

*Cuarta edición*

# Teoría de riesgo



**ECOE**  
EDICIONES

**Evaristo Diz Cruz**

## **Evaristo Dtz**

**Doctor en Estadística Actuarial de la Escuela de Ciencias Estadísticas y Actuariales de la Universidad Central de Venezuela (UCV), Especialista certificado en Ciencias Actuariales por la Universidad Pontificia Católica de Chile. Lic. en ciencias Actuariales y Financieras homologado por el ministerio de Educación Español, Master en Estadística Matemática y Especialista en Estadística Computacional, con una concentración en Teoría de Riesgo, de la Universidad Simón Bolívar (USB), Master en Sistemas de Información, Master en Administración de Empresas y Lic. en Física y Matemáticas de la Universidad Católica Andrés Bello (UCAB).**

**Cursos de Entrenamiento Actuarial en Buck Consulting Actuarial en New York y Paul Westbrook & Associate en New Jersey, patrocinados por PDVSA durante dos años. Miembro del Colegio de Estadísticos y Actuarios de Venezuela. Certificado de Riesgo por IIPeR USA. Daytraining Electrónico Avanzado de la American Academy Wall Street LLC. Ponente Internacional de la Asociación de Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Seguridad Social.**

PÁGINA EN BLANCO

Cuarta edición

# Teoría de riesgo

Evaristo Diz Cruz



Diz Cruz, Evaristo

Teoría de riesgo / Evaristo Diz Cruz -- 4a. ed. -- Bogotá : Ecoe Ediciones, 2015

290 p. -- (Ciencias empresariales. Contabilidad y finanzas)

Incluye bibliografía

ISBN 978-958-771-145-5

1. Administración de riesgos 2. Riesgo (Finanzas) 3. Estadística matemática I. Título II. Serie

CDD: 658.155 ed. 20

CO-BoBN- a948415

Colección: *Ciencias empresariales*  
Área: *Contabilidad y finanzas*

Primera edición: Bogotá, mayo de 2004  
Segunda edición: Bogotá, agosto de 2006  
Tercera edición: Bogotá, julio de 2009  
Cuarta edición: Bogotá, enero de 2015

ISBN: 978-958-771-145-5

© Evaristo Diz Cruz

© Ecoe Ediciones

e-mail: [info@ecoeediciones.com](mailto:info@ecoeediciones.com)

[www.ecoeediciones.com](http://www.ecoeediciones.com)

Carrera 19 n.º 63C - 32, Tel.: 248 1449

Coordinación editorial: Andrea del Pilar Sierra

Diagramación: Wilson Marulanda

Carátula: Wilson Marulanda

Impresión: Imagen editorial

Calle 34sur No. 68 I-99

# Índice general

Índice de gráficos .....	XI
Índice de tablas .....	XVII
Prefacio .....	XXI
Prólogo .....	XXIII
<b>Capítulo 1</b>	
Distribución de una pérdida asociada a un evento contingente .....	1
<b>Capítulo 2</b>	
Modelación de una Pérdida .....	5
<b>Capítulo 3</b>	
Tipos de Modelos de Probabilidad .....	9
<b>Capítulo 4</b>	
Distribuciones condicionales de Pérdida .....	5
<b>Capítulo 5</b>	
Modelo de Riesgo Individual .....	19
<b>Capítulo 6</b>	
Tipología de distintas coberturas .....	23
1. Exceso de Pérdida .....	23
2. Tipos de Deducible .....	27
2.1. Deducible Tipo Franquicia .....	27
2.2. Deducible Tipo Prorrateado .....	28
3. Límite de Pagos o Póliza .....	29
4. Seguro Proporcional .....	31
<b>Capítulo 7</b>	
Transferencia de Riesgo: Reaseguro .....	37
1. Riesgo tipo Stop – Loss .....	37
2. Reaseguro con un máximo .....	38
3. Reaseguro proporcional .....	39
<b>Capítulo 8</b>	
Riesgo de la Tasa de Interés .....	43
<b>Capítulo 9</b>	
Árboles de Riesgo Binomial .....	47

**Capítulo 10**

Valor en Riesgo .....	53
1. Riesgo de un solo activo .....	54
2. Valor en Riesgo de una cartera de activos .....	55
3. Ejemplo numérico de una cartera de dos activos .....	57

**Capítulo 11**

Procesos Estocásticos Wiener .....	61
1. Propiedad Markoviana .....	61
2. Procesos Wiener .....	62
3. Procesos generalizados de Wiener .....	64
4. Aplicación al caso de la evolución de los precios de las acciones en el mercado de capitales .....	66

**Capítulo 12**

Cadenas Markovianas .....	69
1. Características de una Cadena Markoviana .....	69
2. Trayectorias Muestrales .....	70
3. Probabilidades de Transición .....	71
4. Modelo de Supervivencia .....	71
5. Modelo de Enfermedad .....	72
6. Caminata Aleatoria .....	72
6.1 Modelo de Seguros .....	73
7. Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov .....	73
8. Generalización para $n+m$ pasos .....	75
9. Descomposición Espectral .....	76

**Capítulo 13**

Tasas de Interés Estocásticas y Valores Presentes .....	79
1. Valores Presentes Estocásticos .....	79
2. Proceso de Acumulación de Capital en $n$ periodos .....	81

**Capítulo 14**

Simulación Montecarlo .....	85
1. Simulación Montecarlo para riesgos del tipo Uniforme .....	85
2. Simulación Montecarlo para riesgos del tipo Exponencial .....	86

**Anexo I**

Distribución Uniforme. 100 observaciones, 100 simulaciones .....	88
--	----

**Anexo II**

Distribución Uniforme. 500 observaciones, 500 simulaciones .....	89
--	----

**Anexo III**

Distribución Exponencial. 100 observaciones, 100 simulaciones .....	90
---	----

**Anexo IV**

Distribución Exponencial. 500 observaciones, 500 simulaciones ...	91
---	----

**Capítulo 15**

Establecimiento de un Plan de Pensiones .....	93
1. Modelación de las tasas de mortalidad y rotación .....	94
2. Regresión no lineal .....	95
3. Modelación de la Tasa de Rotación .....	96
4. Construcción del Modelo de Supervivencia por Edad y Sexo .....	98
5. Tablas de Vida para el personal jubilado .....	102
6. Bootstrapping .....	105

**Capítulo 16**

Modelo de Optimización Estocástica .....	109
1. Diferencial Exceso/ Superávit (Obligación Actuarial del Plan – Activos del Fondo ( $D_x$ )) .....	110
2. Obligación Actuarial del Plan a nivel individual ( $l_x$ ) .....	110
2.1. Modelo Uniforme .....	112
2.2. Modelo Gamma .....	112
2.3. Modelo LogNormal .....	114
2.4. Modelo Exponencial .....	115
2.5. Modelo Weibull .....	115
2.6. Modelo Distribución Extrema .....	116
3. Activos del Fondo a nivel Individual .....	117
4. Estimación del Valor en Riesgo ( <i>VaR</i> ) de los Activos del Fondo .....	118

**Capítulo 17**

Modelación de las Tasas de Mortalidad, Rotación y Expectativas de Vida .....	121
1. Modelación de las Tasas de Mortalidad y Rotación .....	121
1.1. Datos de Mortalidad del Instituto Nacional de Estadística .....	121
1.2. Resultados del Ajuste de Modelos No Lineales .....	123
1.3. Bondad de Ajuste de los Modelos seleccionados .....	125
1.4. Data una de las empresas más representativas del sector para la determinación de las tasas de rotación .....	126
1.5. Datos de Rotación del personal .....	129
1.6. Resultados del Ajuste de Modelos No lineales, en la Tasa Rotación Promedio .....	132
1.7. Bondad de Ajuste del Modelo seleccionado para aplicarlo a la Tasa Promedio de Rotación .....	133

1.8. Ajuste de distribuciones de probabilidad y/o opinión experta para el rendimiento de los distintos instrumentos financieros .....	137
1.9. Análisis descriptivo de las tendencias centrales y de dispersión de los datos para las edades de interés .....	140
1.10. Resultados del ajuste de los Modelos de Supervivencia a los datos de los jubilados para las edades de jubilación normal .....	140
1.11. Resultados Derivados del Análisis No Paramétrico .....	151
1.12. Simulación del valor de $\ddot{a}_{60}$ y $\ddot{a}_{55}$ bajo los distintos modelos .....	155
1.13. Supuestos Utilizados .....	155
1.14. Resultados de la Simulación para $\ddot{a}_{60}^M, \ddot{a}_{50}^F$ .....	156
<b>Capítulo 18</b>	
Modelación de Simulación Estocástica .....	161
1 Enfoque Determinístico .....	167
1.1. Supuestos e Hipótesis Actuariales .....	167
1.2. Resultados .....	168
2. Enfoque Estocástico .....	169
2.1. Supuestos e Hipótesis Actuariales .....	169
2.2. Variables de Decisión .....	175
2.3. Resultados .....	176
2.4. Distribuciones Empíricas del Personal. Nivel Consolidado .....	183
2.5. Distribuciones Empíricas del Personal. Nivel Individual .....	185
2.6. Análisis Comparativo de las Funciones de Probabilidad Empíricas para cada caso .....	186
2.7. Estimaciones Bostrapp de los valores esperados, mediana y desviación estándar del diferencial .....	189
3. Análisis del impacto de las variables de decisión y supuestos actuariales en el valor estimado del diferencial para algunos casos individuales .....	192
4. Simulación Estocástica Dinámica .....	196
<b>Capítulo 19</b>	
Determinación de la Prima Teórica de un Reclamo .....	207
1. Análisis del Número y Cuantía de los Reclamos .....	211
<b>Capítulo 20</b>	
Enfoque Bayesiano para la Severidad y Frecuencia de Reclamos .....	217
1. Severidad de los Reclamos .....	217

2. Frecuencia de los Reclamos .....	219
3. Distribución Predictiva Colectiva de los Reclamos .....	219
4. Resultados del Cálculo Detallado de los Momentos de las Distribuciones Ajustadas y Predictivas .....	221
4.1. Escenario #1 .....	221
4.2. Escenario # 2 .....	227
4.3. Incremento del Número de Reclamos Muestreados.....	232
<b>Capítulo 21</b>	
Ejemplo de un modelo jerarquico propuesto para evaluar la incertidumbre de los parametros.....	233
1. Ejemplo de un Modelo Jerárquico Propuesto para Evaluar la Incertidumbre de los Parámetros .....	233
1.1 Inferencia Bayesiana Vía Winbugs (Gibbs Sampling) .....	233
1.2. Flujoograma de las Corridas de Winbugs.....	235
1.3 Los Outputs o Salidas de Winbugs .....	235
2. Aplicación de un Modelo Jerarquico con Winbugs.....	236
2.1. Especificaciones del Modelo y Archivos Winugs .....	237
2.2. Salida y Análisis de Winbugs .....	237
<b>Capítulo 22</b>	
Caso de Estudio.....	245
1. Objetivo del Estudio.....	245
2. Hipótesis y Supuestos.....	245
3. Metodología Utilizada.....	246
3.1 Tratamiento de la Base de Datos.....	247
3.2.Método Utilizado para Modelizar el Riesgo.....	250
3.3. Modelización de la Pérdida Esperada.....	251
3.4. Análisis de los Créditos Vencidos en el Horizonte de Valoración .....	253
4. Resultados de la Valoración .....	254
4.1. Simulación Montecarlo.....	255
5.Sensibilidad del Pasivo.....	256
6. Impacto en el Flujo de Caja Proyectado.....	256
7. Recomendaciones.....	260
Bibliografía .....	263
I. Libros .....	263
II. Artículos y/o trabajos de investigación.....	264

Actualizaciones permanentes de la obra en el Sistema de Información en Línea, SIL, de Ecoe ediciones [www.ecoediciones.com](http://www.ecoediciones.com)

Usted encontrará la siguiente información en el complemento virtual:

### Apéndice



- 1.- Modeling certain annuities valued in Life – expectancy.
- 2.- VaR using Montecarlo Technique.
- 3.- Applied Probability Models in Insurance Frequency and Severity Estimations.
- 4.- Modelación de la prima/costo de un plan de beneficio por muerte.
- 5.- Apéndice de los programas desarrollados en MATLAB.
- 6.- Assets/Liabilities modelling for a pension plan.
- 7.- Impacto de los cambios de la Mortalidad en el Valor Esperado del pago de un Plan de Pensiones Tipo Lump-Sum o pago único.



# Índice de gráficos

Gráfico 1. Relación Primas vs. Coberturas .....	2
Gráfico 2. Flujo de Pagos .....	2
Gráfico 3. Plano Riesgo - Rendimiento .....	6
Gráfico 4. Distribuciones de Pérdida $f_1$ y $f_2$ .....	6
Gráfico 5. Distribuciones de Pérdida sesgadas .....	7
Gráfico 6. Proceso Markoviano .....	10
Gráfico 7. Maximización de la varianza .....	11
Gráfico 8. Función de Probabilidad .....	12
Gráfico 9. Función densidad de probabilidad uniforme .....	17
Gráfico 10. Fórmulas del Teorema de Bayes .....	18
Gráfico 11. Flujo de Pérdidas .....	19
Gráfico 12. Evolución de $p_s$ en función de $n$ .....	21
Gráfico 13. Seguro de Exceso .....	24
Gráfico 14. Estructura de los Pagos .....	24
Gráfico 15. Función densidad de probabilidad .....	25
Gráfico 16. Función distribución de probabilidad .....	26
Gráfico 17. Función densidad de probabilidad .....	27
Gráfico 18. Modelo tipo franquicia .....	28
Gráfico 19. Modelo tipo Pro-rata .....	28
Gráfico 20. Modelo Pérdida Acotada .....	30
Gráfico 21. Modelo con Pérdida Acotada y con afección de deducibles .....	30
Gráfico 22. Modelo de Pérdida Proporcional .....	32
Gráfico 23. Función densidad de probabilidad original y con inflación .....	33
Gráfico 24. Comparación de Pagos .....	34
Gráfico 25. Modelo Tipo Stop-Loss .....	38
Gráfico 26. Estructura de pagos .....	38
Gráfico 27. Modelos con máximos .....	38
Gráfico 28. Equivalencia de Modelos .....	39
Gráfico 29. Evolución Tasa de Interés .....	43
Gráfico 30. Evolución del Capital .....	44
Gráfico 31. Función de Densidad de Probabilidad .....	45



Gráfico 32. Evolución del Activo.....	47
Gráfico 33. Función de probabilidad en $t=2$ .....	50
Gráfico 34. Funciones de $(P)$ en el intervalo.....	50
Gráfico 35. Distribución Binomial.....	52
Gráfico 36. Ilustración del Var.....	53
Gráfico 37. Función densidad de probabilidad normal.....	55
Gráfico 38. Regresión Positiva.....	56
Gráfico 39. Regresión Negativa.....	57
Gráfico 40. Ausencia de Regresión.....	57
Gráfico 41. Comparación de las varianzas.....	58
Gráfico 42. Regresión con $\rho = 1/2$ .....	59
Gráfico 43. Línea de Tiempo.....	63
Gráfico 44. Componente Tendencia.....	64
Gráfico 45. Trayectoria de las Fluctuaciones.....	65
Gráfico 46. Trayectoria de las Fluctuaciones con tendencia.....	65
Gráfico 47. Trayectoria del Precio.....	67
Gráfico 48. Trayectoria del cambio del Precio.....	67
Gráfico 49. Tres estados con tres tiempos.....	70
Gráfico 50. Grafo Markoviano.....	70
Gráfico 51. Matriz de Transición.....	71
Gráfico 52. Proceso vida - muerte.....	71
Gráfico 53. Modelo expandido.....	72
Gráfico 54. Proceso de tres estados.....	72
Gráfico 55. Proceso "Random Walk".....	73
Gráfico 56. Transición de $r$ pasos.....	74
Gráfico 57. Rutas Posibles.....	74
Gráfico 58. Transición de $n + m$ paso.....	75
Gráfico 59. Evolución de Supervivencia.....	76
Gráfico 60. Evolución hasta la muerte.....	76
Gráfico 61. Proceso vida - muerte.....	77
Gráfico 62. Evolución del Capital.....	80
Gráfico 63. Distribución Uniforme.....	83
Gráfico 64. Establecimiento plan de pensiones. Sub-problemas.....	94
Gráfico 65. Algoritmo de Ajuste.....	96
Gráfico 66. Espacio de Estados.....	98
Gráfico 67. Transición de dos pasos y dos contingencias.....	98
Gráfico 68. Probabilidades de Supervivencia en el periodo $(X, 60)$ para $X=20, 44, 45$ .....	100

Gráfico 69: Algoritmo de las estimaciones de las tasas de supervivencia a partir de las tasas de mortalidad y rotación	101
Gráfico 70: Representación de los tiempos de vida	104
Gráfico 71: Diagrama de Estimación Bootstrap	107
Gráfico 72: Función densidad de probabilidad normal	118
Gráfico 73: Evolución de mortalidad	122
Gráfico 74: Modelos aplicados a la data femenina. Año 2002	124
Gráfico 75: Modelos aplicados a la data masculina. Año 2002	125
Gráfico 76: Evolución de la variable tamaño de la empresa	127
Gráfico 77: Evolución de la variable salario promedio	128
Gráfico 78: Evolución de la variable edad promedio	128
Gráfico 79: Análisis histórico de los promedios de edad, servicio y salario del personal activo en el periodo (1998 – 2004)	129
Gráfico 80: Análisis histórico de las tasas de rotación bruta para ambos sexos durante el periodo (1998-2004)	130
Gráfico 81: Estimación de las tasas de rotación promedio	132
Gráfico 82: Modelo logístico aplicado a la tasa de rotación promedio	133
Gráfico 83: Pronóstico de la tasa de rotación promedio	134
Gráfico 84: Evolución de la mortalidad, rotación y supervivencia. Sexo: femenino	136
Gráfico 85: Evolución de la mortalidad, rotación y supervivencia. Sexo: masculino	137
Gráfico 86: Evolución de las tasas de interés activa	139
Gráfico 87: Comparación gráfica de las tasas de interés anuales nominales	139
Gráfico 88: Histograma por edad de jubilación y grupos de interés, discriminado por sexo	141
Gráfico 89: Discriminación por número de participantes totales de la investigación, por edad de interés	142
Gráfico 90: Análisis comparativo de las distribuciones. Método de coeficiente de correlación para los jubilados de 50 años	143
Gráfico 91: Análisis de la distribución normal, para los jubilados de 50 años, sin discriminación por sexo	144
Gráfico 92: Expectativas de vida, con datos censurados para los modelos de mejor ajuste	147
Gráfico 93: Expectativas de vida, según método no paramétrico	152
Gráfico 94: Distribuciones de probabilidad empírica y distribuciones de probabilidad acumulada del costo. Hombres. 60 Años	156

Gráfico 95. Distribuciones de probabilidad empírica y distribuciones de probabilidad acumulada del costo. Mujeres .....	157
Gráfico 96. Variables Aleatorias: Rendimientos Anuales del Fondo.....	170
Gráfico 97. Variables aleatorias: tiempo remanente de vida - hombres .....	170
Gráfico 98: Variables Aleatorias: Tiempo Remanente de Vida – Mujeres .....	171
Gráfico 99. Variables aleatorias: mortalidad – hombres .....	173
Gráfico 100. Variables aleatorias: rotación .....	174
Gráfico 101. Contorno de la superficie diferencial generada por la tasa de interés y la tasa de contribución. Personal masculino .....	179
Gráfico 102: Superficie del diferencial en función de la tasa de interés y la tasa de contribución. Personal masculino .....	180
Gráfico 103: Contorno de la superficie diferencial generada por la tasa de interés y la tasa de contribución. Personal femenino .....	181
Gráfico 104: Superficie del diferencial en función de la tasa de interés y la tasa de contribución. Personal femenino .....	181
Gráfico 105. Región de solvencia del plan para ambos sexos .....	182
Gráfico 106. Distribuciones empíricas del personal masculino. Nivel consolidado .....	183
Gráfico 107. Distribuciones empíricas del personal femenino. Nivel consolidado .....	184
Gráfico 108. Análisis empírico de las funciones de probabilidad empíricas. Personal femenino .....	186
Gráfico 109. Análisis empírico de las funciones de probabilidad empíricas. Personal masculino .....	187
Gráfico 110: Análisis comparativo de casos individuales. Personal femenino .....	188
Gráfico 111. Estimaciones Bootstrapp de todos los estadísticos descriptivos del diferencial. Personal Femenino .....	190
Gráfico 112. Estimaciones Bootstrapp de todos los estadísticos descriptivos del diferencial. Personal Masculino .....	191
Gráfico 113. Análisis del impacto de las variables de decisión y supuestos. Sexo masculino .....	192
Gráfico 114. Análisis del impacto de las variables de decisión y supuestos. Caso intermedio (caso 9). Sexo masculino .....	193
Gráfico 115. Análisis del impacto de las variables de decisión y supuestos. Caso maduro (caso 26). Sexo masculino .....	194

Gráfico 116. Análisis del impacto de las variables de decisión y supuestos. Caso intermedio (caso 38). Sexo femenino .....	194
Gráfico 117. Análisis del impacto de las variables de decisión y supuestos. Caso joven (caso 19). Sexo femenino.....	195
Gráfico 118. Análisis del impacto de las variables de decisión y supuestos. Caso maduro (caso 53). Sexo femenino .....	195
Gráfico 119. Flujo de Actividades de Simulación.....	197
Gráfico 120. Evolución del diferencial y la obligación en función de las variables de decisión. Personal femenino .....	199
Gráfico 121. Evolución del diferencial y la obligación en función de las variables de decisión. Personal femenino. ....	201
Gráfico 122. Determinación de la solución óptima. Personal masculino. Nivel consolidado.....	202
Gráfico 123. Evolución del diferencial y la obligación en función de las variables de decisión. Personal masculino.....	203
Gráfico 124. Determinación de la solución óptima. Personal masculino. Nivel consolidado .....	204
Gráfico 125. Evolución del diferencial y la obligación en función de las variables de decisión. Personal masculino. ....	204
Gráfico 126. Estructura jerárquica de los modelos en estudio.....	220
Gráfico 127. Iteraciones del modelo jerárquico Pareto-Poisson.....	238
Gráfico 128. Análisis de convergencia gelman geweke de las cadenas .....	239
Gráfico 129. Cuantiles y correlaciones de las dos cadenas simuladas. ....	239
Gráfico 130. Densidades a posteriori para $l$ y la deviancia y para las distribuciones predictivas $n_7$ y $y_7$ de para ambas cadenas .....	240
Gráfico 131. Iteraciones (historial dinámico) .....	241
Gráfico 132. Iteraciones del modelo de la severidad tipo exponencial-gamma.....	242
Gráfico 133. Análisis de convergencia Gelman Geweke de las cadenas.....	242
Gráfico 134. Cuantiles y correlaciones de las dos cadenas simuladas. ....	243
Gráfico 135. Densidades a posteriori para $l$ y la deviancia y para las distribuciones predictivas $n_7$ y $y_7$ de para ambas cadenas.....	243
Gráfico 136. Resumen de la pérdida esperada .....	
Gráfico 137. Fondo de liquidez.....	255

PÁGINA EN BLANCO

# Índice de tablas

---

Tabla 1. Resultados Evolución Precio de la Acción.....	66
Tabla 2: Formato típico de las variables y los casos.....	104
Tabla 3: tasas brutas de mortalidad año 2002.....	122
Tabla 4: Cuatro modelos aplicados a la tasa bruta de mortalidad.....	123
Tabla 5. Pronósticos de las tasas de mortalidad anual por edad, Sexo femenino. Año 2002. Por mil habitantes.....	124
Tabla 6. Pronósticos de las tasas de mortalidad anual por edad, Sexo masculino. Año 2002. Por mil habitantes.....	125
Tabla 7. Iteraciones de Chi-cuadrado para cada modelo.....	126
Tabla 8. Grupo de empleados de una empresa.....	127
Tabla 9. Análisis histórico de los promedios de edad.....	128
Tabla 10. Análisis histórico de los promedios de servicio.....	129
Tabla 11. Análisis histórico de los promedios de salario.....	129
Tabla 12. Tasa de rotación bruta femenina por años.....	130
Tabla 13. Tasa de rotación bruta femenina por años.....	130
Tabla 14. Tasas estimadas de rotación promedio.....	131
Tabla 15. Dos Modelos aplicados a la Tasa de Rotación Promedio.....	132
Tabla 16. Iteraciones del Chi-cuadrado para el Modelo Logístico.....	133
Tabla 17. Pronóstico de la tasa de rotación promedio del periodo 2001-2004.....	134
Tabla 18. Pronóstico de las probabilidades de supervivencia, Sexo: femenino.....	135
Tabla 19. Pronóstico de las probabilidades de supervivencia, Sexo: masculino.....	136
Tabla 20. Tasas de rendimientos mensuales.....	138
Tabla 21. Análisis descriptivo de los tiempos de vida.....	140
Tabla 22. Total de participantes por edad de jubilación y grupos de interés, discriminado por sexo.....	141
Tabla 23. Coeficiente de Correlación por distribuciones.....	144
Tabla 24. Análisis comparativo por edades de interés, por sexo a nivel global.....	145

Tabla 25. Expectativas de vida, con datos censurados para los modelos de mejor ajuste.....	146
Tabla 26. Expectativas de vida, según método no paramétrico.....	151
Tabla 27. Modelos de riesgo.....	155
Tabla 28. Distribuciones empíricas del costo de la anualidad estocástica para hombres con 60 años de edad.....	156
Tabla 29. Distribuciones empíricas del costo de la anualidad estocástica para mujeres con 55 años de edad.....	157
Tabla 30. Costos Promedios de la anualidad derivada de la simulación.....	158
Tabla 31. Intervalo de confianza al 95%.....	158
Tabla 32. Modelo de Simulación Estocástica para la Data Femenina.....	165
Tabla 33. Modelo de Simulación Estocástica para la Data Masculina.....	166
Tabla 34. Análisis de costos. Enfoque determinístico.....	168
Tabla 35. Análisis de sensibilidad del diferencial. Enfoque determinístico personal femenino (US\$.).....	168
Tabla 36. Tiempo remanente de vida.....	170
Tabla 37. Pronóstico de los modelos utilizados para obtener la mortalidad anual por edad.....	171
Tabla 38. Rango de variabilidad de las variables de decisión. Enfoque estocástico.....	175
Tabla 39. Análisis de costos. Enfoque estocástico.....	176
Tabla 40. Intervalos de confianza al 95% para el diferencial.....	176
Tabla 41. Amplitud del intervalo de confianza al 95%.....	177
Tabla 42. Valor en riesgo de las obligaciones al 5%.....	178
Tabla 43. Valor en riesgo de las contribuciones acumuladas al 5%.....	178
Tabla 44. Análisis de sensibilidad del diferencial consolidado. Personal masculino.....	179
Tabla 45. Análisis de sensibilidad del diferencial consolidado. Personal femenino.....	180
Tabla 46. Descripción demográfica de los Casos Individuales.....	185
Tabla 47. Distribuciones empíricas del personal a nivel individual. Perfiles de costos.....	185
Tabla 48. Análisis comparativo del diferencial.....	191
Tabla 49. Variables de mayor impacto en la variabilidad del diferencial.....	196



Tabla 50. Determinación de la solución óptima. Nivel consolidado ....	199
Tabla 51. Determinación de la solución óptima. Nivel consolidado ....	200
Tabla 52. Análisis comparativo de las soluciones óptimas .....	205
Tabla 53. Resumen de resultados del escenario #1 .....	224
Tabla 54. Nivel de la reserva matemática u requerida inicialmente para cada nivel de significancia con un factor de carga social $k=10\%$ .....	226
Tabla 55. Distribución estándar normal .....	226
Tabla 56. Resumen de resultados del escenario #2 .....	231
Tabla 57. Resumen de resultados del escenario # 1 con incremento del número de reclamos muestreados .....	232
Tabla 58. Resumen de resultados del escenario # 2 con incremento del número de reclamos muestreados .....	232
Tabla 59. Estadísticas descriptivas modelo jerárquico Pareto-Poisson	238
Tabla 60. Estadísticas descriptivas modelo de la severidad tipo exponencial-gamma .....	242
Tabla 61. Cartera inicial de créditos .....	248
Tabla 62. Muestreo del primer mes (Mes 1) .....	249
Tabla 63. Muestreo .....	249
Tabla 64. Frecuencia de Créditos .....	250
Tabla 65: frecuencia de la severidad de créditos .....	251
Tabla 66: Pérdida esperada .....	252
Tabla 67: Créditos vencidos .....	253
Tabla 68. Flujo de caja .....	254
Tabla 69: Sensibilidad del pasivo .....	256
Tabla 70: Análisis de sensibilidad .....	257
Tabla 71: pérdida agregada y flujo de caja .....	257
Tabla 72: pérdida agregada y flujo de caja ajustado al uno por ciento (-1%) .....	258
Tabla 73: Pérdida agregada y flujo de caja ajustado al uno y medio por ciento (-1,5%) .....	259
Tabla 74: Pérdida agregada y flujo de caja ajustado al dos por ciento (-2%) .....	260



PÁGINA EN BLANCO

# *Prefacio*

---

En esta cuarta edición se incluyen dos temas bastantes extensos sobre el tratamiento Bayesiano en los Modelos de Riesgo Actuarial Colectivos. El objetivo central de ésta obra en el sentido de su enfoque está orientado hacia la aplicación inmediata de los conceptos fundamentales.

En el primer capítulo se da una versión general y reducida del concepto básico de riesgo, seguro y una expresión matemática del concepto de eventos y variables aleatorias.

El segundo capítulo, trata sobre los conceptos básicos de la modelación y sus posibilidades en la Teoría de Riesgo; fundamentalmente se habla de la relación entre el riesgo y el rendimiento, entendiéndose este último, como el promedio o valor esperado de una variable cualquiera y por supuesto en especial el rendimiento de inversión. En el capítulo tres, se habla de las distribuciones típicas de probabilidad de mayor uso en el mundo del seguro y de las finanzas.

En los capítulos cuatro y cinco, se tocan aspectos elementales del Modelo de Riesgo Individual y la utilización de la mezcla de distribuciones de probabilidad asociada a una pérdida, se exponen algunos ejemplos típicos que ilustran estos conceptos.

Los capítulos seis y siete, están dedicados al estudio de las distintas expresiones que utiliza la Estadística Matemática Actuarial para describir los diferentes tipos de cobertura y se da una introducción al concepto de reaseguro y su filosofía más frecuente. En ambos capítulos se trabajan ejemplos sencillos, escogidos pedagógicamente, para aclarar los conceptos básicos y poder aplicar la teoría inmediatamente.

A partir del capítulo ocho, comienza lo que hemos llamado Riesgo Financiero y se orienta fundamentalmente a estudiar el comportamiento

de flujos de caja aleatorios, comportamiento del aleatorio de las tasas de interés, comportamiento del precio de los activos, tales como acciones, etc. a través del uso de los modelos binomiales.

En los capítulos diez y once, se presenta el concepto de Valor de riesgo y una breve introducción de los procesos Wiener. Ambos capítulos están orientados a la aplicación inmediata de los conceptos básicos y su utilidad en el campo de las Finanzas y Seguros.

En el capítulo doce, trece y catorce, se tratan los temas:

1. Cadenas Markovianas.
2. Tasa de Interés Estocásticas y Valores Presentes.
3. Simulación Montecarlo.

Los capítulos dieciséis y diecisiete ofrecen una panorámica bastante detallada de un modelo de valoración de los activos y pasivos de un plan de pensiones, suministrando todo el álgebra probabilista necesaria para evaluar el gap entre los activos y los pasivos acumulados.

Por último en esta cuarta edición se desarrolla la aplicación de la estadística Bayesiana a los Modelos de Riesgo Colectivo. Se ilustra todo el cálculo con una modelación desarrollada en el lenguaje de programación estadística R y la versión en Windows de Bugs; este último un paquete de computación orientado al cálculo y simulación Bayesiana.

# *Prólogo*

---

## *La Cuarta Edición de Evaristo Diz.*

Cuando uno revisa los índices de las carreras con mayor demanda, pero sobre todo con mayor nivel de satisfacción, sistemáticamente aparecen los Estudios Actuariales, seguidos muy de cerca por la Estadística. Ambas sin embargo, tienen alguna dificultad insuperable para el común de las personas. Tienes que dominar la Matemática, pero también las Finanzas, y la Computación. Ser un interdisciplinario y serlo además de forma cuantitativa.

De todo ello es de lo que trata este libro. Aún más, puede entenderse que el autor realmente ha logrado un enfoque más amplio, enmarcándolo dentro de la Teoría General de Decisiones bajo Incertidumbre Estadística, que es la manera de entender en forma general el concepto de Riesgo Estadístico.

Todo esto presenta este libro, y más aun lo hace en forma clara, concisa, con ejemplos tomados de la vida real.

A Evaristo lo conozco desde el tiempo ya un tanto lejano, en el que era un aventajado, y siempre el más motivado y curioso, estudiante de los postgrados en Estadística y Matemáticas Computacionales. Postgrados donde la enseñanza se entrelaza con la investigación teórica y aplicada en el Centro de Estadística y Software Matemático CESMa, fundado por la Profesora Marianela Lentini, con mi humilde colaboración. El es un digno exponente del nivel de excelencia académica del CESMa.

Las ediciones anteriores del libro, me habían gustado y siempre fueron útiles. Pero todavía daban la sensación de ser una obra incompleta. En esta edición, el autor logra incluir la versión más general y exitosa de la Teoría de Decisión Estadística bajo Incertidumbre, que es el enfoque Bayesiano.

Y lo hace además incorporando no solamente la teoría, sino la práctica con caso de estudio y la concreción computacional del enfoque Bayesiano.

En los Estados Unidos, las Ciencias Actuariales, requieren no solo de un título, sino también ser exitosos en exámenes de calificación que son tomados en toda la nación. A los candidatos de Puerto Rico, les recomiendo estudiar a profundidad esta obra.

*Luis Raul Pericchi Guerra*  
*Catedrático del Departamento de Matemáticas de la Universidad de*  
*Puerto Rico, Recinto de Río Piedras,*  
*y Director del Centro de Bioestadística y Bioinformática, de la*  
*Facultad de Ciencias Naturales.*

# Capítulo 1

---

## *Distribución de una pérdida asociada a un evento contingente*

Una de las maneras más importantes de describir una pérdida es sin duda a través del concepto de riesgo.

**Riesgo** es todo aquello que puede generar un evento no deseado y traer como consecuencias pérdidas y/o daños.

Generalmente, cuando ocurren pérdidas estas conllevan una consecuencia financiera que afecta de alguna manera el ingreso, presupuesto, flujo de caja de un ente, persona o empresa que está sujeto o sumergido dentro de ambientes que pueden inducir eventos catastróficos en grados variables que de alguna manera afectan al individuo o empresa.

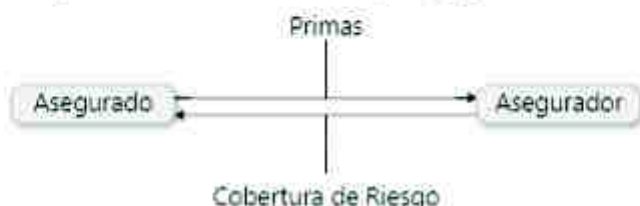
Las variables aleatorias dentro del contexto de la Estadística Actuarial, explican de una manera razonable, en un periodo de observación, la frecuencia y magnitud del daño. La idea subyacente de protegerse de ese daño es a través de un seguro; auto-seguro<sup>1</sup>, dependiendo de si uno absorbe el riesgo o por el contrario lo transfiere a un tercero. En cualquier

---

<sup>1</sup> Existe en la Matemática Financiera Moderna el concepto de derivados financieros que incluyen el estudio y aplicación de opciones de compra y venta para cubrir rutas de pérdida no deseadas.

circunstancia, la palabra mágica una vez más es **riesgo**, y en todo caso lo que se busca es una minimización del impacto de la pérdida que siempre es traducible a términos económicos dado un nivel de utilidad y un determinado grado de aversión al riesgo por parte del asegurado.

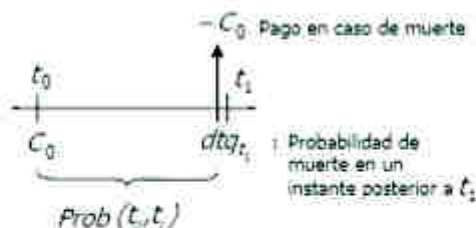
En términos muy elementales esta "protección", implica un contrato entre las partes que de alguna manera establece claramente los términos y condiciones bajo las cuales se reconocen y se pagan las deudas.



**Gráfico 1. Relación Primas vs. Coberturas**

En ese contrato se debe establecer con claridad absoluta el monto o magnitud de la prima y el monto o capital asegurado en caso de que ocurra una contingencia, no menos importante el establecimiento de los periodos de pago para cada uno de los rubros contingentes especificados en el contrato.

Un ejemplo típico, es un Plan de Beneficios por Muerte:



**Gráfico 2. Flujo de Pagos**

a) **Capital asegurado inicial:**  $C_0$

b) **Valor presente del pago:**  $\frac{C_0}{(1+i)^{t_1-t_0}}$  donde  $i$ : tasa de interés

c) **Valor esperado del pago:**  $C_0 \text{Prob}(t_0, t_1)_{dt} q_{t_1}$

donde:

$C_0$ : capital

$\text{Prob}(t_0, t_1)$ : supervivencia durante  $\Delta t$

${}_{dt}q_x$ : muerte en  $t_1 + dt$

En general para  $0 < t < 1$  se cumple que  ${}_tq_x = t \cdot q_x$ .

$$\text{d) Valor Actuarial o mixto: } \frac{C_0}{(1+i)^{\Delta t}} \text{Prob}(t_0, t_1) {}_{dt}q_x^2$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t = dt$$

En números, si  $C_0 = 10 \text{ M}\$$ <sup>3</sup>

$$\Delta T = t_1 - t_0 = 20 \text{ años}$$

entonces el Valor Presente  $VP_0 = \frac{10\text{M}\$}{(1+10\%)^{20}}$  siendo la tasa de interés  $i=10\%$ , su valor actuarial asumiendo una probabilidad de supervivencia del 10% desde  $t_0$  hasta  $t_1$  y una mortalidad de 20%.

$$VA_0 = \frac{10\text{M}\$}{(1,10)^{20}} (10\%)(20\%)$$

$VA_0 = 29.728,72\text{M}\$$  que representa la prima, la cual se pagaría para poder liquidar un siniestro por muerte.

<sup>2</sup> Aproximando  $t_1 + dt \approx t_1$  o  ${}_{dt}q_x = dt \cdot q_x$

<sup>3</sup> M\$: Millones de dólares.



PÁGINA EN BLANCO

# Capítulo 2

---

## Modelación de una pérdida

Existen varias maneras de modelar el comportamiento de una variable aleatoria, dependiendo de la naturaleza del riesgo.

Si "X" es una variable aleatoria que representa la pérdida potencial, el valor esperado de "X" es una medida equivalente a la prima pura. En otras palabras, el asegurado si transfiere el riesgo a un tercero, generalmente una casa de seguros, o por el contrario si se autoasegura (es decir, el riesgo no se transfiere) corre o asume un riesgo cuya cuantía viene expresada de la siguiente manera:

Si  $X \sim f(X, \theta)$ <sup>4</sup> y  $E(X)$  y  $Var(X)$  es el valor esperado y la varianza existen; entonces **una medida de riesgo**, es igual a  $\sigma_X^2 = Var(X)$ ; siendo  $E(X) = \sum X_i P_i$  y  $\sigma_X^2 = E(X - E(X))^2$  en el caso de variables discretas y  $E(X) = \int xf(x)dx$  en el caso continuo.

Otra medida de variabilidad del riesgo viene dado por el Coeficiente de Variación  $\rho = \frac{\sigma}{\mu}$  donde  $\sigma = \sqrt{Var(X)}$  y  $\mu = E(X)$

---

<sup>4</sup> Esta expresión significa que la variable aleatoria está distribuida según la función de probabilidad  $f$  con parámetro  $\theta$ .

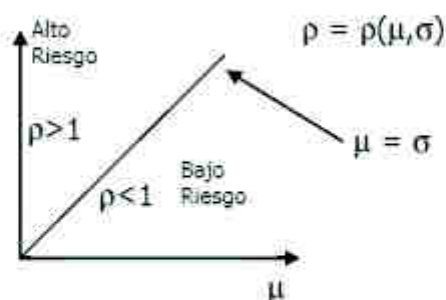


Gráfico 3. Plano Riesgo - Rendimiento

De la gráfica anterior, se desprende que aquellas **distribuciones de pérdida** cuyo Coeficiente de Variabilidad  $\rho$  sea muy bajo (no hay reglas específicas, pero empíricamente se pueden considerar como bajos valores de  $\rho \leq 30\%$ ) tienen asociadas distribuciones cuyas varianzas son bajas y viceversa; suponiendo una  $E(X) = \mu$  fija y conocida para dos distribuciones  $f_1$  y  $f_2$  se obtendría:

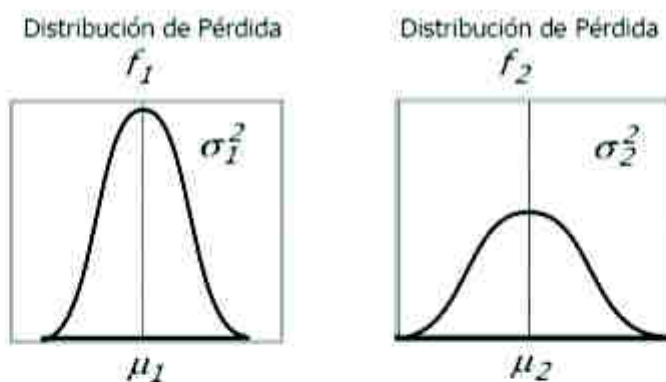
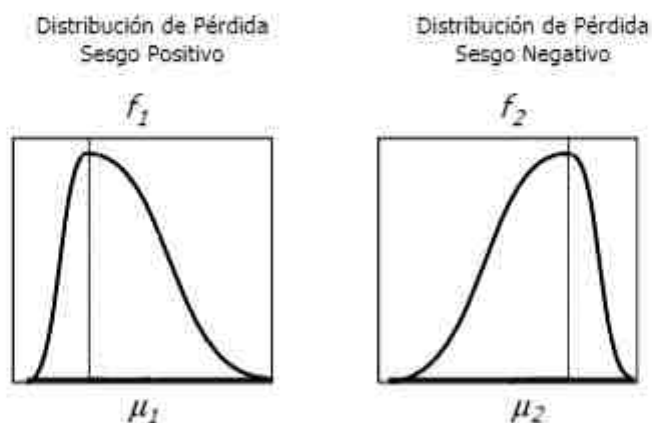


Gráfico 4. Distribuciones de Pérdida  $f_1$  y  $f_2$

Donde  $\mu_1 = \mu_2$  y  $\sigma_1^2 \ll \sigma_2^2$  lo cual implica un menor riesgo en  $f_1$  que en  $f_2$ .

En el caso anterior, las distribuciones son simétricas, lo cual implica que no existe sesgo alguno.

Por el contrario, otras distribuciones de pérdida son generalmente sesgadas.



**Gráfico 5. Distribuciones de Pérdida sesgadas**

El nivel medio de la pérdida, es mayor en  $f_2$  que en  $f_1$ . La gran diferencia es que el primer caso, el nivel de riesgo está concentrado en valores relativamente bajos de la variable aleatoria; pero de alta densidad.

*Nota: En la práctica es muy común observar, para la pro-frecuencia de reclamos de severidad baja, una alta densidad o Probabilidad. Por el contrario, los reclamos de severidad alta, generalmente tienen una baja densidad.*

PÁGINA EN BLANCO

# Capítulo 3

---

## *Tipos de modelos de probabilidad*

Existen varias maneras de expresar y describir la distribución de probabilidad de una pérdida.

**El primer caso o modelo**, se corresponde con la descripción completa y detallada de la variable aleatoria "X" asociada a la magnitud de la pérdida.

Si "X" es una variable aleatoria continua, se deben especificar  $f(X)$  o  $F(X)$  función densidad o función distribución respectivamente.

En el **caso discreto**, la función de probabilidad o la función distribución deben conocerse<sup>1</sup>. Un caso típico de una distribución de probabilidad discreta se puede representar como sigue:

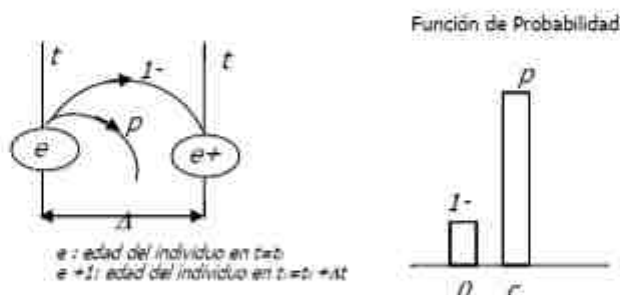
$$X = \begin{cases} c \\ 0 \end{cases}$$

Este modelo, se pudiera describir en el periodo de un año  $\Delta t = 1$  un beneficio por muerte equivalente a "c" unidades monetarias cuando la probabilidad de muerte dentro del periodo  $\Delta t$  es  $p$ .

---

<sup>1</sup> O poder ser estimable de alguna manera.

Simbólicamente,



**Gráfico 6. Proceso Markoviano<sup>6</sup>**

La prima o el valor esperado de este beneficio, obviando de momento el valor del dinero en el tiempo, sería:

$$E(X) = cp + 0(1-p)$$

$$E(X) = cp$$

Igualmente la varianza  $Var(X)$  vendría dado por:

$$Var(X) = E(X - E(X))^2$$

$$= E(X^2 + E^2(X) - 2XE(X))$$

$$= E(X^2) - E^2(X)$$

$$= c^2p - (p)^2$$

$$= c^2p - c^2p^2$$

$$= c^2(p - p^2)$$

Para  $c$  conocido y previamente fijado, en resumen tendríamos:

<sup>6</sup> La probabilidad de que una persona este viva a la edad  $(e+1)$ , sólo depende de haberlo estado a la edad  $(e)$ . A esta propiedad, se le conoce como markoviana y el proceso de evolución para todas las edades cumpliendo esta propiedad, se le conoce como un Proceso Markoviano.

I. Monto del Beneficio:  $c$ .

II. Forma de pago: al momento de la muerte dentro del periodo  $\Delta t$  para una edad  $e$  dada.

III. Prima pura:  $cp$ .

IV. Nivel de riesgo:  $c^2(\rho - \rho^2)$ .

V. Coeficiente de Variabilidad:  $\rho = \frac{(c^2(\rho - \rho^2))^{1/2}}{\rho}$ ,

$$\rho = \frac{\sqrt{\rho - \rho^2}}{\rho}$$

Interesante concluir en este ejemplo, que el máximo de la varianza o nivel de riesgo máximo se alcanza en  $p=1/2$ , es decir, cuando la probabilidad de muerte en este caso vale 50%.

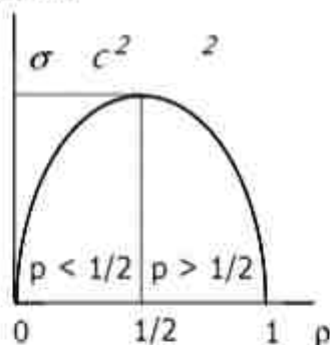


Gráfico 7. Maximización de la varianza

Es importante destacar que  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sigma^2}{c^2} = \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{\sigma^2}{c^2} = 0$ .

Se verifica que  $\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}(\sigma^2) < 0$  lo cual implica un máximo cuando  $\rho=1/2$

resolviendo para  $\frac{\partial(\sigma^2)}{\partial \rho} = 0$ .

<sup>7</sup> En términos de la varianza. La desviación típica o nivel de riesgo propiamente dicho es  $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ .

<sup>8</sup> En este modelo se observa que el nivel de riesgo dado por  $\rho$ , es independiente del capital asegurado.



Un segundo ejemplo práctico, dentro del campo discreto es la ampliación de los beneficios en puntos de masa, tal como puede ser el reconocimiento de distintos niveles de beneficio, junto con las probabilidades respectivas de ocurrencia de los pagos.

Supongamos un plan de beneficios que reconozca gastos médicos bajo la siguiente distribución:

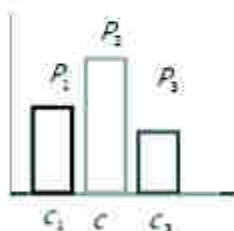


Gráfico 8. Función de Probabilidad

#### Monto del Beneficio

$$X = \begin{cases} c_1 & \text{con probabilidad } p_1 \\ c_2 & \text{con probabilidad } p_2 \\ c_3 & \text{con probabilidad } p_3 \end{cases}$$

donde  $c_1 < c_2 < c_3$

Obviamente  $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$  luego  $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ .

En algunos casos, en la práctica, todo lo que se necesita para valorar el riesgo es  $\mu$  y  $\sigma^2$ , probablemente ocurre con mucha frecuencia que esta sea la única información disponible.

Como problema, se deja al lector derivar el nivel de riesgo para este ejemplo, asumiendo ahora que el costo del dinero<sup>9</sup> es  $i\%$  por unidad de tiempo.

<sup>9</sup> El costo del dinero hace referencia al equivalente financiero de distintos flujos en tiempos distintos; así un capital  $c$  recibido en un año  $\Delta t = 1$  tiene un costo o valor presente hoy equivalente a  $c/(1+i)$ , siendo  $i$  la tasa de interés del período.

Sugerencia:

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 c_i p_i$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\rho = \frac{\sigma}{\mu}$$

PÁGINA EN BLANCO

# Capítulo 4

---

## *Distribuciones condicionales de pérdida*

Supongamos que la probabilidad o tasa de que ocurra una pérdida es,  $p$  siendo  $X \sim Ber(p)$ , lo cual, significa que la pérdida ocurre o sencillamente no ocurre. Si el monto de la pérdida, es la variable aleatoria  $M$  y es idénticamente nula cuando no ocurre la pérdida, entonces puede establecerse matemáticamente lo que sigue:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si ocurre la pérdida, con probabilidad } p . \\ 0 & \text{si no ocurre la pérdida, con probabilidad } 1 - p . \end{cases}$$

A su vez, la cuantía o severidad viene dada por

$$M = \begin{cases} B & \text{dado que el pago referido a la pérdida ya ocurrió.} \\ 0 & \end{cases}$$

Este último planteamiento, nos lleva al concepto de **probabilidad condicional**, acotando **formalmente** el modelo completo como sigue:

$$P(M|X) = P(M \cap X) / P(X)^{10}$$

Puede existir, una descripción completa de la distribución de probabilidad asociada a la cuantía de la pérdida. En la mayoría de los casos, en la práctica sólo se conoce  $E(M)$  su valor esperado y  $Var(M)$  su varianza.

Aplicando el concepto de varianza, se cumple lo siguiente:

$$Var(M) = E(M^2) - E(M)^2 \text{ y despejando } E(M^2) \text{ se obtiene,}$$

$$E(M^2) = Var(M) + E(M)^2$$

Si expresamos la variable aleatoria "M" como una mezcla de dos variables aleatorias  $M_1$  y  $M_2$  donde  $M_1 = 0$  y  $M_2 = B$  con pesos o probabilidades de ocurrencia  $\{1-p, p\}$  entonces los dos primeros momentos  $E(M)$  y  $Var(M)$  de la distribución de pérdida se determinan como sigue:

$$E(M) = (1-p) \cdot E(M_1) + pE(M_2)$$

$$= pE(M_2)$$

$$= pE(B) \text{ dado que si } M_1 = 0 \Rightarrow E(M_1) = 0 \text{ igualmente}$$

$$E(M^2) = (1-p) \cdot E(M_1^2) + pE(M_2^2)$$

$$= pE(M_2^2)$$

Luego aplicando el concepto de varianza

$$Var(M) = pE(B^2) - (pE(B))^2$$

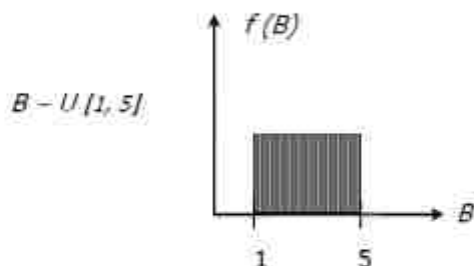
$$= pE(B^2) - p^2E(B)^2$$

Un ejemplo de aplicación, para ilustrar el concepto antes señalado:

Supongamos que  $p=2\%$ , lo que nos indica que la probabilidad del daño es de 2 daños de cada 100 exposiciones. Asumamos también que la magnitud del daño o pérdida  $B$ <sup>11</sup> tiene una distribución uniforme entre 1 y 5 M\$.; es decir,

<sup>10</sup> El Teorema de Bayes, permite determinar las probabilidades  $P(M|X)$  y  $P(X|M)$  una en función de la otra, a través, del concepto de probabilidad condicional.

<sup>11</sup> Generalmente adoptada de la palabra beneficio; en el caso de que el evento negativo; por ejemplo, la muerte, conlleva el pago de un capital ("beneficio") a los familiares, en especial el cónyuge y/o hijos.



**Gráfico 9. Función densidad de probabilidad uniforme**

No debemos olvidar que  $B$  es el tamaño de la pérdida, dado o sujeto a que la pérdida ya ocurrió. Luego:

$$E(B|X=1) = \frac{\text{Min}[1,5] + \text{Max}[1,5]}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ M\$}.$$

$$\text{Var}(B|X=1) = \frac{1}{12} (\text{Max}[1,5] - \text{Min}[1,5])^2$$

$$\text{Luego } E(B^2|X=1) = \text{Var}(B|X=1) + E^2(B|X=1)$$

A partir de esta información, podemos entonces calcular el valor esperado y varianza incondicional de la magnitud de la pérdida, la cual, viene dada por:

$$\begin{aligned} E(M) &= pE(B) = PE(B|X=1) \\ &= 2\% \cdot 3 \text{ M\$} \\ &= \left(\frac{2}{100}\right) 3 \cdot 10^6 \text{ M\$} \\ &= 6 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

Como práctica se deja al lector la solución del siguiente problema.

Comparar, desde el punto de vista condicional, los dos modelos de probabilidad de pérdidas que se dan a continuación:

$f(B) = \frac{1}{(5-1)} = \frac{1}{4}$   
<sup>12</sup>  $f(p) = \frac{0-1}{4} = -1 < 0 < 5$ .

**Modelo 1:**

Monto Pérdida Anual (M\$.)	Probabilidad de Ocurrencia
0	10%
100	35%
200	50%
500	0%

**Modelo 2:**

En este caso, se dan los momentos condicionales  $E(B|X)$  y  $Var(B|X)$  dado que, un reclamo ya ocurrió. Asuma una tasa  $p=90\%$  para la ocurrencia y  $E(B|X=1)$  y  $Var(B|X=1)$ , 150 y 400<sup>13</sup> respectivamente.

Gráfico 10. Fórmulas del Teorema de Bayes

$$A \cup A^c = U$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

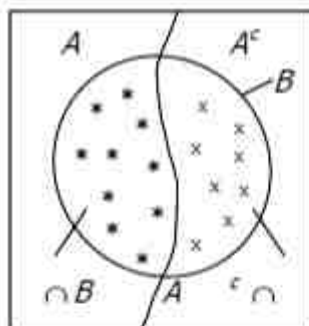
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P_T}$$

$$P_T = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

$$A_1 = A$$

$$A_2 = A^c$$



<sup>13</sup> Unidades monetarias cualesquiera.

# Capítulo 5

## Modelo de riesgo individual

El Modelo de **Riesgo Individual**, asume que la cartera o portafolio de individuos expuestos o sometidos al riesgo; digamos que  $n > 0$ , en un periodo de tiempo unitario  $\Delta t = 1$ , están siendo modelados por una variable aleatoria de pérdida individual  $X_i$ .

De esta manera, si asumimos independencia y distribuciones de probabilidad idénticas  $\forall_i X_i \sim f(X=x)$ .

Si "S" es la pérdida agregada, entonces

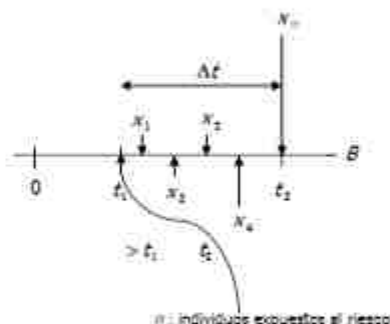


Gráfico 11. Flujo de Pérdidas



$$S = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + \dots + X_n;$$

donde "n", es el número total de siniestros <sup>14</sup>

Estamos obviamente, interesados en caracterizar la distribución de

probabilidad de  $S = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  o  $f(S = s)$ ; o su función distribución  $\int f(s) ds$

Lo anterior, pudiera ser muy complicado y hasta matemáticamente intratable, pues dependiendo del tipo de distribución asumido para las  $X_i$ , la  $\sum X_i$  pudiera ser cerrada <sup>15</sup> o no.

Sin embargo, es más fácil determinar los momentos de la distribución de pérdida agregada conociendo las  $f_{X_i}(X)$ .

De nuevo, si  $S = \sum_{i=1}^n X_i$  entonces

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \text{ y } Var(S) = Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i)$$

ahora si

$X_i \sim f(\mu_i, \sigma_i^2)$  se cumple que  $\begin{cases} \mu_i = \mu \\ \sigma_i^2 = \sigma^2 \end{cases}$  entonces

$$E(X_i) = \mu; Var(X_i) = \sigma^2$$

para cada  $i=1, 2, \dots, n$  igualmente

El coeficiente de variación  $\rho_S = \frac{\sigma_S}{\mu_S}$  siendo  $\begin{cases} \mu_S = E(S) \\ \sigma_S^2 = Var(S) \end{cases}$

Haciendo las sustituciones del caso y expresando  $\rho_S = f(\mu, \sigma^2)$  se obtiene  $\rho_S = \frac{\sigma}{\mu \sqrt{n}}$  el cual  $\rightarrow 0$  a medida que  $n \rightarrow \infty$ .

<sup>14</sup> n: es el número total de siniestros, que pudiera también ser, una variable aleatoria; en ese caso tanto los  $X_i$  como los n, tendrían asociado sus distribuciones respectivas.

<sup>15</sup> El concepto matemáticamente se refiere, a la posibilidad de encontrar una distribución para  $\sum X_i$  analíticamente conocida. De no ser posible lo anterior, una de las alternativas es encontrar la distribución empírica a través de simulación. En el apéndice se dan algunos ejemplos sobre Simulación Monte Carlo.

Sin olvidar que  $\rho_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$  y sustituyendo en la ecuación anterior  $\rho_s = \frac{\rho_x}{\sqrt{n}}$

Lo cual nos indica que la variabilidad de la cartera, es directamente proporcional al coeficiente de variación de la pérdida individual e inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de individuos expuestos al riesgo.

En el gráfico, se ve claramente como disminuye el riesgo<sup>16</sup>, cuando el número de individuos aumenta y para un "n" suficientemente grande llega a niveles francamente pequeños. Lo anterior, es una manifestación de la reducción progresiva del riesgo, más no de su eliminación.

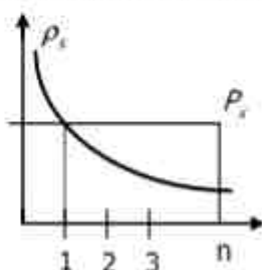


Gráfico 12. Evolución de  $\rho_s$  en función de  $n$

### Ejemplo

Supongamos una cartera, constituida por 1000 pólizas de seguro de vida de un año de duración. Cada una de las pólizas por 10,00 M\$. en el evento de que el asegurado fallezca dentro del lapso de un año. Se ha determinado, que para 500 pólizas la tasa o probabilidad de muerte es 1% y para el remanente es de un 2% por asegurado. Determine el pago promedio del asegurador / auto-asegurador<sup>17</sup> y el riesgo asociado a esta operación en términos del coeficiente de variación.

La pérdida agregada "S" viene dada por  $\sum_{i=1}^{1000} X_i$  y su valor esperado por independencia es:

<sup>16</sup>  $\rho$  es una medida de riesgo.

<sup>17</sup> Muchas empresas generalmente se auto-aseguran, al no transferir el riesgo a un tercero como puede ser una empresa de seguros. Independientemente de que no acceda a un tercero, es igualmente importante para la Dirección y/o Gerencia de Finanzas de la institución, conocer la magnitud del riesgo y hacer las provisiones o reservas del caso, aunque sea inclusive sólo para efectos presupuestarios.

$$E(S) = \sum_{i=1}^{1000} E(X_i)$$

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{1000} Var(X_i)$$

para las primeras 500 pólizas será:

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - p \\ 10^7 & \text{con probabilidad } p \end{cases}$$

donde tenemos que  $i=500$  y  $p=1\%$

$$E(X_i) = 10 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-2} = 10 \cdot 10^4 = 100.000$$

Se deja como ejercicio al lector determinar  $\sigma_{X_i}^2$  aplicando  $Var(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2$

Cuando "n", es suficientemente grande y  $p < 5\%$ , se puede aproximar a la Distribución Binomial por una Normal a través de las siguientes relaciones:

$$X \sim Bin(n, p) \Rightarrow Ex = np \text{ y } Var_x = npq$$

$$Bin \approx N(np, npq)$$

con  $n \rightarrow \infty$  diferentes grados de calidad de aproximación para distintas "n".

# Capítulo 6

---

## *Tipología de distintas coberturas*

**Cobertura** hace referencia al grado de reconocimiento de la pérdida, tanto en el tipo o clase de daño que se genera como en la magnitud de su cuantía.

Es posible, dentro de un contrato regular de seguros, diseñar una póliza, en la cual, el monto pagado por el siniestro<sup>13</sup> no cubra en su totalidad el 100% de la pérdida causada. Lo anterior, sin duda, define las coberturas parciales. Sobre este último aspecto se pueden identificar varias estructuras o esquemas que se definen matemáticamente a continuación:

### **1. Exceso de pérdida**

En este tipo de contratos o acuerdos, se especifica un deducible conocido equivalente a " $d$ " M\$.

Si una pérdida de magnitud, ocurre expresada como de costumbre por una variable aleatoria discreta o continua " $X$ ", el asegurador sólo paga el exceso sobre " $d$ ".

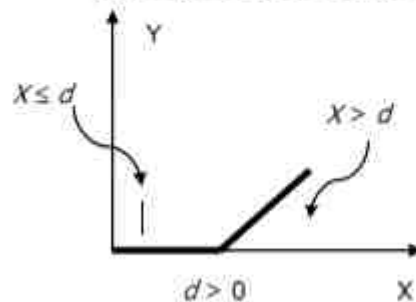
---

<sup>13</sup> Pagado por un asegurador o asumido como auto-seguro por una institución.

Matemáticamente, podemos expresar este hecho definiendo como otra variable aleatoria auxiliar "Y", que es realmente el monto pagado por el asegurador descrito como sigue:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \leq d \\ X - d & \text{si } X > d \end{cases}$$

Gráfico 13. Seguro de Exceso



Gráficamente observamos, que en realidad los pagos de asegurador, se efectúan bajo un criterio maximal que se resume como:

$$Y = \text{Max}\{X - d, 0\};$$

correspondiéndose este último a la estructura de un contrato tipo call-option u opción de compra.

El pago, finalmente del reclamo viene entonces por dos vías:

1. Asumido por el asegurador.
2. Asumido por el asegurado.

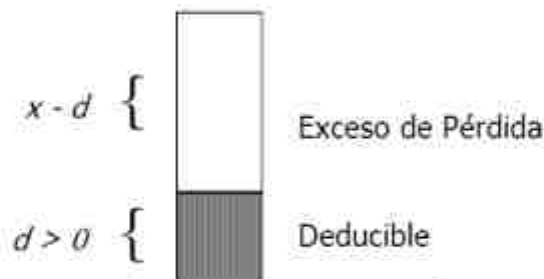
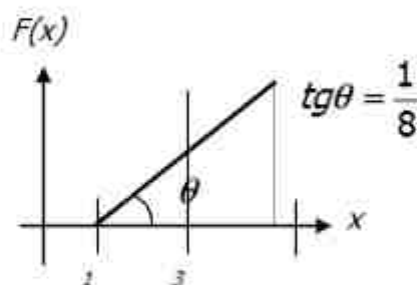


Gráfico 14. Estructura de los Pagos





**Gráfico 16. Función distribución de probabilidad**

Sin embargo, aplicando  $E(Y)$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
 E(Y)^{19} &= \int_0^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x-1}{8}\right)\right) dx \\
 &= \int_1^9 \frac{8-x+1}{8} dx = \left[\frac{9}{8}x - \frac{x^2}{16}\right]_1^9 = \left(\frac{9^2}{8} - \frac{9^2}{16}\right) - \left(\frac{27}{8} - \frac{9}{16}\right) \\
 &= \frac{81}{16} - \frac{45}{16} = \frac{81-45}{16} = \frac{36}{16} = 2,25M\$
 \end{aligned}$$

Cuando se comparan  $E(X)$  y  $E(Y)$ , se observa una disminución del costo importante. Uno de los objetivos fundamentales de los deducibles, es justamente minimizar reduciendo el costo del seguro y/o de los planes de beneficios, no necesariamente asegurados con un tercero. El diferencial  $\Delta E = E(Y) - E(X)$  es el impacto del deducible.

<sup>19</sup> Se corresponde con  $E(Y) = E(\text{MAX}(X - d, 0))$

## 2. Tipos de deducible

Existen dos variaciones importantes del deducible.

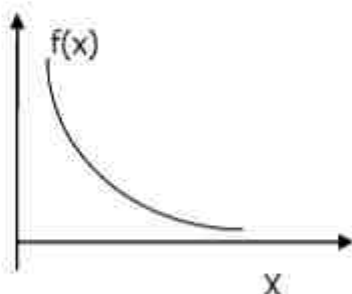


Gráfico 17.20 Función densidad de probabilidad

### 2.1. Deducible Tipo Franquicia

Definiendo idénticamente las variables "Y", "X" y "d" tenemos:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \leq d \\ X & \text{si } X > d \end{cases}$$

Bajo esta estructura el valor esperado de la pérdida es como sigue:

$$E(Y) = \int_d^{\infty} x f_x(x) dx$$

$$E(Y) = \int_3^9 x \frac{1}{8} dx = \frac{x^2}{16} \Big|_3^9 = \frac{9^2}{16} - \frac{3^2}{16} = \frac{81-9}{16} = \frac{72}{16} = 4,50$$

<sup>20</sup> Importante destacar que la pérdida puede ser cualquier otra función de probabilidad o densidad; por ejemplo, la densidad exponencial donde si  $X \sim \text{exp}(\theta)$  entonces  $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$



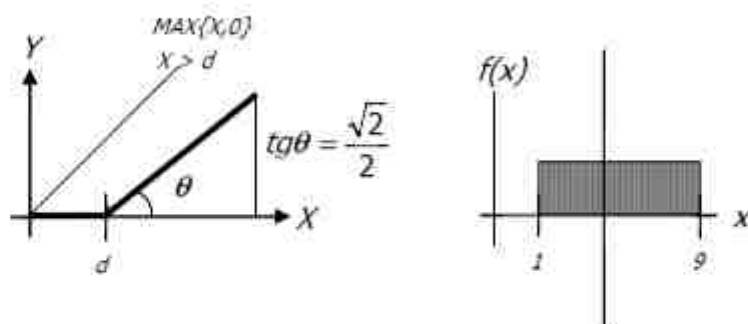


Gráfico 18. Modelo tipo franquicia

y de aquí, se deriva que en el caso de pérdidas distribuidas uniformes en el dominio antes señalado

$$E_2(Y) > E_1(Y)$$

Siendo  $E_2$  : deducible tipo franquicia

$E_1$  : deducible básico

Obviamente:  $\Delta E = E_2 - E_1 > 0$  y  $\frac{\Delta E}{E_1} > 0$  lo cual implica para el asegurado esta opción que la del deducible básico siempre y cuando  $X > d$  en ambos casos. De ocurrir que  $d \leq X$  las dos estructuras son indiferentes.

## 2.2. Deducible Tipo Prorrateado

Bajo este concepto, se pretende reconocer un valor de pérdida proporcional al prorrateo del excedente de la pérdida sobre el deducible básico. En esta estructura existen dos límites  $d_1$  y  $d_2$ ; donde se cumple que  $d_2 > d_1 > 0$  y "Y" y "X" igual que antes

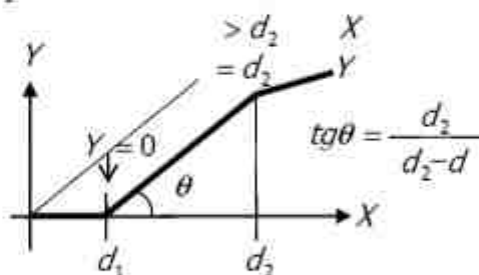


Gráfico 19. Modelo tipo Pro-rata

$$Y = \begin{cases} 0 & x \leq d_1 \\ d_2 \left( \frac{x - d_1}{d_2 - d_1} \right) & \text{si } d_1 < x \leq d_2 \\ x & x > d_2 \end{cases}$$

$$\Delta d = d_2 - d_1$$

$$d_2 > d_1$$

$$\frac{d_2}{d_2 - d_1} > 1 \text{ con } d_1 > 0$$

Se deja al lector resolver este problema, aplicando la misma distribución uniforme, el determinar la pérdida esperada en este tipo de estructura y su comparación con las dos estructuras anteriores.

No debemos olvidar, que todas estas estructuras obedecen a la lógica y teoría de distribuciones truncadas, esto ocurre generalmente cuando se desconocen pagos asociados a la cola inferior de las distribuciones. Igualmente es importante recordar, que en el truncamiento se desconocen las pérdidas causadas por debajo de los deducibles, más no por su frecuencia, pues siempre será posible conocer, cuantos reclamos ocurrieron y de éstos últimos cuántos se pagaron. En otras palabras, se puede conocer la frecuencia de los siniestros con exactitud por unidad de tiempo más no su severidad o cuantía.

### 3. Límite de pagos o póliza

El concepto de **límite de pago**, hace referencia al pago máximo que el asegurador está dispuesto a pagar en un reclamo. La estructura de este tipo de cobertura es como sigue:

$$Y = \begin{cases} X \\ M \end{cases}$$

Esta estructura se puede visualizar gráficamente de la siguiente manera.

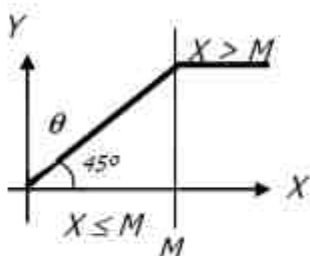


Gráfico 20. Modelo Pérdida Acotada <sup>21</sup>

El valor esperado de la pérdida pagada por el asegurador por reclamo, viene dada por:

$$EY = \int_0^M x f_x(x) dx + M(1 - F_x(M)) = \int_0^M (1 - F_x(x)) dx$$

Lo anterior, nos permite combinar un exceso de pérdida con un límite máximo de cobertura. Así, si un contrato tiene un deducible "d" y un límite máximo "M" entonces el monto pagado al final puede expresarse de la siguiente manera:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \leq d \\ x - d & \text{si } d < X < M \\ M - d & \text{si } X > M \end{cases}$$

Bajo esta estructura, se observa que el deducible afecta inclusive el monto máximo reconocible.

Gráficamente,

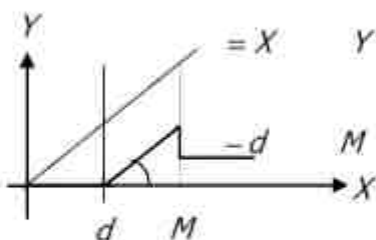


Gráfico 21. Modelo con Pérdida Acotada y con afeción de deducibles

<sup>21</sup> Con límites de pago.

El valor esperado de  $Y$  es

$$E(Y) = \int_d^M (x-d)f_x(x)dx + (M-d)(1-F_x(M))$$

y resolviendo esto es equivalente a  $\int_d^M (1-F_x(x))dx$ .

#### 4. Seguro Proporcional

Un tipo de seguro, que respalda una cobertura con este tipo de estructura viene dado por los siguientes supuestos:

Fracción de pago:  $0 < \alpha < 1$

Monto de la pérdida:  $X \sim f(x|\theta)$

Monto reconocido:  $Y^*$

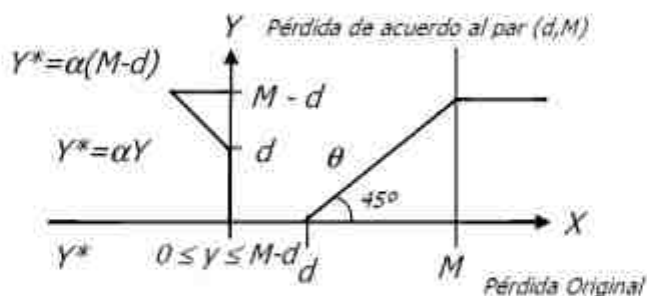
En general, el monto reconocido  $Y^* = \alpha X$  dependiendo del tipo de cobertura del plan de beneficios y/o seguros, podemos entonces encontrar la distribución densidad de probabilidad para este tipo de pagos aleatorios de la siguiente manera:

Asumamos que  $X \sim f_x(x)$  y el deducible es  $d > 0$ , con un límite de máximo pago " $M$ " debemos entonces encontrar los valores respectivos de " $Y$ " y " $Y^*$ " los cuales, pueden ser expresados en términos de  $X$ .

$f_{Y^*}(y)$ : Función de probabilidad de  $Y^*$

$f_x(y+d)$ : Función de probabilidad de  $X$

$$f_{Y^*}(y) = \begin{cases} F_x(d) & \text{cuando } y=0 & \text{si } x < d \\ f_x(y+d) & \text{cuando } 0 < y < M-d & \text{si } d < x < M \\ 1-F_x(M) & \text{cuando } y=M-d & \text{si } x \geq M \\ 0 & \text{cuando } y > M-d & \end{cases}$$



**Gráfico 22. Modelo de Pérdida Proporcional**

$$\frac{f_x(y+d)}{1-F_x(d)}$$

$$\frac{1-F_x(M)}{1-F_x(d)}$$

$$y = M-d$$

$$0$$

$$y > M-d$$

Vamos a ilustrar estos conceptos con un ejemplo.

Supongamos que, una gran empresa tiene un plan de beneficios para sus empleados bajo un auto-seguro. Los beneficios del plan computados, como las pérdidas, está distribuidos de acuerdo a la información del último año en forma uniforme en el intervalo  $(0, 1.000.000)$ . Un deducible de  $10^5$ US\$. es aplicado y la empresa reconoce la pérdida de exceso. Este año se pronostica igualmente  $X \sim U(0, 10^6(1+25\%))$  por la inflación real anual.

$Max\{X\}_{t+1} = Max\{X\}_t(1+I)$  siendo "I" la tasa de inflación pronosticada para este año, se mantendrá el mismo nivel de deducible, es decir,  $d_{t+1} = d_t = d$ .

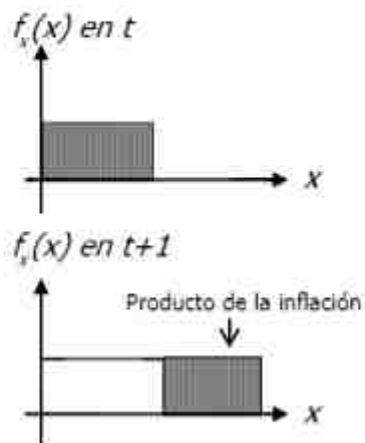


Gráfico 23. Función densidad de probabilidad original y con inflación

Determinar el % de incremento en el valor esperado de la pérdida pagado por la empresa este año.

En el año "t", para una pérdida "X" el monto pagado por la empresa era  $Y^*$ .

$$Y^* = \begin{cases} 0 & X \leq 10^5 \text{ s/} \\ X - 10^5 & X > 10^5 \text{ s/} \end{cases}$$

La distribución de probabilidad de "X" para "t"

$$f_x(x)_t = \frac{1}{10^6} \quad \text{s/ } X \in [0, 10^6]$$

por lo que el valor esperado del pago reclamado será para el año "t" (año pasado)

$$E(Y^*)_t = \int_{10^5}^{10^6} (x - 10^5) \frac{1}{10^6} dx$$

Para este año en  $t+1$ ,

$$Y^* = \begin{cases} 0 & X \leq 10^5 \text{ si} \\ X - 10^5 & X > 10^5 \text{ si} \end{cases}$$

pero la distribución de probabilidad de "X" es,

$$f_x(x)_{t+1} = \frac{1}{10^6 \cdot 1 + (25\%)} \quad X \in [0, 10^6(1,25)]$$

de donde

$$E(Y^*)_{t+1} = \int_{10^5}^{1,25 \cdot 10^6} (x - 10^5) \frac{1}{1,25 \cdot 10^6} dx$$

y el % de incremento es

$$\frac{\Delta E(Y^*)}{E(Y^*)_t}; \text{ siendo } \Delta E(Y^*) = E(Y^*)_{t+1} - E(Y^*)_t$$

Supongamos ahora, que el seguro reconociera sólo un pago proporcional con  $\alpha = 80\%$  bajo los mismos supuestos se obtendrían:

$$Y^* = \begin{cases} 0 & X \leq 10^5 \text{ si} \\ \alpha(X - 10^5) & X > 10^5 \text{ si} \end{cases}$$

$Y^* = \alpha Y$  siendo  $0 < \alpha < 1$  luego

$$Y^* = \begin{cases} 0 & \text{si } Y = 0 \quad \text{cuando } X \leq 10^5 \\ \alpha(X - 10^5) & \text{si } Y = X - 10^5 \quad \text{cuando } X > 10^5 \end{cases}$$

Finalmente

$$Y^* = \begin{cases} 0 & x \leq 10^5 \\ 80\%(x - 10^5) & x > 10^5 \end{cases}$$

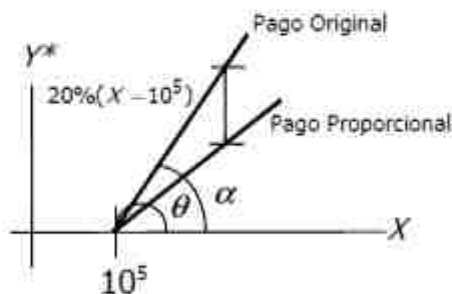


Gráfico 24. Comparación de Pagos

$$\begin{aligned} E(Y^*)_t &= \int_{10^5}^{10^6} 80\%(x - 10^5) \frac{1}{10^6} dx \\ &= \int_{10^5}^{10^6} 8 \cdot 10^{-7} (x - 10^5) dx \end{aligned}$$

En este caso  $Y^* = f(x)$



PÁGINA EN BLANCO

# Capítulo 7

---

## *Transferencia de riesgo: Reaseguro*

Una de las maneras de limitar la pérdida frente a eventos catastróficos, los cuales pueden ocurrir en cualquier momento caracterizados por una baja frecuencia pero de alta severidad, es justamente transferir parte del riesgo asumido a una tercera parte, esto lo que implica en realidad, es no quedarse con la totalidad del riesgo, sino con una fracción.

El reaseguro es básicamente eso, se cede parte del riesgo a otro asegurador. Existen varios tipos de transferencia parcial de riesgos.

### **1. Riesgo tipo Stop – Loss**

Funciona a través de la creación de un deducible de cuantía " $d$ ". Si la pérdida agregada  $S \leq d$  entonces el re-asegurador no paga nada; pero si  $S > d$  se paga el excedente.

$$\approx S^* = \begin{cases} 0 & \text{si } S \leq d \\ S - d & \text{si } S > d \end{cases}$$

---

<sup>22</sup> Monto pagado por el re-asegurador.

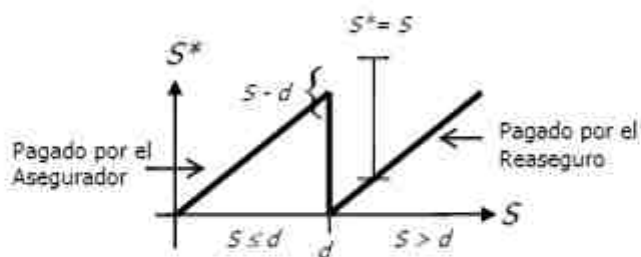


Gráfico 25. Modelo Tipo Stop-Loss

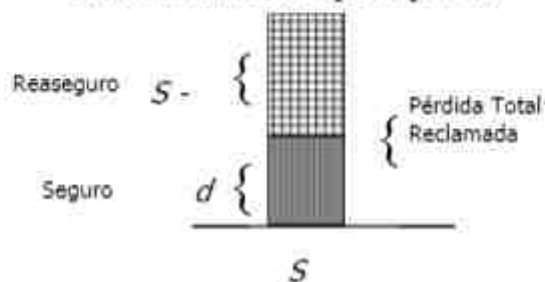


Gráfico 26. Estructura de pagos

## 2. Reaseguro con un máximo

En este caso, se especifica un monto máximo "M" además de considerar el deducible. Lo anterior nos lleva a:

$$S^* = \begin{cases} 0 & \text{si } S \leq d \\ S - d & \text{si } d < S \leq M + d \\ M & \text{si } S > M + d \end{cases}$$

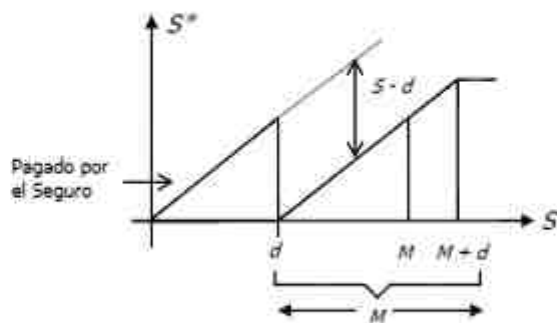


Gráfico 27. Modelos con máximos

Es interesante observar que este tipo de operación, es algebraicamente equivalente a un stop-loss con deducible menos un stop-loss con deducible  $M + d$ .

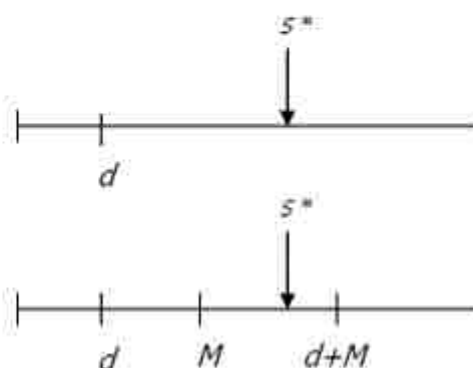


Gráfico 28. Equivalencia de Modelos

$$\begin{array}{ll}
 S_1^* = S - d & S > d \\
 S_2^* = S - (M + d) & S > (M + d) \\
 S_3^* = S_1^* - S_2^* = M & S > (M + d)
 \end{array}$$

### 3. Reaseguro proporcional

Dado un  $0 < \alpha < 1$ , el reasegurador reconoce la fracción de pérdida " $\alpha S$ " y el asegurador paga el complemento  $(1-\alpha)S$ .

#### *Ejemplo*

Una compañía cubre 1000 personas en forma independiente (estadísticamente independientes) por el periodo de un año. El personal se clasifica como sigue<sup>23</sup>:

Grupo	Monto del Beneficio	Número de Empleados	Probabilidad de Causas
1	1	500	0,025
2	2	300	0,025
3	4	200	0,025

<sup>23</sup> Beneficio por muerte M\$

La política de la empresa (M\$.) a través de un auto-seguro, es la de aplicar la política de retener el riesgo equivalente hasta dos unidades de beneficio por empleado. Un re-aseguro, se compra por 3% por unidad transferida (no retenida) por la empresa. La empresa que funge aquí como un asegurador cobra un equivalente a las primas estimada en  $Q = E(S) + 2\sqrt{\sigma} + R$  siendo "S" la pérdida asociada al nivel de riesgo retenido y "R" el costo del reaseguro.

De la política de la empresa, se desprende que la compañía afrontará por cuenta propia como si fuera un asegurador; de hecho se está auto-asegurando los dos primeros grupos de la población bajo un estudio; dado que el número de unidades<sup>24</sup> de beneficio en riesgo son cubiertas por la empresa. En el caso de los empleados clasificados en el grupo 3, la empresa sólo cubrirá las dos primeras unidades y el remanente  $4 - 2$  se trasladan al re-aseguro.

- Número de unidades transferidas al re-asegurador:  $2(200)=400$
- Costo del re-aseguro:  $3\%(400)=12$
- Valores esperados de la pérdida:

Grupo	Probabilidad ( $q_i$ )	$E(B_i)$
1	0,025	(1)
2	0,025	(2)
3	0,025	(2)

La pérdida individual " $X_i$ " relacionada al beneficio " $B_i$ " a través de las esperanzas matemáticas, es como sigue:

$$E(X_i) = q_i E(B_i)$$

$$Var(X_i) = q_i(1 - q_i)E^2(B_i) + q_i Var(B_i)$$

Pero  $Var(B_i) = 0$  para todos los grupos cubiertos ¿Por qué?  $B_i = k$  una vez definido un beneficio único por grupo de empleado. Luego la esperanza de pérdida total acumulada para todos los empleados sería:

<sup>24</sup> En este caso una unidad de beneficio es igual a 1 M\$, pero pudiera haber una relación de conversión distinta.

$$\begin{aligned}
 E(S) &= \sum_{i=1}^{n=10^3} E(X_i) \\
 &= 500(0,025)(1) + 500(0,025)(2) \\
 &= 37,5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Var(S) &= \sum_{i=1}^{n=10^3} Var(X_i) \quad \text{por independencia} \\
 &= 500(0,025)(0,975)(1^2) + 500(0,025)(0,975)(2^2) \\
 &= 61,25
 \end{aligned}$$

De donde la cuota prima a pagar por los empleados al Fondo del Plan de Beneficios, para soportar el riesgo antes descrito se estima en:

$$Q = E(S) + 2\sqrt{Var(S)} + R = 37,50 + 2\sqrt{61,25} = 12 = 65,15$$

Se deja al lector repetir el ejercicio, asumiendo los siguientes cambios<sup>25</sup> en la distribución del número de empleados y que se evalúe y compare el costo adicional respecto de la distribución inicial.

a)

Número de empleados			Grupo
1	2	3	
200	500	200	1
300	200	500	2
500	300	300	3

b) ¿Qué ocurre en el costo del plan si los beneficios se duplican?

<sup>25</sup> El resto de las distribuciones, supuestos e hipótesis del problema permanecen constantes, no cambian.

PÁGINA EN BLANCO

# Capítulo 8

---

## *Riesgo de la tasa de interés*

La **tasa de interés**, representa la remuneración o precio del dinero. Generalmente, el interés evoluciona de una manera errática en el tiempo. Sin duda, a través del concepto del interés se pueden explicar y determinar todos los instrumentos y operaciones financieras tales como bonos, préstamos, anualidades, etc.

El riesgo, por lo tanto de cualquiera de las operaciones e instrumentos es altamente dependiente del riesgo propio de la tasa de interés.

Los modelos estocásticos asociados a las tasas de interés se pueden describir sencillamente como sigue:

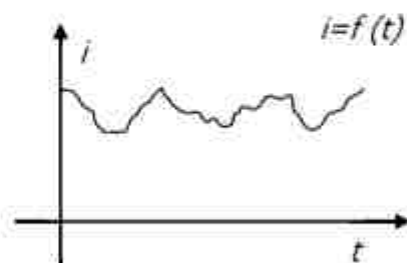


Gráfico 29. Evolución Tasa de Interés



Supongamos que deseamos conocer, cual es el capital acumulado en el futuro de un cierto monto disponible hoy para inversión, si llamamos:

$C_0$ : capital inicial en el momento  $t=0$

$C_t$ : capital acumulado en el momento  $t=k>0$ , entonces

$$C_t = C_0(1+i)^k$$

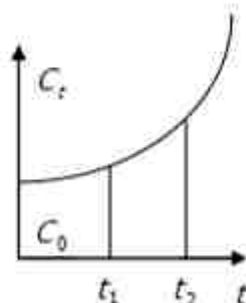


Gráfico 30. Evolución del Capital

siendo " $i$ " la tasa de interés fija durante el periodo  $\Delta t=k$ , el capital final acumulado sin duda será " $C_t$ ". Sin embargo, suponer una tasa de interés fija cuando  $\Delta t$  es grande no es razonable<sup>25</sup> pues la estimación de " $C_t$ " deberá hacerse bajo el concepto de la **variabilidad aleatoria del interés**, dado el carácter errático de esta última en el tiempo.

Si asumimos que la tasa de interés, está distribuida según una densidad de probabilidad de parámetro  $\bar{\theta}$ <sup>26</sup> como por ejemplo  $i \sim N(\mu, \sigma^2)$  entonces podemos afirmar:

<sup>25</sup> Sobretudo en economías como la nuestra (venezolana), donde los vaivenes de las tasas han generado grandes distorsiones. Por supuesto, en economías estables, luce razonable asumir la tasa de interés en el largo plazo. Esto, en mi opinión no es necesariamente cierto en otro tipo de economías.

<sup>26</sup> En este caso el parámetro  $\bar{\theta}$  es un vector de dos componentes  $(\mu, \sigma^2)$  donde  $\theta_1 = \mu$  y  $\theta_2 = \sigma^2$  siendo  $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$

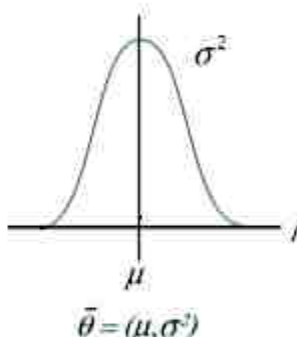


Gráfico 31. Función de Densidad de Probabilidad

$$1) E_i(i) = \mu$$

$$2) \text{Var}_i(i) = \sigma^2$$

$$3) f_i(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Por lo tanto, estamos interesados en determinar el Valor Esperado

$$E(C_t) = E(C_0(1+i)^k) = C_0E(1+i)^k$$

dado que " $C_0$ " es una constante conocida en  $t=0$ .

Para determinar  $E(1+i)^k$  procedemos como sigue:

En el caso de  $k=1$

$$E(1+i) = E(1) + E(i) = 1 + \mu$$

$$\text{para } k=2 \quad E(1+i)^2 = E(1+2i+i^2)$$

$$= E(1) + E(2i) + E(i^2)$$

$$= 1 + 2E(i) + (\text{Var}(i) + E^2(i))$$

$$= 1 + 2\mu + \sigma^2 + \mu^2$$

Luego en el caso que  $\Delta t=2$  años y la tasa de interés se encuentre por ejemplo distribuida normalmente con  $\mu = 12\%$  y  $\sigma = 1\%$ , si el capital inicial es  $C_0 = 20$  M\$, entonces el valor esperado del capital final acumulado a los dos años  $C_{t,2}$  se determinará como sigue:

$$C_{t-2} = C_0(1+i)^2$$

$$E(C_2) = E(C_0(1+i)^2) = C_0 E(1+i)^2 = C_0(1+2\mu + \sigma^2 + \mu^2)$$

sustituyendo  $(C_0, \mu, \sigma)$  por sus valores, se obtiene:

$$E(C_2) = 20(1 + 2 \cdot 12\% + (1\%)^2 + (12\%)^2)$$

$$E(C_2) = 20(1 + 24\% + 10^{-4} + 0,0144) = (1,2544)20 = 25,08$$

# Capítulo 9

---

## Árboles de riesgo binomial

Los Bancos al igual que las Casas de Seguros deben crear carteras o portafolios de inversión, con los flujos de dinero y primas respectivamente.

La exposición de esta cartera al riesgo de mercado, tiene como resultado final un potencial (probable) incumplimiento de los compromisos contraídos.

En la matemática financiera moderna, se habla de instrumentos financieros derivados sobre ciertos tipos de actividades subyacentes.

Supongamos que en el tiempo  $t = 0$  el precio de la acción  $P_t = P_0$ ; la pregunta subyacente es; que pasa con el valor de la acción en el periodo inmediatamente posterior cuando  $t = 1$ ; si se asumen sólo dos posibles estados.

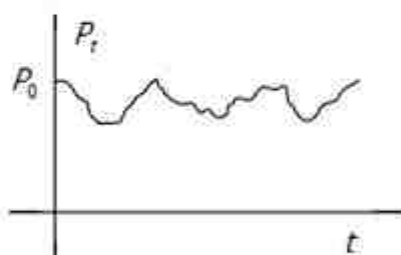


Gráfico 32. Evolución del Activo

$$P_1 = \begin{cases} P_0(1+a) & 0 \leq a \leq 1 \\ P_0(1+b) & 0 \leq b \leq 1 \end{cases}$$

$$P_0 \begin{cases} \nearrow P_0 \left( 1 + \frac{a}{100} \right) \\ \searrow P_0 \left( 1 + \frac{b}{100} \right) \end{cases} \begin{array}{l} \text{Estados: } \{e_1, e_2\} \\ e_1 = \text{sube } a\% \\ e_2 = \text{baja } b\% \end{array}$$

Si las probabilidades asociadas, a la subida y la bajada del precio de la acción, son respectivamente "P" y  $q=1-P$ , entonces la esperanza matemática del valor de la acción en  $t=1$  sería

$$E(P_1) = P(P_0)(1+a\%) + q(P_0)(1-b\%)$$

$$E(P_1) = P_0 [ (P)(1+a\%) + (1-P)(1-b\%) ]$$

de donde obviamente, se deduce que el nuevo precio de la acción es un promedio ponderado; donde los factores de ponderación o pesos por las tasas de subida o bajada respectivamente. Por supuesto si  $a\% = b\%$ , entonces se cumple que:

$$E(P_1) = P_0$$

En este planteamiento " $P_1$ ", es una **variable aleatoria distribuida** como sigue:

$$P_1 = \begin{cases} P_0(1+a) & \text{con probabilidad } P \\ P_0(1+b) & \text{con probabilidad } 1-P \end{cases}$$

En el caso de que  $P_{t=0} = 100$  US\$/acción los estados (escenarios más probables) en  $t = 1$  sean  $\{e_1, e_2\}$

$e_1$  : subida de un 10% de  $P_0$  con probabilidad 5%

$e_2$  : bajada de un 20% de  $P_0$  con probabilidad 95%

Entonces aplicando la fórmula anterior:

$$E(P_1) = 100[(1+10\%)5\% + (1-20\%)95\%]$$

$$E(P_1) = 100[1.10(5\%) + 80\%(95\%)]$$

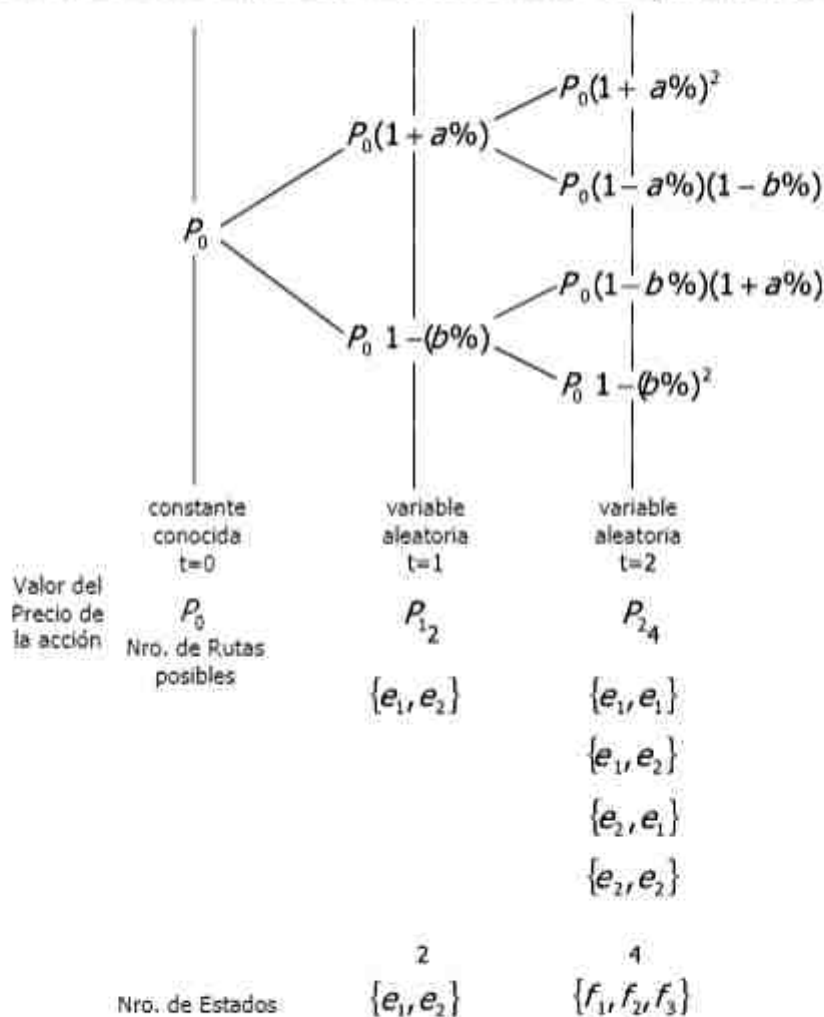
y el riesgo  $\sqrt{\text{Var}(P_1)} = \sigma_{P_1}$  viene dado por

$$Var(P_1) = E(P_1^2) - E^2(P_1)$$

donde  $E(P_1^2) = (1.10)^2(5\%) + (80\%)(95\%)$

$$E(P_1^2) = 82.05\%$$

Si ahora repetimos el ejercicio para  $t=2$ , suponiendo las tasas y probabilidades constantes en el tiempo, se obtendría el siguiente árbol:



La distribución de probabilidad respectiva para  $t=2$  viene dada como sigue:

$$P_2 = \begin{cases} P_0(1+a\%)^2 & P^2 \\ P_0(1+a\%)(1-b\%) & \text{con probabilidad } 2(P)(1-P) \\ P_0(1+b\%)^2 & (1-P)^2 \end{cases}$$

La gráfica de la distribución de probabilidad de " $P_2$ " es la siguiente:

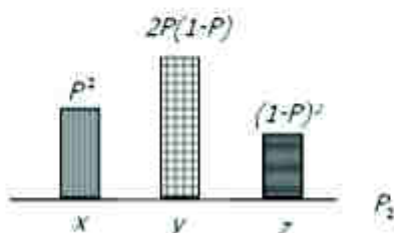


Gráfico 33. Función de probabilidad en  $t=2$

donde  $x = P_0(1+a\%)^2$

$$y = P_0(1+a\%)(1-b\%)$$

$$z = P_0(1+b\%)^2$$

Es importante destacar, que esta distribución de probabilidad tiene asociada las siguientes funciones:

$$f_1(p) = p^2$$

$$f_2(p) = 2p(1-p)$$

$$f_3(p) = (1-p)^2$$

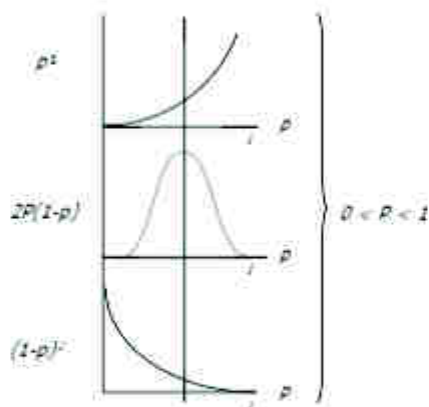


Gráfico 34. Funciones de  $(P)$  en el intervalo

Cuando  $p=1/2$  en  $t=1$  (proceso equiprobable; es decir, la probabilidad de subir o bajar es la misma)  $f_1 = 1/4$ ,  $f_2 = 1/2$ ,  $f_3 = 1/4$ , lo que nos lleva finalmente a considerar sólo tres estados finales de las cuatro rutas identificadas anteriormente. Esto es también válido obviamente para cualquier  $0 < p < 1$ .

Se deja como ejercicio para el lector, repetir este problema con  $p = 1/4, 1/3, 1/2$  para sensibilizar  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  respectivamente.

Pero todavía no hemos finalizado; ¿Cuánto vale, el valor esperado de la acción en  $t=2$  y cual es el nivel de riesgo asociado para el segundo periodo?

Por definición,

$$E(P_2) = \sum P_{2j} \cdot P_j$$

luego

$$E(P_2) = x \cdot P^2 + y(2)(P)(1-P) + z(1-P)^2$$

sustituyendo

$$E(P_2) = P_0(1+a\%)^2 \cdot P^2 + P_0(1+a\%)(1-b\%) \cdot 2P(1-P) + P_0(1-B\%)^2(1-P)^2$$

En el caso  $p=1/2$

$$E(P_2 | P=1/2) = P_0 \left[ \frac{1+(a\%)^2}{4} + \frac{(1-b\%)(1-b\%)}{2} + \frac{1+(a\%)^2}{4} \right]$$

$$= P_0 \left( \frac{1+a\%}{2} + \frac{1-b\%}{2} \right)^2 = P_0 \left( \frac{2+a-b}{2} \right)^2$$

si  $a\% = b\%$

$$= P_0 \left( \frac{1+a\%+1-b\%}{2} \right) = P_0$$

Al igual que en  $t=1$ , la varianza en  $t=2$  viene dada por

$$Var(P_2) = E(P_2^2) - E^2(P_2)$$

y como de costumbre, cuando  $p=1/2$



$$\begin{aligned}
 E(P_2^2) &= \frac{P_0^2(1+a\%)^4}{4} + \frac{P_0^2(1+a\%)^2(1+b\%)^2}{2} + \frac{P_0^2(1+b\%)^4}{4} \\
 &= P_0^2 \left[ \frac{(1+a\%)^2}{2} + \frac{(1+b\%)^2}{2} \right]^2 \\
 &= P_0^2 \left[ \frac{2+a\%^2+b\%^2}{2} \right]^2
 \end{aligned}$$

luego

$$\text{Var}(P_2) = P_0^2 \left[ \frac{2+a\%^2+b\%^2}{2} \right]^2 - P_0^2 \left[ \frac{2+a\%+b\%}{2} \right]^2$$

Se deja al lector, evaluar el riesgo para una acción que actualmente cuesta  $\text{US\$ } 100$ , dentro de tres asumiendo  $p=10\%$  y  $a=2b$ ,  $b=10\%$ .

#### **Fórmula del Binomio de Newton**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

en el caso de que  $a$  y  $b$  sean dos probabilidades

$$0 \leq a \leq 1 \text{ y } 0 \leq b \leq 1 \text{ y } a+b=1$$

$$\text{además si } a=b \text{ entonces } (a+b)^n = (1/2+1/2)^n; \text{ y } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = 1$$

#### **Fórmula Distribución Binomial**

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad X=0,1,\dots,n$$

$$E_x = np$$

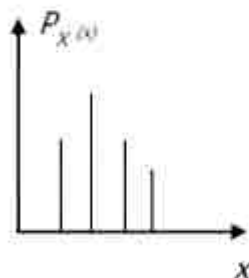
$$\text{Var}_x = np(1-p) = np - np^2$$

donde

$x$ : número de éxitos.

$n$ : número de intentos o lanzamientos.

**Gráfico 35. Distribución Binomial**



# Capítulo 10

## Valor en riesgo

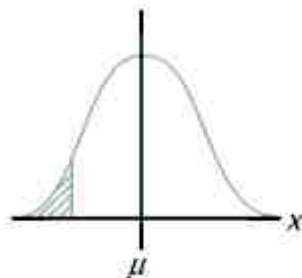
El **valor en riesgo**, es un método para cuantificar la exposición al riesgo del mercado por medio de técnicas estadísticas.

El valor en riesgo, es una medida estadística de riesgo de mercado que estima la pérdida máxima, que podría registrar un portafolio en un intervalo de tiempo con un cierto nivel de confianza estadística.

Gráfico 36. Ilustración del VaR

- $\alpha$ : significancia
- $1-\alpha$ : confianza estadística
- $x$ : variable aleatoria de interés

$$x \sim N(\mu, \sigma^2)$$



En la realidad, de los mercados la mayoría de los activos no siguen estrictamente un comportamiento estadístico normal. Sin embargo, por el Teorema del Límite Central, todos estos comportamientos se pueden aproximar razonablemente bien con curvas normales. Obviamente, si existe evidencia clara de fuertes sesgos en la distribución de la variable de interés, bajo estudio, entonces el "VaR" debería determinarse utilizando la Teoría de Valores Extremos; en donde se proponen una serie de distribuciones de probabilidad con sesgo y kurtosis específicos que se adaptan de manera extraordinaria a este tipo de comportamientos.

### 1. Riesgo de un solo activo

Suponiendo que la variable "x" este distribuida normalmente con media nula, es decir,  $x \sim N(0, \sigma^2)$  entonces bajo el enfoque paramétrico

$$Var = Z_{\alpha} \cdot M \sigma \sqrt{t}$$

Donde:

$x$  : rendimientos o retornos del activo.

$Z_{\alpha}$  : variable normal al  $\alpha\%$  de significancia o  $(1-\alpha)\%$  de confianza estadística.

$M$  : monto total de la inversión expuesta al riesgo.

$\sigma$  : desviación estándar de los rendimientos del activo.

$t$  : horizonte de tiempo en que se desea calcular el "VaR".

Sin entrar en mayores complicaciones matemáticas, el "VaR" es la solución a la siguiente ecuación integral:

$$\alpha = \int_{-\infty}^q f_x(x) dx = \int_{-\infty}^q dF_x(x) = F_x(q)$$

siendo "q" un valor percentil de la distribución de los rendimientos del activo dada por la variable aleatoria "x".

Luego el "VaR" no es más que la solución a

$$F_x(q) = Prob(X \leq VaR) = \alpha$$

existiendo la función inversa de  $F_x(q)$  y aplicando la ecuación se obtiene

$$Var = F_x^{-1}(\alpha)$$

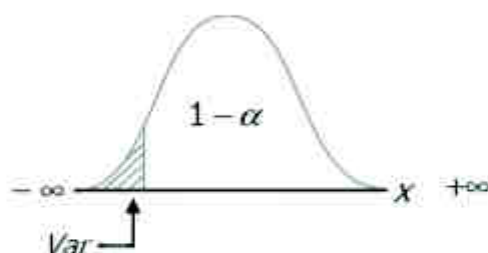


Gráfico 37. Función densidad de probabilidad normal

En otras palabras, el primer valor de la variable de interés  $x > -\infty$  hasta donde se acumula el  $\alpha\%$  de área bajo la curva o  $\alpha\%$  de probabilidad a la izquierda del "Var".

Fácilmente, se comprueba que se cumple

$$\text{Prob}(X \in [-\alpha, \text{Var}]) + \text{Prob}(X \in [\text{Var}, +\infty]) = 1$$

## 2. Valor en riesgo de una cartera de activos

Para entender este concepto, tomemos como ejemplo el caso más sencillo; supongamos una cartera con sólo dos activos bajo riesgo. Los pesos específicos de cada activo en la cartera lo designaremos como " $\omega_1$ " y " $\omega_2$ ", cumpliéndose que  $\omega_1 + \omega_2 = 1$ . De acuerdo con la Teoría de Markowitz, la varianza del portafolio o cartera viene dada por:

$$\sigma^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$$

siendo

$\sigma^2$ : varianza de la cartera.

$\sigma_1^2, \sigma_2^2$ : varianza de los rendimientos de los activos 1 y 2.

$\omega_1, \omega_2$ : pesos específicos de la cartera.

$\rho_{12}$ : coeficiente de correlación estadística de los rendimientos.

El "VaR" del portafolio se determina como sigue:

$$\text{Var} = Z_{\alpha} \sigma M \sqrt{t}$$

siendo ahora "s" la volatilidad o nivel de riesgo de la cartera al sustituir la fórmula anterior en la última se obtiene

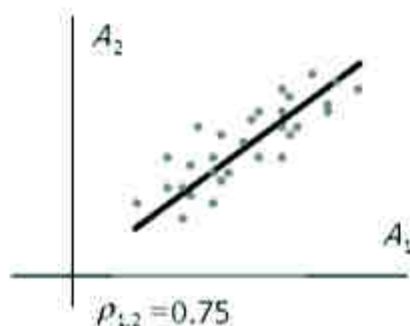
$$Var = Z_{\alpha} \left[ \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \right]^{\frac{1}{2}} M \sqrt{t}$$

Es importante destacar, que el *Var* de la cartera es menor o igual que la suma de los "*Var*" de los activos individuales dado que  $\rho_{1,2}$  es un valor que oscila en valor absoluto entre 0 y 1.

Luego

$$Var_{cartera} \leq Var_1 + Var_2$$

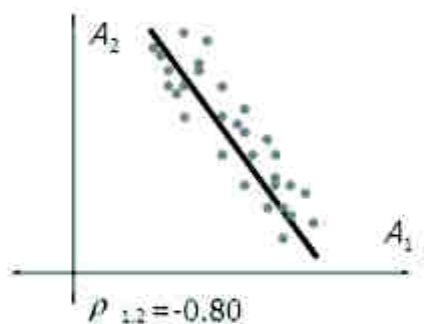
$Var_{1,2}$  : valor en riesgo de los activos 1 y 2.



Altamente correlacionados en forma positiva

### Gráfico 38. Regresión Positiva

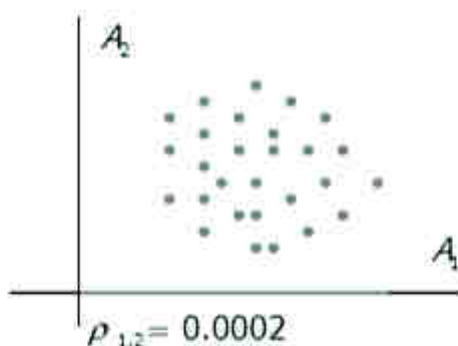
Observemos distintos casos que pueden darse entre los dos activos de la cartera  $Activos = \{A_1, A_2\}$ . Lo cual indica que un aumento en  $A_1$  provoca un aumento en  $A_2$ .



Altamente correlacionados en forma negativa

**Gráfico 39. Regresión Negativa**

En este caso el signo de  $\rho_{12}$  es negativo  $\rho_{12} < 0$  lo cual indica



No existe correlación alguna

**Gráfico 40. Ausencia de Regresión**

A diferencia de los dos casos anteriores,  $\rho_{12} \sim 0$ , lo cual, nos indica que los cambios de  $A_1$  para arriba o para abajo no impactan a  $A_2$ .

### 3. Ejemplo numérico de una cartera de dos activos

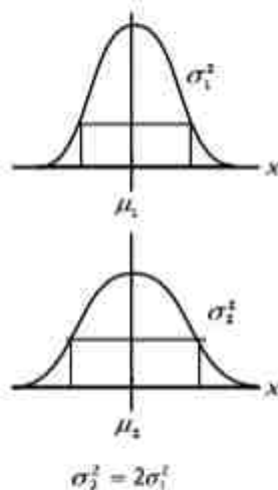
Se disponen de:

1. Dos activos de inversión  $\{A_1, A_2\}$
2. Del análisis de correlación entre  $A_1$  y  $A_2$  se obtuvo  $\rho_{12} = +0.5$

3. Las varianzas  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$  son respectivamente:  $10^2 M\$$ . y  $2 \cdot 10^2 M\$$ .
4. El monto total para invertir es:  $100 M\$$ .
5. Pesos específicos o montos a invertir o colocar por tipo de activo:  $\omega_1 = 40\%$ ,  $\omega_2 = 60\%$ .

Se pide determinar el *Var* de la cartera global y el de cada uno de los activos constituyentes, para el periodo de un año.

Análisis estadístico del rendimiento de los activos  $\{A_1, A_2\}$



**Gráfico 41. Comparación de las varianzas**

Obviamente la varianza del rendimiento del segundo activo, es dos veces la del rendimiento del primero. Esto último, es un indicativo de que los montos o inversiones colocados en  $A_2$  son el doble de riesgosos en términos de la varianza.

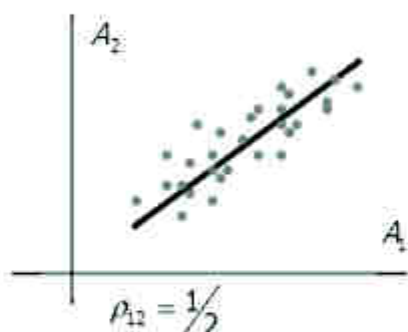


Gráfico 42. Regresión con  $\rho = 1/2$

Por otro lado de  $\rho_{12} = +0.5$  se puede deducir que existe una correlación importante entre ambos activos. Cambios positivos en  $A_1$  originan cambios también positivos en  $A_2$ .

**Cálculo del Var de cartera al 95%**

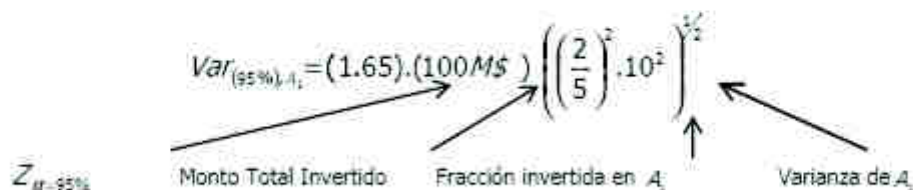
$$Var_{(95\%)} = (1.65) \cdot (100M\$) \sigma_{cartera}$$

$$\sigma_{cartera} = \left( \omega_1^2 \omega_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2 \omega_1 \omega_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \right)^{1/2}$$

sustituyendo, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{cartera} &= \left( \left( \frac{2}{5} \right)^2 10^2 + \left( \frac{3}{5} \right)^2 2 \cdot 10^2 + 2 \left( \frac{2}{5} \right) \left( \frac{3}{5} \right) \frac{1}{2} 10^2 \cdot \sqrt{2} \right)^{1/2} \\ &= \left( 10^2 \left( \frac{4}{25} \right) + 2 \cdot 10^2 \left( \frac{9}{25} \right) + \sqrt{2} \cdot 10^2 \left( \frac{6}{25} \right) \right)^{1/2} = 11,04 \end{aligned}$$

**Cálculo de los VaR para cada activo  $\{ A_1, A_2 \}$**





$$Var_{(95\%), A_1} = 660 \text{ M\$}$$

$$Var_{(95\%), A_2} = (1.65) \cdot (100 \text{ M\$}) \left( \left( \frac{3}{5} \right)^2 \cdot 2 \cdot 10^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Var_{(95\%), A_2} = 400,07 \text{ M\$}$$

y como podemos fácilmente verificar

$$Var_{(95\%), A_1} + Var_{(95\%), A_2} > Var_{(95\%)}$$

Se deja al lector la verificación algebraica de la inecuación anterior.

# Capítulo 11

---

## *Procesos Estocásticos Wiener*

En este capítulo, se introducirán conceptos muy elementales de cálculo estocástico, para poder evaluar el riesgo de mercado asociado por ejemplo a un modelo de evaluación de precios de una acción.

Una variable cuyos valores cambian en el tiempo de una manera incierta (con incertidumbre) recibe el nombre de **proceso estocástico**. Estos procesos, se pueden clarificar en discretos o continuos según el tipo de variable.

### **1. Propiedad Markoviana**

Un **proceso de Markov**, es un tipo particular de proceso estocástico en el cual, sólo el estado actual del proceso es de relevancia para hacer predicciones en el futuro. La historia y la manera como el proceso ha evolucionado hasta el presente, es irrelevante para explicar un estado futuro del proceso.

Un ejemplo de este tipo de procesos, es sin duda, la evolución del precio de las acciones, las cuales siguen un proceso Markov. Si actualmente se conoce el precio de una acción, digamos  $S_0$  US\$/acción nuestras predicciones del precio de la acción para el futuro  $\{S_t, t > 0\}$ . Esto nos lleva a concluir, que

las predicciones del precio de la acción a futuro son inciertas y por lo tanto, deben venir expresadas en términos de las distribuciones de probabilidad.

## 2. Procesos Wiener

Un **proceso Wiener**, es un tipo particular de un proceso estocástico Markoviano, que ha servido en el mundo de la física para describir el movimiento de una partícula sujeta a un gran número de pequeños choques moleculares, que cambian en cada momento su trayectoria. Algunas veces también es conocido como **movimiento browniano**.

La conducta de una variable "Z" que sigue un proceso browniano, puede ser totalmente descrita y entendida al estudiar cambios pequeños de la variable asociada a cambios pequeños de tiempo. Lo anterior, se resumen en dos propiedades básicas.

### Propiedad 1:

Basado en los siguientes supuestos:

1. Z sigue un WP (Proceso Wiener).
2.  $\varepsilon \sim N(0,1)$  es una variable aleatoria distribuida según una Normal de media nula y varianza unitaria.

$$E(Z) = 0$$

$$Var(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) = 1$$

3.  $\Delta Z$  y  $\Delta t$  son cambios pequeños de las variables Z y t.

De lo anterior se deriva que la relación entre un cambio de la variable Z y un cambio de la variable t viene dado por

$$\Delta Z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

### Propiedad 2:

Los valores de  $\Delta Z$ , para cualesquiera dos intervalos de tiempo pequeños  $\Delta t$  son estadísticamente independientes.

En resumen, de la propiedad 1 y 2 obtenemos:

$$E(\Delta Z) = E(\varepsilon\sqrt{\Delta t}) = \sqrt{\Delta t}E(\varepsilon) = 0$$

$$Var(\Delta Z) = Var(\varepsilon\sqrt{\Delta t}) = (\sqrt{\Delta t})^2 Var(\varepsilon) = \Delta t$$

Es importante destacar, que la propiedad 2 donde se dice que,  $\Delta Z$  para cuales quiera dos  $\Delta t$  son independientes he implica que "Z" sigue o cumple la propiedad markoviana.

La evolución de  $Z=Z(t)$  para periodos de "t" suficientemente largos, permitiría conocer la trayectoria desde el momento inicial  $t=0$  hasta un momento  $t=T$  y evaluar el cambio  $Z(T)-Z(0)$  de la siguiente manera:

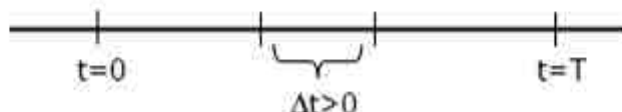


Gráfico 43. Línea de Tiempo

"T" es el tiempo total de observación de la evolución de "Z" y siempre va a poder ser expresado como un múltiplo de los intervalos  $\Delta t$ , es decir,

$$T = N \cdot \Delta t$$

y por lo tanto

$$Z(T) = Z(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

donde el vector  $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$  está compuesto por variables aleatorias idénticas e independientemente distribuidas normal estandarizada; y por la propiedad de la suma de variables aleatorias normales, el cambio  $\Delta Z = Z_T - Z_0$  también está distribuido normalmente por:

$$Z_T - Z_0 \sim N(0, T)$$

Es decir, si

$$Y_T = Z_T - Z_0$$

$$f_{Y_T}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{T}} y$$

$$E(Y_T) = 0$$

$$Var(Y_T) = N\Delta t = T$$

### 3. Procesos generalizados de Wiener

Supongamos ahora que "X", es una variable cuyo diferencial puede ser descrito de la siguiente manera:

$$dx = a dt + b dz$$

donde "a" y "b" son constantes y "dz" es un **proceso Wiener** obtenido por el  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta Z = dz$  y  $\Delta t = dt$ .

Asumamos por el momento, que el segundo término de la ecuación vale cero, entonces:

$$dx = a dt$$

lo cual implica que  $\frac{dx}{dt} = a$  y la solución a esta ecuación diferencial, que de paso, puede ser pensada como una velocidad, es

$$x = x_0 + at$$

siendo  $X_0 = X_t = 0$  la posición inicial en un intervalo de tiempo "T", donde "X" se incrementa a "T".

$$\Delta x = aT$$

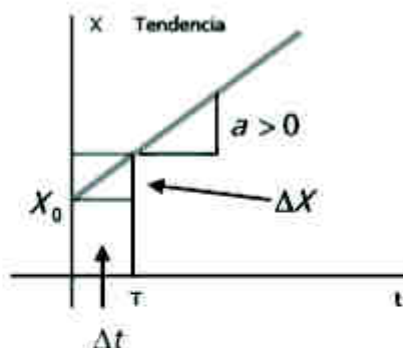
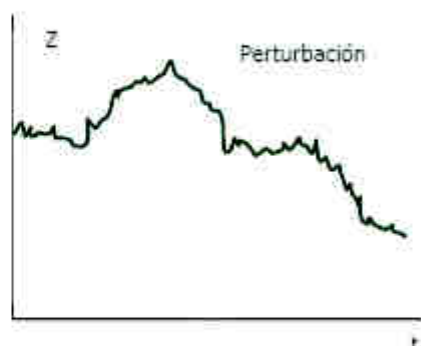


Gráfico 44. Componente Tendencia

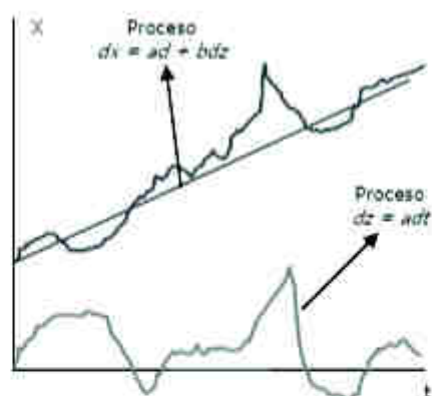
Hasta este momento, esta parte de la ecuación diferencial inicial explica determinísticamente la evolución de "X" en el tiempo como una tendencia lineal, en este caso con pendiente positiva. Si ahora agregamos el segundo término "bdz", estamos ahora agregando la parte estocástica, aleatoria o perturbación de la tendencia, la cual explica, la variabilidad de la trayectoria de "X" en la tendencia antes descrita.



**Gráfico 45. Trayectoria de las Fluctuaciones**

La suma de estos dos efectos, asociados a las dos gráficas tendencia y perturbación, nos da como resultado la evolución de la variable "X" que sigue un proceso generalizado Wiener tal cual se describe en el gráfico resumen.

De igual manera



**Gráfico 46. Trayectoria de las Fluctuaciones con tendencia**

$$\Delta x = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta x \sim N(a\Delta t, b^2\Delta t)$$

En resumen, a un pequeño cambio  $\Delta t$  en el tiempo le corresponde uno  $\Delta x$ , dado por la ecuación anterior y distribuido normalmente con esperanza y varianza conocidos, y proporcionales al tamaño o magnitud de intervalo de tiempo  $\Delta t$ .

#### 4. Aplicación al caso de la evolución de los precios de las acciones en el mercado de capitales

Suponga que, el valor esperado del rendimiento o retorno de una acción es 14% anual y su volatilidad es 20%. Si el tiempo viene medido en años, simule el precio de la acción para periodos de tiempo de un 1% de año (cada 3.65 días) con el objeto de hacer las predicciones del valor de la acción. El precio inicial de la acción es 20 US\$.

De estos datos

$$a=14\%$$

$$b=20\%$$

$$\Delta t=1\%$$

$$X_0 = 20 \text{ US\$} \mid \text{acción}$$

$$\frac{\Delta x}{x} \sim N(0.14\%, 2\%)$$

$$X_2 = 0.14\% + 2\%x_1$$

Los resultados finales, arrojados por la simulación son<sup>26</sup>:

Evolución del precio de la acción	Número aleatorio normal (0,1)	Número aleatorio $N(0.14\%, 2\%)$	$\frac{\Delta x}{x}$
20.00	0.52	1.18%	23.6
20.23	1.44	3.02%	61.1
20.84	-0.86	-1.58%	-32.9
20.51	1.96	3.06%	62.8
21.14	-0.69	-1.24%	-26.2
20.88	-0.74	-1.34%	-28.0
20.60	0.21	0.50%	11.5

Tabla 1. Resultados Evolución Precio de la Acción

<sup>26</sup>Al principio de cada periodo  $\Delta t= 1\%$  año; al principio de cada 365 días



**Gráfico 47. Trayectoria del Precio**



**Gráfico 48. Trayectoria del cambio del Precio**



PÁGINA EN BLANCO

# Capítulo 12

---

## Cadenas Markovianas

Las **Cadenas Markovianas** tienen todo su basamento en las definiciones que apoyan los procesos estocásticos.

Un proceso estocástico, cuyo espacio de estados  $(i_0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$  es homomórfico a un subconjunto de enteros positivos  $Z^+$  si y sólo si sus probabilidades condicionales cumplen con

$$\text{Prob}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) =$$

$$\text{Prob}[(X_{n+1} = j | X_n = i)] = P_{ij}$$

Siendo " $n$ " el tiempo y  $i_n$  el estado ocupado en el momento  $t = n$ .

Lo anterior, define lo que es una Cadena Markoviana.

### 1. Características de una Cadena Markoviana

Las características que las distinguen son las siguientes:

1. El espacio de estados, es un conjunto discreto.
2. Las probabilidades de transición,  $P_{ij}$  dependen solo del estado actual y son independiente de todo el proceso transcurrido hasta este momento actual.

3. Las probabilidades  $P_{ij} \neq f(t)$  no son una función del tiempo, es decir, no varían con "t".

## 2. Trayectorias Muestrales

Supongamos una cadena con tres estados en tres tiempos distintos:

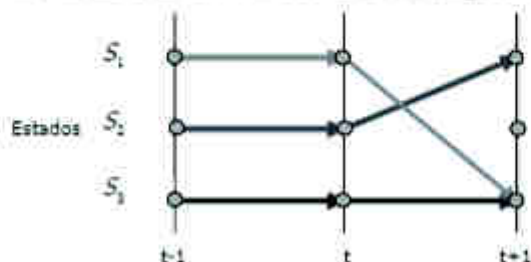


Gráfico 49. Tres estados con tres tiempos

En el gráfico anterior, se pueden observar tres trayectorias distintas en el lapso  $(t-1, t+1)$ . Las trayectorias son:

$$S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3$$

$$S_2 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$$

$$S_3 \rightarrow S_3 \rightarrow S_3$$

Cada una de ellas tiene asociada una **probabilidad de transición**

$$P_{11}, P_{13}$$

$$P_{22}, P_{21}$$

$$P_{33}, P_{33}$$

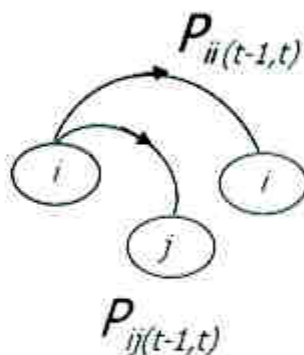


Gráfico 50. Grafo Markoviano

### 3. Probabilidades de Transición

Si  $P_{ij}$  denota la probabilidad de transición de un paso desde el estado " $i$ " al estado " $j$ " se cumple que

$$P_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \geq 0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1 \quad \forall i \geq 0$$

Se define la matriz de probabilidades de transición como sigue:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & \dots & P_{0j} & \dots & P_{0n} \\ \vdots & & \uparrow P_{ij} & & \vdots \\ \vdots & \leftarrow & & \rightarrow & \vdots \\ \vdots & & \downarrow & & \vdots \\ P_{m0} & \dots & P_{mj} & \dots & P_{mn} \end{bmatrix}$$

Gráfico 51. Matriz de Transición

### 4. Modelo de Supervivencia

Un modelo de supervivencia, viene caracterizado por dos estados  $\{0, 1\}$  donde  $i_0 = 0$  y  $i_1 = 1$ , vivo o muerto. Si asumimos que  $0 \leftrightarrow$  *vivo* y  $1 \leftrightarrow$  *muerto*.

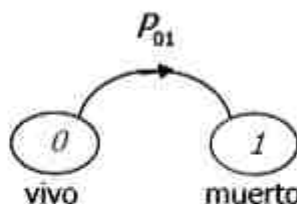


Gráfico 52. Proceso vida - muerte

Esta transición *vivo*  $\rightarrow$  *muerto* obviamente puede ocurrir, sin embargo, la opuesta no. En estos casos el "estado 1", en donde no hay posibilidades de salir una vez alcanzado se conoce como **estado absorbente**.

Si denotamos con " $p$ " la probabilidad de muerte entre  $t$  y  $t+1$ , entonces la matriz de transición del proceso antes indicado sería como sigue:

$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , la cual, se asocia al siguiente gráfico o proceso

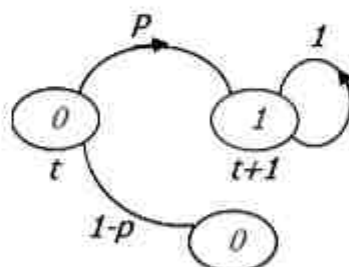


Gráfico 53. Modelo expandido

## 5. Modelo de Enfermedad

A un modelo de enfermedad, se le asocian tres estados  $\{0,1,2\} \leftrightarrow \{i_0, i_1, i_2\}$  que pudieran resumirse como  $\{sano, enfermo, muerto\}$

El gráfico asociado a este proceso vendría dado por:

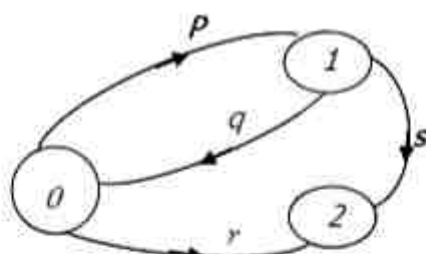


Gráfico 54. Proceso de tres estados

y la matriz de probabilidades de transición vendría dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 1-(p+r) & p & r \\ q & 1-(q+s) & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 6. Caminata Aleatoria

Una caminata aleatoria o "Random Walk", es un proceso estocástico con estados  $i = 0, \pm 1, \pm 2$  y probabilidades de transición

$$P_{i,i+1} = p$$

$$P_{i,i-1} = 1 - p \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

con  $0 < p < 1$

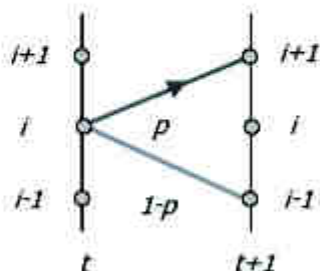


Gráfico 55. Proceso "Random Walk"

### 6.1 Modelo de Seguros

Una póliza para cubrir una determinada contingencia cuesta US\$. 1 y cubre US\$. 2. La probabilidad de causar un siniestro es " $p$ ". Supongamos, que la aseguradora tiene ese sólo cliente y estaría dispuesta a cubrir hasta que, ya no exista ningún dinero en la reserva o fondo para cubrir este reclamo o hasta que el fondo de la aseguradora crezca hasta US\$.  $N$ .

Los estados serían:

$$i = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$P_{i,i+1} = p \quad P_{00} = P_{NN} = 1$$

$$P_{i,i-1} = q = 1 - p$$

siendo " $0$ " y " $N$ " dos estados (barreras absorbentes).

Se recomienda al lector, asumir el conjunto de estados  $\{0, 1, 2, 3\}$  con  $p = 1/2$  y realizar los cálculos suponiendo que la contingencia cuesta US\$. 1 y cubre US\$. 3.

## 7. Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, sirven para extender a más de un paso las probabilidades de transición; de manera que si

$P_{ij}^r = \text{Prob}(X_{t+r} = j \mid X_t = i)$  debemos entenderla como, la probabilidad de alcanzar el estado "j" partiendo de "i" en "r" pasos.

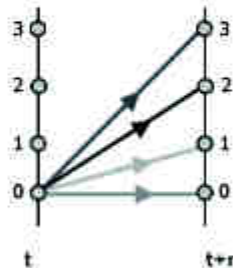


Gráfico 56. Transición de r pasos

La aplicación de la ecuación anterior, en tres tiempos distintos (2 pasos), sería:

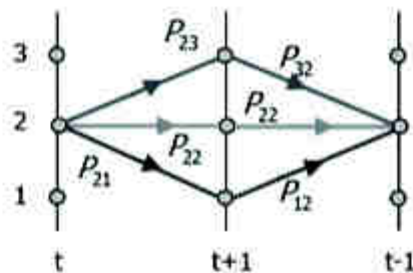


Gráfico 57. Rutas Posibles

Luego, del grafo anterior se deriva que,

$$P_{22}^2 = \underbrace{P_{21}P_{12}}_{\substack{\text{ida de 2} \\ \text{a 2} \\ \text{pasando} \\ \text{por 1}}} + \underbrace{P_{22}^2}_{\substack{\text{ida de 2} \\ \text{a 2} \\ \text{pasando} \\ \text{por 2}}} + \underbrace{P_{23}P_{32}}_{\substack{\text{ida de 2} \\ \text{a 2} \\ \text{pasando} \\ \text{por 3}}}$$

La ecuación anterior puede expresarse para un  $(i, j)$  cualquiera de la siguiente manera:

$$P_{ij}^2 = \Pr(X_{t+2} = j \mid X_t = i)$$

$$P_{ij}^2 = \sum_{r=0}^{\infty} \Pr(X_{t+2} = j, X_{t+1} = r \mid X_t = i)$$

$$P_{ij}^2 = \sum_{r=0}^{\infty} \Pr(X_{t+2} = j, X_{t+1} = r, X_t = i) \Pr(X_{t+1} = r \mid X_t = i)$$

$$P_{ij}^2 = \sum_{r=0}^{\infty} \Pr(X_{t+2} = j \mid X_{t+1} = r, X_t = i) \Pr(X_{t+1} = r \mid X_t = i)$$

$$P_{ij}^2 = \sum_{r=0}^{\infty} P_{ij} P_{ir} = (P \times P)_{ij} = P_{ij}^2$$

### 8. Generalización para $n+m$ pasos

Una generalización de las ecuaciones de CK es la siguiente:

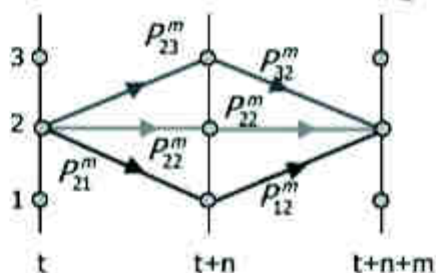


Gráfico 58. Transición de  $n + m$  paso

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{ir}^n P_{rj}^m \quad \forall n, m, i, j \geq 0$$

#### Ejemplo de Aplicación Nro. 1:

En el modelo de supervivencia, dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \alpha > 0$$

Determine la probabilidad de sobrevivir cuatro periodos, asumiendo independencia de "p" respecto de "t".

Si  $p = \alpha$  representa la probabilidad de muerte; es decir describe el paso o transición  $\{0,1\}$ . Estaríamos interesados en conocer la probabilidad de supervivencia en 4 pasos.



Luego si:

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ entonces } P^4$$

$$P^4 = P^2 P^2 = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^4 & 1-(1-\alpha)^4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la probabilidad de interés es el término  $P_{ij}^4$  cuando  $i = j = 1$  es decir, vivo al inicio y vivo después de cuatro transiciones o pasos.

$$Pr(\text{sobrevivir}) = (1-\alpha)^4 \quad \forall \alpha > 0$$

En general, pudiera pensarse que si se mantiene todo el proceso anterior, para un "t" suficientemente largo, tendríamos el siguiente gráfico:

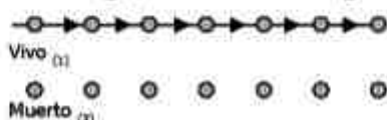


Gráfico 59. Evolución de Supervivencia

y la expresión que describe este grafo sería  $P_{ii}^t = (1-p)^t$

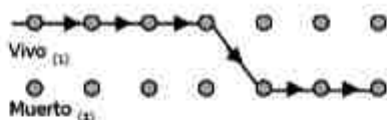


Gráfico 60. Evolución hasta la muerte

$$P_{12}^t = \sum_{i=0}^{t-1} (1-p)^i p = p \begin{pmatrix} 1-(1-p)^t \\ 1-(1-p)^t \end{pmatrix} = 1-(1-p)^t$$

Obviamente,

$$P^t = \begin{pmatrix} (1-p)^t & 1-(1-p)^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donde } P_{21}^t = 0 \text{ y } P_{22}^t = 1$$

## 9. Descomposición Espectral

Una manera eficiente de calcular " $P^t$ ", es a través del uso de los métodos de diagonalización de matrices. Lo anterior implica la obtención de los autovalores y autovectores de la matriz de transición " $P$ ".

Luego  $P = UDU^{-1}$ , donde "D", es la matriz diagonal de los autovalores y "U" es la matriz de los autovectores y se cumple

$$P^k = (UDU^{-1})(UDU^{-1})\dots(UDU^{-1}) = UD^k U^{-1}$$

Luego,

$$P^r = \underbrace{P \cdot P \cdot \dots \cdot P}_k \text{ veces}$$

$$P^r = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\rho)^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^r = \begin{pmatrix} (1-\rho)^r & 1-(1-\rho)^r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de Aplicación Nro. 2:

Dado el modelo del gráfico anexo

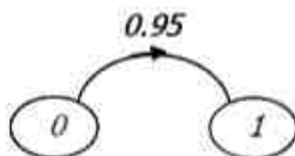


Gráfico 61. Proceso vida - muerte

y la probabilidad de que un individuo actualmente esté vivo es de 99%. Determine:

- Probabilidad de que el individuo esté vivo después de una transición ¿después de "n" transiciones?
- Expectativa de vida del individuo.

$$P = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = (0.99, 0.01)$$

Luego, en un paso la Probabilidad de Supervivencia es:

$$P_s = (0.99 \ 0.01) \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_s = (0.9405 \ 0.0595)$$

Después de  $n$  - pasos  $P^n = P.P...P$  y  $P^n = UD^nU^{-1}$  aplicando la descomposición espectral

$$P^n = \begin{pmatrix} 0.95^n & 1 - 0.95^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego  $\alpha.P^n$  daría la probabilidad de supervivencia después de " $n$ " transiciones o años.

$$\alpha P^n = (0.99 \ 0.01) \begin{pmatrix} 0.95^n & 1 - 0.95^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha P^n = (0.99(0.95)^n \ 1 - 0.99(0.95)^n)$$

Luego,

$$P_s^n = (99\%)(95\%)^n$$

Lógicamente  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_s^n \rightarrow \text{cero}$  y la  $P_m^n \rightarrow 1$

La expectativa de vida del individuo viene dada por:

$$E(T) = \sum_{t=0}^{\infty} t \Pr(X \text{ este vivo en } n = t \text{ y muerto en } n = t + 1)$$

$$E(T) = \sum_{t=0}^{\infty} t \Pr(X_{t+1} = 1, X_t = 0)$$

$$E(T) = \sum_{t=0}^{\infty} t \Pr(X_{t+1} = 1 | X_t = 0) \Pr(X_t = 0)$$

$$E(T) = \sum_{t=0}^{\infty} t(0.05)(0.99(0.95)^t)$$

$$E(T) = 0.0495 \frac{(0.95)}{(1 - 0.95)^2} = 18.81$$

# Capítulo 13

## Tasas de interés estocásticas y valores presentes

Las tasas de interés se pueden clasificar al menos en dos grupos:

- Determinísticas.
- Estocásticas.

En el caso de las tasas de interés determinísticas el valor de la tasa se conoce a priori y se da como fija y eventualmente constante, es decir,  $i = k$  para un cierto  $\Delta t$  que generalmente es pequeño y/o de corto plazo.

Por el contrario, si la tasa varía debido a la ocurrencia de ciertos eventos de carácter contingente, entonces la tasa de interés es una variable aleatoria "f" y tiene asociada una función probabilidad y/o densidad que la caracteriza.

Si  $I \sim f(I | \vartheta)$ , entonces  $E(I=i) = \int if(i)df$  para el caso continuo y  $E(I) = \sum_i ip(i)$  para el caso discreto.

### 1. Valores Presentes Estocásticos.

Supongamos que  $i = \begin{cases} 10\% & \text{con probabilidad } 1/2 \\ 15\% & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases}$

entonces, la esperanza  $E(i) = .10\left(\frac{1}{2}\right) + .15\left(\frac{1}{2}\right) = 12.5\%$

luego, el valor esperado de  $(1+i)$  viene dado por

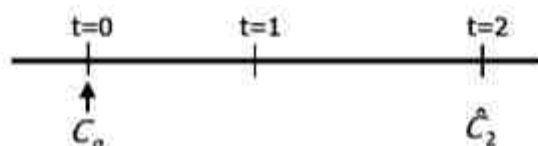
$$E(1+i) = 1 + E(i) = 1.125$$

Igualmente podemos determinar el  $\sigma_i^2 = E(i^2) - E(i)^2$  resolviendo  $\sigma_i^2 = 0.0625$

En el cálculo anterior, es importante no olvidar que  $Var(1+i) = Var(i) = \sigma_i^2$

#### Ejemplo de Aplicación Nro. 1:

Supongamos ahora que las tasas de interés anual, están siendo pronosticadas en el horizonte de un par de años futuros. Adicionalmente disponemos de un capital de M\$. 100,00. Se quiere determinar el valor final de ese capital en el segundo año.



**Gráfico 62. Evolución del Capital**

donde:

$i_1$ : tasa de interés del 1º año.

$i_2$  tasa de interés del 2º año.

El valor del fondo  $\hat{C}_2$  dado  $C_0$  vendría dado por, la capitalización sucesiva a las tasas  $i_1$  y  $i_2$ . Bajo el supuesto de que  $i_1$  y  $i_2$  son variables estadísticamente independientes. El valor de  $i_1$  en el primer año, no tiene ningún efecto en el valor de  $i_2$  en el segundo.

$$\text{Luego, } \hat{C}_2 = C_0 \left(1 + i_1\right) \left(1 + i_2\right)$$

Desarrollando la ecuación anterior  $\hat{C}_2 = C_0 \left(1 + i_1 + i_2 + i_1 i_2\right)$  y su valor esperado  $E(\hat{C}_2) = E\left(C_0 \left(1 + i_1 + i_2 + i_1 i_2\right)\right)$  si  $i_1$  y  $i_2$  son independientes entonces,

$$E(\hat{C}_2) = C_0 + C_0 E(i_1) + C_0 E(i_2) + C_0 E(i_1) E(i_2)$$

$$E(\hat{C}_2) = 100M\$ (1 + 12.5\%(2) + (12.5\%)^2)$$

$$E(\hat{C}_2) = 126.56 \text{ M\$}.$$

Si adicionalmente quisiéramos determinar el nivel de riesgo o volatilidad del  $\hat{C}_2$ , tendríamos que calcular su  $\sigma_{\hat{C}_2}$  la cual vendría dada por:

$$\text{Var}(\hat{C}_2) = E(\hat{C}_2^2) - E(\hat{C}_2)^2$$

dado que disponemos de la distribución de  $C_2$  es fácil

$$C_2 = \begin{cases} 1,21\% \\ 1,265\% \\ 1,265\% \\ 1,3225\% \end{cases} \text{ todos con probabilidad } 1/4. \quad \hat{C}_2 \begin{cases} 1.21 & 1/4 \\ 1.265 & 1/2 \\ 1.3225 & 1/4 \end{cases}$$

## 2. Proceso de Acumulación de Capital en $n$ períodos

En general, si tenemos el vector aleatorio  $\vec{i} = (i_1, \dots, i_n)$  entonces,

$$\hat{F}_{(n)} = \prod_{j=1}^n (1 + i_j)$$

$$E(\hat{F}_{(n)}) = E\left(\left(1 + i_1\right)\left(1 + i_2\right) \dots \left(1 + i_n\right)\right) \text{ y por lo tanto}$$

$$\hat{F}_{(n)}^2 = \left(1 + i_1\right)^2 \left(1 + i_2\right)^2 \dots \left(1 + i_n\right)^2$$

Si  $i_j$  son idénticamente y estadísticamente independientes  $\forall j$  entonces:

$$E(\hat{F}_{(n)}) = (1 + E(i))^n$$

$$E(\hat{F}_{(n)}^2) = (E(1 + i))^n$$

$$\text{y análogamente la } E(\hat{F}_{(n)}) = E(\hat{F}_{(n)}^2) - E(\hat{F}_{(n)})^2$$

<sup>29</sup> Es importante conocer que la distribución de probabilidad subyacente para  $C_2$ , está conformada por los cuatro posibles valores que define la tasa de interés.

Las probabilidades asociadas a los valores de  $\hat{F}_{(n)}$  vienen dados por la Distribución Binomial para el caso  $i = \begin{cases} i_1 \\ i_2 \end{cases}$  con Probabilidad  $P_i$

Luego si  $0 \leq k \leq n$  e  $i$  toma los valores  $(i_1, i_2)$  con probabilidades  $(P_1, P_2)$  la función de probabilidad viene expresada por

$$\Pr(K = r) = \binom{n}{r} P_1^r (1 - P_1)^{n-r} \quad \text{o,}$$

$$\Pr(\hat{F}_{(n)} = (1 + i_1)^r (1 + i_2)^{n-r}) = \Pr(K = r)$$

Se deja al lector comprobar que para

$k$	$\hat{F}_{(n)}$	$P_r$	$\sum P_r$
0	2,59	0,000970	0,097%
5	3,23	0,246094	62,30%
10	4,04	0,000977	100,00%

### Ejemplo de Aplicación Nro. 2:

Supongamos que las tasas de interés para los próximos dos años " $i_1$ " y " $i_2$ " se asumen independientes, continuas y distribuidas según

$$i_1 \sim \text{Unif}[8\%, 12\%] \text{ e } i_2 \sim \text{Unif}[6\%, 14\%].$$

Se desea obtener la media, varianza y densidad del Fondo acumulado en el 2º año y los valores de " $k$ " tales que  $\Pr(\hat{F}_{(2)} > k) = 95\%$ . El capital inicial del Fondo es 1 M\$.

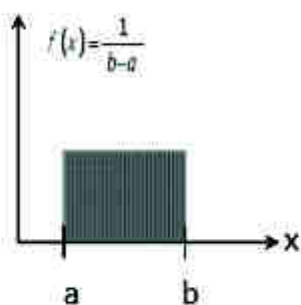


Gráfico 63. Distribución Uniforme

$$\text{Si } X \sim \text{Unif}[a, b] \Rightarrow \begin{cases} E_{(x)} & \frac{a+b}{2} \\ \text{Var}_{(x)} & \frac{b-a}{12} \end{cases}$$

$$\text{Luego } \left. \begin{cases} E\left(\underset{\sim}{i}_1\right) = 10\% \\ E\left(\underset{\sim}{i}_2\right) = 10\% \end{cases} \right\} \Rightarrow E\left(\underset{\sim}{\hat{F}}_{(2)}\right) = 1.21$$

$$\text{análogamente } \text{Var}\left(\underset{\sim}{\hat{F}}_{(2)}\right) = E\left(\underset{\sim}{\hat{F}}_{(2)}^2\right) - E\left(\underset{\sim}{\hat{F}}_{(2)}\right)^2$$

para poder determinar  $E\left(\underset{\sim}{\hat{F}}_{(2)}^2\right)$  es necesario obtener los valores esperados

$$E\left(\left(1 + \underset{\sim}{i}_1\right)^2\right) \text{ y } E\left(\left(1 + \underset{\sim}{i}_2\right)^2\right)$$

$$E\left(1 + \underset{\sim}{i}_1\right)^2 = \int_{6\%}^{12\%} 25(1 + i_1)^2 d_i = 1.2101$$

$$E\left(1 + \underset{\sim}{i}_2\right)^2 = \int_{6\%}^{14\%} 12.5(1 + i_2)^2 d_i = 1.2105$$

$$\text{luego sustituyendo la } \text{Var}\left(\underset{\sim}{\hat{F}}_{(2)}\right) = 0.0807\%$$





# Capítulo 14

---

## Simulación Montecarlo

A continuación, se van a analizar algunos modelos de Riesgo importantes; además del Riesgo Uniforme, como son el Exponencial, el Gamma y el Beta.

### 1. Simulación Montecarlo para riesgos del tipo Uniforme.

Supongamos que  $X_i \sim Unif(0,1)$  y que se generan 100 reclamos.

Se pide:

1. Determinar la probabilidad de que la pérdida agregada sea superior a 60 M\$.
2. Hacer un gráfico comparativo de las trayectorias de las pérdidas para los siguientes niveles de agregación

$$X_i, \sum_{i=1}^B X_i, \sum_{i=1}^{100} X_i$$

3. Histogramas de la pérdida agregada en el caso de observar 1,50 y 100 reclamos respectivamente.

Para resolver el problema anterior debemos proceder como sigue:

Sea  $\hat{S}_j^i$ :

Simulación	1	...	2	...	n=100
				2	$\hat{S}_j^i$
				3	
				4	
				5	
				.	
				.	
				.	
				100	
				$\hat{S}_{100}^1$	
				$\hat{S}_{100}^2$	
				$\hat{S}_{100}^{100}$	

Una vez generada la matriz anterior, es posible entonces determinar los siguientes estadísticos de la simulación

$$\bar{S}_j = \sum_{i=1}^n \hat{S}_j^i \left( \frac{1}{n} \right)$$

de manera que cuando  $n=100$  simulaciones se generan 100 distintas trayectorias de la evolución de la pérdida agregada desde el 1° reclamo hasta el reclamo "j".

$$\hat{S}_j^i = \sum_{j=1}^i X_j$$

Los resultados finales se pueden resumir como sigue:

1. La pérdida promedio  $\bar{S}_{100} = 50.50$  M\$. cuando se han causado 100 reclamos en base a 100 trayectorias distintas.
2. La máxima pérdida, 57.04 M\$.

$$\text{MAX} \left\{ \hat{S}_j^i \mid \begin{matrix} i=1 \dots 100 \\ j=1 \dots 100 \end{matrix} \right\}$$

3. La pérdida agregada promedio  $\pm$  una desviación estándar está por el orden de  $\left\{ \bar{S}_{100} \pm \sigma_{\bar{S}_{100}} \right\}$

## 2. Simulación Montecarlo para riesgos del tipo exponencial

Ahora vamos a comparar estos dos modelos de riesgo, procediendo de una manera similar al apartado anterior. Se trata de comparar vía simulación, las pérdidas agregadas promedio y sus respectivas desviaciones estándar

bajo el supuesto de que se simulan las 100 trayectorias con 100 reclamos de cada una de las distribuciones en estudio

1.-  $X \sim \text{Unif}[0,1]$

2.-  $X \sim \text{Exp}(\vartheta); \vartheta = 2$

Luego la comparación de los riesgos en términos de  $\bar{S}_{100}^{\wedge}$  para riesgos ambas distribuciones:

	Modelos	
	Uniforme	Exponencial
Media	50,50	49,84
Desv. Std.	2,80	5,26

Aunque el promedio es prácticamente el mismo  $\pm 50.00$  M\$. en ambos casos, obviamente el riesgo exponencial es mucho mayor; pues

$$\sigma_e = \frac{5.26}{2.80} \sigma_u$$

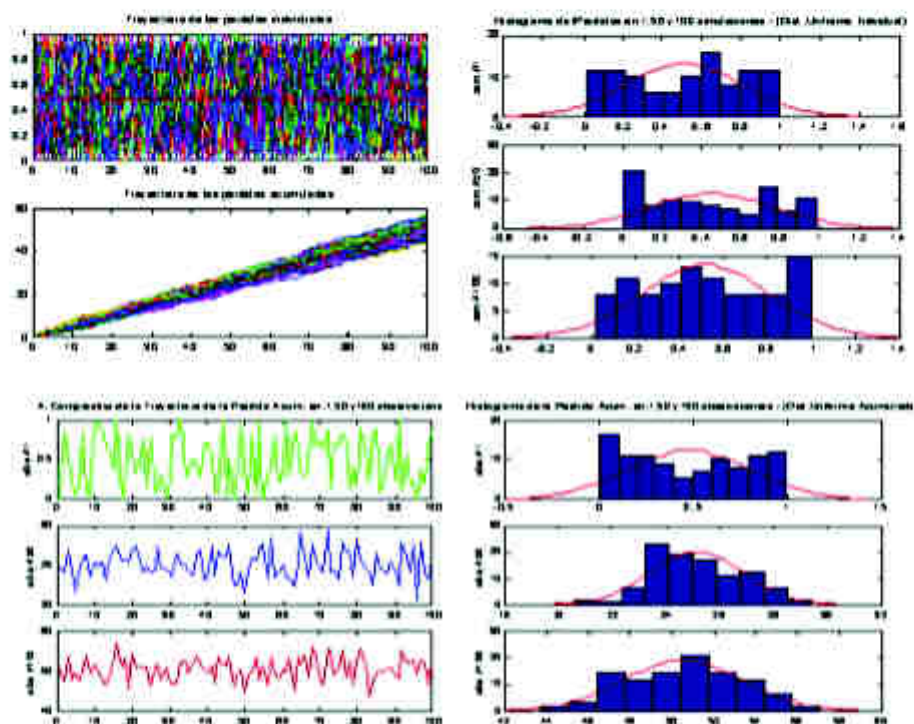
Además el reclamo más grande generado por el modelo exponencial es 66.34 M\$.; el cual supera al uniforme en 9.30 M\$. en el caso de la ocurrencia de 100 reclamos.

A continuación, se muestran distintas simulaciones para cada una de las distribuciones y modelos de riesgo utilizados en la generación aleatoria del monto y de la frecuencia de los reclamos.

Es importante que el lector verifique e interprete cada uno de los resultados obtenidos.

## ANEXO I

*Distribución Uniforme. 100 observaciones, 100 simulaciones*



**Media** = 50.50

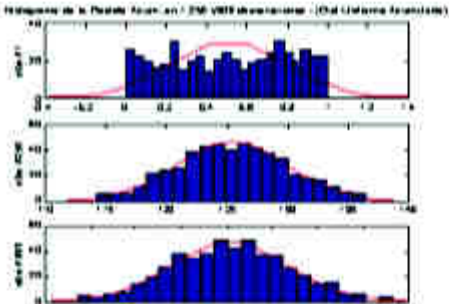
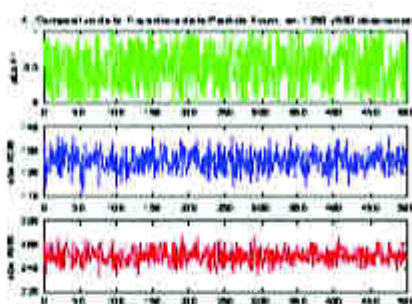
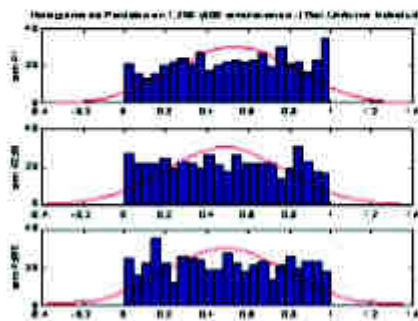
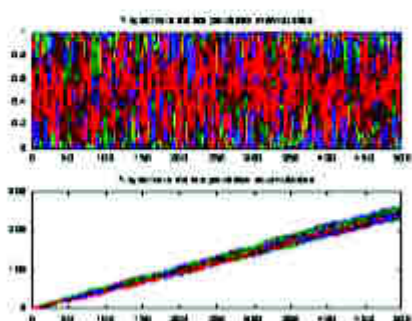
**Mínimo** = 43.69

**Máximo** = 57.04

**Std** = 2.80

## ANEXO II

*Distribución Uniforme. 500 observaciones, 500 simulaciones*



Media = 2.50

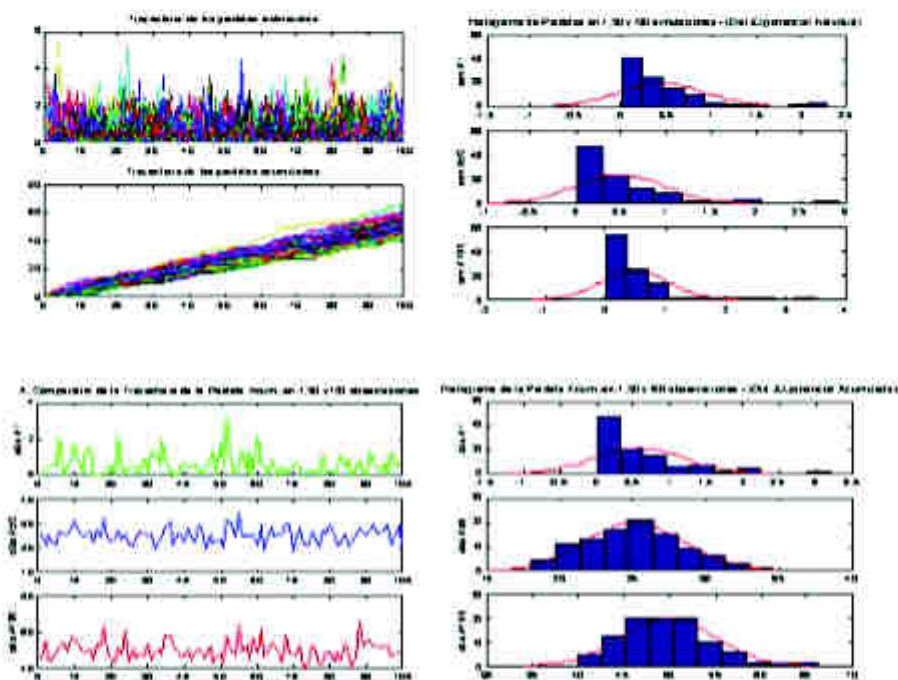
Mínimo = 2.33

Máximo = 2.68

Std = 6.48

## ANEXO III

*Distribución Exponencial. 100 observaciones, 100 simulaciones*



**Media** = 49.84

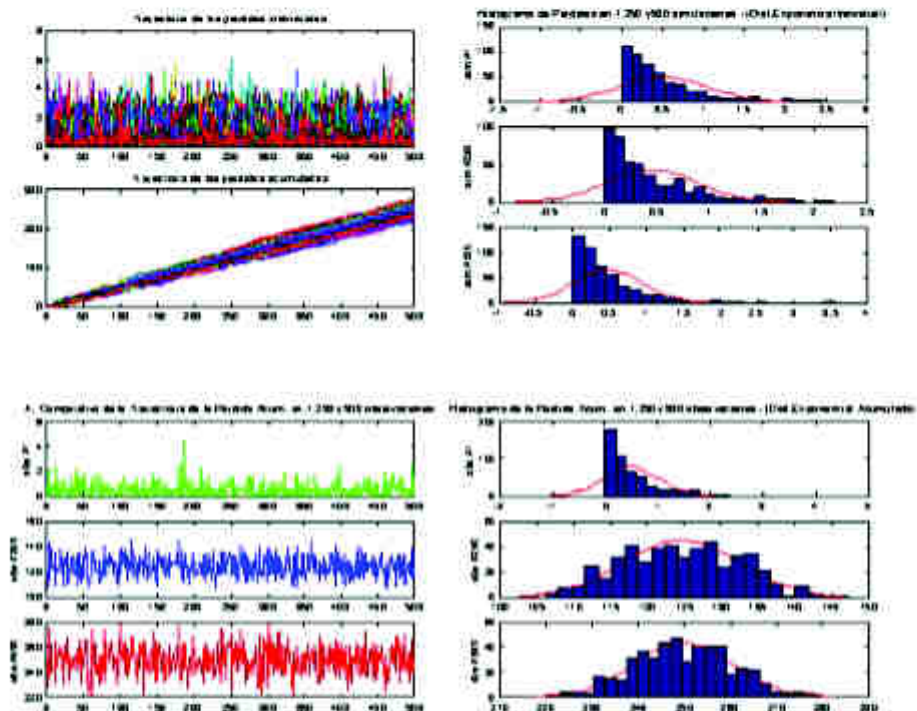
**Mínimo** = 39.90

**Máximo** = 66.34

**Std** = 5.26

## ANEXO IV

*Distribución Exponencial. 500 observaciones, 500 simulaciones*







# *Capítulo 15*

---

## *Establecimiento de un plan de pensiones*

La problemática del establecimiento de un plan de pensiones contempla al menos siete sub-problemas distintos que se concatenan para definir formalmente el funcionamiento del plan. En este capítulo se desarrolla el fundamento teórico que permite determinar las tasas de mortalidad, rotación y supervivencia, que servirán para alimentar el modelo de optimización estocástico propuesto en el próximo capítulo.

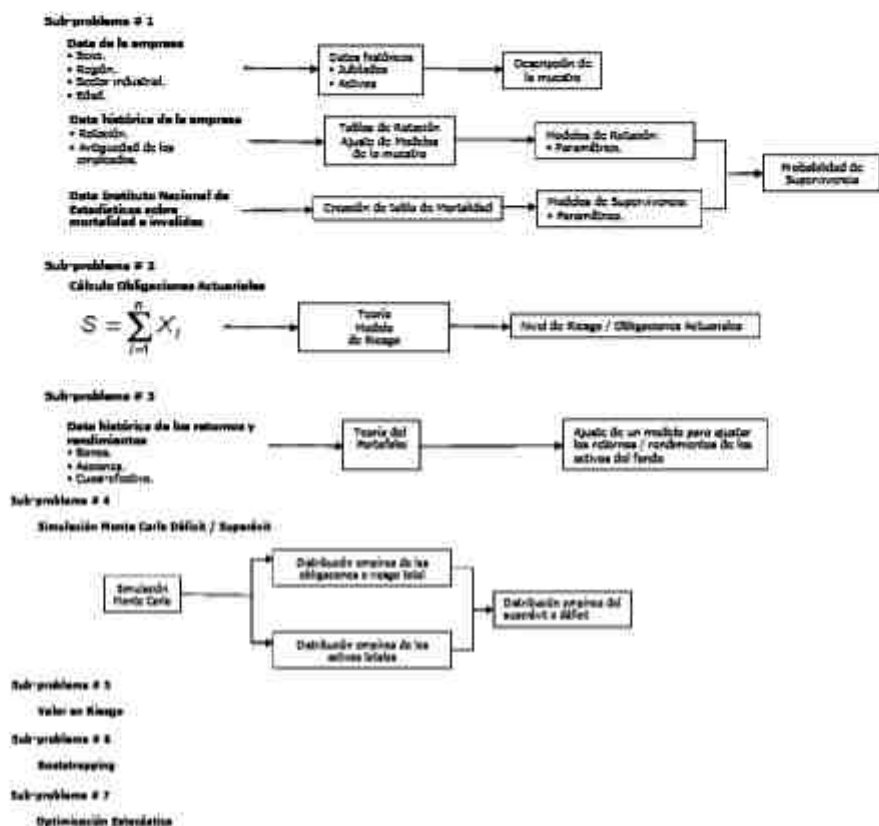


Gráfico 64. Establecimiento plan de pensiones. Sub-problemas

Todo lo anterior, se integra en el desarrollo de un Modelo de Simulación Estocástica que se propone, para evaluar cada uno de los distintos sub-problemas.

## 1. Modelación de las tasas de mortalidad y rotación

Para modelar las tasas de mortalidad y rotación, se utilizó un modelo <sup>30</sup> de regresión lineal no lineal.

<sup>30</sup> CURVEPERT, es un software especializado en ajustar curvas.

Los modelos a considerar, se corresponden con la familia de modelos de densidad No lineales y sigmoidales<sup>21</sup>:

$$\text{Bleasdale Model: } y = (a + bx)^{(-1/c)}$$

$$\text{Harris Model: } y = \frac{1}{a + bx^c}$$

$$\text{Logistic Model: } y = \frac{a}{(1 + \exp(b - cx))}$$

## 2. Regresión no lineal.

En el caso de relaciones no lineales, entre la variable dependiente y los parámetros; es necesario utilizar un método de optimización no lineal. Se usó el método que combina el desarrollo de Taylor con el método de la pendiente decreciente. Dado  $y = y(x; \bar{a})$ , siendo la variable  $x$  independiente a un vector de parámetros de longitud arbitraria. La función que se trata de minimizar es:

$$X^2(\bar{a}) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - y(x_i; \bar{a})}{\sigma_i} \right)^2 \text{ donde se puede describir:}$$

$$X^2(\bar{a}) \quad \text{:Función a minimizar.}$$

$$\sigma_i \quad \text{:Desviación estándar de la iésima observación}$$

La función anterior, mide el grado de ajuste entre los datos y el modelo paramétrico. El vector de parámetros a minimizar, viene dado por la siguiente ecuación:

$$\bar{a}_{\min} = \bar{a}_{\text{cur}} + H^{-1} [-\nabla X^2(\bar{a}_{\text{cur}})]$$

Donde  $H^{-1}$  es la matriz Hessiana

$$\bar{a}_{\min} = \bar{a}_{\text{cur}} - c \nabla X^2(\bar{a}_{\text{cur}})$$

Para obtener la matriz Hessiana tomamos el gradiente del gradiente

$$\frac{\partial^2 X^2(\bar{a})}{\partial a_x} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{y_i - y(x_i; \bar{a})}{\sigma_i^2} \frac{\partial y(x_i; \bar{a})}{\partial a_x}$$

<sup>21</sup> Estos modelos generalmente, son los que se utilizan junto con Gompertz y Makehan, para ajustar tasas de mortalidad y rotación.

Matriz en derivadas segundas parciales

$$\frac{\partial^2 x^2(\bar{a})}{\partial a_k \partial a_i} = -2 \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{\partial y(x_i; \bar{a})}{\partial a_k} \frac{\partial y(x_i; \bar{a})}{\partial a_i} (y_i - y(x_i; \bar{a})) \frac{\partial^2 y(x_i; \bar{a})}{\partial a_i \partial a_k} \right]$$

El vector gradiente y la matriz de curvatura viene dado por

$$G_x = -\frac{1}{2} \frac{\partial x^2}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{(y_i - y(x_i; \bar{a}))}{\sigma_i^2} \frac{\partial y(x_i; \bar{a})}{\partial a_k} \right]$$

$$G_{kl} = \frac{\partial^2 x^2}{\partial a_k \partial a_l} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{\partial y(x_i; \bar{a})}{\partial a_k} \frac{\partial y(x_i; \bar{a})}{\partial a_l} \right]$$

$$\sum_{k=1}^{NP} C_{kl} \partial a_l = G_x$$

Algoritmo general del ajuste de modelos no lineales

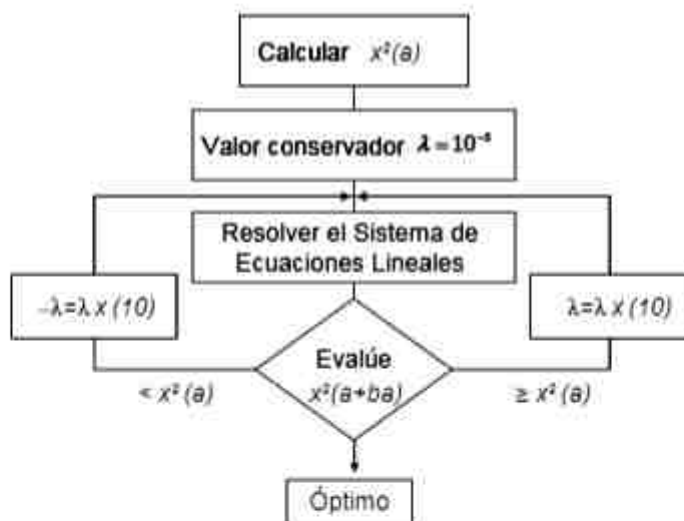


Gráfico 65: Algoritmo de Ajuste

### 3. Modelación de la Tasa de Rotación

La tasa de rotación por edad y sexo, se determinó en base a la ecuación fundamental de migración de población, la cual, establece que:

$$P_t = P_{t-1} + E_{t-1,t} - S_{t-1,t} \text{ donde:}$$

$P_t$  : Población para el año  $t$  por sexo y edad en la empresa.

$P_{t-1}$  : Población para el año  $t-1$  por sexo y edad.

$E_{t-1,t}$  : Población entrante en el periodo de un año.

$S_{t-1,t}$  : Población saliente en el periodo de un año.

La rotación del personal hace referencia específicamente a las salidas netas de personal de un "exposure" claramente identificado a principio de año. La razón de esto último, es que también pueden salir de la empresa; aquellos que entran en un momento en el tiempo entre  $(t-1, t)$  y salen durante el intervalo. Existen varias formulas para medir la rotación. Sin embargo, la más utilizada y correcta desde el punto de vista demográfico, es la siguiente:

$$P_t = P_{t-1} + E_{t-1,t} - S_{t-1,t}$$

$$P_t - P_{t-1} = E_{t-1,t} - S_{t-1,t}$$

$$\Delta P_t = \Delta(\text{Entradas} - \text{Salidas})$$

$$\hat{r}_t = \frac{\Delta P_t}{\left(\frac{P_t + P_{t-1}}{2}\right)}$$

Generalmente lo que se conoce, es el cambio neto de los entradas y de las salidas; el cual recoge los cambios observados de la población en el tiempo, y generalmente esta es la data guardada y mantenida por la empresa.

Sin embargo, si la data de salidas es totalmente conocida, es preferible utilizar esta ecuación

$$\hat{r}_t = \frac{S_{(t-1,t)}}{P_t}$$

La rotación, se estima como el cociente del cambio de la población o censo de la empresa entre año y año; y la estimación del promedio de la población o exposure durante el lapso  $(t-1, t)$ . En nuestro caso, se dispone del total de salidas durante al año y la población o exposure a principio; se prefirió tomar este último enfoque por ser mucho más preciso.

#### 4. Construcción del modelo de supervivencia por edad y sexo

Una vez obtenidas las tasas de rotación y mortalidad ajustadas se procede a construir el modelo de supervivencia para el Rango de interés de las edades  $R: \{20, 21, 22, \dots, 58, 59, 60\}$  tanto para los hombres como para las mujeres.

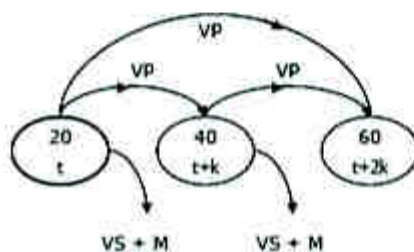
A partir de las estimaciones anteriores, tanto de la mortalidad como de la rotación se procede a definir los cuatro estados posibles del sistema y se generan las distintas probabilidades de supervivencia. El modelo conceptual, es como sigue:

Gráfico 66: Espacio de Estados

$V : \{vivo, muerto\}$

$R : \{salir, permanecer\}$

	S	P
V	<b>VS</b>	<b>VP</b>
M	<b>M</b>	<b>M</b>



Entre  $t$  y  $t+k$ , nos interesa sólo aquel grupo del espacio de estados que reflejen los empleados que están vivos y permanecen en la empresa; las expresiones de probabilidad para  $VS$  y  $VP$  son en dos periodos de tiempo a futuro, en particular cuando  $k=1$ , entonces

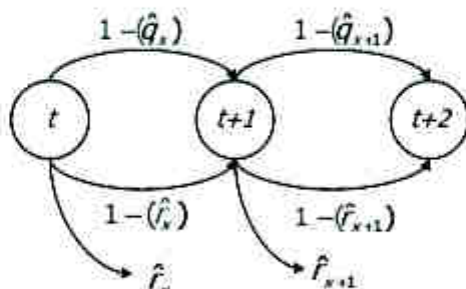
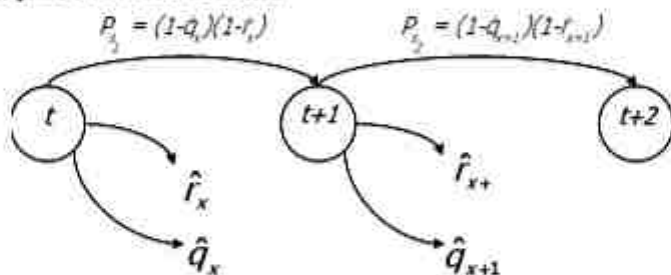


Gráfico 67: Transición de dos pasos y dos contingencias

El cual se puede reescribir como



Por lo tanto, la probabilidad de que un empleado de edad  $x$  en el tiempo  $t$ , sobreviva hasta  $x+2$ , es el producto de ambas probabilidades:

$P_{S_1}$  : Probabilidad de supervivencia de  $x$  hasta  $x+1$ .

$P_{S_2}$  : Probabilidad de supervivencia de  $x$  hasta  $x+2$ .

La expresión  $P_{(x,x+2)}^S = P_{S_1} P_{S_2}$

$$\begin{aligned}
 &= P_{S_1} P_{S_2} = \underbrace{(1 - \hat{q}_x)}_{\text{Vive en X}} \underbrace{(1 - \hat{q}_{x+1})}_{\text{Vive en X+1}} \underbrace{(1 - \hat{r}_x)}_{\text{Permaneció en X}} \underbrace{(1 - \hat{r}_{x+1})}_{\text{Permaneció en X+1}} \\
 &= \underbrace{(1 - \hat{q}_x) (1 - \hat{r}_x)}_{\text{Sobrevivió en la empresa X}} \underbrace{(1 - \hat{q}_{x+1}) (1 - \hat{r}_{x+1})}_{\text{Sobrevivió en la empresa X+1}}
 \end{aligned}$$

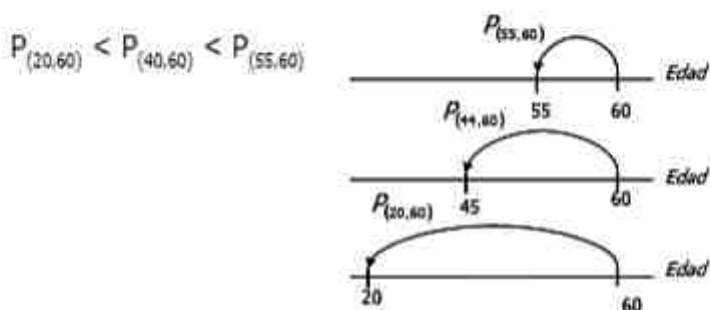
En general la probabilidad de supervivencia en la empresa desde  $x$  hasta la edad normal de jubilación normal es:

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{t=1}^{60-1} P_{S_t} = P_{S_1} P_{S_2} \dots P_{S_{59}} \\
 &= \left[ (1 - \hat{q}_x) (1 - \hat{q}_{x+1}) \dots (1 - \hat{q}_{59}) \right] \left[ (1 - \hat{r}_x) (1 - \hat{r}_{x+1}) \dots (1 - \hat{r}_{59}) \right]
 \end{aligned}$$



El cálculo de las probabilidades de supervivencia, pudiera ser bastante engorroso pues la edad del empleado es cualquiera entre  $x=20$  y  $x=60$ , por ello es importante calcular para cada una de las edades, la probabilidad de supervivencia en la empresa. En una nómina típica de una empresa generalmente existen empleados en todo el intervalo  $[20,60]$  lo que implica que se deben hacer los cálculos individuales de la supervivencia para cada edad.

Las probabilidades de supervivencia antes señaladas verifican la siguiente relación de orden.



**Gráfico 68: Probabilidades de Supervivencia en el periodo  $(X, 60)$  para  $X=20, 44, 45$**

En la práctica para estimar los distintas probabilidades de supervivencia se añaden dos nuevas columnas  $1 - \hat{q}_x$  y  $1 - \hat{r}_x$  y se obtienen las probabilidades estimadas individuales por edad y sexo de la siguiente manera  $\hat{p}_x^v = 1 - \hat{q}_x$  y  $\hat{p}_x^p = 1 - \hat{r}_x$ , siendo  $\hat{p}_x^v$  la probabilidad de vida y  $\hat{p}_x^p$  la probabilidad de permanencia en la empresa respectivamente. A partir de estas se obtienen las de supervivencia  $\hat{p}_{(x,x+1)}^s$ , siendo  $\hat{p}_{(x,x+1)}^s = \hat{p}_x^v \hat{p}_x^p$ .

En general para cada edad  $x < 60$  lo que interesa es obtener las distintas  $\hat{p}_{(x,60)}^s$ .

El algoritmo anterior puede visualizarse claramente en el siguiente esquema:



Se amplía con ceros la primera fila y columna

$$DA_{41 \times 41} = \begin{bmatrix} 0 & P_{20}^s & & & P_{59}^s \\ 0 & 0 & P_{21}^s & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{59}^s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad I_{41 \times 41} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Se determina la matriz  $[I - DA]^{-1}$ ; la cual genera todas las probabilidades de supervivencia y expectativas de vida, como se expone a continuación:

$$SP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & {}_1P_{20} & {}_1P_{20} {}_1P_{21} & {}_1P_{20} {}_1P_{21} {}_1P_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & 1 & {}_1P_{21} & {}_1P_{21} {}_1P_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & {}_1P_{22} & \dots \end{bmatrix}$$

Las expectativas de vida en la empresa, viene dadas por:

$$\sum_{t=1}^{59} SP_{ij} \quad \forall i$$

$$E_{20} = \sum_{t=1}^{59} SP_{ij} = ({}_1P_{20} + ({}_1P_{20} {}_1P_{21}) + \dots + ({}_1P_{20} {}_1P_{21} {}_1P_{22}) + \dots + ({}_1P_{20} {}_1P_{21} {}_1P_{22} {}_1P_{23}) + \dots) \quad \forall i$$

en particular cuando  $i=1 \Rightarrow x=20$  y se mide la expectativa de vida por la suma de las probabilidades del primer renglón de la matriz comenzando desde el tercer término o columna.

Donde:

SP :Matriz de Supervivencia.

$E_{20}$  :Expectativa de vida/permanencia en la empresa a la edad de 20 años.

## 5. Tablas de Vida para el personal jubilado

Para crear la tabla de vida, se tomó en cuenta la subdivisión del intervalo temporal de observación desde el punto inicial en intervalos menores, por ejemplo en años. Se contarán las personas que han sobrevivido, al menos hasta algún punto de ese intervalo para calcular determinadas probabilidades relacionadas con el momento terminal. Estas probabilidades, se utilizarán

para calcular o estimar la probabilidad genérica de que una persona viva en un momento determinado.

Por lo dicho hasta aquí, observamos dos tipos de dificultades a la hora de efectuar el análisis de datos:

1. El origen de tiempos no es el mismo para los diferentes individuos objeto de estudio.
2. Pudiera existir ausencia de información, en relación al tiempo de supervivencia, de algunos de los individuos objeto de estudio. Estas dificultades serán salvadas por el conjunto de métodos y técnicas propios del análisis de supervivencia.

Para construir una tabla de vida, han de cumplirse las siguientes hipótesis:

- a. Las condiciones experimentales de supervivencia no cambian a lo largo del estudio.
- b. Una persona que comienza el estudio en un momento  $t$ , debe responder según un patrón homólogo en otra persona introducida  $k$  años antes.
- c. Las observaciones censuradas no difieren de las que no lo son. De no ser así, esto significaría que las muertes/fallos se producen de manera no aleatoria influenciada por una variable que no se ha tomado en cuenta en el estudio.

Si los datos del problema consisten en  $n(k+2)$  observaciones,  $n$  por cada una de las  $k+2$  variables o atributos que describen el contexto de la investigación y que caracterizan a los individuos objeto de estudio. La matriz de datos del diseño podríamos representarla como la tabla que a continuación se describe, donde una de las variables indicará el tiempo de supervivencia,  $t$ , y otra el estado de la entidad en el momento del cierre del estudio codificada conforme a criterios de tipo:

1. Vivo

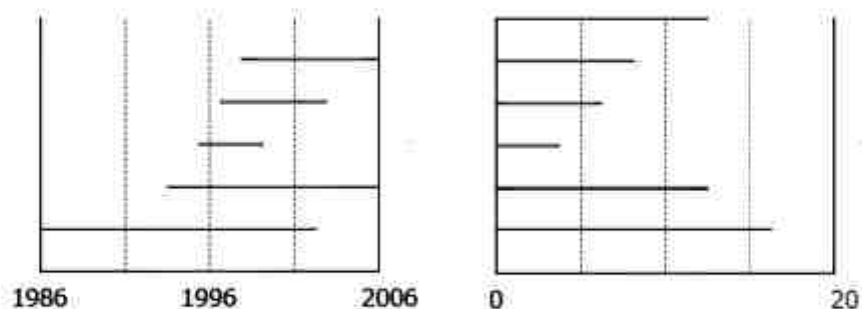
0. Muerto

Cada uno de los  $n$  individuos o unidades estadísticas, que son objeto de estudio, corresponde a un caso y viene representado en una fila. De momento, en lo que respecta a este capítulo, solamente serán consideradas las dos primeras variables sin tener en cuenta las variables independientes.

	$t$	$\delta$	1	2	3	$\dots$	$n$	$k$
1	$t_1$	$\delta_1$	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	$\dots$	$\dots$	$X_{1k}$
2	$t_2$	$\delta_2$	$X_{21}$	$X_{22}$	$X_{23}$	$\dots$	$\dots$	$X_{2k}$
3	$t_3$	$\delta_3$	$X_{31}$	$X_{32}$	$X_{33}$	$\dots$	$\dots$	$X_{3k}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$n$	$t_n$	$\delta_n$	$X_{n1}$	$X_{n2}$	$X_{n3}$	$\dots$	$\dots$	$X_{nk}$

**Tabla 2: Formato típico de las variables y los casos**

Una representación típica de los datos observados, es la que se muestra en la siguiente gráfica. La representación puede hacerse en tiempo real como se muestra en el gráfico de la izquierda a lo largo de los años 1980 a 2000, con momentos iniciales y terminales reales. En el gráfico de la derecha la representación se hace colocando en cero todos los momentos iniciales. En ambos casos una "x" indicará que el suceso (muerte) ha ocurrido, mientras que "o" indicará que el dato está censurado. De esta forma, utilizando el segundo gráfico, podemos hacer una división del tiempo en intervalos de diez años.



**Gráfico 70: Representación de los tiempos de vida**

## 6. Bootstrapping

Un objetivo fundamental del método científico consiste en realizar inferencias probabilísticas respecto de algún aspecto de interés de la población objeto de estudio. La estadística inferencial se ha ocupado de este problema estudiando cómo a partir de la información limitada que facilita un estimador  $\hat{\theta}$ , obtenido en una muestra aleatoria, podemos hacer afirmaciones, de tipo probabilístico, respecto al parámetro desconocido,  $\theta$ .

El bootstrapp se diferencia del enfoque tradicional paramétrico en que emplea un gran número de iteraciones para estimar la distribución muestral del estadístico, en lugar de fuertes asunciones distribucionales y fórmulas analíticas. Esto permite al investigador hacer inferencias en casos donde tales soluciones analíticas son inviables, y donde tales asunciones son insostenibles. El bootstrap no es, por tanto, un estadístico per se. Más bien, es una aproximación al uso de la estadística para hacer inferencias sobre los parámetros poblacionales.

El bootstrapping descansa en la analogía entre la muestra y la población de la cual la muestra es extraída. De acuerdo a *Efron y Tibshirani (1986)* dada una muestra con  $n$  observaciones el estimador no paramétrico de máxima verosimilitud de la distribución poblacional es la función de densidad de probabilidad que asigna una masa de probabilidad de  $1/n$  a cada una de las observaciones. La idea central es que muchas veces puede ser mejor extraer conclusiones sobre las características de la población estrictamente a partir de la muestra que se maneja, que haciendo asunciones quizás poco realistas sobre la población. El bootstrapping implica remuestreo (resampling) de los datos obtenidos en una muestra, con reemplazamiento, un gran número de veces para generar una estimación empírica de la distribución muestral completa de un estadístico.

El bootstrap puede considerarse como un tipo especial de simulación denominada simulación basada en los datos. Esto es, simulamos a partir de una estimación de la población basada en los datos (*Efron y Tibshirani, 1993*).

La idea básica del bootstrap es tratar la muestra como si fuera la población, y aplicar el muestreo Monte Carlo para generar una estimación empírica de la distribución muestral del estadístico.

La verdadera estimación Monte Carlo requiere un conocimiento total de la población, pero por supuesto este no está generalmente disponible en la investigación aplicada. Típicamente, tenemos sólo una muestra extraída de esa población, debido a lo cual es por lo que necesitamos, antes de nada, inferir  $\theta$  a partir de  $\hat{\theta}$ .

En el bootstrapping, tratamos la muestra como si fuera la población y realizamos un procedimiento del estilo Monte Carlo sobre la muestra. Esto se hace extrayendo un gran número de "remuestras" de tamaño  $n$  de la muestra original aleatoriamente y con reposición. Así, aunque cada remuestra tendrá el mismo número de elementos que la muestra original, mediante el remuestreo con reposición cada remuestra podría tener algunos de los datos originales representados en ella más de una vez, y algunos que no aparecieran. Por lo tanto, cada una de estas remuestras probablemente será levemente y aleatoriamente diferente de la muestra original. Y como los elementos en estas remuestras varían levemente, un estadístico  $\hat{\theta}^*$ , calculado a partir de una de esas remuestras probablemente tomará un valor ligeramente diferente de los otros  $\hat{\theta}^*$  y del  $\hat{\theta}$  original. La afirmación fundamental del bootstrapping es que una distribución de frecuencias relativas de esos  $\hat{\theta}^*$  calculada a partir de las remuestras es una estimación de la distribución muestral de  $\hat{\theta}$  (Mooney y Duval, 1993). Más formalmente, los pasos básicos en la estimación bootstrap son los siguientes (Efron, 1979; Hinkley, 1988; Efron y Tibshirani, 1993):

1. Construir una distribución de probabilidad empírica,  $\hat{F}(x)$ , a partir de la muestra asignando una probabilidad de  $1/n$  a cada punto,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Esta es la función de distribución empírica (FDE) de  $x$ , la cual es el estimador no-paramétrico de máxima verosimilitud de la función de distribución de la población,  $F(X)$ .
2. A partir de la FDE,  $\hat{F}(x)$ , se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño  $n$  con reposición. Esta es una "remuestra",  $x^*_j$ .
3. Se calcula el estadístico de interés,  $\hat{\theta}$ , a partir de esa remuestra, dando  $\hat{\theta}^*_j$ .
4. Se repiten los pasos 2 y 3  $B$  veces, donde  $B$  es un número grande. La magnitud de  $B$  en la práctica depende de las pruebas que se van a aplicar a los datos. En general,  $B$  debería ser de entre 50 a 200 para estimar el error típico de  $\hat{\theta}$ , y al menos de 1000 para estimar intervalos

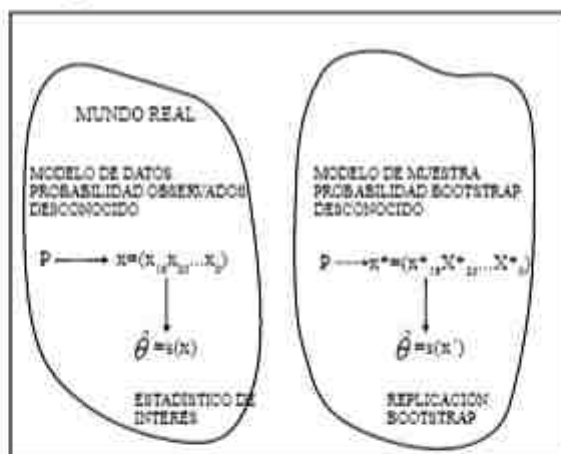
de confianza alrededor de  $\theta$  (Efron y Tibshirani, 1986, 1993).

5. Construir una distribución de probabilidad a partir de los  $B$   $\theta^*_b$ , asignando una probabilidad de  $1/B$  a cada punto,  $\theta^*_1, \theta^*_2, \dots, \theta^*_B$ . Esta distribución es la estimación bootstrap de la distribución muestral de  $\theta$ ,  $F^*(\hat{\theta}^*)$ . Esta distribución puede usarse para hacer inferencias sobre  $\theta$ .

El estimador bootstrap del parámetro  $\theta$  se define como:

$$\hat{\theta}^*(.) = \frac{\sum_{b=1}^B \hat{\theta}_b^*}{B}$$

es decir, como la media de los valores del estadístico calculados en las  $B$  remuestras bootstrap.



**Gráfico 71. Diagrama de Estimación Bootstrap**  
(tomado de Efron y Tibshirani, 1993, p 91)

En algunas ocasiones se tiene algún conocimiento más que el estrictamente aportado por la muestra, por ejemplo se conoce la función de distribución de la variable objeto de estudio pero se desconocen los parámetros, que deben ser estimados. En estos casos se estimarían los parámetros a partir de la muestra y el remuestreo se realizaría a partir de la función teórica conocida, con los parámetros estimados, en lugar de a partir de la FDE construida a partir de la muestra. En este caso hablamos de *Bootstrap Paramétrico*.





# Capítulo 16

---

## Modelo de Optimización Estocástica

El objetivo central de esta investigación es la minimización del valor esperado de las obligaciones actuariales  $E(L_{60}^t)$ , sujeto a una serie de restricciones. Lo anterior se puede expresar como  $MIN_{d_j}\{L_{60}^t\}$  sujeto al acotamiento del valor esperado del diferencial entre las obligaciones y los activos disponibles del Fondo al momento de la jubilación.

Es decir  $MIN_{d_j}\{L_{60}^t\}$  sujeto a  $|E(D_{60}^t)| < k$  siendo  $D_{60}^t = L_{60}^t - A_{60}^t$

$L_{60}^t$ : Obligación actuarial total del fondo de pensiones a la edad de jubilación.

$A_{60}^t$ : Los activos totales acumulados por el Fondo hasta a la edad de jubilación.

$D_{60}^t$ : Diferencial total entre activos y obligaciones.

$d_j$ : Variables de decisión y/o control.

Siguiendo la filosofía del modelo de Riesgo Individual de Bowers<sup>22</sup>, la obligación total al momento de la jubilación es la suma de las obligaciones

---

<sup>22</sup> Este es el cálculo de un solo individuo. Para la totalidad del déficit o superávit se suman todos los empleados que constituyen la nómina o cartera de riesgo.

individuales de la población expuesta al riesgo, siendo  $j_x$  el individuo  $j$  de edad  $x$ .

$$L_{60} = \sum_{j=1}^n L_{j_x}$$

### 1. Diferencial Exceso/ Superávit (Obligación Actuarial del Plan – Activos del Fondo ( $D_x$ )).

El nivel de solidez del Fondo de Pensiones se obtiene al comparar su valor teórico expresado por las obligaciones y la disponibilidad medida por el valor de los activos.

A nivel individual podemos expresar:

$$D_x = L_x - A_x \quad x \in \{20, 21, 22, \dots, 60\}$$

Donde:

$D_x$  : Valor del Diferencial Déficit o Superávit del empleado a la edad  $x$ .

$L_x$  : Representa el valor presente de los futuros pagos por concepto de pensión ajustado por el riesgo de mortalidad y la tasa de interés  $i$ , a la edad  $x$ .

$A_x$  : Valor de los activos del fondo correspondientes a un empleado de edad  $x$ .

### 2. Obligación Actuarial del Plan a nivel individual ( $L_x$ )

Basado en el enfoque de **Bowers y Gerber** la obligación representa el pasivo o riesgo total de la cartera en términos del compromiso del plan ajustado por una tasa de interés y supervivencia.

$$L_x = \begin{cases} B_x \left[ \left( \frac{1}{(1+i)^{60-x}} \right) \right] \left[ \left( \frac{x-x_1}{60-x_1} \right) \right] \ddot{a}_{x_1}^{60} & \text{con } P_{(x, x_1)} \\ 0 & \text{con } 1 - P_{(x, x_1)} \end{cases}$$

Siendo su valor esperado  $E(L_x) = B_x \left( \frac{1}{(1+i)^{60-x}} \right) \left( \frac{x-x_1}{60-x_1} \right) \ddot{a}_{x_1} P_{(x, x_1)}$  y su varianza

$$V = E^i(L_t)(1 - P_{t,x,t}) / (P_{t,x,t})$$

Donde:

$L_x$ : Representa el valor presente de los futuros pagos por concepto de pensión ajustado por el riesgo de mortalidad e  $i$  la tasa de interés.

$B_{x_j}$ : Monto de la pensión o beneficio a la edad de jubilación  $x_j$ ; usualmente  $x_j = 60$  si se trata de una Jubilación Normal.

$P_{x_i, x_j}$ : Estimación de la Probabilidad de supervivencia en la empresa desde la edad  $x_i$  hasta  $x_j$ .

$i$ : Tasa de interés anual asumida en la valoración (conocida y fija).

$x$ : Edad actual del empleado en el momento  $t$ .

$x_i$ : Edad de ingreso a la empresa.

$x_j$ : Edad de jubilación del empleado.

$\bar{a}_{60}$ : Renta unitaria prepagada a los 60 años de edad, garantizada por la expectativa de vida, dada una cierta tasa de interés  $i$ .

Conocida una estimación de la expectativa de vida, obtenida a partir de una tabla de mortalidad, y una tasa de descuento se determinará el valor presente los futuros pagos unitarios sobre los cuales se basará la pensión. Asumiendo la edad de 60 años, como lo establecido para la jubilación normal, se consideran las rentas  $\bar{a}_{60}$  en la forma siguiente:

$$\bar{a}_{60} = \sum_{t=0}^{T_{60}} v^t; \text{ siendo } v = (1 + i)^{-1}$$

Donde:

$\bar{a}_{60}$ : Renta unitaria prepagada anualmente, desde los 60 años de edad.

$T_{60}$ : Tiempo de vida remanente hasta la muerte una vez alcanzados los 60 años.

$E(T_{60})$ : Tiempo promedio de vida remanente hasta la muerte una vez alcanzados<sup>33</sup> los 60 años.

<sup>33</sup> Para llevar a cabo este cálculo y u obtener este estimado, se utilizó un algoritmo en MATLAB que permitió conocer las distintas expectativas por edad y sexo basados en la descomposición de  $(I - D)^{-1}$ ; siendo  $I$  la matriz identidad y  $D$  la matriz diagonal de las probabilidades de supervivencia previamente modeladas.

$i$ : Tasa de interés.

$v$ : Factor de descuento.

Para poder modelar el  $\delta_{60}$  que forma parte de la ecuación básica que permite medir las obligaciones se exploraron los siguientes modelos:

### 2.1. Modelo uniforme

Bajo este modelo  $T_{60} \sim Unif(a, b)$  con  $b \geq a \geq 0$ , con  $T_{60} > a$

$f_{(T_{60})} = \left(\frac{1}{b-a}\right)$  definida como la función densidad y  $F_{(T_{60})} = \left(\frac{T_{60}-a}{b-a}\right)$  la función distribución.

La tasa de riesgo viene dada por  $h_{(T_{60})} = \frac{f_{(T_{60})}}{1-F_{(T_{60})}} = \frac{1}{b-T_{60}}$  con  $T_{60} < b$ ,

y los momentos Media y Varianza son

$$E_{(T_{60})} = \frac{a+b}{2}$$

$$V_{(T_{60})} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Este modelo asume, una probabilidad constante a lo largo del intervalo; con una tasa de riesgo inversamente proporcional al tiempo.

### 2.2. Modelo gamma

Bajo este modelo,  $T_{60} \sim GAMMA(\alpha, \beta, \gamma)$  se encuentra que

$f_{(T_{60})} = \frac{\left(\frac{T_{60}-\beta}{\gamma}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{T_{60}-\beta}{\gamma}\right)}{\gamma \Gamma(\alpha)}$  con  $T_{60} \geq \beta$ ;  $\alpha, \gamma > 0$  y los parámetros

$\alpha$ : Parámetro de forma.

$\beta$ : Parámetro de Localización.

$\gamma$ : Parámetro de escala.

Siendo  $\Gamma(a)$ , la función gamma definida por:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$

En el caso de que  $\beta = 0$  y  $\gamma = 1$ , se obtiene la distribución gamma standard, la cual, viene dada por la siguiente expresión:

$$f_{(T_{60})} = \frac{T_{60}^{\alpha-1} e^{-T_{60}}}{\Gamma(\alpha)} \quad T_{60} \geq 0; \quad \alpha > 0$$

A diferencia del modelo anterior, la distribución gamma triparamétrica, no tiene una fórmula cerrada algebraica, por lo que se debe recurrir a técnicas del análisis numérico para aproximar, su cálculo y/o a técnicas de simulación, que permitan conocer a través de la distribución empírica su valor y geometría distribucional.

La fórmula para la distribución acumulada, viene dada por:

$$F_{(T_{60})} = \frac{\Gamma_{T_{60}}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{donde } T_{60} \geq 0 \text{ y } \alpha > 0$$

Siendo para  $T_{60}$ , la función  $\Gamma_{T_{60}}(\alpha) = \int_0^{T_{60}} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  conocida como la función gamma incompleta.

La función de la Tasa de Riesgo, no es trivial y viene dada por la expresión:

$$h_{(T_{60})} = \frac{T_{60}^{\alpha-1} e^{-T_{60}}}{\Gamma(\alpha) - \Gamma_{T_{60}}(\alpha)} \quad \text{cumpliendo que } T_{60} > 0, \quad \alpha > 0$$

En el caso, de que los parámetros de localización y escala fuesen cero y uno respectivamente, entonces tenemos que:

$$E_{(T_{60})} = \alpha$$

$$V_{(T_{60})} = \alpha$$

$$CV_{(T_{60})} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

La estimación del vector de parámetros, para la  $T_{60} \sim \text{GAMMA}(\alpha, \beta)$  por el método de los momentos, viene dada por:  $\hat{\alpha} = \left(\frac{\bar{X}}{S}\right)^2$  siendo  $\bar{X}$  y  $S^2$  la media y varianza muestral  $\hat{\beta} = \frac{S^2}{\bar{X}}$ .

### 2.3. Modelo LogNormal

Bajo este Modelo se supone que  $T_{60} \sim \text{log Normal}(\alpha, \beta, \gamma)$

$$f_{(T_{60})} = \frac{e^{-\left[\frac{(\ln(T_{60}-\beta))^2}{\gamma^2}\right] / 2\alpha^2}}{(\alpha(T_{60}-\beta))\sqrt{2\pi}} \quad T_{60} \geq \beta; \quad \gamma, \alpha > 0, \text{ siendo la función densidad.}$$

Para el caso, en que  $\beta = 0$  y  $\gamma = 1$ , se obtiene la distribución lognormal standarizada, definida de la siguiente manera:

$$f_{(T_{60})} = \frac{e^{-\left(\frac{\ln(T_{60})^2}{2\alpha^2}\right)}}{T_{60}\alpha\sqrt{2\pi}} \quad \text{con } T_{60} \geq 0, \alpha > 0$$

Su función distribución vendria dada por

$$F_{(T_{60})} = \Phi\left(\frac{\ln(T_{60})}{\alpha}\right) \quad \text{donde } T_{60} \geq 0, \alpha > 0$$

La función Tasa de Riesgo (hazard rate) vive dada por

$$h_{(T_{60})} = \frac{\left(\frac{1}{T_{60}\alpha}\right)\varphi\left(\frac{\ln(T_{60})}{\alpha}\right)}{\Phi\left(\frac{-\ln(T_{60})}{\alpha}\right)} \quad \text{donde } T_{60} \geq 0, \alpha > 0$$

Siendo

$\Phi$ : La distribución acumulada standard.

$\varphi$ : La función densidad de la Normal.

$$E_{(T_{60})} = e^{\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$V_{(T_{60})} = e^{\alpha^2}(e^{\alpha^2} - 1)$$

$$CV_{(T_{60})} = \sqrt{e^{\alpha^2} - 1}$$

Los estimadores de máxima verosimilitud para el parámetro de escala y forma son los siguientes:

$$\hat{\gamma} = e^{\hat{\mu}} \quad \text{con un } \hat{\mu} = \left(\sum_{i=1}^n \ln(T_i)\right) \left(\frac{1}{n}\right) \quad \hat{\alpha} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\ln(T_i) - \hat{\mu})^2}{n}}$$

### 2.4. Modelo exponencial

Bajo este Modelo,  $T_{60} \sim \text{exp}(\beta, \gamma)$  se encuentra que:  $f_{(T_{60})} = \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{(T_{60}-\beta)}{\gamma}}$  con un  $T_{60} \geq \beta$ ;  $\gamma > 0$  siendo  $\beta$  el parámetro de localización y  $\gamma$  el parámetro de escala.

Si  $\beta = 0$  y  $\gamma = 1$ , tenemos lo siguiente  $f_{(T_{60})} = e^{-T_{60}}$ , sólo si  $T_{60} \geq 0$ .

La función distribución viene dada por  $F_{(T_{60})} = 1 - e^{-\frac{T_{60}}{\gamma}}$  con  $T_{60} \geq 0$ ;  $\gamma > 0$   
 la Tasa de Riesgo viene dada por:  $h_{(T_{60})} = \frac{1}{\gamma}$  con un  $T_{60} \geq 0$ ;  $\gamma > 0$ ;

La media, la desviación standard y el coeficiente de variación viene dado por lo siguiente:

$$E_{(T_{60})} = \gamma$$

$$V_{(T_{60})} = \gamma^2$$

$$CV_{(T_{60})} = 1$$

El estimador de máxima verosimilitud para este modelo del parámetro de escala  $\gamma$  es  $\bar{X}$ .

### 2.5. Modelo Weibull

Bajo este Modelo,  $T_{60} \sim \text{weibull}(\alpha, \beta, \gamma)$ , lo anterior implica que:

$$f_{(T_{60})} = \frac{\alpha}{\gamma} \left( \frac{T_{60} - \beta}{\gamma} \right)^{\alpha-1} e^{-\left( \frac{T_{60} - \beta}{\gamma} \right)^\alpha} \text{ donde se cumple } T_{60} \geq \beta; \gamma, \alpha > 0$$

Al igual que en los modelos anteriores, si  $\beta = 0$  y  $\gamma = 1$ ; entonces se obtiene la distribución Weibull standard y para el caso en que sólo  $\beta = 0$ , se obtiene la distribución Weibull biparamétrica. En el caso de la distribución standard su densidad es:

$$f_{(T_{60})} = \alpha T_{60}^{(\alpha-1)} e^{-T_{60}^\alpha} \text{ donde } T_{60} \geq 0; \alpha > 0$$

La función distribución, viene dada por:

$$F_{(T_{60})} = 1 - e^{-(T_{60})^\alpha} \text{ cumpliendo para } T_{60} \geq 0; \alpha > 0$$

La tasa de riesgo correspondiente a  $h_{(T_{60})} = \alpha T_{60}^{(\alpha-1)}$  con  $T_{60} \geq 0$ ;  $\alpha > 0$



La media, la varianza y el coeficiente de variación vienen dadas por

$$E_{(\tau_{\alpha})} = \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)$$

$$V_{(\tau_{\alpha})} = \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) - \left(\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\right)^2$$

$$CV_{(\tau_{\alpha})} = \frac{\sqrt{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) - \left(\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\right)^2}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} - 1$$

Como hemos podido observar, de todos los modelos teóricos paramétricos de interés, existen algunos que no tienen una Tasa de Riesgo algebraicamente cerrada y la única manera de obtenerla, es vía simulación y/o aplicando un análisis numérico para su determinación.

### 2.6. Modelo distribución extrema

Este modelo viene dado por dos tipos distintos y complementarios de submodelos dependiendo si la densidad tiene sesgo positivo o negativo. Se caracteriza por los siguientes parámetros:

#### 1er. Caso: Distribución extrema máxima (Sesgo +)

Parámetros:

- (1) Moda:  $m$
- (2) Escala:  $s$

$$\text{Densidad: } f_{(\tau_m)} = \frac{1}{s} \cdot z \cdot e^{-z}$$

$$z = e^{-\frac{(\tau_m - m)}{s}} \text{ con } \begin{cases} \tau_m \in (-\infty, +\infty) \\ m \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

$$s > 0$$

2do. Caso: Distribución extrema mínima (Sesgo -)

Parámetros:

(3) Moda:  $m$ (4) Escala:  $s$ 

$$\text{Densidad: } f_{(r_{it})} = \frac{1}{s} \cdot z \cdot \theta^{-z}$$

$$z = e^{-\frac{(r_{it}-m)}{s}} \text{ con } T_{00} \in (-\infty, +\infty)$$

$$m \in (-\infty, +\infty)$$

$$s > 0$$

En el próximo capítulo se verá claramente en el análisis de los resultados los dos modelos que finalmente se escogieron en función de su bondad de ajuste utilizando la data real de la empresa del personal jubilado.

La obligación total del plan entonces sería la suma de cada una de las obligaciones individuales asociada a cada empleado de la empresa que se tomó como referencia.

**3. Activos del fondo a nivel individual**

Para modelar la evolución temporal de los activos se utiliza el enfoque clásico.

$$A_x = A_{x-1}(1+r) + C_{x-1,x}(1+r)^{1/2} - B_{x-1,x}$$

Donde:

$A_x$ : Valor de los activos del fondo del empleado a la edad  $x$ .

$r$ : Tasa de retorno de las inversiones de los activos del fondo<sup>24</sup>.

$C_{x-1,x}$ : Costo anual del plan o aporte ordinario para ir amortizando las deudas.

$B_{x-1,x}$ : Pensiones pagadas durante el año transcurrido entre la edad  $x-1$  y  $x$ .

<sup>24</sup> Variable aleatoria la cual se le asignará una distribución de probabilidad log normal como parte de los supuestos actuariales.

Los activos se acumulan todos los años, con las nuevas contribuciones y los intereses devengados hasta el periodo inmediatamente anterior.

#### 4. Estimación del Valor en Riesgo (*Var*) de los activos del fondo

Una vez que se estiman los activos del fondo, se procede a determinar el Valor en Riesgo, a través, de las distribuciones empíricas generadas por el modelo de simulación. Para llevar a cabo esto último, siguiendo a Jorion, se determina el VaR de la distribución empírica definida como:  $Var = F_R^{-1}(\alpha)$

Donde:

$F$  : La distribución de probabilidad empírica resultante.

$\alpha$  : Nivel de probabilidad prefijado.

$R$  : Rendimiento de los activos de fondo.

El Valor en Riesgo VaR, no es más que la solución a la Ecuación Integral donde se cumple que:

$$\alpha = \int_{-\infty}^c f(R)dx = \int_{-\infty}^c dF(R) = F(c)$$

siendo el VaR un cuantil de rango  $\alpha$  de la distribución de probabilidad de  $R$ .

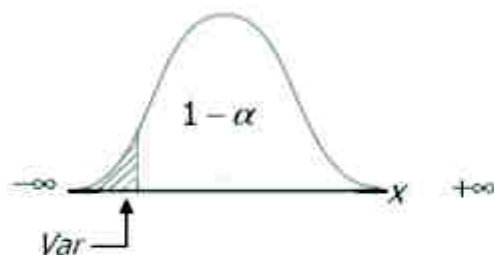


Gráfico 72: Función Densidad de Probabilidad Normal

En otras palabras, el primer valor de la variable de interés  $x > -\infty$  hasta donde se acumula el  $\alpha\%$  de área bajo la curva o  $\alpha\%$  de probabilidad a la izquierda del "VaR".

Luego el VaR se puede expresar como sigue:

$$VaR = Z_{\alpha} \sigma_p M \sqrt{t}$$

Donde:

$Z_{\alpha}$ : Cuantil de probabilidad  $\alpha$ .

$\sigma_p$ : Desviación Standard del portafolio.

$M$ : Monto Total del Fondo.

$t$ : Tiempo.



# Capítulo 17

---

## *Modelación de las tasas de mortalidad, rotación y expectativas de vida*

En este capítulo se muestran dos tipos de resultados. Una primera parte relacionada con la modelación de las tasas de mortalidad y rotación basado en los datos de la empresa piloto; y en segundo lugar, se muestran los resultados del modelo de simulación estocástico propuesto para cada uno de los distintos escenarios que se discuten más adelante dentro de este mismo capítulo.

### **1. Modelación de las tasas de mortalidad y rotación**

#### *1.1. Datos de mortalidad del Instituto Nacional de Estadística*

Se obtuvieron los siguientes datos del Instituto Nacional de Estadística sobre las tasas brutas de mortalidad por quinquenio, las cuales se muestran a continuación:



Tabla de Mortalidad (por mil Habitantes)			
Grupos de Edad	2002		
	Total	Fem	Masc
15-19	1,54	0,54	2,50
20-24	2,51	0,70	4,28
25-29	2,31	0,78	3,81
30-34	2,34	1,14	3,53
35-39	2,31	1,32	3,29
40-44	3,08	2,03	4,14
45-49	4,30	3,01	5,59
50-54	5,91	4,19	7,65
55-59	8,14	5,76	10,59
60-64	12,38	9,08	15,90

Tabla 3: tasas brutas de mortalidad año 2002

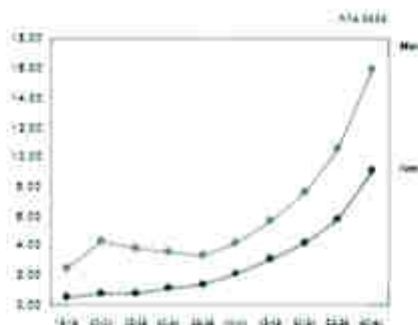


Gráfico 73. Evolución de mortalidad

De acuerdo con la metodología descrita anteriormente, se propone ajustar un modelo estadístico a la data quinquenal, con el objeto de hacer pronósticos por edades enteras en el rango, que es de interés para esta investigación que va desde los 20 hasta los 60 años de edad. Se ajustaron distintos modelos no lineales y para cada uno de ellos se obtuvo la siguiente información:

- Ecuación resultante/estimación de los coeficientes.
- Coefficiente de correlación.
- Varianza.
- Matriz de varianzas y covarianzas de los parámetros.



- e. Chi cuadrado para la bondad del ajuste.
- f. Resultados obtenidos (pronósticos de edades enteras).

### 1.2. Resultados del ajuste de modelos no lineales.

Modelos aplicados a la Tasa Bruta Año 2002							
Femenino			Masculino				
Formula	Logístico	Bisessais	Formula	Polinomial	Harris		
$\hat{q}_x$	$\hat{q}_x = \left( \frac{a}{1 + be^{-ax}} \right)$	$\hat{q}_x = (a + bx)^{k+1}$	$\hat{q}_x$	$\hat{q}_x = a + bx + cx^2 + dx^3$	$\hat{q}_x = \frac{1}{(a + bx^k)}$		
Parámetros	a	-13.2484	1.2376	Parámetros	a	-7.8235	0.4873
	b	-74.2008	-0.0112		b	1.1579	-0.0058
	c	0.0349	0.2024		c	-0.0381	1.0473
	d				d	0.0004	
Error Estándar	S	0.1284	0.1337	Error Estándar	S	0.7443	0.7432
Coefficiente de correlación	r	0.9991	0.9990	Coefficiente de correlación	r	0.9963	0.9876

Tabla 4: Cuatro modelos aplicados a la tasa bruta de mortalidad

del análisis anterior, se escogió el **modelo Logístico** para la estimación de las tasas de mortalidad anual para las mujeres y como segundo el **modelo Harris** para los hombres. Para la escogencia de estos modelos, se utilizó el criterio de calidad de su bondad de ajuste y a los valores obtenidos de  $r$  y S respectivamente; prefiriéndose aquel modelo con un número menor de parámetros.

La idea subyacente en consiste en obtener una curva suave de las estimaciones quinquenales del INE, tratando de evitar un sobre ajuste o una sobre suavización de los datos. Es decir, obtener una función continua para el rango 20-60 tanto para las mujeres como para los hombres de manera tal, que se pueda, partir de esta última y generar automáticamente los pronósticos que permitan obtener una tabla de supervivencia.

Modelos aplicados a la Tasa Bruta Femenina año 2002					
Edad	Femenino $\hat{q}_x$		Edad	Femenino $\hat{q}_x$	
	Logistic	Bleasdale		Logistic	Bleasdale
20	0.558	0.589	41	1.946	1.916
21	0.591	0.620	42	2.073	2.042
22	0.625	0.652	43	2.209	2.178
23	0.663	0.686	44	2.356	2.325
24	0.702	0.723	45	2.515	2.485
25	0.744	0.762	46	2.685	2.658
26	0.788	0.803	47	2.870	2.845
27	0.836	0.847	48	3.070	3.049
28	0.886	0.894	49	3.286	3.270
29	0.940	0.944	50	3.521	3.511
30	0.997	0.998	51	3.776	3.774
31	1.058	1.055	52	4.055	4.061
32	1.122	1.116	53	4.359	4.374
33	1.191	1.182	54	4.692	4.717
34	1.265	1.253	55	5.058	5.093
35	1.344	1.328	56	5.462	5.505
36	1.428	1.409	57	5.908	5.958
37	1.518	1.496	58	6.402	6.457
38	1.614	1.590	59	6.954	7.006
39	1.717	1.690	60	7.571	7.613
40	1.827	1.799			

Tabla 5. Pronósticos de las tasas de mortalidad anual por edad. Sexo femenino. Año 2002. Por mil habitantes

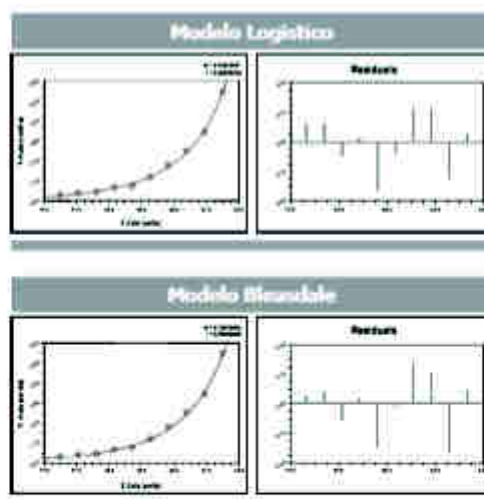


Gráfico 74. Modelos aplicados a la data femenina. Año 2002

Modelos aplicados a la Tasa Bruta Masculina año 2002					
Edad	Masculino $\hat{q}_x$		Edad	Masculino $\hat{q}_x$	
	Polynomial	Harris		Polynomial	Harris
20	3.388	2.796	41	4.036	4.719
21	3.503	2.851	42	4.165	4.881
22	3.595	2.907	43	4.321	5.055
23	3.665	2.966	44	4.508	5.242
24	3.715	3.028	45	4.728	5.444
25	3.749	3.092	46	4.983	5.662
26	3.768	3.159	47	5.276	5.899
27	3.776	3.230	48	5.609	6.157
28	3.775	3.304	49	5.985	6.438
29	3.766	3.381	50	6.406	6.746
30	3.754	3.462	51	6.875	7.086
31	3.739	3.547	52	7.394	7.463
32	3.725	3.637	53	7.966	7.882
33	3.714	3.732	54	8.593	8.351
34	3.709	3.831	55	9.278	8.881
35	3.711	3.937	56	10.022	9.482
36	3.725	4.048	57	10.830	10.172
37	3.751	4.166	58	11.702	10.971
38	3.793	4.292	59	12.643	11.906
39	3.853	4.425	60	13.653	13.017
40	3.933	4.567			

Tabla 6. Pronósticos de las tasas de mortalidad anual por edad. Sexo masculino. Año 2002. Por mil habitantes

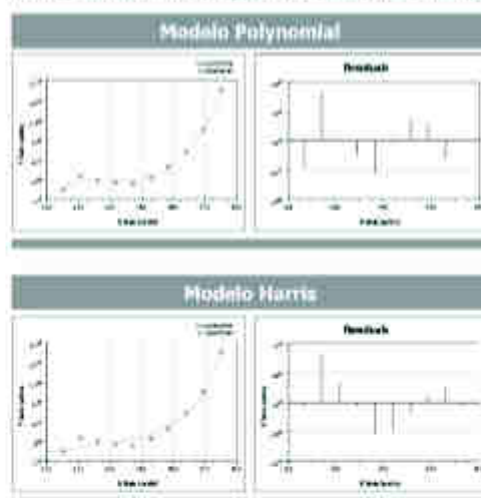


Gráfico 75. Modelos aplicados a la data masculina. Año 2002

1.3. Bondad de ajuste de los modelos seleccionados.

Donde las últimas diez iteraciones del chi-cuadrado, se obtuvo:

Modelo Femenino / Chi cuadrado Año 2002				Modelo Masculino / Chi cuadrado Año 2002					
Logística		Parameter Histories		Harris		Parameter Histories			
Chi Square History		a	b	c	Chi Square History	a	b	c	
It 81	0.116731	-12,062190	-64,570038	0,053571	It 91	3,89419	0,489493	-0,005808	1,041283
It 82	0.117280	-12,641361	-69,191401	0,054276	It 92	3,91819	0,485573	-0,005394	1,056541
It 83	0.116491	-12,175248	-65,473400	0,053709	It 93	3,89254	0,489004	-0,005765	1,042782
It 84	0.116717	-12,702915	-69,699011	0,054342	It 94	3,91810	0,485085	-0,005352	1,056138
It 85	0.116297	-12,278263	-66,299204	0,053831	It 95	3,89088	0,488517	-0,005723	1,044291
It 86	0.116335	-12,758305	-70,153977	0,054401	It 96	3,91704	0,484594	-0,005311	1,056748
It 87	0.116141	-12,371988	-67,052993	0,053942	It 97	3,89923	0,488021	-0,005681	1,045809
It 88	0.116075	-12,808129	-70,567134	0,054454	It 98	3,91600	0,484100	-0,005269	1,061368
It 89	0.115717	-13,188605	-73,695015	0,054866	It 99	3,88756	0,487527	-0,005639	1,047337
It 90	0.115490	-13,244744	-74,171295	0,054916	It 100	3,91498	0,483605	-0,005220	1,057385

Tabla 7. Iteraciones de Chi-cuadrado para cada modelo

Y cuyas matrices de Varianzas y Covarianzas, son las siguientes para las mujeres y los hombres:

$$F = \begin{bmatrix} 1292,709 & 10470,408 & -1,328 \\ 10470,408 & 88487,827 & -11,138 \\ -1,328 & -11,138 & 0,001 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0,101 & -0,011 & -0,413 \\ -0,011 & 0,001 & 0,045 \\ -0,413 & 0,045 & 1,716 \end{bmatrix}$$

Donde:

F: Matriz de Varianzas y Covarianzas de las Mujeres en la Tasa de Mortalidad.

M: Matriz de Varianzas y Covarianzas de los Hombres en la Tasa de Mortalidad.

#### 1.4. Data una de las empresas más representativas del sector para la determinación de las tasas de rotación

Se dispone de la data histórica del periodo 1998 al 2006. Correspondiente a una empresa cuyo grupo de empleados, tiene tanto personal activo como jubilado.

A continuación se resume, la dinámica de la población, en ese periodo para cada una de las siguientes variables demográficas:

- Total de personal empleado activo.
- Total de Jubilados.
- Total de pensionados.
- Servicio promedio actual o antigüedad promedio.
- Edad promedio actual.
- Salario básico promedio mensual.

	1998			1999		
	Mas	Fem	Total	Mas	Fem	Total
Activos	1937	520	2457	1727	522	2249
Pensionados	22	17	39	35	19	54
Jubilados	7	7	14	0	9	9
Edad	31.42	30.17	30.795	31.57	29.86	30.715
Servicio Actual (años)	4.52	4.46	4.49	5.12	4.73	4.925
Salario Actual (US\$/mes)	243.826.93	285.648.12	264.737.53	303.852.15	325.329.74	314.590.95

	2000			2001		
	Mas	Fem	Total	Mas	Fem	Total
Activos	1765	389	2154	1716	368	2084
Pensionados	44	18	62	46	25	71
Jubilados	0	12	12	0	10	10
Edad	30.84	30.78	30.81	30.88	30.57	30.725
Servicio Actual (años)	4.66	5.16	4.91	4.64	5.24	5.04
Salario Actual (US\$/mes)	353.351.08	460.196.37	406.773.73	368.348.01	464.250.27	426.299.14

	2002			2003		
	Mas	Fem	Total	Mas	Fem	Total
Activos	1592	438	2030	1371	404	1775
Pensionados	52	30	82	50	33	83
Jubilados	0	10	10	0	13	13
Edad	32.65	31.73	32.19	33.53	32.62	33.075
Servicio Actual (años)	5.64	5.06	5.35	6.73	5.95	6.34
Salario Actual (US\$/mes)	441.456.18	524.352.45	482.904.32	1.082.425.57	1.003.631.56	1.043.028.57

	2004			2005		
	Mas	Fem	Total	Mas	Fem	Total
Activos	1717	549	2266	1793	527	2320
Pensionados	50	38	88	55	35	90
Jubilados	0	13	13	0	16	16
Edad	32.92	31.71	32.315	33.11	32.89	33
Servicio Actual (años)	5.92	4.98	5.45	5.95	5.61	5.78
Salario Actual (US\$/mes)	1.260.744.00	1.176.476.90	1.218.610.45	1.666.237.82	1.536.563.20	1.601.400.51

Tabla 8. Grupo de empleados de una empresa

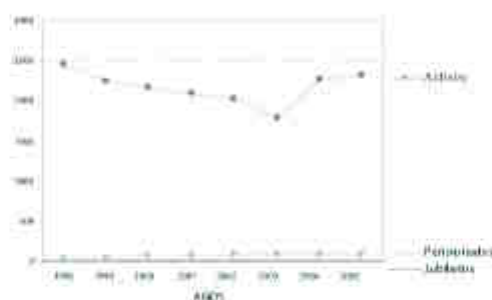
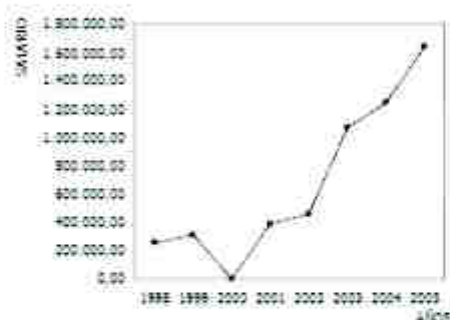
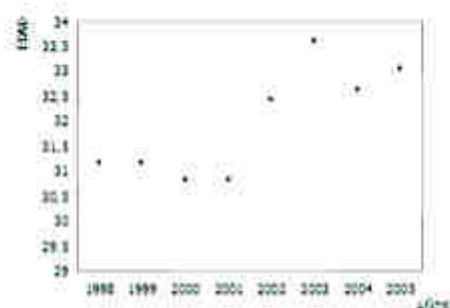


Gráfico 76. Evolución de la variable tamaño de la empresa (activos e inactivos)



**Gráfico 77. Evolución de la variable salario promedio**



**Gráfico 78. Evolución de la variable edad promedio**

Como se deriva de la data anterior, la empresa a lo largo de estos últimos siete (07) años ha mantenido las variables demográficas de edad y antigüedad o años de servicio relativamente estables, lo que de alguna manera indica que el reemplazo de personal obedece a una política bastante conservadora, tanto el número de empleados como la edad y la antigüedad se han mantenido durante este periodo con los siguientes promedios y varianzas.

	Edad					
	1998 Fecha 31/03/1998	1999 Fecha 31/12/1999	2001 Fecha 31/12/2001	2002 Fecha 31/12/2002	2003 Fecha 31/12/2003	2004 Fecha 31/12/2004
Femenino	30,17	29,86	30,57	31,73	32,62	31,71
Masculino	31,42	31,57	30,68	32,45	33,53	32,92
<b>TOTAL EDAD</b>	<b>31,16</b>	<b>31,18</b>	<b>30,82</b>	<b>32,45</b>	<b>33,32</b>	<b>32,63</b>

**Tabla 9. Análisis histórico de los promedios de edad**



		Años de Servicio / Antigüedad					
		1998	1999	2001	2002	2003	2004
Fecha		Fecha	Fecha	Fecha	Fecha	Fecha	Fecha
		30/06/1998	31/12/1999	31/12/2001	31/12/2002	31/12/2003	31/12/2004
Femeninas		4,46	4,73	5,24	5,06	5,95	4,98
Masculino		4,53	5,12	4,84	5,64	6,73	5,92
<b>TOTAL SERVICIO</b>		<b>4,51</b>	<b>5,03</b>	<b>4,91</b>	<b>5,52</b>	<b>6,56</b>	<b>5,69</b>

Tabla 10. Análisis histórico de los promedios de servicio

		Salario					
		1998	1999	2001	2002	2003	2004
Fecha		Fecha	Fecha	Fecha	Fecha	Fecha	Fecha
		30/06/1998	31/12/1999	31/12/2001	31/12/2002	31/12/2003	31/12/2004
Femeninas		285.648,00	303.852,00	484.250,00	524.352,00	1.033.631,00	1.176.476,00
Masculino		343.826,00	308.837,00	368.348,00	441.456,00	1.082.425,00	1.380.744,00
<b>TOTAL SALARIO</b>		<b>252.677,00</b>	<b>306.344,50</b>	<b>388.814,00</b>	<b>459.342,00</b>	<b>1.064.491,00</b>	<b>1.240.328,00</b>

Tabla 11. Análisis histórico de los promedios de salario

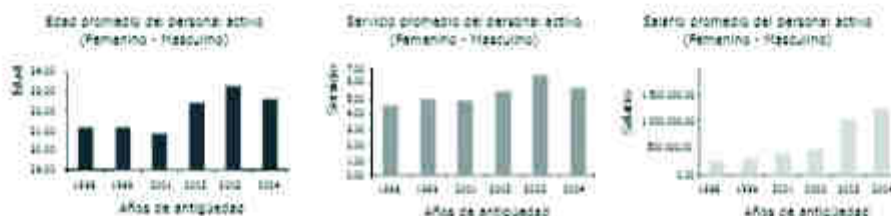


Gráfico 79. Análisis histórico de los promedios de edad, servicio y salario del personal activo en el periodo (1998 - 2004)

La única variable, en la que por razones obvias se produjo un incremento sustantivo, fue el salario promedio; el cual tuvo un repunte en términos nominales importante reflejando al aumento del costo de vida del país. En términos de cesta básica el promedio del salario del último año considerado en el estudio es de US\$. 1.601.400,00 era aproximadamente de 1,5 cesta básica.

### 1.5. Datos de rotación del personal

Para determinar las tasas de rotación del personal de la empresa, se utilizó la siguiente información:

Tasa de Rotación Bruta %									
Edad	Femenino				Edad	Femenino			
	2001	2002	2003	2004		2001	2002	2003	2004
20	0.00	1.00	0.75	0.60	35	0.33	0.28	0.10	0.08
21	0.40	0.20	0.00	0.71	36	0.23	0.44	0.23	0.07
22	0.17	0.00	0.00	1.00	37	0.43	0.15	0.00	0.06
23	0.22	0.29	0.40	0.23	38	0.17	0.20	0.07	0.11
24	0.08	0.10	0.12	0.00	39	0.22	0.28	0.00	0.20
25	0.28	0.03	0.08	0.21	40	0.00	0.22	0.29	0.00
26	0.22	0.17	0.08	0.10	41	0.33	0.00	0.23	0.13
27	0.19	0.20	0.24	0.12	42	0.00	0.00	0.29	0.23
28	0.14	0.09	0.11	0.12	43	0.00	0.14	0.20	0.17
29	0.04	0.13	0.12	0.23	44	0.00	0.00	0.17	0.23
30	0.09	0.18	0.18	0.13	45	0.00	0.23	0.20	0.17
31	0.20	0.21	0.18	0.09	46	0.00	0.40	0.20	0.00
32	0.00	0.10	0.12	0.06	47	0.00	0.00	0.33	0.00
33	0.13	0.12	0.10	0.10	48	0.33	0.00	0.00	0.00
34	0.20	0.19	0.14	0.23					

Tabla 12. Tasa de rotación bruta femenina por años

Tasa de Rotación Bruta %									
Edad	Masculino				Edad	Masculino			
	2001	2002	2003	2004		2001	2002	2003	2004
20	1.00	1.00	1.00	1.00	36	0.19	0.33	0.13	0.16
21	0.43	0.40	0.20	0.30	37	0.17	0.23	0.10	0.16
22	0.50	0.20	0.28	0.33	38	0.11	0.37	0.24	0.22
23	0.37	0.20	0.00	0.28	39	0.18	0.18	0.00	0.08
24	0.32	0.18	0.18	0.21	40	0.18	0.28	0.11	0.02
25	0.29	0.26	0.14	0.21	41	0.08	0.12	0.19	0.12
26	0.22	0.28	0.14	0.24	42	0.14	0.22	0.03	0.06
27	0.28	0.23	0.14	0.27	43	0.20	0.22	0.08	0.04
28	0.20	0.18	0.11	0.23	44	0.27	0.20	0.11	0.04
29	0.28	0.19	0.11	0.21	45	0.00	0.23	0.06	0.20
30	0.19	0.24	0.20	0.18	46	0.10	0.09	0.10	0.12
31	0.27	0.23	0.19	0.20	47	0.06	0.20	0.03	0.20
32	0.21	0.26	0.13	0.21	48	0.00	0.24	0.13	0.14
33	0.04	0.27	0.18	0.18	49	0.20	0.21	0.00	0.13
34	0.13	0.29	0.06	0.13	50	0.30	0.44	0.13	0.00
35	0.22	0.24	0.14	0.13					

Tabla 13. Tasa de rotación bruta masculina por años

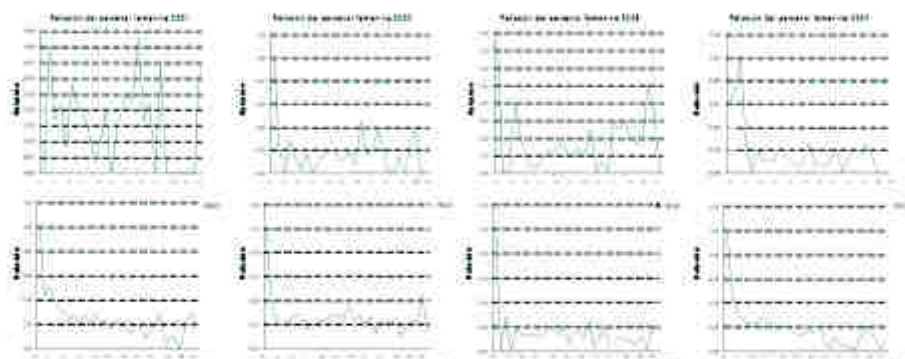


Gráfico 80. Análisis histórico de las tasas de rotación bruta para ambos sexos durante el periodo (1998-2004)



Teniendo los datos por año, por edad y sexo, se obtuvo a través de un estudio longitudinal los siguientes estimaciones de las tasas de rotación promedio.

$$\bar{r} = \sum_i \frac{r_{ij}}{n}$$

donde:

$$i = \{20, 21, 22, \dots, 48, 49, 50\}$$

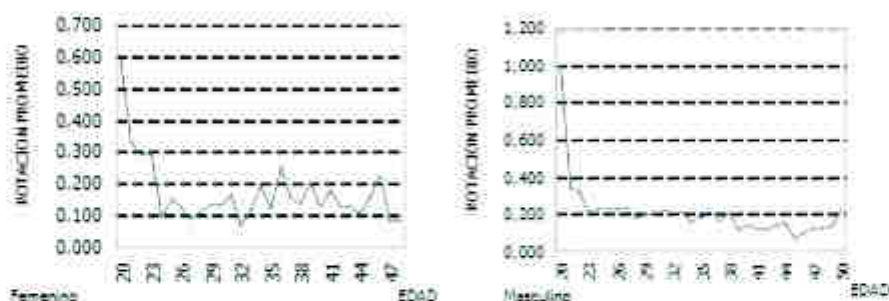
$$j = \{1998, 1999, 2000, \dots, 2003, 2004\}$$

$r_{ij}$  la rotación del personal a la edad  $i$  en el año  $j$

$$S^2 = \sum \frac{(r_{ij} - \bar{r})^2}{(n-1)}$$

Tasas de Rotación Promedio 2001-2004					
Edad	Femenino	Masculino	Edad	Femenino	Masculino
	$\hat{r}_s$	$\hat{r}_s$		$\hat{r}_s$	$\hat{r}_s$
20	0,588	1,000	36	0,250	0,214
21	0,329	0,332	37	0,161	0,166
22	0,292	0,330	38	0,137	0,209
23	0,288	0,208	39	0,199	0,117
24	0,095	0,223	40	0,127	0,144
25	0,151	0,225	41	0,177	0,127
26	0,127	0,224	42	0,127	0,117
27	0,086	0,234	43	0,127	0,137
28	0,114	0,180	44	0,104	0,154
29	0,134	0,194	45	0,154	0,072
30	0,131	0,205	46	0,225	0,102
31	0,165	0,221	47	0,083	0,127
32	0,069	0,201	48	0,083	0,126
33	0,113	0,214	49	0,000	0,135
34	0,194	0,158	50	0,000	0,225
35	0,125	0,190			

Tabla 14. Tasas estimadas de rotación promedio



**Gráfico 81. Estimación de las tasas de rotación promedio**

### 1.6. Resultados del ajuste de modelos no lineales, en la tasa rotación promedio

<b>Modelos aplicados a la Tasa de Rotación Promedio</b>					
Femenino			Masculino		
Formula	Logistic		Formula	Logistic	
	$\hat{r}_x = \left( \frac{a}{1 + be^{-cx}} \right)$			$\hat{r}_x = \left( \frac{a}{1 + be^{-cx}} \right)$	
Parametros	a	0,1374	Parametros	a	0,1617
	b	-211,0096		b	-464,1533
	c	0,2808		c	0,3159
	d			d	
Error Estándar	S	0,0510	Error Estándar	S	0,0441
Coefficiente de correlación	r	0,8810	Coefficiente de correlación	r	0,9628

**Tabla 15. Dos modelos aplicados a la tasa de rotación promedio**

Como se puede apreciar, en el caso de las tasas de rotación promedio, ambos modelos son del tipo logístico, se obtuvo una curva suave para el promedio de la tasa de rotación, calculado en base a cuatro años consecutivos; tratando de evitar un sobre ajuste de los datos.

Para la estimación de la tasa de rotación promedio femenino<sup>35</sup>, se escogió un rango comprendido de 20-48 años, y para el personal masculino se utilizó el rango de 20-50 años.

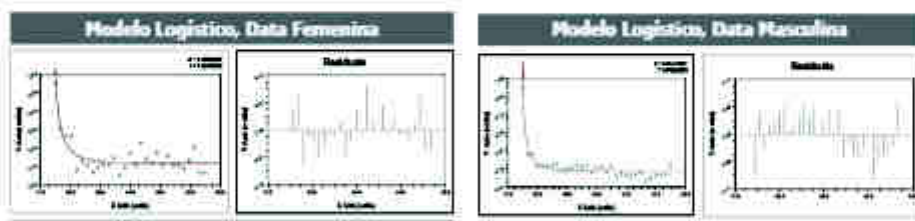


Gráfico 82. Modelo logístico aplicado a la tasa de rotación promedio

1.7. Bondad de ajuste del modelo seleccionado para aplicarlo a la tasa promedio de rotación

MODELO LOGISTIC						
Tasa de Rotación Promedio Femenina				Tasa de Rotación Promedio Masculina		
Logístico	Parameter Histories			Logístico	Parameter Histories	
Chi Square History				Chi Square History		
It 0	0.074412	0.194033	-464.682560	0.321593	0.166576	-131.929920
It 1	0.068308	0.140121	-429.881830	0.316731	0.185170	-145.034900
It 2	0.100751	0.128696	-244.488220	0.294909	0.157221	-193.642090
It 3	0.068112	0.129967	-399.129910	0.312993	0.155111	-151.792580

Tabla 16. Iteraciones del chi-cuadrado para el modelo logístico

Las matrices de varianzas y covarianzas de los parámetros para cada uno de los modelos, son las siguientes:

$$F = \begin{bmatrix} 0.066 & -1103.721 & 0.297 \\ -1103.721 & 52736409 & -12579.351 \\ 0.297 & -12579.351 & 3.001 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0.046 & -1672.557 & 0.192 \\ -1672.557 & 154274030.00 & -16703.554 \\ 0.192 & -16703.554 & 1.808 \end{bmatrix}$$

F: Matriz de varianzas y covarianzas de las mujeres en la tasa de rotación promedio.

M: Matriz de varianzas y covarianzas de los hombres en la tasa de rotación promedio.

<sup>35</sup> Generalmente, las mujeres en promedio rotan, en el periodo 20-48 años, entre otras cosas porque la Edad de Jubilación Normal, es cinco años antes que la de los hombres.

De acuerdo con la metodología ya descrita anteriormente, y con el objeto de hacer un pronóstico con la data de la tasa de rotación promedio, la cual, se ajusta al *modelo logístico*, de la siguiente manera:

Pronóstico de la Tasa de Rotación / Modelo Logístico					
Edad	Femenino $\hat{r}_x$	Masculino $\hat{r}_x$	Edad	Femenino $\hat{r}_x$	Masculino $\hat{r}_x$
20	0,590955	0,991000	36	0,135540	0,162594
21	0,326751	0,414821	37	0,138247	0,162358
22	0,244278	0,291323	38	0,138026	0,162186
23	0,205171	0,239365	39	0,137860	0,162061
24	0,183042	0,211820	40	0,137735	0,161970
25	0,169256	0,195423	41	0,137640	0,161904
26	0,160148	0,184983	42	0,137569	0,161856
27	0,153894	0,178047	43	0,137516	0,161821
28	0,149486	0,173309	44	0,137475	0,161795
29	0,146320	0,170011	45	0,137444	0,161776
30	0,144018	0,167684	46	0,137421	0,161763
31	0,142326	0,166027	47	0,137404	0,161753
32	0,141075	0,164840	48	0,137391	0,161746
33	0,140144	0,163984	49	0,000000	0,161740
34	0,139450	0,163366	50	0,000000	0,161736
35	0,138930	0,162919			

Tabla 17. Pronóstico de la tasa de rotación promedio del periodo 2001-2004

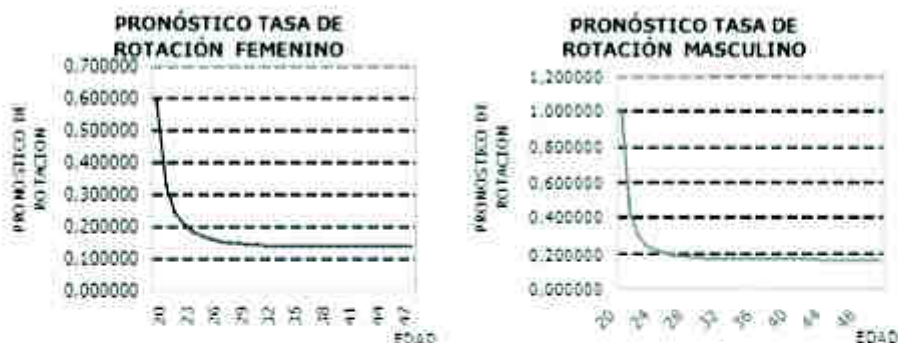


Gráfico 83. Pronóstico de la tasa de rotación promedio

Pronóstico de Mortalidad y de Rotación para las Mujeres						
Edad	$\hat{q}_x$	$\hat{r}_x$	$1-(\hat{q}_x)$	$1-(\hat{r}_x)$	$1-(\hat{q}_x)1-(\hat{r}_x)$	Prob Supervivencia
20	0,000558	0,590956	0,999442	0,409044	0,408816	0,003159
21	0,000591	0,326751	0,999409	0,673249	0,672851	0,007726
22	0,000625	0,244278	0,999375	0,755722	0,755250	0,011482
23	0,000663	0,205171	0,999337	0,794829	0,794302	0,015204
24	0,000702	0,183042	0,999298	0,816958	0,816384	0,019141
25	0,000744	0,169256	0,999256	0,830744	0,830126	0,023446
26	0,000788	0,160148	0,999212	0,839852	0,839190	0,028244
27	0,000836	0,153894	0,999164	0,846106	0,845399	0,033656
28	0,000886	0,149486	0,999114	0,850514	0,849760	0,039810
29	0,000940	0,146320	0,999060	0,853680	0,852878	0,046849
30	0,000997	0,144018	0,999003	0,855982	0,855129	0,054931
31	0,001058	0,142326	0,998942	0,857674	0,856767	0,064237
32	0,001122	0,141075	0,998878	0,858925	0,857961	0,074976
33	0,001191	0,140144	0,998809	0,859856	0,858832	0,087388
34	0,001265	0,139450	0,998735	0,860550	0,859461	0,101752
35	0,001344	0,138930	0,998656	0,861070	0,859913	0,118391
36	0,001428	0,138540	0,998572	0,861460	0,860230	0,137678
37	0,001518	0,138247	0,998482	0,861753	0,860445	0,160048
38	0,001614	0,138026	0,998386	0,861974	0,860583	0,186006
39	0,001717	0,137880	0,998283	0,862140	0,860660	0,216139
40	0,001827	0,137735	0,998173	0,862265	0,860690	0,251132
41	0,001946	0,137640	0,998054	0,862360	0,860682	0,291780
42	0,002073	0,137569	0,997927	0,862431	0,860643	0,339010
43	0,002209	0,137516	0,997791	0,862484	0,860579	0,393903
44	0,002356	0,137475	0,997644	0,862525	0,860493	0,457719
45	0,002515	0,137444	0,997485	0,862556	0,860387	0,531927
46	0,002685	0,137421	0,997315	0,862579	0,860263	0,618242
47	0,002870	0,137404	0,997130	0,862596	0,860120	0,718666
48	0,003070	0,137391	0,996930	0,862609	0,859961	0,835541
49	0,003286	0,000000	0,996714	1,000000	0,996714	0,971604
50	0,003521	0,000000	0,996479	1,000000	0,996479	0,974807
51	0,003776	0,000000	0,996224	1,000000	0,996224	0,978251
52	0,004055	0,000000	0,995945	1,000000	0,995945	0,981959
53	0,004359	0,000000	0,995641	1,000000	0,995641	0,985957
54	0,004692	0,000000	0,995308	1,000000	0,995308	0,990274
55	0,005058	0,000000	0,994942	1,000000	0,994942	0,994942

Tabla 18. Pronóstico de las probabilidades de supervivencia.

Sexo: femenino.





**Gráfico 84. Evolución de la mortalidad, rotación y supervivencia.  
Sexo: femenino**

Pronóstico de Mortalidad y de Rotación para los Hombres						
Edad	$q_x$	$r_x$	$1-(q_x)$	$1-(r_x)$	$1-(q_x)1-(r_x)$	Prob. Supervivencia
20	0,002796	0,991000	0,997204	0,009000	0,009975	0,000000
21	0,002851	0,914621	0,997149	0,585179	0,583511	0,000730
22	0,002907	0,291323	0,997093	0,708677	0,706617	0,001251
23	0,002966	0,239265	0,997034	0,760635	0,758379	0,001770
24	0,003028	0,211820	0,996972	0,780180	0,782793	0,002324
25	0,003092	0,195423	0,996908	0,804577	0,802089	0,002970
26	0,003159	0,184983	0,996841	0,815017	0,812442	0,003701
27	0,003230	0,178047	0,996770	0,821953	0,819298	0,004557
28	0,003304	0,173309	0,996696	0,826691	0,823960	0,005562
29	0,003381	0,170011	0,996619	0,829989	0,827183	0,006751
30	0,003462	0,167684	0,996538	0,832316	0,829435	0,008161
31	0,003547	0,166027	0,996453	0,833973	0,831015	0,009829
32	0,003637	0,164840	0,996363	0,835160	0,832123	0,011840
33	0,003732	0,163984	0,996268	0,835916	0,832896	0,014229
34	0,003831	0,163366	0,996169	0,836334	0,833429	0,017084
35	0,003937	0,162919	0,996063	0,837081	0,833785	0,020498
36	0,004048	0,162594	0,995952	0,837406	0,834016	0,024504
37	0,004166	0,162358	0,995834	0,837642	0,834152	0,029477
38	0,004292	0,162186	0,995708	0,837814	0,834218	0,035338
39	0,004425	0,162061	0,995571	0,837939	0,834231	0,042260
40	0,004567	0,161970	0,995433	0,838030	0,834203	0,050378
41	0,004719	0,161904	0,995281	0,838096	0,834141	0,060070
42	0,004881	0,161856	0,995119	0,838144	0,834053	0,072973
43	0,005055	0,161821	0,994945	0,838179	0,833942	0,089742
44	0,005242	0,161795	0,994758	0,838205	0,833811	0,109813
45	0,005444	0,161776	0,994556	0,838224	0,833661	0,129824
46	0,005662	0,161763	0,994338	0,838237	0,833491	0,150930
47	0,005899	0,161753	0,994101	0,838247	0,833302	0,182061
48	0,006157	0,161746	0,993843	0,838254	0,833093	0,217906
49	0,006438	0,161740	0,993562	0,838258	0,832863	0,260942
50	0,006746	0,161736	0,993254	0,838254	0,832609	0,313187
51	0,007086	0,161734	0,992914	0,838256	0,832326	0,376151
52	0,007463	0,161732	0,992537	0,838256	0,832012	0,452928
53	0,007882	0,161730	0,992118	0,838270	0,831663	0,543175
54	0,008351	0,161729	0,991649	0,838271	0,831271	0,655119
55	0,008881	0,161728	0,991119	0,838272	0,830827	0,785687
56	0,009482	0,000000	0,990518	1,000000	0,990518	0,945669
57	0,010173	0,000000	0,989828	1,000000	0,989828	0,954721
58	0,010971	0,000000	0,989029	1,000000	0,989029	0,964531
59	0,011906	0,000000	0,988094	1,000000	0,988094	0,975232
60	0,013017	0,000000	0,986983	1,000000	0,986983	0,986983

**Tabla 19. Pronóstico de las probabilidades de supervivencia.  
Sexo: masculino**



**Gráfico 85. Evolución de la mortalidad, rotación y supervivencia. Sexo: masculino**

*1.8. Ajuste de distribuciones de probabilidad y/o opinión experta para el rendimiento de los distintos instrumentos financieros<sup>36</sup>.*

Se obtuvieron del banco central de Venezuela, y de la bolsa de valores de Caracas, las siguientes tasas de interés anual promedio de los seis (06) principales bancos comerciales y universales para el periodo 2003-2006.

<sup>36</sup> A objeto de formular los supuestos e hipótesis actuariales del modelo.

<b>Seis Principales Bancos Comerciales y Universales. Tasas de Interés Anuales Nominales</b>				
<b>Año:</b>	<b>Meses</b>	<b>Operaciones Activas</b>	<b>Depósitos a Plazo a 90 días</b>	<b>Depósito de Ahorro</b>
2003	1 Enero	36,96	26,29	6,55
	2 Febrero	33,55	24,69	6,35
	3 Marzo	31,80	19,29	6,24
	4 Abril	29,01	20,03	6,49
	5 Mayo	25,50	14,73	6,66
	6 Junio	23,17	13,48	6,81
	7 Julio	22,09	14,89	7,11
	8 Agosto	23,29	14,19	7,20
	9 Septiembre	22,37	17,61	5,37
	10 Octubre	21,13	12,61	5,48
	11 Noviembre	19,82	15,51	5,32
	12 Diciembre	19,48	14,18	5,28
2004	13 Enero	18,38	11,79	5,19
	14 Febrero	18,08	10,84	4,54
	15 Marzo	17,56	12,84	4,56
	16 Abril	17,97	12,46	4,56
	17 Mayo	17,68	13,11	4,43
	18 Junio	17,08	12,75	4,33
	19 Julio	17,22	11,67	4,17
	20 Agosto	17,58	12,43	4,21
	21 Septiembre	16,92	13,47	4,26
	22 Octubre	17,01	13,03	4,49
	23 Noviembre	16,11	12,90	4,75
	24 Diciembre	16,00	14,50	4,72
2005	25 Enero	16,30	13,55	4,83
	26 Febrero	16,04	12,37	5,10
	27 Marzo	16,48	12,39	5,17
	28 Abril	15,45	12,46	5,19
	29 Mayo	16,37	11,67	7,24
	30 Junio	15,25	11,69	7,46
	31 Julio	15,82	11,24	7,37
	32 Agosto	15,85	10,80	7,33
	33 Septiembre	14,68	10,74	7,32
	34 Octubre	15,26	11,09	7,11
	35 Noviembre	15,07	10,82	7,10
	36 Diciembre	14,40	11,17	7,32
2006	37 Enero	14,93	10,48	7,39
	38 Febrero	15,04	10,46	7,22
	39 Marzo	14,55	10,07	7,03
	40 Abril	14,16	10,05	6,89
	41 Mayo	14,17	10,13	6,82
	42 Junio	14,10	10,05	6,81
<b>Minimo</b>		<b>14,10</b>	<b>10,05</b>	<b>4,17</b>
<b>Promedio</b>		<b>18,80</b>	<b>13,32</b>	<b>5,95</b>
<b>Maximo</b>		<b>36,96</b>	<b>26,29</b>	<b>7,46</b>
<b>Desv Estand</b>		<b>5,43</b>	<b>3,53</b>	<b>1,18</b>

**Tabla 20. Tasas de rendimientos mensuales**

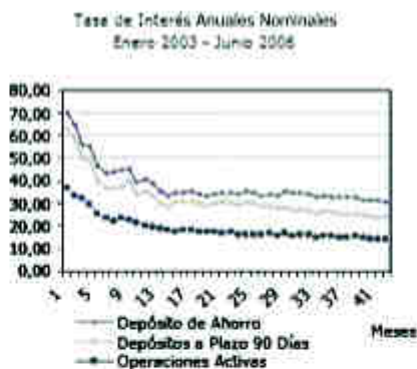




**Gráfico 86. Evolución de las tasas de interés activa**

Del gráfico siguiente, se observan las distintas tendencias, de las diferentes tasas de interés, de cada uno de los instrumentos. Obviamente los depósitos a plazo y ahorro, tienen un rendimiento menor que las operaciones de los activos, lo cual, justifica claramente la interacción financiera.

**Tasas de Interés Anuales Nominales**



**Gráfico 87. Comparación gráfica de las tasas de interés anuales nominales**

Se decidió hacer un supuesto de rendimientos log normales tanto para los bonos como para las acciones dado el pequeño mercado de capitales venezolano.

### 1.9. Análisis descriptivo de las tendencias centrales y de dispersión de los datos para las edades de interés

Edad de Jubilación	Concepto	Total	Sexo					
			Femenino			Masculino		
			Vivos	Muertos	Total	Vivos	Muertos	Total
50	Frecuencia	423	128	7	135	258	30	288
	Promedio de Vida	10.25	10.77	18.71	11.18	9.02	16.70	9.82
	Varianza	74.32	95.33	162.24	101.64	47.11	132.67	61.22
	Desviación típica	8.61	9.73	12.50	10.04	6.85	11.37	7.81
55	Frecuencia	461	176	12	188	229	34	273
	Promedio de Vida	9.34	7.31	13.75	7.72	10.79	11.00	10.46
	Varianza	58.17	50.24	126.57	56.95	64.28	63.58	56.14
	Desviación típica	7.62	7.07	10.77	7.53	8.00	7.86	7.48
60	Frecuencia	420	79	4	83	303	34	337
	Promedio de Vida	9.48	8.52	28.75	9.49	9.16	12.29	9.47
	Varianza	45.94	48.23	44.92	66.52	40.39	39.30	41.05
	Desviación típica	6.77	6.90	5.80	8.11	6.34	6.18	6.40

**Tabla 21. Análisis descriptivo de los tiempos de vida**

La tabla constituye una síntesis de la tendencia central y de dispersión, según las edades de interés; donde se puede observar que el mayor número de jubilados, sin discriminar por sexo, se encuentra a los 55 años. Sin embargo, al discriminar por sexo, se observan claramente las jubilaciones normales: 337 hombres a los 60 años y 188 mujeres a los 55 años de edad.

En este punto es de suma importancia acotar que debido a que el número registrado de jubilados fallecidos a la edad de 65 años es tan bajo, se consideró relevante enfocar el estudio en el resto de las edades de interés: 50-55 y 60; ya que pareciera existir una mayor tendencia<sup>37</sup> a las jubilaciones prematuras y normales, que a la tardía o diferida.

### 1.10. Resultados del ajuste de los modelos de supervivencia a los datos de los jubilados para las edades de jubilación normal

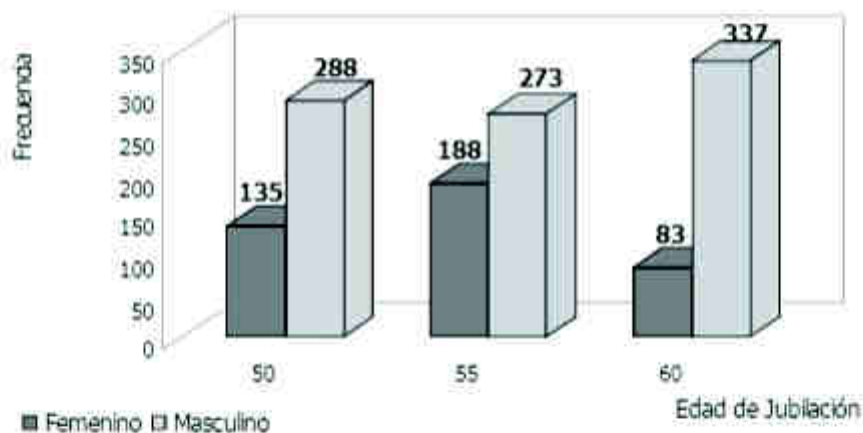
Producto del análisis de supervivencia realizado se obtuvieron los siguientes perfiles de expectativa de vida, en base a los criterios que presentamos a continuación:

<sup>37</sup> Es importante destacar que este aspecto en Venezuela, pareciera ser un hecho comprobado, en el sentido de que los empleados se jubilan normalmente, en aquellas empresas que tienen planes de pensiones privados y/o complementarios a los del seguro Social, y no difieren su pensión a edades posteriores.

1. *La data fue separada en tres grupos según las edades de jubilación de interés para el estudio, con el fin de conocer las diferentes expectativas de vida, condicionadas a la edad de jubilación y controlada con el sexo, como variable interviniente en el estudio.*

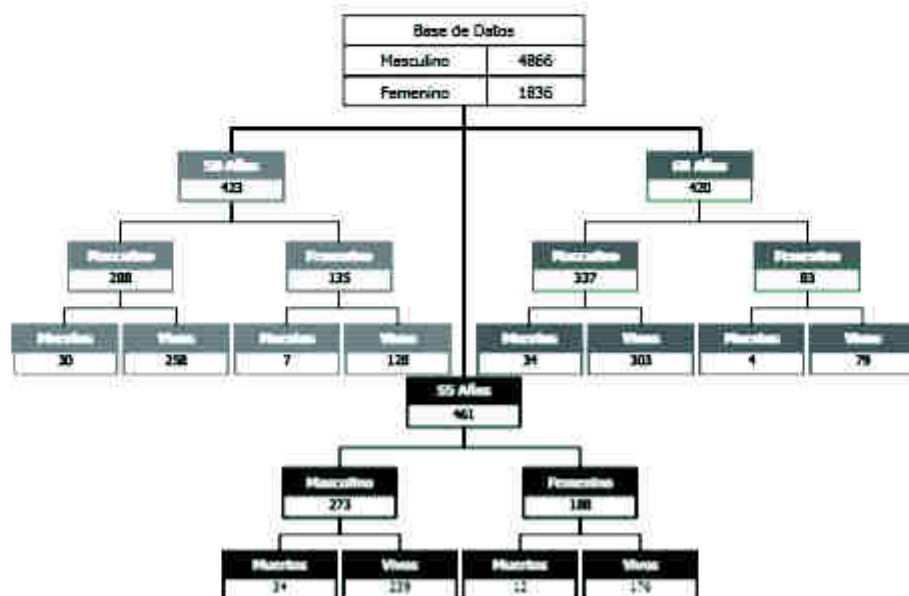
Edad de Jubilación	Sexo	
	Femenino	Masculino
50	135	288
55	188	273
60	83	337

**Tabla 22. Total de participantes por edad de jubilación y grupos de interés, discriminado por sexo.**



**Gráfico 88. Histograma por edad de jubilación y grupos de interés, discriminado por sexo**

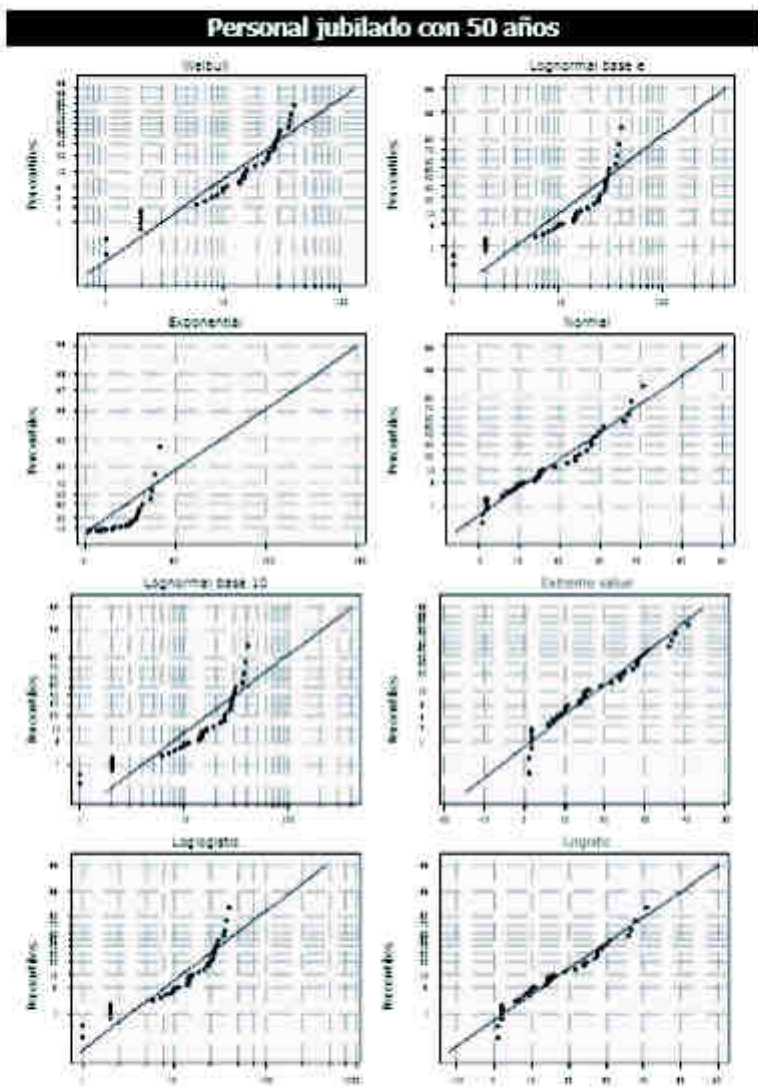
A partir de la base de datos global, es decir, incluyendo todas las empresas que conforman la población, se siguió el siguiente esquema de análisis:



**Gráfico 89. Discriminación por número de participantes totales de la investigación, por edad de interés**

En el Análisis Paramétrico de Supervivencia se ajustaron las siguientes distribuciones teóricas posibles:

- a. Weibull
- b. Lognormal base exponencial
- c. Exponencial
- d. Normal
- e. Lognormal base 10
- f. Valores Extremos



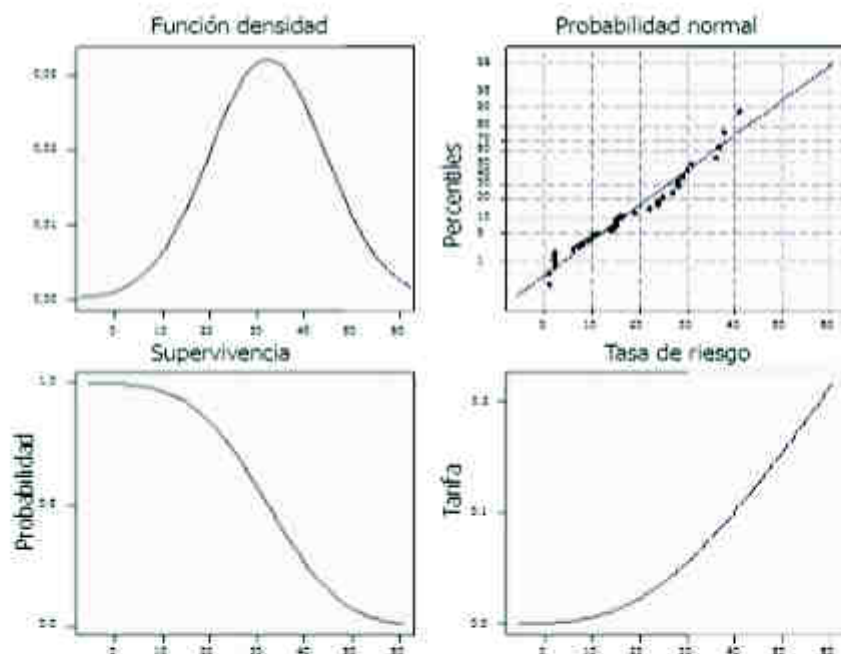
**Gráfico 90. Análisis comparativo de las distribuciones. Método de coeficiente de correlación para los jubilados de 50 años**



Coeficiente de Correlación		Coeficiente de Correlación	
Distribuciones	Valor	Distribuciones	Valor
Exponencial	-	Weibull	0,941
Lognormal base e	0,671	Valores Extremos	0,977
Lognormal base 10	0,671	Logistic	0,980
Loglogistic	0,915	Normal	0,982

**Tabla 23. Coeficiente de Correlación por distribuciones**

La presencia de valores bajos del estadístico Anderson Darling, y valores cercanos a uno (01) en el coeficiente de correlación, implica mejores ajustes de los datos a las distribuciones teóricas. En este caso, para esta edad de jubilación 50 años sin discriminación por sexo, la mejor distribución que se ajusta a los datos es la normal.



Edad de Jubilación	Parámetros		Tipo de Distribución	Coeficiente de Correlación	Bondad de Ajuste AD	Valores	
	Localización	Escala				MTTF	Censor
50	32,239	12,327	Normal	0,982	13,33	32,239	386

**Gráfico 91. Análisis de la distribución normal, para los jubilados de 50 años, sin discriminación por sexo.**

El tiempo de vida promedio o expectativa de vida condicionado a la edad de 50 años es de 32.24 años. De la muestra total ocurrieron treinta y siete (37) muertes y trescientos ochenta y seis (386) datos censurados a la derecha, todos ellos vivos a la fecha del estudio.

Este mismo tipo de análisis se llevó a cabo para las edades de interés 38, 55 y 60 años, de la muestra total discriminando por sexo, obteniéndose los siguientes resultados:

Edad de Jubilación	Distribución	Global	Sexo	
			Femenino	Masculino
50	Weibull	0,941	0,883	0,934
	Lognormal base e	0,871	0,817	0,843
	Exponencial	"	"	"
	Normal	<b>0,982</b>	0,958	0,977
	Lognormal base 10	0,871	0,817	0,843
	Extreme value	0,977	0,993	<b>0,982</b>
	Loglogistic	0,915	0,862	0,851
	Logistic	<b>0,980</b>	0,976	<b>0,976</b>
55	Weibull	<b>0,969</b>	0,947	<b>0,978</b>
	Lognormal base e	0,899	0,848	0,953
	Exponencial	"	"	"
	Normal	<b>0,963</b>	0,968	0,971
	Lognormal base 10	0,899	0,848	0,953
	Extreme value	0,940	0,972	0,938
	Loglogistic	0,935	0,892	<b>0,972</b>
	Logistic	0,949	0,970	0,947
60	Weibull	0,913	<b>0,908</b>	0,925
	Lognormal base e	0,806	0,833	0,869
	Exponencial	"	"	"
	Normal	0,972	0,861	<b>0,984</b>
	Lognormal base 10	0,806	0,833	0,869
	Extreme value	<b>0,979</b>	<b>0,929</b>	<b>0,981</b>
	Loglogistic	0,857	0,826	0,913
	Logistic	<b>0,974</b>	0,854	0,984

**Tabla 24. Análisis comparativo por edades de interés, por sexo a nivel global**

<sup>23</sup>Edades normales de jubilación para los hombre y mujeres y que son las edades de estudio de esta investigación.

**Verde:** Primer Modelo

**Amarillo:** Segundo Modelo Mejor Ajuste

Del análisis comparativo anterior, se desprende que los mejores modelos que explican el tiempo de vida condicionado a cada una de las edades de interés, son básicamente cuatro:

- i. Extreme Value o Valor extremo
- ii. Weibull
- iii. Logistic o Logístico

Normal, el cual, en algunos casos sustituye cualquiera de los otros tres como una muy buena aproximación de los modelos antes descritos.

Expectativas de vida: se determinaron las medias de los tiempos de vida de cada uno de los grupos, con intervalos de confianza del 95%, según la distribución más adecuada para cada caso, escogida en el análisis comparativo antes señalado; en base al test de bondad de ajuste anderson darling, y el método del coeficiente de correlación. Los resultados de estos ajustes se presentan en la siguiente tabla <sup>19</sup>:

Edad de Jubilación	Sexo	Tipo de Distribución	Tiempo de Vida Medio	Intervalo de Confianza 95%		
				Límite Inferior	Límite Superior	
50	Masculino	Extreme value	0.982	27.238	24.995	29.481
55		Weibull	0.978	49.759	30.282	81.762
60		Logistic	0.984	23.030	20.618	25.442
50	Femenino	Extreme value	0.982	34.633	29.612	39.653
55		Extreme value	0.972	26.389	23.361	29.417
60		Extreme value	0.929	28.454	24.928	31.979
50	Global	Normal	0.982	32.235	28.571	35.908
55		Weibull	0.969	43.798	31.518	60.864
60		Extreme value	0.979	23.575	22.033	25.116

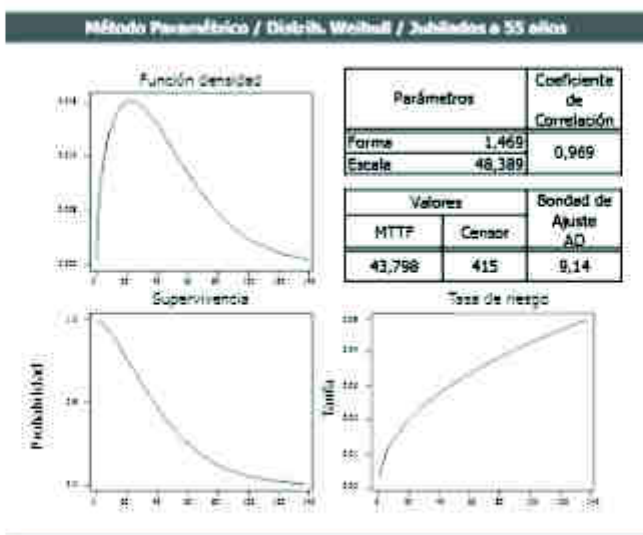
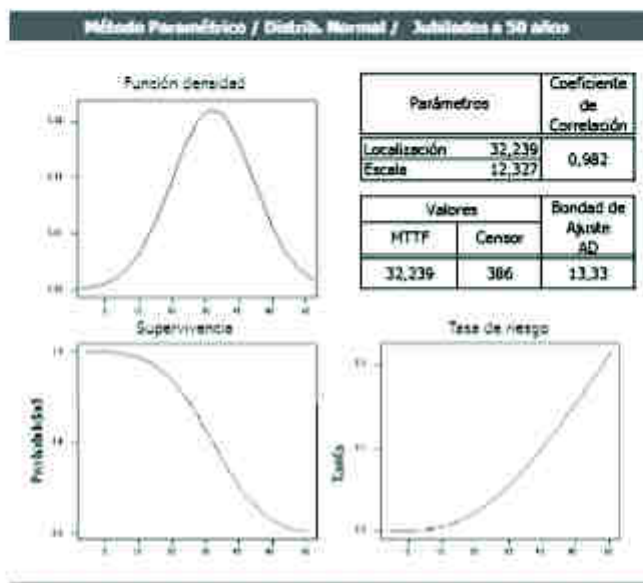
**Tabla 25. Expectativas de vida, con datos censurados para los modelos de mejor ajuste**

<sup>19</sup> Es importante destacar, como ya se mencionó anteriormente, que el ajuste de una distribución teórica a estas muestras no necesariamente explican las expectativas de vida de la región, pues los datos son tomados de empleados que trabajan en empresas cuyos trabajadores, en promedio tienen una calidad de vida superior. Dentro del contexto de la investigación se considera que estos ajustes lucen razonables; quizás, con la excepción del caso del sexo femenino a los 50 años, donde la expectativa de vida se nota bastante alta.

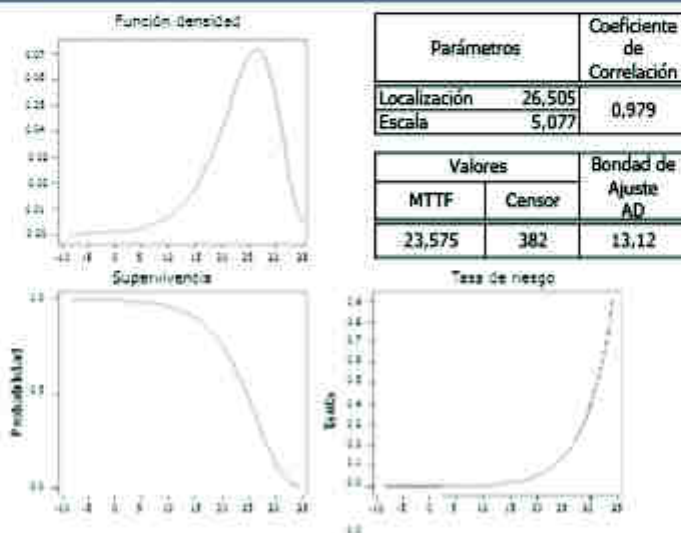


Las gráficas referentes a las distribuciones de mejor ajuste a los datos expuestos en la tabla, se pueden observar a continuación:

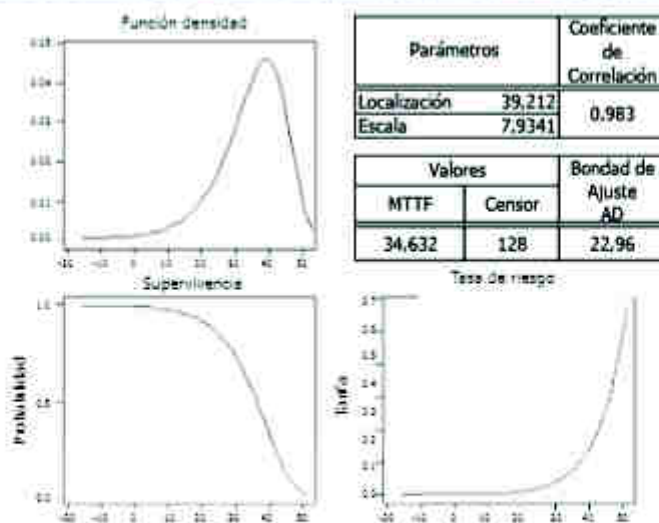
**Gráfico 92. Expectativas de vida, con datos censurados para los modelos de mejor ajuste**



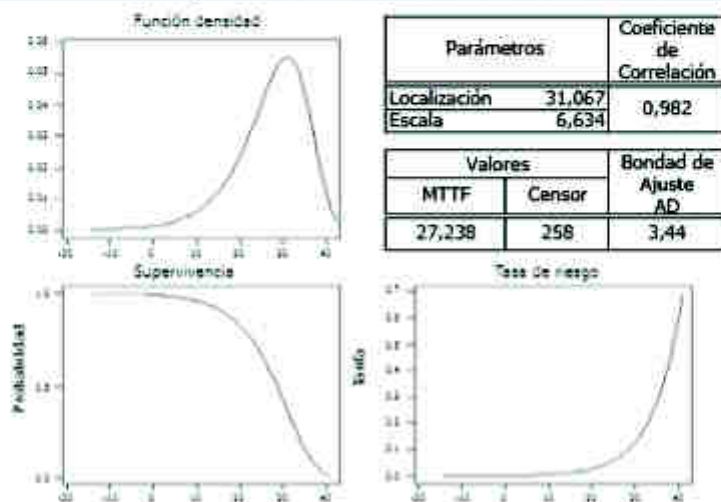
## Método Paramétrico / Distrib. Extreme value / Jubilados a 60 años



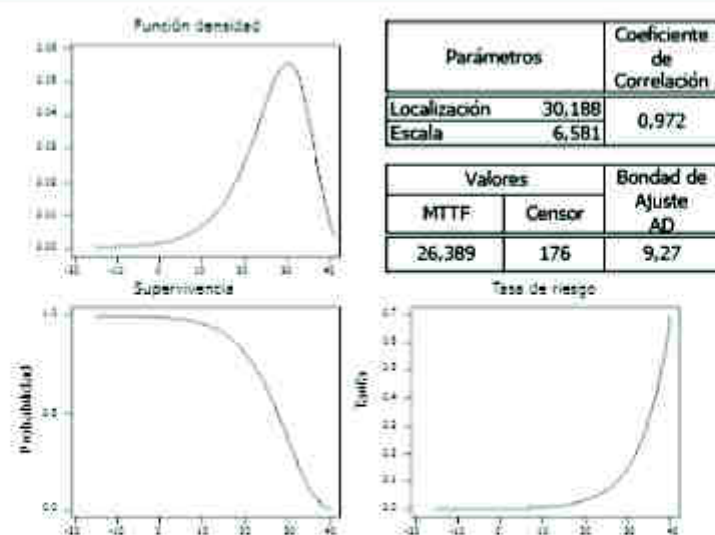
## Método Paramétrico / Distrib. Extreme value / Femenino Jubilados a 50 años

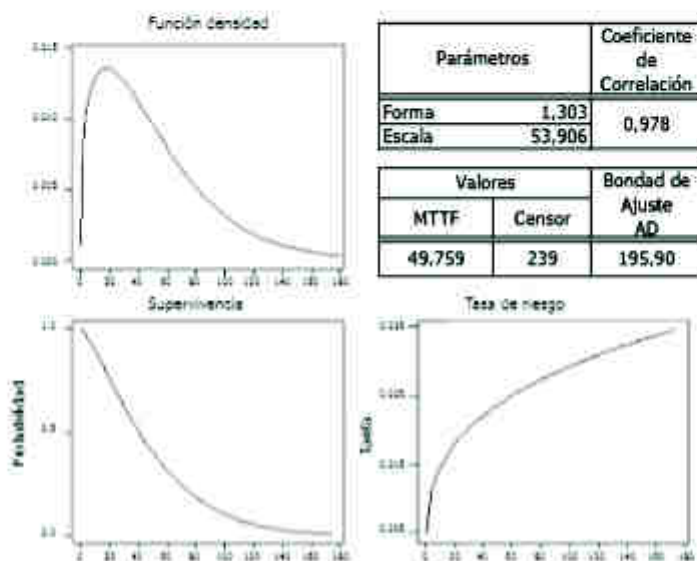
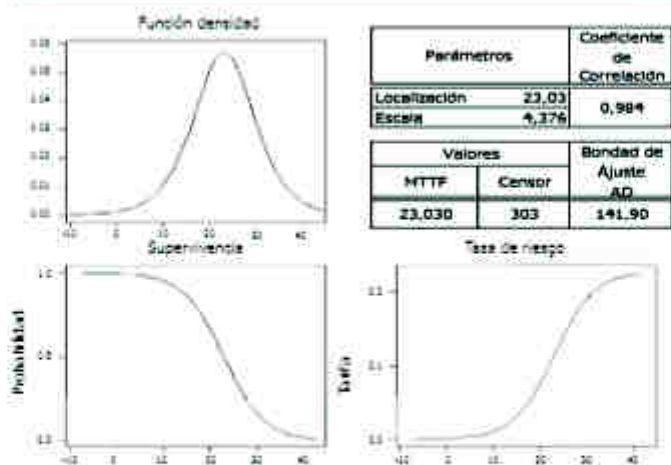


**Método Paramétrico / Distrib. Extreme value / Masculino Jubilados a 50 años**



**Método Paramétrico / Distrib. Extreme value / Femenino Jubilados a 55 años**



**Método Paramétrico / Distrib. Weibull / Masculino Jubilados a 55 años**

**Método Paramétrico / Distrib. Logística / Masculino Jubilados a 60 años**


### 1.11. Resultados derivados del análisis no paramétrico

- a. **Expectativas de vida:** se determinaron las medias de los tiempos de vida de cada uno de los grupos, con intervalos de confianza del 95%, mediante la utilización del método de Kaplan Meier<sup>40</sup>. Los resultados de estos ajustes fueron:

Edad de Jubilación	Sexo	Estimaciones No Paramétricas		
		Tiempo de Vida	Intervalo de Confianza 95%	
		Medio	Limite Inferior	Limite Superior
50	Masculino	29,227	26,032	32,421
55		23,630	22,297	24,963
60		21,836	20,486	23,185
50	Femenino	34,424	31,148	37,701
55		31,497	27,395	35,600
60		31,045	27,925	34,165
50	Global	31,610	29,098	34,121
55		29,454	26,925	31,982
60		26,144	23,886	28,401

Tabla 26. Expectativas de vida, según método no paramétrico

Es importante destacar que debido a que en las Estimaciones No Paramétricas no se ajustan<sup>41</sup> distribuciones de supervivencia teóricas como en el caso anterior, estas, eventualmente, pudieran ser más adecuadas dada la evidencia muestral, pues no "se fuerza", aun en el caso de un buen ajuste, a que los datos sigan una determinada distribución teórica.

En el ajuste no paramétrico, las probabilidades de supervivencia generalmente se estiman directamente a través de la función empírica de Kaplan Meier dada por la siguiente expresión:

<sup>40</sup> Estimación de las probabilidades de supervivencia a través de la función empírica de Kaplan Meier:

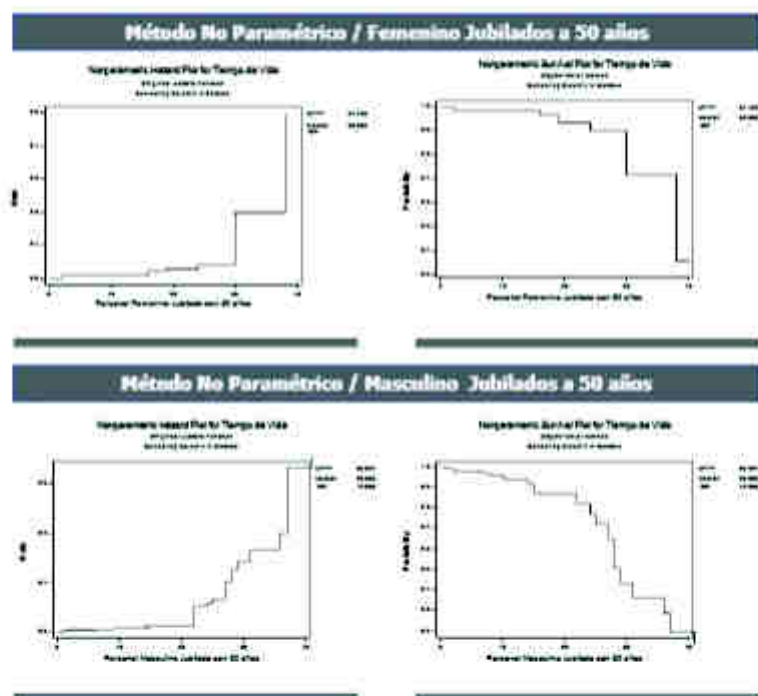
$$S_{(t)} = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \prod_{i,t < t_i} \left(1 - \frac{f_i}{n_i}\right) & t > 0 \end{cases}$$

<sup>41</sup> Estimación de los parámetros de la distribución teórica, generalmente localización, escala y forma.

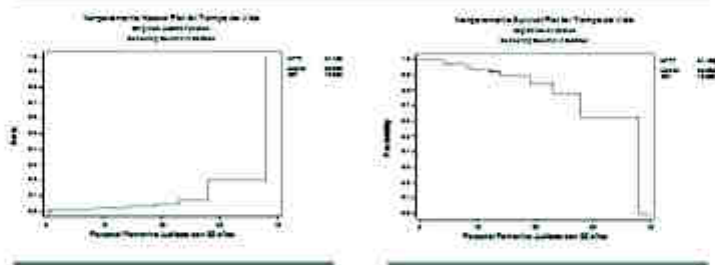
$$S_{(t)} = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \prod_{j: X_j \leq t} \left( 1 - \frac{f_j}{n_j} \right) & t > 0 \end{cases}$$

Las gráficas referentes a estos datos expuestos en la tabla anterior, se pueden observar a continuación:

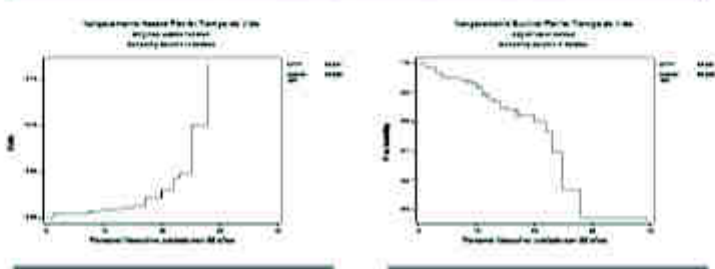
**Gráfico 93. Expectativas de vida, según método no paramétrico**



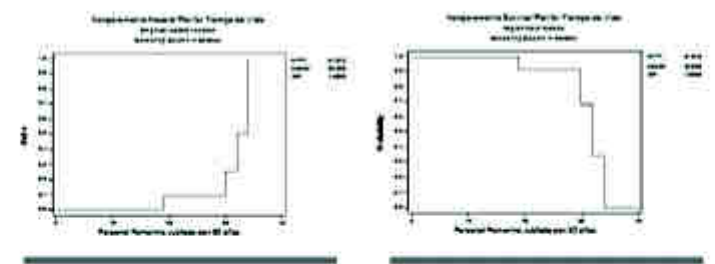
**Método No Paramétrico / Femenino Jubilados a 55 años**



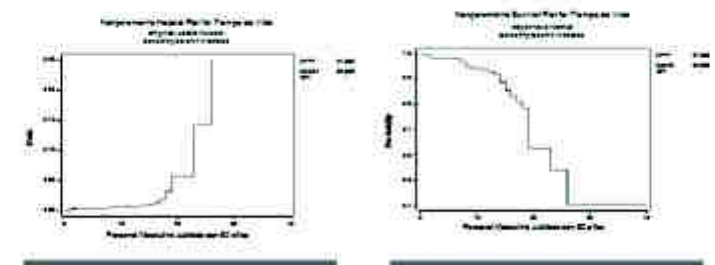
**Método No Paramétrico / Masculino Jubilados a 55 años**



**Método No Paramétrico / Femenino Jubilados a 60 años**

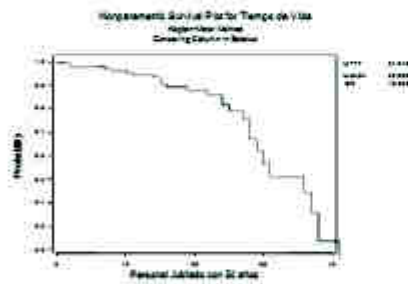
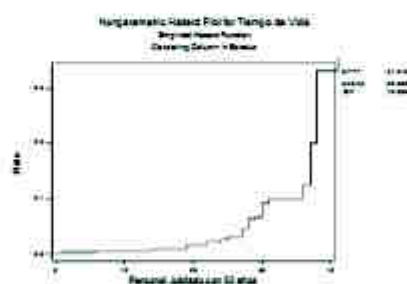


**Método No Paramétrico / Masculino Jubilados a 60 años**

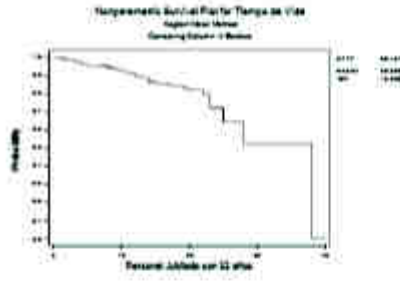
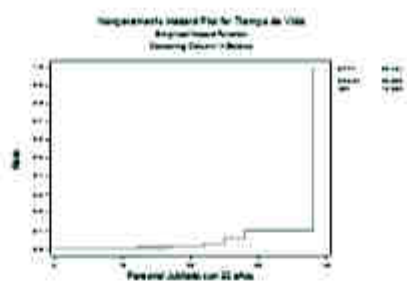




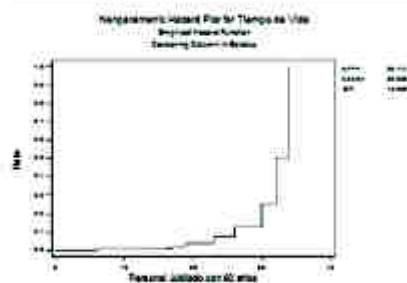
### Método No Paramétrico / Global Jubilados a 50 años



### Método No Paramétrico / Global Jubilados a 55 años



### Método No Paramétrico / Global Jubilados a 60 años





En estas gráficas se puede observar claramente los distintos perfiles de la supervivencia por edad, así como las tasas de riesgo asociadas a cada curva de supervivencia. A la edad de 50 años se observa una curva de supervivencia con decaimientos más uniformes que en la de 55 y 60 años, donde, como es natural, la fuerza de la mortalidad es mayor.

1.12. Simulación del valor de  $\ddot{a}_{60}$  y  $\ddot{a}_{55}$  bajo los distintos modelos.

Para encontrar el valor de la anualidad estocástica, se utilizarán los modelos encontrados anteriormente y cada uno con distintas tasas de riesgo por edad y sexo. La idea central, es determinar con la data real histórica del personal jubilado de las empresas a los 55 y 60 años, cual es el costo de la anualidad en términos de su esperanza matemática y varianza.

Para lograr lo anterior, se utilizó la técnica de Simulación Monte Carlo. Los supuestos de simulación para  $T_{60}$  fueron basados, en los hallazgos de los modelos paramétricos. Los resultados de los modelos no paramétricos se utilizaron como un tipo de contraste a nivel comparativo para verificar, en cierta manera, la razonabilidad de las expectativas de vida arrojadas por los modelos paramétricos.

1.13. Supuestos utilizados

Para modelar las anualidades aleatorias a los 55 y 60 años, por sexo se utilizaron los siguientes modelos:

Enfoques	
Paramétrico	No Paramétrico Kaplan Meier
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Edad 60 años / 55 años</li> <li>• Distribuciones de <math>T_{60}</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Masculino <math>T_{60}^m</math></li> <li>- Femenino <math>T_{60}^f</math></li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Edad 60 años / 55 años</li> <li>• Promedio <math>TV^{(1)}</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Masculino: 21,83</li> <li>- Femenino: 31,49</li> </ul> </li> <li>• Intervalo de Confianza al 95%                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- Masculino: 20,48 – 23,18</li> <li>- Femenino: 27,38 – 36,60</li> </ul> </li> </ul>
Supuestos	
$T_{60}^m$ – logístico (23,03; 4,38) $T_{60}^f$ – extreme value (30,19; 6,58)	

(1) TV: Tiempo de Vida / Expectativa de Vida

Tabla 27. Modelos de riesgo

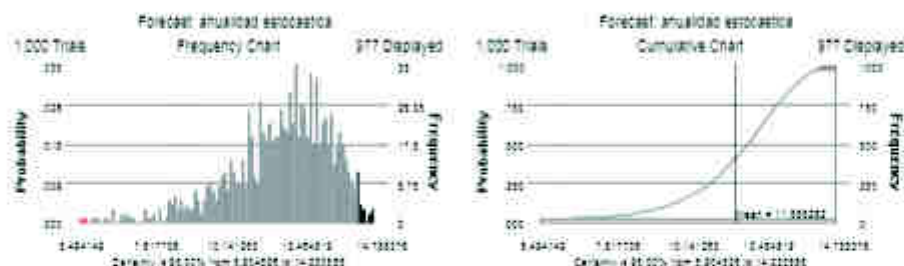
Como se puede observar, las parametrizaciones no necesariamente, se corresponden con los modelos teóricos, dado que cada software, tienen un orden y un número específico en cuanto a los parámetros de localización, forma y escala. En algunos modelos se utilizan sólo dos parámetros en otros tres parámetros, en nuestro caso de los modelos logístico y Extreme Value se utilizaron dos parámetros.

#### 1.14. Resultados de la simulación para $a_{60}^M$ , $a_{50}^F$

Después de correr 5.000 intentos se obtuvieron los siguientes resultados, para los modelos antes mencionados:

Estadísticos Descriptivos		Análisis del Percentilado	
1) Iteraciones	1,000	Percentil	
2) Valor Medio	11.588282	10%	9.396124
3) Valor Mediano	12.053721	20%	10.469484
4) Desviación Típica	2.381359	30%	11.167426
5) Coefic. Variación	0.21	40%	11.604414
6) Máximo Valor	14.860884	50%	12.053721
7) Valor Riesgo 10%	13.689931	60%	12.418683
		70%	12.784089
		80%	13.191112
		90%	13.689931
		100%	14.860884

**Tabla 28. Distribuciones empíricas del costo de la anualidad estocástica para hombres con 60 años de edad**



**Gráfico 94. Distribuciones de probabilidad empírica y distribuciones de probabilidad acumulada del costo. Hombres. 60 Años**

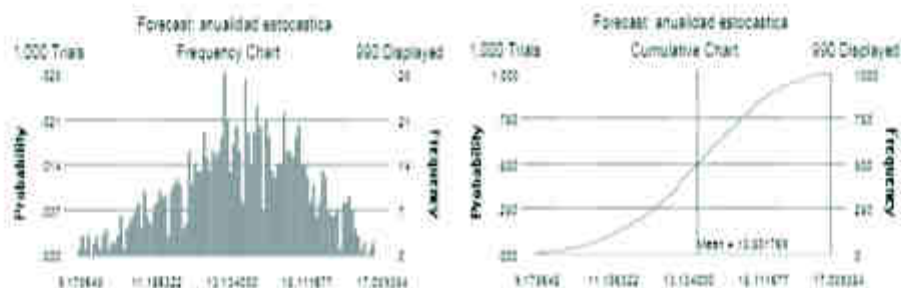
**Estadísticos Descriptivos**

1) Iteraciones	1,000
2) Valor Medio	13.501769
3) Valor Mediano	13.617901
4) Desviación Típica	1.686083
5) Coefic. Variación	0.12
6) Máximo Valor	17.420864
7) Valor Riesgo 10%	15.671411

**Análisis del Percentilado**

Percentil	
10%	11.179325
20%	12.141324
30%	12.689696
40%	13.117529
50%	13.617901
60%	14.003936
70%	14.523669
80%	14.993330
90%	15.671411
100%	17.420864

**Tabla 29. Distribuciones empíricas del costo de la anualidad estocástica para mujeres con 55 años de edad**



**Gráfico 95. Distribuciones de probabilidad empírica y distribuciones de probabilidad acumulada del costo. Mujeres. 55 Años**

Del análisis de los resultados anteriores se desprende lo siguiente:

El costo de la anualidad, es obviamente variable dependiendo del modelo de riesgo que se utilice para el  $T_{60}$  tiempo de vida remanente de los individuos una vez alcanzado los 60 años de edad en el caso de los hombres y  $T_{55}$  en el caso de las mujeres.

En principio se escogería, el modelo que mayor bondad de ajuste tenga a la muestra de datos observados; y aquel que mejor refleje la experiencia.

A nivel de costos promedios se obtuvo:

	<b>Costo Promedio</b>	<b>Valor en Riesgo 10%</b>
Femenino	13,5017	15,67
Masculino	11,5882	13,68

**Tabla 30. Costos Promedios de la anualidad derivada de la simulación**

De los resultados anteriores se observa que el costo promedio de las mujeres es superior al de los hombres en un 16,50%, lo cual refleja entre otras cosas un mayor número esperado de pagos dado que se está jubilando cinco (05) años antes que los hombres.

A nivel de la medida de riesgo (Valor en Riesgo al 10%), existe un mayor riesgo en las mujeres que en los hombres la probabilidad de exceder al 10% el umbral o valor en riesgo en las mujeres es de 15,67 y en los hombres de 13,68.

Es decir:  $Prob(\text{Costo Anualidad } 60 \geq 13,68) = 10\%$

$Prob(\text{Costo Anualidad } 50 \geq 15,67) = 10\%$

En resumen, con el mismo a% el nivel de riesgo de las mujeres es 14,54% mayor al de los hombres.

Es importante destacar que una composición típica de hombres y mujeres en una empresa como la que estamos modelando al agregar los riesgos 1/3 Mujeres + 2/3 Hombres, tiende a minimizar el riesgo inherente a las mujeres. En cierta manera los hombres absorben parte del riesgo de las mujeres a nivel consolidado.

Otro aspecto, igualmente importante, es el análisis comparativo de los intervalos de confianza para los valores esperados del costo de la anualidad.

	<b>Intervalo de Confianza 95%</b>	
	<i>Li</i>	<i>Ls</i>
Hombres (60)	5,9045	14,2305
Mujeres (55)	11,5882	13,68

**Tabla 31. Intervalo de confianza al 95%**

Los errores estándar de la media son, respectivamente, 7,53% para los hombres y 5,33% para las mujeres.

En cuanto a la geometría de las distribuciones, se observa claramente la asimetría de los hombres con un sesgo más hacia la derecha versus

la geometría de la distribución de las mujeres, un poco más asimétrica visualmente, sin tener un sesgo de tanta magnitud como el de los hombres.

Es también importante destacar que este análisis de supervivencia, para este grupo de empleados jubilados, puede no reflejar la realidad de las expectativas de vida a nivel de todo el sector de la energía y obviamente menos aún a nivel nacional para toda la población. Sin embargo, los estimados obtenidos son muy razonables para el grupo de empresas bajo estudio y la evidencia muestral indica que estos serían los modelos más apropiados para evaluar la supervivencia post-jubilación, es decir, a partir de los 60 años en el caso de los hombres y 55 años en el caso de las mujeres.

PÁGINA EN BLANCO

# Capítulo 18

---

## *Modelación de simulación estocástica*

El modelo de valoración arroja distintos resultados relativos al diferencial entre la obligación y los activos del fondo, a partir, de la generación de varios escenarios. Cada escenario, viene definido por un grupo de supuestos, por una función objetivo a optimizar y por un grupo de restricciones definidas por el usuario sobre el grupo de variables de decisión.

Podemos construir un escenario de cálculo como sigue:

ESCN <sup>42</sup> { I: Perfil Individual: Produce como resultado la evolución en el tiempo de todas las variables para cada uno de los empleados desde la edad actual a la edad de jubilación.  
A: Perfil Agregación: Produce resultados correspondientes al grupo de todos los empleados por sexo, agregados individualmente.

---

<sup>42</sup> Cada escenario puede a su vez visualizarse en dos modalidades: la primera, aquella donde se lleva a cabo una Simulación Monte Carlo para derivar las distribuciones empíricas de las variables de interés sin intervención; la segunda modalidad, derivada del análisis de sensibilidad de la primera, implica la identificación de una función objetivo y restricciones.



A su vez, cada perfil viene definido por tres elementos básicos:

- i. **Supuestos** de las distribuciones de las variables aleatorias y rangos de variabilidad de cada una de las variables de decisión.

Definición de los valores iniciales o de arranque.

- ii. **Función objetivo:** generalmente es la cuantía de la obligación actuarial y de los activos disponibles, dado por las contribuciones acumuladas con interés, ambos definen el nivel de solvencia del fondo de un plan de pensiones. Existen varios criterios básicos para **optimizar**, uno de ellos y quizás el más importante, es que el valor esperado asociado al diferencial acumulado en el momento de la jubilación sea mínimo acotado o muy cercano a cero; es decir:

$$\text{MIN}_{d_j} \{E(L_x)\}_{x=60} \text{ sujeto a } E(\Delta_{60}) \leq \epsilon$$

Siendo  $d_j$  un grupo de variables de decisión que permiten que el valor esperado del diferencial  $\Delta_x$  se encuentre en un rango aceptable para evitar pérdidas del fondo, sujeto a un bloque de restricciones, de cada una de las variables de decisión consideradas en el escenario bajo estudio.

Otros criterios alternativos, pudieran ser la minimización de la desviación standard del diferencial o la minimización de la varianza:

$$\text{MIN}_{d_j} \{SD_{(\Delta_x)}\}_{x=60} \text{ ó } \text{MIN}_{d_j} \{V_{(\Delta_x)}\}_{x=60}$$

- iii. **Restricciones** para cada una de las variables de decisión que inciden en el valor final que toma el diferencial al momento de la jubilación; siendo:

$D$ : Conjunto de las variables de decisión del modelo

$$D : \{ k_1\%, \omega_1, i\%, \delta\%, S_0 \}$$

Donde:

$k_1\%$ : Parámetro de Bondad del beneficio (PB).

$k_2\%$ : Parámetro Tasa de contribución (TC).

$k_3\%$ : Parámetro pensión mínima (PMi).

$k_4\%$ : Parámetro de pensión máxima (PMA).

$\omega_1$ : Tasas de participación en las colocaciones (inversiones) (PC).



$i\%$  : Tasa de interés, para descontar las obligaciones (TI).

$\delta\%$  : Tasa de aumento salarial interanual (TS).

$S_0$  : Sueldo inicial de arranque (SI).

Es importante destacar, que no necesariamente se deben restringir todas las variables en todos los escenarios. En la descripción de cada uno de los escenarios se indicará, el subconjunto de variables de decisión que se utilizarán y bajo que restricciones operarán.

#### iv. Escenarios a ser evaluados:

Se distinguen dos tipos de escenarios dentro del contexto de la Simulación Monte Carlo:

- a. Sin Optimización Estocástica
- b. Con Optimización Estocástica

Se hicieron diferentes simulaciones bajo distintos escenarios, en algunos casos se restringieron todas las variables del conjunto  $D$ ; en otros un subconjunto  $S \subset D$  y se identificaron aquellas variables claves y críticas. Esto permitió a su vez conocer los distintos impactos alternativos en el diferencial  $\Delta_X$  en  $X=60$  y  $X=55$ , dependiendo del sexo del empleado.

Por último, el objetivo que se persigue es determinar el vector solución  $\vec{V}$  de las variables de decisión en  $D$  o en cualquier subconjunto  $S$ , tal que se cumpla, con el **criterio de optimización escogido**. En esta investigación, los criterios escogidos fueron básicamente dos **criterios de optimización**:

- a. **Minimización del valor esperado** de la Obligación Actuarial sujeto a que el valor esperado del diferencial en valor absoluto sea menor o igual a 1,00 <sup>45</sup>M\$.
- b. **Maximización de las contribuciones acumuladas más interés**, sujeto a que el valor esperado del diferencial en valor absoluto sea menor o igual a 1,00 M\$.

<sup>45</sup> Este monto se fija arbitrariamente pequeño, inclusive hasta un monto de +/- 10,00 M\$. podría considerarse como un valor cercano a cero dado los órdenes de magnitud de las variables que generalmente vienen en nuestro caso dad en miles de millones (M\$.).

Encontrar el vector solución de las variables de decisión que garanticen la minimización del Déficit o Superávit, acotando el valor esperado del diferencial, a través, de una simulación estocástica para cualquiera de los criterios antes señalados.

En la próxima sección, se construirán los distintos escenarios de estudio, y se analizarán los resultados obtenidos tanto a nivel del perfil individual como del agregado o consolidado. A continuación se muestra la estructura del modelo:







A continuación, y respetando la estructura de los resultados que arroja el modelo explicado en detalle en el apartado anterior, se obtiene lo siguiente:

## 1. Enfoque determinístico

A nivel determinístico se explica en detalle las primeras corridas del Modelo para obtener los estimados de la obligación del plan, de las contribuciones acumuladas con interés y el diferencial, variable de particular interés en esta investigación, la cual como ya se ha explicado anteriormente da respuesta al superávit o déficit del Fondo.

### 1.1. Supuestos e hipótesis actuariales

El set de supuestos utilizados en estos cálculos fue:

Tasas de mortalidad pronosticadas para cada edad, es decir, no se asumió que una  $q_x$  en particular estuviera distribuida bajo una distribución de probabilidad.

- a. Tasa de Contribución: 14%<sup>44</sup>.
- b. Tasa de Aumento Salarial: 6%.
- c. Tasa de Interés fija y constante: 7%.
- d. Parámetro de Bondad: 2%.
- e. Tiempo remanente de vida: 18 años
- f. Factor de Pensión Mínimo: 30%.
- g. Factor de Pensión Máximo: 60%.
- h. Tasa de Retorno 1: 10%.
- i. Tasa de retorno 2: 8%.
- j. Proporción 1: 20%
- k. Proporción 2: 80%
- l. Edad de jubilación normal hombres: 60 años
- m. Edad de jubilación normal mujeres: 55 años

---

<sup>44</sup> 50% de ese monto lo aporta el trabajador y el remanente la empresa o patrón.

## 1.2. Resultados

A nivel consolidado, los resultados, para el escenario base antes definido, fueron:

Análisis de Costos	Más	%	Menos	%	Total	%
1) Obligación Actuarial	55.213	100.00	14.496	100.00	69.709	100.00
2) Contribuciones Acumuladas + Interés	60.514	109.60	5.813	40.10	66.327	95.15
3) Diferencial	-5.300	-9.60	9.152	63.13	3.852	5.53

Otros en 113

**Tabla 34. Análisis de costos. Enfoque determinístico**<sup>45</sup>

La tabla anterior muestra un superávit para los hombres y un déficit para las mujeres. Estos estimados son puntuales, basados en las hipótesis y supuestos antes señalados, donde cada una de las variables son consideradas fijas.

Para valorar el comportamiento del diferencial bajo distintos esquemas de variaciones en las tasas de interés y contribución se generaron determinísticamente 25 escenarios adicionales, manteniendo el resto de las otras variables constantes, variando  $6\% \leq \text{tasa interés} \leq 12\%$  y  $13\% \leq \text{tasa de contribución} \leq 20\%$ . Los resultados de este análisis de sensibilidad fueron:

	Tasa de contribución (13)	Tasa de contribución (13)	Tasa de contribución (13)	Tasa de contribución (13)	Tasa de contribución (13)
tasa de interés (0.06)	7.703.073.447.70	8.803.857.808.22	4.118.576.408.88	3.006.736.878.78	-1.334.755.488.43
tasa de interés (0.08)	4.848.303.118.20	3.437.864.887.73	1.307.888.388.83	493.113.485.02	1842.309.813.88
tasa de interés (0.09)	3.022.866.401.00	1.689.896.080.80	(8.093.102.71)	(1.888.787.897.32)	(3.101.889.888.10)
tasa de interés (0.11)	1.389.492.880.31	(72.747.888.33)	(1.873.281.888.87)	(3.170.273.741.37)	(4.709.888.304.88)
tasa de interés (0.12)	(26.370.056.84)	(1.289.888.271.88)	(2.832.882.884.81)	(4.800.188.782.84)	(8.022.782.842.78)

**Tabla 35. Análisis de sensibilidad del diferencial. Enfoque determinístico personal femenino (US\$.)**

La matriz triangular inferior muestra aquellos valores determinísticos donde el  $\Delta_{35} < 0$ , es decir, superavitario. Con una tasa de contribución de 13% y un interés de 12% se genera un déficit de 136.37 MS. Es decir, habría una insuficiencia relativamente pequeña en órdenes de magnitud por el monto antes señalado. Con este tipo de análisis no tenemos mayor información de la calidad de las estimaciones y de la variabilidad de los estimados.

<sup>45</sup> Porcentaje calculado como el cociente de las contribuciones acumuladas más interés sobre la obligación actuarial.

## 2. Enfoque Estocástico

### 2.1. Supuestos e hipótesis actuariales

#### 1. Variables aleatorias

##### 1.1 Rendimientos anuales del fondo

Bajo el supuesto de logaritmo - normalidad los rendimientos o retornos anuales del fondo, se consideró lo sigue:

- Portafolio conformado por dos instrumentos financieros bonos + acciones.
- La composición inicial de inversión en cada uno de ellos, viene dado por un 20 % en acciones y el remanente en bonos.
- $r_i$  : rendimiento anual de las acciones / bonos  $i=1, 2, \dots, n$

Donde  $r_1$  : Rendimiento de las acciones.

$r_2$  : Rendimiento de los bonos.

Hipótesis distribucional <sup>46</sup>	Composición Inicial Portafolio
$r_1 \sim \text{logNormal}(10\%, 3\%)$	20%
$r_2 \sim \text{logNormal}(8\%, 1\%)$	80%

Como era de esperarse la volatilidad de las acciones es tres veces la de los bonos y su rendimiento es superior en dos puntos porcentuales.

---

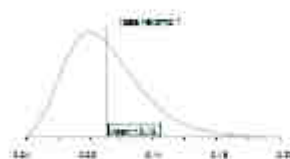
<sup>46</sup> Importante destacar que la **opinión de expertos** en el área de inversiones y estudios económicos sugirieron altamente adoptar la distribución lognormal y el nivel adoptado de sus parámetros, para describir el comportamiento de los rendimientos de largo plazo de bonos y acciones en el país. Venezuela no tiene un mercado de capitales ampliamente desarrollado como para hacer ajustes y derivar los modelos en esta área, debido a la poca oferta y demanda. Se prefirió partir de la base de un escenario muy conservador, que de alguna manera está en sintonía con la evolución de las tasas activas y pasivas de la economía nacional.



Assumption: tasa retorno 1 Cell: B10

Lognormal distribution with parameters:  
 Mean 0.10  
 Standard Dev. 0.03

Selected range is from 0.00 to +Infinity



Assumption: tasa retorno 2 Cell: B11

Lognormal distribution with parameters:  
 Mean 0.08  
 Standard Dev. 0.01

Selected range is from 0.00 to +Infinity



**Gráfico 96. Variables Aleatorias: Rendimientos Anuales del Fondo**

### 1.2. Tiempo remanente de vida

Derivado del estudio de supervivencia explicado en detalle, en el capítulo anterior, se supuso que el tiempo de vida se distribuye por sexo como sigue:

Sexo	Distribución	Media	Parámetros	
			Escala	Edad
Masculino	Logística	23,03	4,38	60
Femenino	Extreme Value	26,38	6,58	55

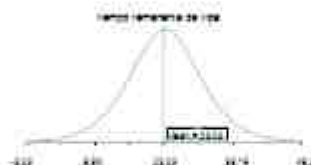
**Tabla 36. Tiempo remanente de vida <sup>47</sup>**

Assumption: tiempo remanente de vida

Cell: B6

Logistic distribution with parameters:  
 Mean 23,03  
 Scale 4,38

Selected range is from -Infinity to +Infinity



**Gráfico 97. Variables aleatorias: tiempo remanente de vida - hombres**

<sup>47</sup> Las estimaciones de los parámetros de los modelos de supervivencia fueron hechos con Minitab y los cálculos de simulación fueron con Crystal Ball. En el caso de la distribución Extreme Value se estimó la media como una medida de localización ya que Minitab estima la moda.

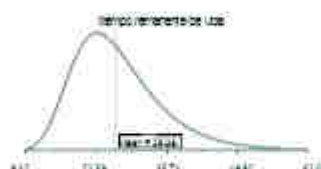


Assumption: tiempo restante de vida

Cell: B6

Extreme Value distribution with parameters  
 Mode 22.58  
 Scale 6.58

Selected range is from -Infinity to +Infinity



**Gráfico 98: Variables Aleatorias: Tiempo Remanente de Vida – Mujeres**

1.3. Tasas de mortalidad y rotación

Basado en la data de mortalidad quinquenal del INE y de los modelos de pronóstico, se obtuvieron las probabilidades de mortalidad por edad y sexo, desde los 20 años hasta los 60 y 55 años, respectivamente; edades normales de jubilación para el hombre y la mujer.

A diferencia de los modelos determinísticos, donde se utiliza una tabla de mortalidad fija por edad, en este modelo de simulación estocástica, la mortalidad y la rotación se modelaron como sigue<sup>45</sup>:

X	Mortalidad	
	Masculino	Femenino
20	$\hat{q}_{20}$	$\hat{q}_{20}$
21	$\hat{q}_{21}$	$\hat{q}_{21}$
22	$\hat{q}_{22}$	$\hat{q}_{22}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
55	$\hat{q}_{55}$	$\hat{q}_{55}$
.	.	.
.	.	.
60	$\hat{q}_{60}$	$\hat{q}_{60}$

} Pronósticos de los modelos utilizados para obtener la mortalidad anual por edad

**Tabla 37. Pronóstico de los modelos utilizados para obtener la mortalidad anual por edad**

<sup>45</sup> Ver tablas de los valores ajustados.

$\hat{q}_x$ : Probabilidad de que un individuo de edad  $x$ , muera en el periodo  $x, x+1$ ; es decir en el intervalo  $[x, x+1)$ .

$$\hat{q}_x^M \sim N \left( \hat{q}_x^M, \sqrt{\frac{\hat{q}_x^M (1 - \hat{q}_x^M)}{N}} \right) \quad \forall x \in [20, 60]$$

$$\hat{q}_x^F \sim N \left( \hat{q}_x^F, \sqrt{\frac{\hat{q}_x^F (1 - \hat{q}_x^F)}{N}} \right) \quad \forall x \in [20, 55]$$

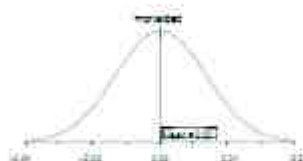
Siendo  $N$  el número inicial de expuestos y  $\mu = \hat{q}_x^F$  y  $\sigma_M^2 = \frac{(\hat{q}_x^M (1 - \hat{q}_x^M))}{N}$

**Assumption: mortalidad**

Cell: B17

Normal distribution with parameters:  
 Mean 0.002796  
 Standard Dev. 0.002792

Selected range is from -Infinity to +Infinity



**Assumption: B18**

Cell: B18

Normal distribution with parameters:  
 Mean 0.002851  
 Standard Dev. 0.002847

Selected range is from -Infinity to +Infinity



**Assumption: B19**

Cell: B19

Normal distribution with parameters:  
 Mean 0.002907  
 Standard Dev. 0.002902

Selected range is from -Infinity to +Infinity



**Assumption: B20**

Cell: B20

Normal distribution with parameters:  
 Mean 0.002966  
 Standard Dev. 0.002962

Selected range is from -Infinity to +Infinity



**Assumption: B21**

Cell: B21

Normal distribution with parameters:  
 Mean 0.003028  
 Standard Dev. 0.003023

Selected range is from -Infinity to +Infinity



**Gráfico 99. Variables aleatorias: mortalidad – hombres**

Con el objeto de no hacer repeticiones, se muestra en esta sección, sólo una parte de los supuestos, con fines pedagógicos, para las edades de {20, 21, 22, 23, 24}, el conjunto completo de los supuestos se puede ver en su totalidad en el modelo de simulación desde los 20 hasta los 60 años de edad, y se distinguen por tener el color verde, tal como se mencionó en la geometría del modelo (hoja de cálculo).

Siguiendo el mismo razonamiento, se modeló la rotación como sigue:

$$\hat{r}_x^M = N \left( \hat{r}_x^M, \sqrt{\frac{\hat{r}_x^M (1 - \hat{r}_x^M)}{N}} \right) \quad \forall x \in [20, 60]$$

$$\hat{r}_x^F = N \left( \hat{r}_x^F, \sqrt{\frac{\hat{r}_x^F (1 - \hat{r}_x^F)}{N}} \right) \quad \forall x \in [20, 55]$$

Siendo  $\hat{r}_x^M$  y  $\hat{r}_x^F$ , las tasas de rotación anual derivadas del momento de ajuste de la rotación observada en las empresas cubiertas por esta investigación.

**Gráfico 100. Variables aleatorias: rotación**

**Assumption: rotacion**

Cell: C17

Normal distribution with parameters:  
 Mean 0.991000  
 Standard Dev. 0.094015

Selected range is from -Infinity to +Infinity



**Assumption: C18**

Cell: C18

Normal distribution with parameters:  
 Mean 0.414821  
 Standard Dev. 0.317326

Selected range is from -Infinity to +Infinity



**Assumption: C19**

Cell: C19

Normal distribution with parameters:  
 Mean 0.291323  
 Standard Dev. 0.245244

Selected range is from -Infinity to +Infinity



Assumption: C21

Cell: C21

Normal distribution with parameters:

Mean 0.211820  
Standard Dev. 0.188053

Selected range is from -Infinity to +Infinity



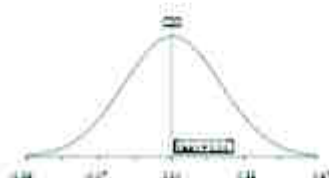
Assumption: C20

Cell: C20

Normal distribution with parameters:

Mean 0.239365  
Standard Dev. 0.208761

Selected range is from -Infinity to +Infinity



## 2.2. Variables de decisión

Adicionalmente, para valorar las obligaciones del plan de pensiones, fue necesario identificar y definir cada una de los siguientes variables:

Variable de Decisión	Limite Superior	Limite Inferior	Unidad Incremental
a. Tasa de Contribución	15%	9%	2%
b. Tasa de Interés	12%	6%	1%
c. Parámetro de Bondad	5%	2%	1%
d. Tasa de Aumento Salarial	10%	5%	2%
e. Factor de Pensión Mínima	35%	15%	1%
f. Nivel Participación 1	35%	18%	1%

**Tabla 38. Rango de variabilidad de las variables de decisión.  
Enfoque estocástico**

Los límites superiores e inferiores, justo con el paso o unidad de incremento definen el dominio de variabilidad de estas variables de decisión tomadas determinísticamente. Cada uno de los intervalos y la unidad de incremento servirán a posterior para llevar a cabo un análisis de sensibilidad de las Obligaciones Actuariales; de las Contribuciones Acumuladas y del Diferencial, esta última variable de interés en cuanto a la viabilidad financiera del fondo.

### 2.3. Resultados

Como contrapartida, a los resultados determinísticos, los resultados de la Simulación MonteCarlo (basados en el mismo set de supuestos anteriores), pero incluyendo ahora el carácter aleatorio de la mortalidad, la rotación, los rendimientos del portafolio y el tiempo remanente de vida, fueron los siguientes:

Análisis de Costos	Mas		Fem	
	Media	DSt	Media	DSt
1) Obligación Actuarial	38.373	7.055	17.070	1.951
2) Contribuciones Acumuladas + Interés	52.441	5.625	12.307	1.056
3) Diferencial	-14.067	9.092	4.763	2.222

Cifras en M\$.

**Tabla 39. Análisis de costos. Enfoque estocástico**

	Mas		Fem	
	Lj	Ls	Lj	Ls
1) Obligación Actuarial	18.834	46.886	12.783	20.418
2) Contribuciones Acumuladas + Interés	43.335	65.579	10.604	14.780
3) Diferencial	-36.345	-5.756	0.304	8.741

Cifras en M\$.

**Tabla 40. Intervalos de confianza al 95% para el diferencial**

Del análisis anterior se desprende que el superávit del plan para los hombres en promedio en valor absoluto es casi una y media veces el déficit de las mujeres (-14,067 M\$. Versus 4,763 M\$.), condicionado al set de supuestos utilizados, los cuales se caracterizan por ser muy conservadores, en cuanto a la tasa de interés utilizada para descontar las obligaciones y a los niveles de las contribuciones mensuales. Es importante señalar aquí que la contribución total puede a su vez descomponerse en dos partes, como sigue:

Contribución total mensual = Contribución mensual patrono + Contribución mensual empleado

$$(14\%) = 7\% (50\%) + 7\% (50\%)$$

$$(14\%) = 6\% (43\%) + 8\% (57\%)$$

$$(14\%) = 5\% (36\%) + 9\% (64\%)$$

Distintas combinaciones tal que su suma sea constante, tendría el mismo costo y dependerá de la política de la empresa y del empleado como se va a financiar el plan.

Igualmente importante son las amplitudes de cada uno de los intervalos de confianza de las tres variables pronosticadas, donde clasificados por amplitud, encontramos:

	Mas	Fem
1) Obligación Actuarial	28.052	7.635
2) Contribuciones Acumuladas + Interés	22.244	4.176
3) Diferencial	30.589	8.437

Cifras en M\$.

**Tabla 41. Amplitud del intervalo de confianza al 95%**

La amplitud del intervalo de confianza del diferencial y de la obligación para el caso de los hombres, es casi 4 veces el de las mujeres.

Podemos concluir claramente que con este set de supuestos, que el plan descrito no es solvente para las mujeres, pues debe minimizarse el déficit, de lo contrario el plan no es viable para alguna de las poblaciones en estudio. Este aspecto es de capital importancia, pues en la práctica muchas veces no se hacen ni siquiera estimaciones determinísticas del riesgo tanto de las obligaciones como de las contribuciones potencialmente acumulables con la debida capitalización de los intereses.

Otra de las ventajas del enfoque estocástico es la utilización de medidas de riesgo, que permitan conocer la variabilidad de las estimaciones de los pasivos. Una de las métricas de riesgo más utilizada es Valor en Riesgo, que en su acepción anglosajona se conoce como Value at Risk.

En el caso de las obligaciones, el **Valor en Riesgo** de interés, es el asociado a la cola derecha, para determinar a un nivel de confianza dado, cual es la pérdida no esperada. Como era de esperarse por el número de riesgos expuestos el umbral para los hombres al 95% de confianza es más de 2 veces que el de las mujeres.



“Obligación mayor a lo deseable”

<b>Prob(OA ≥ q) = 5%</b>	
<b>Valores de q (M\$.)</b>	
Femenino	20.418
Masculino	46.886

**Tabla 42. Valor en riesgo de las obligaciones al 5%<sup>49</sup>**

En otras palabras, la pérdida agregada total o siniestralidad en términos de la obligación actuarial, pudiera llegar a ser un poco más del doble, en el caso de los hombres, cuando se le compara con la de las mujeres bajo la métrica de valor en riesgo. Lo anterior depende de las características demográficas de la población, en cuanto a las edades actuales, tiempo para alcanzar los beneficios, nivel salarial, entre otras.

Si repetimos ahora el mismo cálculo del Valor en Riesgo para las contribuciones acumuladas más interés, lo que interesa es el lado izquierdo de la cola de la distribución.

“Acumular menos de lo debido”

<b>Prob(CA ≤ q) = 5%</b>	
<b>Valores de q (M\$.)</b>	
Femenino	10.604
Masculino	43.335

**Tabla 43. Valor en riesgo de las contribuciones acumuladas al 5%**

Para conocer que valores deberían tener las variables tasa de interés y tasa de contribución, para investigar hasta donde es posible acercarse a un déficit mucho menor, manejable gerencialmente y/o lo que sería ideal lograr que los diferenciales  $A_{55} \equiv 0$  y  $\Delta_{60} \equiv 0$  de manera bastante estable, se llevó a cabo el siguiente análisis de sensibilidad:

<sup>49</sup> Valor en Riesgo (Cola derecha)  $Prob(OA \geq q) = 5\%$   $1 - F(q) = 5\% \Rightarrow q = F_{(95\%)}^{-1}$   
OA: Obligación Actuarial



	(0.2)	(0.3)	(0.4)	(0.5)	(0.6)	(0.7)
Tasa de contribución (0.09)	8,194,002,493.47	4,875,168,646.40	3,886,418,221.55	396,431,896.40	2,852,116,411.26	4,381,254,373.94
Tasa de contribución (0.10)	4,888,654,000.83	3,191,733,404.34	3,881,320,388.77	24,781,013,914.42	4,416,512,240.33	2,752,138,181.07
Tasa de contribución (0.11)	1,131,161,811.26	3,391,486,388.01	4,381,649,981.09	6,777,886,393.90	6,637,388,643.46	11,371,161,306.00
Tasa de contribución (0.12)	1,378,762,111.11	4,816,086,017.70	2,208,187,307.44	10,430,616,654.41	11,887,478,699.17	14,096,018,881.03
Tasa de contribución (0.13)	1,731,234,846.66	2,817,461,307.00	11,215,016,750.17	13,326,716,810.05	15,024,271,511.26	12,516,466,229.46
Tasa de contribución (0.14)	8,565,189,571.82	11,374,361,579.50	1,639,664,781.41	1,639,664,781.41	18,893,16,840.73	20,315,561,887.83
Tasa de contribución (0.15)	10,895,482,317.80	14,878,897,178.23	16,941,348,747.26	19,634,815,698.34	22,961,500,656.23	23,888,685,671.49
Tasa de contribución (0.15)	13,770,898,993.53	17,671,988,360.46	20,128,382,511.60	23,809,890,468.48	24,833,131,101.98	27,341,298,911.23

Tabla 44. Analisis de sensibilidad del diferencial consolidado. Personal masculino

De la tabla anterior, se observa, claramente, que si el plan cambia en los supuestos actuariales las dos variables de decisión, tasa de interés y tasa de contribución a valores cercanos al entorno ( $i, c$ ),  $i=9\%$ ,  $c=9\%$ , se genera un superávit por 896,43 M\$. ceteris paribus el resto de las variables.

Es decir, para que el plan fuese viable y por ende solvente, la tasa de interés debería estar por el entorno del 9% y el nivel de contribución mensual por el orden del 9%. Lo anterior permitiría redefinir unos supuestos que permitirían poner en vigencia el plan sin mayores problemas financieros.

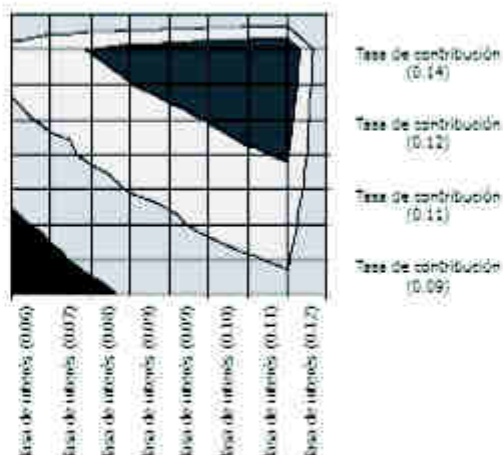


Gráfico 101. Contorno de la superficie diferencial generada por la tasa de interés y la tasa de contribución. Personal masculino

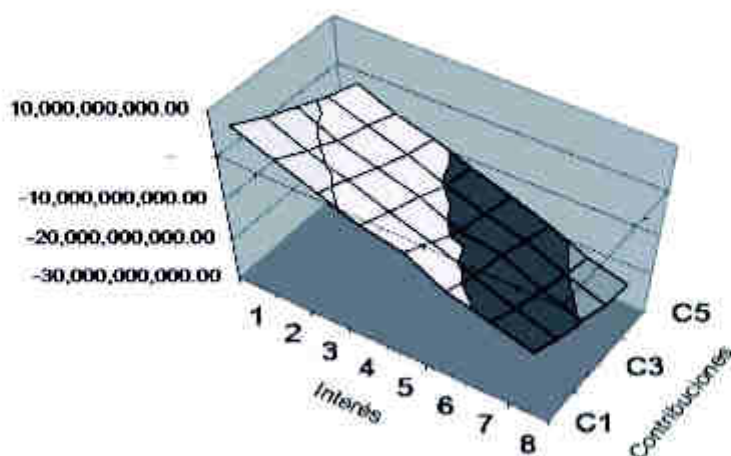


Gráfico 102: Superficie del diferencial en función de la tasa de interés y la tasa de contribución. Personal masculino

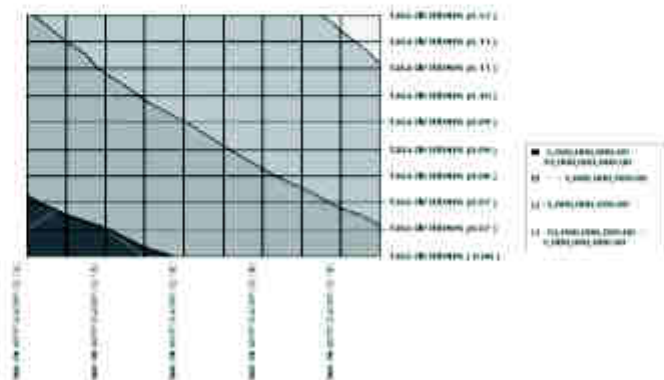
De las gráficas también se observan las relaciones de carácter no lineal que existe entre el diferencial y las tasas de interés y contribución, así como aquella región de solvencia, en términos de del par  $(i, C)$  que permitirían la viabilidad del plan, ceteris paribus el resto de las variables, condicionado al set de supuestos e hipótesis actuariales adoptados.

Para el caso del personal femenino, efectuando el mismo tipo de análisis, se encontró lo siguiente:

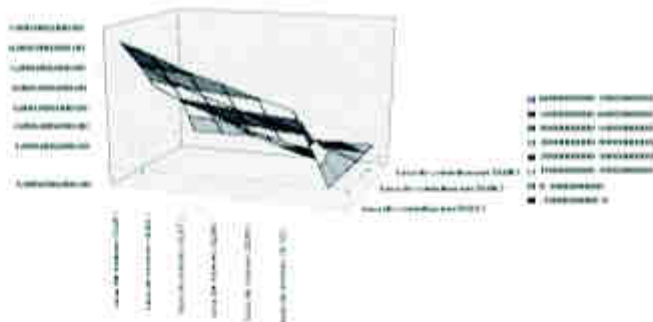
	10.0%	10.5%	11.0%	11.5%	12.0%	12.5%	13.0%	13.5%	14.0%	14.5%
Tasa de interés (0.0)	747,020,752.00	6,722,962,022.00	5,988,914,436.00	5,245,794,640.00	4,492,612,128.00	3,729,372,128.00	2,956,072,128.00	2,172,702,128.00	1,379,272,128.00	565,702,128.00
Tasa de interés (0.07)	6,732,962,022.00	5,988,914,436.00	5,245,794,640.00	4,492,612,128.00	3,729,372,128.00	2,956,072,128.00	2,172,702,128.00	1,379,272,128.00	565,702,128.00	-247,702,128.00
Tasa de interés (0.05)	5,988,914,436.00	5,245,794,640.00	4,492,612,128.00	3,729,372,128.00	2,956,072,128.00	2,172,702,128.00	1,379,272,128.00	565,702,128.00	-247,702,128.00	-1,047,702,128.00
Tasa de interés (0.03)	5,245,794,640.00	4,492,612,128.00	3,729,372,128.00	2,956,072,128.00	2,172,702,128.00	1,379,272,128.00	565,702,128.00	-247,702,128.00	-1,047,702,128.00	-2,047,702,128.00
Tasa de interés (0.01)	4,492,612,128.00	3,729,372,128.00	2,956,072,128.00	2,172,702,128.00	1,379,272,128.00	565,702,128.00	-247,702,128.00	-1,047,702,128.00	-2,047,702,128.00	-3,047,702,128.00
Tasa de interés (0.00)	3,729,372,128.00	2,956,072,128.00	2,172,702,128.00	1,379,272,128.00	565,702,128.00	-247,702,128.00	-1,047,702,128.00	-2,047,702,128.00	-3,047,702,128.00	-4,047,702,128.00
Tasa de interés (0.07)	2,956,072,128.00	2,172,702,128.00	1,379,272,128.00	565,702,128.00	-247,702,128.00	-1,047,702,128.00	-2,047,702,128.00	-3,047,702,128.00	-4,047,702,128.00	-5,047,702,128.00
Tasa de interés (0.05)	2,172,702,128.00	1,379,272,128.00	565,702,128.00	-247,702,128.00	-1,047,702,128.00	-2,047,702,128.00	-3,047,702,128.00	-4,047,702,128.00	-5,047,702,128.00	-6,047,702,128.00
Tasa de interés (0.03)	1,379,272,128.00	565,702,128.00	-247,702,128.00	-1,047,702,128.00	-2,047,702,128.00	-3,047,702,128.00	-4,047,702,128.00	-5,047,702,128.00	-6,047,702,128.00	-7,047,702,128.00
Tasa de interés (0.01)	565,702,128.00	-247,702,128.00	-1,047,702,128.00	-2,047,702,128.00	-3,047,702,128.00	-4,047,702,128.00	-5,047,702,128.00	-6,047,702,128.00	-7,047,702,128.00	-8,047,702,128.00
Tasa de interés (0.00)	-247,702,128.00	-1,047,702,128.00	-2,047,702,128.00	-3,047,702,128.00	-4,047,702,128.00	-5,047,702,128.00	-6,047,702,128.00	-7,047,702,128.00	-8,047,702,128.00	-9,047,702,128.00

Tabla 45. Análisis de sensibilidad del diferencial consolidado. Personal femenino

En este caso se observa, que desde un 10% en la tasa de interés y un 15% en la tasa de contribución el diferencial  $\Delta_{35}$  tiende a ser pequeño <sup>50</sup> e inclusive para tasas de interés superiores a 10% se obtienen superávits importantes:



**Gráfico 103: Contorno de la superficie diferencial generada por la tasa de interés y la tasa de contribución. Personal femenino**



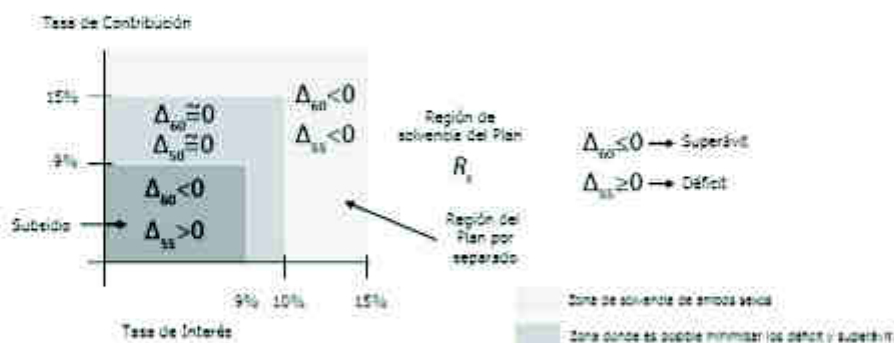
**Gráfico 104: Superficie del diferencial en función de la tasa de interés y la tasa de contribución. Personal femenino**

En general pudiéramos asegurar que si **interceptamos las dos regiones**<sup>51</sup> donde hay superávit en este análisis de sensibilidad, se garantizaría, en cierta manera, la viabilidad económica del plan y por ende su solvencia.

<sup>50</sup> Órdenes de magnitud de las variables en MS.

<sup>51</sup> Tanto la región referida a los hombres como aquella referida a las mujeres.

Gráficamente podemos visualizarlo de esta manera:



**Gráfico 105. Región de solvencia del plan para ambos sexos**

$$R_s^{Mas} = \{(i, c) \ 9\% \leq i, 9\% \leq c\}$$

$$R_s^{Fem} = \{(i, c) \ 10\% \leq i, 10\% \leq c\}$$

$$R_s^{Fvul} = R_s^{Mas} \cap R_s^{Fem} = R_s^{Fem}$$

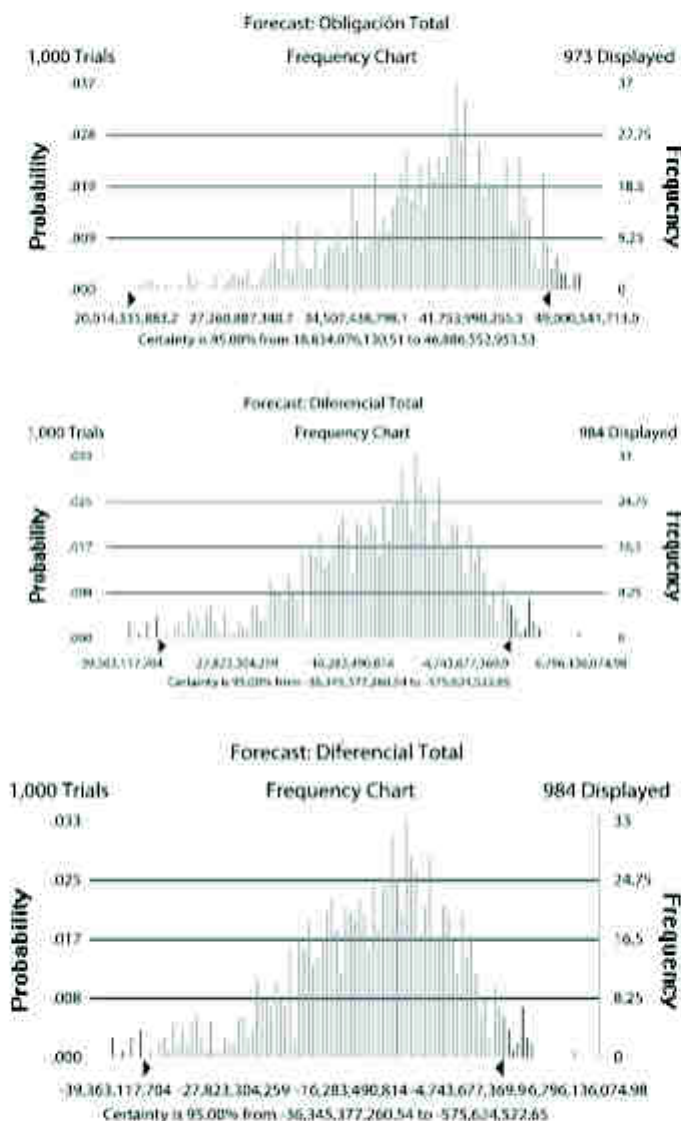
La idea es, generar un diferencial nulo o muy pequeño  $\Delta_j \rightarrow 0$  en las edades de jubilación o retiro  $j=55, 60$  años (mujeres y hombres) en la zona o región de solvencia de ambos sexos. En otras palabras, tratar de equilibrar las obligaciones actuariales versus los niveles de contribución con el fin de ir llevando el diferencial a valores nulos muy cercanos a cero. Es importante destacar que de no hacer esto los hombres estarían subsidiando a las mujeres dado el superávit tan grande de los hombres comparado con el de las mujeres. En los planes estatales de la Seguridad Social este subsidio interpoblaciones es deseable<sup>22</sup>, basado en el principio de solidaridad. Lo anterior, trae como consecuencia que parte de las contribuciones o excedentes de la población superávitaria se transfieran a la deficitaria.

A continuación se podrán visualizar las distribuciones empíricas resultantes en términos de las densidades tanto para el personal masculino como femenino.

<sup>22</sup> Esto no es cierto en los planes de contribución definida pura o capitalización individual donde los saldos acumulados superavitarios no serían susceptibles de transferir a los que tienen un déficit.

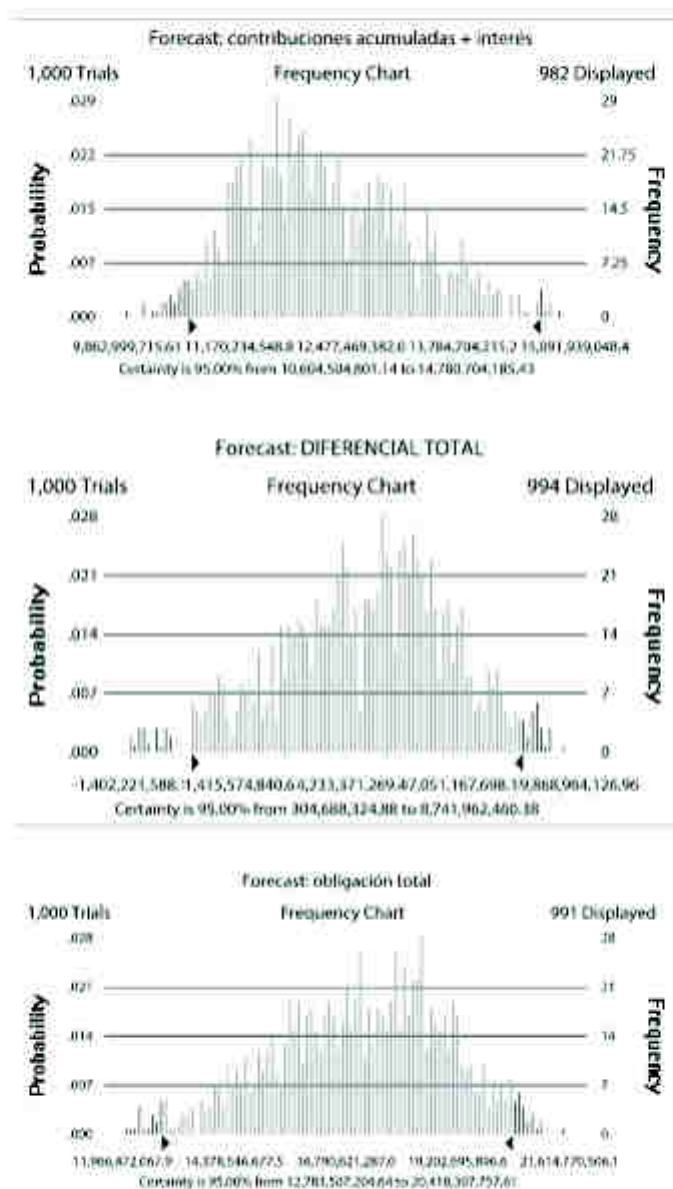


2.4. Distribuciones empíricas del personal, Nivel consolidado <sup>23</sup>



**Gráfico 106. Distribuciones empíricas del personal masculino. Nivel consolidado**

<sup>23</sup> Escenario Base: supuestos e hipótesis actuariales iniciales.



**Gráfico 107. Distribuciones empíricas del personal femenino.  
Nivel consolidado <sup>54</sup>**

<sup>54</sup> Escenario Base: supuestos e hipótesis actuariales iniciales

### 2.5. Distribuciones empíricas del personal. Nivel individual

A nivel individual, se escogieron algunos casos de la población, clasificándolos como Joven (J), Intermedio (I) y Maduro (M), de acuerdo con los siguientes criterios de edad y salario inicial de los trabajadores. Se encontraron los siguientes perfiles de costos, para el mismo escenario que a nivel consolidado.

Nro.	Caso	Sexo	Edad (años)	Salario Inicial (US\$)
1	53	F	51	1.690.000,00
2	19	F	27	600.000,00
3	36	F	32	2.520.000,00
4	122	M	27	700.000,00
5	9	M	43	1.930.000,00
6	26	M	53	3.806.000,00

Tabla 46. Descripción demográfica de los Casos Individuales <sup>55</sup>

	Valores Esperados (M\$.)					
	Mas			Fem		
	J (J)	I (I)	M (M)	J (J)	I (I)	M (M)
1) Obligación Actuarial	170,60	182,03	202,46	294,70	569,04	17,26
2) Contribuciones Acumuladas + Interés	374,98	169,72	67,94	251,19	459,03	12,19
3) Diferencial	-204,38	12,30	134,52	43,50	110,00	4,82

Tabla 47. Distribuciones empíricas del personal a nivel individual.  
Perfiles de costos

Los valores esperados de las obligaciones actuariales para los hombres varían desde 170,60 M\$. hasta los 202,46 M\$. para el caso maduro. En el caso de las mujeres, los valores equivalentes van desde 17,26 M\$. hasta los 569,04 M\$. Es importante ver en estos perfiles como a medida que la edad del empleado esta más cercana a la edad de jubilación el déficit es en términos relativos mayor ( $DTR_i$ ).

$DTR_1 = 27,92\%$  ,  $DTR_2 = 14,76\%$  ,  $DTR_3$  para las mujeres

$DTR_1 = -119,80\%$  ,  $DTR_2 = 6,75\%$  ,  $DTR_3 = 66,44\%$  para los hombres

<sup>55</sup> Todos los casos tanto masculinos como femeninos fueron etiquetados y ordenados de manera tal que cada uno de ellos pertenecen a la muestra de los datos procesados y se corresponden con los registros correspondientes del modelo.  $DTR_i$ : Déficit en términos relativos de los hombres y de las mujeres expresados como el cociente del diferencial entre la obligación.

2.6. Análisis comparativo de las funciones de probabilidad empíricas para cada caso

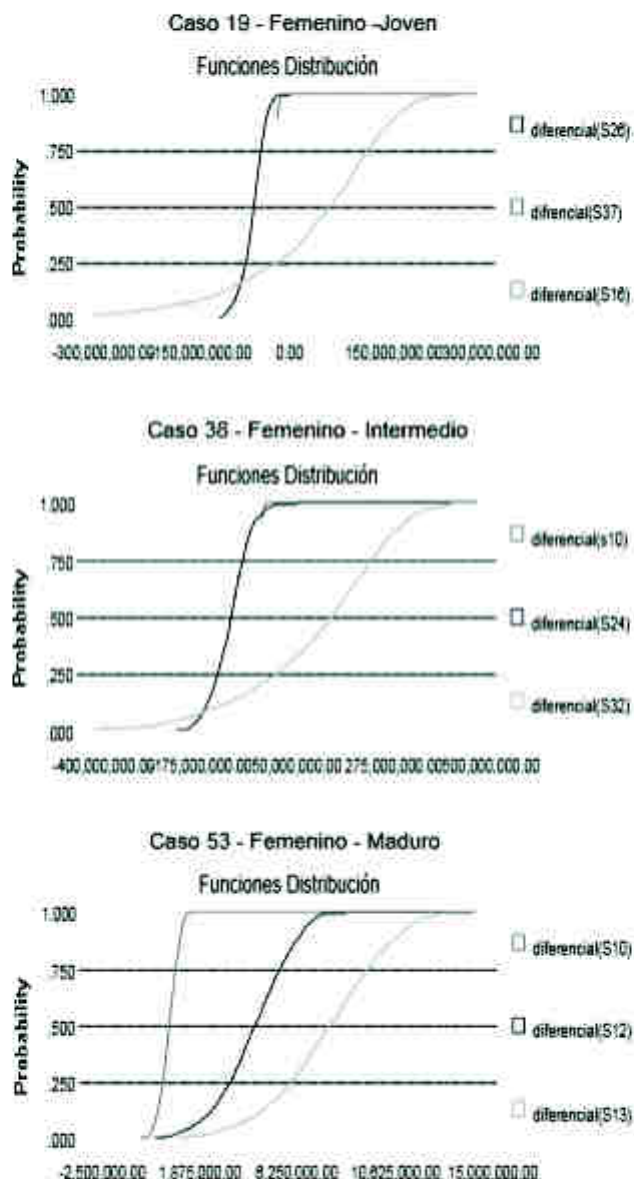
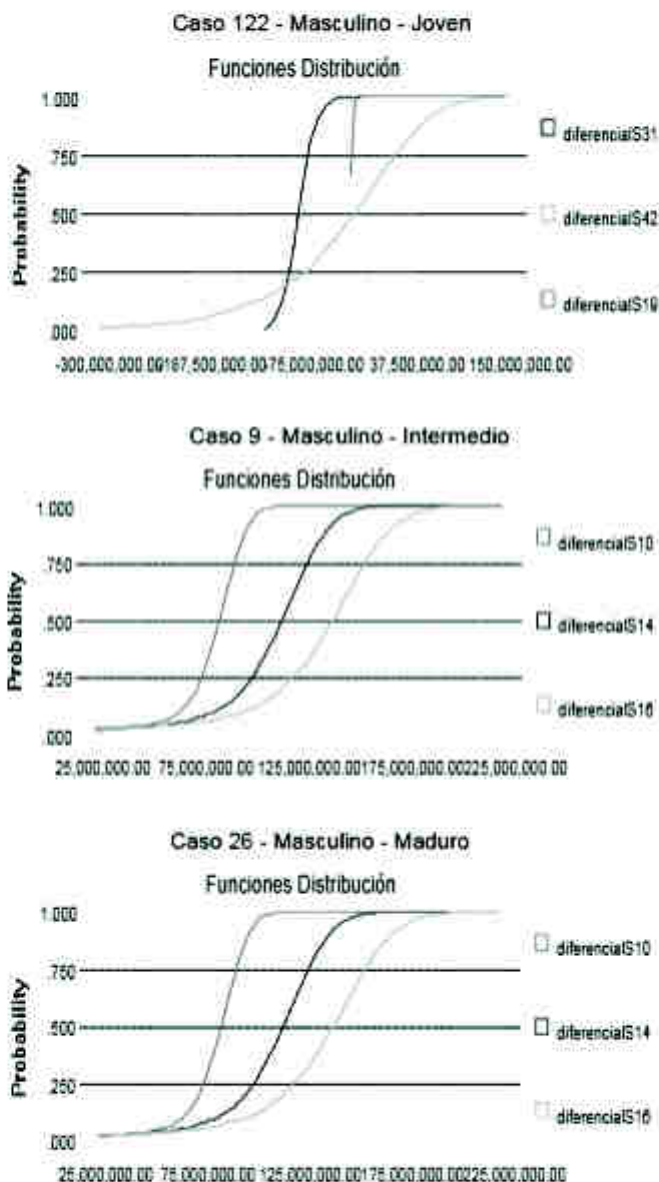


Gráfico 108. Análisis empírico de las funciones de probabilidad empíricas.  
Personal femenino



En estos gráficos, se puede visualizar claramente como evolucionan o cambian las densidades de las obligaciones y de las contribuciones en base a los perfiles de los empleados.



**Gráfico 109. Análisis empírico de las funciones de probabilidad empíricas. Personal masculino**

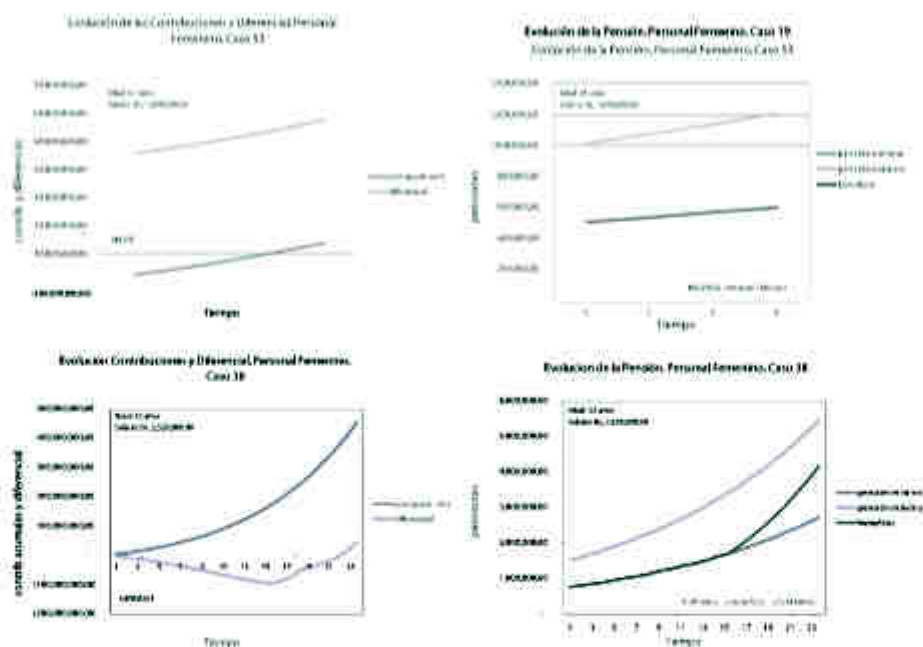
En el caso masculino maduro, se observa claramente la distancia de las densidades entre la obligación total y las contribuciones.

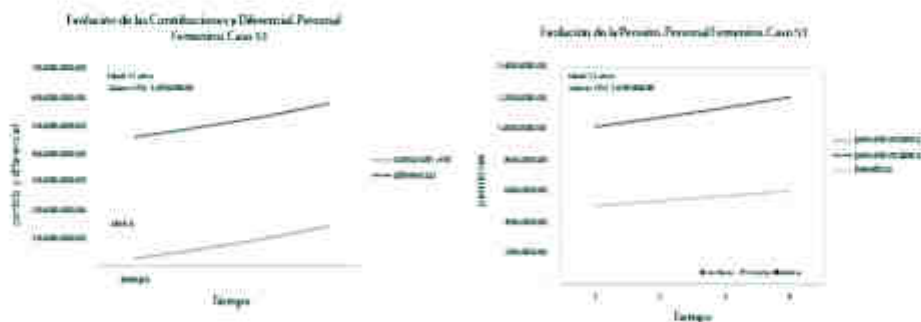
Se hace obvio que a mayor edad mayor va a ser el déficit debido a que el empleado tiene menos tiempo de contribuir al Fondo y de capitalizar el interés derivado de las inversiones.

En general, pudiéramos afirmar que si a un empleado le quedan 5 años para su jubilación inevitablemente los niveles de contribución deberían subir sustancialmente para poder minimizar el déficit, de lo contrario no sería posible otorgar una jubilación.

Para mayor detalle se muestra a continuación como varía la pensión en el tiempo para cada uno de los casos individuales femeninos, así como los niveles de la pensión alcanzados en el momento de la edad de jubilación (55 años).

**Gráfico 110: Análisis comparativo de casos individuales. Personal femenino**

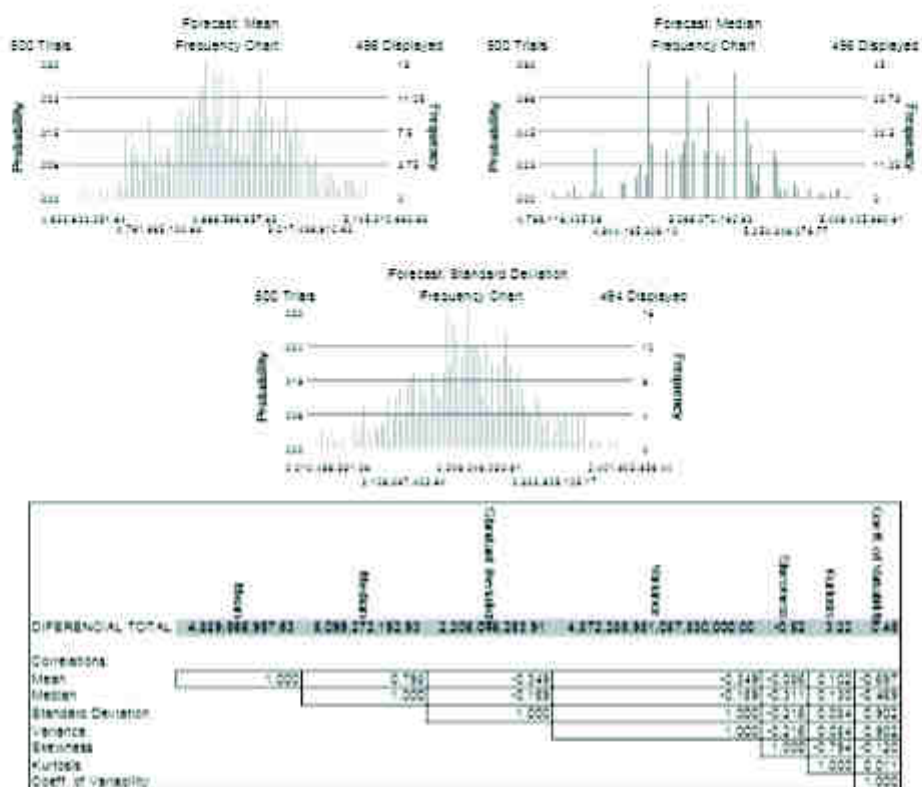




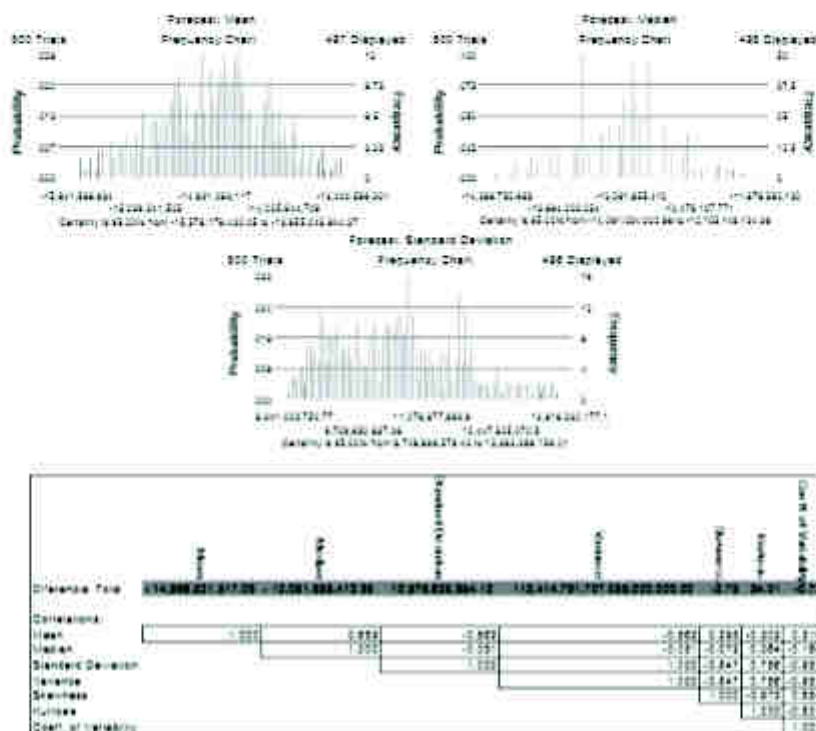
*2.7. Estimaciones Bootstrapp de los valores esperados, mediana y desviación estándar del diferencial*

A fin de conocer la robustez de los estimados y su estabilidad, se llevó a cabo el procedimiento Bootstrapping con 500 muestras simulando 500 iteraciones en cada una de las muestras, para todas las variables de interés (total 250.000 iteraciones).

Como resultado de la aplicación de este procedimiento se obtuvieron los siguientes estimados Bootstrapp tanto para la media o valor esperado, como para la mediana y la desviación estándar; así como las correlaciones lineales entre cada uno de los estadísticos descriptivos.



**Gráfico 111. Estimaciones Bootstrapp de todos los estadísticos descriptivos del diferencial. N= 500 muestras. Personal Femenino**



**Gráfico 112. Estimaciones Bootstrapp de todos los estadísticos descriptivos del diferencial. N= 500 muestras. Personal Masculino**

De las tablas anteriores, cuando se comparan estos resultados con los de las Simulaciones Monte Carlo sin aplicar Bootstrapping se obtiene:

Diferencial	Estadístico	Simulación Monte Carlo		Simulación Monte Carlo con Bootstrapping	
		Nro. Iteraciones: 500		Nro. Iteraciones: 500	
		M	F	M	F
Media	-14.06	4.76	-14.56	4.88	
Mediana	-12.56	5.01	-13.08	5.09	
Desv. Estándar	9.09	2.22	10.57	2.20	

Cifras en M\$.

**Tabla 48. Análisis comparativo del diferencial**<sup>56</sup>

<sup>56</sup> Referidos al escenario base o de arranque.

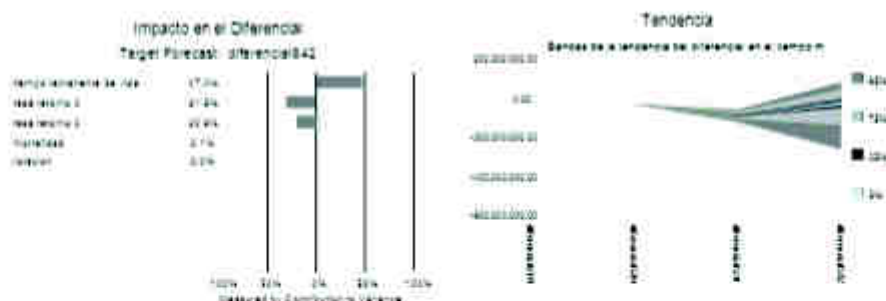


Como podemos ver, las diferencias de valor son razonablemente buenas, no observándose grandes diferencias entre los pronósticos, lo que nos indica que los estimados son robustos y relativamente estables.

Es también importante señalar que los mismos supuestos han tenido dos efectos distintos en las obligaciones actuariales y en los diferenciales. En el caso de los hombres al ser los diferenciales negativos, tenemos un superávit que fácilmente absorbería parte del déficit de las mujeres. En cierta manera esto confirma lo que ocurre con la mayoría de los planes de pensión de beneficio definido, donde una parte de la población tiende a subsidiar a la otra dependiendo de que tan lejos o cercanos se encuentren a la edad normal de jubilación.

### 3. Análisis del impacto de las variables de decisión y supuestos actuariales en el valor estimado del diferencial<sup>57</sup> para algunos casos individuales

Con el objeto de conocer que variables impactan con mayor grado a las estimaciones del diferencial al momento de la jubilación, se obtuvieron los siguientes perfiles.



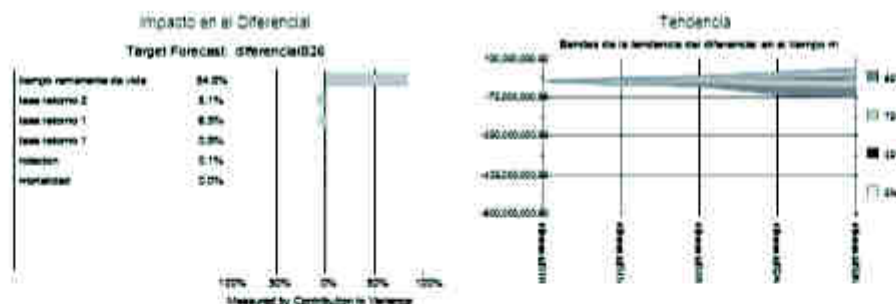
**Gráfico 113. Análisis del impacto de las variables de decisión y supuestos actuariales en el valor estimado del diferencial. Caso joven (caso 122). Sexo masculino**

En el caso Nro. 122, de los gráficos se desprende que la variable de mayor impacto en el diferencial a la edad de jubilación (60 años de edad) es el

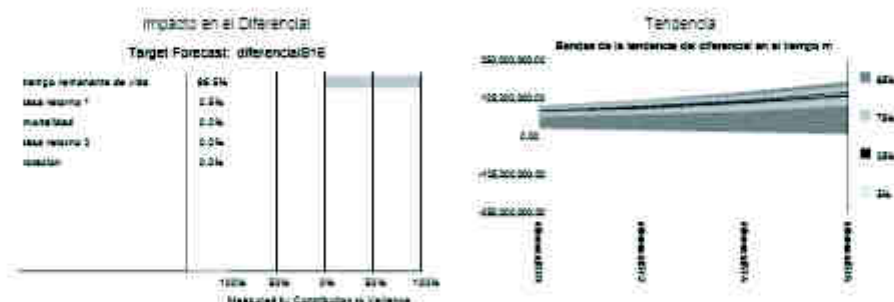
<sup>57</sup> En términos de la contribución de cada variable a la varianza explicada o nivel de variabilidad del diferencial.

tiempo remanente de vida, que explica casi en su totalidad la varianza explicada con un 47.40%. Contraponiéndose al tiempo remanente de vida, las tasas de retorno o rendimientos de los instrumentos financieros; en particular, el primer instrumento que es más volátil explica en buena parte la variabilidad del diferencial en 31.8% y el primero con un -20.9%.

De todo este análisis probablemente podemos concluir que las dos o tres **variables claves y críticas que explican de manera importante** la varianza del diferencial son básicamente el tiempo de vida remanente y las tasas asociadas a los retornos o rendimientos de las inversiones del Fondo, la mortalidad pre-jubilación y rotación, sin dejar de ser importantes, obviamente tienen poco impacto en la variabilidad del diferencial al momento de la jubilación. Esto último quizás evidencia la importancia de utilizar modelos de riesgo apropiados para la supervivencia de distintas poblaciones una vez alcanzada la edad de jubilación. Pues el utilizar tablas fijas para determinar la expectativa de vida se pudiera estar sub-estimando el número de pagos que finalmente se terminan pagando a los jubilados si no se actualizan frecuentemente.



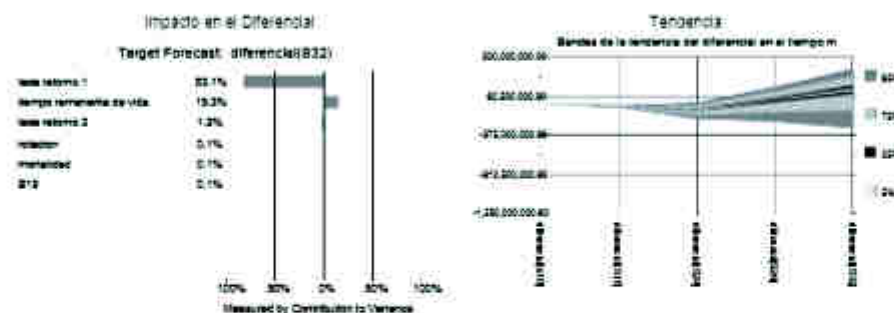
**Gráfico 114. Análisis del impacto de las variables de decisión y supuestos actuariales en el valor estimado del diferencial. Caso intermedio (caso 9). Sexo masculino**



**Gráfico 115. Análisis del impacto de las variables de decisión y supuestos actuariales en el valor estimado del diferencial. Caso maduro (caso 26). Sexo masculino**

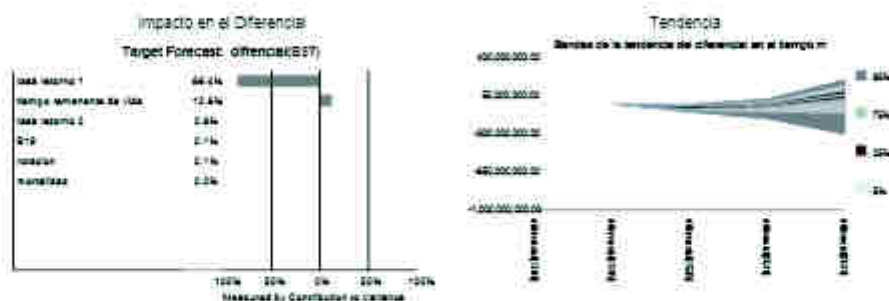
Cuando repetimos el análisis para un caso intermedio de las mujeres, se obtiene que la variable de mayor impacto en la variabilidad del diferencial es el rendimiento o tasa de retorno 1 con un + 83.1% y en contraposición un 15.3% del tiempo remanente de vida.

La razón de este cambio en la contribución de varianza explicada es que el tiempo en el caso intermedio de las mujeres se acorta, dado que se jubilan cinco (05) años antes (Edad normal de jubilación: 55 años de edad) y adicionalmente en este caso intermedio la edad de arranque en el plan es mayor.

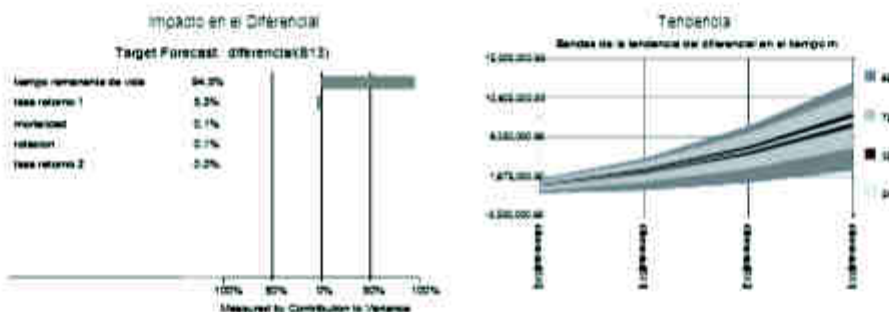


**Gráfico 116. Análisis del impacto de las variables de decisión y supuestos actuariales en el valor estimado del diferencial. Caso intermedio (caso 38). Sexo femenino**





**Gráfico 117.** Análisis del impacto de las variables de decisión y supuestos actuariales en el valor estimado del diferencial. Caso joven (caso 19). Sexo femenino



**Gráfico 118.** Análisis del impacto de las variables de decisión y supuestos actuariales en el valor estimado del diferencial. Caso maduro (caso 53). Sexo femenino

Por último, como resumen de las distintas contribuciones de cada variable a la variancia explicada del diferencial a la edad de jubilación, se encontró lo siguiente:

Valores porcentuales (%)								
Variables de mayor impacto en la variabilidad del diferencial								
Nro.	Sexo	Caso	Edad	TRV	R2	R1	MORT	ROT
1	Femenino	53	51	94,50	0,00	5,30	0,10	0,10
2	Femenino	19	27	12,60	0,80	86,40	0,10	0,10
3	Femenino	38	32	15,30	1,20	83,10	0,10	0,10
4	Masculino	122	27	47,40	31,50	20,90	0,10	0,00
5	Masculino	9	43	84,80	8,10	6,50	0,00	0,10
6	Masculino	26	53	99,50	0,00	0,50	0,00	0,00

TRV: Tiempo remanente de vida

R2: Rendimiento 2

R1: Rendimiento 1

IN: tasa de interés

MORT: Mortalidad Pre-Jubilación

ROT: Rotación del personal

**Tabla 49. Variables de mayor impacto en la variabilidad del diferencial**

#### 4. Simulación estocástica dinámica

Por último, se lleva a cabo una simulación estocástica dinámica, partiendo del análisis de sensibilidad MonteCarlo, para conocer las convergencias de cada una de las variables de decisión que mejor definen la viabilidad o solvencia del Fondo. Como ya se mencionó, en el capítulo anterior, en este tipo de simulación no se partirá del escenario base conservador, sino de otro mejorado que caiga dentro de la región de solvencia determinada anteriormente, donde sabemos de antemano que para ciertos valores de los componentes del vector  $(i, c)$ , tasa de interés y tasa de contribución el  $\Delta_{60}$  y  $\Delta_{55}$ , ambos tienden a ser nulos, generando superávits o déficits muy pequeños <sup>53</sup>.

También vimos, sin embargo, que el personal masculino de alguna manera subsidia al femenino. El grupo de hombres para el mismo escenario genera un  $E(\Delta_{55}) > 0$  consolidado y el grupo de las mujeres un  $E(\Delta_{60}) > 0$ , ambos sustancialmente diferentes. La idea, en este apartado, es justamente restringir los valores esperados de los diferenciales, minimizando al mismo tiempo la obligación actuarial, bajo un grupo de restricciones en los supuestos que permitan el logro del objetivo final que es evitar, en la medida de lo posible,

<sup>53</sup> En órdenes de magnitud. Diferencias de +/- 10 M\$. en un fondo de pensiones de este tipo pudiera ser considerado como nulo, respecto de la cuantía

diferenciales grandes que inviabilicen el plan o que se subsidien de una manera importante las obligaciones de un grupo respecto del otro.

Un poco para entender esta parte de la investigación, se seguirá el siguiente esquema o flujo de actividades de simulación:

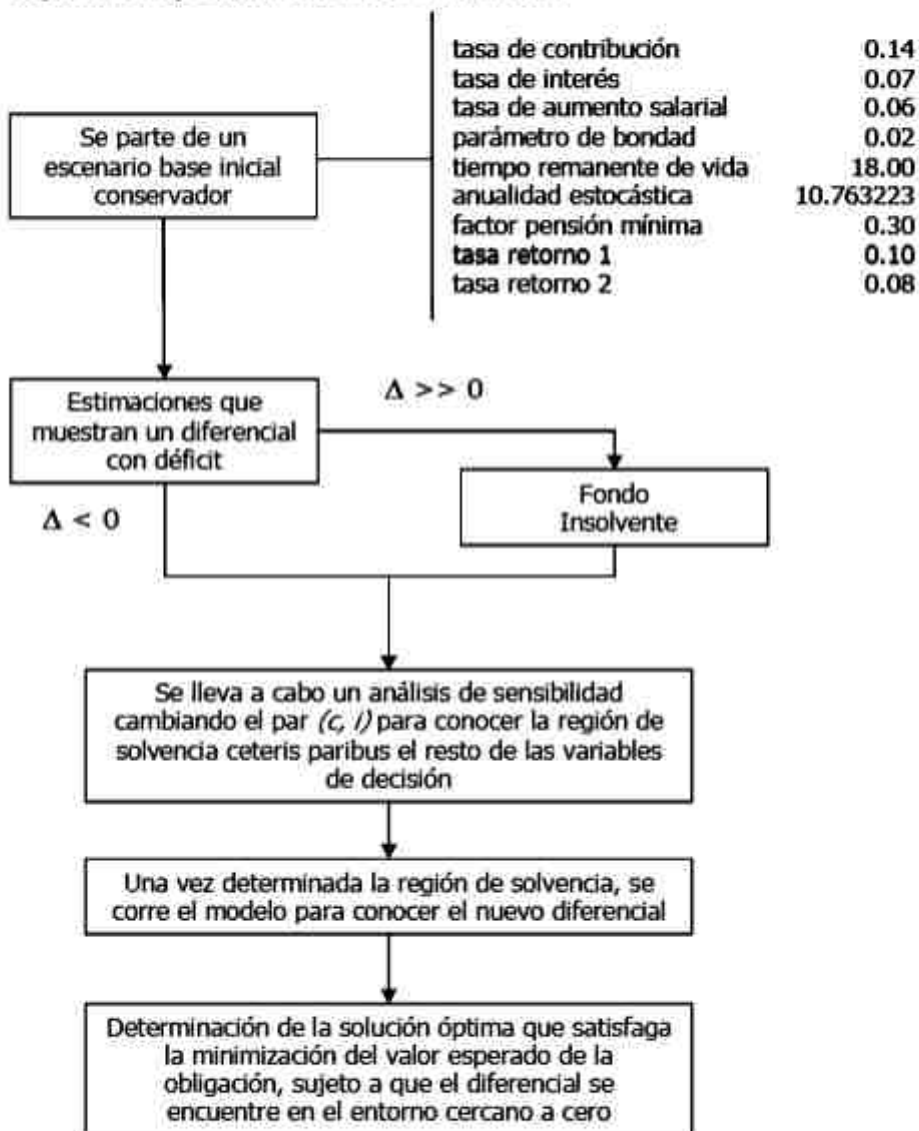


Gráfico 119. Flujo de Actividades de Simulación

**ESCENARIO BASE CONSERVADOR:**

Hace referencia a aquellos valores de las variables de decisión, que de alguna manera son de fácil aceptación por las partes (trabajador y empresa) involucradas en el manejo financiero de un plan de pensiones. Aunque, como vamos a demostrar, no sea financieramente viable por la insuficiencia de las contribuciones y las posibilidades reales de capitalizar los activos a tasas relativamente altas.

Para el grupo femenino, se propuso el siguiente modelo:

$$\underset{d/}{\text{MIN}}\{E(OA)\}$$

Sujeto al siguiente bloque de restricciones:

$$-10^6 \leq E(\Delta_{55}) \leq 10^6$$

tasa de interes - tasa de aumento salarial  $\leq$  .04

tasa de interes - tasa de aumento salarial  $\geq$  .01

parametro de bondad = .02

factor pension minima  $\leq$  .35

factor pension minima  $\geq$  0.15

nivel participación 1  $\leq$  .35

nivel participación 1  $\geq$  .15

tasa de contribucion  $\leq$  .14

tasa de contribucion  $\geq$  .10

tasa de interes  $\leq$  .10

tasa de interes  $\geq$  .07

tasa de aumento salarial  $\leq$  .10

tasa de aumento salarial  $\geq$  .06

Minimización del Valor esperado de la Obligación Actuarial

Acotamiento del Valor esperado del Diferencial en la edad de jubilación

Rango de valores deseables del resto de las variables de decisión; así como relaciones críticas entre ellas

Los resultados del modelo fueron los siguientes:

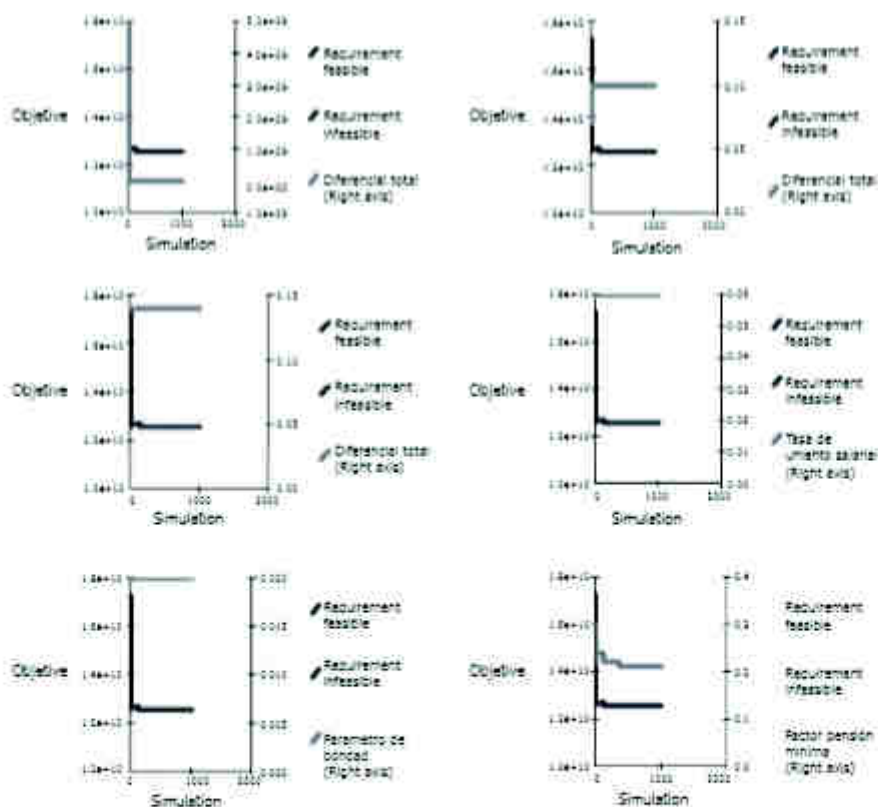
La solución óptima que acota el diferencial en valor esperado entre +/- 1 M\$; minimizando la obligación o pasivo actuarial fue la obtenida en la iteración 367 tal como muestra la tabla:

Simulación	MINIMOS		REQUISITOS FINANCIEROS		tasa de contribución	tasa de interés	TASA DE AUMENTO	parámetro de bono	factor pensión mínima	nivel participación
	Deposito Obligación	rate Min	TOTAL 1000000 <= Mean <= 1000000	<= -1000000						
1	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
2	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
3	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
4	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
5	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
6	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
7	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
8	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
9	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
10	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
11	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
12	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
13	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
14	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
15	1.24E+11	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.247003	
Best: 207	1.26E+10	0.14	0.10	0.06	0.14	0.10	2.00E+01	0.01	0.24801	

**Tabla 50. Determinación de la solución óptima. Minimización de la obligación y acotación del diferencial. Personal femenino. Nivel consolidado**

Lo anterior se logra con una tasa de contribución de 14% y una tasa de interés del 10%. La mínima Obligación Actuarial es por el orden de 1.260,00 M\$. y una tasa de aumento salarial del 6%.

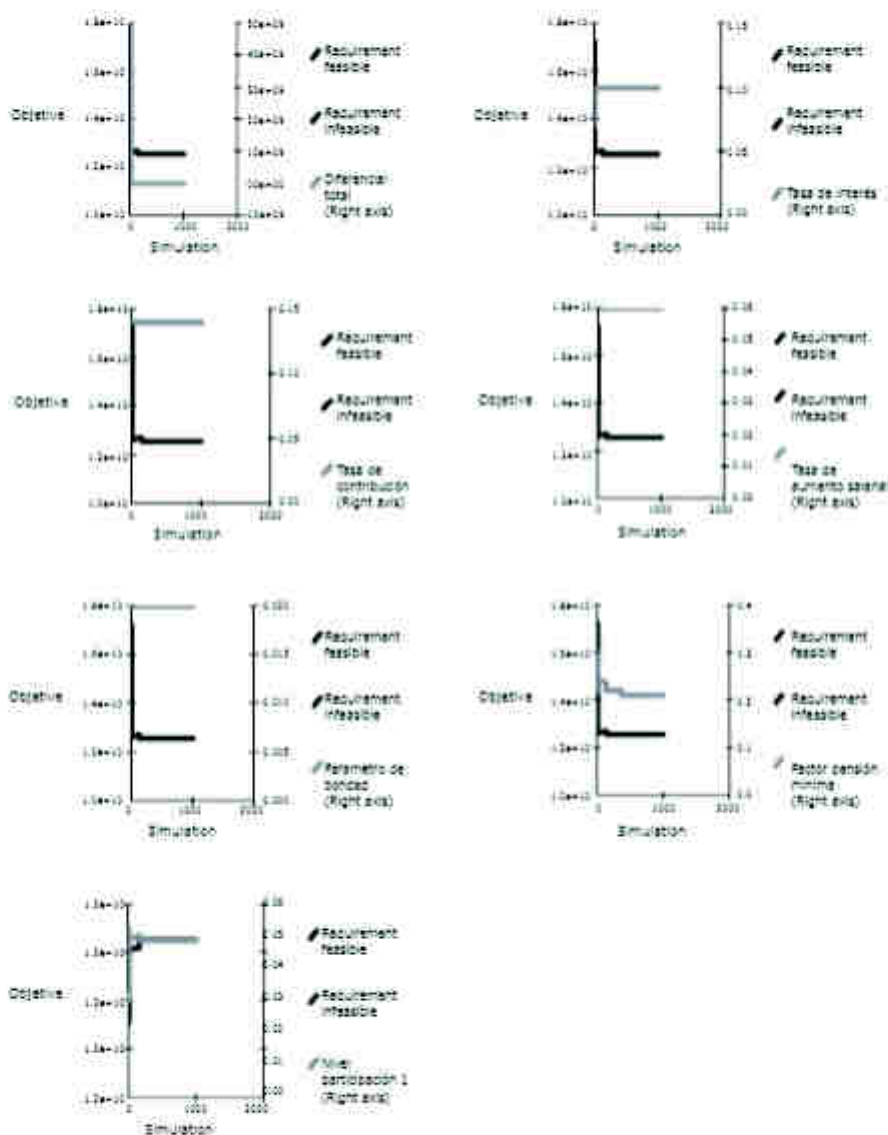
**Gráfico 120. Evolución del diferencial y la obligación en función de las variables de decisión. Minimización de la obligación y acotación del diferencial. Personal femenino.**







**Gráfico 121. Evolución del diferencial y la obligación en función de las variables de decisión. Minimización de la obligación y acotación del diferencial. Personal femenino.**



## Optimization Statistics

Optimization File: UnNamed.opt  
 Total Number of Simulations: 1001  
 Number of Trials per Simulation: 500  
 Confidence Testing is Activated  
 Number of Simulations Run Maximum  
 Number of Trials: 704  
 Number of Simulations Stopped by  
 Precision Control: 0  
 Number of Simulations Stopped by  
 Confidence Testing: 297  
 Neural Network Engaged after  
 simulation: 60  
 Number of Simulations Avoided Due  
 to Neural Network: 58

## \*\*\*\*BEST SOLUTION\*\*\*\*

Values of Variables:  
 tasa de contribución: 0.14  
 tasa de interés: 0.1  
 tasa de aumento salarial: 0.06  
 parametro de bondad: 0.02  
 factor pension/minima: 0.228985932888078  
 nivel participación: 1: 0.324501564886175  
 Objective: contribuciones acumuladas +  
 interés: Mean: 12654111287.2934  
 Requirement Feasible  
 Requirement: DIFERENCIAL TOTAL:  
 -120539.491432534  
 Additional details may be found below...

De igual manera se obtuvieron los siguientes resultados para el personal masculino:

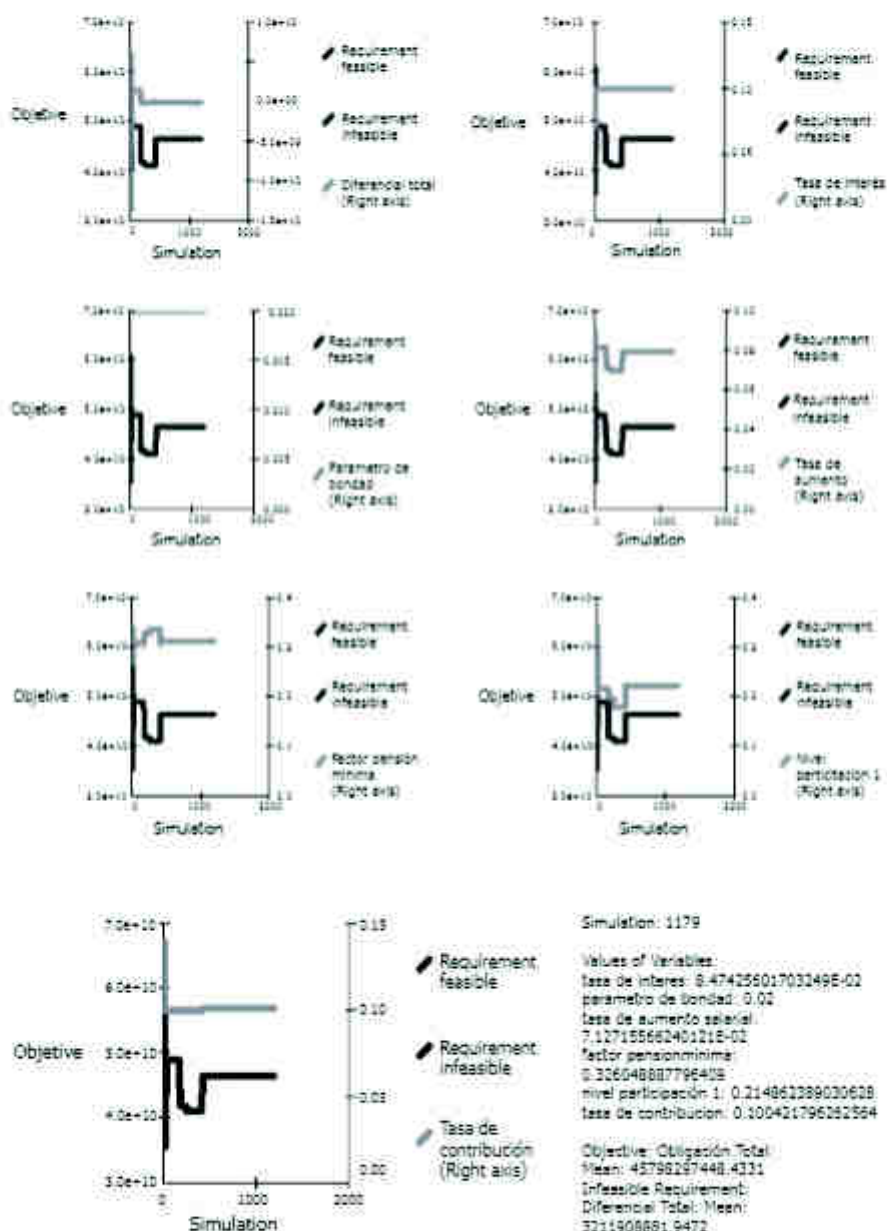
Aunque el diferencial no cae dentro del intervalo requerido +/- 1,0 US\$ y por lo tanto la mejor solución cae fuera, pero muy cercana para los órdenes de magnitud, que representan las obligaciones. La solución óptima ocurre en la iteración 412, generando un diferencial de -3,35 US\$:

Simulation	Mínima Obligación Total/haen	Requirement Diferencial Total: 100000 <= Mean <= 1000000	tasa de interés	parametro de bondad	tasa de aumento salarial	factor pension minima	nivel participación 1	tasa de contribución
1	3.88E+10	<1204000000 - Infeasible	0.07	2.00E-02	0.01E-02	1.00E-01	0.1	0.14
4	5.28E+10	8.9818E+09 - Infeasible	0.1	0.02	0.02E-02	0.29E-01	0.244482	0.100234
7	3.33E+10	<9292000000 - Infeasible	0.1	0.02	7.30E-02	1.67E-01	0.239857	0.1
11	4.10E+10	<1760000000 - Infeasible	0.1	0.02	7.78E-02	1.38E-01	0.297583	0.102954
19	4.90E+10	1.3540E+09 - Infeasible	0.1	0.02	0.17E-02	1.06E-01	0.318819	0.1
189	4.34E+10	5.1879E+08 - Infeasible	0.099997	0.02	0.17E-02	0.09E-01	0.31854	0.100842
187	4.77E+10	<8894000 - Infeasible	0.1	0.02	0.17E-02	0.08E-01	0.318587	0.1
188	4.20E+10	<81787000 - Infeasible	0.1	0.02	7.08E-02	0.28E-01	0.184038	0.1
242	4.12E+10	<22075000 - Infeasible	0.1	0.02	6.97E-02	0.28E-01	0.18	0.1
411	4.94E+10	3.9821E+08 - Infeasible	0.1	0.02	7.88E-02	0.07E-01	0.18	0.100888
Best: 412	4.68E+10	<3303900 - Infeasible	0.099991	0.02	7.92E-02	1.12E-01	0.322916	0.101115

**Gráfico 122. Determinación de la solución óptima. Minimización de la obligación y acotación del diferencial. Personal masculino. Nivel consolidado**



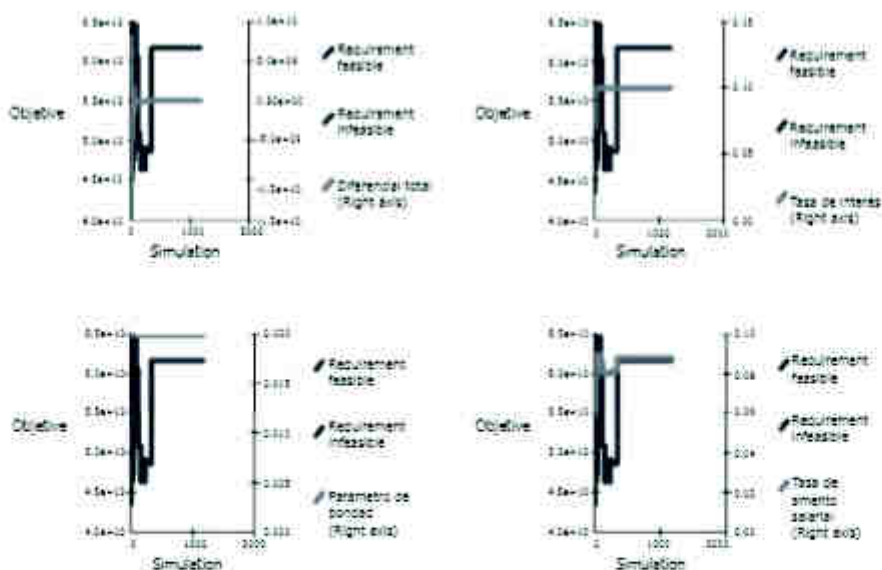
**Gráfico 123. Evolución del diferencial y la obligación en función de las variables de decisión. Minimización de la obligación y acotación del diferencial. Personal masculino.**

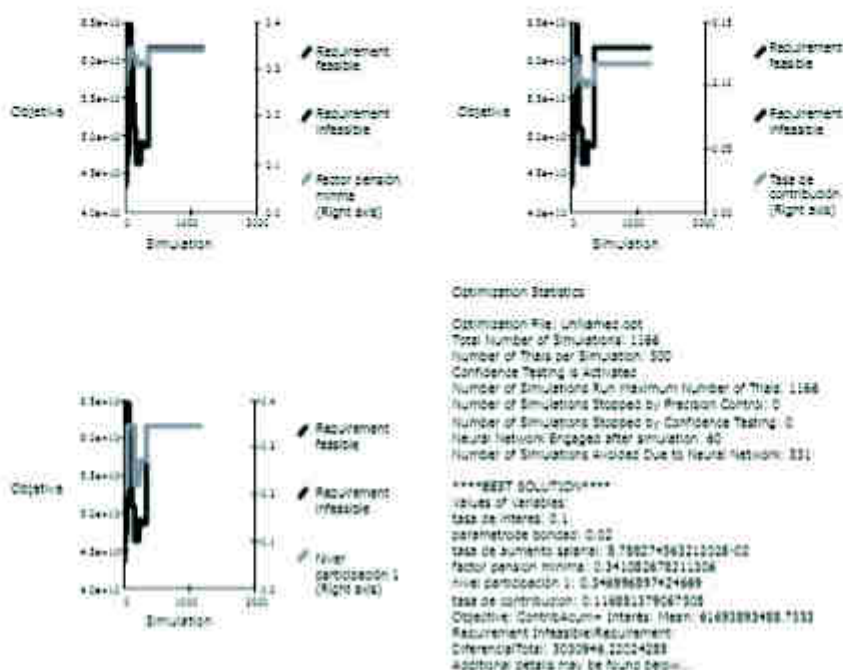


Simulation	Maximize Objective Contrib Acum + Interés Mean	RequirementDiferencial Total- 1000000 <= Mean <= 1000000	tasa de interes	parametru de bondad	tasa de aumento salarial	factor pension minima	nivel participacion 1	tasa de contribucion
1	5.282+10	-14702000000 - Infeasible	0.01	1.208-01	2.002-01	3.002-01	0.1	0.14
4	5.338+10	6.01735+09 - Infeasible	0.1	0.01	9.005-01	3.095-01	0.34403	0.107014
7	4.655+10	-7747600000 - Infeasible	0.1	0.01	7.333-01	2.475-01	0.233037	0.1
11	4.655+10	-2635600000 - Infeasible	0.1	0.01	7.730-01	2.999-01	0.297585	0.109454
20	4.755+10	1.69395+09 - Infeasible	0.1	0.01	8.179-01	3.089-01	0.216819	0.1
40	5.255+10	-1200000000 - Infeasible	0.1	0.01	8.208-01	3.089-01	0.346018	0.1168
50	5.475+10	-230360000 - Infeasible	0.1	0.01	8.508-01	3.445-01	0.347037	0.121017
87	6.058+10	-140820000 - Infeasible	0.1	0.01	8.739-01	3.395-01	0.346624	0.116775
113	5.445+10	-169910000 - Infeasible	0.1	0.01	8.355-01	3.345-01	0.346044	0.108016
117	5.105+10	8.18395+07 - Infeasible	0.1	0.01	8.138-01	3.205-01	0.345472	0.104888
133	6.645+10	-37014000 - Infeasible	0.1	0.01	8.008-01	3.008-01	0.221333	0.1
204	4.915+10	2.88325+07 - Infeasible	0.1	0.01	8.088-01	3.178-01	0.269023	0.104159
345	4.875+10	-20128000 - Infeasible	0.1	0.01	8.138-01	3.118-01	0.274486	0.104951
Best: 341	6.172+10	5.03092+06 - Infeasible	0.1	0.01	8.795-01	3.412-01	0.306697	0.116882

**Gráfico 124. Determinación de la solución óptima. Maximización de las contribuciones y acotación del diferencial. Personal masculino. Nivel consolidado**

**Gráfico 125. Evolución del diferencial y la obligación en función de las variables de decisión. Minimización de la obligación y acotación del diferencial. Personal masculino.**





Por último es importante comparar los resultados finales de la simulación dinámica estocástica para los dos escenarios evaluados tanto para los hombres como para las mujeres.

Análisis Comparativo de las Soluciones Óptimas				
Objetivo (L)	Hombres		Mujeres	
	Minimización Obligación	Maximización Contribuciones	Minimización Obligación	Maximización Contribuciones
<b>Requisito (R)</b>	$E(\Delta_{\mu}) \leq 1$	$E(\Delta_{\mu}) \leq 1$	$E(\Delta_{\mu}) \leq 1$	$E(\Delta_{\mu}) \leq 1$
Obligación Actuarial	46.92	61.69	12.37	12.69
Tasa de Contribución	10.11%	11.69	14.00%	14.00%
Tasa de Interés	9.99%	10.00	10.00%	10.00%
Tasa de Aumento Salarial	7.92%	8.79	8.00%	8.00%
Parámetro de Bonoac	2.00%	2.00	2.00%	2.00%
Factor Pensión Mínima	31.18%	34.11	21.07%	22.90%
Nivel Participación 1	22.28%	24.70	24.90%	32.43%

Oficina de Estadística

Tabla 52. Análisis comparativo de las soluciones óptimas <sup>29</sup>

<sup>29</sup> Aún cuando la iteración 341 el diferencial es 5.03 MS, este es un nivel manejable y es despreciable en términos de los órdenes de magnitud que se manejan en este tipo de fondos.

La tabla anterior, nos indica claramente para cada uno de los criterios optimizantes cuales deberían ser los valores que adopten las variables, para garantizar un valor esperado del diferencial en valor absoluto muy cercano a una cota pequeña o baja.

Una de las variables que casi permanece constante en los dos criterios es la tasa de interés en 10%. El parámetro de bondad del plan por diseño es constante a lo largo del tiempo.

También es importante señalar que minimizar la obligación actuarial obviamente no es lo mismo que maximizar las contribuciones, manteniendo en ambos casos como requerimiento fundamental que el valor esperado del diferencial esté acotado a niveles manejables.

Bajo la maximización de las contribuciones se garantizan, en general, pensiones mínimas más altas que con la minimización de las obligaciones.

Si quisiéramos tener cierta garantía de la viabilidad económica del plan vía minimización de la obligación actuarial, el costo del plan expresado en estos términos no bajaría de 46.62 M\$. para los hombres y 12.57 M\$. para las mujeres, ajustando obviamente el nivel de contribución a un 10.01% y 14.00% respectivamente. Los casi cuatro puntos porcentuales de diferencia entre hombres y mujeres explica de una manera contundente la importancia de diferenciar costos en las poblaciones cubiertas por el plan.

# Capítulo 19

---

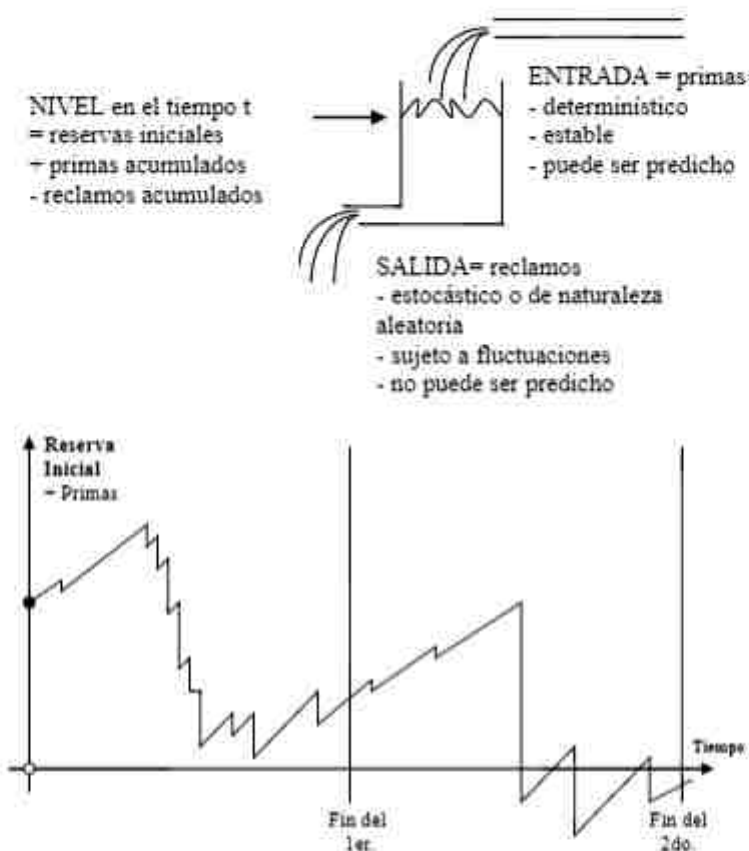
## *Determinación de la prima teórica de un reclamo*

Desde una perspectiva teórica, cualquier problema en el área de Seguros podría reducirse al estudio fundamental de:

- i. Si un activo debe asegurarse o reasegurarse.
- ii. Si estamos hablando de una línea de negocios específicos con riesgos específicos, bien sea a nivel individual o colectivo.
- iii. Si por el contrario a (i) y (ii) estamos hablando de riesgos sobre activos aislados.

En todos los casos ocurre que las entradas o primas se suponen regulares y conocidas y la cuantía y oportunidad de los reclamos; las salidas no lo son pues son variables aleatorias. Lo anterior plantea la necesidad de estudiar los flujos de caja aleatoria.

Es importante destacar que en el seguro la naturaleza estocástica de las salidas es bivariable: El monto en caja de una compañía de seguros se puede pensar como en el número de reclamos que ocurrirán, el monto del reclamo y el instante de ocurrencia son aleatorios.



Si ponemos en el eje vertical el movimiento de las reservas o saldos como una función del tiempo se puede observar el zig-zag del Saldo Aleatorio neto constituido por las reservas iniciales más primas menos reclamos; el gráfico anterior describe lo que se conoce como proceso del Riesgo.

Si  $R$  denota la reserva o saldo aleatorio remanente después de la ocurrencia del reclamo  $n$ ésimo, entonces:

$$R = U + PT_1 - X_1 + PT_2 - X_2 + \dots + PT_n - X_n$$

$R_0 = U$  Reserva inicial, la cual define las condiciones iniciales del proceso.

$P$  La Prima anual la cual determina la pendiente de los segmentos de rectas diagonales de la línea zig-zag.

- $T_i$  La secuencia de los tiempos de inter-ocurrencia de los reclamos.
- $X_i$  La secuencia de los montos reclamados, que vienen representados por las caídas verticales en el gráfico del proceso.

Adicionalmente sea:

$K_t$  = el número de reclamos que ocurrieron en el intervalo  $(0,t)$ .

$Z_t$  = el costo social asociado al mismo periodo.

$$Z_t = X_1 + X_2 + \dots + X_{K(t)}$$

Donde:  $Z_K$  es una suma de variables aleatorias donde el número de términos de la suma es en si mismo aleatorio también.

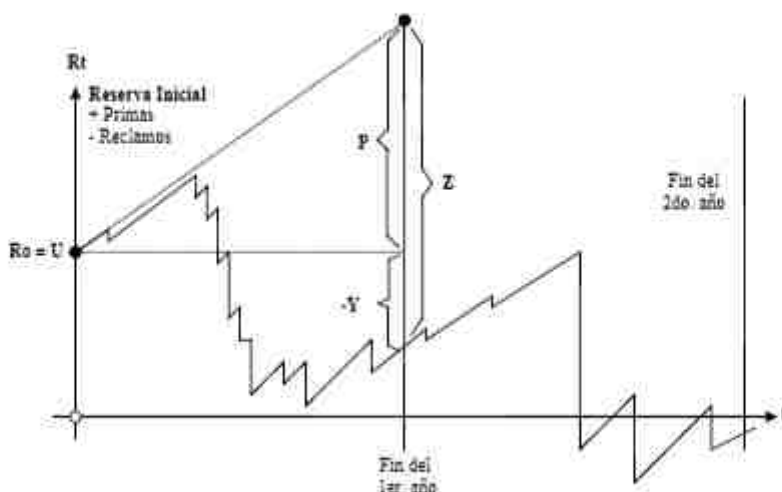
Otras variables de interés son:

$Y = P - Z_K$ , el cual se asocia con el resultado de un año.

$R_t$ : Las reservas de la compañía en el tiempo  $t$ .

$Z$ : La razón de pérdida de un año dado, la cual mide al final del ejercicio  $P$  el nivel de suficiencia de la prima para afrontar el riesgo cubierto.

Los valores de algunos de estas variables pueden verse directamente del siguiente gráfico.



En la práctica, en general se supone que  $T_i$  y  $X_i$  son variables cruzadas e independientes entre sí.

Un caso particular, pero muy frecuente en la práctica es suponer que la probabilidad de ambos  $X$  y  $T$  decrece exponencialmente para todo  $x \geq 0$  y  $t \geq 0$ ; es decir:

$$\text{Prob}(x < X \leq x + dx) = e^{-x/u} \frac{dx}{u}$$

$$\text{Prob}(t < T \leq t + dt) = e^{-t} \lambda dt$$

Lo anterior describe las variables que conforman el modelo Erlang de riesgo, el cual es uno de los más utilizados para describir el proceso de este tipo de riesgos.

La función distribución de  $x$  se define por:

$$\text{Prob}(X \leq x) = 1 - e^{-x/u}$$

Considerando el intervalo de tiempo  $(0, t)$  entonces:

$T_1$  representa el tiempo entre 0 y el 1er. reclamo

$T_2$  representa el tiempo entre 1 y el 2do. reclamo y así sucesivamente.

De donde si se observan  $k$  reclamos en  $[0, t]$  entonces se debe cumplir:

$$T_1 + T_2 + \dots + T_k \leq t \quad y$$

$$T_1 + T_2 + \dots + T_k + T_{k+1} > t$$

Lo que nos lleva a definir para  $K_t$ :

$$\text{Prob}(K_t = k) = \text{Prob}\left[\sum_{r=1}^k T_r \leq t \quad y \quad \sum_{r=1}^{k+1} T_r > t\right]$$

$$\text{Prob}[K_t = k] = \int_{s=0}^t \text{Prob}\left[s < \sum_{r=1}^k T_r \leq s + ds\right] \text{Prob}[T_{k+1} > t - s]$$

$$\text{Siendo: } \text{Prob}\left[s < \sum_{r=1}^k T_r \leq s + ds\right] = \frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-s\lambda} \lambda ds$$

$$\text{Prob}[T_{k+1} > t - s] = e^{-\lambda(t-s)}$$



Integrando se obtiene:

$$\text{Prob}[K_r = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Lo cual nos indica que si el tiempo inter-ocurrencia de los reclamos está distribuido exponencialmente, entonces el número de reclamos  $K_r$  en el intervalo  $[0, t]$  está distribuido según una Poisson con parámetro  $\lambda t$ .

### 1. Análisis del Número y Cuantía de los Reclamos

Si suponemos un portafolio o cartera de riesgos, entonces tal como definimos anteriormente el costo total de los montos reclamados en el periodo de un año se determina por:

$$Z = \sum_{k=1}^K X_k$$

Siendo:

$X_k$  = Monto o Cuantía del Reclamo # k

$K$  = Número de reclamos

$Z = 0$  si  $K=0$  por convención.

$X_k \sim$  Exponenciales

$K \sim$  Poisson

La pregunta clave para encontrar la distribución de  $Z$  que es la que define la siniestralidad o costo total de los montos reclamados se reduce a calcular la  $\text{Prob}(X_1 + \dots + X_k \leq x)$  asociada a la suma.

Para ello empecemos con dos variables, recordando que  $X_j \sim \text{Exp}(u)$ , es decir:

$$(X_j \leq x) = 1 - e^{-ux}$$

$$\text{Prob}(X_1 + X_2 \leq x) = \int_{y=0}^x \text{Prob}(X_2 \leq x-y) \text{Prob}(y < X_1 \leq y+dy)$$

Donde:  $y < X_1 \leq y + dy$

$$X_2 \leq x - y$$

$$X_1 + X_2 \leq x$$

Pero la  $\text{Prob}(X_2 \leq x-y) = \begin{cases} 1 - e^{-u(x-y)} & 0 \leq y \leq x \\ 0 & \end{cases}$

$$\text{Prob}(y < X_1 \leq y + dy) = \frac{dy}{u} e^{-\frac{y}{u}}$$

$$\therefore \text{Prob}(X_1 + X_2 \leq x) = \int_0^x (1 - e^{-\frac{x-y}{u}}) e^{-\frac{y}{u}} \frac{dy}{u}$$

$$= \int_0^x e^{-\frac{y}{u}} \frac{dy}{u} - e^{-\frac{x}{u}} \int_0^x \frac{dy}{u}$$

$$= 1 - \left(1 + \frac{x}{u}\right) e^{-\frac{x}{u}} \quad x \geq 0$$

Para la suma de  $n$  reclamos:

$$\text{Prob} \left[ \sum_{i=1}^n X_i \leq x \right] = 1 - e^{-\frac{x}{u}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{u^k k!}$$

La suma de exponenciales *iid* se distribuye según una función distribución Gamma  $G_n(x)$  cuya densidad  $g_n(x) = \frac{dG_n(x)}{dx}$

$$= \frac{1}{u} e^{-\frac{x}{u}} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{X^r}{u^r r!} - e^{-\frac{x}{u}} \frac{1}{u} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{X^r}{u^r r!}$$

$$= \frac{1}{u} \frac{X^{n-1}}{u^{(n-1)} (n-1)!} e^{-\frac{x}{u}}$$

$$\text{Siendo } E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = nu$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = nu^2$$

El cálculo recursivo de la distribución de  $\sum_{i=1}^k X_i$  es como sigue:

K	Prob(K = k)	Valores de Zsx	Prob(Z)
0	$e^{-\lambda}$	$0 \leq x$	1
1	$\lambda e^{-\lambda}$	$X_1 \leq x$	$1 - e^{-\frac{x}{u}}$
2		$X_1 + X_2 \leq x$	$G_2\left(\frac{x}{u}\right)$
...	...	...	...

n	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$	$X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x$	$G_n\left(\frac{x}{u}\right)$
---	-------------------------------------	----------------------------------	-------------------------------

Donde como antes  $G_n\left(\frac{x}{u}\right) = 1 - e^{-\frac{x}{u}} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(\frac{x}{u})^r}{r!}$

*Prob(Costo Total  $Z_n \leq x = e^{-\lambda}$ )*

$$+ \lambda e^{-\lambda} (1 - e^{-\frac{x}{u}})$$

+ ...

$$+ \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \left[ 1 - e^{-\frac{x}{u}} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(\frac{x}{u})^r}{r!} \right]$$

$$Prob(Z_n \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} G_n\left(\frac{x}{u}\right) \quad x > 0$$

Donde  $G_0(x) = 1$  y  $G_n(x) = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$  para  $n > 1$ .

Ahora bien si  $K$  es número de reclamos y suponemos que  $Prob[K = k] = p_k$  de magnitud arbitraria pero conocida y  $Prob[X_k \leq x] = V(x)$  la distribución de probabilidad para los montos individuales de los reclamos  $X_k$ , suponiendo independencia es fácil ver que:

$$Prob[X_1 + X_2 \leq x] = \int Prob[X_1 \leq x - y] \quad Prob[y < X_2 \leq y + dy]$$

$$= \int V(x - y) dV(y) = V^{*2}(x)$$

de manera:

$$Prob[X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x] = \int V^{*(n-1)}(x - y) dV(y) = V^{*n}(x)$$

Donde  $V^{*n}(x)$  es la n-ésima potencia de la convolución de la distribución  $V(x)$

$$V^{*n}(x) = D(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F(z) = \text{Pr ob } [Z \leq z] = p_0 + p_1 V(z) + p_2 V^2(z) + p_3 V^3(z) + \dots$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k V^k(z)$$

La ecuación anterior puede analizarse de la siguiente manera: Para un periodo de observación cualquiera, como por ejemplo un año el cual es el periodo comúnmente analizado en el área de seguros pueden ocurrir los siguientes eventos:

- Que no ocurra ningún reclamo; lo cual pasa con probabilidad  $P_0$
- Que ocurra un reclamo por un monto de  $X_1$  sin que exceda  $Z$  con probabilidad  $P_1 V(z)$
- Que ocurran dos reclamos  $X_1$  y  $X_2$  cuya suma no exceda  $Z$  con probabilidad  $P_2 V^2(z)$  y así sucesivamente.

En términos de la función generadora de momentos, el análisis anterior se puede desarrollar como sigue:

$$\phi_z(\tau) = E[e^{\tau Z}] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n E\left[e^{\tau \sum_{i=1}^n X_i}\right]$$

y debido a que las  $X_k$  son independientes es claro que:

$$E\left[e^{\tau \sum_{i=1}^n X_i}\right] = E[e^{\tau X_1}]^n$$

con lo cual la identidad previa continua como sigue:

$$\phi_z(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \phi_x^n(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{n \log \phi_x(\tau)} = \phi_x[\log \phi_x(\tau)]$$

$$\text{Siendo } \phi_x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k t^k$$

$$\phi_z(\tau) = \phi_x(\phi_x(\tau))$$

Tomando derivadas y aplicando la regla de la cadena

$$\phi_z'(\tau) = \phi_x'(\phi_x(\tau)) \phi_x'(\tau)$$

$$\phi_z''(\tau) = \phi_x''(\phi_x(\tau)) \phi_x'^2(\tau) + \phi_x'(\phi_x(\tau)) \phi_x''(\tau)$$

$$\begin{aligned}\varphi_z''(\tau) &= \varphi_k''[\varphi_x(\tau)]\varphi_x'^3(\tau) + \varphi_k''[\varphi_x(\tau)]2\varphi_x'(\tau)\varphi_x''(\tau) \\ &\quad + \varphi_k''[\varphi_x(\tau)]\varphi_x'(\tau)\varphi_x''(\tau) + \varphi_k''[\varphi_x(\tau)]\varphi_x''(\tau)\end{aligned}$$

Haciendo  $\tau = 0$  y  $\mu = E(X)$  y  $\lambda = E(k)$  y  $\mu_n = E(X - \mu)^n$  y  $\lambda_n = E(k - \lambda)^n$  tenemos:

$$\begin{aligned}E[Z] &= \lambda\mu \\ \text{Var}[Z] &= \lambda_2\mu^2 + \lambda\mu_2 \\ \alpha_3[Z] &= \lambda_3\mu^3 + 3\lambda_2\mu_2\mu + \lambda\mu_3.\end{aligned}$$

Lo anterior simplifica enormemente los cálculos cuando debemos evaluar el riesgo de un determinado plan de autoseguro en el caso de que se asuma un modelo Poissoniano para  $K$  y  $X$  siguiendo una distribución cualquiera arbitraria. En particular si los  $\lambda_i = \lambda \forall i$  entonces:

$$\varphi_k'(\tau) = \lambda(e^\tau - 1), \quad \varphi_k''(\tau) = \varphi_k'''(\tau) = \varphi_k^{(n)}(\tau) = \lambda e^\tau$$

$$E[Z] = \lambda E[X]$$

$$\text{Var}[Z] = \lambda E[X^2]$$

$$\alpha_3[Z] = \lambda E[X^3]$$

Lo cual obviamente verifica o satisface la siguiente ecuación para el Modelo Poisson

$$\varphi_z(\tau) = \lambda(\phi_x(\tau) - 1).$$

PÁGINA EN BLANCO

# Capítulo 20

---

## *Enfoque bayesiano para la severidad y frecuencia de reclamos*

Tal como se mencionó en el Capítulo anterior, el cálculo clásico de la distribución de pérdida se hace en base sin tomar en consideración la posible incertidumbre de los parámetros.

Esta sección está dedicada a la determinación de las distribuciones predictivas cuando se supone una distribución exponencial y Poisson para la severidad y frecuencia de los reclamos respectivamente. Se trata entonces de conseguir a través de la aplicación del Teorema de Bayes la distribución a posteriori y predictiva para la frecuencia de los reclamos dados por una distribución Poisson; y para la severidad o magnitud del monto de los reclamos dados por una distribución exponencial.

### **1. Severidad de los reclamos**

Sean  $X_1, \dots, X_n | \theta \sim$  con  $f(x|\theta) = \theta \exp\{-\theta x\}$  para  $x > 0$ ,  $D = (X_1, \dots, X_n)$  siendo el vector de los datos.

Entonces cuando la distribución del parámetro  $\theta$  ó distribución previa es una distribución Gamma

$$f(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1} \beta^\alpha e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)} \quad \theta > 0$$

Donde  $\alpha, \beta > 0$  es bien conocido que la distribución posterior es

$$\theta|D \sim G(\alpha + n, \beta + n\bar{x})$$

Una pregunta interesante consiste en predecir la severidad del próximo siniestro dado  $D$ , o sea conocer la distribución de probabilidad  $X^*$  de una observación a futuro; es decir  $X^*|D$

$$\begin{aligned} f(x^*|D) &= \int_0^\infty f(x^*|\theta)g(\theta|D)d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta \exp(-\theta x^*) \theta^{\alpha+n-1} (\beta + n\bar{x})^{\alpha+n} \exp(-(\beta + n\bar{x})\theta)}{\Gamma(\alpha + n)} d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta^{\alpha+n} (\beta + n\bar{x})^{\alpha+n} e^{-(\theta x^* + \beta\theta + n\bar{x}\theta)}}{\Gamma(\alpha + n)} d\theta \\ &= \frac{(\beta + n\bar{x})^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha + n)} e^{-(x^* + \beta + n\bar{x})} \int_0^\infty e^{-\theta} \theta^{\alpha+n} d\theta \end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior se obtiene la densidad de  $X^*$  dado  $D$ :

$$f(x^*|D) = \frac{(n + \alpha)(\beta + n\bar{x})^{n+\alpha}}{(\beta + n\bar{x} + x^*)^{n+\alpha+1}}$$

La distribución de  $X^*|D$  es conocida como Pareto con parámetros  $\beta + n\bar{x}$  y  $n + \alpha$ .

Al tomar el límite cuando  $\alpha$  y  $\beta \rightarrow 0$  de manera tal que  $\alpha/\beta = k$  se obtiene lo que se conoce en la Teoría Bayesiana como la previa difusa. De ahí que con una previa difusa  $X^*|D \sim \text{Pareto}(n\bar{x}, n)$ .

Es importante destacar que cuando la previa es difusa ambos  $E(X^*|D)$  y  $V(X^*|D)$  exceden la media y varianza de una distribución exponencial cuyos parámetros son el estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$ . Esto último no es necesariamente cierto cuando  $\alpha$  y  $\beta$  son distintos de cero.



## 2. Frecuencia de los reclamos

Si  $N|\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$  con una previa gamma para  $\lambda \sim G(\alpha, \beta)$ . Entonces la distribución de  $\lambda|N \sim G(\alpha+n, 1+\beta)$ .

Si  $N^*$  es una observación a futuro habiendo observado  $N$  reclamos, entonces la distribución predictiva es  $N^*|N \sim NB(\alpha+n, (1+\beta)/(2+\beta))^{60}$ .

Una previa difusa nos lleva a una distribución predictiva binomial negativa  $NB(n, 1/2)$ . De lo anterior se concluye que la distribución predictiva tiene la misma media que la ajustada  $P(N)$  pero su varianza es el doble.

## 3. Distribución predictiva colectiva de los reclamos

Tal como ya se mencionó a lo largo de esta investigación el **modelo de riesgo colectivo tradicional** se define como sigue:

$$S = Y_1 + \dots + Y_N$$

S: Monto total reclamado en un periodo de tiempo fijo (pérdida o siniestralidad teórica).

N: Número de Reclamos observados que ocurren en ese periodo.

$Y_i$ : Montos individuales de cada uno de los reclamos.

Bajo este modelo se supone que  $\{Y_i\}_{i=1}^N$  es una secuencia de variables aleatorias *i.i.d.* independientes entre sí y a su vez de  $N$ .

El enfoque en la práctica, para determinar  $S$  es ajustar las distribuciones individuales para  $\hat{Y}_i$  y  $\hat{N}$  las cuales como ya sabemos no incorporan el error de estimación de los parámetros. Se supone que las distribuciones individuales son conocidas con total certeza.

En base a la ecuación anterior tenemos:

$$D = \{N; Y_1, \dots, Y_N\} \quad \text{Datos Históricos}$$

$$D^* = \{N^*; Y_1^*, \dots, Y_{N^*}^*\} \quad \text{Observaciones futuras para el próximo periodo.}$$

El interés es calcular o determinar la distribución predictiva de:

$$S = Y_1 + \dots + Y_N$$

<sup>60</sup> NB: Binomial Negativa.

y entonces comparar esta última con la distribución ajustada (en forma clásica); es decir:

$$\hat{S} = \hat{Y}_1 + \dots + \hat{Y}_n$$

Con el objeto de poder comparar las distribuciones de  $\hat{S}$  y  $S^*$  en función de sus medias, varianzas y coeficientes de variación, tanto para las distribuciones ajustadas como para las predictivas se desarrollaron dos escenarios básicos.

1. Suponer que la severidad o la intensidad de los montos reclamados es conocida. Entonces la incertidumbre a medir bajo este escenario sería sólo la proveniente de la frecuencia o número de reclamos.
2. Suponer que tanto la **severidad como la frecuencia** se desconocen y se deben estimar por máxima verosimilitud y en consecuencia se evaluará la incertidumbre de ambos.

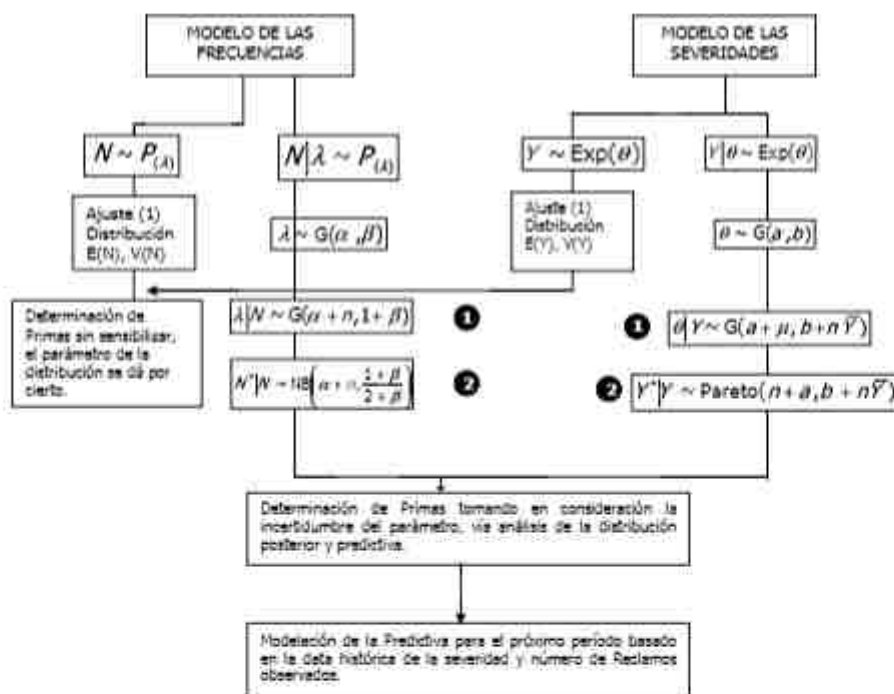


Gráfico 126. Estructura jerárquica de los modelos en estudio

Nota: Estimadores de máxima verosimilitud

Distribuciones a posteriori.

Distribuciones predictivas.

## 4. Resultados del cálculo detallado de los momentos de las distribuciones ajustadas y predictivas

### 4.1. Escenario #1

#### 4.1.1. Niveles de severidad conocido

En este caso, para el primer escenario se está considerando sólo el efecto de la incertidumbre del parámetro de la distribución que define la frecuencia o número de reclamos. Se asume que la severidad o magnitud de los montos reclamados es conocida e igual a la unidad ( $\theta = 1$ ) lo cual implica  $E(Y) = 1$  y  $V(Y) = 1$ .

A continuación se determinan las fórmulas derivadas para cada caso en detalle, basados en los supuestos antes descritos.

#### 4.1.2. Detalle del cálculo de los momentos de (5) bajo el enfoque clásico

El cálculo de la media y de la varianza de  $\hat{S}$  asumiendo  $Y_i \sim \exp(\theta)$  con  $\theta = 1$  conocido y  $N = 106$ , número de reclamos observados, proveniente de una distribución  $N \sim \text{Poisson}(100)$ , es como sigue:

Siendo  $D = \{N; Y_1, \dots, Y_N\}$  Datos Históricos

$D^* = \{N^*; Y_1^*, \dots, Y_{N^*}^*\}$  Observaciones futuras para el próximo período.

$$\hat{S} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{\hat{N}}$$

La media viene dada por:

$$E(\hat{S}|D) = \hat{N} \cdot E(Y_i) = \hat{N}$$

Sustituyendo:  $E(\hat{S}|D) = 106$

La varianza se calcula como:

$V(\hat{S}|D) = V(\hat{N}|D) \cdot E^2(Y_i) + E(\hat{N}|D) \cdot V(Y_i|D)$  sustituyendo los valores conocidos se obtiene para este caso en particular.

$$V(\hat{S}|D) = V(\hat{N}|D) + E(\hat{N}|D)$$

$V(\hat{S}|D) = 2E(\hat{N}|D)$  dado que en el caso de una distribución Poisson

$V(\hat{N}|D) = E(\hat{N}|D)$  y  $E^2(Y_i) = 1$  y como  $V(Y_i|D) = 1$  al ser  $\theta = 1$  sustituyendo  $\hat{N} = 106$  se obtiene  $V(\hat{S}) = 212$ .

Como se puede observar la varianza de  $\hat{S}$  para este caso es simplemente el doble de la media bajo los supuestos antes descritos. Esto es lo que generalmente se hace en la práctica cuando se conoce la severidad.

#### 4.1.3. Detalle del cálculo de los momentos ( $S^*$ ) bajo la previa no difusa

El cálculo de la Media y de la Varianza de  $S^*$  para  $\lambda \sim \text{Gamma}(4, 0,04)$ ,  $E(\lambda) = 100$  y  $N^* \sim \left\{ \dots, \alpha, \frac{1+\beta}{2+\beta} \right\}$ , siendo  $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$  y  $D = \{N; Y_1, \dots, Y_N\}$  Datos Históricos;  $D^* = \{N^*; Y_1^*, \dots, Y_{N^*}^*\}$  Observaciones futuras para el próximo período.

Entonces:

$$S^* = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N^*}$$

La media viene dada por:

$$E(S^*|D) = E(N^*|D) \cdot E(Y_i|D)$$

$$E(N^*|D) = \frac{(\alpha + n) \left( 1 - \frac{1 + \beta}{2 + \beta} \right)}{\left( \frac{1 + \beta}{2 + \beta} \right)} \text{ y a su vez:}$$

$E(Y_i|D) = 1$  dato conocido. De donde:

$$E(S^*|D) = \frac{E(Y_i|D) \left( 1 - \frac{1 + \beta}{2 + \beta} \right) (n + \alpha)}{\left( \frac{1 + \beta}{2 + \beta} \right)} = \frac{(n + \alpha) \left( 1 - \frac{1 + \beta}{2 + \beta} \right)}{\left( \frac{1 + \beta}{2 + \beta} \right)} ;$$

sustituyendo  $n$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  por sus valores.

$$E(S^*|D) = 105.76$$

La varianza se calcula como:

$$V(S^*|D) = V(N^*|D) \cdot E^2(Y_i|D) + E(N^*|D) \cdot V(Y_i|D) = V(N^*|D) + E(N^*|D)$$

$$V(S^*|D) = \frac{E(N^*|D)}{\left(\frac{1+\beta}{2+\beta}\right)} + \frac{(n+\alpha)\left(1 - \frac{1+\beta}{2+\beta}\right)}{\left(\frac{1+\beta}{2+\beta}\right)}, \text{ siendo como antes}$$

$$E^2(Y_i|D) = 1$$

$$V(Y_i|D) = 1$$

$$V(S^*|D) = 313,69$$

Al igual que en el caso anterior la  $V(S^*|D)$  es la suma de la varianza predictiva del número de reclamos más su media.

En este caso se observa que la varianza casi triplica la Media.

#### 4.1.4. Detalle del cálculo de los momentos ( $S^*$ ) bajo una previa difusa

Como  $N^* \sim NB\left(\alpha+n, \frac{1+\beta}{2+\beta}\right)$  si se toma el  $\lim_{\beta \rightarrow 0} NB\left(\alpha+n, \frac{1+\beta}{2+\beta}\right)$  entonces se obtiene la predictiva como una previa difusa o no informativa; es decir  $N^* \sim NB(n, 1/2)$  de donde:

$$E(N^*|D) = n$$

$$V(N^*|D) = 2n$$

El cálculo de la Media y de la Varianza de  $S^*$  para este caso siendo:

$$S^* = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

La varianza del número de reclamos bajo  $N^*$  es el doble de su esperanza, la Media viene dada por:

$$E(S^*|D) = E(N^*|D) \cdot E(Y_i|D)$$

Sustituyendo:

$$E(S^*|D) = n$$

$$E(S^*|D) = 106$$

La varianza se calcula como:

$V(S^*|D) = V(N^*|D) \cdot E^2(Y_i|D) + E(N^*|D) \cdot V(Y_i|D)$  de donde  $V(S^*|D) = 3n$  sustituyendo se obtiene:

$$V(S^*|D) = 318$$

La varianza en este caso es exactamente tres veces su Media.

Distribución Individual de la Frecuencia	Cálculos			Tipo de Distribución para S
	Media	Varianza	Coficiente de Variación %	
i) Poisson ( $\hat{\lambda}^{ML} = n$ )	106	212	13,73	Ajustada ( $\hat{S}$ )
ii) Binomial Negativa $\left(\alpha + n, \frac{1 + \beta}{2 + \beta}\right)$	105,70	312,24	16,74	Predictiva con Previa no Difusa ( $S^*$ ) $\alpha = 4$ $\beta = 0,04$
iii) Binomial Negativa $(n, 1/2)$	106	318	16,82	Predictiva con Previa Difusa ( $S^*$ ) $\alpha = 0$ $\beta = 0$

$N=106$  reclamos observados 61.

**Tabla 53. Resumen de resultados del escenario #1**

Como se desprende de la Tabla 1, la variabilidad del número de reclamos aumenta significativamente al ir desde el caso Poisson hasta la Binomial Negativa resultante con previa 1 difusa ( $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0, \alpha/\beta = k$ ). Adicionalmente también se observa que la media de (ii) es ligeramente menor que la de los otros dos casos.

El efecto de esta incertidumbre en el parámetro de la frecuencia de los reclamos afecta significativamente la estimación de la prima de un seguro y los niveles de reserva matemática inicial o excedente.

Si  $S$  es la pérdida colectiva/agregada (monto total reclamado) se desea determinar el nivel de la prima<sup>62</sup>  $P$ , la reserva matemática inicial o excedente  $U$  tal que:

<sup>61</sup> Estimados por máxima verosimilitud de una Poisson (100).  $\hat{\lambda}^{ML} = N = 106$

<sup>62</sup> Utilizando el criterio del valor esperado  $P = E(S) + k\%E(S)$  siendo  $k$  el factor de carga.

La varianza se calcula como:

$V(S^*|D) = V(N^*|D) \cdot E^2(Y_i|D) + E(N^*|D) \cdot V(Y_i|D)$  de donde  $V(S^*|D) = 3n$  sustituyendo se obtiene:

$$V(S^*|D) = 318$$

La varianza en este caso es exactamente tres veces su Media.

Distribución Individual de la Frecuencia	Cálculos			Tipo de Distribución para S
	Media	Varianza	Coefficiente de Variación %	
i) Poisson ( $\hat{\lambda}^{ML} = n$ )	106	212	13,73	Ajustada ( $\hat{S}$ )
ii) Binomial Negativa $\left(\alpha + n, \frac{1 + \beta}{2 + \beta}\right)$	105,70	312,24	16,74	Predictiva con Previa no Difusa ( $S^*$ ) $\alpha = 4$ $\beta = 0,04$
iii) Binomial Negativa $(n, 1/2)$	106	318	16,82	Predictiva con Previa Difusa ( $S^*$ ) $\alpha = 0$ $\beta = 0$

$N=106$  reclamos observados 61.

**Tabla 53. Resumen de resultados del escenario #1**

Como se desprende de la Tabla 1, la variabilidad del número de reclamos aumenta significativamente al ir desde el caso Poisson hasta la Binomial Negativa resultante con previa 1 difusa ( $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0, \alpha/\beta = k$ ). Adicionalmente también se observa que la media de (ii) es ligeramente menor que la de los otros dos casos.

El efecto de esta incertidumbre en el parámetro de la frecuencia de los reclamos afecta significativamente la estimación de la prima de un seguro y los niveles de reserva matemática inicial o excedente.

Si  $S$  es la pérdida colectiva/agregada (monto total reclamado) se desea determinar el nivel de la prima<sup>62</sup>  $P$ , la reserva matemática inicial o excedente  $U$  tal que:

<sup>61</sup> Estimados por máxima verosimilitud de una Poisson (100).  $\hat{\lambda}^{ML} = N = 106$

<sup>62</sup> Utilizando el criterio del valor esperado  $P = E(S) + k\%E(S)$  siendo  $k$  el factor de carga.

$$\Pr(U + P > S) = \Pi$$

$$\Pi_S = 1 - \Pi$$

Siendo  $\Pi$  previamente fijado por el ente que asume el riesgo. Esta ecuación define de alguna manera la solvencia del fondo cuando se determina el valor de  $U$ , que representa la reserva matemática inicial para poder cubrir con éxito el Riesgo involucrado en el autoseguro a través del cobro de una prima  $P$ .

En base al teorema del limite central se puede aproximar el mínimo valor que debe tener la reserva matemática inicial  $U$  o excedente con el objeto de garantizar suficiencia del fondo para un nivel de confianza estadística dado.

$$Z = \frac{\hat{S} - E(\hat{S})}{\sqrt{\text{Var}(\hat{S})}} \sim N(0, 1)$$

Para el caso Poisson en donde  $S = \hat{S}$ , al 95% de confianza estadística o 5% de significancia se obtiene:

$\Pr(U + P > S) = \Pi$  bajo  $S = \hat{S}$  es lo mismo que (caso Poisson)

$\Pr(\hat{S} \leq U + P) = \Pi$  siendo  $P = E(\hat{S}) + \%kE(\hat{S})$  bajo el criterio del valor esperado y  $0 < k < 1$  un factor de carga adicional<sup>63</sup>.

$$\Pr\left\{ \frac{\hat{S} - E(\hat{S})}{\sqrt{\text{Var}(\hat{S})}} \leq \frac{U + E(\hat{S}) \cdot (1 + k) - E(\hat{S})}{\sqrt{\text{Var}(\hat{S})}} \right\} = \Pi$$

Existen otros criterios para determinar la prima; sin embargo, el más común y frecuente es el del valor esperado, donde la prima  $P$  es numéricamente igual a su valor esperado más una fracción de este último.

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene una cota inferior para  $U$ .

$$U \geq Z\sqrt{\text{Var}(\hat{S})} - k\%E(\hat{S})$$

En nuestro caso utilizando un 10% de carga adicional de su valor esperado.

$$P \left\{ Z \leq \frac{U + 0,10 \cdot E(\hat{S})}{\sqrt{\text{Var}(\hat{S})}} \right\} = 95\%$$

<sup>63</sup> Representa un monto adicional a la prima que garantiza la cobertura de los gastos operativos del plan más una cierta ganancia.



$$E(\hat{S}) = 106 \quad P \left\{ Z \leq \frac{U + 10,6}{\sqrt{212}} \right\} = 95\%$$

$$Var(\hat{S}) = 212 \text{ y}$$

$U \geq 17,93$  nivel de reserva matemática inicial

Lo anterior indica una cota inferior del nivel de reserva o aporte inicial al fondo. En otras palabras se debería aportar no menos de 17,93 unidades monetarias para garantizar con un 95% de probabilidad la suficiencia del fondo en el caso de la distribución Poisson ajustada utilizando el enfoque clásico.

Haciendo el mismo cálculo para las distribuciones predictivas restantes se obtiene:

<i>Nivel de la reserva matemática U requerida inicialmente para cada nivel de significancia con un factor de carga k=10%</i>			
	$\alpha_1 = 1,0$	$\alpha_1 = 0,05$	$\alpha_1 = 0,01$
i) Poisson	13,42	17,93	26,96
ii) Binomial Negativa	18,63	24,11	25,09
iii) Binomial Negativa	18,82	24,35	25,40

**Tabla 54. Nivel de la reserva matemática u requerida inicialmente para cada nivel de significancia con un factor de carga social k=10%**

<i>Distribución estándar normal</i>		
<i>Nivel de Significancia</i>	<i>Confianza Estadística</i>	<i>Valor de Z</i>
1%	0,99	2,58
5%	0,95	1,96
10%	0,90	1,65

**Tabla 55. Distribución estándar normal**

Los resultados obtenidos en esta tabla demuestran que al aplicar una distribución ajustada en lugar de una predictiva el ente asegurador puede llegar a establecer un nivel no adecuado de la reserva matemática inicial con la consecuente insuficiencia del fondo para hacer frente a las obligaciones

<sup>64</sup> Con previa No Difusa

<sup>65</sup> Con previa Difusa

que impone el autoseguro para un nivel de significancia estadística previamente fijado.

La diferencia del valor de la reserva matemática inicial  $U$  entre el registrado por la distribución Poisson y la Binomial Negativa es de un 35% al 95% de confianza.

## 4.2. Escenario # 2

### 4.2.1. Nivel de severidad desconocido

Se supone que el nivel de los montos reclamados individualmente es exponencial pero desconocido. En este caso se utilizará el mismo número de reclamos observados que en el caso anterior. Se simulará este número de observaciones o reclamos de una distribución exponencial con media 1.

El estimado de máxima verosimilitud para  $\theta$  es  $\theta^{ML} = 1,0113$ . Utilizando las mismas distribuciones de probabilidad para la frecuencia de los reclamos se obtiene para este nuevo escenario lo siguiente:

- Exponencial con media 0,9888 para el caso de la distribución exponencial ajustada.
- Pareto (108.81, 110) distribución predictiva basada en una previa gamma para el parámetro exponencial con media 1 y varianza 0,25.
- Pareto (104.81, 106) distribución predictiva basada en una previa difusa.

### 4.2.2. Detalle del cálculo de $(S^*)$ ajustando una distribución exponencial y poisson a través de los estimadores de máxima verosimilitud $\lambda^{ML}$ y $\theta^{ML}$

En este caso se están ajustando a través de los estimadores de máxima verosimilitud la frecuencia y la severidad de los reclamos:

$$\text{Sea } \hat{S} = \hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + \dots + \hat{Y}_N$$

El cálculo de la media y varianza de  $\hat{S}$  es como sigue:

$$E(\hat{S}|D) = E(\hat{Y}_i|D) \cdot E(\hat{N}|D) = \frac{\lambda^{ML}}{\hat{\theta}^{ML}}$$

como  $Y_i|D \sim \text{exp}(\theta^{ML})$  entonces el

$$E(\hat{Y}|D) = 1/\hat{\theta}^{ML} \text{ y } \lambda^{ML} = n$$

$$E(\hat{Y}|D) = 0,9888 \text{ y } E(\hat{N}|D) = 106, \text{ por consiguiente:}$$

$$E(\hat{S}|D) = 104,81$$

La varianza viene dada por:

$$V(\hat{S}|D) = V(\hat{N}|D) \cdot E^2(\hat{Y}|D) + E(\hat{N}|D) \cdot V(\hat{Y}|D)$$

$$\text{sustituyendo } V(\hat{N}|D) = E(\hat{N}|D) = n$$

$$\text{se obtiene: } V(\hat{S}|D) = nE^2(\hat{Y}|D) + nV(\hat{Y}|D)$$

$$V(\hat{S}|D) = n(E^2(\hat{Y}|D) + V(\hat{Y}|D)) = n(E^2(\hat{Y}|D) + E(\hat{Y}^2|D) - E^2(\hat{Y}|D)) \\ = nE(\hat{Y}^2)$$

$$E^2(\hat{Y}|D) = (E(\hat{Y}|D))^2$$

$$V(\hat{Y}|D) = E(\hat{Y}^2) - E^2(\hat{Y}|D)$$

$$E(\hat{Y}|D) = 1/\hat{\theta}^{ML} = 0,9888$$

$$V(\hat{Y}|D) = 1/(\hat{\theta}^{ML})^2 = 0,97777$$

por la propiedad de invarianza de los estimadores de máxima verosimilitud.

$$\text{Despejando } E(\hat{Y}^2|D) = V(\hat{Y}|D) + E^2(\hat{Y}|D)$$

$$E(\hat{Y}^2|D) = \left(\frac{1}{\hat{\theta}^{ML}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\hat{\theta}^{ML}}\right)^2$$

$$E(\hat{Y}^2|D) = \frac{2}{\hat{\theta}^{ML^2}}$$

Por consiguiente

$$V(\hat{S}|D) = \frac{2n}{(\hat{\theta}^{ML})^2}$$

$$V(\hat{S}|D) = 207,28$$

4.2.3. *Detalle del cálculo de los momentos de  $(S^*)$  bajo las distribuciones*

Predictivas pareto  $(n\bar{y} + b, n + a)$  y binomial negativa  $\left(n + \alpha, \frac{1 + \beta}{2 + \beta}\right)$  con previas no difusas

En este caso

$$S^* = Y_1^* + Y_2^* + \dots + Y_N^*$$

siendo  $Y_i^* \sim \text{Par}(n\bar{y} + b, n + a)$  y  $N^* \sim \text{NB}\left(n + \alpha, \frac{1 + \beta}{2 + \beta}\right)$

La Media de  $S^*$  viene dada en este caso por:

$E(S^* | D) = E(Y_i^* | D) \cdot E(N^* | D)$  y sustituyendo  $E(Y_i^* | D)$  y  $E(N^* | D)$  por sus valores

$$E(Y_i^* | D) = \frac{n\bar{y} + b}{n + a - 1}$$

$$E(N^* | D) = \frac{(n + \alpha) \left(1 - \frac{1 + \beta}{2 + \beta}\right)}{\left(\frac{1 + \beta}{2 + \beta}\right)} \quad \text{se obtiene:}$$

$$E(S^* | D) = \left(\frac{n\bar{y} + b}{n + a - 1}\right) \left(\frac{(n + \alpha) \left(1 - \frac{1 + \beta}{2 + \beta}\right)}{\left(\frac{1 + \beta}{2 + \beta}\right)}\right)$$

Sustituyendo de acuerdo a los supuestos:

Parámetros de la Distribución Previa (Frecuencia)	Parámetros de la Distribución Previa (Severidad)	Estimadores de Máxima Verosimilitud	Modelo
$\alpha = 4$	$a = 4$	$N(\hat{\lambda}^{Ml}) = 106$	Frecuencia
$\beta = 4\%$	$b = 4$	$\bar{Y} = (\hat{\theta}^{Ml})^{-1} = 0.9888$	Severidad

$\lambda \sim \text{Gamma}(4, 0.04) \quad E(\lambda) = 100$

$\theta \sim \text{Gamma}(4, 4) \quad E(\theta) = 1$

Sustituyendo  $n, \bar{Y}, \alpha, \beta, a$  y  $b$  se obtiene:

$$E(S^*|D) = 105,59$$

La varianza en este caso viene dada por

$$V(S^*|D) = V(N^*|D) \cdot E^2(Y_i^*|D) + E(N^*|D) \cdot V(Y_i^*|D)$$

Sustituyendo

$$V(S^*|D) = \left( \frac{E(N^*|D)}{\frac{1+\beta}{2+\beta}} \right) \cdot \left( \frac{n\bar{y}+b}{n+a-1} \right)^2 + \left( \frac{(n+\alpha) \left( 1 - \frac{1+\beta}{2+\beta} \right)}{\left( \frac{1+\beta}{2+\beta} \right)} \right) \cdot \left( \frac{2(n\bar{y}+b)^2}{(n+a-1)(n+a-2)} \right)$$

se obtiene  $V(S^*|D) = 309,86$

#### 4.2.4. Detalle del cálculo de $(S^*)$ bajo las distribuciones predictivas binomial y pareto con previas difusas

El cálculo de la media y varianza de  $S^*$  dados los datos y asumiendo las siguientes distribuciones predictivas:

$$Y_i^*|D \sim \text{Par}(n\bar{Y}, n)$$

$$N^*|D \sim \text{NB}(n, 1/2)$$

$$E(S^*|D) = E(Y^*|D) \cdot E(N^*|D)$$

$$E(N^*|D) = \frac{n(1-1/2)}{1/2} = n$$

$$V(N^*|D) = \frac{E(N^*|D)}{1/2} = 2n$$

$$E(Y^*|D) = \frac{n\bar{Y}}{n-1}$$

$$V(Y^*|D) = \frac{2(n\bar{Y})^2}{(n-1)(n-2)} \text{ sustituyendo se obtiene:}$$

$$E(S^*|D) = \left( \frac{n\bar{Y}}{n-1} \right) \cdot \frac{n(1/2)}{1/2} = \frac{n^2\bar{y}}{n-1}$$

$$E(S^*|D) = 105,81$$

La varianza viene dada por:

$$V(S^*|D) = V(N^*|D) \cdot E^2(Y_i^*|D) + E(N^*|D) \cdot V(Y_i^*|D)$$

$$V(S^*|D) = 2n \left( \frac{n\bar{Y}}{n-1} \right)^2 + \frac{2n(n\bar{Y})^2}{(n-1)(n-2)} = \frac{2n(n-2)(n^2\bar{y}^2) + 2n(n-1)(n^2\bar{y}^2)}{(n-1)^2(n-2)}$$

$$V(S^*|D) = \frac{2n^3\bar{y}^2(2n-3)}{(n-1)^2(n-2)} \text{ sustituyendo } n \text{ y } \bar{y} \text{ se obtiene:}$$

$$V(S^*|D) = 424,58$$

Distribución Individual de la Frecuencia	Cálculos			Tipo de Distribución para S
	Media	Varianza	Coefficiente de Variación %	
i) Poisson ( $\hat{\lambda}^{M0}$ ) Exponencial ( $\hat{\theta}^{M0}$ )	104,81	207,28	13,73	Media Ajustada ( $\hat{S}$ )
ii) Binomial Negativa $\left( \alpha + n, \frac{1 + \beta}{2 + \beta} \right)$ Pareto ( $n\bar{y} + b, n + a$ )	105,59	309,86	16,67	Predictiva con Priors no Difusa ( $S^*$ )(a, b) a = 4 b = 4
iii) Binomial Negativa (n, 1/2) Pareto ( $n\bar{y}, n$ )	105,81	424,58	18,47	Predictiva con Priors Difusas ( $S^*$ ) a = 0 b = 0

$N=106$  reclamos observados<sup>66</sup>.

**Tabla 56. Resumen de resultados del escenario #2**

Al igual que la Tabla # 1 cuando se conocía la distribución de la severidad, la tabla anterior ratifica el aumento de variabilidad cuando se desconoce la distribución de la severidad (montos reclamados) y se estima a través de máxima verosimilitud el parámetro de la distribución exponencial.

<sup>66</sup> Estimados por máxima verosimilitud de una Poisson (100).  $\hat{\lambda}^{M0} = N = 106$

### 4.3. Incremento del número de reclamos muestreados

Si se amplía la cartera de reclamos a 520, obtenidos de una distribución de Poisson (500) y se simulan de una exponencial se obtiene  $\hat{\theta}^{ML} = 1,0137$ .

Con una previa gamma para l con media 500 y varianza 2.500 manteniendo el resto de las distribuciones iguales al caso anterior.

Distribución Individual de la Frecuencia	Cálculos			Tipo de Distribución para S
	Media	Varianza	Coefficiente de Variación %	
i) Poisson ( $\hat{\lambda}^{ML}$ )	520	1,040	6,20	Media Ajustada ( $\hat{S}$ )
ii) Binomial Negativa $\left(\alpha + n, \frac{1 + \beta}{2 + \beta}\right)$	516,67	1,463,90	7,40	Predictiva con Previs no Difusas ( $S^+$ ) $\alpha = 100$ $\beta = 0,20$
iii) Binomial Negativa (n, 1/2)	520	1,560	7,59	Predictiva con Previs Difusa ( $S^+$ ) $\alpha = 0$ $\beta = 0$

$N=520$  reclamos observados<sup>67</sup>.

**Tabla 57. Resumen de resultados del escenario # 1 con incremento del número de reclamos muestreados**

Distribución Individual de la Frecuencia	Cálculos			Tipo de Distribución para S
	Media	Varianza	Coefficiente de Variación %	
i) Poisson ( $\hat{\lambda}^{ML}$ ) Exponencial ( $\hat{\theta}^{ML}$ )	512,97	1,012,07	6,20	Media Ajustada ( $\hat{S}$ )
ii) Binomial Negativa $\left(\alpha + n, \frac{1 + \beta}{2 + \beta}\right)$ Pareto ( $n\bar{y}, a, b, n + a$ )	510,71	1,937,13	8,61	Predictiva con Previs no Difusas ( $S^+$ )(a, b) $(\alpha, \beta)$ $\alpha = 100$ $a = 4$ $\beta = 0,20$ $b = 4$
iii) Binomial Negativa (n, 1/2) Pareto ( $n\bar{y}, n$ )	513,96	2,033,94	8,77	Predictiva con Previs Difusas ( $S^+$ )(a, b) $(\alpha, \beta)$ $\alpha = 0$ $a = 0$ $\beta = 0$ $b = 0$

**Tabla 58. Resumen de resultados del escenario # 2 con incremento del número de reclamos muestreados**

<sup>67</sup> Estimados por máxima verosimilitud de una Poisson (500).  $\hat{\lambda}^{ML} = N = 520$

# Capítulo 21

---

## *Ejemplo de un modelo jerárquico propuesto para evaluar la incertidumbre de los parámetros*

### **1. Ejemplo de un modelo jerárquico propuesto para evaluar la incertidumbre de los parámetros**

Generalmente la mayoría de los autoseguros y pólizas en general contemplan una franquicia o deducible que no es más que un nivel prefijado por debajo del cual, no se pagan reclamos.

En esta sección se analizará un caso práctico de 98 reclamos a título de resumen utilizando un modelo jerárquico similar a los expuestos en la sección 3 de esta investigación, utilizando la fortaleza del Software WINBUGS en las Simulaciones tipo Markov.

#### *1.1 Inferencia Bayesiana Via Winbugs (Gibbs Sampling)*

Winbugs es un paquete interactivo para Windows que permite la realización de simular via cadenas de Markov Montecarlo el análisis de modelos bastante complejos. Una de las principales razones de utilizar este software en el desarrollo de este trabajo de investigación es la relativa facilidad y flexibilidad de programación o codificación, la posibilidad de hacer representaciones gráficas de los modelos diseñados y por último, la facilidad de interfase con otros lenguajes paquetes de análisis estadístico tales como R y SPLUS.



La descripción de los modelos en estudio bajo Winbugs tienen la siguiente estructura:

**Definición del Modelo** propiamente dicho. Esto implica programar en el lenguaje BUGS todas las ecuaciones que definen el modelo estableciendo los nodos de cálculo. Los nodos pueden ser fundamentalmente de dos tipos estocásticos si están relacionados o vinculados a una distribución de probabilidad específica o determinísticos si se refieren a simples cálculos algebraicos, los cuales no conllevan la definición de ninguna distribución de Probabilidad.

**Definición de la estructura de los datos.** Generalmente listas, escalares o vectores en el formato tradicional de R ó SPLUS.

Por último, la definición de las condiciones iniciales de las variables a simular y el establecimiento de número de cadenas que se van a muestrear con el objeto de estudiar y garantizar la convergencia de las mismas.

### 1.2. Flujoograma de las corridas de winbugs



### 1.3 Los outputs o salidas de winbugs

1. **Monitoreo de las corridas MCMC** para cada uno de los parámetros del modelo que sean de interés.
2. **Posibilidades de hacer un número infinito de actualizaciones de distintos tamaños muestrales** para investigar entre otras cosas, la convergencia de las cadenas y la suavización de la densidad de probabilidad asociada a cada uno de los parámetros bajo estudio.
3. **Sumario de estadísticas descriptivas** para cada uno de los nodos, tanto estocásticos como determinísticos, indicando:
  1. Identificación del Nodo
  2. Media y Mediana
  3. Desviación estándar

4. Error cuadrático medio<sup>65</sup>
  5. Percentiles de la distribución de Probabilidad.
  6. Tamaño muestral utilizado e indicación del número de muestras utilizadas y de las desechadas (burn in process).
  7. Creación de intervalos de credibilidad al 95% de confianza estadística.
- 4. A nivel gráfico, Winbugs arroja la siguiente información:**
- a. Historial Dinámico de las trayectorias asociadas a las muestras
  - b. La función densidad de probabilidad a posteriori
  - c. Correlaciones inter-nodo
  - d. La función de autocorrelación
  - e. Cálculo de la deviancia para cada interacción.

## 2. Aplicación de un Modelo Jerárquico con Winbugs

El modelo propuesto tipo Pareto / Poisson es como sigue:

$$f(y) = \frac{ab^y}{y^{a+1}}, \text{ siendo } y \geq b$$

En WinBUGS nuestro modelo completo es así:

$$\begin{aligned}
 Y_i &\sim \text{Pareto}(a, b) & i=1, \dots, k \\
 N_j &\sim \text{Poisson}(\lambda) & j=1, \dots, m \\
 a &\sim \text{gamma}(0,001, 0,001) \\
 b &\sim \text{gamma}(0,001, 0,001) \\
 \lambda &\sim \text{gamma}(0,001, 0,001)
 \end{aligned}$$

Distribuciones previas relativamente no informativas se asignan a los parámetros  $a$ ,  $b$ , y  $\lambda$ . Estas se pudieran reemplazar con previas informativas cuando se conozcan o tenga mayor información de la experiencia estadística del plan. Debe también entenderse que  $\min(Y_i) \geq b$ . Adicional a la inferencia posterior con respecto a los parámetros del modelo  $a$ ,  $b$ , y  $\lambda$  también se hizo una inferencia predictiva con respecto a la distribución agregada de los reclamos del próximo periodo.

<sup>65</sup> Un estimado tipo Monte Carlo de  $\sigma / \sqrt{n}$  de la media.

## 2.1. Especificaciones del modelo y archivos Winugs

Cada uno de los 98 datos asociados a las variables aleatorias respectivas distribuidas idénticamente e independientemente dado los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $\lambda$ .

### 2.1.1. Constantes del modelo

$m$ : Número de meses de datos observados.

$K$ : Número de observaciones relacionadas con los montos reclamados (severidad).

### 2.1.2. Variables del modelo

$n[i]$ : Número de reclamos en cada uno de los seis meses.

$n7$ : Número de reclamos predichos para el próximo mes (# 7).

$\lambda$ : Parámetro de la distribución Poisson. Frecuencia de los reclamos.

$y[i]$ : Tamaño o magnitud de la severidad para el tiempo antes descrito.

$y7$ : Tamaño o magnitud del monto reclamado para el próximo mes (#7)

$\alpha$ ,  $\beta$ : Parámetro de la distribución Pareto para la Severidad.

## 2.2. Salida y análisis de Winbugs

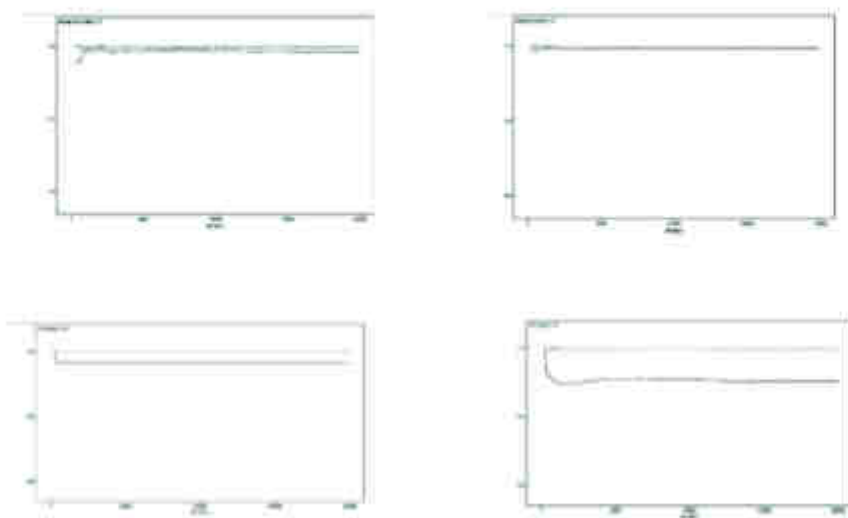
Después de quemar las primeras 1000 iteraciones, los parámetros  $\lambda$ ,  $n7$ ,  $y7$  fueron monitoreados y el resumen estadístico para estos parámetros durante las 40.000 iteraciones muestreadas aparecen a continuación, siguiendo el siguiente orden:

- i. Código en BUGS
- ii. Descripción del modelo
- iii. Estadísticas descriptivas
- iv. Gráfico

### 2.2.1. Modelo jerárquico Pareto - Poisson

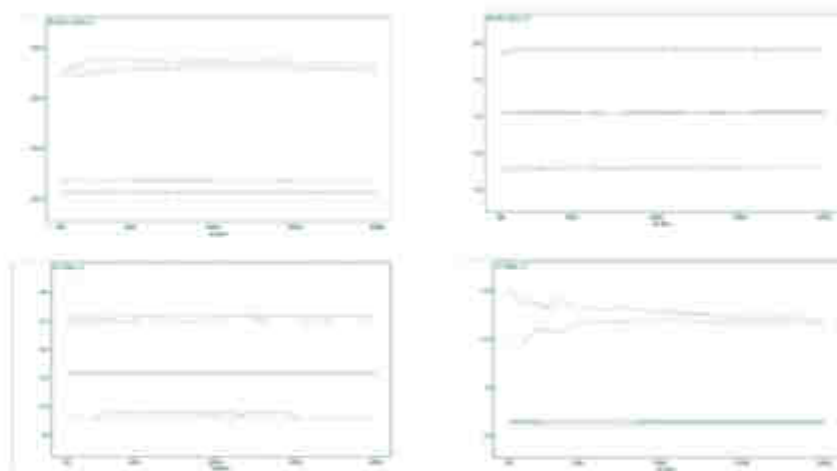
Resultados de la simulación del modelo Pareto - Poisson indicando en detalle el resultado de correr dos cadenas de Markov simultáneamente.





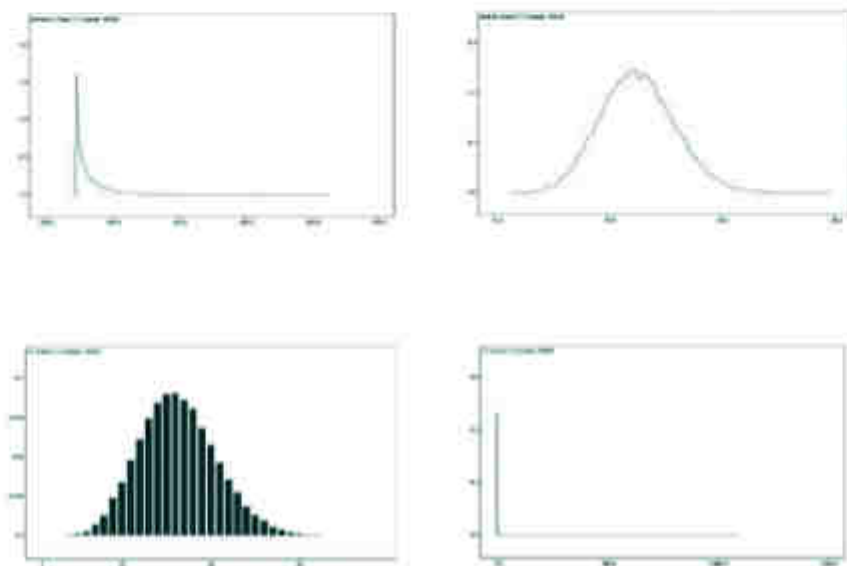
**Gráfico 128: Análisis de convergencia gelman geweke de las cadenas**

Como se desprende del gráfico se garantiza la convergencia de las dos cadenas dado que bajo este criterio los valores alcanzados en la totalidad del número de muestras realizadas son cercanas a uno, especialmente la de color rojo.

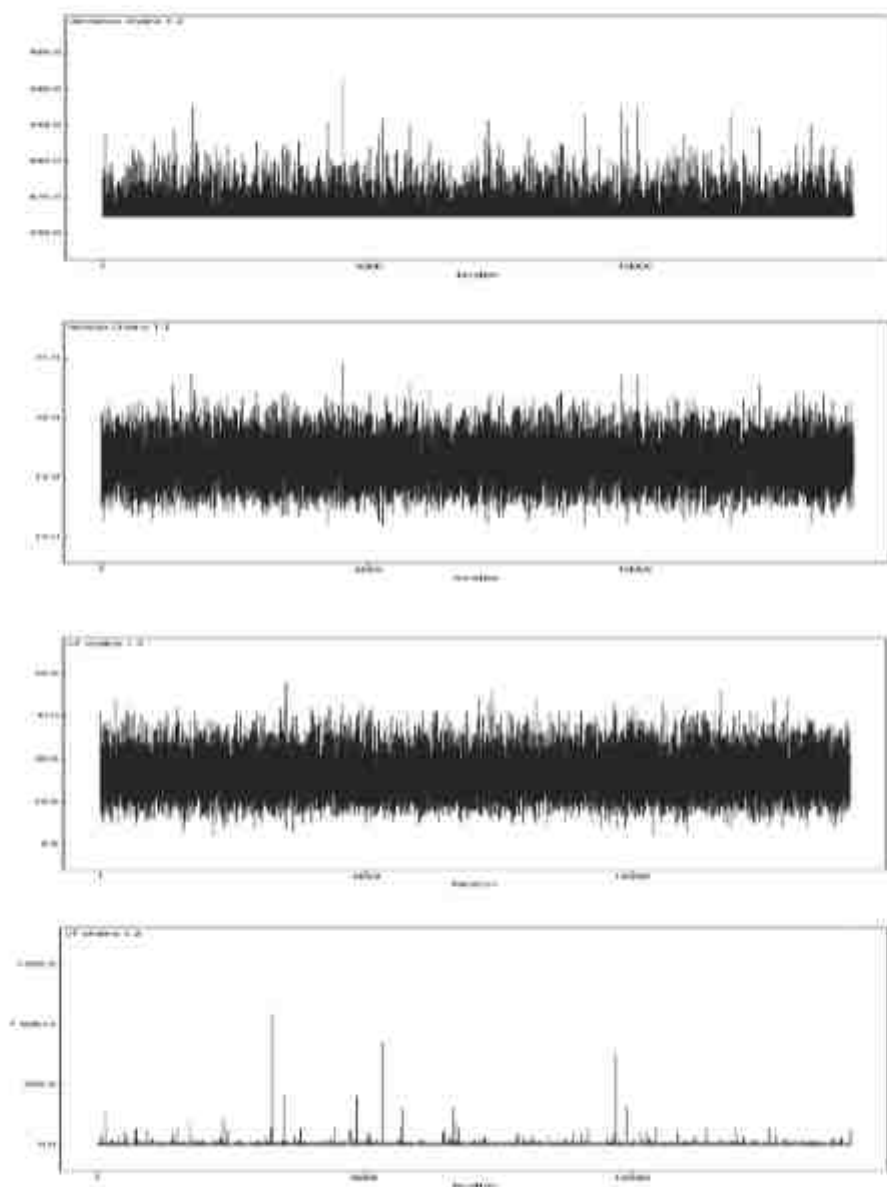


**Gráfico 129: Cuantiles y correlaciones de las dos cadenas simuladas.**

Como se observa de las gráficas anteriores no se observan coeficientes de autocorrelación importantes para los distintos retrasos. Lo anterior implica una caída exponencial rápida desde su inicio y todos los otros coeficientes muy cercanos a cero.



**Gráfico 130.** Densidades a posteriori para  $l$  y la deviancia y para las distribuciones predictivas  $\pi_T$  y  $\gamma_T$  de para ambas cadenas.

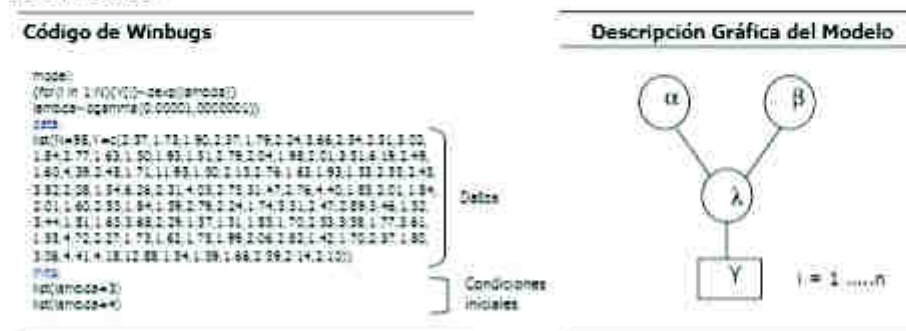


**Gráfico 131. Iteraciones (historial dinámico)**



### 2.2.2. Modelo de la severidad tipo exponencial-gamma

A continuación se presentan los resultados de la simulación del modelo de severidades:



Node	Mean	sd	MCError	2.5%	25.0%	Median	75.0%	90.0%	95.0%	97.5%	Start	sample
deviance	99.72	1.443	0.009473	98.7	99.81	99.17	100.1	101.3	102.9	105.9	11001	20000
lamda	0.00033	8.8816e-4	6.74e-6	8.38e-4	0.001703	0.002219	0.002873	0.003334	0.003938	0.00436	11001	20000

Tabla 60. Estadísticas descriptivas modelo de la severidad tipo exponencial-gamma

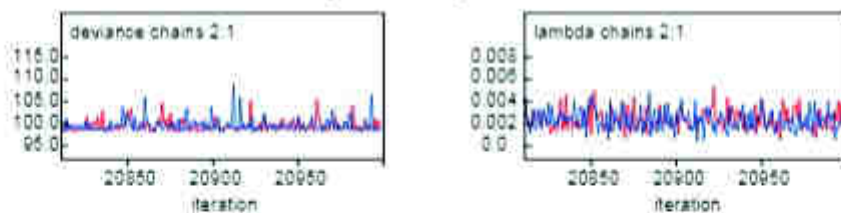


Gráfico 132: Iteraciones del modelo de la severidad tipo exponencial-gamma

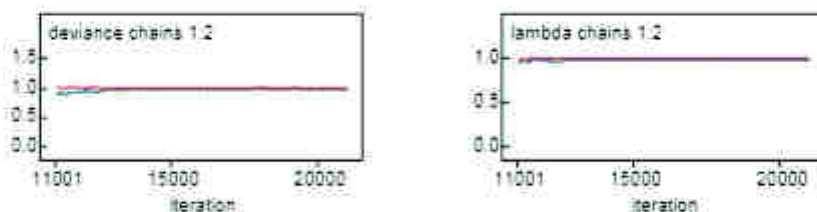
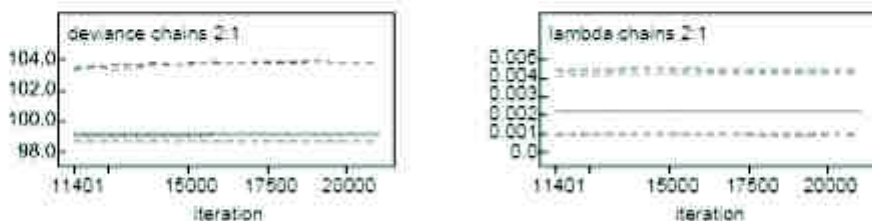


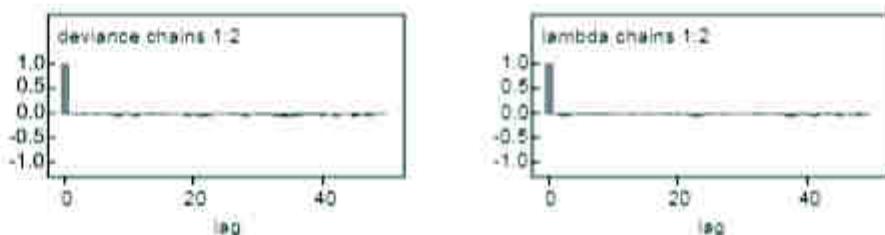
Gráfico 133: Análisis de convergencia Gelman Geweke de las cadenas

Al igual que en el caso de modelo de las frecuencias también se observa convergencia de ambas cadenas para la severidad.

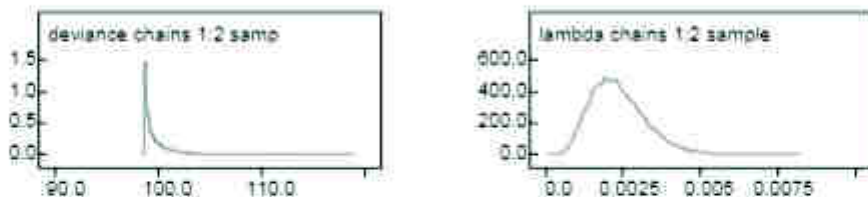
*Cuantile*



*Correlación*



**Gráfico 134:** Cuantiles y correlaciones de las dos cadenas simuladas.



**Gráfico 135:** Densidades a posteriori para  $\lambda$  y la deviancia y para las distribuciones predictivas  $R_T$  y  $Y_T$  de para ambas cadenas.

PÁGINA EN BLANCO

# Capítulo 22

---

## *Caso de estudio*

### **1. Objetivo del estudio**

Constitución del Fondo de Liquidez, basado en la Valoración del Riesgo de los Créditos<sup>69</sup> de la Cartera suministrada por la Institución al 01 de Julio de 2011, y en el aporte inicial contemplado en la Ley de Mercado de Capitales.

El Fondo, representa el pasivo total destinado a cubrir cualquier problema de liquidez derivado del incumplimiento parcial y/o total de la Cartera de Créditos para el período de un (01) año (12 meses), contados a partir de la fecha de valoración.

### **2. Hipótesis y supuestos**

Para llevar a cabo la constitución del fondo de liquidez, la institución suministró como data básica la cartera de créditos al 01 de marzo de 2011,

---

<sup>69</sup> Préstamos hipotecarios de los siguientes Bancos: Banesco, Mercantil, Banco Agrícola de Venezuela, Banco Nacional de Vivienda y Hábitat, Banco Bicentenario, Banco Occidental de Descuento, Banco Caroni, Citibank, Corp Banca, Banco Fondo Común, Banco Industrial de Venezuela, Banco Nacional de Crédito, Banco Sofitasa, Banco del Sur, Banco del Tesoro, Banco de Venezuela.

entendiendo esta última, como una cartera depurada y filtrada previamente por la aaa. La misma representa el sesenta y cuatro por ciento (64%) de la cartera original. Sobre ésta se formularon los siguientes supuestos<sup>70</sup>:

1. Fecha de la valoración: 01 de julio de 2011.
2. Horizonte de valoración: a partir de junio 2011 hasta junio 2012.
3. Tasa de interés: doce por ciento (12%, equivalente al 1% mensual) para capitalizar los aportes y/o descontarlos a valor presente.
4. Tasa de riesgo binomial: tres por ciento (3%), aplicada mensualmente a la cartera inicial y carteras remanentes, durante los doce (12) meses de valoración.
5. Tasa de recuperación promedio de crédito: no se estima un promedio de nivel de recuperación. En esta valoración se asume cero por ciento (0%), y se establece una tasa positiva de recuperación al treceavo mes.
6. Tiempo de interrupción del flujo de caja: un (01) año, doce (12) meses para todos los préstamos muestreados, impagos en el mes correspondiente que se causen.
7. Aporte inicial al fondo: veinte por ciento (20%) de la emisión sobre el monto total.
8. Flujo de caja: se determinarán doce (12) aportes mensuales basados en la severidad registrada en base a la tasa de riesgo.
9. Flujo de caja descontado: estos flujos mensuales de pérdida esperada ajustada, por tasa de recuperación y tiempo de incumplimiento se traerá a valor presente para determinar el pasivo o reserva matemática del fondo, que constituye el valor inicial del fondo de liquidez a la fecha de valoración.

### **3. Metodología utilizada**

Los resultados de este informe, se basan en la determinación de la pérdida esperada que arroja la cartera de créditos contingente basado, en una

---

<sup>70</sup> Se asume independencia estadística en la Cartera de Créditos; es decir, la ocurrencia de un impago de un cliente no implica necesariamente el impago de otros.

frecuencia o tasa de riesgo de incumplimiento estimada en un tres por ciento (3%) de la cartera depurada sobre la base de doce (12) meses futuros.

Cada lote muestreado aleatoriamente para cada uno de los doce (12) meses de valoración, determinan el monto promedio de pérdida nominal mensual de cada uno de los préstamos que entran al muestreo.

A partir de allí, se calcula la pérdida esperada mensual, obtenida como el producto de la frecuencia (tasa de riesgo) y el monto promedio de la severidad de cada muestra mensual. Esa pérdida esperada y su volatilidad constituyen el insumo de los aportes mensuales que se acreditan al fondo, para su constitución a valor presente, es decir, ajustando por una tasa de interés anual distribuida en los doce (12) meses de valoración del fondo.

La metodología utilizada en este informe, contempla tres (03) aspectos:

1. Tratamiento de la base de datos.
2. Método utilizado para modelizar el riesgo.
  - 2.1. Análisis de la frecuencia de créditos.
  - 2.2. Análisis de la frecuencia de la severidad de los créditos muestreados en base a la tasa de riesgo asumida.
3. Modelización de la pérdida esperada
4. Análisis de los créditos vencidos (GAP Analysis) en el horizonte de valoración.

### *3.1 Tratamiento de la base de datos.*

La cartera inicial está constituida por dieciséis (16) archivos contentivos de los 151.167 préstamos para los siguientes bancos:

Banco	Nro. Créditos	%
BANCO AGRICOLA DE VENEZUELA	33	0.02%
BANCO NACIONAL DE VIVIENDA Y HABITAT	8	0.01%
BANESCO	52,557	34.97%
BANCO BICENTENARIO	14,621	9.57%
BANCO OCCIDENTAL DE DESCUENTO	4,948	3.27%
BANCO CARONI	334	0.22%
CITIBANK	635	0.42%
CORP BANCA	1,795	1.19%
BANCO FONDO COMUN	11,969	7.92%
BANCO INDUSTRIAL DE VENEZUELA	1,846	1.22%
BANCO MERCANTIL	32,454	21.47%
BANCO NACIONAL DE CRÉDITO	1,094	0.72%
BANCO SOFITASA	1,831	1.21%
BANCO DEL SUR	4,817	3.19%
BANCO DEL TESORO	6,164	4.09%
BANCO DE VENEZUELA	15,740	10.41%
<b>TOTAL</b>	<b>151,187</b>	<b>100.00%</b>

**Tabla 61. Cartera inicial de créditos**

De cada uno de ellos, se obtuvieron las muestras <sup>71</sup> para generar las pérdidas esperadas de incumplimiento o interrupción del flujo esperado de cuotas, que alimentan el modelo de planificación del flujo de caja proyectado, suministrado por la Institución.

La cartera de créditos cubre un monto total de préstamos iniciales por US\$. 9.877.900.904,08, que fueron otorgados con un valor promedio por préstamo de US\$. 65.346,48 y un máximo de US\$. 350.000,00.

El saldo total actual de la cartera es por el orden de US\$. 9.225.185.427,84, con un promedio de US\$. 83.823,16 y un monto máximo de US\$. 345.592,31.

La cuota mes del saldo actual es del orden de US\$. 71.233.159,93, teniendo un promedio de US\$. 648,58.

De esta cartera se obtuvieron los siguientes créditos, seleccionados aleatoriamente de acuerdo al proceso binomial del tres por ciento (3%) señalado en las hipótesis y supuestos como tasas de riesgo.

<sup>71</sup> Tres por ciento (3%) del total de registros obtenidos, a través de un muestreo aleatorio simple de cada uno de los bancos antes mencionados.

Banco	Nro. Créditos	%
BANCO AGRICOLA DE VENEZUELA	33	0.02%
BANCO NACIONAL DE VIVIENDA Y HABITAT	8	0.01%
BANESCO	52,557	34.97%
BANCO BICENTENARIO	14,621	9.57%
BANCO OCCIDENTAL DE DESCUENTO	4,948	3.27%
BANCO CARONI	334	0.22%
CITIBANK	635	0.42%
CORP BANCA	1,795	1.19%
BANCO FONDO COMUN	11,969	7.92%
BANCO INDUSTRIAL DE VENEZUELA	1,846	1.22%
BANCO MERCANTIL	32,454	21.47%
BANCO NACIONAL DE CRÉDITO	1,094	0.72%
BANCO SOFITASA	1,831	1.21%
BANCO DEL SUR	4,817	3.19%
BANCO DEL TESORO	6,164	4.09%
BANCO DE VENEZUELA	15,740	10.41%
<b>TOTAL</b>	<b>151,187</b>	<b>100.00%</b>

**Tabla 61. Cartera inicial de créditos**

De cada uno de ellos, se obtuvieron las muestras <sup>71</sup> para generar las pérdidas esperadas de incumplimiento o interrupción del flujo esperado de cuotas, que alimentan el modelo de planificación del flujo de caja proyectado, suministrado por la Institución.

La cartera de créditos cubre un monto total de préstamos iniciales por US\$. 9.877.900.904,08, que fueron otorgados con un valor promedio por préstamo de US\$. 65.346,48 y un máximo de US\$. 350.000,00.

El saldo total actual de la cartera es por el orden de US\$. 9.225.185.427,84, con un promedio de US\$. 83.823,16 y un monto máximo de US\$. 345.592,31.

La cuota mes del saldo actual es del orden de US\$. 71.233.159,93, teniendo un promedio de US\$. 648,58.

De esta cartera se obtuvieron los siguientes créditos, seleccionados aleatoriamente de acuerdo al proceso binomial del tres por ciento (3%) señalado en las hipótesis y supuestos como tasas de riesgo.

<sup>71</sup> Tres por ciento (3%) del total de registros obtenidos, a través de un muestreo aleatorio simple de cada uno de los bancos antes mencionados.



Banco	Nro. Registros
BANCO AGRICOLA DE VENEZUELA	1
BANCO NACIONAL DE VIVIENDA Y HABITAT	-
BANESCO	1,577
BANCO BICENTENARIO	439
BANCO OCCIDENTAL DE DESCUENTO	148
BANCO CARONI	10
CITIBANK	19
CORP BANCA	54
BANCO FONDO COMÚN	359
BANCO INDUSTRIAL DE VENEZUELA	55
BANCO MERCANTIL	974
BANCO NACIONAL DE CRÉDITO	33
BANCO SOFITASA	55
BANCO DEL SUR	145
BANCO DEL TESORO	185
BANCO DE VENEZUELA	472
<b>TOTAL</b>	<b>4,526</b>

**Tabla 62. Muestreo del primer mes (Mes 1)**

Para la obtención de las muestras subsiguientes, se fueron eliminando de la cartera inicial el número sucesivo de muestras aleatorias, con la misma tasa de riesgo constante en el horizonte de estudio <sup>72</sup>.

Meses	N° Muestras Obtenidas	N° Créditos Totales
1	4,526	151,167
2	4,397	146,641
3	4,266	142,244
4	4,137	137,987
5	4,016	133,841
6	3,892	129,825
7	3,774	125,933
8	3,654	122,159
9	3,551	118,495
10	3,446	114,944
11	3,341	111,496
12	3,243	108,155
13	3,145	104,912
14	3,049	101,767
15	2,957	98,718
<b>TOTAL</b>	<b>55,406</b>	

**Tabla 63. Muestreo**

<sup>72</sup> La tercera columna muestra la evolución del número de créditos disponible para los subsiguientes muestreos mensuales en los trece (13) meses futuros.

### 3.2. Método utilizado para modelizar el riesgo

#### 3.2.1 Análisis de la frecuencia de créditos<sup>73</sup>

A continuación se describe estadísticamente la frecuencia de créditos en cada muestra mensual y la volatilidad respectiva, la cual oscila en 1,46% y 1,81%:

Mea	Frecuencia (Nro.)	Volatilidad (Nro.)	%
1	4.526	66	1,46%
2	4.397	65	1,49%
3	4.266	64	1,51%
4	4.137	63	1,53%
5	4.016	62	1,55%
6	3.892	61	1,58%
7	3.774	61	1,60%
8	3.661	60	1,63%
9	3.551	59	1,65%
10	3.448	58	1,68%
11	3.341	57	1,70%
12	3.241	56	1,73%
13	3.145	55	1,76%
14	3.049	54	1,78%
15	2.957	54	1,81%
Promedio	3.693	60	1,63%

**Tabla 64: Frecuencia de Créditos**

<sup>73</sup> Basado en un modelo binomial de parámetros  $(n,p)$ , siendo  $n$  el total de créditos de la cartera y  $p$  la tasa o probabilidad de falla.

### 3.2.2. Análisis de la frecuencia de la severidad de los créditos muestreados en base a la tasa de riesgo asumida

Mes	Media	Volatilidad	%
1	414,80	343,48	82,81%
2	391,77	309,30	78,95%
3	431,09	362,19	84,02%
4	433,16	366,13	84,53%
5	437,37	374,46	85,62%
6	442,57	370,85	83,79%
7	458,86	390,43	85,08%
8	429,79	354,10	82,39%
9	443,51	375,12	84,58%
10	440,82	363,37	82,43%
11	426,23	350,02	82,12%
12	427,58	352,77	82,50%
13	434,97	365,64	84,06%
14	450,93	371,30	82,34%
15	441,02	362,48	82,19%
Promedio	433,63	360,78	83,16%

Cifras en US\$.

**Tabla 65: frecuencia de la severidad de créditos**

### 3.3. Modelización de la pérdida esperada

La pérdida esperada se obtiene como el producto del número de créditos muestreados cada mes por la severidad promedio. De esta manera se obtiene la esperanza matemática total del riesgo de crédito, que potencialmente implique problemas de liquidez, al interrumpir el flujo de caja asociado a la recuperación de las cuotas de los créditos otorgados <sup>74</sup>. Igualmente, y para minimizar el riesgo, se calculó el noventa y cinco percentil (95%), para tener todavía mayor severidad.

<sup>74</sup> La interrupción del flujo de caja mensual que eventualmente afectaría los pronósticos seguirán un proceso de escalera decrecientes, en términos del número de meses futuros de impagos, basados en los supuestos. Independientemente que se hizo la valoración para doce (12) meses, se hicieron predicciones a quince (15) meses para proyectar la cartera de marzo 2011.

Meses	Pérdida Esperada	Volatilidad	Aplicación del N° de Meses	Percentil 95 %
1	1.877.384,80	35.907,53	15	1.981.049,34
2	1.722.612,69	32.791,35	14	1.799.016,34
3	1.839.029,94	36.450,30	13	1.923.959,14
4	1.791.982,92	36.159,40	12	1.876.234,33
5	1.756.477,92	36.170,35	11	1.840.734,93
6	1.722.482,44	39.703,22	10	1.805.670,95
7	1.731.813,12	36.690,03	9	1.817.300,89
8	1.573.366,77	33.390,94	8	1.651.167,66
9	1.574.904,01	34.310,65	7	1.654.847,82
10	1.519.947,36	33.244,21	6	1.597.406,37
11	1.424.034,43	31.592,43	5	1.497.644,90
12	1.385.643,30	31.272,94	4	1.458.509,26
13	1.367.990,63	31.585,45	3	1.441.574,75
14	1.374.885,37	31.664,54	2	1.449.362,04
15	1.304.096,14	30.763,83	1	1.375.775,66

Cifras en US\$

Tabla 66: Pérdida esperada

A título de resumen la pérdida esperada se obtiene o se deriva de la frecuencia o de la severidad como sigue:

Gráfico 136: Resumen de la pérdida esperada

	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
	1.899.990,66	1.881.465,14	1.816.978,14	1.781.214,24	1.792.166,22	1.826.294,87	1.831.345,03
		1.899.990,66	1.881.465,14	1.816.978,14	1.781.214,24	1.792.166,22	1.826.294,87
			1.899.990,66	1.881.465,14	1.816.978,14	1.781.214,24	1.792.166,22
				1.899.990,66	1.881.465,14	1.816.978,14	1.781.214,24
					1.899.990,66	1.881.465,14	1.816.978,14
						1.899.990,66	1.881.465,14
							1.899.990,66
Total Mensual:	1.899.990,66	1.792.458,82	1.888.432,88	1.747.842,20	1.126.816,42	1.766.111,29	12.299.438,31
Total Acumulado:		1.792.458,82	3.616.891,70	16.664.507,90	20.004.354,40	38.572.465,69	48.971.921,99

Cifras en US\$

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
	1.874.634,08	1.476.004,08	1.437.087,29	1.419.938,71	1.427.467,29	1.354.702,84
	1.831.345,03	1.874.634,08	1.476.004,08	1.437.087,29	1.419.938,71	1.427.467,29
	1.826.294,87	1.831.345,03	1.874.634,08	1.476.004,08	1.437.087,29	1.419.938,71
	1.792.166,22	1.826.294,87	1.831.345,03	1.874.634,08	1.476.004,08	1.437.087,29
	1.781.214,24	1.792.166,22	1.826.294,87	1.831.345,03	1.874.634,08	1.476.004,08
	1.816.978,14	1.781.214,24	1.792.166,22	1.826.294,87	1.831.345,03	1.874.634,08
	1.851.465,14	1.816.978,14	1.781.214,24	1.792.166,22	1.826.294,87	1.831.345,03
	1.899.990,66	1.851.465,14	1.816.978,14	1.781.214,24	1.792.166,22	1.826.294,87
		1.899.990,66	1.851.465,14	1.816.978,14	1.781.214,24	1.792.166,22
			1.899.990,66	1.851.465,14	1.816.978,14	1.781.214,24
				1.899.990,66	1.851.465,14	1.816.978,14
					1.899.990,66	1.851.465,14
						1.899.990,66
Total Mensual:	13.974.090,40	19.480.094,45	16.837.161,74	16.507.120,48	19.734.507,89	21.009.280,33
Total Acumulado:	82.948.012,99	78.366.108,84	96.000.268,58	115.690.408,04	103.324.996,73	164.414.287,06

Cifras en US\$

### 3.4. Análisis de los créditos vencidos en el horizonte de valoración

Como parte del análisis, se obtuvieron a partir de la cartera de crédito inicial, el número y la cuantía de la cuota por concepto de amortización de los préstamos que vencían en el período de un (01) año <sup>75</sup>.

Tiempo	Mes	Nro. Créditos Vencidos	Vencida (US\$)
Marzo	Mes 1	19	5,526.73
Abril	Mes 2	15	4,078.18
Mayo	Mes 3	13	2,808.11
Junio	Mes 4	14	3,951.81
Julio	Mes 5	26	7,462.35
Agosto	Mes 6	15	3,709.46
Septiembre	Mes 7	16	6,200.57
Octubre	Mes 8	21	6,511.20
Noviembre	Mes 9	21	7,258.88
Diciembre	Mes 10	20	7,295.52
Enero	Mes 11	29	8,438.65
Febrero	Mes 12	31	11,465.73
Marzo	Mes 13	21	5,707.78
Abril	Mes 14	23	5,324.52
Mayo	Mes 15	21	5,290.88
Total		305	90,835.90

**Tabla 67: Créditos vencidos**

Como se deriva de la tabla anterior, el monto de la cuota vencida total en los quince (15) meses es US\$. 90.835,93, la cual es inmaterial en orden de magnitud con la estimación de la cuota total por percibir, estimada por el orden de US\$. 71.233.159,93 al mes. No obstante es importante saber la frecuencia de préstamos que extinguen su deuda y los montos correspondientes de la cuota extinguida.

El nuevo total de créditos vencidos o extinguidos es por el orden de trecientos cinco (305) <sup>76</sup>, con una distribución relativamente uniforme por mes, tal como se puede apreciar en la tabla anterior. El monto total de la cuota extinguida <sup>77</sup> como un porcentaje de la cuota es menor al uno por ciento (exactamente 0,13%).

<sup>75</sup> Año 2011.

<sup>76</sup> El número de créditos vencidos en promedio es de aproximadamente veinte (exactamente 20,3).

<sup>77</sup> El promedio de cuota mensual vencida es de aproximadamente seis mil cincuenta y cinco dólares (exactamente US\$. 6.055,36).

#### 4. Resultados de la valoración

El flujo de caja se expresa en función de la pérdida esperada media, que constituyen los aportes al fondo, en el horizonte de doce (12) meses consecutivos, ajustados por una tasa de interés del doce por ciento (12%) anual, convertible mensualmente en el equivalente del uno por ciento (1%) mensual.

El valor acumulado del flujo de caja <sup>78</sup> descontado, más el aporte inicial al fondo del veinte por ciento (20%) de la emisión total, da como resultado:

Meses	Sin Cuota Inicial		Con Cuota Inicial (20%)	
	Flujo de Caja	Valor Presente	Flujo de Caja Acumulado	Valor Presente Acumulado
1	3,750,455.82	3,713,322.60	1,863,545,235.00	1,863,508,101.78
2	5,566,433.96	5,511,320.75	1,869,111,668.96	1,869,019,422.53
3	7,347,648.20	7,274,899.21	1,876,459,317.16	1,876,294,321.74
4	9,139,816.42	9,049,323.18	1,885,599,133.58	1,885,343,644.92
5	10,768,111.28	10,661,496.32	1,896,367,244.86	1,896,005,141.24
6	12,399,456.31	12,276,689.42	1,908,766,701.18	1,908,281,830.66
7	13,974,090.40	13,835,733.06	1,922,740,791.57	1,922,117,563.73
8	15,450,094.45	15,297,123.22	1,938,190,886.02	1,937,414,686.94
9	16,887,181.74	16,719,981.92	1,955,078,067.76	1,954,134,668.87
10	18,307,120.46	18,125,861.84	1,973,385,188.22	1,972,260,530.70
11	19,734,587.69	19,539,195.73	1,993,119,775.91	1,991,799,726.44
12	21,089,290.33	20,880,465.48	2,014,209,066.24	2,012,680,211.92

Cifras en US\$.

**Tabla 68. Flujo de caja**

En los doce (12) meses de proyección se recogen los flujos y caja de los aportes al fondo, derivando de la acumulación de las pérdidas potenciales de los impagos, sus valores presentes respectivos. En el caso de los flujos acumulados, se incorpora el desembolso inicial del veinte por ciento (20%).

<sup>78</sup> Pérdida Esperada Acumulada, en base al sistema de escalera anteriormente comentado, que acumula sistemáticamente las pérdidas acumuladas del periodo inmediatamente anterior más los que se generan en periodo cualquiera de los doce (12) meses.

El Flujo de Caja Total de Obligación es por el orden de:

- Sin Descontar: US\$. 2.014.209.066,92.
- Descontando: US\$. 2.012.680.211,92.

#### 4.1. Simulación Montecarlo

Aproximando todas las pérdidas esperadas mensuales a una distribución normal con parámetros conocidos y estimados para cada mes, se corrieron cinco mil (5.000) simulaciones.

De la aplicación de la metodología anterior, y en base a los datos suministrados por la institución y los supuestos e hipótesis acordados, se estimó un monto máximo teórico de US\$. 2.016.063.997,89, para constituir el fondo de liquidez, monto que cubriría los potenciales impagos contingentes que pudieran afectar el flujo de caja, por la vía de los ingresos de la institución, achacables a la recaudación de la cartera de créditos subyacente.

Ese monto, recomendado como pasivo inicial, estaría constituido por el veinte por ciento (20%) de la emisión como aporte inicial más el valor presente de las futuras contribuciones mensuales por el año de las pérdidas esperadas contingentes.

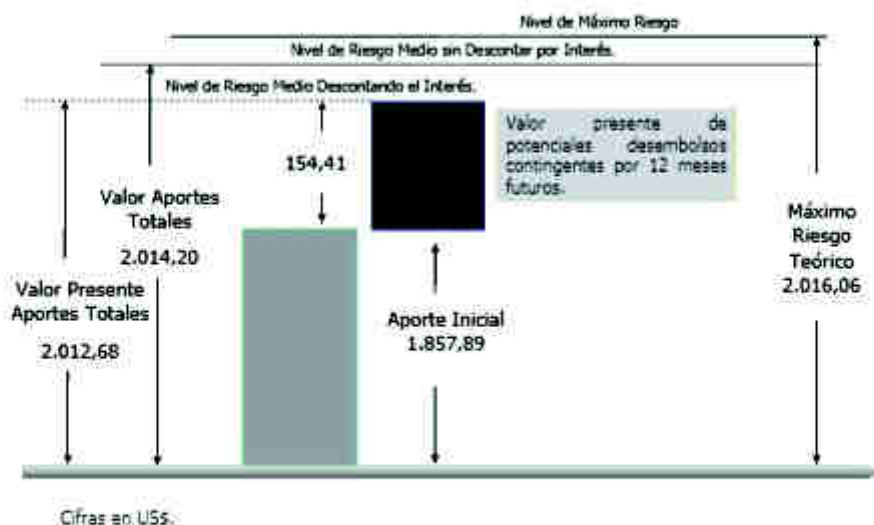


Gráfico 137: Fondo de liquidez

## 5. Sensibilidad del Pasivo

Del análisis de sensibilidad de las tasas de interés para actualizar los flujos de caja asociados a la contribución mensual, se obtuvieron los siguientes resultados:

	Valor Presente Acumulado (1)	Valor Presente Acumulado (2)	Valor Presente Acumulado (3)	Valor Presente Acumulado (4)	Valor Presente Acumulado (5)	Valor Presente Acumulado (6)	Valor Presente Acumulado (7)
Tasa	8,0000%	8,0000%	8,0000%	8,0000%	8,0000%	8,0000%	8,0000%
Inter	2.012.442.899,89	2.012.216.207,10	2.012.181.769,20	2.012.054.204,81	2.012.027.820,79	2.012.011.161,11	2.012.004.810,10
Inter*	2.012.420.247,22	2.012.207.844,42	2.012.182.000,85	2.012.054.200,85	2.012.027.222,88	2.012.000.981,83	2.012.0074,81 (1,20)
Flujo	---	---	---	---	---	---	---
Beneficio/Desvalor	1,21 (2,12) %	1,22 (2,05) %	1,21 (2,04) %	1,21 (1,93) %	1,21 (1,81) %	1,21 (1,69) %	1,21 (1,59) %
Uptarea	-1.042.878.280,01 (5,19)	-1.041.178.781,87 (5,15)	-1.039.480,611 (0,05)	-1.037.788.882,82 (5,1)	-1.036.102.089,75 (5,1)	-1.034.420.222,29 (5,1)	-1.032.741.742,81 (5,1)
Desvalor	-0,32	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02
Costos	2,85	2,85	2,85	2,85	2,85	2,85	2,85
Costo de Inversión	0,0000072	0,0000088	0,0000084	0,0000081	0,0000087	0,0000092	0,0000046
Stimulo	2.028.297.297,13	2.028.172.485,71	2.028.146.779,42	2.028.020.277,06	2.028.002.400,43	2.028.078.295,81	2.028.248.880,81
Uptarea	2.017.132.249,41	2.017.202.377,84	2.018.274.115,84	2.018.742.210,87	2.018.812.847,79	2.018.454.370,88	2.018.255.128,81
Valor Sin. Exp.	14.442,13	14.432,38	14.418,82	14.408,87	14.398,18	14.388,48	14.377,79

Tabla 69: Sensibilidad del pasivo

Se modelaron un total de siete (07) escenarios, desde un seis por ciento (6%) hasta un doce (12%) convertibles a la tasa de uno por ciento (1%) mensual.

De la tabla anterior, se observa como era de esperarse, que a mayor tasa de interés utilizada para descontar las obligaciones, menor es el flujo respectivo, en término de valor presente.

Dado que el horizonte de la valoración es de un (01) año, los flujos descontados no muestran diferencias significativas grandes; sin embargo, sea cual fuese la política final adoptada, sugerimos la capitalización del fondo.

## 6. Impacto en el Flujo de Caja Proyectado

La institución, desarrolló en base a unos supuestos macroeconómicos, una proyección de su caja hasta diciembre 2011. Sobre esta base, que nosotros asumimos como datos duros de la planificación financiera de su caja, contrastamos la pérdida agregada y simultáneamente un efecto de una baja en la tasa de interés en las cuotas. El impacto de la baja de un por ciento (1%), impacta el ingreso de recaudación de cuotas por este concepto en un 8,98% <sup>79</sup>.

<sup>79</sup> A nivel de la cartera total: 8,98%.



Tomando en cuenta simultáneamente la baja de interés en un punto porcentual, de acuerdo a la siguiente distribución y la pérdida neta contingente.

	Cuota Total	Dif	Dif Acumulada
Nro. Créditos	151,167		
Cuota Actual	71,233,159.93	0.00%	0.00%
Cuota - 1%	65,365,733.80	-9.98%	-8.99%
Cuota - 1,5%	62,529,061.69	-4.54%	-13.51%
Cuota - 2%	59,759,669.83	-4.63%	-18.15%

Cifras en US\$.

**Tabla 70: Análisis de sensibilidad**

Se obtienen los siguientes resultados <sup>80</sup>:

	Sep-10	Oct-10	Nov-10	Dic-10	Ene-11	Feb-11
Total Recuperación	345,143,908.12	358,547,810.38	355,244,120.37	372,182,072.29	376,283,847.47	402,002,311.14
Recuperación de Créditos	109,833,699.00	105,648,890.87	122,870,721.24	123,994,863.20	111,651,819.01	109,187,779.88
Recuperación Neta	329,336,197.99	320,218,104.22	304,519,640.80	349,244,989.38	357,930,498.34	384,568,908.89
Flujo Neto	81,248,120.18	122,132,817.41	122,727,890.99	298,447,898.84	372,833,724.87	236,940,747.88
Flujo Proyectado						
Pérdida Neta						
	Mar-11	Abr-11	May-11	Jun-11	Jul-11	Ago-11
Total Recuperación	419,708,811.41	293,491,379.29	377,444,740.97	387,382,980.22	372,819,208.00	293,089,489.28
Recuperación de Créditos	129,215,002.62	105,880,810.43	118,288,181.30	137,287,280.73	129,628,191.48	118,140,994.28
Recuperación Neta	296,740,159.79	210,281,209.88	282,888,424.82	341,740,647.77	287,720,402.87	274,838,008.87
Flujo Neto	187,811,423.07	124,683,433.22	108,382,819.81	137,239,348.48	117,288,301.38	140,892,008.88
Flujo Proyectado				42,209,348.48	82,891,301.38	78,211,008.88
Pérdida Neta				348,990.78	2,781,488.84	3,899,483.40
	Sep-11	Oct-11	Nov-11	Dic-11		
Total Recuperación	359,481,000.71	324,001,037.82	348,732,320.81	300,382,092.70		
Recuperación de Créditos	121,718,188.39	125,840,813.17	127,247,140.87	142,818,797.44		
Recuperación Neta	341,320,040.41	298,289,702.80	329,281,389.00	477,818,810.00		
Flujo Neto	107,488,499.13	100,018,181.33	148,607,199.78	242,554,237.30		
Flujo Proyectado	42,341,499.13	87,818,181.33	31,138,799.78	178,414,237.30		
Pérdida Neta	7,247,843.20	9,128,818.48	18,759,111.22	18,299,498.21		

Cifras en US\$.

**Tabla 71: pérdida agregada y flujo de caja**

<sup>80</sup> A nivel de la muestra: 8.18%.

	Sep-10	Oct-10	Nov-10	Dic-10	Ene-11	Feb-11
Total Recaudación	345,142,866.12	336,847,870.38	333,244,100.37	372,188,072.08	370,383,847.47	402,032,211.14
Recuperación de Crédito	108,833,689.00	108,848,880.87	122,878,731.24	123,994,863.20	111,681,818.01	129,187,778.88
Recaudación Neta	236,309,177.99	228,018,104.22	210,365,369.13	248,193,208.88	258,702,029.46	272,844,432.26
Flujo Neto	81,243,100.18	122,132,937.41	122,727,880.89	288,447,829.84	372,633,704.87	436,940,747.88
Flujo Projectado						
Flujo Projectado Ajustado (-1%)						
Pérdida Neta						
Pérdida Neta (-1%)						
Flujo Neto Projectado						

	Mar-11	Abr-11	May-11	Jun-11	Jul-11	Ago-11
Total Recaudación	419,738,511.41	398,490,179.29	370,444,140.97	387,882,362.28	370,818,108.00	393,069,486.28
Recuperación de Crédito	128,916,382.83	108,656,810.43	118,288,181.53	107,227,280.73	128,508,191.28	118,140,884.58
Recaudación Neta	290,822,128.58	289,833,368.86	252,155,959.44	280,655,081.55	242,309,916.72	274,928,601.70
Flujo Neto	187,811,428.07	124,683,433.29	126,388,518.81	107,289,848.49	82,981,801.58	76,232,028.91
Flujo Projectado				42,289,848.49	82,981,801.58	76,232,028.91
Flujo Projectado Ajustado (-1%)						
Pérdida Neta				1,288,990.88	1,762,488.82	5,668,433.98
Pérdida Neta (-1%)						
Flujo Neto Projectado						

	Sep-11	Oct-11	Nov-11	Dic-11
Total Recaudación	369,483,680.71	384,831,088.82	288,739,381.81	400,582,082.70
Recuperación de Crédito	121,718,188.88	133,840,913.17	127,247,140.87	142,816,797.44
Recaudación Neta	247,765,491.83	250,990,175.65	161,492,240.94	257,765,285.26
Flujo Neto	107,488,439.13	132,018,181.33	148,807,788.78	243,684,937.80
Flujo Projectado	42,841,409.13	87,818,181.33	81,132,788.78	178,414,937.80
Flujo Projectado Ajustado (-1%)	31,811,418.48	86,421,207.33	69,788,368.53	184,616,929.28
Pérdida Neta	7,147,848.30	6,109,818.42	10,788,111.28	12,398,488.31
Pérdida Neta (-1%)	8,746,618.58	8,382,178.44	9,687,219.78	11,388,188.78
Flujo Neto Projectado Fina	28,164,804.90	48,229,027.89	69,655,688.78	185,231,748.81

**Tabla 72: pérdida agregada y flujo de caja ajustado al uno por ciento (-1%)**

De las tablas anteriores se deriva todavía un flujo de caja proyectado ajustado positivo y creciente, ceteris paribus al resto de las variables financieras que toma la institución <sup>31</sup> en sus proyecciones.

<sup>31</sup> La institución deberá obtener de otros recursos el aporte inicial de los US\$ 1.857.895.788,50 Para mantener su flujo como se muestra en la tabla anterior; tal como lo considera en su presentación de "Titularización Cartera Obligatoria" que nos suministro.

	Sep-10	Oct-10	Nov-10	Dic-10	Ene-11	Feb-11
Total Recaudación	345,143,568.12	336,547,670.36	355,244,120.37	672,169,072.09	678,565,947.47	402,030,311.14
Recuperación de Crédito	109,833,698.00	106,646,690.97	122,978,731.34	128,994,863.20	111,665,919.21	109,167,779.86
Recaudación Neta	235,309,870.12	229,899,979.39	232,265,389.03	543,174,208.89	566,900,028.26	292,862,531.28
Flujo Neto	51,248,100.15	122,132,937.41	121,727,660.96	236,447,898.54	372,630,724.87	236,940,747.66
Flujo Proyectado						
Flujo Proyectado Ajustado (-1,5%)						
Perdida Neta						
Perdida Neta (-1,5%)						
Flujo Neto Proyectado Final						

	Mar-11	Abr-11	May-11	Jun-11	Jul-11	Ago-11
Total Recaudación	419,736,311.41	390,450,379.39	370,444,140.87	367,962,962.55	370,616,308.00	393,059,459.29
Recuperación de Crédito	129,916,282.62	106,659,610.45	116,299,161.32	107,227,280.73	126,629,191.26	116,140,664.06
Recaudación Neta	289,820,028.79	283,790,768.94	254,144,979.55	260,735,681.82	243,987,116.74	276,918,795.23
Flujo Neto	167,611,428.07	124,003,433.29	108,383,919.51	107,269,946.49	117,568,901.59	140,962,028.56
Flujo Proyectado				42,269,946.49	82,991,301.59	76,232,028.56
Flujo Proyectado Ajustado (-1,5%)						
Perdida Neta				1,690,992.68	3,760,486.82	6,968,433.98
Perdida Neta (-1,5%)						
Flujo Neto Proyectado Final						

	Sep-11	Oct-11	Nov-11	Dic-11
Total Recaudación	569,483,600.71	584,601,038.62	599,769,391.61	600,362,092.70
Recuperación de Crédito	121,716,186.29	123,840,610.17	127,247,140.67	142,616,797.44
Recaudación Neta	447,767,414.42	460,760,428.45	472,522,250.94	457,745,295.26
Flujo Neto	107,468,439.13	132,016,181.33	148,607,789.73	243,664,937.80
Flujo Proyectado	42,641,409.13	87,916,181.33	91,132,789.73	178,414,937.80
Flujo Proyectado Ajustado	26,297,717.56	60,324,603.96	62,941,671.06	160,160,910.47
Perdida Neta	7,347,548.20	6,129,616.42	10,768,111.20	12,399,458.31
Perdida Neta (-1,5%)	6,426,907.00	7,994,997.42	9,416,666.94	10,048,004.43
Flujo Neto Proyectado Final	19,970,729.72	42,632,208.54	64,632,904.12	148,316,114.03

Cifras en US\$

**Tabla 73: Pérdida agregada y flujo de caja ajustado al uno y medio por ciento (-1,5%)**

	Sep-10	Oct-10	Nov-10	Dic-10	Ene-11	Feb-11
Total Recaudación	145.140.998.12	308.947.970.35	383.244.120.87	972.188.072.29	978.383.947.47	402.332.311.14
Recuperación de Crédito	109.633.899.00	106.840.890.87	122.876.731.24	128.394.863.00	111.881.818.01	109.167.778.66
Recaudación Neta	35.507.099.12	202.107.079.48	260.367.389.63	843.793.209.29	866.502.129.46	293.164.532.48
Flujo Neto	51.248.130.15	122.132.937.41	122.727.690.69	208.447.699.94	972.633.724.87	208.940.747.95
Flujo Proyectado						
Flujo Proyectado Ajustado (-2%)						
Pérdida Neta						
Pérdida Neta (-2%)						
Flujo Neto Proyectado Final						

	Mar-11	Abr-11	May-11	Jun-11	Jul-11	Ago-11
Total Recaudación	419.736.211.41	390.450.379.39	370.444.140.87	387.962.960.26	370.518.309.00	393.080.489.28
Recuperación de Crédito	129.916.100.82	106.898.810.43	119.296.181.32	107.207.280.73	128.526.191.26	118.140.894.06
Recaudación Neta	289.820.110.59	283.551.568.96	251.147.959.55	280.755.679.53	241.992.117.74	274.939.595.22
Flujo Neto	167.511.428.07	124.833.433.29	109.382.818.81	107.209.948.48	117.888.901.39	140.982.009.83
Flujo Proyectado				42.208.948.48	82.991.801.39	78.232.008.60
Flujo Proyectado Ajustado (-2%)						
Pérdida Neta				1.096.960.68	3.740.489.82	6.666.433.98
Pérdida Neta (-2%)						
Flujo Neto Proyectado Final						

	Sep-11	Oct-11	Nov-11	Dic-11
Total Recaudación	269.483.830.71	324.691.038.82	399.786.391.81	800.382.092.70
Recuperación de Crédito	121.716.188.39	123.940.913.17	127.247.140.87	142.518.797.44
Recaudación Neta	147.767.642.32	200.750.125.65	272.539.250.94	657.863.295.26
Flujo Neto	107.486.439.13	132.016.181.33	149.607.789.78	242.964.937.80
Flujo Proyectado	42.341.438.15	87.915.181.33	81.132.789.78	179.414.937.80
Flujo Proyectado Ajustado (-2%)	29.786.132.96	49.092.609.59	60.037.403.74	153.548.139.06
Pérdida Neta	7.347.842.20	9.128.918.42	12.788.111.26	12.399.499.31
Pérdida Neta (-2%)	6.100.792.20	7.988.789.67	9.940.762.80	10.299.298.67
Flujo Neto Proyectado Final	14.649.380.65	37.603.718.00	49.099.942.94	143.292.070.48

Cifras en US\$

**Tabla 74: Pérdida agregada y flujo de caja ajustado al dos por ciento (-2%)**

## 7. Recomendaciones

En base a todos los resultados obtenidos, en cada una de las secciones anteriores de este informe, se concluye y recomienda lo siguiente:

1. La Institución deberá hacer una provisión a valor presente de US\$. 2.012.680.211,92 <sup>82</sup>, para constituir el fondo de liquidez, entendiendo este monto como una reserva contingente que cubre doce (12) meses futuros. Si se desea cubrir el máximo riesgo teórico, la provisión debería ser por el orden de 2.016.063.997,89, y por el contrario si no se ajusta por interés, la provisión debería ser entonces por un monto de 2.014.209.066.92.

<sup>82</sup> Riesgo máximo teórico en doce (12) meses. Ver detalles de la Simulación Montecarlo en los anexos.

2. Somos del criterio de llevar una contabilidad del fondo aparte, de manera que anualmente se puedan registrar todos los movimientos de la obligación o pasivo antes mencionado, con el fin de acreditar todas las ganancias de capital y debitar todos los auxilios por impagos de los créditos, ceteris Paribus todas las demás variables.
3. Recomendamos, igualmente, hacer revisiones semestrales, en la oportunidad del cierre fiscal de la institución, durante el primer año, con el fin de testear la evolución del fondo.
4. En algún momento, una vez hecha la emisión, sería recomendable hacer un estudio de planificación financiera de los GAP de la cartera de créditos y de las cédulas a cinco (05) años futuros con una frecuencia mensual.
5. La Institución, debería desarrollar una política y manual de los usos y fuentes del Fondo de Liquidez para normar su aplicación futura.
6. De contemplar una política de capitalización del fondo, el o los instrumentos deben ser muy líquidos, con el objeto de no contradecir el objetivo del fondo para el cual fue constituido. De la experiencia estadística del riesgo de este año, puede derivarse la conveniencia de estudiar la creación de un portafolio de inversiones siempre de alta liquidez.
7. Todos los casos de impagos<sup>23</sup> de los créditos que ocurran, deberían documentarse adecuadamente, con el objeto de determinar de una manera clara los siguientes aspectos:
  - Número de impagos al mes.
  - Número de créditos vencidos.
  - Cuantía de la cuota impagada.

---

<sup>23</sup> Sería igualmente recomendable llevar un registro de todos los créditos con algún problema de pago que atente contra la liquidez en un registro de recuperaciones.

PÁGINA EN BLANCO



# Bibliografía

---

## I. Libros

**Bartholomew, D. J.** (1973). *Stochastic Models for Social Process*. (2nd Edition) London, John Wiley and Sons.

**Bowers, N. L. et. Al.** (1997). *Actuarial Mathematics Society of Actuaries*. Chicago.

**Buhlman, M.** (1970). *Mathematical Models in Risk Theory*. Heidelberg: Springer-Verlag.

**Cox, D.R. y Miller, H.D.** (1965). *The Theory of Stochastic Processes*. First Edition. London: Chapman & Hall.

**Diz Cruz, Evaristo** (2004). *Introducción a la Teoría de Riesgo*. Bogotá: Global Ediciones.

**Dufresne, D.** (1993). *Some Aspects of Statement of Financial Accounting Standards N° 87*. February. Chicago.

**Everitt, Brian S.** (1994). *A Handbook of Statistical Analyses using S-PLUS*. First Edition. London: Chapman & Hall.

# Bibliografía

---

## I. Libros

**Bartholomew, D. J.** (1973). *Stochastic Models for Social Process*. (2nd Edition) London, John Wiley and Sons.

**Bowers, N. L. et. Al.** (1997). *Actuarial Mathematics Society of Actuaries*. Chicago.

**Buhlman, M.** (1970). *Mathematical Models in Risk Theory*. Heidelberg: Springer-Verlag.

**Cox, D.R. y Miller, H.D.** (1965). *The Theory of Stochastic Processes*. First Edition. London: Chapman & Hall.

**Diz Cruz, Evaristo** (2004). *Introducción a la Teoría de Riesgo*. Bogotá: Global Ediciones.

**Dufresne, D.** (1993). *Some Aspects of Statement of Financial Accounting Standards N° 87*. February. Chicago.

**Everitt, Brian S.** (1994). *A Handbook of Statistical Analyses using S-PLUS*. First Edition. London: Chapman & Hall.



**Feller, W.** (1957). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 1. New York: Wiley.

**Gerber, H.** (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Huebner Foundation, Pennsylvania University of Pennsylvania.

**Goldstein, H. y Browne, W.** (2005). *Multilevel Factor analysis models for continuous and discrete data*. London sage university press.

**Hull, D.** (1998). *Implementing Derivatives Models*. New York. Wiley & Sons.

**Kazzarinoff, Nicholas D.** (1964). *Analytic Inequalities*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

## II. Artículos y/o trabajos de investigación

**Adler Frederick.** (2002). "Modeling the dynamics of life". University of Utah, USA.

**American Academy of Actuaries.** (2002). "Fair Valuation of Insurance Liabilities: Principles and Methods" Public Policy Monograph, September.

**Bissonnette, Charles E.** (2004). "Cost of Living" American Society of Pension Actuaries Education and Examination Committees, Chicago.

**Carberry, John P. y Roenisch, Davis H** (2004). "The Impact of Inflation of Pension Plan Costs" American Society of Pension Actuaries Education and Examination Committees, Chicago.

**Hazelhurst, Blackburn N.** (2004). "Adjusting Benefits and Funding for Cost-of-Living Increases" American Society of Pension Actuaries Education and Examination Committees, Chicago.

**Higgins Tim.** (2003). "Mathematical Models of Mortality". Australian National University, Australia.

**Jackson, Paul H.** (2004). "Inflation Interest Rates and Salary Scales" American Society of Pension Actuaries Education and Examination Committees, Chicago.

**Jonker M.A y Van der Varrt A.W.** (2005). "Estimation of average mortality under censoring and truncation". Universiteit Amsterdam, Holanda.

**Kruse Agneta.** (2006). "Ageing populations and intergenerational risk-sharing in pay pension schemes". Lund University, Sweden.

- Milevsky M.** (2002). *"Modeling longevity risk"*. York University, Canada.
- Mitchell Olivia** (2000). *"The Simple Economics of Social Security"* Flagship Course in Pension Reform, World Bank Institute, March.
- Monette G., Shao Q., y Kwan E.** (2001). *"A first look at Multilevel Models"* Institute for Social Research Statistical Consulting Service, York University, October - November.
- Schreiner, William.** (2004). *"Group Insurance Premium Development"* American Society of Pension Actuaries Education and Examination Committees, Chicago.
- Smith A.D. y Southall F.E.** (2001). *"A Stochastic Asset Model for Fair Values in pensions and Insurance"*, B&W Deloitte, November.
- Tryfos, Peter** (2001). *"Life Insurance and Pensions"*, Working Paper, York University, March.
- Vasiljevic Luma.** (2003). *"Modeling the age distribution of a population"*. Michigan State University, USA.
- Ward, Lisa S. y Lee. David H.** *"Practical Applications of the Risk-Adjusted Return on Capital Framework"*.

PÁGINA EN BLANCO

## Otros títulos de su interés

Contabilidad de costos  
*Gonzalo Sinisterra Valencia*

Diccionario de términos  
financieros y bancarios  
*Robert Marcuse*

Costos para PyME  
*Carlos Augusto Rincón*

Gestión financiera  
*Marcial Córdoba Padilla*

Finanzas públicas  
*Marcial Córdoba Padilla*

Hacienda pública.  
Las finanzas del estado  
*Alfonso Ortega C.*

# Teoría de riesgo



En esta cuarta Edición se incluyen temas de gran interés en el mundo de la Estadística Actuarial como lo es la aplicación de Métodos Bayesianos a los Modelos de Riesgo Colectivo, utilizados en los seguros.

Igualmente se trata el tema de las Pensiones y Jubilaciones dentro del contexto de las Normas de Contabilidad Internacionales NIC.19, Basilea y Solvencia II.

Al igual que la tercera edición, la orientación de esta obra es hacia la práctica inmediata de todos los conceptos de la Teoría Básica de Riesgo y está dirigida a lectores familiarizados con los conceptos fundamentales de Probabilidad, Estadística, Cálculo Diferencial y Procesos de Simulación Estocástica.

**Colección:** Ciencias empresariales  
**Área:** Contabilidad y finanzas

ECOE  
EDICIONES

