoras de la Unión Europea. 2001
59. Estudio sobre el euro y el seguro. 2000
58. Problemática contable de las operaciones de reaseguro. 2000
56. Análisis económico y estadístico de los factores determinantes de la demanda de los seguros privados en España. 2000
54. El corredor de reaseguros y su legislación específica en América y Europa. 2000
53. Habilidades directivas: estudio de sesgo de género en instrumentos de evaluación. 2000
52. La estructura financiera de las entidades de seguros, S.A. 2000
51. Seguridades y riesgos del joven en los grupos de edad. 2000
50. Mixturas de distribuciones: aplicación a las variables más relevantes que modelan la siniestralidad en la empresa aseguradora. 1999
49. Solvencia y estabilidad financiera en la empresa de seguros: metodología y evaluación empírica mediante análisis multivariante. 1999
48. Matemática Actuarial no vida con MapleV. 1999

47. El fraude en el Seguro de Automóvil: cómo detectarlo. 1999
46. Evolución y predicción de las tablas de mortalidad dinámicas para la población española. 1999
45. Los Impuestos en una economía global. 1999
42. La Responsabilidad Civil por contaminación del entorno y su aseguramiento. 1998
41. De Maastricht a Amsterdam: un paso más en la integración europea. 1998
39. Perspectiva histórica de los documentos estadístico-contables del órgano de control: aspectos jurídicos, formalización y explotación. 1997
38. Legislación y estadísticas del mercado de seguros en la comunidad iberoamericana. 1997
37. La responsabilidad civil por accidente de circulación. Puntual comparación de los derechos francés y español. 1997
36. Cláusulas limitativas de los derechos de los asegurados y cláusulas delimitadoras del riesgo cubierto: las cláusulas de limitación temporal de la cobertura en el Seguro de Responsabilidad Civil. 1997
35. El control de riesgos en fraudes informáticos. 1997
34. El coste de los riesgos en la empresa española: 1995
33. La función del derecho en la economía. 1997
32. Decisiones racionales en reaseguro. 1996
31. Tipos estratégicos, orientación al mercado y resultados económicos: análisis empírico del sector asegurador español. 1996
30. El tiempo del directivo. 1996
29. Ruina y Seguro de Responsabilidad Civil Decenal. 1996
28. La naturaleza jurídica del Seguro de Responsabilidad Civil. 1995
27. La calidad total como factor para elevar la cuota de mercado en empresas de seguros. 1995
26. El coste de los riesgos en la empresa española: 1993
25. El reaseguro financiero. 1995

24. El seguro: expresión de solidaridad desde la perspectiva del derecho. 1995
23. Análisis de la demanda del seguro sanitario privado. 1993
22. Rentabilidad y productividad de entidades aseguradoras. 1994
21. La nueva regulación de las provisiones técnicas en la Directiva de Cuentas de la C.E.E. 1994
20. El Reaseguro en los procesos de integración económica. 1994
19. Una teoría de la educación. 1994
18. El Seguro de Crédito a la exportación en los países de la OCDE (evaluación de los resultados de los aseguradores públicos). 1994
16. La legislación española de seguros y su adaptación a la normativa comunitaria. 1993
15. El coste de los riesgos en la empresa española: 1991
14. El Reaseguro de exceso de pérdidas 1993
12. Los seguros de salud y la sanidad privada. 1993
10. Desarrollo directivo: una inversión estratégica. 1992
9. Técnicas de trabajo intelectual. 1992
8. La implantación de un sistema de controlling estratégico en la empresa. 1992
7. Los seguros de responsabilidad civil y su obligatoriedad de aseguramiento. 1992
6. Elementos de dirección estratégica de la empresa. 1992
5. La distribución comercial del seguro: sus estrategias y riesgos. 1991
4. Los seguros en una Europa cambiante: 1990-95. 1991
2. Resultados de la encuesta sobre la formación superior para los profesionales de entidades aseguradoras (A.P.S.). 1991
1. Filosofía empresarial: selección de artículos y ejemplos prácticos. 1991

## ÚLTIMOS LIBROS PUBLICADOS

Actas del III Congreso Internacional de Nuevas Tecnologías: sus repercusiones en el seguro: internet, biotecnología y nanotecnología: 12 y 13 de noviembre de 2012, Santiago de Chile. 2013

Emergencia y reconstrucción: el antes y después del terremoto y tsunami del 27F en Chile. 2012

Riesgo sistémico y actividad aseguradora. 2012

La historia del seguro en Chile (1810-2010). 2012

Modelo de proyección de carteras de seguros para el ramo de decesos. 2011

Desarrollo comercial del seguro colectivo de dependencia en España. 2010

La mediación de seguros en España: análisis de la Ley 26/2006, de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2010

Museo del Seguro. Catálogo. 2010

Diccionario MAPFRE de Seguros. 2008

Teoría de la credibilidad: desarrollo y aplicaciones en primas de seguros y riesgos operacionales. 2008

El seguro de caución: una aproximación práctica. 2007

El seguro de pensiones. 2007

Las cargas del acreedor en el seguro de responsabilidad civil. 2006

Diccionario bilingüe de expresiones y términos de seguros: inglés-español, español-inglés. 2006

El seguro de riesgos catastróficos: reaseguro tradicional y transferencia alternativa de riesgos. 2005

La liquidación administrativa de entidades aseguradoras. 2005



## **INFORMES Y RANKINGS**

Desde 1994 se publican anualmente estudios que presentan una panorámica concreta de los mercados aseguradores europeos, de España e Iberoamérica y que pueden consultarse en formato electrónico desde la página Web:  
[www.fundacionmapfre.org/cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.org/cienciasdelseguro)

- Mercado español de seguros
- Mercado asegurador de Iberoamérica
- Ranking de grupos aseguradores europeos
- Ranking de grupos aseguradores iberoamericanos
- La percepción social del seguro en España. 2012
- Emprender en momentos de crisis: riesgos y factores de éxito. 2012