TRATADOS Y MANUALES DE ECONOMÍA

EDICIÓN 1ª

Análisis de las Operaciones Financieras para Actuarios

Financial Mathematics for Actuaries

MARÍA DEL CARMEN GONZÁLEZ VELASCO

INCLUYE LIBRO ELECTRÓNICO
THOMSON REUTERS PROVIEW™

CIVITAS

THOMSON REUTERS

ANÁLISIS DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS PARA ACTUARIOS

(Financial Mathematics for Actuaries)

MARÍA DEL CARMEN GONZÁLEZ VELASCO

ANÁLISIS DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS PARA ACTUARIOS

(Financial Mathematics for Actuaries)

CIVITAS

THOMSON REUTERS

Primera edición, 2022

THOMSON REUTERS PROVIEW™ eBOOKS
Incluye versión en digital

Editorial Aranzadi, S.A.U.
Camino de Galar, 15
31190 Cizur Menor (Navarra)
ISBN: 978-84-1125-638-4
DL NA 1769-2022
Printed in Spain. Impreso en España
Fotocomposición: Editorial Aranzadi, S.A.U.
Impresión: Rodona Industria Gráfica, SL
Polígono Agustinos, Calle A, Nave D-11
31013 – Pamplona

A mis padres, mis ángeles de la guarda,
y a mi sobrina Olivia, la alegría de vivir,
siempre en mi corazón.

ÍNDICE GENERAL

Página

Página

Página

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE CUADROS

PRÓLOGO

Este libro desarrolla los contenidos de la asignatura *Análisis de las Operaciones Financieras (Financial Mathematics)* de la versión de octubre de 2019 del *Core Syllabus for Actuarial Training in Europe* de la Asociación Actuarial Europea *(Actuarial Association of Europe)* y sustituye al libro *Análisis de las Operaciones Financieras (Core Syllabus for Actuarial Training in Europe)* que incluía los contenidos de esta asignatura de la versión de octubre de 2011 del *Core Syllabus* de la Asociación Actuarial Europea *(Actuarial Association of Europe)*. Como novedades con respecto al libro anterior, se han incluido contenidos y ejercicios sobre valoración con leyes aleatorias e interés estocástico, se han actualizado los temas de préstamos para incluir los cambios en los tipos de referencia en los préstamos a tipo de interés variable, el régimen de compensación por amortización anticipada y el reembolso anticipado, las novedades en el cálculo de la TAE, se ha eliminado la normativa derogada y se ha sustituido por la normativa en vigor, se ha reestructurado el tema dedicado a la estructura temporal de tipos de interés, donde se incluye un apartado dedicado a la valoración de activos de renta fija, incluidos los bonos indexados a la inflación y aplicaciones y se ha añadido un tema sobre duración, convexidad e inmunización.

El *Core Syllabus for Actuarial Training in Europe* es el plan de estudios básico, que contiene la formación mínima requerida para ejercer la profesión actuarial. Contiene tres secciones: la educación actuarial básica, con nueve áreas de aprendizaje (estadística, economía, finanzas, sistemas financieros, activos, datos y sistemas, modelos actuariales, gestión de riesgos actuariales y práctica personal y profesional actuarial), las habilidades avanzadas y los requisitos previos necesarios. Además, cada área de aprendizaje de la educación básica actuarial contiene un número de subáreas.

El *Core Syllabus* de la Asociación Actuarial Europea, de acuerdo con el *Education Syllabus* de la Asociación Actuarial Internacional (*International Actuarial Association*), propone una formación transversal centrada en el conocimiento de herramientas para ser capaz de aplicarlas en cada una de las áreas de aprendizaje. Mediante el Modelo de Objetivos de Aprendizaje de Heer (2009), que se basa en la Taxonomía de los Objetivos de Educación de Bloom (1956) y en la revisión de Anderson y Krathwohl's (2001), desagrega la dimensión del conocimiento en: A) conocimiento informal, B) conocimiento conceptual, C) conocimiento procedimental o de procedimientos y D) metacognitivo o metaconocimiento, y su grado de profundización (proceso cognitivo) en los siguientes niveles: 1) recordar, 2) comprender, 3) aplicar, 4) analizar, 5) evaluar y 6) crear.

Los contenidos de la asignatura *Análisis de las Operaciones Financieras* están ubicados en la matriz de la taxonomía revisada de Bloom en las celdas B2 y B3 (conocimiento conceptual en los niveles de comprender y aplicar), teniendo en cuenta que el conocimiento conceptual se refiere a que el desarrollo de las competencias de la asignatura es más profundo, dominando el marco teórico y los fundamentos técnicos y científicos, es decir, se trata de conocimientos conceptuales y de comprender y aplicar.

La tercera área de aprendizaje del *Core Syllabus* es Finanzas *(Finance)* y en ella se distinguen cuatro subáreas: información financiera y fiscalidad *(financial reporting and taxation)*, valores y otros medios de financiación corporativa *(securities and other forms of financial corporate)*, análisis de las operaciones financieras *(financial mathematics)* y finanzas corporativas *(corporate finance)*.

El objetivo de este libro es desarrollar los contenidos recogidos para la subárea o asignatura *Análisis de las Operaciones Financieras* (*Financial Mathematics*) en la última versión de octubre de 2019 del *Core Syllabus for Actuarial Training in Europe*, que son los siguientes:

- Calcular los valores actual y final de flujos utilizando tipos de interés determinísticos (incluidos los tipos compuestos en diferentes intervalos y de forma continua) (B3).
- Explicar los tipos de interés nominales y reales y valoración de flujos ligados a la inflación (B3).
- Calcular el valor de un contrato a plazo (B2).
- Explicar los principales conceptos y términos que subyacen a la teoría de una estructura temporal de tipos de interés (B3).
- Aplicar la estructura temporal de tipos de interés para modelizar varios flujos, incluyendo el cálculo de la sensibilidad del valor de un activo a cambios en esta estructura (B3).
- Explicar cómo se utilizan la duración y la convexidad en una inmunización de una cartera (B2).
- Calcular los valores actuales esperados y varianzas de los flujos usando la teoría del interés estocástico simple (B3).

Para el cumplimiento de estos objetivos se establece una estructura en seis temas, que tratan diversos aspectos sobre: el valor del dinero en el tiempo (tema 1), rentas (tema 2), préstamos (temas 3 y 4), estructura temporal de tipos de interés (tema 5) y duración, convexidad e inmunización financiera (tema 6). En estos temas se exponen los conceptos teóricos de forma clara y se presentan ejercicios resueltos para facilitar la comprensión de los distintos temas y cumplir lo que indica la taxonomía de Bloom para los contenidos de esta asignatura.

La obra es fruto de la experiencia acumulada en la impartición de esta materia desde su implantación en diferentes titulaciones de la Universidad de León (Grado en Finanzas, Grado en Administración y Dirección de Empresas, Grado en Economía y en las extinguidas Licenciatura en Ciencias Actuariales y Financieras y Diplomatura en Ciencias Empresariales) y de la utilización de bibliografía especializada.

Este libro constituye un complemento ideal para todos aquellos manuales de la asignatura *Análisis de las Operaciones Financieras*, que se imparte actualmente en los planes de estudio de las diferentes titulaciones citadas anteriormente. También es un manual necesario para el complemento formativo *Análisis de las Operaciones Financieras*, que se exige para cursar el Máster en Ciencias Actuariales y Financieras a todos aquellos estudiantes que quieren realizar este Máster y no han recibido esta formación previamente.

Sus características facilitan una doble función: puede ser utilizado por los docentes para facilitar el aprendizaje a los alumnos, sobre todo a los futuros actuarios, y como

recurso de apoyo para su formación e investigación, pero también puede ser utilizado por actuarios y otros profesionales ya que se trata de un texto de aplicación inmediata que permite resolver dudas sobre las distintas operaciones presentes en la contratación mercantil actual.

Este libro también podría ser recomendado por la Asociación Actuarial Europea como recurso de aprendizaje para preparar los contenidos de *Financial Mathematics* del *Core Syllabus for Actuarial Training in Europe*.

Agradezco la ayuda recibida de mi compañero Marcos González Fernández, con el que he compartido varias asignaturas. Y no me puedo olvidar de mis alumnos que, con sus consultas y participaciones en clase y en las tutorías, son los que me han animado para realizar este libro, especialmente dirigido a ellos y, sobre todo, a los futuros actuarios.

Quiero finalizar citando dos frases que siempre me han gustado y siempre recomiendo a mis alumnos:

"*A veces sentimos que lo que hacemos es tan solo una gota en el mar, pero el mar sería menos si le faltara esa gota*" (Madre Teresa de Calcuta).

"*Lograr aquello que has soñado te hace feliz, pero sobre todo, te hace feliz recordar el esfuerzo empleado para lograrlo*" (Rafa Nadal).

La autora

TEMA 1
EL VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

1. LAS LEYES FINANCIERAS DE CAPITALIZACIÓN Y COMPUESTA

Se va a iniciar un tema de máximo interés, como su propio nombre indica. La idea de rédito o interés no es un tema que solo concierne a los profesionales de las finanzas, sino también a cualquier persona, física o jurídica que firma un contrato financiero (préstamo hipotecario, préstamo personal para la adquisición de un vehículo, inversión en letras del tesoro, fondos de inversión, etc.). Por tanto, conocer en profundidad el concepto de interés es fundamental para todas las personas sean naturales o jurídicas.

El interés se suele definir como el incremento que experimenta la cuantía de un capital financiero con vencimiento en el instante t_0, al diferir su disponibilidad hasta un instante posterior t_n.

Otra posibilidad para definir el interés consiste en suponer un contrato financiero, en base al cual, una persona física o jurídica entrega un capital financiero C_0 en un instante t_0 a otra persona, quedando esta última obligada a reintegrar otro capital financiero C_n en un instante posterior t_n. Desde el punto de vista de la persona que recibe el capital C_0 y tiene que restituir el capital C_n, se trata de una operación de endeudamiento, representada por las cuantías y vencimientos siguientes:

$[(C_0,t_0),(-C_n,t_n)]$.

donde:

C_0 : Capital inicial, valor actual o valor inicial.

C_n : Capital final, valor final o montante.

t_0 : Vencimiento del capital inicial.

t_n : Vencimiento del capital final.

Desde el punto de vista de la persona que entrega el capital inicial C_0 se trata de una operación de inversión descrita por las siguientes cuantías y vencimientos:

$[(-C_0,t_0),(C_n,t_n)]$.

En términos generales, el contrato describe una operación de intercambio de bienes económicos en base a la cual un capital de cuantía C_0 y vencimiento t_0, (C_0,t_0), es equivalente a un capital de cuantía C_n y vencimiento t_n, (C_n,t_n). La diferencia entre las cuantías de los dos capitales financieros se denomina interés:

$\boldsymbol{I = C_n - C_0}$

Lógicamente, en un ambiente de certidumbre, el interés depende de la cuantía del capital C_0 y del periodo de tiempo n durante el cual se ha dispuesto de este capital.

El *tipo de interés efectivo* es la cantidad de dinero producida por una unidad monetaria en un periodo de tiempo determinado:

$$i = \frac{I}{C_0}$$

Las leyes financieras son aquellas funciones matemáticas que permiten obtener el valor de un capital financiero en un instante determinado. Se puede distinguir entre leyes financieras ciertas y leyes financieras aleatorias. Dentro de las primeras se incluyen las leyes financieras de capitalización simple y compuesta que utilizan el interés simple o el interés compuesto.

EJERCICIO 1.1.

Cuestión:

Calcular el interés y el tipo de interés efectivo que obtendríamos al invertir 1.000 euros durante cuatro años, si el capital al final de este periodo es de 1.500 euros.

Solución:

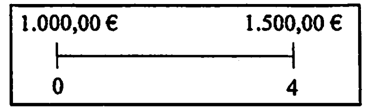
- Cálculo del interés.

  $I = 1.500,00 - 1.000,00 = 500,00$ €

- Cálculo del tipo de interés efectivo.

  $$i = \frac{500}{1000} = 0,5$$

FIGURA 1.1. *Esquema de la operación financiera*



1.1. LEY FINANCIERA DE CAPITALIZACIÓN SIMPLE

La ley financiera de capitalización simple o del interés simple se define como aquella en la que los intereses de un periodo cualquiera son proporcionales a la duración del periodo y al capital invertido.

Los intereses de un periodo no se acumulan al capital para calcular los intereses del periodo siguiente. Se obtienen siempre a partir de la cuantía del capital inicial: $I = C_0 \cdot i$

donde:

C_0 : Cuantía del capital inicial, valor inicial o actual.

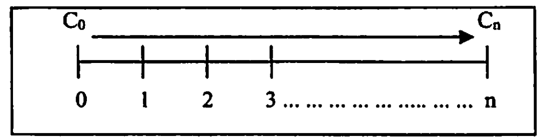
C_n : Cuantía del capital final, valor final o montante.

i : Tipo de interés de la operación.

I : Interés o incremento del capital inicial (en unidades monetarias).

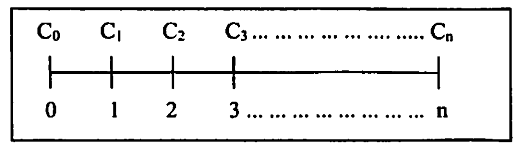
n : Plazo hasta el vencimiento de la operación.

FIGURA 1.2. *Esquema de la operación financiera de capitalización simple*



Si se considera una operación constituida por n operaciones de capitalización anual, con pago periódico de intereses constantes, los montantes al final de cada operación se obtienen tal como se muestra en la figura y expresiones siguientes.

FIGURA 1.3. *Montante en una operación de capitalización simple*



$$L(C_0,0;0) = C_0$$

$$L(C_0,0;1) = C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+i)$$

$$L(C_0,0;2) = C_2 = C_1 + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+i) + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+2 \cdot i)$$

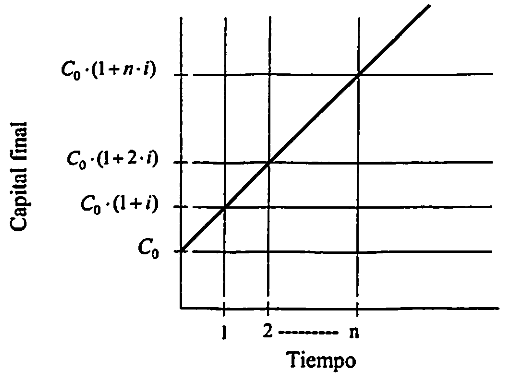
$$L(C_0,0;n-1) = C_{n-1} = C_{n-2} + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+(n-2) \cdot i) + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+(n-1) \cdot i)$$

$$L(C_0,0;n) = C_n = C_{n-1} + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+(n-1) \cdot i) + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+n \cdot i)$$

$\boldsymbol{L(C_0,0\,;n) = C_0 \cdot (I + n \cdot i)}$ (Ley financiera de capitalización simple)

$\boldsymbol{L(0,\ n) = 1 + n \cdot i}$ (Factor de capitalización simple)

FIGURA 1.4. *Representación gráfica del montante en capitalización simple*



Por tanto:

$I = L(C_0,0;n) - L(C_0,0;0)$

$\boldsymbol{I = C_0 \cdot (1+n \cdot i) - C_0 = C_0 \cdot n \cdot i}$ (Interés en capitalización simple)

EJERCICIO 1.2.

Cuestión:

Calcular el capital final y los intereses generados al invertir 1.000 euros durante cuatro años, si el tipo de interés anual simple es el 5%.

Solución:

- Cálculo del capital final.

$L(1.000,0;0) = 1.000,00$ €

$L(1.000,0;1) = 1.000,00 + 1.000,00 \cdot 0,05 = 1.050,00$ €

$L(1.000,0;2) = 1.000,00 + 2 \cdot 1.000,00 \cdot 0,05 = 1.100,00$ €

$L(1.000,0;3) = 1.000,00 + 3 \cdot 1.000,00 \cdot 0,05 = 1.150,00$ €

$L(1.000,0;4) = 1.000,00 + 4 \cdot 1.000,00 \cdot 0,05 = 1.200,00$ €

$L(1.000,0;4) = 1.000,00 \cdot (1 + 4 \cdot 0,05) = 1.200,00$ €

- Cálculo del interés generado.

$I_1 = 1.000,00 \cdot 0,05 = 1.050,00 - 1.000,00 = 50,00$ €

$I_2 = 1.000,00 \cdot 0,05 = 1.100,00 - 1.050,00 = 50,00$ €

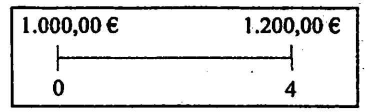
$I_3 = 1.000,00 \cdot 0,05 = 1.150,00 - 1.100,00 = 50,00$ €

$I_4 = 1.000,00 \cdot 0,05 = 1.200,00 - 1.150,00 = 50,00$ €

$I(1.000,0;4) = 1.000,00 \cdot 4 \cdot 0,05 = 200,00$ €

$I(1.000,0;4) = 1.200,00 - 1.000,00 = 200,00$ €

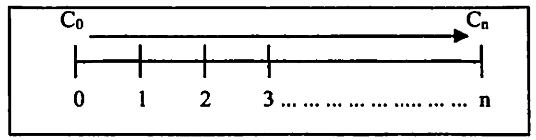
FIGURA 1.5. *Esquema de la operación financiera*



1.2. LEY FINANCIERA DE CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

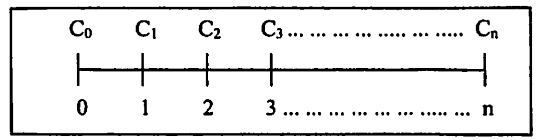
La ley financiera de capitalización compuesta o del interés compuesto se define como aquella en la que los intereses de un periodo cualquiera se acumulan al capital para producir nuevos intereses, y así sucesivamente.

FIGURA 1.6. *Esquema de la operación financiera de capitalización compuesta*



Si se considera una operación constituida por n operaciones, los montantes al final de cada una de ellas se obtienen tal como se indica en la figura y expresiones siguientes:

FIGURA 1.7. *Montante en una operación de capitalización compuesta*



$L(C_0,0;0) = C_0$

$L(C_0,0;1) = C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+i)$

$L(C_0,0;2) = C_2 = C_1 + C_1 \cdot i = C_1 \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^2$

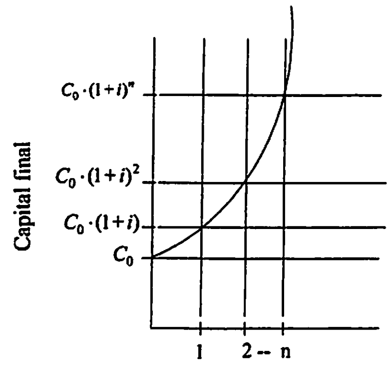
$L(C_0,0;n-1) = C_{n-1} = C_{n-2} + C_{n-2} \cdot i = C_{n-2} \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^{n-2} \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^{n-1}$

$L(C_0,0;n) = C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \cdot i = C_{n-1} \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^{n-1} \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^n$

$\boldsymbol{L(C_0,0;n) = C_0 \cdot (1+i)^n}$ (Ley financiera de capitalización compuesta)

$\boldsymbol{L(0,n) = (1+i)^n}$ (Factor de capitalización compuesta)

FIGURA 1.8. *Representación gráfica del montante en capitalización compuesta*



Por tanto:

$I = L(C_0,0;n) - L(C_0,0;0)$

$\boldsymbol{I = C_0 \cdot (1+i)^n - C_0 = C_0 \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]}$ (Interés en capitalización compuesta)

EJERCICIO 1.3.

Cuestión:

Calcular el capital final y los intereses generados al invertir 1.000 euros durante cuatro años, si el tipo de interés anual compuesto es el 5%.

Solución:

- Cálculo del capital final.

  $L(1.000,0;0) = 1.000,00\,€$

  $L(1.000,0;1) = 1.000,00 + 1.000,00 \cdot 0,05 = 1.050,00\,€$

  $L(1.000,0;2) = 1.050,00 + 1.050,00 \cdot 0,05 = 1.102,50\,€$

  $L(1.000,0;3) = 1.102,50 + 1.102,50 \cdot 0,05 = 1.157,63\,€$

  $L(1.000,0;4) = 1.157,63 + 1.157,63 \cdot 0,05 = 1.215,51\,€$

  $L(1.000,0;4) = 1.000,00 \cdot (1+0,05)^4 = 1.215,51\,€$

- Cálculo de los intereses generados.

  $I_1 = 1.050,00 - 1.000,00 = 50,00\,€$

  $I_2 = 1.102,50 - 1.050,00 = 52,50\,€$

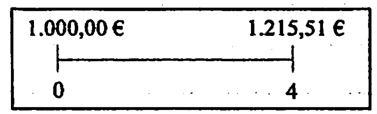
  $I_3 = 1.157,63 - 1.102,50 = 55,13\,€$

  $I_4 = 1.215.51 - 1.157,63 = 57,88\,€$

  $I = 1.000,00 \cdot \left[(1+0,05)^4 - 1\right] = 215,51\,€$

  $I = 1.215,51 - 1.000,00 = 215,51\,€$

FIGURA 1.9. *Esquema de la operación financiera*



La diferencia fundamental entre las leyes de capitalización simple y compuesta radica en que en ésta los intereses se acumulan al capital para producir nuevos intereses. Esto también se puede llevar a cabo con la ley del interés simple si en cada periodo se cancela la operación y en el siguiente se reinvierte el capital junto con sus intereses.

2. FACTORES DE CAPITALIZACIÓN Y DE DESCUENTO

Las leyes financieras son funciones matemáticas que permiten obtener el valor proyectado V de un capital financiero en un instante de referencia p. Se denomina *factor financiero* al valor por el que hay que multiplicar la cuantía de un capital financiero para obtener la cuantía de su proyectado en el instante p.

Se distingue entre factor de capitalización y factor de descuento según la ley financiera utilizada.

2.1. FACTOR DE CAPITALIZACIÓN

El factor de capitalización referido a un periodo de tiempo es el valor, por el cual hay que multiplicar la cuantía de un capital financiero para obtener su valor en un momento posterior. También se puede definir como el valor capitalizado de una unidad monetaria tras un periodo de tiempo determinado. Se le conoce también como factor de desplazamiento positivo, o, a la derecha, asociado a un intervalo de tiempo.

Establecida una ley de financiera de capitalización $L(C,t;p)$, dos capitales financieros (C_1,t_1) y (C_2,t_2) son equivalentes si se cumple:

$C_1 \cdot L(t_1,\ p) = C_2 \cdot L(t_2,\ p) = V$

Estos capitales son equivalentes por tener el mismo valor proyectado en el punto de referencia p.

A partir de la ecuación anterior se obtiene:

$$C_2 = C_1 \cdot \frac{L(t_1,p)}{L(t_2,p)}$$

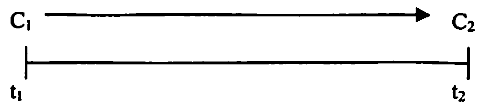
El cociente $\boldsymbol{\frac{L(t_1,p)}{L(t_2,p)} = L(t_1,t_2)}$ es el factor de capitalización por el que hay que multiplicar la cuantía del capital financiero con vencimiento en t_1 para obtener la cuantía del capital financiero con vencimiento posterior en t_2:

$C_2 = C_1 \cdot L(t_1,t_2)$

$C_2 = C_1 \cdot L(t_1,t_2) > C_1$, por el principio de subestimación de las necesidades futuras respecto a las del presente.

El factor de capitalización también se denomina factor de contraactualización.

FIGURA 1.10. *Valor capitalizado de un capital financiero*



Por tanto los factores de capitalización cuando se utilizan las leyes financieras ciertas y modelos discretos (capitalización simple y capitalización compuesta) son:

$$L(t_1,t_2)=(1+i\cdot n)$$

$$L(t_1,t_2)=(1+i)^n \quad \text{donde}: n=t_2-t_1$$

2.2. FACTOR DE DESCUENTO

El factor de descuento o actualización es el inverso del factor de capitalización. Es la expresión por la cual hay que multiplicar la cuantía de un capital financiero para obtener su valor en un momento anterior. También se define como el valor descontado de una unidad monetaria en un periodo de tiempo determinado.

Establecida una ley de financiera de actualización $A(C,t;p)$, dos capitales financieros (C_1,t_1) y (C_2,t_2) son equivalentes si se cumple:

$$C_1\cdot A(t_1,p)=C_2\cdot A(t_2,p)=V$$

Estos capitales son equivalentes por tener el mismo valor proyectado en el punto de referencia p.

A partir de la ecuación anterior se obtiene:

$$C_1=C_2\cdot\frac{A(t_2,p)}{A(t_1,p)}$$

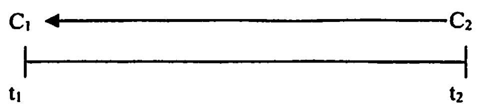
El cociente $\dfrac{A(t_2,p)}{A(t_1,p)}=A(t_1,t_2)$ es el factor de actualización por el que hay que multiplicar la cuantía del capital financiero con vencimiento en t_2 para obtener la cuantía del capital financiero con vencimiento anterior t_1:

$$C_1=C_2\cdot A(t_1,t_2)$$

$C_1 = C_2\cdot A(t_1,t_2) < C_2$, por el principio de subestimación de las necesidades futuras, respecto a las del presente.

El factor de descuento también se denomina factor de contracapitalización.

FIGURA 1.11. *Valor descontado de un capital financiero*



Por tanto los factores de actualización o descuento cuando se utilizan las leyes financieras ciertas y modelos discretos (descuento simple y descuento compuesto) son:

$$A(t_1,t_2)=(1-d\cdot n)$$

$$A(t_1,t_2)=\frac{1}{1+i\cdot n}$$

$$A(t_1,t_2)=(1-d)^n$$

$$A(t_1,t_2)=(1+i)^{-n} \quad \text{donde}: n=t_2-t_1$$

3. TIPOS DE INTERÉS

Se distinguen dos criterios para clasificar los tipos de interés:

a) Según la frecuencia de capitalización de los intereses:
   a. Tipo de interés efectivo.
   b. Tipo de interés nominal.
   c. Tasa instantánea de interés.
b) Según que reflejen o no la capacidad o poder adquisitivo de los distintos agentes económicos:
   a. Tipo de interés nominal.
   b. Tipo de interés real.

3.1. TIPOS DE INTERÉS SEGÚN SU FRECUENCIA DE CAPITALIZACIÓN

3.1.1. Tipo de interés efectivo

El *tipo de interés efectivo* es la cantidad de dinero que una unidad monetaria genera durante un periodo de tiempo determinado. El tipo de interés efectivo en el régimen de capitalización se obtiene de la siguiente expresión:

$$i(t_1,t_2)=\frac{C_2-C_1}{C_1}=\frac{C_2}{C_1}-1$$

También se puede expresar en función del factor de capitalización:

$$i(t_1,t_2)=\frac{C_2}{C_1}-1=\frac{\cancel{C_1}\cdot\dfrac{L(t_1,p)}{L(t_2,p)}}{\cancel{C_1}}-1=\frac{L(t_1,p)-L(t_2,p)}{L(t_2,p)}=\frac{L(t_1,p)}{L(t_2,p)}-1$$

$$i(t_1,t_2)=L(t_1,t_2)-1$$

El tipo de interés efectivo en capitalización compuesta se obtiene de:

$$i(t_1,t_2)=L(t_1,t_2)-1=\frac{L(t_1,p)}{L(t_2,p)}-1=\frac{(1+i)^{p-t_1}}{(1+i)^{p-t_2}}-1$$

$$i(t_1,t_2)=(1+i)^{t_2-t_1}-1$$

Si $t_2-t_1=1$ entonces obtenemos el tipo de interés efectivo anual : $i(t_1,t_2)=i$

El tipo de interés efectivo en capitalización simple se obtiene de:

$$i(t_1,t_2)=L(t_1,t_2)-1=\frac{L(t_1,p)}{L(t_2,p)}-1$$

$$i(t_1,t_2)=\frac{1+i\cdot(p-t_1)}{1+i\cdot(p-t_2)}-1$$

Los tipos de interés efectivos se hacen efectivos (se cobran o pagan) una sola vez dentro del periodo considerado. Así, el tipo efectivo anual se hace efectivo una vez dentro del año, el tipo efectivo mensual se hace efectivo una vez dentro del mes, etc.

El tanto de interés efectivo utiliza, con carácter general, como unidad temporal de referencia el año. Sin embargo, en la realidad pueden utilizarse otras unidades de medida temporales (días, meses, bienios, etc.). Por este motivo se recurre al concepto de tipos de interés equivalentes[1].

3.1.2. Tipo de interés nominal

El *tipo de interés nominal* es aquel que nos indica que los intereses se han capitalizado varias veces en el año considerando éste como periodo de referencia.

El tipo de interés nominal se expresa como:

$$J_{(m)}=i\left(0,\frac{1}{m}\right)\cdot m=i_m\cdot m$$

donde:

$i\left(0,\frac{1}{m}\right)=i_m$: Tipo de interés efectivo de frecuencia m.

m : Número de veces en el año que se capitaliza el interés.

Por ejemplo, $J_{(2)}$ es el tipo de interés nominal de frecuencia semestral o el tipo de interés anual, capitalizable o convertible semestralmente.

EJERCICIO 1.4.

Cuestión:

La ley financiera de capitalización simple, fijada en el instante cero, es tal que $C_1=104$ euros y $C_{3,5}=114{,}71$ euros. Calcular el interés del periodo, el tipo de interés del periodo y el tipo de interés anual.

Solución:

- Cálculo del interés del periodo.

$$I=C_{3,5}-C_1=114{,}71-104=10{,}71€$$

- Cálculo del tipo de interés efectivo del periodo.

$$i(1;3{,}5)=\frac{C_{3,5}-C_1}{C_1}=\frac{10{,}71}{104}=0{,}1030$$

(1) Se definen los tipos de interés equivalentes como aquellos que, aplicados al mismo capital inicial, durante el mismo periodo de tiempo, producen idéntico capital final o montante, bajo una misma ley financiera. Para un análisis más detallado véase: FANJUL SUÁREZ, J. L., ALMOGUERA GÓMEZ, A. y GONZÁLEZ VELASCO, M.ª DEL C. (2001), *Análisis de las Operaciones Financieras*, Madrid, Ediciones Civitas, págs. 48-50 y 61-66.

- Cálculo del tipo de interés efectivo anual.

$$(1+i\cdot 2{,}5)=(1+i(1;3{,}5))\Rightarrow i=(1+0{,}1030-1)\cdot\frac{1}{2{,}5}=0{,}0412$$

EJERCICIO 1.5.

Cuestión:

La ley financiera de capitalización compuesta, fijada en el instante cero, es tal que $C_1=104$ euros y $C_{3,5}=114{,}71$ euros. Calcular el interés del periodo, el tipo de interés del periodo, el tipo de interés capitalizable semestralmente y el tipo de interés anual.

Solución:

- Cálculo del interés del periodo.

$$I=C_{3,5}-C_1=114{,}71-104=10{,}71\text{ €}$$

- Cálculo del tipo de interés efectivo del periodo.

$$i(1;3{,}5)=\frac{C_{3,5}-C_1}{C_1}=\frac{10{,}71}{104}=0{,}1030$$

- Cálculo del tipo de interés capitalizable semestralmente.

$$\left(1+\frac{J_{(2)}}{2}\right)^{2,5\cdot 2}=(1+i(1;3{,}5))\Rightarrow i=\left[(1+0{,}1030)^{\frac{1}{2,5\cdot 2}}-1\right]\cdot 2=0{,}0396$$

- Cálculo del tipo de interés efectivo anual.

$$(1+i)^{2,5}=(1+i(1;3{,}5))\Rightarrow i=(1+0{,}1030)^{\frac{1}{2,5}}-1=0{,}04$$

EJERCICIO 1.6.

Cuestión:

Calcular los tipos de interés de cada periodo, al invertir 1.000 euros durante cuatro años, si el tipo de interés anual es del 5% simple.

Solución:

- Cálculo de los tipos de interés de cada periodo.

$$i(0,1)=\frac{I_1}{C_0}=\frac{50{,}00}{1.000{,}00}=0{,}05$$

$$i(1,2)=\frac{I_2}{C_1}=\frac{50{,}00}{1.050{,}00}=0{,}0476$$

$$i(2,3)=\frac{I_3}{C_2}=\frac{50,00}{1.100,00}=0,0454$$

$$i(3,4)=\frac{I_4}{C_3}=\frac{50,00}{1.150,00}=0,0435$$

EJERCICIO 1.7.

Cuestión:

Calcular los tipos de interés de cada periodo, al invertir 1.000 euros durante cuatro años, si el tipo de interés anual es del 5% compuesto.

Solución:

- Cálculo de los tipos de interés de cada periodo.

$$i(0,1)=\frac{I_1}{C_0}=\frac{50,00}{1.000,00}=0,05$$

$$i(1,2)=\frac{I_2}{C_1}=\frac{52,50}{1.050,00}=0,05$$

$$i(2,3)=\frac{I_3}{C_2}=\frac{55,13}{1.102,50}=0,05$$

$$i(3,4)=\frac{I_4}{C_3}=\frac{57,88}{1.157,63}=0,05$$

3.1.3. Tasa instantánea de interés

La tasa instantánea de interés se utiliza cuando la capitalización de intereses, en lugar de realizarse de forma discreta, se realiza de forma continua, es decir, en intervalos de tiempo infinitesimales. Se define la tasa instantánea de interés $r(t)$, referida al instante t, como el límite:

$$r(t)=\rho(t)=\lim_{h\to 0}\frac{i(t,t+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{L(t,p)-L(t+h,p)}{h\cdot L(t+h,p)}$$

Si la función $L(t,p)$ es derivable se obtiene:

$$\boldsymbol{r(t)=\rho(t)=-\frac{\frac{\partial L(t,p)}{\partial t}}{L(t,p)}=-\frac{\partial \ln L(t,p)}{\partial t}}$$

Esta expresión mide la fuerza con la que se van a remunerar los capitales. Por eso también se denomina *fuerza del interés* en cada instante.

La fuerza del interés va decreciendo con la ley de capitalización simple mientras que permanece constante con la ley de capitalización compuesta.

Si se integra la expresión anterior se obtiene:

$$\int_t^p r(s)\cdot ds=-\int_t^p\frac{\partial \ln L(s,p)}{\partial s}\cdot ds$$

$$\int_t^p r(s)\cdot ds=-\ln L(s,p)\big]_t^p=-\ln L(p,p)+\ln L(t,p)=\ln\frac{L(t,p)}{L(p,p)}$$

$$\boldsymbol{L(t,p)=e^{\int_t^p r(s)\cdot ds}}$$

La tasa instantánea de interés en capitalización compuesta se obtiene de:

$$r(t)=-\frac{\partial \ln L(t,p)}{\partial t}=-\frac{\partial \ln(1+i)^{p-t}}{\partial t}=-\frac{\partial (p-t)\cdot\ln(1+i)}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{r=\ln(1+i)}$$

La tasa instantánea de interés en capitalización simple se obtiene de:

$$r(t)=-\frac{\partial \ln L(t,p)}{\partial t}=-\frac{\partial \ln[1+i\cdot(p-t)]}{\partial t}=-\frac{\partial \ln(1+i\cdot p-i\cdot t)}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{r(t)=\frac{i}{1+i\cdot(p-t)}}$$

EJERCICIO 1.8.

Cuestión:

Calcular la tasa instantánea de interés equivalente a un tipo de interés anual del 10%.

Solución:

- Cálculo de la tasa instantánea de interés.

$$r=\ln(1+0,10)=0,0953$$

3.2. TIPOS DE INTERÉS SEGÚN QUE REFLEJEN O NO LA CAPACIDAD O PODER ADQUISITIVO DE LOS DISTINTOS AGENTES ECONÓMICOS

3.2.1. Tipos de interés nominales

Los *tipos de interés nominales* son todos los que hemos analizado anteriormente y no reflejan la capacidad o poder adquisitivo de los distintos agentes económicos

3.2.2. Tipos de interés reales

Los *tipos de interés reales* dependen de la variación del coste de la vida de una economía determinada durante el horizonte temporal de inversión considerado. Se relacionan con los tipos de interés nominales a través de la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{1+i_r=\frac{1+i_n}{1+g}}$$

donde:

i_r : Tipo de interés real.

i_n : Tipo de interés nominal.

g : Tasa de inflación.

EJERCICIO 1.9.

Cuestión:

Calcular el tipo de interés real si el tipo nominal es el 5% y la tasa de inflación el 3,5%.

Solución:

- Cálculo del tipo de interés real.

$$i_r = \frac{1+i_n}{1+g} - 1 = \frac{1{,}05}{1{,}035} - 1 = 1{,}45\%$$

Este resultado nos indica que la rentabilidad real que obtendría un inversor en una operación determinada no sería el 5% anual, sino el 1,45% si se considera la variación en el coste de la vida.

EJERCICIO 1.10.

Cuestión:

El tipo de interés real es el 10% y la inflación el 8%. Si un inversor recibe 1.000 euros al finalizar el primer año y sucesivas cantidades que exceden 100 euros a las recibidas en el año anterior durante cuatro años más. Calcular el valor acumulado que recibirá el inversor transcurridos cinco años.

Solución:

Se calcula el tipo de interés nominal:

$$i_n = (1+i_r)\cdot(1+g) - 1 = (1+0{,}10)\cdot(1+0{,}08) - 1 = 0{,}1880$$

Se calcula el valor acumulado transcurridos cinco años:

$$V_5 = 1.000\cdot(1+0{,}1880) + 1.100\cdot(1+0{,}1880)^2 + 1.200\cdot(1+0{,}1880)^3 +$$
$$+1.300\cdot(1+0{,}1880)^4 + 1.400\cdot(1+0{,}1880)^5 = 10.654{,}86 \text{ euros}$$

4. TIPOS DE DESCUENTO

El descuento se suele definir como el precio que hay que pagar por disponer de unos capitales con vencimiento futuro t_n en un instante anterior t_0.

Otra posibilidad para definir el tipo de descuento consiste en suponer un contrato financiero, en base al cual, una persona física o jurídica recibe un capital financiero C_0 en un instante t_0 de otra persona, quedando obligada la primera a reintegrar otro capital financiero C_n en un instante posterior t_n. Para la persona que recibe el capital

C_0 y tiene que restituir el capital C_n, se trata de una operación de endeudamiento, representada por las cuantías y vencimientos siguientes:

$$\left[(C_0,t_0),(-C_n,t_n)\right]$$

donde:

C_0 : Valor efectivo, valor actual o valor descontado.

C_n : Valor nominal, valor final o valor a descontar.

t_0 : Instante en el que se realiza el descuento.

t_n : Vencimiento de la operación.

En términos generales, el contrato describe una operación de intercambio de bienes económicos, en base a la cual, un capital financiero de cuantía y vencimiento (C_0,t_0) es equivalente a otro (C_n,t_n) con vencimiento posterior al primero de ellos. La diferencia de las cuantías de los dos capitales financieros se denomina descuento y refleja la reducción que experimenta la cuantía de un capital disponible en el instante t_n, al adelantar su disponibilidad hasta el instante t_0:

$$\boldsymbol{D = C_n - C_0}$$

donde:

D: Precio a pagar por adelantar la disponibilidad en el tiempo del capital C_n durante un periodo de tiempo determinado $n = t_n - t_0$.

El descuento se expresa en unidades monetarias como la cuantía de los capitales.

En ambiente de certidumbre, el descuento, lógicamente, va a depender de la cuantía del valor nominal C_n y del periodo de tiempo de la operación de descuento n.

Según la frecuencia de actualización de descuento se distingue entre tipo de descuento efectivo, tipo de descuento nominal y tasa instantánea de descuento.

4.1. TIPO DE DESCUENTO EFECTIVO

El *tipo de descuento efectivo* es la cantidad de dinero que un valor nominal de una unidad monetaria descuenta en un periodo determinado.

El tipo de descuento efectivo en actualización se obtiene de:

$$\boldsymbol{d(t_1,t_2) = \frac{C_2 - C_1}{C_2} = 1 - \frac{C_1}{C_2}}$$

También se puede expresar en función del factor de descuento:

$$d(t_1,t_2) = 1 - \frac{C_1}{C_2} = 1 - \frac{\cancel{C_2}\cdot\frac{A(t_2,p)}{A(t_1,p)}}{\cancel{C_2}} = 1 - \frac{A(t_2,p)}{A(t_1,p)}$$

$$\boldsymbol{d(t_1,t_2) = 1 - A(t_1,t_2)}$$

El tipo de descuento efectivo en descuento compuesto se obtiene de:

$$d(t_1,t_2) = 1 - A(t_1,t_2) = 1 - \frac{A(t_2,p)}{A(t_1,p)} = 1 - \frac{(1-d)^{t_2-p}}{(1-d)^{t_1-p}} = 1 - (1-d)^{t_2-t_1}$$

$$\boldsymbol{d(t_1,t_2)=1-(1+i)^{-(t_2-t_1)}}$$

Si $t_2-t_1=1$ entonces obtenemos el tipo de descuento efectivo anual: $d(t_1,t_2)=d=1-(1+i)^{-1}$

El tipo de descuento efectivo en descuento simple comercial se obtiene de:

$$d(t_1,t_2)=1-A(t_1,t_2)=1-\frac{A(t_2,p)}{A(t_1,p)}$$

$$\boldsymbol{d(t_1,t_2)=1-\frac{1-d\cdot(t_2-p)}{1-d\cdot(t_1-p)}}$$

El tipo de descuento efectivo utiliza, con carácter general, como unidad de referencia temporal el año. Sin embargo, en la realidad pueden utilizarse otras unidades de medida temporales (días, meses, bienios, etc.). Por este motivo se recurre a tipos de descuento equivalentes[2].

4.2. TIPO DE DESCUENTO NOMINAL

El *tipo de descuento nominal* es aquel que nos indica que los descuentos se han actualizado varias veces en el año considerando éste como periodo de referencia.

El tipo de descuento nominal se expresa como:

$$\boldsymbol{J^{*}_{(m)}=d\left(0,\frac{1}{m}\right)\cdot m=d_m\cdot m}$$

donde:

$d\left(0,\frac{1}{m}\right)=d_m$: Tipo de descuento efectivo de frecuencia m.

m: Número de veces en el año que se actualizan los descuentos.

Por ejemplo, $J^{*}_{(2)}$ es el tipo de descuento nominal de frecuencia semestral o el tipo de descuento anual, actualizable semestralmente.

EJERCICIO 1.11.

Cuestión:

Los valores efectivos en los años 1 y 3 son C_1 = 100 euros y C_3 = 120 euros, respectivamente. Calcular: el descuento del periodo, el tipo de descuento del periodo y el tipo de descuento anual. Considerar la ley financiera de descuento comercial para su resolución.

(2) Se definen los tipos de descuento equivalentes como aquellos que, aplicados al mismo capital final, durante el mismo periodo de tiempo, producen el mismo capital inicial, bajo una misma ley financiera. Para un análisis más detallado véase: FANJUL SUÁREZ, J. L., ALMOGUERA GÓMEZ, A. y GONZÁLEZ VELASCO, M.ª DEL C. (2001), Madrid, Ediciones Civitas, págs. 48-50 y 61-66.

Solución:

- Cálculo del descuento del periodo.

$$D=C_3-C_1=120-100=20\text{ €}$$

- Cálculo del tipo de descuento del periodo.

$$d(1,3)=\frac{C_3-C_1}{C_3}=\frac{20}{120}=0{,}1667$$

- Cálculo del tipo de descuento anual.

$$(1-d\cdot 2)=(1-d(1,3))\Rightarrow d=1-(1-0,\ 1667)\cdot\frac{1}{2}=0{,}0833$$

EJERCICIO 1.12.

Cuestión:

Los valores efectivos en los años 1 y 3 son C_1 = 100 euros y C_3 = 120 euros, respectivamente. Calcular: el descuento del periodo, el tipo de interés del periodo y el tipo de interés anual. Considerar la ley financiera de descuento simple racional para su resolución.

Solución:

- Cálculo del descuento del periodo.

$$D=C_3-C_1=120-100=20\text{ €}$$

- Cálculo del interés del periodo.

$$i(1,3)=\frac{C_3-C_1}{C_1}=\frac{20}{100}=0{,}20$$

- Cálculo del interés anual.

$$(1+i\cdot 2)=(1+i(1,3))\Rightarrow i=(1+0{,}20-1)\cdot\frac{1}{2}=0{,}10$$

EJERCICIO 1.13.

Cuestión:

Los valores efectivos en los años 1 y 3 son C_1 = 100 euros y C_3 = 120 euros, respectivamente. Calcular: el descuento del periodo, el tipo de descuento del periodo, el tipo de descuento nominal de frecuencia semestral y el tipo de descuento anual. Considera la ley financiera de descuento compuesto.

Solución:

- Cálculo del descuento del periodo.

$$D=C_3-C_1=120-100=20\text{ €}$$

- Cálculo del tipo de descuento del periodo.

$$d(1,3)=\frac{C_3-C_1}{C_3}=\frac{20}{120}=0{,}1667$$

- Cálculo del tipo de descuento nominal de frecuencia semestral.

$$\left(1-\frac{J^{\bullet}_{(2)}}{2}\right)^{2\cdot 2}=[1-d(1,3)]\Rightarrow J^{\bullet}_{(2)}=\left[1-(1-0{,}1667\ )^{\frac{1}{4}}\right]\cdot 2=0,\ 0891$$

- Cálculo del tipo de descuento anual.

$$(1-d)^2=(1-d(1,3))\Rightarrow d=1-(1-0{,}1667\ )^{\frac{1}{2}}=0,\ 0871$$

4.3. TASA INSTANTÁNEA DE DESCUENTO

La tasa instantánea de descuento se utiliza cuando la actualización del descuento, en lugar de realizarse de forma discreta, se realiza de forma continua, es decir, en intervalos de tiempo infinitesimales. Se define la tasa instantánea de descuento $\delta(t)$, referida al instante t, como el límite:

$$\delta(t)=\lim_{h\to 0}\frac{d(t,t+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{A(t,p)-A(t+h,p)}{h\cdot A(t,p)}$$

Si la función $A(t,p)$ es derivable se obtiene:

$$\boldsymbol{\delta(t)=-\frac{\frac{\partial A(t,p)}{\partial t}}{A(t,p)}=-\frac{\partial \ln A(t,p)}{\partial t}}$$

Si se integra la expresión anterior se obtiene:

$$\int_p^t \delta(s)\cdot ds=-\int_t^p\frac{\partial \ln A(s,p)}{\partial s}\cdot ds$$

$$\int_p^t \delta(s)\cdot ds=-\ln A(s,p)\Big]_p^t=-\ln A(t,p)+\ln A(p,p)=-\ln\frac{A(t,p)}{A(p,p)}$$

$$\boldsymbol{A(t,p)=e^{-\int_p^t \delta(s)\cdot ds}}$$

La tasa instantánea en descuento compuesto se obtiene de:

$$\delta(t)=-\frac{\partial \ln A(t,p)}{\partial t}=-\frac{\partial \ln(1-d)^{t-p}}{\partial t}=-\frac{\partial (t-p)\cdot\ln(1-d)}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{\delta=-\ln(1-d)}$$

que, expresada en función del tipo de interés efectivo anual, coincide con la tasa instantánea de interés:

$$\delta=-\ln(1-d)=\ln(1-d)^{-1}=\ln\left(1-\frac{i}{1+i}\right)^{-1}=\ln\left(\frac{1+\cancel{i}-\cancel{i}}{1+i}\right)^{-1}=$$

$$\delta=\ln\left(\frac{1+\cancel{i}-\cancel{i}}{1+i}\right)^{-1}=\ln\left(\frac{1}{1+i}\right)^{-1}=\ln(1+i)=r$$

La tasa instantánea en descuento simple comercial se obtiene de:

$$\delta(t)=-\frac{\partial \ln A(t,p)}{\partial t}=-\frac{\partial \ln[1-d\cdot(t-p)]}{\partial t}=-\frac{\partial \ln(1-d\cdot t+d\cdot p)}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{\delta(t)=\frac{d}{1-d\cdot(t-p)}}$$

EJERCICIO 1.14.

Cuestión:

Calcular la tasa instantánea de descuento equivalente a un tipo de descuento anual del 10%.

Solución:

- Cálculo de la tasa instantánea de descuento.

$$\delta=-\ln(1-0{,}10)=0{,}1054$$

5. LAS LEYES FINANCIERAS DE CAPITALIZACIÓN Y DESCUENTO CONTINUOS

Dentro de las leyes financieras ciertas, además de los modelos discretos que utilizan interés simple e interés compuesto (o descuento simple y compuesto), se encuentran los modelos continuos que se basan en la tasa instantánea de interés o de descuento, expresadas como un valor concreto o como una función del tiempo.

5.1. LEY FINANCIERA DE CAPITALIZACIÓN CONTINUA

La ley financiera de capitalización continua es la función matemática que permite obtener el valor proyectado de un capital financiero en un instante determinado utilizando la tasa instantánea de interés.

Si se utiliza la tasa instantánea de interés en capitalización compuesta:

$$C_n=C_0\cdot\left(1+\frac{J_{(m)}}{m}\right)^{m\cdot n}$$

Si $m\to\infty \Rightarrow J_{(m)}=r$

$$C_n=\lim_{m\to\infty}C_0\cdot\left(1+\frac{J_{(m)}}{m}\right)^{m\cdot n}=\lim_{m\to\infty}C_0\cdot\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}=\lim_{x\to\infty}C_0\cdot\left(1+\frac{r}{r\cdot x}\right)^{r\cdot x\cdot n}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}C_0\cdot\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{r\cdot n}=C_0\cdot e^{r\cdot n}$$

donde:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$m = r \cdot x$

Por tanto:

$$C_n = C_0 \cdot e^{r \cdot n}$$

Para hallar la tasa instantánea de interés equivalente al tipo de interés efectivo anual:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = C_0 \cdot (1+i) \\ C_1 = C_0 \cdot e^r \end{array}\right\} \cancel{C_0} \cdot (1+i) = \cancel{C_0} \cdot e^r \Rightarrow r = \ln(1+i)$$

Si la tasa instantánea de interés se expresase como una función continua del tiempo t, el capital final se puede obtener utilizando la ley financiera de capitalización simple o compuesta como:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \int_0^n r_t \cdot dt\right)$$

$$C_n = C_0 \cdot e^{\int_0^n r_t \cdot dt} \quad \text{donde } t \in [0,n]$$

Por tanto los factores de capitalización cuando se utilizan leyes financieras ciertas y modelos continuos (capitalización continua e instantánea) son:

$$L(0,n) = 1 + \int_0^n r_t \cdot dt$$

$$L(0,n) = e^{r \cdot n} \qquad L(0,n) = e^{\int_0^n r_t \cdot dt} \quad \text{donde } t \in [0,n]$$

EJERCICIO 1.15.

Cuestión:

Calcular el tipo de interés efectivo anual y el interés efectivo semestral equivalentes a la tasa instantánea de capitalización $r(t) = 0{,}03 + 0{,}01 \cdot t$.

Solución:

- Cálculo del interés efectivo anual en el periodo $[0,1]$.

$$i = e^{\int_0^1 r(s)\cdot ds} - 1 = e^{\int_0^1 (0{,}03 + 0{,}01\cdot s)\cdot ds} - 1 =$$

$$= e^{\left.0{,}03\cdot s + \frac{0{,}01}{2}\cdot s^2\right]_0^1} - 1 = e^{0{,}03 + \frac{0{,}01}{2}} - 1 = 0{,}0356$$

- Cálculo del interés efectivo semestral $[0;0{,}5]$.

$$i = e^{\int_0^{0,5} r(s)\cdot ds} - 1 = e^{\int_0^{0,5} (0{,}03 + 0{,}01\cdot s)\cdot ds} - 1 =$$

$$= e^{\left.0{,}03\cdot s + \frac{0{,}01}{2}\cdot s^2\right]_0^{0,5}} - 1 = e^{0{,}015 + 0{,}0025} - 1 = 0{,}0176$$

EJERCICIO 1.16.

Cuestión:

Calcular el capital final que obtendríamos al invertir 1.000 euros durante cuatro años, si el tipo de interés anual es el 5 % utilizando la ley financiera de capitalización continua.

Solución:

- Cálculo del capital final.

$$C_n = C_0 \cdot e^{r\cdot n} = C_0 \cdot e^{\ln(1+i)\cdot n} = 1.000 \cdot e^{4\cdot \ln 1{,}05} = 1.215{,}51\text{ €}$$

5.2. LEY FINANCIERA DE DESCUENTO CONTINUO

La ley financiera de descuento continuo es la función matemática que permite obtener el valor proyectado de un capital financiero en un instante determinado utilizando la tasa instantánea de descuento.

Si se utiliza la tasa instantánea de descuento compuesto se obtiene:

$$C_0 = C_n \cdot \left(1 - \frac{J^*_{(m)}}{m}\right)^{m\cdot n}$$

Si $m \to \infty \Rightarrow J^*_{(m)} = \delta$

$$C_0 = \lim_{m\to\infty} C_n \cdot \left(1 - \frac{J^*_{(m)}}{m}\right)^{m\cdot n} = \lim_{m\to\infty} C_n \cdot \left(1 - \frac{\delta}{m}\right)^{m\cdot n} = \lim_{x\to\infty} C_n \cdot \left(1 - \frac{\delta}{-\delta\cdot x}\right)^{-\delta\cdot x\cdot n} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} C_n \cdot \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-\delta\cdot n}$$

donde:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$m = -\delta \cdot x$

Por tanto:

$$C_0 = C_n \cdot e^{-\delta\cdot n}$$

La tasa instantánea de descuento equivalente al tipo de descuento efectivo anual:

$$\left.\begin{array}{l} C_0 = C_1 \cdot (1-d) \\ C_0 = C_1 \cdot e^{-\delta} \end{array}\right\} \cancel{C_1} \cdot (1-d) = \cancel{C_1} \cdot e^{-\delta} \Rightarrow \delta = -\ln(1-d)$$

Si la tasa instantánea de descuento se expresase como una función continua del tiempo t, el capital final se puede obtener utilizando la ley financiera de descuento simple o compuesto como:

$$C_0 = C_n \cdot \left(1 - \int_0^n \delta_t \cdot dt\right)$$

$$C_0 = C_n \cdot e^{-\int_0^n \delta_t \cdot dt} \text{ donde } t \in [0,n]$$

Por tanto los factores de actualización o descuento cuando se utilizan leyes financieras ciertas y modelos continuos (descuento continuo e instantáneo) son:

$$A(0,n) = 1 - \int_0^n \delta_t \cdot dt$$

$$A(0,n) = e^{-\delta \cdot n} \qquad A(0,n) = e^{-\int_0^n \delta_t \cdot dt} \text{ donde } t \in [0,n]$$

EJERCICIO 1.17.

Cuestión:

Calcular el efectivo que obtendríamos al descontar un efecto de 1.000 euros que vence dentro de cuatro años, si el tipo de descuento anual es el 5 % utilizando la ley de descuento continuo.

Solución:

- Cálculo del efectivo.

$$C_0 = C_n \cdot e^{-\delta \cdot n} = C_n \cdot e^{\ln(1-d)\cdot n} = 1.000 \cdot e^{4 \cdot \ln(1-0{,}05)} = 814{,}51 \text{ €}$$

6. LAS LEYES FINANCIERAS ALEATORIAS

Todos los análisis anteriores han sido deterministas porque los tipos de interés eran conocidos pero en la práctica real muchos tipos de interés no se conocen por anticipado y, por este motivo, es necesario recurrir a modelos estocásticos. Se pueden simplificar estos modelos si los tipos de interés son independientes e idénticamente distribuidos, aunque también pueden tener relaciones de dependencia entre ellos (modelos de medias móviles, autoregresivos, binomiales y estocásticos continuos).

Aunque no es el objetivo de este libro, ya que la construcción de estos modelos requiere conocimientos previos de cálculo estocástico, a continuación se realiza una introducción a la valoración de capitales financieros utilizando leyes aleatorias (modelos discretos y modelos continuos).

Entre los modelos discretos, los valores finales se pueden obtener a través de las siguientes expresiones, que suponen resolver ecuaciones en diferencias estocásticas:

$$\widetilde{C}_n = C_0 \cdot \left(1 + \sum_{t=1}^{n} \tilde{i}_t\right) \text{ (con interés simple estocástico)}$$

$$\widetilde{C}_n = C_0 \cdot \left(\prod_{t=1}^{n} (1 + \tilde{i}_t)\right) \text{ (con interés compuesto estocástico)}$$

Un caso particular dentro de los modelos discretos es el modelo binomial, donde las variables aleatorias $\tilde{i}_t, t = 1,2,\ldots,n$ son dicotómicas independientes y equidistribuidas:

$\tilde{i}_t$	Probabilidad
i_1	p
i_2	$1-p$

El cálculo de los valores finales, medias y varianzas se realiza teniendo en cuenta la distribución del modelo binomial: $\chi \sim B(n,p)$

- Con interés simple estocástico:

$$\widetilde{C}_n = C_0 \cdot \left(1 + \sum_{t=1}^{n} \tilde{i}_t\right) = C_0 \cdot (1 + i_1 \cdot \chi + i_2 \cdot (n - \chi))$$

$$\widetilde{C}_n = C_0 \cdot \left(1 + \sum_{t=1}^{n} \tilde{i}_t\right) = C_0 \cdot (1 + i_2 \cdot n + (i_1 - i_2) \cdot \chi) \text{ (valor final)}$$

$$E\left[\widetilde{C}_n\right] = C_0 \cdot (1 + \bar{i} \cdot n) \text{ (media del valor final)}$$

donde:

$$\bar{i} = E\left[\tilde{i}\right] = i_1 \cdot p + i_2 \cdot (1-p)$$

$$V\left[\widetilde{C}_n\right] = C_0^2 \cdot \sum_{t=1}^{n} V\left(\tilde{i}_t\right) = C_0^2 \cdot n \cdot \sigma_i^2 \text{ (varianza del valor final)}$$

donde:

$$\sigma_i^2 = V\left[\tilde{i}\right] = E\left[\tilde{i}^2\right] - E\left[\tilde{i}\right]^2$$

- Con interés compuesto estocástico:

$$\widetilde{C}_n = C_0 \cdot \left(\prod_{t=1}^{n} (1 + \tilde{i}_t)\right) = C_0 \cdot (1 + i_1)^{\chi} \cdot (1 + i_2)^{n-\chi}$$

$$\widetilde{C}_n = C_0 \cdot \left(\prod_{t=1}^{n} (1 + \tilde{i}_t)\right) = C_0 \cdot (1 + i_2)^n \cdot \left(\frac{1 + i_1}{1 + i_2}\right)^{\chi} \text{ (valor final)}$$

$$E\left[\widetilde{C}_n\right] = C_0 \cdot \left(\prod_{t=1}^{n} \left(1 + E\left[\tilde{i}_t\right]\right)\right)$$

$$E\left[\widetilde{C}_n\right] = C_0 \cdot \prod_{t=1}^{n} \left(1 + \bar{i}\right) = C_0 \cdot \left(1 + \bar{i}\right)^n \text{ (media del valor final)}$$

$$V\left[\widetilde{C}_n\right] = C_0^2 \cdot \left(\left(\sigma_i^2 + (1 + i)^2\right)^n - \left(1 + \bar{i}\right)^{2n}\right) \text{ (varianza del valor final)}$$

Los modelos continuos estocásticos se basan en el proceso de Wiener o movimiento browniano estándar, que es un proceso estocástico continuo, $\{W_t\}_{t \geq 0}$, que tiene las siguientes propiedades:

a) $W_0 = 0$

b) W tiene trayectorias continuas, W_t es continuo en t

c) Es un proceso estacionario con independientes.

d) La variable aleatoria "incrementos" puede seguir una distribución normal con media 0 y varianza igual a la amplitud del intervalo, es decir, si $t, s \geq 0$ entonces $W_{t+s} - W_t \sim N(0,s)$

El cálculo diferencial estocástico basado en el proceso de Wiener se desarrolla a partir de la ecuación diferencial lineal estocástica que, a través del Lema de Itô, permite realizar los cambios de variable para intentar resolver la ecuación y obtener el proceso solución.

El proceso estocástico más simple es el proceso ruido blanco (ε_t), que es estacionario y cumple las siguientes características:

a) $E[\varepsilon_t]=0$

b) $Var[\varepsilon_t]=\sigma^2$

c) $Covar[\varepsilon_t,\varepsilon_s]=0$ si $t\neq s$

Por tanto, es un proceso con una sucesión de valores que no tienen relación entre ellos y oscilan en torno al cero dentro de un margen constante. En este tipo de procesos, conocer los valores pasados no aporta ninguna información sobre el futuro ya que el proceso es puramente aleatorio y, como consecuencia, carece de memoria.

Además, se puede expresar como: $\varepsilon_t\cdot dt=dW_t$

Se considera la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$dr_t=f(t,r_t)\cdot dt+\sigma(t,r_t)\cdot dW_t$

que se transforma con: $y_t=u(t,r_t)$ y, mediante el Lema de Itô:

$$dy_t=\left(u_t+u_x\cdot f(t,r_t)+\frac{1}{2}\cdot u_{xx}\cdot\sigma^2(t,r_t)\right)\cdot dt+u_x\cdot\sigma(t,r_t)\cdot dW_t$$

lo que permite obtener la solución de la ecuación diferencial estocástica con el modelo browniano aditivo:

$$d\widetilde{C}_t=C_0\cdot\rho\cdot dt+C_0\cdot\sigma\cdot dW_t$$

$$\boldsymbol{\widetilde{C}_n=C_0\cdot(1+\rho\cdot n+\sigma\cdot W_n)}\ \text{(valor final)}$$

$$E\left[\widetilde{C}_n\right]=C_0\cdot(1+\rho\cdot n+\sigma\cdot E[W_n])$$

$$\boldsymbol{E\left[\widetilde{C}_n\right]=C_0\cdot(1+\rho\cdot n)}\ \text{(media del valor final)}$$

$$\boldsymbol{V\left[\widetilde{C}_n\right]=C_0^2\cdot\sigma^2\cdot n}\ \text{(varianza del valor final)}$$

donde el valor esperado acumulado se distribuye como una norma con la media y varianza calculadas:

$$\widetilde{C}_n\sim N\left(C_0\cdot(1+\rho\cdot n),C_0^2\cdot\sigma^2\cdot n\right)$$

En el caso del movimiento browniano geométrico, la ecuación diferencial estocástica y su solución de obtienen de:

$$d\widetilde{C}_t=\widetilde{C}_t\cdot\rho\cdot dt+\widetilde{C}_t\cdot\sigma\cdot dW_t \qquad \widetilde{R}_t=u(t,\widetilde{C}_t)=\ln\widetilde{C}_t$$

$$\boldsymbol{\widetilde{C}_n=e^{R_0+\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot n+\sigma\cdot W_n}=C_0\cdot e^{\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot n+\sigma\cdot W_n}}\ \text{(valor final)}$$

donde:

$$\frac{\widetilde{C}_n}{C_0}\sim LN\left(\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot n+\sigma\cdot n,\sigma^2\cdot n\right)$$

$$\boldsymbol{E\left[\widetilde{C}_n\right]=C_0\cdot e^{\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot n+\frac{\sigma^2}{2}}=C_0\cdot e^{\rho\cdot n}}\ \text{(media del valor final)}$$

$$\boldsymbol{V\left[\widetilde{C}_n\right]=C_0^2\cdot e^{2\cdot\rho\cdot n}\cdot\left(e^{\sigma^2\cdot n}-1\right)}\ \text{(varianza del valor final)}$$

EJERCICIO 1.18.

Cuestión:

Se invierten 10.000 euros y se obtiene cada año un tipo de interés, que varía aleatoriamente con media 0,03 y varianza 0,01. Calcular el valor acumulado esperado y su desviación estándar después de 10 años.

Solución:

Se calcula el valor acumulado esperado transcurridos 10 años:

$$E[a_n]=E\left[\prod_{t=1}^{n}(1+i_t)\right]=\prod_{t=1}^{n}E(1+i_t)=\left(1+\bar{i}\right)^n$$

$$E[10.000\cdot a_{10}]=10.000\cdot E\left[\prod_{t=1}^{10}(1+i_t)\right]=\prod_{t=1}^{10}E(1+i_t)=(1+0,03)^{10}=1,34\text{ euros}$$

Se calcula la varianza del valor acumulado:

$$Var[a_n]=E\left[a_n^2\right]-\left[E[a_n]\right]^2=E\left[a_n^2\right]-\left(1+\bar{i}\right)^{2n}$$

$$E\left[a_n^2\right]=E\left[\prod_{t=1}^{n}(1+i_t)^2\right]=\prod_{t=1}^{n}E(1+i_t)^2=\prod_{t=1}^{n}E\left(1+2i_t+i_t^2\right)=\left(1+2\bar{i}+\bar{i}^2+s^2\right)^n$$

$$Var[a_n]=E\left[a_n^2\right]-\left[E[a_n]\right]^2=\left(1+2\bar{i}+\bar{i}^2+s^2\right)^n-\left(1+\bar{i}\right)^{2n}=\left(1+\bar{j}\right)^n-\left(1+\bar{i}\right)^{2n}$$

$$Var[10.000\cdot a_{10}]=10.000^2\cdot\left[E\left[a_{10}^2\right]-\left[E[a_{10}]\right]^2\right]=$$

$$=10.000^2\cdot\left[\left(1+2\cdot0,03+0,03^2+0,01\right)^{10}-(1+0,03)^{20}\right]=17.764.902,41$$

Se calcula la desviación estándar del valor acumulado:

$$DT=\sqrt{Var[10.000\cdot a_{10}]}=\sqrt{17.764.902,41}=4.214,84$$

EJERCICIO 1.19.

Cuestión:

Una persona invierte 150.000 euros en un fondo de inversión. El fondo de inversión le proporcionará un tipo de interés efectivo anual del 3%, 4% y 5% con las siguientes probabilidades:

Tipo de interés	Probabilidad
0,025	0,3
0,03	0,5
0,035	0,2

El tipo de interés de cada año es independiente de los tipos de los demás años y se distribuye como una lognormal. Calcular el valor acumulado esperado transcurridos 15 años con una probabilidad del 95%.

Solución:

- Se calcula la media y la varianza de la distribución lognormal.

	Tipo de interés	Probabilidad	$1+i_t$	$\ln(1+i_t)$	$[\ln(1+i_t)]^2$
	0,025	0,3	1,025	0,0247	0,0006
	0,03	0,5	1,03	0,0295	0,0009
	0,035	0,2	1,035	0,0344	0,0012
Valor esperado	0,0295		1,03	0,0296	0,0009

$E[a_{15}]=15\cdot\mu=15\cdot 0,0296=0,444$

$Var[a_{15}]=15\cdot\sigma^2=15\cdot\left[0,0009-(0,0296)^2\right]=0,00036$

El valor que puede obtenerse el 95% del tiempo ocurre en el percentil 5, que en la distribución normal estándar se corresponde con un valor Z del – 1,644853627.

Teniendo en cuenta que: $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}=\dfrac{\ln A-0,444}{\sqrt{0,00036}}=-1,644853627$

$\ln A=0,412791097 \rightarrow A=1,51$ euros (valor acumulado por euro invertido)

Por tanto, el valor acumulado esperado por 150.000 euros invertidos, transcurridos 15 años, es:

$V_{15}=1,51\cdot 150.000=226.500$ euros

Si se compara con el valor acumulado calculado con la media ponderada del tipo de interés se observa que no coinciden:

$V_{15}=150.000\cdot(1,0295)^{15}=231.999,22$ euros

EJERCICIO 1.20.

Cuestión:

Se invierten 10.000 euros y se observa la siguiente distribución de tipos de interés:

Tipo de interés	Probabilidad
0,01	0,25
0,02	0,3
0,03	0,45

Calcular el valor esperado acumulado transcurridos 10 años, la media y varianza del tipo de interés, la varianza del valor acumulado y el valor acumulado con la media del tipo de interés.

Solución:

Se calcula el valor esperado acumulado transcurridos 10 años:

$10.000\cdot E[a_{10}]=10.000\cdot(1+0,01)^{10}\cdot 0,25+10.000\cdot(1+0,02)^{10}\cdot 0,30$

$+10.000\cdot(1+0,03)^{10}\cdot 0,45=12.466,16$ euros

Se calcula la media y la varianza del tipo de interés:

$E[i]=\bar{i}=0,01\cdot 0,25+0,02\cdot 0,30+0,03\cdot 0,45=0,022$

$s^2=E\left[i^2\right]-E[i]^2=\left(0,01^2\cdot 0,25+0,02^2\cdot 0,30+0,03^2\cdot 0,45\right)-0,022^2=0,000066$

Se calcula la varianza del valor acumulado:

$Var[10.000\cdot a_{10}]=10.000^2\cdot\left[E\left[a_{10}^2\right]-\left[E[a_{10}]\right]^2\right]=$

$=10.000^2\cdot\left[\left(1+2\cdot 0,022+0,022^2+0,000066\right)^{10}-(1+0,022)^{20}\right]=97.675,03$

Se calcula el valor acumulado con la media del tipo de interés:

$V_{10}=10.000\cdot(1+0,022)^{10}=12.431,08$ euros

y se observa que no coincide con el valor esperado acumulado.

EJERCICIO 1.21.

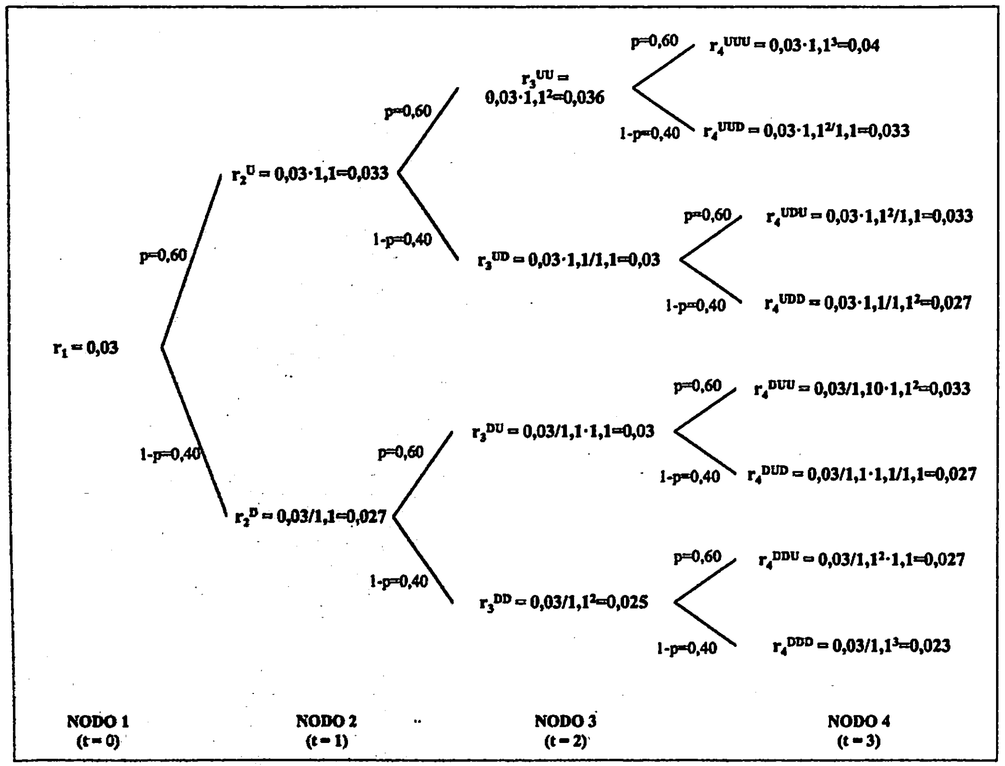
Cuestión:

Calcular el precio esperado de un bono cupón cero de nominal 1.000 euros y vencimiento 4 años utilizando el modelo binomial. El tipo de interés inicial es el 3% que tiene una probabilidad de subida del 60% y una volatilidad del 10%. Calcular también el precio del bono sin tener en cuenta el efecto de la incertidumbre.

Solución:

Para un árbol binomial de n periodos existen 2^{n-1} trayectorias. En concreto, para valorar un bono cupón cero de 4 años se construye un árbol binomial con 4 nodos o pasos y 8 posibles escenarios o trayectorias ($2^{4-1}=2^3=8$).

FIGURA 1.12. *Árbol binomial*



donde el tipo de interés inicial (r_1) crece o decrece un 10% dando lugar a dos posibles tipos de interés en el nodo 2 (r_2^U si crece o r_2^D si decrece) y así sucesivamente.

Se calcula el precio del bono en cada uno de los ocho posibles escenarios o trayectorias. Se detalla a continuación el cálculo del valor actual o precio esperado del bono teniendo en cuenta los datos de la primera trayectoria.

La probabilidad de la primera trayectoria, que consiste en tres subidas acumulativas del 10% de interés, se obtiene de:

$$p_{UUU} = 0,60 \cdot 0,60 \cdot 0,60 = 0,216$$

Los tipos de interés a aplicar se calculan del siguiente modo teniendo en cuenta la volatilidad acumulativa (aumento o disminución sobre el tipo de interés del periodo anterior), y así sucesivamente:

$$r_2^U = r_1 \cdot (1+0,10) = 0,03 \cdot (1,10) = 0,03$$

$$r_2^D = r_1 \cdot \frac{1}{1+0,10} = \frac{0,03}{1+0,10} = 0,027$$

Todos los tipos de interés calculados se pueden ver en el árbol binomial.

El precio esperado del bono según esta trayectoria se calcula descontando el nominal 1.000 euros a los tipos de interés correspondientes:

$$P_0^{UUU} = p_{UUU} \cdot \left(\frac{1}{1+r_4^{UUU}} \cdot \frac{1}{1+r_3^{UU}} \cdot \frac{1}{1+r_2^{U}} \cdot \frac{1}{1+r_1} \right) =$$

$$= 0,60 \cdot \left(\frac{1}{1+0,04} \cdot \frac{1}{1+0,036} \cdot \frac{1}{1+0,033} \cdot \frac{1}{1+0,03} \right) = 188,42 \text{ euros}$$

En la siguiente tabla se muestra el valor actual o precio esperado del bono con las ocho trayectorias:

Nº	Trayectoria	Probabilidad	Valor actual	Valor actual esperado	
1	UUU	0,216	872,31 €	188,42 €	
2	UUD	0,144	878,22 €	126,46 €	
3	UDU	0,144	883,33 €	127,20 €	
4	UDD	0,096	888,49 €	85,30 €	
5	DUU	0,144	888,49 €	127,94 €	
6	DUD	0,096	893,69 €	85,79 €	
7	DDU	0,096	898,04 €	86,21 €	
8	DDD	0,064	901,56 €	57,70 €	
			Valor actual esperado:	885,03 €	(con incertidumbre)
			Valor actual:	888,49 €	(sin incertidumbre)

El precio esperado del bono será igual a la suma de los valores actuales esperados de las 8 trayectorias:

$$1.000 \cdot E[P_0] = 1.000 \cdot \left[P_0^{UUU} + P_0^{UUD} + P_0^{UDU} + P_0^{UDD} + P_0^{DUU} + P_0^{DUD} + P_0^{DDU} + P_0^{DDD} \right] =$$

$$= 188,42 + 126,46 + 127,20 + 85,30 + 127,94 + 85,79 + 86,21 + 57,70) = 885,03 \text{ euros}$$

El precio del bono sin considerar la incertidumbre se obtiene de:

$$P_4 = \frac{1.000}{(1+r_1)^4} = \frac{1.000}{(1+0,03)^4} = 888,49 \text{ euros}$$

que no coincide con el precio esperado del bono debido a que no tiene en cuenta la incertidumbre. Además, en este caso el precio es mayor debido a que una mayor incertidumbre produce un aumento de interés y, como consecuencia, una disminución de los precios.

EJERCICIO 1.22.

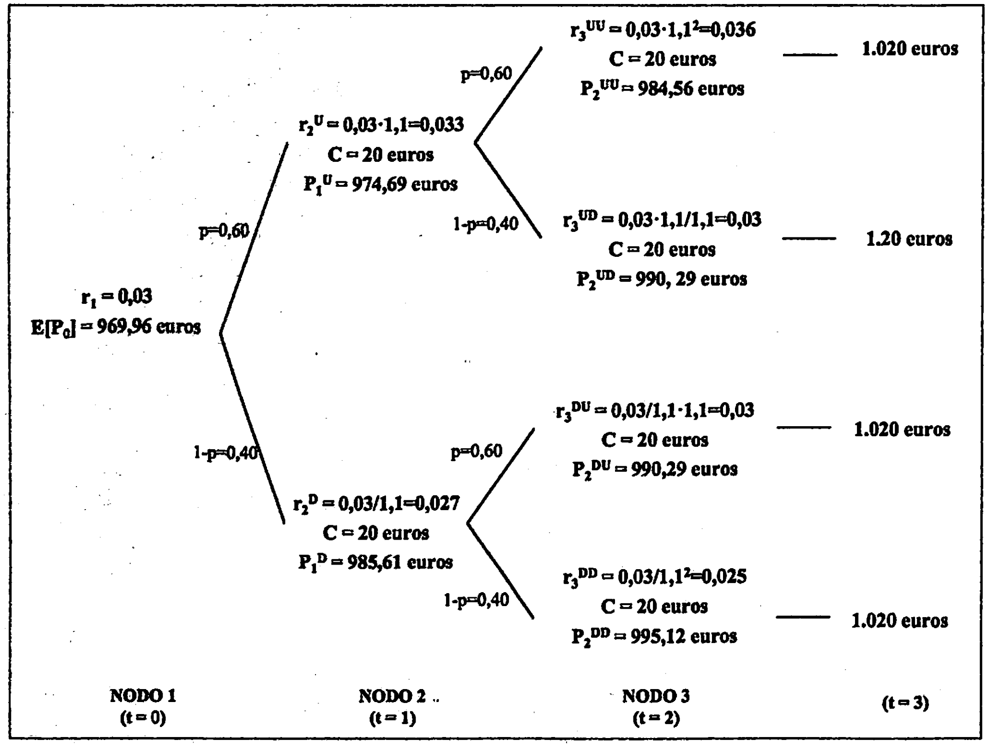
Cuestión:

Calcular el precio esperado de un bono con cupón de nominal 1.000 euros, tipo de interés del cupón del 2% y vencimiento 3 años utilizando el modelo binomial. El tipo de interés inicial es el 3% que tiene una probabilidad de subida del 60% y una volatilidad del 10%. Calcular también el precio del bono sin tener en cuenta el efecto de la incertidumbre. Aplicar dos métodos: el método de inducción y el método basado en la valoración de las trayectorias.

Solución:

En ambos métodos, para valorar un bono cupón cero de 3 años se construye un árbol binomial con 3 nodos o pasos y 4 posibles escenarios o trayectorias ($2^{3-1} = 2^2 = 4$).

FIGURA 1.13. *Árbol binomial*



Los tipos de interés a aplicar se calculan del siguiente modo teniendo en cuenta la volatilidad acumulativa (aumento o disminución sobre el tipo de interés del periodo anterior), y así sucesivamente:

$$r_2^U = r_1 \cdot (1+0{,}10) = 0{,}03 \cdot (1{,}10) = 0{,}03$$

$$r_2^D = r_1 \cdot \frac{1}{1+0{,}10} = \frac{0{,}03}{1+0{,}10} = 0{,}027$$

Todos los tipos de interés calculados se pueden ver en el árbol binomial.

a) Método de inducción

Este método consiste en ir calculando el precio del bono en cada año a partir del precio del bono en el año siguiente, de forma recurrente, como se muestra a continuación.

Se calcula el precio en el año 2 de la primera trayectoria (UU).

$$P_2^{UU} = \frac{C+N}{1+r_3^{UU}} = \frac{1.020}{1+0{,}036} = 984{,}56 \text{ euros}$$

Se calcula el precio en el año 2 de la segunda trayectoria (UD).

$$P_2^{UD} = \frac{C+N}{1+r_3^{UD}} = \frac{1.020}{1+0{,}03} = 990{,}29 \text{ euros}$$

Se calcula el precio en el año 2 de la tercera trayectoria (DU).

$$P_2^{DU} = \frac{C+N}{1+r_3^{DU}} = \frac{1.020}{1+0{,}03} = 990{,}29 \text{ euros}$$

Se calcula el precio en el año 2 de la cuarta trayectoria (DD).

$$P_2^{DD} = \frac{C+N}{1+r_3^{DD}} = \frac{1.020}{1+0{,}025} = 995{,}12 \text{ euros}$$

Se calcula el precio en el año 1 de la primera trayectoria (U):

$$P_1^U = 0{,}60 \cdot \frac{C+P_2^{UU}}{1+r_2^U} + 0{,}40 \cdot \frac{C+P_2^{UD}}{1+r_2^U} =$$

$$= 0{,}60 \cdot \frac{20+984{,}56}{1+0{,}033} + 0{,}40 \cdot \frac{20+990{,}29}{1+0{,}033} = 974{,}69 \text{ euros}$$

Se calcula el precio en el año 1 de la segunda trayectoria (D):

$$P_1^D = 0{,}60 \cdot \frac{C+P_2^{DU}}{1+r_2^D} + 0{,}40 \cdot \frac{C+P_2^{DD}}{1+r_2^D} =$$

$$= 0{,}60 \cdot \frac{20+990{,}29}{1+0{,}027} + 0{,}40 \cdot \frac{20+995{,}12}{1+0{,}027} = 985{,}61 \text{ euros}$$

Se calcula el precio o valor actual esperado del bono:

$$E[P_0] = 0{,}60 \cdot \frac{C+P_1^U}{1+r_1} + 0{,}40 \cdot \frac{C+P_1^D}{1+r_1} =$$

$$= 0{,}60 \cdot \frac{20+974{,}69}{1+0{,}03} + 0{,}40 \cdot \frac{20+985{,}61}{1+0{,}03} = 969{,}96 \text{ euros}$$

que no coincide con el precio esperado del bono debido a que no tiene en cuenta la incertidumbre. Además, en este caso el precio es mayor debido a que una mayor incertidumbre produce un aumento de interés y, como consecuencia, una disminución de los precios.

b) Método de valoración de las trayectorias

Se calcula el precio del bono con las cuatro trayectorias:

Se calculan las probabilidades de ocurrencia de cada trayectoria:

$$p_{UU} = 0{,}60 \cdot 0{,}60 = 0{,}36$$

$$p_{UD} = 0{,}60 \cdot 0{,}40 = 0{,}24$$

$$p_{DU} = 0{,}40 \cdot 0{,}60 = 0{,}24$$

$$p_{DD} = 0{,}40 \cdot 0{,}40 = 0{,}16$$

Se calcula el precio esperado con cada trayectoria:

$$E\left[P_0^{UU}\right] = p_{UU} \cdot P_0^{UU} = 0{,}36 \cdot 963{,}58 = 346{,}89 \text{ euros}$$

$$E\left[P_0^{UD}\right] = p_{UD} \cdot P_0^{UD} = 0{,}24 \cdot 930{,}73 = 223{,}38 \text{ euros}$$

$$E\left[P_0^{DU}\right] = p_{DU} \cdot P_0^{DU} = 0{,}24 \cdot 936{,}17 = 224{,}68 \text{ euros}$$

$$E\left[P_0^{DD}\right] = p_{DD} \cdot P_0^{DD} = 0{,}16 \cdot 940{,}74 = 150{,}52 \text{ euros}$$

Se calcula el precio esperado del bono como la suma de los precios esperados con las cuatro trayectorias:

$$E[P_0] = E\left[P_0^{UU}\right] + E\left[P_0^{UD}\right] + E\left[P_0^{DU}\right] + E\left[P_0^{DD}\right] =$$

$$= 346{,}89 + 223{,}38 + 224{,}68 + 150{,}52 = 945{,}47 \text{ euros}$$

Se puede comparar con el precio actual del bono, calculado en el apartado anterior, y se observa que el precio esperado del bono es menor debido al efecto de la incertidumbre ya que aumentan los tipos de interés y, como consecuencia, disminuyen los precios.

7. VALORACIÓN DE LOS CONTRATOS AL CONTADO

7.1. CONCEPTO DE CONTRATO AL CONTADO

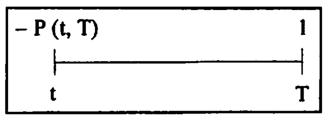
Se considera un contrato estipulado en una fecha t mediante el cual se garantiza el pago de un euro en una fecha posterior T, tal que:

$t \leq T$

$P(t,T)$: Valor en t de un euro exigible en T.

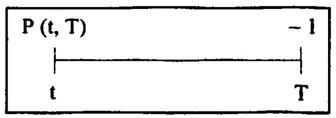
Una de las partes que interviene en la operación asume la posición acreedora y efectúa una operación de inversión:

FIGURA 1.14. *Posición acreedora en un contrato al contado*



La otra parte asume la posición deudora y efectúa una operación de financiación:

FIGURA 1.15. *Posición deudora en un contrato al contado*



donde el horizonte temporal de la operación es: $n = \Delta t = T - t$

EJERCICIO 1.23.

Cuestión:

El valor de un contrato al contado en $t = 0$ es 0,5 euros y garantiza el pago de un euro después de 4 años. ¿Cuáles son las operaciones efectuadas por las partes que intervienen en la operación?

Datos:

$t = 0$

$T = 4$ años

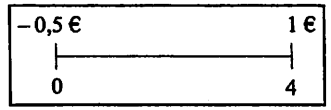
$n = 4\text{–}0 = 4$ años

$P(0,4) = 0{,}5$ euros

Solución:

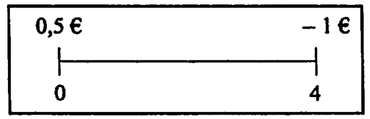
La parte acreedora efectúa una operación de inversión:

FIGURA 1.16. *Posición acreedora en el contrato al contado*



La parte deudora efectúa una operación de financiación:

FIGURA 1.17. *Posición deudora en el contrato al contado*



Si en vez de considerar fijas las fechas t y T, se tiene en cuenta una función de dos variables, t y T, esta ley financiera debe cumplir algunas propiedades que garantizan la significatividad y la consistencia desde el punto de vista económico-financiero, cabe citar:

$P(t,T) > 0, \qquad t \leq T$

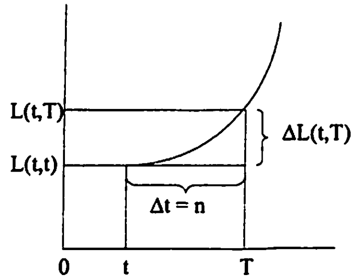
$P(T,T) = 1,$

$P(t,T_1) > P(t,T_2), \quad t \leq T_1 \leq T_2$

7.2. TIPOS DE INTERÉS AL CONTADO (SPOT RATES)

Si se considera la ley financiera $L(t,T)$:

FIGURA 1.18. *Gráfico de la ley financiera* $L(t,T)$



El interés del periodo $[t,T]$, expresado en unidades monetarias, se obtiene de:

$$\Delta L(t,T) = L(t,T) - L(t,t) = L(t,T) - 1$$

Se dividen ambos miembros de la ecuación anterior por $L(t,t)$ y se obtiene el tipo de interés del periodo:

$$\frac{\Delta L(t,T)}{L(t,t)} = \frac{L(t,T)}{L(t,t)} - \frac{L(t,t)}{L(t,t)} = L(t,T) - 1$$

$$\boldsymbol{i(t,T) = L(t,T) - 1}$$

que también se puede expresar en función del factor de descuento:

$$\boldsymbol{i(t,T) = \frac{1}{A(t,T)} - 1}$$

Según Moriconi (1995) se define la fuerza o intensidad del interés como:

$$\boldsymbol{\gamma(t,T) = \frac{i(t,T)}{T-t}}$$

El tipo de interés al contado en régimen de capitalización simple $i_S(t,T)$ (*simply-compounded spot interest rate*) es aquel que aplicado al capital $P(t,T)$ en el instante inicial t produce una unidad monetaria en el vencimiento T, utilizando la ley financiera de capitalización simple:

$$P(t,T)\cdot[1 + i_S(t,T)\cdot(T-t)] = 1$$

$$i_S(t,T) = \left[\frac{1}{P(t,T)} - 1\right]\cdot\frac{1}{T-t}$$

$$\boldsymbol{i_S(t,T) = \frac{1-P(t,T)}{P(T,t)\cdot(T-t)}}$$

Se puede obtener el tipo de interés al contado simple $i_S(t,T)$ equivalente al tipo de interés al contado $i(t,T)$ del periodo $[t,T]$ si se igualan los montantes obtenidos en el vencimiento T:

$$\left.\begin{array}{l} L(t,T) = 1 + i_S(t,T)\cdot(T-t) \\ L(t,T) = 1 + i(t,T) \end{array}\right\} \quad \boldsymbol{i_S(t,T) = \frac{i(t,T)}{T-t}}$$

El tipo de interés al contado en régimen de capitalización compuesta $i_C(t,T)$ (*annually-compounded spot interest rate*) es aquel que aplicado al capital $P(t,T)$ en el instante inicial t produce una unidad monetaria en el vencimiento T, utilizando la ley financiera de capitalización compuesta:

$$P(t,T)\cdot[1 + i_C(t,T)]^{T-t} = 1$$

$$\boldsymbol{i_C(t,T) = \left[\frac{1}{P(t,T)}\right]^{\frac{1}{T-t}} - 1}$$

Se puede obtener el tipo de interés anual compuesto $i_C(t,T)$ equivalente al tipo de interés al contado $i(t,T)$ del periodo $[t,T]$ si se igualan los montantes obtenidos en el vencimiento T:

$$\left.\begin{array}{l} L(t,T) = [1 + i_C(t,T)]^{T-t} \\ L(t,T) = [1 + i(t,T)] \end{array}\right\} \quad \boldsymbol{i_C(t,T) = [1 + i(t,T)]^{\frac{1}{T-t}} - 1}$$

El tipo de interés al contado capitalizable m veces dentro del año $J_m(t,T)$ (*m-times-per year compounded spot interest rate*) es aquel que aplicado al capital $P(t,T)$ en el instante inicial t produce una unidad monetaria en el vencimiento T, utilizando la ley financiera de capitalización compuesta:

$$P(t,T)\cdot\left[1 + \frac{J_m(t,T)}{m}\right]^{m\cdot(T-t)} = 1$$

$$J_m(t,T) = \left(\frac{1}{P(t,T)^{\frac{1}{m\cdot(T-t)}}} - 1\right)\cdot m$$

$$\boldsymbol{J_m(t,T) = \frac{m}{P(t,T)^{\frac{1}{m\cdot(T-t)}}} - m}$$

Se puede obtener el tipo de interés al contado capitalizable m veces dentro del año $J_m(t,T)$ equivalente al tipo de interés al contado $i(t,T)$ del periodo $[t,T]$ si se igualan los montantes obtenidos en el vencimiento T:

$$\left.\begin{array}{l} L(t,T) = \left[1 + \dfrac{J_m(t,T)}{m}\right]^{m\cdot(T-t)} \\ \\ L(t,T) = [1 + i(t,T)] \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{\left[1 + \dfrac{J_m(t,T)}{m}\right]^{m\cdot(T-t)} = [1 + i(t,T)] \Rightarrow} \\ \boldsymbol{J_m(t,T) = \left[[1 + i(t,T)]^{\frac{1}{m(T-t)}} - 1\right]\cdot m} \end{array}$$

El tipo de interés al contado en capitalización continua (*continuously-compounded spot interest rate*) es aquel que aplicado al capital $P(t,T)$ en el instante inicial t produce una unidad monetaria en el vencimiento T, utilizando la ley financiera de capitalización continua:

$$P(t,T)\cdot e^{R(t,T)\cdot(T-t)} = 1$$

$$\boldsymbol{R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}}$$

El tipo de interés al contado en capitalización continua también se puede obtener como el límite del tipo al contado capitalizable m veces dentro del año cuando m tiende a infinito:

$$R(t,T)=\lim_{m\to+\infty}\frac{m}{\left(P(t,T)\right)^{\frac{1}{m(T-t)}}}-m=-\ln\frac{P(t,T)}{T-t}$$

Se puede obtener el tipo de interés al contado continuo equivalente al tipo de interés al contado compuesto y viceversa:

$$\left.\begin{array}{l} L(t,T)=P(t,T)\cdot e^{R(t,T)(T-t)} \\ L(t,T)=P(t,T)\cdot\left[1+i_C(t,T)\right]^{T-t}\end{array}\right\} \boldsymbol{R(t,T)=\ln\left[1+i_C(t,T)\right] \text{ ó } i_C(t,T)=e^{R(t,T)}-1}$$

EJERCICIO 1.24.

Cuestión:

Sea la ley financiera, fijada en $t = 0$, $L(0,0) = 1$ y $L(0;1,5) = 1,10$. Calcular el interés del periodo $[0;1,5]$, el tipo de interés del periodo y los tipos de interés al contado en el régimen de capitalización simple, compuesta y continua.

Datos:

$t=0$

$L(0,0)=1$

$L(0;1,5)=1,10$

Solución:

- Interés al contado relativo al periodo $[0;1,5]$:

  $\Delta L(0;1,5)=L(0;1,5)-L(0,0)=1,10-1=0,10$ €

- Tipo de interés al contado del periodo $[0;1,5]$:

  $$i(0;1,5)=\frac{\Delta L(0;1,5)}{L(0,0)}=\frac{0,1}{1}=0,10\Rightarrow i(0;1,5)=10\%$$

- Tipo de interés al contado simple:

  $L(0,0)\cdot\left[1+i_S(0;1,5)\cdot 1,5\right]=L(0;1,5)$

  $1\cdot\left[1+i_S(0;1,5)\cdot 1,5\right]=1,10$

  $$i_S(0;1,5)=\frac{1,10-1}{1,5}=0,667\Rightarrow i_S(0;1,5)=6,67\%$$

O también:

$$\left.\begin{array}{l} L(0;1,5)=1+i_S(0;1,5)\cdot 1,5 \\ L(0;1,5)=1+i(0;1,5)\end{array}\right\} i_S(0;1,5)=\frac{i(0;1,5)}{1,5}=\frac{0,10}{1,5}=0,0667$$

- Tipo de interés al contado compuesto:

  $L(0,0)\cdot\left[1+i_C(0;1,5)\right]^{1,5}=L(0;1,5)$

  $1\cdot\left[1+i_C(0;1,5)\right]^{1,5}=1,10$

$$i_C(0;1,5)=(1,10)^{\frac{1}{1,5}}-1=0,656\Rightarrow i_C(0;1,5)=6,56\%$$

O también:

$$\left.\begin{array}{l} L(0;1,5)=\left[1+i_C(0;1,5)\right]^{1,5} \\ L(0;1,5)=1+i(0;1,5)\end{array}\right\} i_C(0;1,5)=\left[1+i(0;1,5)\right]^{\frac{1}{1,5}}-1=\left[1+0,10\right]^{\frac{1}{1,5}}-1=0,0656$$

- Tipo de interés al contado continuo:

  $L(0,0)\cdot e^{R(0;1,5)\cdot 1,5}=L(0;1,5)$

  $1\cdot e^{R(0;1,5)\cdot 1,5}=1,10$

  $$R(0;1,5)=\frac{\ln 1,10}{1,5}=0,0635$$

O también:

$$\left.\begin{array}{l} L(0;1,5)=e^{R(0;1,5)\cdot 1,5} \\ L(0;1,5)=1+i(0;1,5)\end{array}\right\} R(0;1,5)=\frac{\ln\left[1+i(0;1,5)\right]}{1,5}=\frac{\ln 1,10}{1,5}=0,0635$$

La tasa instantánea de interés al contado (*instantaneous spot interest rate or short rate*) es el límite del tipo de interés al contado continuo cuando se consideran periodos infinitesimales:

$$\boldsymbol{r(t)=R(t,t)=-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\ln P(t,t+\Delta t)}{\Delta t}=-\frac{\partial\ln P(t,t)}{\partial T}}$$

donde $\frac{\partial\ln P(t,t)}{\partial T}$ es la derivada parcial de la función $P(t,T)$ evaluada en $T=t$.

Si se admite que la función $L(t,T)$ tiene derivada parcial respecto a la variable T, la definición de fuerza de interés puede referirse a un periodo infinitesimal y también nos permite calcular la tasa instantánea de interés al contado como el límite de la fuerza de interés $\gamma(t,t+n)$ cuando la amplitud del horizonte temporal n tiende a cero:

$$r(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\gamma(t,T=t+\Delta t)=\lim_{n\to 0}\frac{i(t,T)}{n}=\lim_{n\to 0}\frac{L(t,t+\Delta t)-L(t,t)}{L(t,t)\cdot n}=$$

$$=\frac{1}{L(t,t)}\cdot\lim_{n\to 0}\frac{L(t,T)-L(t,t)}{n}=\frac{1}{L(t,t)}\cdot\frac{\partial L(t,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial T}\ln L(t,t)=-\frac{\partial}{\partial T}\ln P(t,t)$$

donde:

$P(t,t)=A(t,t)$

$L(t,T)$ es una función creciente con respecto a T.

$\Delta t=n$

$r(t)$ es positiva y además puede escribirse como derivada logarítmica ya que $L(t,T)>0$.

8. VALORACIÓN DE LOS CONTRATOS A PLAZO

8.1. CONCEPTO DE CONTRATO A PLAZO

En general, un contrato a plazo o contrato *forward* es una compraventa diferida en la que dos partes se comprometen, en el instante t, a intercambiarse en una fecha futura convenida T_1 (fecha de entrega del bien) y a un precio prefijado una determinada cantidad de un bien con vencimiento T_2.

En un contrato a plazo no está previsto ningún desembolso de dinero en el instante t, que únicamente representa la fecha de suscripción del contrato.

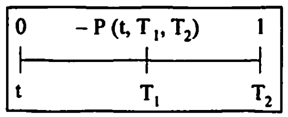
En los contratos a plazo el periodo de intercambio comienza en un instante T_1 posterior al instante de negociación del contrato t, tal que:

$t \leq T_1 \leq T_2$

$P(t,T_1,T_2)$: Valor en T_1, pactado en t, de un euro exigible en T_2.

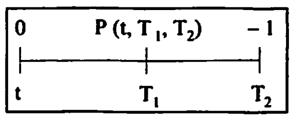
En el contrato a plazo el comprador se compromete a asumir la posición acreedora (posición larga) por el importe de un euro y pacta en la fecha t y sobre el horizonte temporal $[T_1,T_2]$ la operación de inversión a plazo a un precio preestablecido en t.

FIGURA 1.19. *Posición acreedora en un contrato a plazo*



Mientras que el vendedor se compromete a asumir la posición deudora (posición corta) y pacta en la fecha t y sobre el horizonte temporal $[T_1,T_2]$ la operación de financiación a plazo a un precio preestablecido en t.

FIGURA 1.20. *Posición deudora en un contrato a plazo*



EJERCICIO 1.25.

Cuestión:

En el instante actual $t = 0$ se negocia un contrato a plazo, cuyo valor transcurridos dos años es de 0,5 euros y mediante el cual se garantiza el pago de un euro después de 4 años. ¿Cuáles son las operaciones efectuadas por las partes que intervienen en la operación?

Datos:

$t = 0$

$T_1 = 2$ años

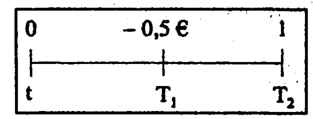
$T_2 = 4$ años

$P(0,2,4) = 0,5$ euros

Solución:

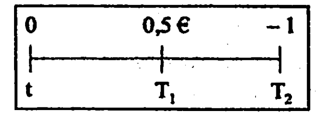
El comprador asume la posición acreedora (posición larga) y efectúa una operación de inversión a plazo:

FIGURA 1.21. *Posición acreedora en el contrato a plazo*



El vendedor asume la posición deudora (posición corta) y efectúa una operación de financiación a plazo:

FIGURA 1.22. *Posición deudora en el contrato a plazo*



La ley financiera $P(t,T_1,T_2)$ debe satisfacer algunas propiedades que garantizan la significatividad financiera:

$P(t,T_1,T_2) > 0, \qquad t \leq T_1 \leq T_2$

$P(t,T_2,T_2) = 1, \qquad t \leq T_2$

$P(t,T_1,T_2') > P(t,T_1,T_2''), \quad t \leq T_1 \leq T_2' < T_2''$

(función decreciente respecto del vencimiento T_2).

$P(t,T_1',T_2) < P(t,T_1'',T_2), \quad t \leq T_1' < T_1'' \leq T_2$

(función creciente respecto al inicio del horizonte temporal T_1).

Desde el punto de vista formal un contrato al contado es un caso particular de los contratos a plazo donde $t = T_1$ y, por tanto:

$P(t,t,T_2) = P(t,T_2), \quad t \leq T_2$

La ley financiera de valoración de los contratos a plazo cumple la *propiedad de uniformidad en el tiempo o de estacionariedad* ya que la función no depende del periodo inicial de intercambio monetario $[T_1,T_2]$ ni del periodo de diferimiento $[t,T_1]$, sólo depende de la duración de la operación:

$P(t+\Delta t, T_1+\Delta t, T_2+\Delta t) = P(t,T_1,T_2), \quad t \leq T_1 \leq T_2$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

En particular, para los contratos al contado, donde $t = T$:

$P(t+\Delta t, T+\Delta t) = P(t,T), \quad t \leq T$ para todo $t \geq 0$

8.2. RELACIÓN ENTRE LOS CONTRATOS AL CONTADO Y A PLAZO

La propiedad de independencia del importe permite obtener una relación entre las leyes financieras de valoración de los contratos al contado y a plazo, justificada por consideraciones de consistencia financiera:

$$\boldsymbol{P(t,T_2) = P(t,T_1) \times P(t,T_1,T_2)} \textbf{ donde } \boldsymbol{t \leq T_1 \leq T_2}$$

es, decir, el valor en el instante t de un euro pagadero en el instante T_2 debe coincidir con el valor $P(t,T_1,T_2)$ en el instante T_1 actualizado con el factor de descuento $P(t,T_1)$.

Para evitar el arbitraje sin riesgo se debe cumplir el teorema de los precios implícitos que deriva de la expresión anterior:

$$P(t,T_1,T_2) = \frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}, \qquad t \leq T_1 \leq T_2$$

EJERCICIO 1.26.

Cuestión:

Comprobar la relación entre los dos siguientes contratos:

- **Contrato al contado que garantiza la equivalencia financiera entre 0,80 euros en el instante actual ($t = 0$) y un euro dentro de tres meses.**
- **Contrato a plazo que garantiza la equivalencia financiera entre 0,70 euros disponibles dentro de tres meses y un euro transcurridos nueve meses.**

Datos:

$t = 0$

$T_1 = 3$ meses

$T_2 = 9$ meses

$P(0,3) = 0{,}80$

$P(0,3,9) = 0{,}70$

Solución:

$$P(0,9) = P(0,3) \cdot P(0,3,9) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$$

es decir, un euro dentro de nueve meses es equivalente a 0,56 euros en el instante actual.

- *Propiedad de escindibilidad*

La propiedad de escindibilidad establece que: $\boldsymbol{P(t,T_2) = P(t,T_1) \cdot P(T_1,T_2)}$ donde $t \leq T_1 \leq T_2$

Si se compara con la hipótesis de consistencia financiera, para que las dos propiedades coincidan se debe cumplir la igualdad: $P(t,T_1,T_2) = P(T_1,T_2)$, $t \leq T_1 \leq T_2$, que raramente sucede en la realidad. Esta última expresión podría interpretarse como una definición alternativa de la propiedad de escindibilidad.

EJERCICIO 1.27.

Cuestión:

Comprobar si la siguiente ley financiera: $A(t,T) = e^{-\frac{1}{2}\cdot(T^2 - t^2)}$, $T \geq t > 0$, es escindible:

Solución:

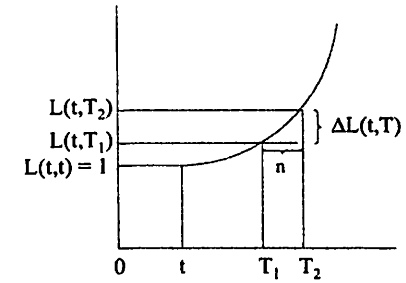
$$P(t=0,T_1,T_2) = \frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(T_2^2 - t^2)}}{e^{-\frac{1}{2}(T_1^2 - t^2)}} = e^{-\frac{1}{2}(T_2^2 - T_1^2)} = P(T_1,T_2)$$

Por tanto, esta ley financiera es escindible.

8.3. TIPOS DE INTERÉS A PLAZO (FORWARD RATES)

Si se considera la ley financiera $L(t,T)$ como función de la variable T y el instante t fijo:

FIGURA 1.23. *Gráfico de la ley financiera* $L(t,T)$



Conocidos dos instantes de tiempo:

$T_1 \geq t$

$T_2 = T_1 + n, \; n > 0$

el interés a plazo del periodo $[T_1, T_2]$ se obtiene de:

$$\Delta L(t,T) = L(t,T_2) - L(t,T_1)$$

Se dividen ambos miembros de la ecuación anterior por $L(t,T_1)$ y se obtiene el tipo de interés efectivo:

$$\frac{\Delta L(t,T)}{L(t,T_1)} = \frac{L(t,T_2)}{L(t,T_1)} - \frac{L(t,T_1)}{L(t,T_1)} = \frac{L(t,T_2)}{L(t,T_1)} - 1 = L(t,T_1,T_2) - 1$$

$$\boldsymbol{i(t,T_1,T_2) = L(t,T_1,T_2) - 1}$$

que también se puede expresar en función de los factores de descuento como:

$$\boldsymbol{i(t,T_1,T_2) = \frac{A(t,T_1)}{A(t,T_2)} - 1}$$

o teniendo en cuenta la hipótesis de consistencia financiera:

$$i(t,T_1,T_2) = \frac{\cancel{A(t,T_1)}}{\cancel{A(t,T_1)} \cdot A(t,T_1,T_2)} - 1$$

$$\boldsymbol{i(t,T_1,T_2) = \frac{1}{A(t,T_1,T_2)} - 1}$$

Según Moriconi (1995) se define la fuerza o intensidad de interés como:

$$\gamma(t,T_1,T_2)=\frac{i(t,T_1,T_2)}{T_2-T_1}$$

El tipo de interés a plazo en régimen de capitalización simple $i_S(t,T_1,T_2)$ (*simply-compounded forward interest rate*) es aquel que aplicado al capital $P(t,T_1,T_2)$ en el instante T_1 produce una unidad monetaria en el vencimiento T_2, utilizando la ley financiera de capitalización simple:

$$P(t,T_1,T_2)\cdot\left[1+i_S(t,T_1,T_2)\cdot(T_2-T_1)\right]=1$$

$$i_S(t,T_1,T_2)=\left[\frac{1}{P(t,T_1,T_2)}-1\right]\cdot\frac{1}{T_2-T_1}$$

$$i_S(t,T_1,T_2)=\frac{1-P(t,T_1,T_2)}{P(t,T_1,T_2)\cdot(T_2-T_1)}$$

y también se puede expresar en función de valores al contado:

$$i_S(t,T_1,T_2)=\left[\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}-1\right]\cdot\frac{1}{T_2-T_1}$$

Se puede obtener el tipo de interés a plazo simple $i_S(t,T_1,T_2)$ equivalente al tipo de interés a plazo $i(t,T_1,T_2)$ del periodo $[T_1,T_2]$ si se igualan los montantes obtenidos en el vencimiento T_2:

$$\left.\begin{aligned}L(t,T_1,T_2)&=1+i_S(t,T_1,T_2)\cdot(T_2-T_1)\\L(t,T_1,T_2)&=1+i(t,T_1,T_2)\end{aligned}\right\}\ i_S(t,T_1,T_2)=\frac{i(t,T_1,T_2)}{T_2-T_1}$$

El tipo de interés a plazo en régimen de capitalización compuesta $i_C(t,T_1,T_2)$ (*annually-compounded forward interest rate*) es aquel que aplicado al capital $P(t,T_1,T_2)$ en el instante T_1 produce una unidad monetaria en el vencimiento T_2, utilizando la ley financiera de capitalización compuesta:

$$P(t,T_1,T_2)\cdot\left[1+i_C(t,T_1,T_2)\right]^{T_2-T_1}=1$$

$$i_C(t,T_1,T_2)=\left[\frac{1}{P(t,T_1,T_2)}\right]^{\frac{1}{T_2-T_1}}-1$$

y se puede expresar en función de valores al contado:

$$i_C(t,T_1,T_2)=\left[\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}\right]^{\frac{1}{T_2-T_1}}-1$$

Se puede obtener el tipo de interés a plazo compuesto $i_C(t,T_1,T_2)$ equivalente al tipo de interés a plazo $i(t,T_1,T_2)$ del periodo $[T_1,T_2]$ si se igualan los montantes obtenidos en el vencimiento T_2:

$$\left.\begin{aligned}L(t,T_1,T_2)&=\left[1+i_C(t,T_1,T_2)\right]^{T_2-T_1}\\L(t,T_1,T_2)&=\left[1+i(t,T_1,T_2)\right]\end{aligned}\right\}\ i_C(t,T_1,T_2)=\left[1+i(t,T_1,T_2)\right]^{\frac{1}{T_2-T_1}}-1$$

El tipo de interés a plazo en capitalización continua (*continuously-compounded forward interest rate*) $R(t,T_1,T_2)$ es aquel que aplicado al capital $P(t,T_1,T_2)$ en el instante inicial T_1 produce una unidad monetaria en el vencimiento T_2, utilizando la ley financiera de capitalización continua:

$$P(t,T_1,T_2)\cdot e^{R(t,T_1,T_2)\cdot(T_2-T_1)}=1$$

$$R(t,T_1,T_2)=-\frac{\ln P(t,T_1,T_2)}{T_2-T_1}$$

que también se puede expresar en función de valores al contado:

$$R(t,T_1,T_2)=-\frac{\ln P(t,T_2)-\ln P(t,T_1)}{T_2-T_1}$$

Se puede obtener el tipo de interés a plazo continuo $R(t,T_1,T_2)$ equivalente al tipo de interés a plazo compuesto $i_C(t,T_1,T_2)$ y viceversa:

$$\left.\begin{aligned}L(t,T_1,T_2)&=P(t,T_1,T_2)\cdot e^{R(t,T_1,T_2)\cdot(T_2-T_1)}\\L(t,T_1,T_2)&=P(t,T_1,T_2)\cdot\left[1+i_C(t,T_1,T_2)\right]^{T_2-T_1}\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}R(t,T_1,T_2)&=\ln\left[1+i_C(t,T_1,T_2)\right]\\i_C(t,T_1,T_2)&=e^{R(t,T_1,T_2)}-1\end{aligned}$$

EJERCICIO 1.28.

Cuestión:

Sea la ley financiera, fijada en $t=0$, $L(0,1)=1{,}5$ y $L(0;1{,}5)=1{,}60$. Calcular los tipos de interés a plazo sobre el periodo $[1;1{,}5]$.

Datos:

$t=0$

$T_1=1$ año

$T_2=1{,}5$ años

$L(0,1)=1{,}5$

$L(0;1{,}5)=1{,}6$

Solución:

- Interés a plazo relativo al periodo $[1;1{,}5]$:

  $\Delta L(0;1{,}5)=L(0;1{,}5)-L(0{,}1)=1{,}6-1{,}5=0{,}1$ €

- Tipo de interés a plazo del periodo $[1;1{,}5]$:

  $$i(0{,}1;1{,}5)=\frac{\Delta L(0;1{,}5)}{L(0{,}1)}=\frac{0{,}1}{1{,}5}=0{,}0667\Rightarrow i(0;1;1{,}5)=6{,}67\%$$

- Tipo de interés a plazo simple:

  $$L(0;1;1{,}5)=\frac{L(0;1{,}5)}{L(0{,}1)}=\left[1+i_S(0;1;1{,}5)\cdot 0{,}5\right]$$

  $$i_S(0;1;1{,}5)=\frac{\frac{1{,}6}{1{,}5}-1}{0{,}5}=\frac{1{,}0667-1}{0{,}5}=0{,}1334\Rightarrow i_S(0;1;1{,}5)=13{,}34\%$$

O también:

$$\left.\begin{array}{l} L(0;1;1,5)=1+i_S(0;1;1,5)\cdot 0,5 \\ L(0;1;1,5)=1+i(0;1;1,5) \end{array}\right\} i_S(0;1;1,5)=\frac{i(0;1;1,5)}{0,5}=\frac{0,0667}{0,5}=0,1334$$

- Tipo de interés a plazo compuesto:

$$i_C(0;1;1,5)=1,0667^{\frac{1}{0,5}}-1=0,1378 \Rightarrow i_C(0;1;1,5)=13,78\%$$

$$L(0;1;1,5)=\frac{L(0;1,5)}{L(0,1)}=\left[1+i_C(0;1;1,5)\right]^{0,5}$$

O también:

$$\left.\begin{array}{l} L(0;1;1,5)=\left[1+i_C(0;1;1,5)\right]^{0,5} \\ L(0;1;1,5)=1+i(0;1;1,5) \end{array}\right\} i_C(0;1;1,5)=(1,0667)^{\frac{1}{0,5}}-1=0,1378$$

- Tipo de interés a plazo continuo:

$$L(0;1;1,5)=e^{R(0;1;1,5)\cdot 0,5}$$

$$R(0;1;1,5)=\frac{\ln L(0;1;1,5)}{0,5}=\frac{\ln 1,0667}{0,5}=0,1291 \Rightarrow R(0;1;1,5)=12,91\%$$

O también:

$$\left.\begin{array}{l} L(0;1;1,5)=e^{R(0;1;1,5)\cdot 0,5} \\ L(0;1;1,5)=1+i(0;1;1,5) \end{array}\right\} R(0;1;1,5)=\frac{\ln[1+i(0;1;1,5)]}{0,5}=\frac{\ln 1,0667}{0,5}=0,1291$$

También se pueden obtener tipos de interés a plazo continuos que sean equivalentes entre sí:

$$\left.\begin{array}{l} L(t,T_1,T_2)=P(t,T_1,T_2)\cdot e^{R(t,T_1,T_2)\cdot(T_2-T_1)} \\ L(t,T_1,T_2)=P(t,T_1,T_2)\cdot e^{R'(t',T_1',T_2')\cdot(T_2'-T_1')} \end{array}\right\} R'(t',T_1',T_2')=R(t,T_1,T_2)\cdot\frac{T_2-T_1}{T_2'-T_1'}=R(t,T_1,T_2)\cdot q$$

donde:

$q=\frac{T_2-T_1}{T_2'-T_1'}$ es la relación entre las bases de medida temporales de los dos tipos de interés a plazo continuos.

EJERCICIO 1.29.

Cuestión:

El tipo de interés a plazo en capitalización continua es el 10% considerando los tiempos t, T_1 y T_2 en años. Calcular el tipo de interés a plazo equivalente en capitalización continua $R'(t',T_1',T_2')$ si se considera el tiempo expresado en semestres.

Solución:

- Cálculo del tipo de interés a plazo en capitalización continua en base semestral equivalente al tipo de interés a plazo en capitalización continua en base anual:

$$\left.\begin{array}{l} L(t,T_1,T_2)=P(t,T_1,T_2)\cdot e^{0,10\cdot 1} \\ L(t,T_1,T_2)=P(t,T_1,T_2)\cdot e^{R'(t',T_1',T_2')\cdot 2} \end{array}\right\} R'(t',T_1',T_2')=0,10\cdot q=0,10\cdot\frac{1}{2}=0,05$$

donde: $q=\frac{t}{t'}=\frac{1}{2}=0,5$

es la relación entre las bases de medida temporales (la anual y la semestral).

EJERCICIO 1.30.

Cuestión:

El tipo de interés a plazo en capitalización continua es el 30% considerando los tiempos t, T_1 y T_2 en cuatrimestres. Calcular el tipo de interés a plazo equivalente en capitalización continua $R'(t',T_1',T_2')$ si se considera el tiempo expresado en trimestres.

Solución:

- Cálculo del tipo de interés a plazo en capitalización continua en base trimestral equivalente al tipo de interés a plazo en capitalización continua en base cuatrimestral:

$$\left.\begin{array}{l} L(t,T_1,T_2)=P(t,T_1,T_2)\cdot e^{0,30\cdot 3} \\ L(t,T_1,T_2)=P(t,T_1,T_2)\cdot e^{R'(t',T_1',T_2')\cdot 4} \end{array}\right\} R'(t',T_1',T_2')=0,30\cdot q=0,30\cdot\frac{3}{4}=0,225$$

donde: $q=\frac{t}{t'}=\frac{3}{4}=0,75$

es la relación entre las bases de medida temporales (la cuatrimestral y la trimestral).

La tasa instantánea de interés a plazo (*instantaneous forward rate or forward short rate*) es el límite del tipo de interés a plazo en capitalización continua cuando se consideran periodos infinitesimales:

$$\boldsymbol{f(t,T)=R(t,T,T)=-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\ln P(t,T+\Delta t)-\ln P(t,T)}{\Delta t}=-\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}}$$

donde $\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}$ es la derivada parcial de la función $P(t,T)$ evaluada en T.

La tasa instantánea de interés a plazo y la tasa instantánea de interés al contado coinciden cuando $T=t$.

Si se admite que la función $L(t,T)$ tiene derivada parcial respecto a la variable T, la definición de fuerza de interés puede referirse a un periodo infinitesimal y también nos permite calcular la tasa instantánea de interés a plazo como el límite de la fuerza de interés $\gamma(t,T,T+\Delta T)$ cuando la amplitud del horizonte temporal n tiende a cero:

$$\delta(t,T)=f(t,T)=\lim_{\Delta T\to 0}\gamma(t,T,T+\Delta T)=\lim_{n\to 0}\frac{i(t,T,T+n)}{n}=\lim_{n\to 0}\frac{L(t,T+n)-L(t,T)}{L(t,T)\cdot n}=$$

$$=\frac{1}{L(t,T)}\cdot\lim_{n\to 0}\frac{L(t,T+n)-L(t,T)}{n}=\frac{1}{L(t,T)}\cdot\frac{\partial L(t,T)}{\partial T}=\frac{\partial}{\partial T}\ln L(t,T)=-\frac{\partial}{\partial T}\ln A(t,T)$$

donde:

$A(t,t)=P(t,T)$

$L(t,T)$ es una función creciente con respecto a T.

$f(t,T)$ es positiva y además puede escribirse como derivada logarítmica ya que $L(t,T)>0$.

También resulta útil expresar el factor de descuento en función de la tasa instantánea de interés a plazo. Para ello se integran los dos miembros de la ecuación anterior y se obtiene:

$$\int_t^T f(t,u)\cdot du=-\int_t^T\frac{\partial}{\partial u}\ln A(t,u)\cdot du=-\ln A(t,T)+\ln A(t,t)=-\ln A(t,T)$$

ya que $A(t,t)=1$.

El valor del factor de descuento $A(t,T)$ se obtiene despejando en la ecuación anterior:

$$\boldsymbol{A(t,T)=e^{-\int_t^T f(t,u)\cdot du}}\ \text{donde}\ t\le T$$

Esta expresión puede aplicarse a las operaciones a plazo. Teniendo en cuenta que:

$$A(t,T_2)=A(t,T_1)\cdot A(t,T_1,T_2),\qquad t\le T_1\le T_2$$

entonces:

$$A(t,T_1,T_2)=\frac{A(t,T_2)}{A(t,T_1)}=\frac{e^{-\int_t^{T_2}f(t,u)\cdot du}}{e^{-\int_t^{T_1}f(t,u)\cdot du}}=e^{-\left[\int_t^{T_2}f(t,u)\cdot du-\int_t^{T_1}f(t,u)\cdot du\right]}$$

$$\boldsymbol{A(t,T_1,T_2)=e^{-\int_{T_1}^{T_2}f(t,u)\cdot du}}\ \text{donde}\ t\le T_1\le T_2$$

Se puede obtener una relación entre el tipo de interés a plazo continuo y la tasa instantánea de interés a plazo:

$$R(t,T_1,T_2)=-\frac{1}{T_2-T_1}\cdot\ln A(t,T_1,T_2)=-\frac{1}{T_2-T_1}\cdot\ln e^{-\int_{T_1}^{T_2}f(t,u)\cdot du}$$

$$\boldsymbol{R(t,T_1,T_2)=\frac{1}{T_2-T_1}\cdot\int_{T_1}^{T_2}f(t,u)\cdot du}\ \text{donde}\ t\le T_1\le T_2$$

Esta expresión nos indica que el tipo de interés a plazo en capitalización continua es la media temporal de la tasa instantánea de interés a plazo, fijada en t, sobre el horizonte temporal $[T_1,T_2]$.

8.4. RELACIÓN ENTRE LOS TIPOS DE INTERÉS AL CONTADO Y A PLAZO

a) Relación entre los tipos de interés al contado y a plazo en régimen de capitalización compuesta

El tipo de interés de la operación a plazo se obtiene de:

$$P(t,T_1,T_2)\cdot\left[1+i(t,T_1,T_2)\right]^{T_2-T_1}=1$$

$$\boldsymbol{i(t,T_1,T_2)=\left[\frac{1}{P(t,T_1,T_2)}\right]^{\frac{1}{T_2-T_1}}-1}$$

Si se consideran operaciones al contado con vencimientos en T_1 y en T_2, el tipo de interés a plazo $i(t,T_1,T_2)$ está implícito en los tipos al contado $i(t,T_1)$ e $i(t,T_2)$:

$$P(t,T_1,T_2)=\frac{1}{\left[1+i(t,T_1,T_2)\right]^{T_2-T_1}},\qquad t\le T_1\le T_2$$

$$\left[1+i(t,T_1,T_2)\right]^{-(T_2-T_1)}=\frac{\left[1+i(t,T_2)\right]^{-(T_2-t)}}{\left[1+i(t,T_1)\right]^{-(T_1-t)}},\qquad t\le T_1\le T$$

Se obtiene así otra relación entre los tipos al contado y los tipos a plazo:

$$1+i(t,T_1,T_2)=\frac{\left[1+i(t,T_2)\right]^{\frac{T_2-T_1}{T_2-T_1}+\frac{T_1-t}{T_2-T_1}}}{\left[1+i(t,T_1)\right]^{\frac{T_1-t}{T_2-T_1}}}=\left[1+i(t,T_2)\right]\cdot\left[\frac{1+i(t,T_2)}{1+i(t,T_1)}\right]^{\frac{T_1-t}{T_2-T_1}}$$

$$\boldsymbol{i(t,T_1,T_2)=\left[1+i(t,T_2)\right]\cdot\left[\frac{1+i(t,T_2)}{1+i(t,T_1)}\right]^{\frac{T_1-t}{T_2-T_1}}}-1\ \text{donde}\ t\le T_1\le T_2$$

b) Relación entre los tipos de interés al contado y a plazo en régimen de capitalización continua

$$\left.\begin{array}{l}P(t,T_1,T_2)=\left[1+i(t,T_1,T_2)^{-(T_2-T_1)}\right]\\ P(t,T_1,T_2)=e^{-R(t,T_1,T_2)\cdot(T_2-T_1)}\end{array}\right\}\boldsymbol{R(t,T_1,T_2)=\ln\left[1+i(t,T_1,T_2)\right]t\le T_1\le T_2}$$

$$P(t,T_1,T_2)=\frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}\Rightarrow e^{-R(t,T_1,T_2)\cdot(T_2-T_1)}=\frac{e^{-R(t,T_2)\cdot(T_2-t)}}{e^{-R(t,T_1)\cdot(T_1-t)}}$$

$$R(t,T_1,T_2)\cdot(T_2-T_1)=R(t,T_2)\cdot(T_2-t)-R(t,T_1)\cdot(T_1-t)$$

$$\boldsymbol{R(t,T_2)=R(t,T_1)\cdot\frac{T_1-t}{T_2-t}+R(t,T_1,T_2)\cdot\frac{T_2-T_1}{T_2-t}}$$

o bien:

$$\boldsymbol{R(t,T_1,T_2)=R(t,T_2)\cdot\frac{T_2-t}{T_2-T_1}-R(t,T_1)\cdot\frac{T_1-t}{T_2-T_1}}$$

El tipo de interés al contado del periodo $[t,T_2]$ en el régimen de capitalización continua es igual a la media aritmética ponderada de los dos tipos de interés en capitalización continua (uno al contado y otro a plazo) de los dos subperiodos $[t,T_1]$ y $[T_1,T_2]$ donde las ponderaciones son los plazos relativos de los dos subperiodos.

EJERCICIO 1.31.

Cuestión:

Si en $t=0$ están en vigor los siguientes precios:

$P(0;0{,}25) = 0{,}98$ euros

$P(0{,}1) = 0{,}93$ euros

$P(0;0{,}25;1) = 0{,}948979592$ euros

Calcular los tipos de interés al contado $i(0{,}1)$, $i(0;0{,}25)$ y el tipo de interés a plazo $i(0;0{,}25;1)$.

Solución:

- Cálculo de los tipos de interés al contado:

$$i(0{,}1)=\frac{1}{P(0{,}1)}-1=\frac{1}{0{,}93}-1=0{,}07526 \Rightarrow i(0{,}1)=7{,}53\%$$

$$i(0;0{,}25)=\left[\frac{1}{P(0;0{,}25)}\right]^{\frac{1}{0{,}25}}-1=\left[\frac{1}{0{,}98}\right]^{4}-1=0{,}08416 \Rightarrow i(0;0{,}25)=8{,}42\%$$

- Cálculo del tipo de interés a plazo:

$$i(0;0{,}25;1)=[1+i(0{,}1)]\cdot\left[\frac{1+i(0{,}1)}{1+i(0;0{,}25)}\right]^{\frac{0{,}25}{0{,}75}}-1=$$

$$=[1+0{,}0753]\cdot\left[\frac{1+0{,}0753}{1+0{,}0842}\right]^{\frac{0{,}25}{0{,}75}}-1=0{,}07234 \Rightarrow i(0;0{,}25;1)=7{,}23\%$$

El tipo de interés a plazo también se puede obtener teniendo en cuenta el precio a plazo $P(0;0{,}25;1)=0{,}948979592$ mediante el cual no se produce beneficio sin riesgo:

$$i(0;0{,}25;1)=\left[\frac{1}{P(0;0{,}25;1)}\right]^{\frac{1}{0{,}75}}-1=\left[\frac{1}{0{,}948979592}\right]^{\frac{1}{0{,}75}}-1=0{,}0723$$

$$i(0;0{,}25;1)=7{,}23\%$$

c) Relación entre los tipos de interés al contado en régimen de capitalización continua y a plazo en régimen de capitalización instantánea

$$\left.\begin{aligned}P(t,T)&=e^{-\int_t^T f(t,s)\cdot ds}\\ P(t,T)&=e^{-R(t,T)(T-t)}\end{aligned}\right\}\quad R(t,T)=\frac{1}{T-t}\cdot\int_t^T f(t,s)\cdot ds$$

O también:

$$f(t,T)=-\frac{\partial}{\partial T}\ln P(t,T)=\frac{\partial}{\partial T}[R(t,T)\cdot(T-t)]=R(t,T)+(T-t)\cdot\frac{\partial}{\partial T}R(t,T)$$

Para una fecha fija T la tasa instantánea plazo es un proceso estocástico en el instante t con un valor final de $f(T,T)=r(T)$ en la fecha T.

EJERCICIO 1.32.

Cuestión:

Calcular el tipo de interés a plazo en capitalización continua y el tipo de interés a plazo compuesto equivalente al anterior para la función de tasa instantánea de interés a plazo definida en el instante t por:

$f(t,T)=\alpha+2\cdot\beta\cdot(T-t)$

$t=0$

$T_1=1\in[0,T_2=2]$

$\alpha=0{,}18$

$\beta=-0{,}04$

Solución:

- Cálculo del tipo de interés a plazo continuo:

$$R(0,T_1,T_2)=-\frac{1}{T_2-T_1}\cdot\ln A(0,T_1,T_2)=-\frac{1}{T_2-T_1}\cdot\left(-\int_{T_1}^{T_2} f(t,u)\cdot du\right)=$$

$$=-\frac{1}{T_2-T_1}\cdot\left(-\int_{T_1}^{T_2}(\alpha+2\cdot\beta\cdot u)\cdot du\right)=-\frac{1}{T_2-T_1}\cdot\left[-\alpha\cdot u-\beta\cdot u^2\right]_{T_1}^{T_2}=$$

$$=-\frac{1}{T_2-T_1}\cdot\left[-\alpha\cdot(T_2-T_1)-\beta\cdot(T_2^2-T_1^2)\right]=\alpha+\beta\cdot\frac{T_2^2-T_1^2}{T_2-T_1}=\alpha+\beta\cdot(T_2+T_1)$$

- Cálculo del tipo de interés a plazo compuesto equivalente al anterior:

$i(0,T_1,T_2)=e^{R(0,T_1,T_2)}-1=e^{\alpha+\beta(T_2+T_1)}-1$

En particular:

Si $T_1=1$ y $T_2=2$ se obtiene:

$R(0{,}1{,}2)=\alpha+\beta\cdot(T_2+T_1)=0{,}18-0{,}04\cdot(2+1)=0{,}06 \Rightarrow R(0{,}1{,}2)=6\%$

$i(0{,}1{,}2)=e^{\alpha+\beta(T_2+T_1)}-1=e^{0{,}06}-1=0{,}062=6{,}2\%$

Si $T_1=0$ y $T_2=2$ se obtienen los valores al contado:

$R(0{,}2)=\alpha+\beta\cdot(T_2+T_1)=0{,}18-0{,}04\cdot 2=0{,}10 \Rightarrow R(0{,}2)=10\%$

$i(0{,}2)=e^{\alpha+\beta(T_2+T_1)}-1=e^{0{,}10}-1=0{,}1052=10{,}52\%$

Si $T_1 = 0$ y $T_2 = 1$ se obtienen los valores al contado:

$$R(0,1) = \alpha + \beta \cdot (T_2 + T_1) = 0{,}18 - 0{,}04 = 0{,}14 \Rightarrow R(0,1) = 14\%$$

$$i(0,1) = e^{\alpha+\beta(T_2+T_1)} - 1 = e^{0{,}14} - 1 = 0{,}1503 = 15{,}03\%$$

Se comprueba inmediatamente que:

$$R(0,2) = \frac{R(0,1) + R(0,1,2)}{2} = \frac{0{,}14 + 0{,}06}{2} = 0{,}10 \Rightarrow R(0,2) = 10\%$$

Es decir, el tipo de interés a plazo continuo sobre el intervalo [0,2] es igual a la media aritmética de los tipos de interés a plazo continuos correspondientes a los subintervalos [0,1] y [1,2] de igual amplitud.

TEMA 2
RENTAS

SUMARIO: 1. CONCEPTO Y CLASIFICACIÓN DE LAS RENTAS. 1.1. *Concepto de renta.* 1.2. *Clasificación de las rentas.* 2. VALORACIÓN DE LAS RENTAS CON LA LEY FINANCIERA DE CAPITALIZACIÓN COMPUESTA. 2.1. *Valoración de rentas constantes.* 2.1.1. Valoración de rentas temporales. 2.1.1.1. Valor actual de una renta temporal y pospagable. 2.1.1.2. Valor final de una renta temporal y pospagable. 2.1.1.3. Valor actual de una renta temporal y prepagable. 2.1.1.4. Valor final de una renta temporal y prepagable. 2.1.2. Valoración de rentas perpetuas. 2.1.2.1. Valor actual de una renta perpetua y pospagable. 2.1.2.2. Valor actual de una renta perpetua y prepagable. 2.2. *Valoración de rentas variables en progresión aritmética.* 2.2.1. Valoración de rentas temporales. 2.2.1.1. Valor actual de una renta temporal y pospagable. 2.2.1.2. Valor final de una renta temporal y pospagable. 2.2.2. Valoración de rentas perpetuas. 2.2.2.1. Valor actual de una renta perpetua y pospagable. 2.2.2.2. Valor actual de una renta perpetua y prepagable. 2.3. *Valoración de rentas variables en progresión geométrica.* 2.3.1. Valoración de rentas temporales. 2.3.1.1. Valor actual de una renta temporal y pospagable. 2.3.1.2. Valor final de una renta temporal y pospagable. 2.3.2. Valoración de rentas perpetuas. 2.3.2.1. Valor actual de una renta perpetua y pospagable. 2.3.2.2. Valor actual de una renta perpetua y prepagable. 3. VALORACIÓN DE LAS RENTAS FRACCIONADAS. 3.1. *Valoración de rentas constantes y temporales.* 3.1.1. Valor actual de una renta pospagable. 3.1.2. Valor final de una renta pospagable. 3.2. *Valoración de rentas constantes y perpetuas.* 3.2.1. Valor actual de una renta pospagable. 3.2.2. Valor actual de una renta prepagable. 4. VALORACIÓN DE LAS RENTAS CONTINUAS. 4.1. *Valoración de rentas temporales.* 4.2. *Valoración de rentas perpetuas.* 5. VALORACIÓN DE LAS RENTAS CON LA LEY FINANCIERA DE CAPITALIZACIÓN SIMPLE. 5.1. *Valor actual de rentas constantes y temporales.* 5.2. *Valor final de rentas constantes y temporales.* 6. VALORACIÓN DE LAS RENTAS CON INTERÉS ESTOCÁSTICO. 6.1. *Valor esperado final o acumulado de rentas, media y varianza.* 6.2. *Valor esperado actual o presente de rentas, media y varianza.*

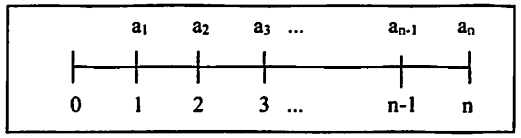
1. CONCEPTO Y CLASIFICACIÓN DE LAS RENTAS

En este capítulo se definen y clasifican las principales rentas en un ambiente de certidumbre ya que el tipo de interés se conoce desde el inicio de la operación.

1.1. CONCEPTO DE RENTA

Una renta es un conjunto de capitales financieros que se hacen efectivos (se cobran o se pagan) en sucesivos periodos de tiempo.

FIGURA 2.1. *Esquema de una renta*



donde:

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$	: Conjunto de capitales financieros o términos de la renta.
$1, 2, 3, \ldots, n$	: Vencimientos sucesivos de los capitales financieros.
$[0,1],[1,2],\ldots,[n-1,n]$	: Intervalos o periodos de maduración de la renta.
0	: Origen de la renta, extremo inferior del primer periodo.
n	: Final de la renta, extremo superior del último periodo.
$n-0=n$	: Duración de la renta.
i	: Tipo de interés de la operación

1.2. CLASIFICACIÓN DE LAS RENTAS

Las rentas pueden clasificarse atendiendo a distintos criterios, que no son excluyentes entre sí. Cabe citar los siguientes:

a) Dependiendo de la duración de los intervalos o periodos de maduración de la renta:
   - *Rentas discretas:* Son aquellas en las que la duración de los intervalos es finita.
   - *Rentas continuas:* Son aquellas en las que la duración de los intervalos es infinitesimal.

b) En función de la duración de la renta:
   - *Rentas temporales:* Aquellas cuya duración es finita o acotada en el tiempo.
   - *Rentas perpetuas o indefinidas:* Aquellas cuya duración es infinita.

c) Según las cuantías de los términos que forman las rentas:
   - *Rentas constantes:* Aquellas en las que los términos son iguales; es decir:

     $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = a$

   Entre éstas destacan las rentas unitarias: $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 1$.
   - *Rentas variables:* Aquellas en las que al menos un término es distinto de los demás; es decir:

     Existe $a_i \neq a_j$ tal que $i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n$ y $i \neq j$

   Se distingue entre:
   - ○ Rentas variables en progresión aritmética: Son aquellas en las que los términos varían en progresión aritmética, es decir, $a_k = a_{k+1} + d$.

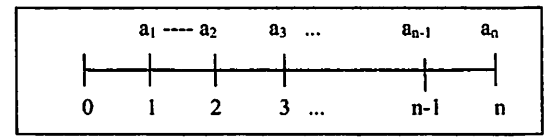
   - ○ Rentas variables en progresión geométrica: Son aquellas en las que los términos varían en progresión geométrica, es decir, $a_k = a_{k+1} \cdot q$.
   - ○ Rentas variables en general: Son aquellas cuyos términos no varían ni en progresión aritmética ni en progresión geométrica.

donde:

a_k	: Término de la renta del período k.
a_{k-1}	: Término de la renta del período $k-1$.
d	: Razón de la progresión aritmética.
q	: Razón de la progresión geométrica.

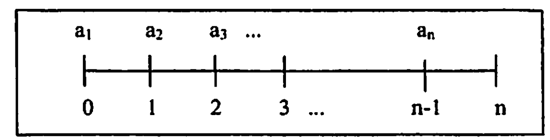
d) Según el punto de intervalo en el que vencen los términos:
   - *Rentas pospagables:* Aquellas en las que los términos vencen al final de cada intervalo.

FIGURA 2.2. *Esquema de una renta pospagable*



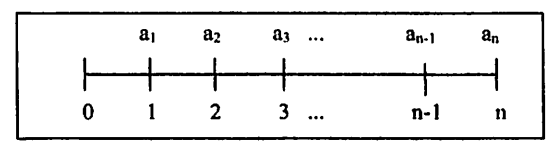
   - *Rentas prepagables:* Aquellas en las que los términos vencen al principio de cada intervalo.

FIGURA 2.3. *Esquema de una renta prepagable*



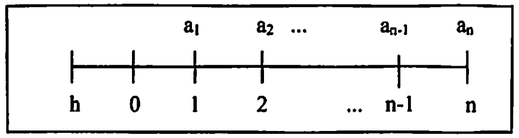
e) Según la posición que ocupa el punto de valoración de la renta:
   - *Rentas inmediatas:* Aquellas en las que el punto de valoración coincide con el origen o al final de la renta. En este caso, el valor actual se calcula en el origen de la renta, y el valor final en el instante final de la renta.

FIGURA 2.4. *Esquema de una renta inmediata*



   - *Rentas diferidas:* Aquellas en las que el punto de valoración es anterior al origen de la renta. En este caso, el valor actual se calcula en el punto de valoración mencionado (anterior al origen), y el valor final en el instante final de la renta.

FIGURA 2.5. *Esquema de una renta diferida*

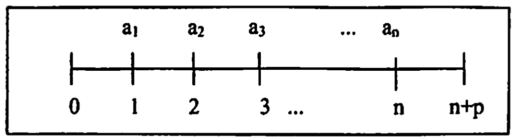


donde:

h : Período de diferimiento de la renta.

- *Rentas anticipadas:* Aquellas en las que el punto de valoración es posterior al final de la renta. En este caso, el valor actual se calcula en el origen de la renta, y el valor final en el punto de valoración (posterior al instante final de la renta).

FIGURA 2.6. *Esquema de una renta anticipada*



donde:

p : Período de anticipo de la renta.

f) Según el número de vencimientos que se producen en cada intervalo:

- *Rentas fraccionadas:* Aquellas en las que se distinguen varios vencimientos dentro de cada periodo o intervalo.
- *Rentas sin fraccionar:* Aquellas que tienen un solo vencimiento en cada intervalo.

g) En base al conocimiento que existe de los términos de la renta:

- *Rentas ciertas:* Aquellas en las que los términos de la renta y la duración son conocidos con certeza.
- *Rentas aleatorias:* Aquellas en las que alguno de sus componentes (cuantía de los términos, vencimiento o ambos) no se conoce con certeza.

2. VALORACIÓN DE LAS RENTAS CON LA LEY FINANCIERA DE CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

En el tema anterior se observa que la fuerza del interés permanece constante durante toda la operación con la ley financiera de capitalización compuesta. Por este motivo habitualmente se utiliza esta ley financiera para la valoración de rentas.

Se denomina *valor financiero de la renta* en un instante determinado a la suma de los valores proyectados de todos sus términos en ese momento. Si la suma de esos valores se produce en el origen de la renta se denomina *valor actual.* Si la valoración se produce al final de la renta se denomina *valor final* de la renta.

En los epígrafes siguientes se analizan las rentas discretas distinguiendo entre rentas constantes y variables, rentas temporales y perpetuas y rentas pospagables y prepagables.

2.1. VALORACIÓN DE RENTAS CONSTANTES

Las rentas constantes son aquellas que tienen todos sus términos iguales. Se distingue entre rentas temporales y perpetuas.

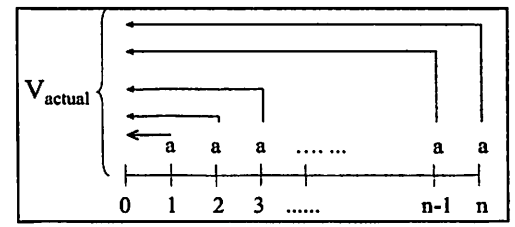
2.1.1. Valoración de rentas temporales

Las rentas temporales son aquellas cuya duración es finita. Se distingue entre rentas pospagables y prepagables, y en cada una de ellas se halla su valor actual y su valor final. Se efectúa la valoración sobre rentas inmediatas, considerando periodos anuales.

2.1.1.1. Valor actual de una renta temporal y pospagable

Las rentas pospagables son aquellas en las que sus términos vencen al final de cada periodo de maduración.

FIGURA 2.7. *Valor actual de una renta temporal y pospagable*



El valor actual de la renta se calcula como:

$$V_a = a\cdot A(0,1)+a\cdot A(0,2)+a\cdot A(0,3)+\ldots+a\cdot A(0,n)=$$

$$=a\cdot\frac{1}{1+i}+a\cdot\frac{1}{(1+i)^2}+a\cdot\frac{1}{(1+i)^3}+\ldots+a\cdot\frac{1}{(1+i)^n}=$$

$$=a\cdot\left[\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Se observa que la expresión entre corchetes es la suma de n términos de una progresión geométrica de razón:

$$r=\frac{1}{1+i}$$

cuya suma se obtiene de:

$$S_n=\frac{a_1-a_n\cdot r}{1-r}$$

donde:

a_1 : Primer término de la sucesión.

a_n : Último término de la sucesión.

r : Razón de la sucesión en progresión geométrica.

Se aplica esta expresión a la sucesión y se obtiene el valor actual de una renta temporal, constante, inmediata y pospagable:

$$V_a = a \cdot \frac{\frac{1}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{1}{1+i}}{1 - \frac{1}{1+i}} = a \cdot \frac{1}{\cancel{1+i}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{\frac{1+i-1}{\cancel{1+i}}} = a \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

$$\boldsymbol{V_a = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a \cdot a_{\overline{n}|i}}$$

EJERCICIO 2.1.

Cuestión:

Calcular el valor actual de un depósito anual pospagable de 100 euros durante los próximos 10 años. El tipo de interés anual es el 5%.

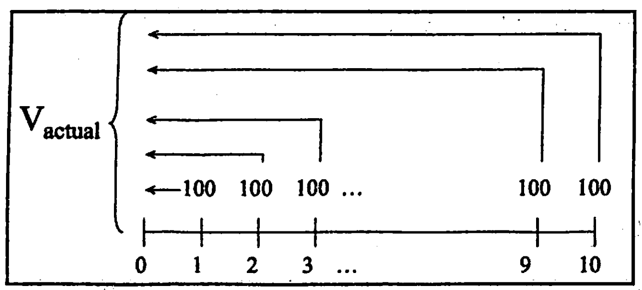
Solución:

- Cálculo del valor actual.

$$V_a = 100 \cdot A(0,1) + 100 \cdot A(0,2) + 100 \cdot A(0,3) + \ldots + 100 \cdot A(0,10) =$$

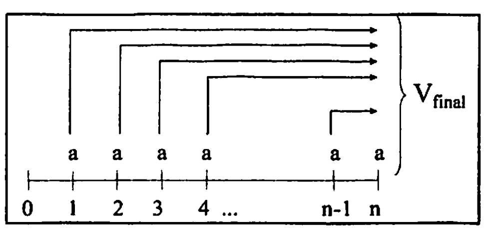
$$= 100 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,05)^{10}}}{0,05} = 100 \cdot a_{\overline{10}|0,05} = 772,17 \text{ €}$$

FIGURA 2.8. *Esquema de la renta*



2.1.1.2. *Valor final de una renta temporal y pospagable*

FIGURA 2.9. *Valor final de una renta temporal y pospagable*



El valor final de la renta se calcula como:

$$V_f = a \cdot L(1,n) + a \cdot L(2,n) + a \cdot L(3,n) + \ldots + a \cdot L(n,n) =$$

$$= a \cdot (1+i)^{n-1} + a \cdot (1+i)^{n-2} + a \cdot (1+i)^{n-3} + \ldots + a =$$

$$= a \cdot \left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \ldots + 1\right]$$

Desarrollando la expresión entre corchetes que es la suma de n términos de una progresión geométrica de razón:

$$r = \frac{1}{1+i}$$

se obtiene el valor final de una renta temporal, constante, inmediata y pospagable:

$$V_f = a \cdot \frac{(1+i)^{n-1} - 1 \cdot \frac{1}{1+i}}{1 - \frac{1}{1+i}} = a \cdot \frac{1}{\cancel{1+i}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{\frac{1+i-1}{\cancel{1+i}}} = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\boldsymbol{V_f = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = a \cdot S_{\overline{n}|i}}$$

Se observa que:

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)^n = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^n$$

$$\boldsymbol{S_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^n}$$

EJERCICIO 2.2.

Cuestión:

Calcular el valor final de un depósito anual y pospagable de 100 euros durante los próximos 10 años. El tipo de interés anual es el 5%.

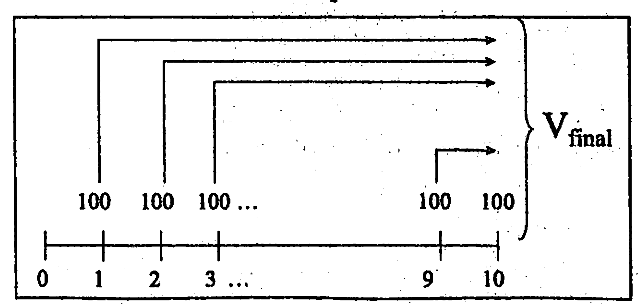
Solución:

- Cálculo del valor final.

$$V_f = 100 \cdot L(1,10) + 100 \cdot L(2,10) + 100 \cdot L(3,10) + \ldots + 100 \cdot L(10,10) =$$

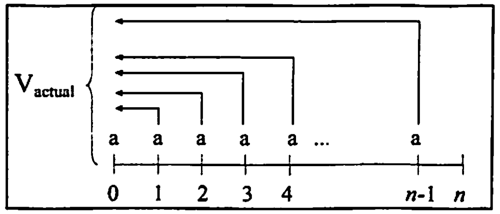
$$= 100 \cdot \frac{(1+0,05)^{10} - 1}{0,05} = 100 \cdot S_{\overline{10}|0,05} = 1.257,79 \text{ €}$$

FIGURA 2.10. *Esquema de la renta*



2.1.1.3. *Valor actual de una renta temporal y prepagable*

FIGURA 2.11. *Valor actual de una renta temporal y prepagable*



El valor actual de la renta se calcula como:

$$V_a = a\cdot A(0,0) + a\cdot A(0,1) + a\cdot A(0,2) + ... + a\cdot A(0,n-1) =$$

$$= a + a\cdot\frac{1}{1+i} + a\cdot\frac{1}{(1+i)^2} + ... + a\cdot\frac{1}{(1+i)^{n-1}} = a\cdot\left[1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right]$$

Desarrollando la expresión entre corchetes que es la suma de n términos de una progresión geométrica de razón:

$$r = \frac{1}{1+i}$$

se obtiene el valor actual de una renta temporal, constante, inmediata y prepagable:

$$V_a = a\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}} = a\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{\frac{1+i-1}{1+i}} = a\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}\cdot(1+i)$$

$$\boldsymbol{V_a = a\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot(1+i) = a\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|i}}$$

Se observa que:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot(1+i) = a_{\overline{n}|i}\cdot(1+i)$$

$$\boldsymbol{\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}\cdot(1+i)}$$

EJERCICIO 2.3.

Cuestión:

Calcular el valor actual de un depósito anual y prepagable de 100 euros durante los próximos 10 años. El tipo de interés anual es el 5%.

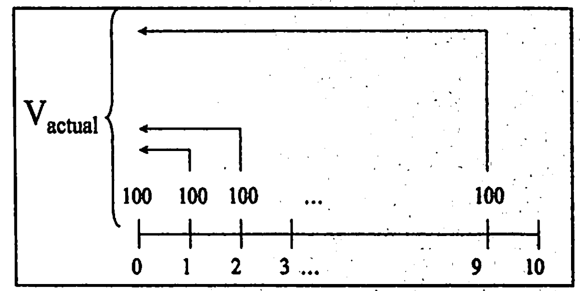
Solución:

- Cálculo del valor actual.

$$V_a = 100\cdot A(0,0) + 100\cdot A(0,1) + 100\cdot A(0,2) + ... + 100\cdot A(0,9) =$$

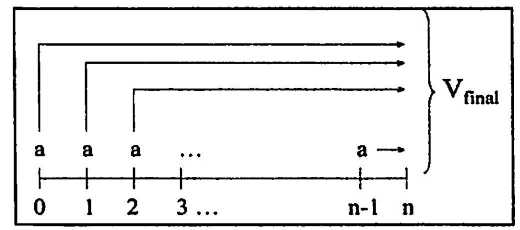
$$= 100\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+0,05)^{10}}}{0,05}\cdot(1+0,05) = 100\cdot\ddot{a}_{\overline{10}|0,05} = 810,78\text{ €}$$

FIGURA 2.12. *Esquema de la renta*



2.1.1.4. *Valor final de una renta temporal y prepagable*

FIGURA 2.13. *Valor final de una renta temporal y prepagable*



El valor final de la renta se calcula como:

$$V_f = a\cdot L(0,n) + a\cdot L(1,n) + a\cdot L(2,n) + ... + a\cdot L(n-1,n) =$$

$$= a\cdot(1+i)^n + a\cdot(1+i)^{n-1} + a\cdot(1+i)^{n-2} + ... + a\cdot(1+i) =$$

$$= a\cdot\left[(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i)\right]$$

Desarrollando la expresión entre corchetes que es la suma de n términos de una progresión geométrica de razón:

$$r = \frac{1}{1+i}$$

se obtiene el valor final de una renta temporal, constante, inmediata y prepagable:

$$V_f = a\cdot\frac{(1+i)^n - \cancel{(1+i)}\cdot\frac{1}{\cancel{1+i}}}{1-\frac{1}{1+i}} = a\cdot\frac{(1+i)^n-1}{\frac{1+i-1}{1+i}} = a\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}\cdot(1+i)$$

$$\boldsymbol{V_f = a\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}\cdot(1+i) = a\cdot\ddot{S}_{\overline{n}|i}}$$

EJERCICIO 2.4.

Cuestión:

Calcular el valor final de un depósito anual y prepagable de 100 euros durante los próximos 10 años. El tipo de interés anual es el 5%.

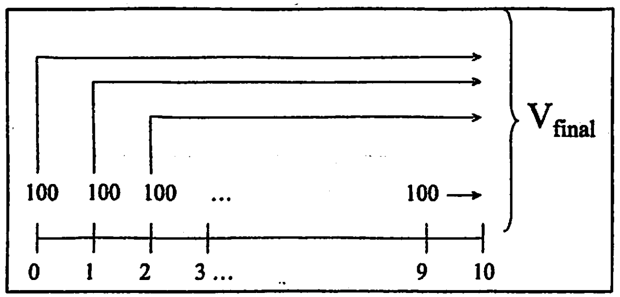
Solución:

- Cálculo del valor final.

$$V_f = 100 \cdot L(0,10) + 100 \cdot L(1,10) + 100 \cdot L(2,10) + \ldots + 100 \cdot L(9,10) =$$

$$= 100 \cdot \frac{(1+0,05)^{10} - 1}{0,05} \cdot (1+0,05) = 100 \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|i} = 1.320,68 \text{ €}$$

FIGURA 2.14. *Esquema de la renta*



Se cumplen las siguientes relaciones:

$$a_{\overline{n}|i} = S_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-n} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-1} = \ddot{S}_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-(n+1)}$$

$$S_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{n} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{n-1} = \ddot{S}_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i) = S_{\overline{n}|i}{}^{-(n-1)} = \ddot{S}_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-n}$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{n+1} = S_{\overline{n}|i} \cdot (1+i) = \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{n}$$

EJERCICIO 2.5.

Cuestión:

Calcular la cuantía de un préstamo que se amortiza mediante la entrega de términos constantes de 5.000 euros durante 15 años. El tipo de interés anual es el 6%. Considerar para la resolución los dos casos de renta: pospagable y prepagable.

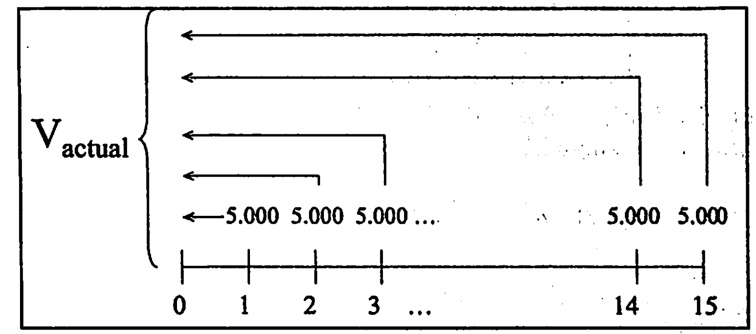
Solución:

- Cálculo del valor actual si la renta es pospagable.

$$V_a = 5.000 \cdot A(0,1) + 5.000 \cdot A(0,2) + 5.000 \cdot A(0,3) + \ldots + 5.000 \cdot A(0,15) =$$

$$= 5.000 \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{(1+0,06)^{15}}}{0,06} = 5.000 \cdot a_{\overline{15}|0,06} = 48.561,24 \text{ €}$$

FIGURA 2.15. *Esquema de la renta*



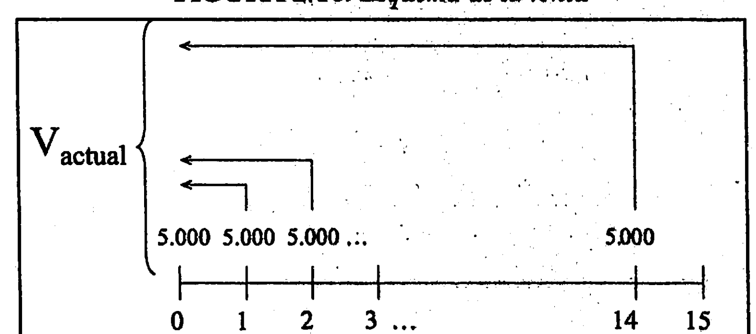
- Cálculo del valor actual si la renta es prepagable.

$$V_a = 5.000 \cdot A(0,0) + 5.000 \cdot A(0,1) + 5.000 \cdot A(0,2) + \ldots + 5.000 \cdot A(0,14)$$

$$= 5.000 \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{(1+0,06)^{15}}}{0,06} \cdot (1+0,06) = 5.000 \cdot \ddot{a}_{\overline{15}|0,06} = 51.474,92 \text{ €}$$

$$V_a = 48.561,24 \cdot 1,06 = 51.474,92 \text{ €}$$

FIGURA 2.16. *Esquema de la renta*



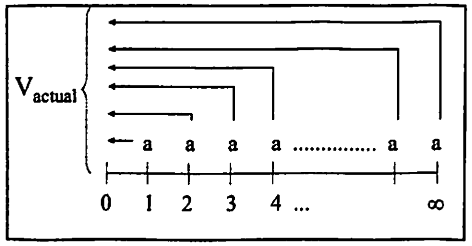
2.1.2. Valoración de rentas perpetuas

Las rentas perpetuas son aquellas que tienen un número infinito de términos o su duración es infinita. Se conoce el momento en el que se inicia la renta, pero no el momento en el que va a finalizar. De ahí que sólo se pueda calcular el valor actual.

Se distingue entre rentas pospagables y prepagables. Se efectúa la valoración sobre rentas inmediatas, considerando periodos anuales.

2.1.2.1. Valor actual de una renta perpetua y pospagable.

FIGURA 2.17. *Valor actual de una renta perpetua y pospagable*



Para obtener el valor actual se calcula el límite de la expresión del valor actual de una renta temporal y pospagable:

$$V_a = a \cdot A(0,1) + a \cdot A(0,2) + a \cdot A(0,3) + \ldots + a \cdot A(0,\infty) = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\boldsymbol{V_a = a \cdot \frac{1}{i} = a \cdot a_{\overline{\infty}|i}}$$

EJERCICIO 2.6.

Cuestión:

Calcular el valor actual de un piso que se alquila por 5.000 euros anuales (se cobra al final de cada año). El tipo de interés anual es el 6%.

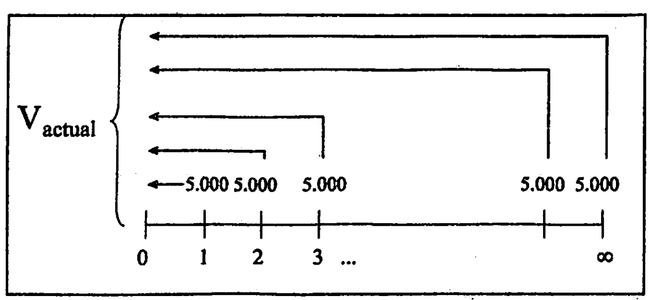
Solución:

- Cálculo del valor actual.

$$V_a = 5.000 \cdot A(0,1) + 5.000 \cdot A(0,2) + 5.000 \cdot A(0,3) + \ldots + 5.000 \cdot A(0,\infty) =$$

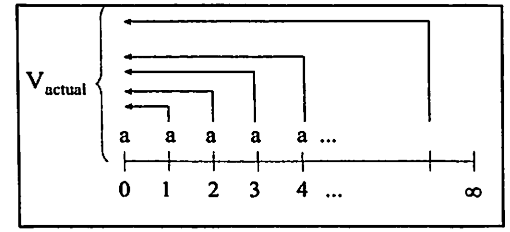
$$= 5.000 \cdot a_{\overline{\infty}|0,06} = 5.000 \cdot \frac{1}{0,06} = 83.333,33 \text{ €}$$

FIGURA 2.18. *Esquema de la renta*



2.1.2.2. Valor actual de una renta perpetua y prepagable

FIGURA 2.19. *Valor actual de una renta perpetua y prepagable*



Para obtener el valor actual se calcula el límite de la expresión del valor actual de una renta temporal prepagable:

$$V_a = a \cdot A(0,0) + a \cdot A(0,1) + a \cdot A(0,2) + \ldots + a \cdot A(0,\infty) = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$$

$$\boldsymbol{V_a = a \cdot \frac{(1+i)}{i} = a \cdot \ddot{a}_{\overline{\infty}|i}}$$

EJERCICIO 2.7.

Cuestión:

Calcular el valor actual de un piso que se alquila por 5.000 euros anuales (se cobra al principio de cada año). El tipo de interés anual es el 6%.

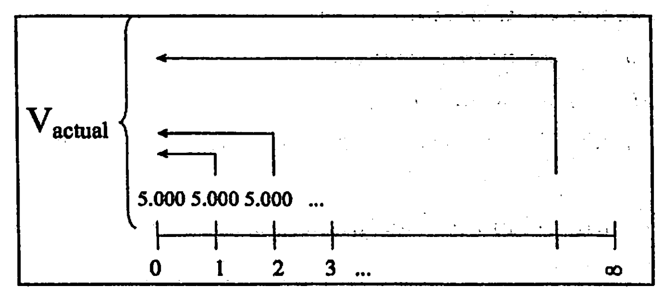
Solución:

- Cálculo del valor actual.

$$V_a = 5.000 \cdot A(0,0) + 5.000 \cdot A(0,1) + 5.000 \cdot A(0,2) + \ldots + 5.000 \cdot A(0,\infty)$$

$$= 5.000 \cdot \ddot{a}_{\overline{\infty}|0,06} = 5.000 \cdot \frac{1,06}{0,06} = 83.333,33 \text{ €}$$

FIGURA 2.20. *Esquema de la renta*



2.2. VALORACIÓN DE RENTAS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Las rentas variables en progresión aritmética son aquellas en las que cada término se obtiene a partir del término del periodo anterior sumándole una cuantía constante (razón de la progresión), es decir:

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2 \cdot d$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$a_k = a_{k-1} + d = a_1 + (k-1) \cdot d$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + d = a_1 + (n-2) \cdot d$$

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d$$

donde:

a_k : Término de la renta del periodo k.

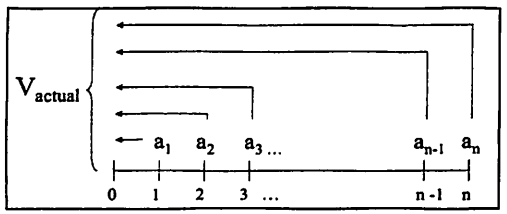
a_{k-1} : Término de la renta del periodo $k-1$.

d : Razón de la progresión aritmética.

2.2.1. Valoración de rentas temporales

2.2.1.1. Valor actual de una renta temporal y pospagable

FIGURA 2.21. *Valor actual de una renta temporal y pospagable*

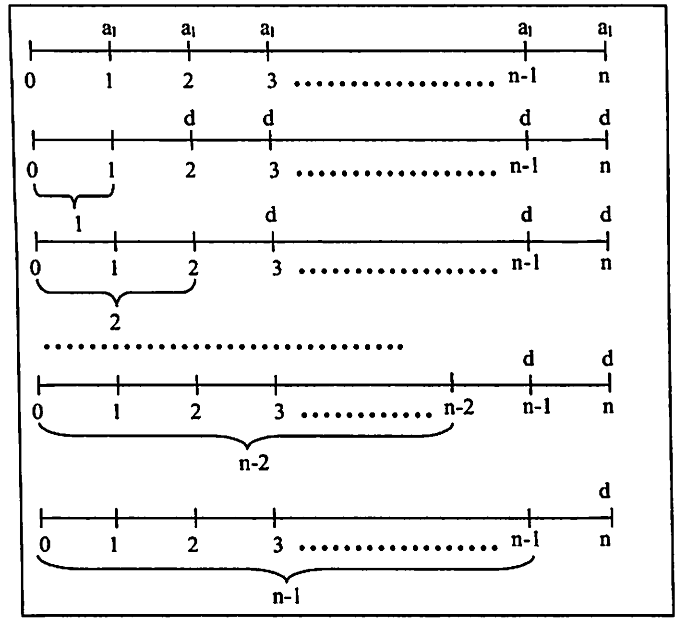


Para facilitar su cálculo se descompone la renta variable en n rentas constantes, se halla el valor actual de todas ellas y su suma es igual al valor actual de la renta variable en progresión aritmética.

Las n rentas constantes son las siguientes:

- Una renta de n términos de cuantía a_1.
- Una renta de n–1 términos de cuantía d y diferida un periodo.
- Una renta de n–2 términos de cuantía d y diferida dos periodos.
- ...
- Una renta de un término de cuantía d y diferida n–1 periodos.

FIGURA 2.22. *Descomposición de una renta variable en progresión aritmética en n rentas constantes*



El valor actual de la renta se calcula como:

$$A_{(a_1,d)\overline{n}|i} = a_1 \cdot A(0,1) + a_2 \cdot A(0,2) + a_3 \cdot A(0,3) + \dots + a_n \cdot A(0,n)$$

$$A_{(a_1,d)\overline{n}|i} = a_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + 1/d \cdot a_{\overline{n-1}|i} + 2/d \cdot a_{\overline{n-2}|i} + \dots + n-1/d \cdot a_{\overline{1}|i} = a_1 \cdot a_{\overline{n}|i} +$$

$$+d \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} \cdot (1+i)^{-1} + d \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-2)}}{i} \cdot (1+i)^{-2} + \dots + d \cdot \frac{1-(1+i)^{-1}}{i} \cdot (1+i)^{-(n-1)} =$$

$$= a_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i} \cdot \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} - (n-1) \cdot (1+i)^{-n}\right] =$$

$$= a_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i} \cdot \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n} - n \cdot (1+i)^{-n}\right] =$$

$$= a_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i} \cdot \left[a_{\overline{n}|i} - n \cdot (1+i)^{-n}\right] = \left[a_1 + \frac{d}{i}\right] \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{d \cdot n}{i} \cdot (1+i)^{-n}$$

Si sumamos y restamos a esta última expresión $\frac{d \cdot n}{i}$ obtenemos:

$$= \left[a_1 + \frac{d}{i}\right] \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{d \cdot n}{i} \cdot (1+i)^{-n} + \frac{d \cdot n}{i} - \frac{d \cdot n}{i} = \left[a_1 + \frac{d}{i}\right] \cdot a_{\overline{n}|i} + d \cdot n \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{d \cdot n}{i}$$

Finalmente se obtiene la expresión de la equivalencia financiera en el origen:

$$\mathbf{A_{(a_1,d)\overline{n}|i} = \left(a_1 + \frac{d}{i} + d \cdot n\right) \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{d \cdot n}{i}}$$

donde:

a_1 : Término amortizativo correspondiente al primer periodo.

d : Razón en la que varían los términos amortizativos.

n : Duración de la operación.

i : Tipo de interés efectivo anual.

EJERCICIO 2.8.

Cuestión:

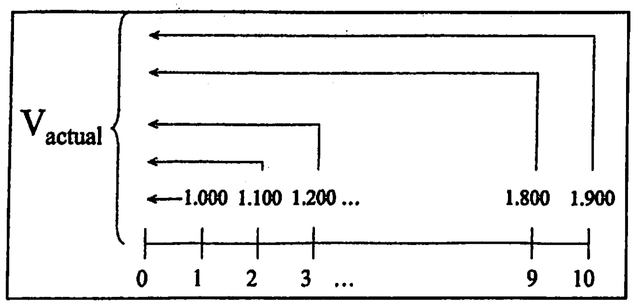
Calcular el valor actual de una renta pospagable cuyo primer término es de 1.000 euros y se incrementa en 100 euros cada año. El tipo de interés anual es el 6% y la duración de la operación de 10 años.

Solución:

- **Cálculo del valor actual.**

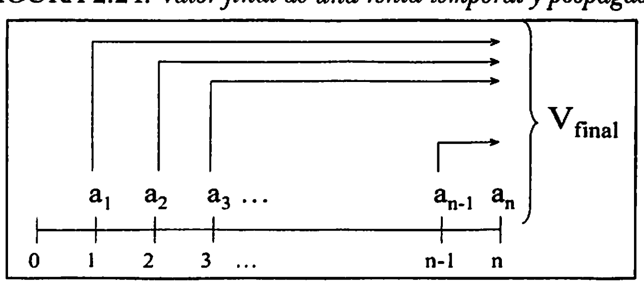
$$A_{(1.000,100)\overline{10|}0,06} = 1.000\cdot A(0,1)+(1.000+100\cdot 1)\cdot A(0,2)+$$
$$+(1.000+100\cdot 2)\cdot A(0,3)+\dots+(1.000+100\cdot 9)\cdot A(0,10)=$$
$$=\left(1.000+\frac{100}{0,06}+100\cdot 10\right)\cdot a_{\overline{10|}0,06}-\frac{100\cdot 10}{0,06}=10.320,32\text{ €}$$

FIGURA 2.23. *Esquema de la renta*



2.2.1.2. Valor final de una renta temporal y pospagable

FIGURA 2.24. *Valor final de una renta temporal y pospagable*



El valor final de la renta se calcula como:

$$S_{(a_1,d)\overline{n|}i} = a_1\cdot L(1,n)+a_2\cdot L(2,n)+a_3\cdot L(3,n)+\dots+a_n\cdot L(n,n)$$

Para facilitar su cálculo se descompone la renta variable en las n rentas constantes del epígrafe anterior, se halla el valor final de todas ellas y su suma es igual al valor final de la renta variable en progresión aritmética:

$$S_{(a_1,d)\overline{n|}i} = a\cdot S_{\overline{n|}i}+d\cdot S_{\overline{n-1|}i}+d\cdot S_{\overline{n-2|}i}+\dots+d\cdot S_{\overline{2|}i}+d\cdot S_{\overline{1|}i}=$$
$$=a\cdot S_{\overline{n|}i}+d\cdot\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i}+d\cdot\frac{(1+i)^{n-2}-1}{i}+\dots+d\cdot\frac{(1+i)^{2}-1}{i}+d\cdot\frac{(1+i)-1}{i}=$$
$$=a\cdot S_{\overline{n|}i}+\frac{d}{i}\cdot\left[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\dots+(1+i)^{2}+(1+i)-(n-1)\right]=$$
$$=a\cdot S_{\overline{n|}i}+\frac{d}{i}\cdot\left[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\dots+(1+i)^{2}+(1+i)+1-n\right]=$$
$$=a\cdot S_{\overline{n|}i}+\frac{d}{i}\cdot S_{\overline{n|}i}-\frac{d\cdot n}{i}$$
$$S_{(a_1,d)\overline{n|}i}=\left(a_1+\frac{d}{i}\right)\cdot S_{\overline{n|}i}-\frac{d\cdot n}{i}$$

EJERCICIO 2.9.

Cuestión:

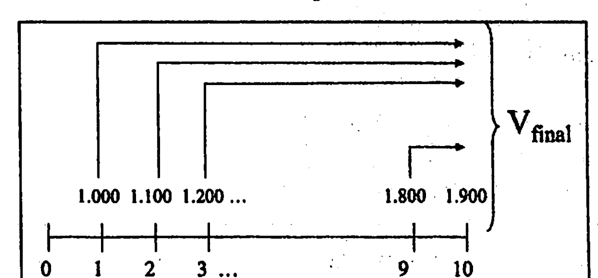
Calcular el valor final de una renta pospagable cuyo primer término es de 1.000 euros y se incrementa 100 euros cada año. El tipo de interés anual es el 5% y la duración de 10 años.

Solución:

- **Cálculo del valor final.**

$$S_{(1.000,100)\overline{10|}0,05} = 1.000\cdot L(1,10)+(1.000+100\cdot 1)\cdot L(2,10)+$$
$$+(1.000+100\cdot 2)\cdot L(3,10)+\dots+(1.000+100\cdot 9)\cdot L(10,10)=$$
$$=\left(1.000+\frac{100}{0,05}\right)\cdot S_{\overline{10|}0,05}-\frac{100\cdot 10}{0,05}=17.733,68\text{ €}$$

FIGURA 2.25. *Esquema de la renta*



El valor actual y el valor final de las rentas variables en progresión aritmética temporales y prepagables se pueden obtener a partir de las siguientes relaciones:

$$\ddot{A}_{(a_1,d)\overline{n}|i} = a_1 \cdot A(0,0) + a_2 \cdot A(0,1) + a_3 \cdot A(0,2) + \dots + a_n \cdot A(0,n-1)$$

$$\ddot{A}_{(a_1,d)\overline{n}|i} = A_{(a_1,d)\overline{n}|i} \cdot (1+i) = \left(a_1 + \frac{d}{i} + d \cdot n\right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i} - \frac{d \cdot n}{i} \cdot (1+i)$$

$$\ddot{S}_{(a_1,d)\overline{n}|i} = a_1 \cdot L(0,n) + a_2 \cdot L(1,n) + a_3 \cdot L(2,n) + \dots + a_n \cdot L(n-1,n)$$

$$\ddot{S}_{(a_1,d)\overline{n}|i} = S_{(a_1,d)\overline{n}|i} \cdot (1+i) = \ddot{A}_{(a_1,d)\overline{n}|i} \cdot (1+i)^n = \left(a_1 + \frac{d}{i}\right) \cdot \ddot{S}_{\overline{n}|i} - \frac{d \cdot n}{i} \cdot (1+i)$$

EJERCICIO 2.10.

Cuestión:

Calcular el valor final de una renta cuyo primer término $a_1 = 10.000$ euros que vence al principio del año y que va disminuyendo 500 euros cada año durante 10 años. El tipo de interés anual es el 5%.

Solución:

- **Cálculo del valor final.**

$$\ddot{S}_{(10.000,-500)\overline{10}|0,05} = 10.000 \cdot L(0,10) + (10.000 - 500 \cdot 1) \cdot L(1,10) +$$

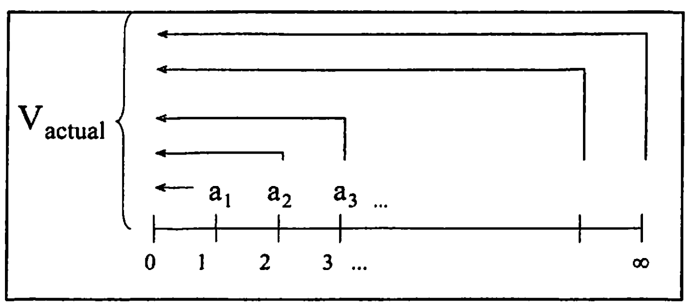
$$+(10.000 - 500 \cdot 2) \cdot L(2,10) + \dots + (10.000 - 500 \cdot 9) \cdot L(9,10)$$

$$= \left(10.000 - \frac{500}{0,05}\right) \cdot \ddot{S}_{\overline{10}|0,05} + \frac{500 \cdot 10}{0,05} \cdot (1 + 0,05) = 105.000,00\ €$$

2.2.2. Valoración de rentas perpetuas

2.2.2.1. *Valor actual de una renta perpetua y pospagable*

FIGURA 2.26. *Valor actual de una renta perpetua y pospagable*



Para obtener el valor actual se calcula el límite de la expresión del valor actual de una renta variable en progresión aritmética, temporal y pospagable:

$$A_{(a_1,d)\overline{\infty}|i} = a_1 \cdot A(0,1) + a_2 \cdot A(0,2) + a_3 \cdot A(0,3) + \dots = \lim_{n\to\infty}\left(a_1 + \frac{d}{i}\right) \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{d \cdot n}{i \cdot (1+i)^n}$$

$$A_{(a_1,d)\overline{\infty}|i} = \left(a_1 + \frac{d}{i}\right) \cdot \frac{1}{i}$$

EJERCICIO 2.11.

Cuestión:

Calcular el valor actual de una pensión pospagable y perpetua que se incrementa cada año 300 euros, si la cuantía del primer término es de 10.000 euros. El tipo de interés anual es el 5%.

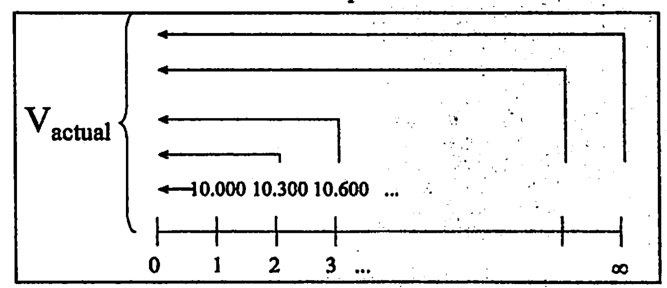
Solución:

- **Cálculo del valor actual.**

$$A_{(10.000,300)\overline{\infty}|0,05} = 10.000 \cdot A(0,1) + (10.000 + 300 \cdot 1) \cdot A(0,2) +$$

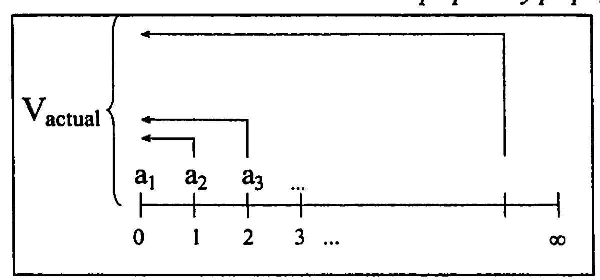
$$(10.000 + 300 \cdot 2) \cdot A(0,3) + \dots = \left(10.000 + \frac{300}{0,05}\right) \cdot \frac{1}{0,05} = 320.000,00\ €$$

FIGURA 2.27. *Esquema de la renta*



2.2.2.2. *Valor actual de una renta perpetua y prepagable*

FIGURA 2.28. *Valor actual de una renta perpetua y prepagable*



Para obtener el valor actual se calcula el límite de la expresión del valor actual de una renta variable en progresión aritmética, temporal y prepagable:

$$\ddot{A}_{(a_1,d)\overline{\infty}|i} = a_1 \cdot A(0,0) + a_2 \cdot A(0,1) + a_3 \cdot A(0,2) + \dots = \lim_{n\to\infty}\left(a_1 + \frac{d}{i}\right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i} - \frac{d \cdot n}{i \cdot (1+i)^n} \cdot (1+i)$$

$$\ddot{A}_{(a_1,d)_{\overline{\infty}|i}} = \left(a_1 + \frac{d}{i}\right) \cdot \frac{1+i}{i}$$

EJERCICIO 2.12.

Cuestión:

Calcular el valor actual de una pensión prepagable y perpetua que se incrementa cada año 300 euros, si la cuantía del primer año son 10.000 euros (se cobra al principio de cada año). El tipo de interés anual es el 5%.

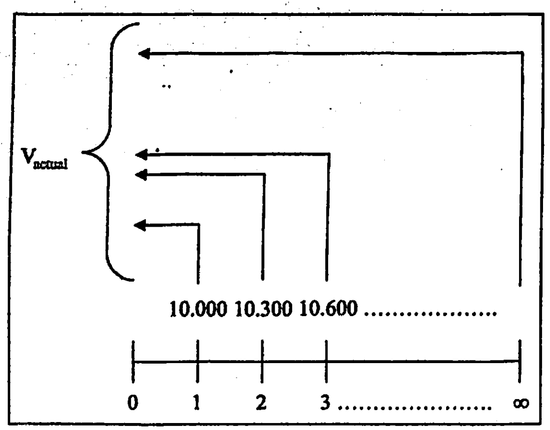
Solución:

- Cálculo del valor actual.

$$\ddot{A}_{(10.000,300)_{\overline{\infty}|0,05}} = 10.000 \cdot A(0,0) + (10.000 + 300 \cdot 1) \cdot A(0,1) +$$

$$+ (10.000 + 300 \cdot 2) \cdot A(0,2) + \ldots = \left(10.000 + \frac{300}{0,05}\right) \cdot \frac{1+0,05}{0,05} = 336.000,00\ €$$

FIGURA 2.29. *Esquema de la renta*



2.3. VALORACIÓN DE RENTAS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Las rentas variables en progresión geométrica son aquellas en las que los términos varían en progresión geométrica, es decir, cada término se obtiene multiplicando el anterior por una cuantía constante:

a_1

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$

... ...

$a_k = a_{k-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1}$

... ...

$a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-2}$

$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$

donde:

a_k : Término de la renta del periodo k.

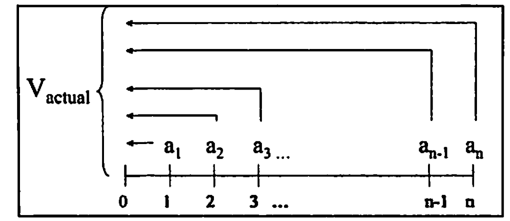
a_{k-1} : Término de la renta del periodo $k-1$.

q : Razón de la progresión geométrica.

2.3.1. Valoración de rentas temporales

2.3.1.1. Valor actual de una renta temporal y pospagable

FIGURA 2.30. *Valor actual de una renta temporal y pospagable*



El valor actual de la renta se calcula como:

$$A_{(a_1,q)_{\overline{n}|i}} = a_1 \cdot A(0,1) + a_2 \cdot A(0,2) + a_3 \cdot A(0,3) + \ldots + a_n \cdot A(0,n) =$$

$$= a_1 \cdot \frac{1}{1+i} + a_1 \cdot q \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + a_1 \cdot q^2 \cdot \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} \cdot \frac{1}{(1+i)^n} =$$

$$= a_1 \cdot \left[\frac{1}{1+i} + \frac{q}{(1+i)^2} + \frac{q^2}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{q^{n-1}}{(1+i)^n}\right]$$

Desarrollando la expresión entre corchetes que es la suma de n términos de una progresión geométrica de razón:

$$r = \frac{q}{1+i}$$

se obtiene el valor actual de una renta variable en progresión geométrica, temporal, inmediata y pospagable:

$$A_{(a_1,q)_{\overline{n}|i}} = a_1 \cdot \frac{\frac{1}{1+i} - \frac{q^{n-1}}{(1+i)^n} \cdot \frac{q}{1+i}}{1 - \frac{q}{1+i}} = a_1 \cdot \frac{1}{\cancel{1+i}} \cdot \frac{1 - \frac{q^n}{(1+i)^n}}{\frac{1+i-q}{\cancel{1+i}}}$$

$$\boldsymbol{A_{(a_1,q)_{\overline{n}|i}} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q}}$$

EJERCICIO 2.13.

Cuestión:

Calcular el valor actual de una renta pospagable cuyo primer término es de 1.000 euros que se incrementan acumulativamente un 10% cada año. El tipo de interés anual es el 6% y la duración 10 años.

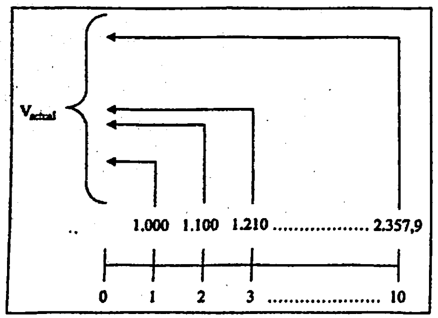
Solución:

- ***Cálculo del valor actual.***

$$A_{(1.000,1.10)\overline{10}|0,06} = 1.000 \cdot A(0,1) + 1.000 \cdot 1,10 \cdot A(0,2) + 1.000 \cdot 1,10^2 \cdot A(0,3) + \ldots +$$

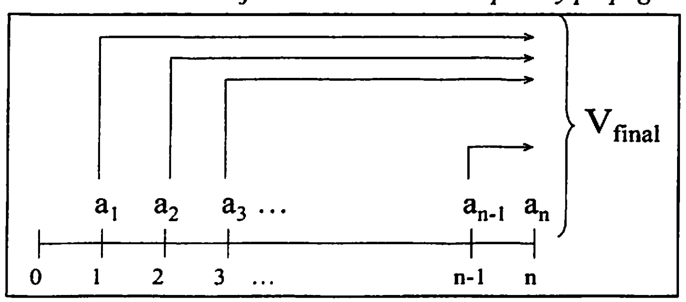
$$+1.000 \cdot 1,10^9 \cdot A(0,10) = 1.000 \cdot \frac{1-\left(1,10^{10}\right)\cdot(1+0,06)^{-10}}{(1+0,06)-1,10} = 11.208,31 \text{ €}$$

FIGURA 2.31. *Esquema de la renta*



2.3.1.2. Valor final de una renta temporal y pospagable

FIGURA 2.32. *Valor final de una renta temporal y pospagable*



El valor final de la renta se calcula como:

$$S_{(a_1,q)\overline{n}|i} = a_1 \cdot L(1,n) + a_2 \cdot L(2,n) + a_3 \cdot L(3,n) + \ldots + a_n \cdot L(n,n) =$$

$$= a_1 \cdot (1+i)^{n-1} + a_1 \cdot q \cdot (1+i)^{n-2} + a_1 \cdot q^2 \cdot (1+i)^{n-3} + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} =$$

$$= a_1 \cdot \left[(1+i)^{n-1} + q \cdot (1+i)^{n-2} + q^2 \cdot (1+i)^{n-3} + \ldots + q^{n-1}\right]$$

Desarrollando la expresión entre corchetes que es la suma de n términos de una progresión geométrica de razón:

$$r = \frac{q}{1+i}$$

se obtiene el valor final de una renta variable en progresión geométrica, temporal, inmediata y pospagable:

$$S_{(a_1,q)\overline{n}|i} = a_1 \cdot \frac{(1+i)^{n-1} - q^{n-1} \cdot \frac{q}{1+i}}{1-\frac{q}{1+i}} = a_1 \cdot \frac{1}{\cancel{1+i}} \cdot \frac{(1+i)^n - q^n}{\frac{1+i-q}{\cancel{1+i}}}$$

$$\mathbf{S_{(a_1,q)\overline{n}|i} = a_1 \cdot \frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}}$$

EJERCICIO 2.14.

Cuestión:

Calcular el valor final de una renta pospagable cuyo primer término es de 1.000 euros que se incrementa acumulativamente un 10% cada año. El tipo de interés anual es el 6% y la duración 10 años.

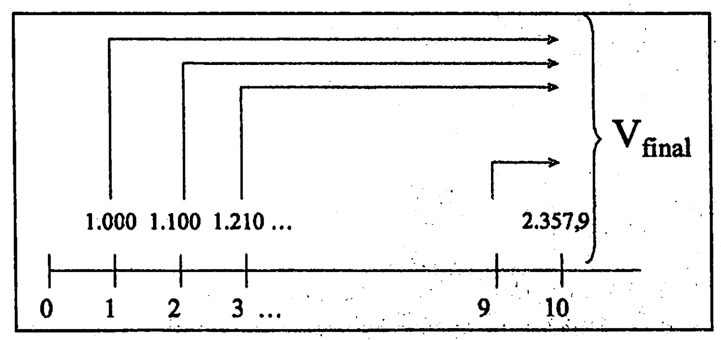
Solución:

- Cálculo del valor actual.

$$S_{(1.000,q)\overline{n}|i} = 1.000 \cdot L(1,10) + 1.000 \cdot 1,10 \cdot L(2,10) + 1.000 \cdot 1,10^2 \cdot L(3,10) + \ldots +$$

$$+1.000 \cdot 1,10^9 \cdot L(10,10) = 1.000 \cdot \frac{(1+0,06)^{10} - 1,10^{10}}{(1+0,06)-1,10} = 20.072,37 \text{ €}$$

FIGURA 2.33. *Esquema de la renta*



El valor actual y el valor final de las rentas variables en progresión geométrica temporales y prepagables se pueden obtener a partir de las siguientes relaciones:

$$\ddot{A}_{(a_1,q)\overline{n}|i} = a_1 \cdot A(0,0) + a_2 \cdot A(0,1) + a_3 \cdot A(0,2) + \ldots + a_n \cdot A(0,n-1)$$

$$\ddot{A}_{(a_1,q)\,\overline{n|}\,i} = A_{(a_1,q)\,\overline{n|}\,i}\cdot(1+i) = a_1\cdot\frac{1-q^n\cdot(1+i)^{-n}}{1+i-q}\cdot(1+i)$$

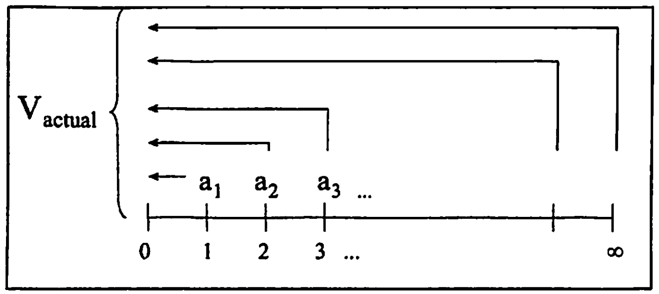
$$S_{(a_1,q)\,\overline{n|}\,i} = a_1\cdot L(0,n)+a_2\cdot L(1,n)+a_3\cdot L(2,n)+\ldots+a_n\cdot L(n-1,n)$$

$$\ddot{S}_{(a_1,q)\,\overline{n|}\,i} = S_{(a_1,q)\,\overline{n|}\,i}\cdot(1+i) = \ddot{A}_{(a_1,q)\,\overline{n|}\,i}\cdot(1+i)^n = a_1\cdot\frac{(1+i)^n-q^n}{(1+i)-q}\cdot(1+i)$$

2.3.2. Valoración de rentas perpetuas

2.3.2.1. Valor actual de una renta perpetua y pospagable

FIGURA 2.34. *Valor actual de una renta perpetua y pospagable*



Para obtener el valor actual se calcula el límite de la expresión del valor actual de una renta variable en progresión geométrica, temporal y pospagable:

$$A_{(a_1,q)\,\overline{\infty|}\,i} = a_1\cdot A(0,1)+a_2\cdot A(0,2)+a_3\cdot A(0,3)+\ldots = \lim_{n\to\infty} a_1\cdot\frac{1-q^n\cdot(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

Si $q\geq 1+i$ el límite no existe.

Si $q<1+i$:

$$A_{(a_1,q)\,\overline{\infty|}\,i} = a_1\cdot\frac{1}{1+i-q}$$

EJERCICIO 2.15.

Cuestión:

Calcular el valor actual de una pensión que se incrementa todos los años un 3%, si la cuantía del primer año son 10.000 euros (se cobra al final de cada año). El tipo de interés anual es el 5%.

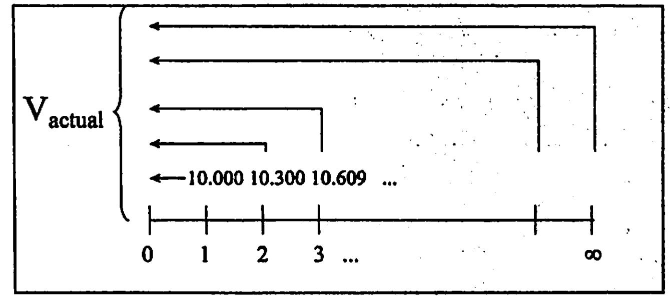
Solución:

- Cálculo del valor actual.

$$A_{(10.000,1,03)\,\overline{\infty|}\,0,05} = 10.000\cdot A(0,1)+10.000\cdot 1,03\cdot A(0,2)+10.000\cdot 1,03^2\cdot A(0,3)+\ldots =$$

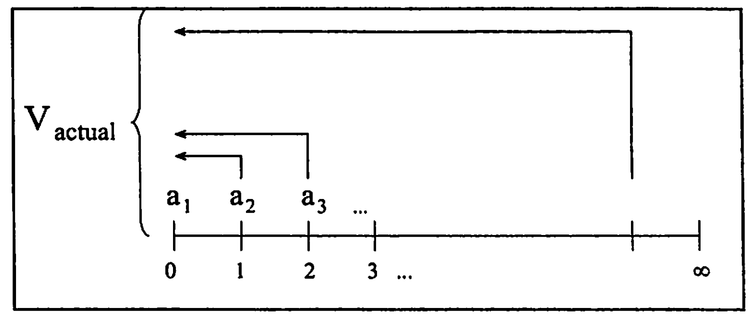
$$=\lim_{n\to\infty} 10.000\cdot\frac{1}{1+0,05-1,03} = 500.000,00\ €$$

FIGURA 2.35. *Esquema de la renta*



2.3.2.2. Valor actual de una renta perpetua y prepagable

FIGURA 2.36. *Valor actual de una renta perpetua y prepagable*



Para obtener el valor actual se calcula el límite de la expresión del valor actual de una renta variable en progresión geométrica, temporal y prepagable:

$$\ddot{A}_{(a_1,q)\,\overline{\infty|}\,i} = a_1\cdot A(0,0)+a_2\cdot A(0,1)+a_3\cdot A(0,2)+\ldots = \lim_{n\to\infty} a_1\cdot\frac{1-q^n\cdot(1+i)^{n}}{1+i-q}\cdot(1+i)$$

Si $q\geq 1+i$ el límite no existe.

Si $q<1+i$:

$$\ddot{A}_{(a_1,q)\,\overline{\infty|}\,i} = a_1\cdot\frac{1+i}{1+i-q}$$

EJERCICIO 2.16.

Cuestión:

Calcular el valor actual de una pensión prepagable que se incrementa un 3% acumulativamente, si la cuantía del primer año son 10.000 euros. El tipo de interés anual es el 5%.

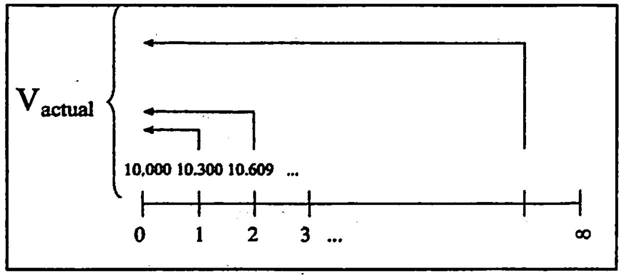
Solución:

- Cálculo del valor actual.

$$\ddot{A}_{(10.000;1,03)\,\overline{\infty}|0,05} = 10.000 \cdot A(0,0) + 10.000 \cdot 1,03 \cdot A(0,1) + 10.000 \cdot 1,03^2 \cdot A(0,2) + \ldots =$$

$$= \lim_{n \to \infty} 10.000 \cdot \frac{1+0,05}{1+0,05-1,03} = 525.000,00 \text{ €}$$

FIGURA 2.37. *Esquema de la renta*



3. VALORACIÓN DE LAS RENTAS FRACCIONADAS

Las rentas fraccionadas son aquellas en las que cada periodo de maduración de divide en m subperíodos. Por lo tanto, la frecuencia de los vencimientos de los términos no coincide con la frecuencia del tipo de interés definido en función de los periodos de maduración.

3.1. VALORACIÓN DE RENTAS CONSTANTES Y TEMPORALES.

3.1.1. Valor actual de una renta pospagable.

Se considera una renta de n periodos con m vencimientos cada uno.

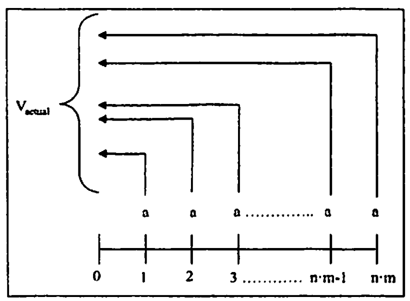
Para calcular el valor actual se puede tener en cuenta:

a) El tipo de interés fraccionado (mensual, trimestral, etc.) y $n{\cdot}m$ subperiodos (meses, trimestres, etc.).

b) El tipo de interés anual y n periodos.

a) Cálculo del valor actual con el tipo de interés fraccionado y $n{\cdot}m$ subperiodos:

FIGURA 2.38. *Valor actual de una renta fraccionada y pospagable*



Se calcula el tipo de interés fraccionado equivalente al tipo de interés anual:

$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

Se calcula el valor actual de una renta constante de cuantía a, de $n \cdot m$ periodos y con un tipo de interés i_m:

$$V_a = a \cdot A(0,1) + a \cdot A(0,2) + a \cdot A(0,3) + \ldots + a \cdot A(0, n \cdot m) =$$

$$= a \cdot \frac{1}{1+i_m} + a \cdot \frac{1}{(1+i_m)^2} + a \cdot \frac{1}{(1+i_m)^3} + \ldots + a \cdot \frac{1}{(1+i_m)^{n \cdot m}} =$$

$$= a \cdot \left[\frac{1}{1+i_m} + \frac{1}{(1+i_m)^2} + \frac{1}{(1+i_m)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i_m)^{n \cdot m}} \right]$$

Desarrollando la expresión entre corchetes que es la suma de $n{\cdot}m$ términos de una progresión geométrica de razón:

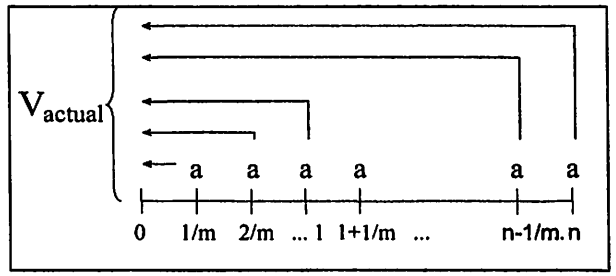
$$r = \frac{1}{1+i_m}$$

se obtiene el valor actual de una renta fraccionada constante de $n{\cdot}m$ subperiodos y tipo de interés fraccionado i_m:

$$\boldsymbol{V_a = a \cdot \frac{1-(1+i_m)^{-n \cdot m}}{i_m} = a \cdot a_{\overline{n \cdot m}|i_m}}$$

b) Cálculo del valor actual con el tipo de interés anual y n periodos:

FIGURA 2.39. *Valor actual de una renta fraccionada y pospagable*



El valor actual de la renta se calcula como:

$$V_a = a \cdot A\left(0, \frac{1}{m}\right) + a \cdot A\left(0, \frac{2}{m}\right) + a \cdot A\left(0, \frac{3}{m}\right) + \ldots + a \cdot A\left(0, \frac{n \cdot m}{m}\right) =$$

$$= a \cdot \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{m}}} + a \cdot \frac{1}{(1+i)^{\frac{2}{m}}} + a \cdot \frac{1}{(1+i)^{\frac{3}{m}}} + \ldots + a \cdot \frac{1}{(1+i)^{\frac{n \cdot m}{m}}} =$$

$$= a \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{m}}} + \frac{1}{(1+i)^{\frac{2}{m}}} + \frac{1}{(1+i)^{\frac{3}{m}}} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{\frac{n \cdot m}{m}}} \right]$$

Desarrollando la expresión entre corchetes que es la suma de n términos de una progresión geométrica de razón:

$$r = \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}$$

se obtiene el valor actual de una renta fraccionada constante de n periodos y tipo de interés anual i:

$$V_a = a \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{m}}} - \frac{1}{(1+i)^{\frac{n \cdot m}{m}}} \cdot \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}}{1 - \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}} = a \cdot \frac{1}{\cancel{(1+i)^{\frac{1}{m}}}} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1}{\cancel{(1+i)^{\frac{1}{m}}}}} = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1} =$$

$$= a \cdot \frac{i}{i} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i_m} = a \cdot \frac{i}{\frac{J_{(m)}}{m}} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = (a \cdot m) \cdot \frac{i}{J_{(m)}} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} =$$

$$= (a \cdot m) \cdot \frac{i}{J_{(m)}} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\boldsymbol{V_a = (a \cdot m) \cdot a_{\overline{n|}i}^{(m)} = (a \cdot m) \cdot \frac{i}{J_{(m)}} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = (a \cdot m) \cdot \frac{i}{J_{(m)}} \cdot a_{\overline{n|}i}}$$

En esta renta el término del periodo está compuesto por la suma de todos los términos de los subperiodos multiplicada por el factor $\frac{i}{J_{(m)}}$.

EJERCICIO 2.17.

Cuestión:

Calcular el valor actual de una renta mensual de 100 euros. La duración de la renta es de 5 años. El tipo de interés anual es el 3%.

Solución:

- Cálculo del valor actual.

  Se calcula el tipo de interés mensual equivalente al tipo de interés anual, así como el tipo de interés nominal:

  $$i_{12} = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1+0,03)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,00246627$$

  $$J_{(12)} = i_{12} \cdot 12 = 0,00246627 \cdot 12 = 0,029595237$$

  Se calcula el valor actual de la renta fraccionada:

  $$V_a = 100 \cdot A\left(0,\frac{1}{12}\right) + 100 \cdot A\left(0,\frac{2}{12}\right) + 100 \cdot A\left(0,\frac{3}{12}\right) + \ldots + 100 \cdot A\left(0,\frac{60}{12}\right) =$$

  $$= 100 \cdot 12 \cdot a_{\overline{5|}0,03}^{(12)} = (a \cdot 12) \cdot \frac{i}{J_{(12)}} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} =$$

$$= (100 \cdot 12) \cdot \frac{0,03}{0,029595237} \cdot \frac{1-(1+0,03)^{-5}}{0,03} = 5.570,81 \text{ €}$$

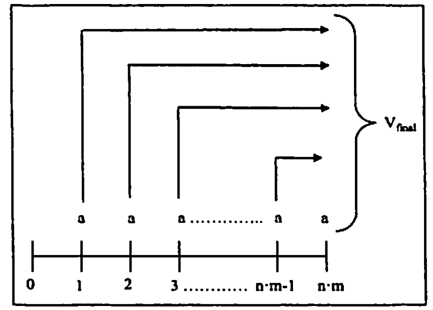
Otra forma:

$$V_a = 100 \cdot A(0,1) + 100 \cdot A(0,2) + 100 \cdot A(0,3) + \ldots + 100 \cdot A(0,60) =$$

$$= 100 \cdot a_{\overline{60|}0,00246627} = a \cdot \frac{1-(1+i_{12})^{-5 \cdot 12}}{i_{12}} = 100 \cdot \frac{1-(1+0,00246627)^{-60}}{0,00246627} = 5.570,81 \text{ €}$$

3.1.2. Valor final de una renta pospagable

FIGURA 2.40. *Valor final de una renta fraccionada y pospagable*



Para calcular el valor final se puede tener en cuenta:

a) El tipo de interés anual y n periodos.

b) El tipo de interés fraccionado (mensual, trimestral, etc.) y $n{\cdot}m$ subperiodos (meses, trimestres, etc.).

a) Cálculo del valor final con el tipo de interés fraccionado y $n{\cdot}m$ subperiodos:

Se calcula el tipo de interés fraccionado equivalente al tipo de interés anual:

$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

Se calcula el valor final de una renta constante de cuantía a, de $n \cdot m$ periodos y con un tipo de interés i_m:

$$V_f = a \cdot L(1, n \cdot m) + a \cdot L(2, n \cdot m) + a \cdot L(3, n \cdot m) + \ldots + a \cdot L(n \cdot m, n \cdot m) =$$

$$= a \cdot (1+i_m)^{n \cdot m - 1} + a \cdot (1+i_m)^{n \cdot m - 2} + a \cdot (1+i_m)^{n \cdot m - 3} + \ldots + a =$$

$$= a \cdot \left[(1+i_m)^{n \cdot m - 1} + (1+i_m)^{n \cdot m - 2} + (1+i_m)^{n \cdot m - 3} + \ldots + 1\right]$$

Desarrollando la expresión entre corchetes que es la suma de $n{\cdot}m$ términos de una progresión geométrica de razón:

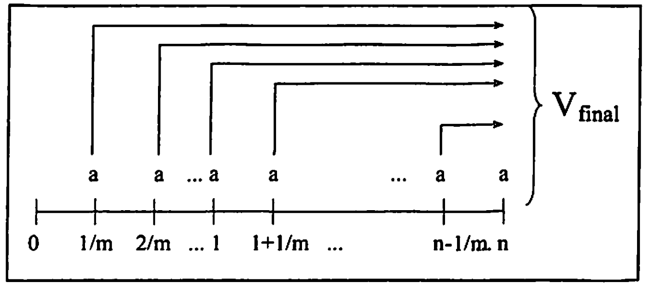
$$r = \frac{1}{1+i_m}$$

se obtiene el valor final de una renta fraccionada constante de $n{\cdot}m$ periodos y tipo de interés fraccionado i_m

$$V_f = a \cdot \frac{(1+i_m)^{n \cdot m} - 1}{i_m} = a \cdot s_{\overline{n \cdot m|}i_m}$$

b) Cálculo del valor final con el tipo de interés anual y n periodos:

FIGURA 2.41. *Valor final de una renta fraccionada y pospagable*



El valor final de la renta se calcula como:

$$V_f = a \cdot L\left(\frac{1}{m}, n\right) + a \cdot L\left(\frac{2}{m}, n\right) + a \cdot L\left(\frac{3}{m}, n\right) + \ldots + a \cdot L\left(\frac{n \cdot m}{m}, n\right) =$$

$$= a \cdot (1+i)^{n-\frac{1}{m}} + a \cdot (1+i)^{n-\frac{2}{m}} + a \cdot (1+i)^{n-\frac{3}{m}} + \ldots + a =$$

$$= a \cdot \left[(1+i)^{n-\frac{1}{m}} + (1+i)^{n-\frac{2}{m}} + (1+i)^{n-\frac{3}{m}} + \ldots + 1\right]$$

Desarrollando la expresión entre corchetes que es la suma de $n \cdot m$ términos de una progresión geométrica de razón:

$$r = \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}$$

se obtiene el valor final de una renta fraccionada constante de n periodos y tipo de interés anual i:

$$V_f = a \cdot \frac{(1+i)^{n-\frac{1}{m}} - \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}}{1 - \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}} = a \cdot \frac{1}{\cancel{(1+i)^{\frac{1}{m}}}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{\frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\cancel{(1+i)^{\frac{1}{m}}}}} = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1} = a \cdot \frac{i}{i} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i_m} =$$

$$= a \cdot \frac{i}{\frac{J_{(m)}}{m}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = (a \cdot m) \cdot \frac{i}{J_{(m)}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_f = (a \cdot m) \cdot s^{(m)}_{\overline{n|}i} = (a \cdot m) \cdot \frac{i}{J_{(m)}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

En esta renta el término del periodo está compuesto por la suma de todos los términos de los subperiodos multiplicada por el factor $\frac{i}{J_{(m)}}$.

EJERCICIO 2.18.

Cuestión:

Calcular el valor final de una renta mensual de 100 euros. La duración de la renta es de 5 años. El tipo de interés anual es el 3%.

Solución:

- Cálculo del valor final.

Se calcula el tipo de interés mensual equivalente al tipo de interés anual, así como el tipo de interés nominal:

$$i_{12} = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1+0{,}03)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}00246627$$

$$J_{(12)} = i_{12} \cdot 12 = 0{,}00246627 \cdot 12 = 0{,}029595237$$

Se calcula el valor final de la renta fraccionada:

$$V_f = 100 \cdot L\left(\frac{1}{12}, 5\right) + 100 \cdot L\left(\frac{2}{12}, 5\right) + 100 \cdot L\left(\frac{3}{12}, 5\right) + \ldots + 100 \cdot L\left(\frac{60}{12}, 5\right) =$$

$$= (100 \cdot 12) \cdot S^{(12)}_{\overline{5|}0{,}03} = (a \cdot 12) \cdot \frac{i}{J_{(12)}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} =$$

$$= (100 \cdot 12) \cdot \frac{0{,}03}{0{,}029595237} \cdot \frac{(1+0{,}03)^5 - 1}{0{,}03} = 6.458{,}10 \text{ €}$$

Otra forma:

$$V_f = 100 \cdot L(1,60) + 100 \cdot L(2,60) + 100 \cdot L(3,60) + \ldots + 100 \cdot L(60,60) =$$

$$= 100 \cdot S_{\overline{60|}0{,}00246627} = a \cdot \frac{(1+i_{12})^{5 \cdot 12} - 1}{i_{12}} = 100 \cdot \frac{(1+0{,}00246627)^{60} - 1}{0{,}00246627} = 6.458{,}10 \text{ €}$$

El valor actual y el valor final de las rentas fraccionadas, constantes, temporales y prepagables se obtienen a partir de las siguientes relaciones:

$$V_a = (a \cdot m) \cdot \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}i} = a \cdot \ddot{a}_{\overline{n \cdot m|}i_m} = (a \cdot m) \cdot a^{(m)}_{\overline{n|}i} \cdot (1+i_m) = (a \cdot m) \cdot \frac{i}{J_{(m)}} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i_m)$$

$$V_f = (a \cdot m) \cdot \ddot{S}^{(m)}_{\overline{n|}i} = a \cdot \ddot{S}_{\overline{n \cdot m|}i_m} = (a \cdot m) \cdot S^{(m)}_{\overline{n|}i} \cdot (1+i_m) = (a \cdot m) \cdot \frac{i}{J_{(m)}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i_m)$$

3.2. VALORACIÓN DE RENTAS CONSTANTES Y PERPETUAS

3.2.1. Valor actual de una renta pospagable

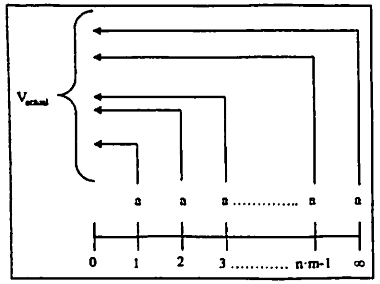
Para calcular el valor final se puede tener en cuenta:

a) El tipo de interés fraccionado (mensual, trimestral, etc.) y $n \cdot m$ subperiodos (meses, trimestres, etc.).

b) El tipo de interés anual y n periodos.

a) Cálculo del valor actual con el tipo de interés fraccionado y $n \cdot m$ subperiodos:

FIGURA 2.42. *Valor actual de una renta fraccionada, perpetua y pospagable*



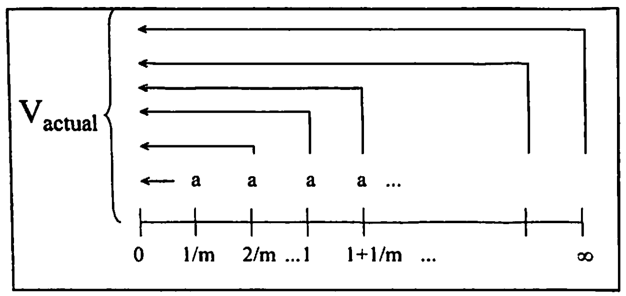
Para obtener el valor actual se calcula el límite de la expresión del valor actual de una renta fraccionada, constante, temporal y pospagable:

$$V_a = a \cdot A(0,1) + a \cdot A(0,2) + a \cdot A(0,3) + \ldots = \lim_{n \to \infty} a \cdot \frac{1-(1+i_m)^{-n \cdot m}}{i_m}$$

$$\boldsymbol{V_a = a \cdot a_{\overline{\infty}|i_m} = a \cdot \frac{1}{i_m}}$$

b) Cálculo del valor actual con el tipo de interés anual y n periodos:

FIGURA 2.43. *Valor actual de una renta fraccionada, perpetua y pospagable*



Para obtener el valor actual se calcula el límite de la expresión del valor actual de una renta fraccionada, constante, temporal y pospagable:

$$V_a = a \cdot A\left(0,\frac{1}{m}\right) + a \cdot A\left(0,\frac{2}{m}\right) + a \cdot A\left(0,\frac{3}{m}\right) + \ldots = \lim_{n \to \infty} (a \cdot m) \cdot \frac{i}{J_{(m)}} \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$\boldsymbol{V_a = a \cdot a^{(m)}_{\overline{\infty}|i} = (a \cdot m) \cdot \frac{1}{J_{(m)}}}$$

EJERCICIO 2.19.

Cuestión:

Calcular el valor actual de una renta mensual, perpetua y pospagable con términos de 100 euros. El tipo de interés anual es el 3%.

Solución:

- Cálculo del valor actual.

  Se calcula el tipo de interés mensual equivalente al tipo de interés anual, así como el tipo de interés nominal:

$$i_{12} = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1+0,03)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,00246627$$

$$J_{(12)} = i_{12} \cdot 12 = 0,00246627 \cdot 12 = 0,029595237$$

Se calcula el valor actual de la renta fraccionada y perpetua:

$$V_a = 100 \cdot A\left(0,\frac{1}{12}\right) + 100 \cdot A\left(0,\frac{2}{12}\right) + 100 \cdot A\left(0,\frac{3}{12}\right) + \ldots =$$

$$= \lim_{n \to \infty} (100 \cdot 12) \cdot \frac{0,03}{0,029595237} \cdot \frac{1-(1+0,03)^{-n}}{0,03} =$$

$$= 100 \cdot 12 \cdot \frac{1}{0,029595237} = 40.547,06 \text{ €}$$

Otra forma:

$$V_a = 100 \cdot A(0,1) + 100 \cdot A(0,2) + 100 \cdot A(0,3) + \ldots =$$

$$= \lim_{n \to \infty} 100 \cdot \frac{1-(1+0,00246627)^{-n \cdot m}}{0,00246627} = 100 \cdot \frac{1}{0,00246627} = 40.547,06 \text{ €}$$

3.2.2. Valor actual de una renta prepagable

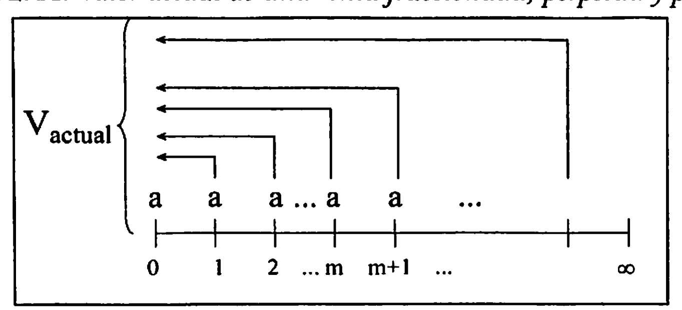
Para calcular el valor final se puede tener en cuenta:

a) El tipo de interés fraccionado (mensual, trimestral, etc.) y $n \cdot m$ subperiodos (meses, trimestres, etc.).

b) El tipo de interés anual y n periodos.

a) Cálculo del valor actual con el tipo de interés fraccionado y $n \cdot m$ subperiodos:

FIGURA 2.44. *Valor actual de una renta fraccionada, perpetua y prepagable*



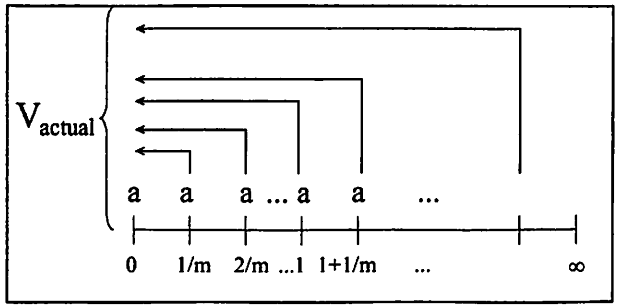
Para obtener el valor actual se calcula el límite de la expresión del valor actual de una renta fraccionada, constante, temporal y prepagable:

$$V_a = a\cdot A(0,0)+a\cdot A(0,1)+a\cdot A(0,2)+\ldots = \lim_{n\to\infty} a\cdot\frac{1-(1+i_m)^{-n\cdot m}}{i_m}\cdot(1+i_m)$$

$$\boldsymbol{V_a = a\cdot \ddot{a}_{\overline{\infty}|i_m} = a\cdot\frac{1+i_m}{i_m}}$$

b) Cálculo del valor actual con el tipo de interés anual y n periodos:

FIGURA 2.45. *Valor actual de una renta fraccionada, perpetua y prepagable*



Para obtener el valor actual se calcula el límite de la expresión del valor actual de una renta fraccionada, constante, temporal y prepagable:

$$V_a = a\cdot A(0,0)+a\cdot A\left(0,\frac{1}{m}\right)+a\cdot A\left(0,\frac{2}{m}\right)+\ldots = \lim_{n\to\infty}(a\cdot m)\cdot\frac{i}{J_{(m)}}\cdot a_{\overline{n}|i}\cdot(1+i_m)$$

$$\boldsymbol{V_a = a\cdot \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|i} = (a\cdot m)\cdot\frac{1}{J_{(m)}}\cdot(1+i_m)}$$

EJERCICIO 2.20.

Cuestión:

Calcular el valor actual de una renta mensual, perpetua y prepagable con términos de 100 euros. El tipo de interés anual es el 3%.

Solución:

- Cálculo del valor actual.

  Se calcula el tipo de interés mensual equivalente al tipo de interés anual, así como el tipo de interés nominal:

  $$i_{12} = (1+i)^{\frac{1}{12}}-1 = (1+0{,}03)^{\frac{1}{12}}-1 = 0{,}00246627$$

  $$J_{(12)} = i_{12}\cdot 12 = 0{,}00246627\cdot 12 = 0{,}029595237$$

Se calcula el valor actual de la renta fraccionada, perpetua y prepagable:

$$V_a = 100\cdot A(0,0)+100\cdot A\left(0,\frac{1}{12}\right)+100\cdot A\left(0,\frac{2}{12}\right)+\ldots =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(100\cdot 12)\cdot\frac{0{,}03}{0{,}029595237}\cdot\frac{1-(1+0{,}03)^{-n}}{0{,}03}\cdot(1+0{,}00246627) =$$

$$= 100\cdot 12\cdot\frac{1+0{,}00246627}{0{,}029595237} = 40.647{,}06\ €$$

Otra forma:

$$V_a = 100\cdot A(0,0)+100\cdot A(0,1)+100\cdot A(0,2)+\ldots =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 100\cdot\frac{1-(1+0{,}00246627)^{-n\cdot m}}{0{,}00246627}\cdot(1+0{,}00246627) =$$

$$= 100\cdot\frac{1+0{,}00246627}{0{,}00246627} = 40.647{,}06\ €$$

4. VALORACIÓN DE LAS RENTAS CONTINUAS

Las rentas continuas son aquellas en las que los periodos de maduración son infinitesimales, produciéndose un flujo continuo de capitales.

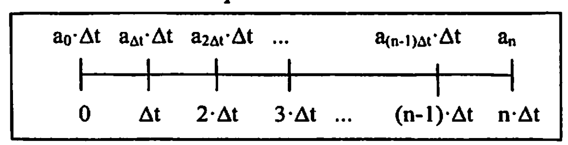
La función que nos permite obtener el capital en cada instante se denomina *función de densidad de la renta* a_t y es una función continua respecto al tiempo, al menos en el intervalo temporal en el que esta definida la renta.

En las rentas continuas también se distingue entre rentas temporales y rentas perpetuas.

Para obtener los valores actuales y finales de una renta continua se sigue el mismo procedimiento que en las rentas discretas pero suponiendo que la amplitud de los intervalos de maduración tiende a cero.

Teniendo en cuenta el siguiente esquema:

FIGURA 2.46. *Esquema de una renta continua*



El valor actual se calcula como:

$$V_a = a_0\cdot\Delta t\cdot A(0,0)+a_{\Delta t}\cdot\Delta t\cdot A(0,\Delta t)+\ a_{2\Delta t}\cdot\Delta t\cdot A(0,2\Delta t)+\ldots+$$

$$+a_{(n-1)\cdot\Delta t}\cdot\Delta t\cdot A(0,(n-1)\cdot\Delta t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j\cdot\Delta t}\cdot\Delta t\cdot A(0,j\cdot\Delta t)$$

Para obtener el valor actual de esta expresión se calcula el límite cuando $n \to \infty$:

$$V_a = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j\cdot\Delta t} \cdot \Delta t \cdot A(0, j\cdot\Delta t) = \int_0^n a_t \cdot A(0,t)\cdot dt$$

$$V_a = \int_0^n a_t \cdot e^{-\int_0^t \delta(s)\cdot ds} \cdot dt$$

donde:

$\delta(t)$: Tasa instantánea de descuento.

$t = j\cdot\Delta t$

El valor final se calcula como:

$$V_f = a_0 \cdot \Delta t \cdot L(0,n) + a_{\Delta t}\cdot\Delta t\cdot L(\Delta t,n) + a_{2\Delta t}\cdot\Delta t\cdot L(2\cdot\Delta t,n)+\ldots+$$

$$+a_{(n-1)\cdot\Delta t}\cdot\Delta t\cdot L((n-1)\cdot\Delta t,n) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j\cdot\Delta t}\cdot\Delta t\cdot L(j\cdot\Delta t,n)$$

Para obtener el valor final de esta expresión se calcula el límite cuando $n \to \infty$:

$$V_f = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j\cdot\Delta t}\cdot\Delta t\cdot L(j\cdot\Delta t,n) = \int_0^n a_t\cdot L(t,n)\cdot dt$$

$$V_f = \int_0^n a_t \cdot e^{\int_t^n \rho(s)\cdot ds}\cdot dt$$

donde:

$\rho(s)$: Tasa instantánea de interés.

EJERCICIO 2.21.

Cuestión:

Calcular el valor actual de la renta $a_t = 150\cdot t + 1.000$ teniendo en cuenta que el tipo de interés es el 3% y $e^{-\int_0^t \delta(s)\cdot ds} = e^{-\delta\cdot t}$.

Solución:

- Cálculo del valor actual.

  Se calcula la tasa instantánea de descuento equivalente al tipo de interés anual:

  $\delta = \ln(1+i) = \ln(1+0{,}03) = 0{,}0296$

  Se calcula el valor actual de la renta continua:

$$V_a = \int_0^n a_t\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot dt = \int_0^n (150\cdot t + 1.000)\cdot e^{-0{,}0296\cdot t}\cdot dt =$$

$$= \int_0^n 150\cdot t\cdot e^{-0{,}0296\cdot t}\cdot dt + \int_0^n 1.000\cdot e^{-0{,}0296\cdot t}\cdot dt =$$

$$= 150\cdot\left(-\frac{1}{0{,}0296}\cdot\left(t\cdot e^{-0{,}0296\cdot t} + \frac{e^{-0{,}0296\cdot t}}{0{,}0296}\right)\right) - 1.000\cdot\left.\frac{e^{-0{,}0296\cdot t}}{0{,}0296}\right]_0^n =$$

$$= \left[150\cdot\left(-\frac{1}{0{,}0296}\cdot\left(n\cdot e^{-0{,}0296\cdot n} + \frac{e^{-0{,}0296\cdot n}}{0{,}0296}\right)\right) - 1.000\cdot\frac{e^{-0{,}0296\cdot n}}{0{,}0296}\right] -$$

$$-\left[150\cdot\left(-\frac{1}{0{,}0296}\cdot\frac{1}{0{,}0296}\right) - 1.000\cdot\frac{1}{0{,}0296}\right]$$

Si $n \to \infty$:

$V_a = 204.985{,}39$ €

4.1. VALORACIÓN DE RENTAS TEMPORALES

Para realizar la valoración de las rentas temporales se utiliza la ley de capitalización compuesta y se supone que la tasa instantánea de descuento es constante, es decir, $\delta(t) = \delta$.

En las rentas temporales constantes la función de densidad también es constante. En este caso: $a_t = a$.

El valor actual de una renta continua, temporal, constante, inmediata y pospagable se calcula como:

$$V_a = \int_0^n a_t\cdot e^{-\int_0^t \delta(s)\cdot ds}\cdot dt = \int_0^n a\cdot e^{-\int_0^t \delta\cdot ds}\cdot dt = a\cdot\int_0^n e^{-\delta\cdot t}\cdot dt = a\cdot\frac{1-e^{-\delta\cdot n}}{\delta}$$

donde:

$e^{-\delta\cdot n} = (1+i)^{-n}$

Por tanto:

$$V_a = a\cdot\bar{a}_{\overline{n}|i} = a\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\delta}$$

EJERCICIO 2.22.

Cuestión:

Calcular el valor actual de una renta anual continua de un euro. El tipo de interés es el 5% y la duración 10 años.

Solución:

- Cálculo del valor actual.

Se calcula la tasa instantánea de descuento equivalente al tipo de interés anual:

$\delta = \ln(1+i) = \ln(1+0{,}05) = 0{,}0488$

Se calcula el valor actual de la renta continua:

$$V_a = 1\cdot\bar{a}_{\overline{10}|0{,}05} = a\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\delta} = 1\cdot\frac{1-(1+0{,}05)^{-10}}{0{,}0488} = 7{,}91\text{ €}$$

El valor final de una renta continua, temporal, constante, inmediata y pospagable se calcula como:

$$V_f = \int_0^n a_t \cdot e^{\int_t^n \rho(s)\cdot ds} \cdot dt = \int_0^n a \cdot e^{\int_t^n \rho\cdot ds} \cdot dt = a \cdot \int_0^n e^{\rho\cdot(n-t)} \cdot dt = a \cdot \frac{e^{\rho\cdot n}-1}{\rho}$$

donde:

$$e^{\rho\cdot n} = (1+i)^n$$

Por tanto:

$$V_f = a \cdot \bar{S}_{\overline{n}|i} = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{\rho}$$

EJERCICIO 2.23.

Cuestión:

Calcular el valor final de una renta anual continua de un euro. El tipo de interés es el 5% y la duración 10 años.

Solución:

- Cálculo del valor final.

  $$\rho = \ln(1+i) = \ln(1+0,05) = 0,0488$$

  $$V_f = 1 \cdot \bar{S}_{\overline{10}|0,05} = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{\rho} = 1 \cdot \frac{(1+0,05)^{10} - 1}{0,0488} = 12,89\text{ €}$$

4.2. VALORACIÓN DE RENTAS PERPETUAS

Para calcular el valor actual de las rentas continuas y perpetuas se sigue el mismo procedimiento que para las rentas discretas, es decir, se calcula el límite cuando el tiempo tiende a infinito del valor actual de las rentas temporales:

$$V_a = a \cdot \bar{a}_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{\delta} = a \cdot \frac{1}{\delta}$$

EJERCICIO 2.24.

Cuestión:

Calcular el valor actual de una renta continua anual y perpetua de 100 euros si el tipo de interés anual es el 6%.

Solución:

- Cálculo del valor actual.

  Se calcula la tasa instantánea de descuento equivalente al tipo de interés anual:

  $$\delta = \ln(1+i) = \ln(1+0,06) = 0,0583$$

  Se calcula el valor actual de la renta continua y perpetua:

  $$V_a = 100 \cdot \bar{a}_{\overline{\infty}|i} = 100 \cdot \frac{1}{\delta} = 100 \cdot \frac{1}{0,0583} = 1.716,18\text{ €}$$

5. VALORACIÓN DE LAS RENTAS CON LA LEY FINANCIERA DE CAPITALIZACIÓN SIMPLE

El valor financiero de la renta en un instante es la suma de los valores proyectados de todos sus términos en ese instante, bajo una determinada ley financiera. En los epígrafes anteriores se ha utilizado la ley financiera de capitalización compuesta, que es la más utilizada en la practica.

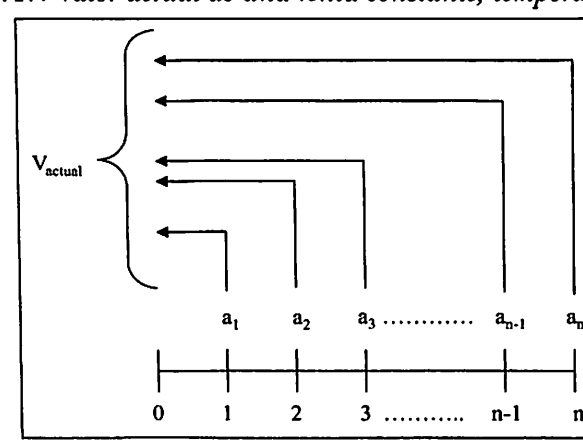
En este epígrafe se analiza la valoración de rentas utilizando la ley financiera de capitalización simple.

Si la suma de esos valores se produce en el origen de la renta se denomina *valor actual*. Si la valoración se produce al final de la renta se denomina *valor final* de la renta.

5.1. VALOR ACTUAL DE RENTAS CONSTANTES Y TEMPORALES

Se obtiene el valor actual de una renta constante temporal y pospagable utilizando la ley de capitalización simple.

FIGURA 2.47. *Valor actual de una renta constante, temporal y pospagable*



El valor actual de la renta se calcula como:

$$V_a = a \cdot A(0,1) + a \cdot A(0,2) + a \cdot A(0,3) + \ldots + a \cdot A(0,n) =$$

$$= a \cdot \frac{1}{1+i} + a \cdot \frac{1}{(1+2\cdot i)} + a \cdot \frac{1}{(1+3\cdot i)} + \ldots + a \cdot \frac{1}{(1+n\cdot i)}$$

$$V_a = a \cdot \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2\cdot i} + \frac{1}{1+3\cdot i} + \ldots + \frac{1}{1+n\cdot i} \right]$$

EJERCICIO 2.25.

Cuestión:

Calcular el valor actual de una renta que tiene cinco términos de 1.000 euros anuales si el tipo de interés anual es el 5%.

Solución:

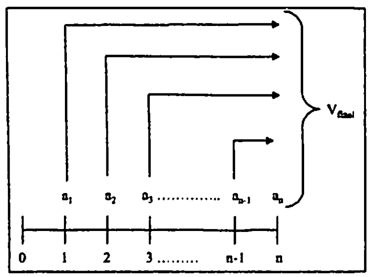
- Cálculo del valor actual.

$$V_a = 1.000 \cdot \left[\frac{1}{1+0,05} + \frac{1}{1+2\cdot 0,05} + \frac{1}{1+3\cdot 0,05} + \frac{1}{1+4\cdot 0,05} + \frac{1}{1+5\cdot 0,05} \right] = 4.364,37 \text{ €}$$

5.2. VALOR FINAL DE RENTAS CONSTANTES Y TEMPORALES

Se obtiene el valor final de una renta constante temporal y pospagable utilizando la ley de capitalización simple.

FIGURA 2.48. *Valor final de una renta constante, temporal y pospagable*



El valor final de la renta se calcula como:

$$V_f = a\cdot L(1,n) + a\cdot L(2,n) + a\cdot L(3,n) + \ldots + a\cdot L(n,n) =$$

$$= a\cdot(1+(n-1)\cdot i) + a\cdot(1+(n-2)\cdot i) + a\cdot(1+(n-3)\cdot i) + \ldots + a$$

$$\boldsymbol{V_f = a\cdot\left[(1+(n-1)\cdot i) + (1+(n-2)\cdot i) + (1+(n-3)\cdot i) + \ldots + 1\right]}$$

EJERCICIO 2.24.

Cuestión:

Calcular el valor final de una renta que tiene cinco términos de 1.000 euros anuales si el tipo de interés anual es el 5%.

Solución:

- Cálculo del valor final.

$$V_f = 1.000\cdot\left[(1+(5-1)\cdot 0,05) + (1+(5-2)\cdot 0,05) + (1+(5-3)\cdot 0,05) +\right.$$

$$\left. + (1+(5-4)\cdot 0,05) + 1\right] = 1.000\cdot\left[(1+4\cdot 0,05) + (1+3\cdot 0,05) + (1+2\cdot 0,05) +\right.$$

$$\left.(1+1\cdot 0,05) + 1\right] = 5.500,00 \text{ €}$$

6. VALORACIÓN DE LAS RENTAS CON INTERÉS ESTOCÁSTICO

En los apartados anteriores se ha considerado la valoración de rentas en ambiente de certidumbre o determinista, mientras que en este apartado se introducirá la valoración de rentas en ambiente de incertidumbre o estocástico, donde el tipo de interés es una variable aleatoria.

El valor esperado de la renta en un instante es la suma de los valores esperados de los flujos de esa renta en ese instante. Si la suma de esos valores se produce en el origen de la renta se denomina *valor esperado actual o presente.* Si la valoración se produce al final de la renta se denomina *valor esperado final o acumulado.*

6.1. VALOR ESPERADO FINAL O ACUMULADO DE RENTAS, MEDIA Y VARIANZA

Si se considera que el tipo de interés i_t varía en cada periodo de acuerdo a una distribución que no cambia a lo largo del tiempo, el valor final del flujo n de una renta unitaria es:

$$a_n = (1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdot\ldots\cdot(1+i_t) = \prod_{t=1}^{n}(1+i_t)$$

Si los tipos de interés i_t son independientes e idénticamente distribuidos con media $\bar{i}$, la media del valor acumulado o momento de primer orden del flujo n de la renta unitaria es:

$$E[a_n] = E\left[\prod_{t=1}^{n}(1+i_t)\right] = \prod_{t=1}^{n}E(1+i_t) = (1+\bar{i})^n$$

En este caso el valor esperado acumulado no es igual al valor acumulado de los tipos de interés esperados.

Se calcula la varianza del valor acumulado del flujo n de la renta unitaria:

$$Var[a_n] = E\left[a_n^2\right] - \left[E[a_n]\right]^2 = E\left[a_n^2\right] - (1+\bar{i})^{2n}$$

y para ello se calcula el momento de segundo orden del valor acumulado, teniendo en cuenta que los tipos de interés i_t tienen varianza constante s^2:

$$E\left[a_n^2\right] = E\left[\prod_{t=1}^{n}(1+i_t)^2\right] = \prod_{t=1}^{n}E(1+i_t)^2 = \prod_{t=1}^{n}E\left(1+2i_t+i_t^2\right) = \left(1+2\bar{i}+\bar{i^2}+s^2\right)^n$$

donde:

$$Var[i_t] = E\left[i_t^2\right] - \left[E[i_t]\right]^2 = \overline{i^2} + s^2$$

Por tanto, la varianza del valor acumulado del flujo n de la renta unitaria se obtiene de:

$$Var[a_n] = E\left[a_n^2\right] - \left[E[a_n]\right]^2 = \left(1+2\bar{i}+\overline{i^2}+s^2\right)^n - (1+\bar{i})^{2n} = (1+\bar{j})^n - (1+\bar{i})^{2n}$$

donde:

$$\bar{j} = 2\bar{i} + \overline{i^2} + s^2$$

Se extiende el análisis a una renta unitaria y se calcula su valor acumulado:

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i} = (1+i_1)\cdot\ldots\cdot(1+i_{n-1})\cdot(1+i_n) + (1+i_2)\cdot\ldots\cdot(1+i_{n-1})\cdot(1+i_n) + \ldots +$$

$$+(1+i_{n-1})\cdot(1+i_n) + (1+i_n) = \sum_{t=1}^{n}\prod_{k=1}^{t}(1+i_{n-k+1})$$

Se calcula la media del valor acumulado o valor esperado acumulado de la renta unitaria:

$$E\left[\ddot{s}_{\overline{n}|i}\right]=E\left[\sum_{t=1}^{n}\prod_{k=1}^{t}\left(1+i_{n-k+1}\right)\right]=\sum_{t=1}^{n}\left(1+\bar{i}\right)^{t}=\ddot{s}_{\overline{n}|\bar{i}}$$

que coincide con el valor acumulado de una renta unitaria donde el tipo de interés es la media de los tipos de interés.

Se calcula el valor esperado acumulado de la renta unitaria teniendo en cuenta que los momentos de primer y segundo orden de $1+i_t$ son:

$$m_1^s=E\left[1+i_t\right]=1+\bar{i}$$

$$m_2^s=E\left[\left(1+i_t\right)^2\right]=1+\bar{j}$$

donde:

$$\bar{j}=2\bar{i}+\overline{i^2}+s^2$$

Se calcula la varianza del valor acumulado de la renta unitaria:

$$Var\left[\ddot{s}_{\overline{n}|i}\right]=\frac{m_2^s+m_1^s}{m_2^s+m_1^s}\ddot{s}_{\overline{n}|j}-\frac{2m_2^s}{m_2^s+m_1^s}s_{\overline{n}|i}-\left(\ddot{s}_{\overline{n}|i}\right)^2$$

6.2. VALOR ESPERADO ACTUAL O PRESENTE DE RENTAS, MEDIA Y VARIANZA

Si se considera que el tipo de interés i_t varía en cada periodo de acuerdo a una distribución que no cambia a lo largo del tiempo, el valor actual del flujo n de una renta unitaria es:

$$a_n^{-1}=\left(1+i_1\right)^{-1}\cdot\left(1+i_2\right)^{-1}\cdot\ldots\cdot\left(1+i_t\right)^{-1}=\prod_{t=1}^{n}\left(1+i_t\right)^{-1}$$

Si los tipos de interés i_t son independientes e idénticamente distribuidos con media $\bar{i}$, la media del valor actual o momento de primer orden del flujo n de la renta unitaria es:

$$E\left[a_n^{-1}\right]=E\left[\prod_{t=1}^{n}\left(1+i_t\right)^{-1}\right]=\prod_{t=1}^{n}E\left(1+i_t\right)^{-1}=\left(1+\bar{i}\right)^{-n}$$

Se calcula la varianza del valor acumulado del flujo n de la renta unitaria:

$$Var\left[a_n^{-1}\right]=E\left[a_n^{-2}\right]-\left[E\left[a_n^{-1}\right]\right]^2=E\left[a_n^{-2}\right]-\left(1+\bar{i}\right)^{-2n}$$

Esta expresión no se puede desarrollar más si no se conoce como i_t está distribuido ya que para calcular el momento de segundo orden se requiere una función de densidad de probabilidad.

Se extiende el análisis a una renta unitaria y se calcula su valor actual:

$$a_{\overline{n}|i}=\left(1+i_1\right)^{-1}+\left(1+i_1\right)^{-1}\cdot\left(1+i_2\right)^{-1}+\ldots+\left(1+i_1\right)^{-1}\cdot\left(1+i_2\right)^{-1}\cdot\ldots\cdot\left(1+i_n\right)^{-1}=\sum_{t=1}^{n}\prod_{k=1}^{t}\left(1+i_k\right)^{-1}$$

Se calcula la media del valor actual o valor esperado actual de la renta unitaria:

$$E\left[a_{\overline{n}|i}\right]=E\left[\sum_{t=1}^{n}\prod_{k=1}^{t}\left(1+i_k\right)^{-1}\right]=\sum_{t=1}^{n}\left(1+\bar{i}\right)^{-t}=a_{\overline{n}|\bar{i}}$$

que coincide con el valor actual de una renta unitaria donde el tipo de interés es la media de los tipos de interés.

Se calcula el valor esperado actual de la renta unitaria teniendo en cuenta que los momentos de primer y segundo orden de $1+i_t$ son:

$$m_1^a=E\left[1+i_t\right]=\left(1+i\right)^{-1}$$

$$m_2^a=E\left[\left(1+i_t\right)^2\right]=\left(1+k\right)^{-1}$$

Se calcula la varianza del valor actual de la renta unitaria:

$$Var\left[a_{\overline{n}|i}\right]=\frac{m_2^a+m_1^a}{m_2^a+m_1^a}a_{\overline{n}|k}-\frac{2m_2^a}{m_2^a+m_1^a}a_{\overline{n}|i}-\left(a_{\overline{n}|i}\right)^2$$

Por tanto, si se conocen los momentos de primer y segundo orden de $(1+i_t)$ y $(1+i_t)^{-1}$ se pueden calcular los valores esperados acumulados y actuales de un flujo o de una renta. Para ello se debe conocer la función de densidad de probabilidad de i_t y para ello habría que recurrir a técnicas de simulación.

EJERCICIO 2.25.

Cuestión:

Si el tipo de interés efectivo se distribuye uniformemente en el intervalo [0,01, 0,03] para t = 1, 2, 3 y 4. Calcular la media y la varianza para un valor final o acumulado de 1 euro al final del año 4.

Solución:

- Cálculo de la media.

$$E\left[i_t\right]=\bar{i}=\frac{0,01+0,03}{2}=0,02$$

$$E\left[a_4\right]=\left(1+\bar{i}\right)^4=(1+0,02)^4=1,08 \text{ euros}$$

- Cálculo de la varianza.

$$Var\left[i_t\right]=s^2=\frac{(0,03-0,01)^2}{12}=0,000033$$

$$Var\left[a_4\right]=\left(1+2\bar{i}+\bar{i}^2+s^2\right)^n-\left(1+\bar{i}\right)^{2n}=$$

$$=\left(1+2\cdot 0,02+(0,02)^2+0,000033\right)^4-(1+0,02)^8=0,00015$$

Un caso especial cuyos resultados sí podrían obtenerse analíticamente es el denominado "Modelo Lognormal" (Kellison, 2009), en el que la variable aleatoria $\ln(1+i_t)$ sigue una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Por tanto la variable aleatoria $(1+i_t)$ sigue una distribución lognormal con media μ y varianza σ^2, cuya media y varianza son:

$$Media=e^{\mu+\sigma^2/2}$$

$$Varianza=e^{\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$$

El valor final del flujo n de una renta unitaria es:

$$\ln a_n = \sum_{t=1}^{n} \ln(1+i_t)$$

es decir, es igual a la suma de n variables aleatorias independientes, cada una de ellas con media μ y varianza σ^2. Por tanto, su media y varianza son aditivas y se obtienen de:

$$E[\ln a_n] = n \cdot \mu$$

$$Var[\ln a_n] = n \cdot \sigma^2$$

Como el flujo a_n sigue una distribución normal cuyas medias y varianzas son aditivas, se obtiene:

$$E\left[a_{\overline{n}|i}\right] = e^{n\cdot\mu+n\cdot\sigma^2/2}$$

$$Var\left[a_{\overline{n}|i}\right] = e^{2\cdot n\cdot\mu+n\cdot\sigma^2}\left(e^{n\cdot\sigma^2}-1\right)$$

En la práctica se utilizan logaritmos cuando se necesita calcular las varianzas ya que las fórmulas se simplifican mucho.

EJERCICIO 2.26.

Cuestión:

Una persona desea invertir 200.000 euros en un fondo de inversión para su jubilación que tendrá lugar dentro de 35 años. El fondo de inversión le proporcionará un tipo de interés efectivo anual del 3%, 4% y 5% con las siguientes probabilidades:

Tipo de interés	Probabilidad
0,03	0,2
0,04	0,45
0,05	0,35

El tipo de interés de cada año es independiente de los tipos de los demás años y sigue una distribución lognormal. Calcular el valor acumulado transcurridos 35 años con una probabilidad del 80%.

Solución:

- Se calcula la media y la varianza de la distribución lognormal.

Tipo de interés	Probabilidad	$1+i_t$	$\ln(1+i_t)$	$[\ln(1+i_t)]^2$
0,03	0,2	1,03	0,0296	0,0009
0,04	0,45	1,04	0,0392	0,0015
0,05	0,35	1,05	0,0488	0,0024
Valor esperado		1,04	0,0392	0,0016

$$E[a_{35}] = 35 \cdot \mu = 35 \cdot 0{,}0392 = 1{,}372$$

$$Var[a_{35}] = 35 \cdot \sigma^2 = 35 \cdot \left[0{,}0016 - (0{,}0392)^2\right] = 0{,}0022$$

El valor que puede obtenerse el 80% del tiempo ocurre en el percentil 20, que en la distribución normal estándar se corresponde con un valor Z del − 0,841621234.

Teniendo en cuenta que: $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{\ln A - 1{,}372}{\sqrt{0{,}0022}} = -0{,}841621234$

$\ln A = 1{,}332524465 \rightarrow A = 3{,}79$ euros (valor acumulado por euro invertido)

Por tanto, el valor acumulado por 200.000 euros invertidos es:

$$V_{35} = 3{,}79 \cdot 200.000 = 758.000 \text{ euros}$$

Si se compara con el valor acumulado medio se observa que no coinciden:

$$V_{35} = 200.000 \cdot (1{,}04)^{35} = 789.217{,}80 \text{ euros}$$

EJERCICIO 2.27.

Cuestión:

Si $(1+i_t)$ sigue una distribución lognormal con media 0,04 y varianza 0,02, calcular en los siguientes casos:

a) La media y la varianza del valor acumulado de 1 euro dentro de 10 años.

b) La media del valor acumulado de una renta unitaria de 10 años.

c) La media y la varianza del valor actual de 1 euros dentro de 10 años.

d) La media del valor actual de una renta unitaria de 10 años.

Solución:

a) La media y la varianza del valor acumulado de 1 euro dentro de 10 años.

Se calcula la media:

$$E[1+i_t] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = e^{0{,}04+\frac{0{,}02}{2}} = 1{,}051271096$$

$$E[a_{10}] = e^{n\mu+\frac{n\sigma^2}{2}} = e^{10\cdot 0{,}04+\frac{10\cdot 0{,}02}{2}} = 1{,}65 \text{ euros}$$

También se puede obtener de:

$$E[a_{10}] = \left(1+\bar{i}\right)^n = (1{,}506817785)^{10} = 60{,}34 \text{ euros}$$

Se calcula la varianza:

$$Var[a_{10}] = \left(e^{2\cdot n\cdot\mu+n\cdot\sigma^2}\right)\left(e^{n\cdot\sigma^2}-1\right) = \left(e^{2\cdot 10\cdot 0{,}04+10\cdot 0{,}02}\right)\left(e^{10\cdot 0{,}02}-1\right) = 0{,}60$$

b) La media del valor acumulado de una renta unitaria de 10 años.

Se calcula la media:

$$E\left[\ddot{S}_{\overline{10}|i}\right] = \ddot{S}_{\overline{10}|\bar{i}} = \ddot{S}_{\overline{10}|0{,}051271096} = 13{,}30 \text{ euros}$$

c) La media y la varianza del valor actual de 1 euros dentro de 10 años.

Se calcula la media:

$$E\left[(1+i_t)^{-1}\right] = e^{-\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = e^{-0{,}04+\frac{0{,}02}{2}} = 0{,}970445534$$

$$E\left[a_{10}^{-1}\right]=e^{-n\cdot\mu+\frac{n\cdot\sigma^2}{2}}=e^{-10\cdot 0,04+\frac{10\cdot 0,02}{2}}=0,74 \text{ euros}$$

Se calcula la varianza:

$$Var\left[a_{\overline{10}|i}\right]=\left(e^{-2\cdot n\cdot\mu+n\cdot\sigma^2}\right)\left(e^{n\cdot\sigma^2}-1\right)=\left(e^{-2\cdot 10\cdot 0,04+10\cdot 0,02}\right)\left(e^{10\cdot 0,02}-1\right)=0,12$$

d) La media del valor actual de una renta unitaria de 10 años.

Se calcula la media de los tipos de interés:

$$E\left[(1+i_t)^{-1}\right]=0,970445534$$

$$\frac{1}{1+\bar{i}}=0,970445534$$

$$\bar{i}=\frac{1}{0,970445534}-1=0,030454533$$

Se calcula la media:

$$E\left[a_{\overline{10}|i}\right]=a_{\overline{10}|\bar{i}}=a_{\overline{10}|0,030454533}=8,51 \text{ euros}$$

En los cálculos anteriores se ha supuesto que los tipos de interés de cada periodo son independientes, pero también pueden ser dependientes. Se podrían utilizar muchos modelos de tipos de interés que reflejasen esta dependencia entre los tipos de interés y se pueden diferenciar entre modelos discretos (modelos de medias móviles, autorregresivos, binomiales, etc.) y modelos continuos (modelos estocásticos).

Los modelos estocásticos continuos requieren conocimientos previos sobre cálculo estocástico y, sobre todo, la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas. Por este motivo solo se hará una breve introducción a estos modelos, que se basan en procesos Wiener.

Si una variable z_t sigue un proceso de Wiener, entonces cambios en esa variable sobre periodos cortos de tiempo serán independientes y seguirán una distribución normal. Si se aplica la propiedad de que la media de una distribución normal es proporcional a t y su varianza proporcional a $\sqrt{t}$:

$$Si\ N(0,1)\rightarrow \Delta z=y\sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta z\sim N\left(0,\sqrt{\Delta t}\right)$$

Si $\Delta t\rightarrow 0$ modelo continuo

Se resumen cuatro modelos estocásticos (Kellison, 2009): el modelo de paseo aleatorio (*random walk model*), el modelo de Rendleman-Bartter, el modelo de Vasicek y el modelo de Cox, Ingersoll y Ross.

a) Modelo de paseo aleatorio o movimiento browniano

El modelo de paseo aleatorio es el modelo estocástico más simple y se expresa como:

$$dr=\alpha\cdot dt+\sigma\cdot dz$$

donde:

α: tendencia

σ: volatilidad

La aproximación discreta de este modelo es:

$$\Delta r=\alpha\cdot\Delta t+\sigma\cdot\Delta z$$

$$\Delta r=\alpha\cdot\Delta t+\sigma\cdot y\cdot\sqrt{\Delta t}$$

donde:

$$\Delta z=y\sqrt{\Delta t}$$

Su media y varianza son, respectivamente:

$$E[r_t]=r_0+\alpha\cdot t$$

$$Var[r_t]=\sigma^2\cdot t$$

Los principales inconvenientes de este modelo se resumen en cuatro:

- El uso de la tendencia es cuestionable porque para periodos largos puede dar lugar a variaciones indefinidas de r_t.
- Puede producir valores negativos de r_t.
- La volatilidad es la misma si r_t es grande o pequeño.
- Los valores de r_t no tienen reversión a una tasa media a largo plazo.

EJERCICIO 2.28.

Cuestión:

La tasa instantánea de interés es el 3%. Estimar esa tasa dentro de un año utilizando el modelo de paseo aleatorio con ajustes trimestrales. La tendencia es 0,002 y la volatilidad 0,01. Las siguientes cuatro variables normales estándar se han generado a través de simulación: 3, –2, 1, –4.

Solución:

Se aplica el modelo de paseo aleatorio con la tasa instantánea inicial del 3%:

$$\Delta r=\alpha\cdot\Delta t+\sigma\cdot y\cdot\sqrt{\Delta t}$$

$$r_{0,25}-r_0=0,002\cdot 0,25+0,01\cdot y\cdot\sqrt{0,25}$$

$$r_{0,25}=0,03+0,002\cdot 0,25+0,01\cdot 3\cdot\sqrt{0,25}=0,0455$$

$$r_{0,50}=0,0455+0,002\cdot 0,25+0,01\cdot(-2)\cdot\sqrt{0,25}=0,036$$

$$r_{0,75}=0,036+0,002\cdot 0,25+0,01\cdot 1\cdot\sqrt{0,25}=0,0415$$

$$r_1=0,0415+0,002\cdot 0,25+0,01\cdot 4\cdot\sqrt{0,25}=0,0620$$

Por tanto la tasa instantánea de interés dentro de un año será: 6,20%

Las cuatro variables normales estándar (y) se pueden interpretar como el número de desviaciones estándar por encima o por debajo de la media, que es igual a cero. Se han escogido de forma arbitraria.

La interpretación de la tendencia es que aumentará la tasa instantánea de interés un 0,2% por año bajo condiciones neutrales. La interpretación de la volatilidad es que la desviación estándar de la tasa instantánea de interés sobre un año es un 1% con respecto a la tasa instantánea de interés actual.

b) Modelo de Rendleman y Bartter

El modelo de Rendleman y Bartter se caracteriza por ser un modelo de paseo aleatorio geométrico:

$$dr = \alpha \cdot r \cdot dt + \sigma \cdot r \cdot dz$$

donde:

α: tendencia

σ: volatilidad

La aproximación discreta de este modelo es:

$$\Delta r = \alpha \cdot r \cdot \Delta t + \sigma \cdot r \cdot \Delta z$$

$$\Delta r = \alpha \cdot r \cdot \Delta t + \sigma \cdot r \cdot y \cdot \sqrt{\Delta t}$$

donde:

$$\Delta z = y\sqrt{\Delta t}$$

Los principales inconvenientes de este modelo se resumen en cuatro:

- El uso de la tendencia es cuestionable porque para periodos largos puede dar lugar a variaciones indefinidas de r_t.
- Los valores de r_t no tienen reversión a una tasa media a largo plazo.
- La volatilidad es proporcionar a r.

EJERCICIO 2.29.

Cuestión:

La tasa instantánea de interés es el 3%. Estimar esa tasa dentro de un año utilizando el modelo de Rendleman y Bartter con ajustes trimestrales. La tendencia es 0,002 y la volatilidad 0,01. Las siguientes cuatro variables normales estándar se han generado a través de simulación: 3, –2, 1, –4.

Solución:

Se aplica el modelo de Rendleman y Bartter con la tasa instantánea inicial del 3%:

$$\Delta r = \alpha \cdot r \cdot \Delta t + \sigma \cdot r \cdot \Delta z$$

$$r_{0,25} - r_0 = 0,002 \cdot r \cdot 0,25 + 0,01 \cdot r \cdot y \cdot \sqrt{0,25}$$

$$r_{0,25} = 0,03 + 0,002 \cdot 0,03 \cdot 0,25 + 0,01 \cdot 0,03 \cdot 3 \cdot \sqrt{0,25} = 0,0305$$

$$r_{0,50} = 0,0305 + 0,002 \cdot 0,0305 \cdot 0,25 + 0,01 \cdot 0,0305 \cdot (-2) \cdot \sqrt{0,25} = 0,0302$$

$$r_{0,75} = 0,0302 + 0,002 \cdot 0,0302 \cdot 0,25 + 0,01 \cdot 0,0302 \cdot 1 \cdot \sqrt{0,25} = 0,0304$$

$$r_1 = 0,0304 + 0,002 \cdot 0,0304 \cdot 0,25 + 0,01 \cdot 0,0304 \cdot 4 \cdot \sqrt{0,25} = 0,0310$$

Por tanto la tasa instantánea de interés dentro de un año será: 3,10%

c) Modelo de Vasicek

El modelo de Vasicek corrige uno de las debilidades de los modelos anteriores porque tiene en cuenta la reversión a una tasa media a largo plazo:

$$dr = c \cdot (b - r) \cdot dt + \sigma \cdot dz$$

donde:

$c \cdot (b - r)$: reversión a la media

b: tasa instantánea de interés a largo plazo a la que el modelo revierte

c: tasa de reversión a la media

La aproximación discreta de este modelo es:

$$\Delta r = c \cdot (b - r) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \Delta z$$

$$\Delta r = c \cdot (b - r) \cdot \Delta t + \sigma \cdot y \cdot \sqrt{\Delta t}$$

Si $c = 0$ coincide con un modelo paseo aleatorio sin tendencia.

Si $c = 1$ sigue una distribución normal con media b.

El modelo de Vasicek es como una mezcla de la distribución normal y el movimiento browniano según Kellison (2009).

Los principales inconvenientes de este modelo se resumen en cuatro:

- Puede producir valores negativos de r_t.
- La volatilidad es la misma si r_t es grande o pequeño.

EJERCICIO 2.30.

Cuestión:

La tasa instantánea de interés es el 3%. Estimar esa tasa dentro de un año utilizando el modelo de Vasicek con ajustes trimestrales. La tasa instantánea de interés a la que el mercado revierte es el 4%, la tasa de reversión a la media por año es el 10% y la volatilidad es el 1%. Las siguientes cuatro variables normales estándar se han generado a través de simulación: 3, –2, 1, –4.

Solución:

Se aplica el modelo de Vasicek con $b = 0{,}04$ y $c = 0{,}20$:

$$\Delta r = c\cdot(b-r)\cdot\Delta t+\sigma\cdot y\cdot\sqrt{\Delta t}$$

$$r_{0,25}-r_0=0{,}20\cdot(0{,}04-r)\cdot 0{,}25+0{,}01\cdot y\cdot\sqrt{0{,}25}$$

$$r_{0,25}=0{,}03+0{,}20\cdot(0{,}04-0{,}03)\cdot 0{,}25+0{,}01\cdot 3\cdot\sqrt{0{,}25}=0{,}0455$$

$$r_{0,50}=0{,}0455+0{,}20\cdot(0{,}04-0{,}0455)\cdot 0{,}25+0{,}01\cdot(-2)\cdot\sqrt{0{,}25}=0{,}0352$$

$$r_{0,75}=0{,}0352+0{,}20\cdot(0{,}04-0{,}0352)\cdot 0{,}25+0{,}01\cdot 1\cdot\sqrt{0{,}25}=0{,}0404$$

$$r_1=0{,}0404+0{,}20\cdot(0{,}04-0{,}0404)\cdot 0{,}25+0{,}01\cdot 4\cdot\sqrt{0{,}25}=0{,}0604$$

Por tanto la tasa instantánea de interés dentro de un año será: 6,04%. El resultado es parecido al del modelo de paseo aleatorio ya que la reversión a la media aproximadamente es $0{,}20\cdot(0{,}04-0{,}03)=0{,}002$, que coincide con la tendencia del modelo de paseo aleatorio.

d) Modelo de Cox, Ingersoll y Ross

El modelo de Cox, Ingersoll y Ross es el modelo más completo de los cuatro e intenta eliminar las debilidades de los tres anteriores ajustando el modelo de Vasicek para que la volatilidad sea proporcional a $\sqrt{r}$:

$$dr = c\cdot(b-r)\cdot dt+\sigma\cdot\sqrt{r}\cdot dz$$

donde:

$c\cdot(b-r)$: reversión a la media

b: tasa instantánea de interés a largo plazo a la que el modelo revierte

c: tasa de reversión a la media

La aproximación discreta de este modelo es:

$$\Delta r = c\cdot(b-r)\cdot\Delta t+\sigma\cdot\sqrt{r}\cdot\Delta z$$

$$\Delta r = c\cdot(b-r)\cdot\Delta t+\sigma\cdot\sqrt{r}\cdot y\cdot\sqrt{\Delta t}$$

EJERCICIO 2.31.

Cuestión:

La tasa instantánea de interés es el 3%. Estimar esa tasa dentro de un año utilizando el modelo de Cox, Ingersoll y Ross con ajustes trimestrales. La tasa instantánea de interés a la que el mercado revierte es el 4%, la tasa de reversión a la media por año es el 10% y la volatilidad es el 1%. Las siguientes cuatro variables normales estándar se han generado a través de simulación: 3, −2, 1, −4.

Solución:

Se aplica el modelo de Cox, Ingersoll y Ross con $b = 0{,}04$ y $c = 0{,}20$:

$$\Delta r = c\cdot(b-r)\cdot\Delta t+\sigma\cdot\sqrt{r}\cdot y\cdot\sqrt{\Delta t}$$

$$r_{0,25}-r_0=0{,}20\cdot(0{,}04-r)\cdot 0{,}25+0{,}01\cdot\sqrt{r}\cdot y\cdot\sqrt{0{,}25}$$

$$r_{0,25}=0{,}03+0{,}20\cdot(0{,}04-0{,}03)\cdot 0{,}25+0{,}01\cdot\sqrt{0{,}03}\cdot 3\cdot\sqrt{0{,}25}=0{,}0326$$

$$r_{0,50}=0{,}0326+0{,}20\cdot(0{,}04-0{,}0326)\cdot 0{,}25+0{,}01\cdot\sqrt{0{,}0326}\cdot(-2)\cdot\sqrt{0{,}25}=0{,}0312$$

$$r_{0,75}=0{,}0312+0{,}20\cdot(0{,}04-0{,}0312)\cdot 0{,}25+0{,}01\cdot\sqrt{0{,}0312}\cdot 1\cdot\sqrt{0{,}25}=0{,}0325$$

$$r_1=0{,}0325+0{,}20\cdot(0{,}04-0{,}0325)\cdot 0{,}25+0{,}01\cdot\sqrt{0{,}0325}\cdot 4\cdot\sqrt{0{,}25}=0{,}0365$$

Por tanto la tasa instantánea de interés dentro de un año será: 3,65%. El resultado es parecido al del modelo de paseo aleatorio ya que la reversión a la media aproximadamente es $0{,}20\cdot(0{,}04-0{,}03)=0{,}002$, que coincide con la tendencia del modelo de paseo aleatorio.

TEMA 3
OPERACIONES FINANCIERAS DE AMORTIZACIÓN DE CAPITAL: PRÉSTAMOS (I)

SUMARIO: 1. CONCEPTO DE PRÉSTAMO. 2. TIPOS DE PRÉSTAMOS. 2.1. *Préstamos con tipo de interés constante.* 2.1.1. Método de amortización francés. 2.1.2. Método de amortización alemán. 2.1.3. Método de amortización mediante términos amortizativos variables en progresión aritmética. 2.1.4. Método de amortización mediante términos amortizativos variables en progresión geométrica. 2.2. *Préstamos con tipo de interés variable.* 2.2.1. Préstamos con términos amortizativos predeterminados. 2.2.2. Préstamos con términos amortizativos postdeterminados. 2.2.2.1. Préstamos con términos amortizativos postderminados y cuotas de amortización predeterminadas constantes. 2.2.2.2. Préstamos con términos amortizativos postderminados y cuotas de amortización postdeterminadas. 2.3. *Préstamos con tipo de interés mixto.*

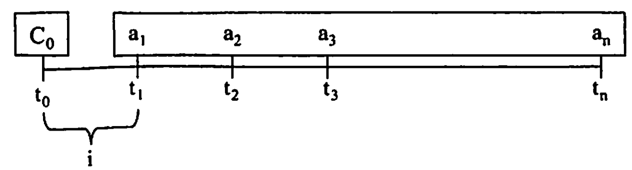
1. CONCEPTO DE PRÉSTAMO

Según el Prof. Gil Peláez[1] se definen las operaciones financieras de amortización de capital o préstamos como aquellas formadas por:

- Una prestación única: (C_0, t_0).
- Una contraprestación múltiple: $(a_1, t_1), (a_2, t_2), \ldots, (a_n, t_n)$, que tiene por finalidad reembolsar, amortizar o extinguir el capital inicial, (C_0, t_0).

Y según el Prof. González Catalá[1] se definen las operaciones financieras de amortización de capital o préstamos como aquellas en las que una persona, denominada prestamista, se compromete a entregar a otra persona, denominada prestatario, en un determinado momento, t_0, cierto capital, (C_0, t_0), que ésta se compromete a reembolsar en un período, (t_0, t_n), junto con los intereses que se han generado en la operación.

FIGURA 3.1. *Esquema de una operación financiera de amortización de capital o préstamo*



(1) Véase, al respecto, GONZÁLEZ CATALÁ, V. T. (1992), *Análisis de las Operaciones Financieras, Bancarias y Bursátiles*, Madrid, Ediciones Ciencias Sociales, pág. 121.

donde:

(C_0, t_0) : Prestación del prestamista, formada por el capital que entrega el prestamista al prestatario en el momento inicial de la operación.

C_0 : Cuantía de la prestación del prestamista.

t_0 : Momento o instante del tiempo en el que se hace efectiva la prestación del prestamista.

$(a_1, t_1), (a_2, t_2), \ldots, (a_n, t_n)$: Contraprestación del prestamista, formada por los términos amortizativos periódicos que recibe del prestatario.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$: Cuantías de los términos amortizativos que se componen de cuotas de interés y de cuotas de amortización, es decir: $a_k = I_k + M_k$

donde:

a_k : Término amortizativo correspondiente al periodo *k*.

I_k : Cuota de interés correspondiente al periodo *k*.

M_k : Cuota de amortización correspondiente al periodo *k*.

tal que:

$I_1 + I_2 + \ldots + I_n$ = Total de intereses generados en la operación.

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = C_0$$

$t_1, t_2, \ldots, t_n$: Instantes del tiempo en los que se hacen efectivos los términos amortizativos que el prestamista o acreedor recibe del prestatario o deudor.

i: Tipo de interés efectivo anual de la operación.

Por tanto, las operaciones financieras de amortización de capital o préstamos están constituidas por una prestación única y por una contraprestación múltiple, excepto cuando la amortización se efectúa mediante reembolso único ya que en este caso:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$$

$$a_n = C_n$$

con:

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$

2. TIPOS DE PRÉSTAMOS

Podemos clasificar los préstamos atendiendo a dos criterios:

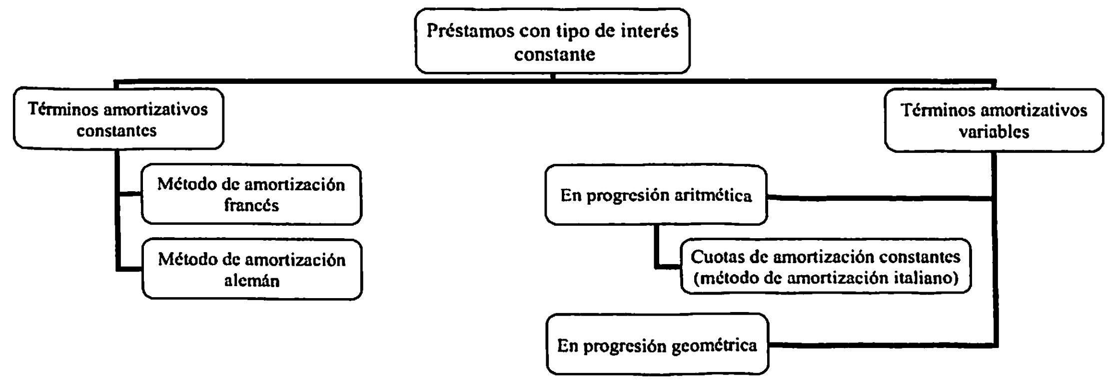
1) El tipo de interés a aplicar:
   - Préstamos con tipo de interés constante.
   - Préstamos con tipo de interés variable.
   - Préstamos con tipo de interés mixto.
2) El método de amortización utilizado:
   - Préstamos que se amortizan mediante términos amortizativos constantes.
   - Préstamos que se amortizan mediante términos amortizativos variables

- En progresión aritmética: como caso particular destacan los préstamos que se amortizan mediante cuotas de amortización constantes (método de amortización italiano).
- En progresión geométrica.

2.1. PRÉSTAMOS CON TIPO DE INTERÉS CONSTANTE

Los préstamos con tipo de interés constante son aquellos en los que el tipo de interés permanece constante durante toda la vida del préstamo. Según la dinámica amortizativa constituida por todos los flujos de capitales financieros que constituyen la contraprestación del prestamista, podemos distinguir los siguientes:

FIGURA 3.2. *Préstamos con tipo de interés constante*

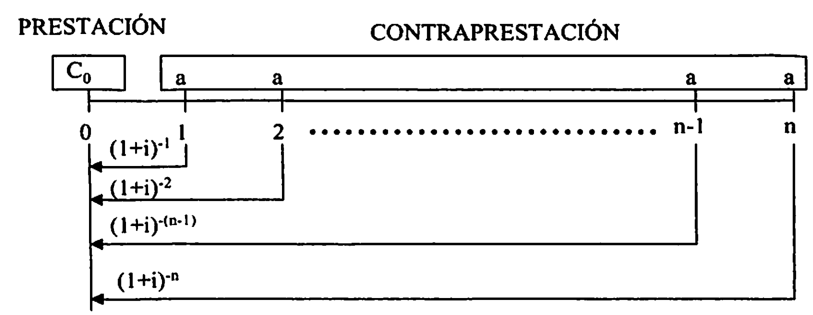


Se analizan a continuación estos préstamos de forma detallada desde el punto de vista financiero. Para ello deducimos la expresión de la equivalencia financiera en el origen para calcular los términos amortizativos, la relación entre las cuotas de amortización de dos periodos consecutivos, el capital pendiente al final de un periodo determinado y el capital amortizado hasta un periodo determinado.

2.1.1. Método de amortización francés

Son aquellas operaciones financieras de amortización de capital en las que el prestamista entrega una cuantía C_0 en un momento inicial al prestatario y éste se compromete a devolver el capital recibido mediante términos amortizativos constantes. El tipo de interés es constante durante toda la operación.

FIGURA 3.3. *Esquema de un préstamo amortizable por el método francés*



a) *Equivalencia financiera en el origen*

Si recurrimos al postulado de equivalencia financiera de capitales según el cual "toda operación financiera implica una existencia de una equivalencia financiera de las sumas de capitales respectivas de la prestación y de la contraprestación en base a una ley financiera previamente establecida"[2], la equivalencia en el origen de esta operación financiera consiste en igualar en dicho instante los capitales que integran la prestación del prestamista con los capitales que integran la contraprestación del prestamista, que son las siguientes:

- Prestación del prestamista: $(C_0, 0)$
- Contraprestación del prestamista: $(a,1),(a,2),\dots,(a,n)$

Por tanto,

$$C_0 = \frac{a}{1+i}+\frac{a}{(1+i)^2}+ \dots\dots\dots\dots + \frac{a}{(1+i)^n} = a\cdot\left(\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+ \dots\dots + \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

Teniendo en cuenta que la expresión que figura entre paréntesis constituye la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $r=(1+i)^{-1}$, cuyo valor se obtiene de:

$$S = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}$$

donde:

a_1 : Primer término de la progresión geométrica.

a_n : Último término de la progresión geométrica.

r : Razón de la progresión geométrica.

S : Suma de los términos de una progresión geométrica.

La equivalencia financiera en el origen se obtiene de:

$$C_0 = a\cdot\left(\frac{\dfrac{1}{1+i}-\dfrac{1}{(1+i)^n}\cdot\dfrac{1}{1+i}}{1-\dfrac{1}{1+i}}\right) = a\cdot\frac{1}{1+i}\cdot\left(\frac{1-\dfrac{1}{(1+i)^n}}{\dfrac{1+i-1}{1+i}}\right) = a\cdot\left(\frac{1-\dfrac{1}{(1+i)^n}}{i}\right)$$

$$\boldsymbol{C_0 = a\cdot a_{\overline{n|}i}}$$

b) *Relación entre las cuotas de amortización de dos periodos consecutivos k y $k+1$*

Una vez conocida la equivalencia financiera en el origen de este préstamo, se procede a encontrar una relación entre las cuotas de amortización de dos periodos consecutivos a partir de las estructuras de los términos amortizativos de esos periodos:

$$a = I_{k+1} + M_{k+1} = C_k \cdot i + M_{k+1}$$

$$a = I_k + M_k = C_{k-1}\cdot i + M_k$$

donde:

a: Términos amortizativos constantes.

(2) GIL PELÁEZ, L. (1982), *Matemática de las Operaciones Financieras*, Madrid, Editorial AC, pág. 48.

I_k: Cuota de interés correspondiente al periodo k.

M_k: Cuota de amortización correspondiente al periodo k.

C_k: Capital pendiente al final del periodo k.

i: Tipo de interés efectivo anual.

Se restan ambas ecuaciones y obtenemos:

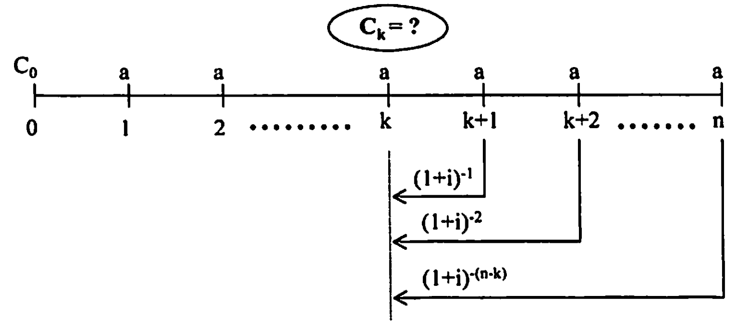
$$0 = (C_{k-1} - C_k)\cdot i + M_k - M_{k+1}$$

Teniendo en cuenta que $C_k = C_{k-1} - M_k$ se obtiene finalmente la relación entre las cuotas de amortización de dos periodos consecutivos como:

$$\boldsymbol{M_{k+1} = M_k\cdot(1+i)}$$

c) *Cálculo del capital pendiente al final de un periodo k*

FIGURA 3.4. *Esquema para el cálculo del capital pendiente de un préstamo amortizable por el método francés*



$$C_k = \frac{a}{1+i}+\frac{a}{(1+i)^2}+ \dots\dots\dots\dots + \frac{a}{(1+i)^{n-k}} = a\cdot\left(\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+ \dots\dots + \frac{1}{(1+i)^{n-k}}\right)$$

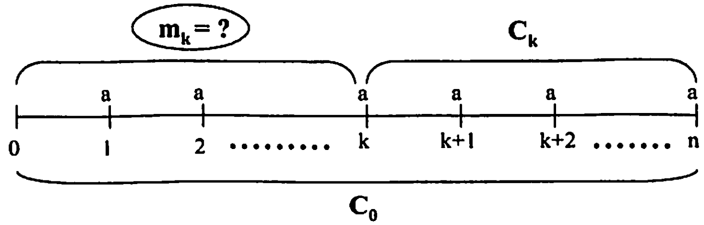
$$\boldsymbol{C_k = a\cdot a_{\overline{n-k|}i}}$$

O también como:

$$\boldsymbol{C_k = C_0 - m_k = M_{k+1} + M_{k+2} + \dots + M_n}$$

d) *Capital amortizado hasta un periodo determinado k*

FIGURA 3.5. *Esquema para el cálculo del capital amortizado hasta un periodo de un préstamo amortizable por el método francés*



$$\boldsymbol{m_k = C_0 - C_k}$$

También se puede obtener como:

$$m_k = M_1 + M_2 + \dots\dots + M_k = M_1 + M_1 \cdot (1+i) + M_1 \cdot (1+i)^2 + \dots\dots + M_1 \cdot (1+i)^{k-1} =$$

$$= M_1 \cdot \left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots\dots + (1+i)^{k-1}\right]$$

$$\boldsymbol{m_k = M_1 \cdot S_{\overline{k}|\,i}}$$

Como consecuencia se obtiene que:

$$\boldsymbol{C_0 = M_1 \cdot S_{\overline{n}|\,i}}$$

EJERCICIO 3.1.

Datos:

- Nominal del préstamo = C_0 = 60.000 euros.
- Tipo de interés efectivo anual = 3,5%
- Duración de la operación = 10 años.
- Método de amortización francés.

Cuestiones:

1) Cálculo de los términos amortizativos constantes.
2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.
3) Capital amortizado hasta el sexto año.
4) Cuadro de amortización.

Solución:

1) Cálculo de los términos amortizativos constantes:

Para calcular los términos amortizativos constantes aplicamos la expresión de la equivalencia financiera en el origen y obtenemos:

$$60.000 = a \cdot a_{\overline{10}|\,0{,}035} \Rightarrow a = \frac{60.000}{a_{\overline{10}|\,0{,}035}} = 7.214{,}48\ €$$

2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.

$$C_4 = a \cdot a_{\overline{10-4}|\,0{,}035} = 7.214{,}48 \cdot a_{\overline{6}|\,0{,}035} = 38.442{,}74\ €$$

3) Capital amortizado hasta el sexto año.

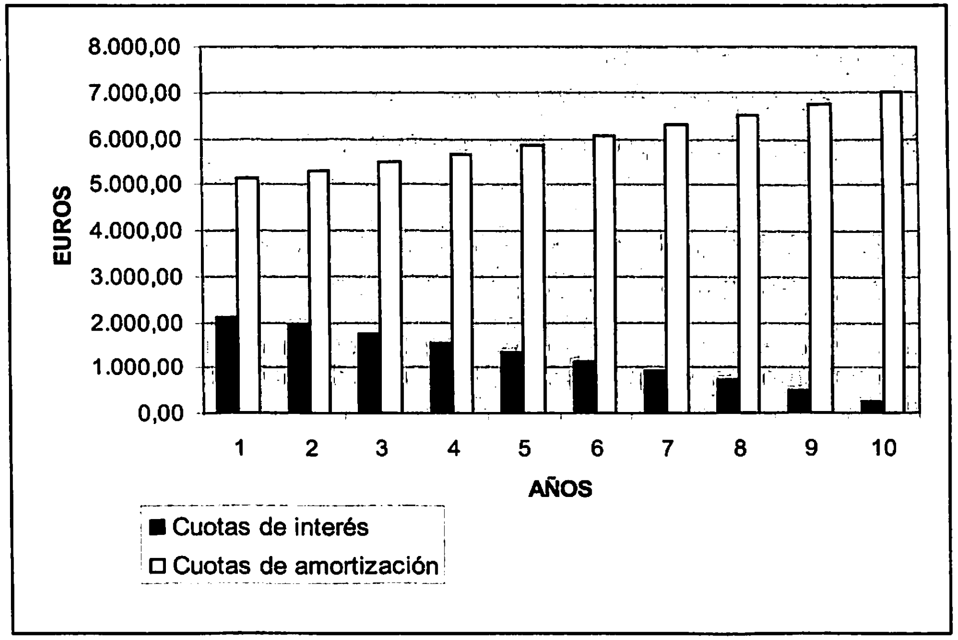
$$m_6 = C_0 - C_6 = 60.000 - 7.214{,}48 \cdot a_{\overline{10-6}|\,0{,}035} = 33.500{,}64\ €$$

4) Cuadro de amortización:

CUADRO 3.1. *Método de amortización francés*

n	a_k	I_k	M_k	m_k	C_k
0					60.000,00
1	7.214,48	2.100,00	5.114,48	5.114,48	54.885,52
2	7.214,48	1.920,99	5.293,49	10.407,97	49.592,03
3	7.214,48	1.735,72	5.478,76	15.886,73	44.113,27
4	7.214,48	1.543,96	5.670,52	21.557,25	38.442,75
5	7.214,48	1.345,50	5.868,99	27.426,24	32.573,76
6	7.214,48	1.140,08	6.074,40	33.500,64	26.499,36
7	7.214,48	927,48	6.287,00	39.787,64	20.212,36
8	7.214,48	707,43	6.507,05	46.294,69	13.705,31
9	7.214,48	479,69	6.734,80	53.029,49	6.970,51
10	7.214,48	243,97	6.970,51	60.000,00	0,00

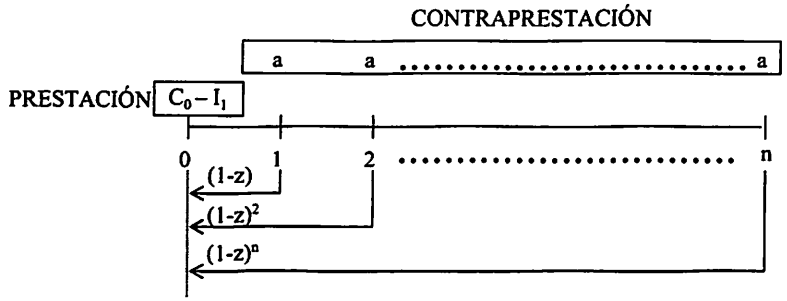
FIGURA 3.6. *Método de amortización francés*



2.1.2. Método de amortización alemán

Son aquellas operaciones financieras de amortización de capital en las que el prestamista entrega una cuantía C_0 en un momento inicial al prestatario y éste se compromete a devolver el capital recibido mediante términos amortizativos constantes pero con cuotas de interés prepagables. El tipo de interés anticipado es constante.

FIGURA 3.7. *Esquema de un préstamo amortizable por el método alemán*



a) *Equivalencia financiera en el origen*

Si recurrimos al postulado de equivalencia financiera de capitales según el cual "toda operación financiera implica una existencia de una equivalencia financiera de las sumas de capitales respectivas de la prestación y de la contraprestación en base a una ley financiera previamente establecida", la equivalencia en el origen de esta operación financiera consiste en igualar en dicho instante los capitales que integran la prestación del prestamista con los capitales que integran la contraprestación del prestamista, que son las siguientes:

- Prestación del prestamista: $(C_0 - I_1, 0)$
- Contraprestación del prestamista: $(a,1),(a,2),...,(a,n)$

Por tanto:

$$C_0 - I_1 = C_0 - C_0 \cdot z = C_0 \cdot (1-z) = a \cdot (1-z) + a \cdot (1-z)^2 + ... + a \cdot (1-z)^n$$

$$C_0 = a \cdot \left[1 + (1-z) + (1-z)^2 + ... + (1-z)^{n-1}\right]$$

Teniendo en cuenta que la expresión que figura entre corchetes constituye la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $r = 1 - z$, cuyo valor se obtiene de:

$$S = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$$

donde:

a_1 : Primer término de la progresión geométrica.

a_n : Último término de la progresión geométrica.

r : Razón de la progresión geométrica.

S : Suma de los términos de una progresión geométrica.

z : Tipo de interés efectivo anual anticipado.

La equivalencia financiera en el origen se obtiene finalmente de:

$$\boldsymbol{C_0 = a \cdot \left(\frac{1-(1-z)^{n-1} \cdot (1-z)}{1-(1-z)}\right) = a \cdot \frac{1-(1-z)^n}{z}}$$

b) *Relación entre las cuotas de amortización de dos periodos consecutivos k y $k+1$*

Una vez conocida la equivalencia financiera en el origen de este préstamo, se procede a encontrar una relación entre las cuotas de amortización de dos periodos consecutivos a partir de las estructuras de los términos amortizativos de esos periodos:

$$a = I_k^* + M_k = C_k \cdot z + M_k$$

$$a = I_{k+1}^* + M_{k+1} = C_{k+1} \cdot z + M_{k+1}$$

donde:

a : Términos amortizativos constantes.

I_k^* : Cuota de interés correspondiente al periodo k.

M_k : Cuota de amortización correspondiente al periodo k.

C_k : Capital pendiente al final del periodo k.

z : Tipo de interés efectivo anual anticipado.

Se restan ambas ecuaciones y obtenemos:

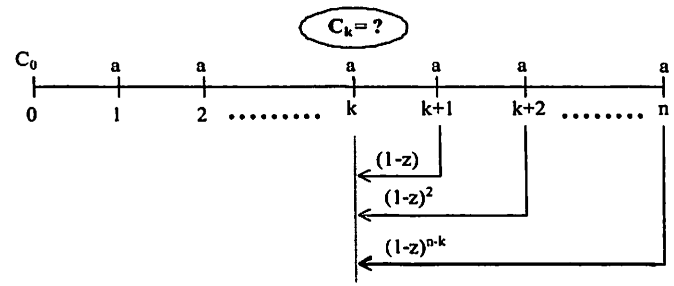
$$0 = (C_k - C_{k+1}) \cdot z + M_k - M_{k+1}$$

Teniendo en cuenta que $C_k = C_{k-1} - M_k$ se obtiene finalmente la relación entre las cuotas de amortización de dos periodos consecutivos como:

$$\boldsymbol{M_k = M_{k+1} \cdot (1-z)}$$

c) *Cálculo del capital pendiente al final de un periodo k*

FIGURA 3.8. *Esquema para el cálculo del capital pendiente de un préstamo amortizable por el método alemán*



$$C_k \cdot (1-z) = a \cdot (1-z) + a \cdot (1-z)^2 + ... + a \cdot (1-z)^{n-k}$$

$$C_k = a \cdot \left[1 + (1-z) + (1-z)^2 + ... + (1-z)^{n-k-1}\right]$$

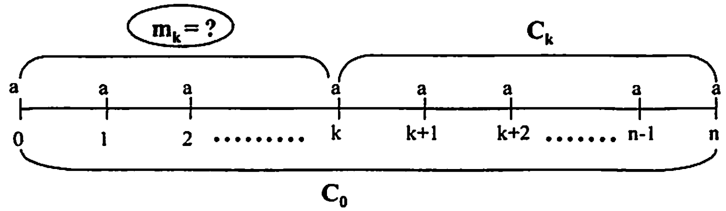
$$\boldsymbol{C_k = a \cdot \frac{1-(1-z)^{n-k}}{z}}$$

O también como:

$$\boldsymbol{C_k = C_0 - m_k = M_{k+1} + M_{k+2} + ... + M_n}$$

d) *Capital amortizado hasta un periodo determinado k*

FIGURA 3.9. *Esquema para el cálculo del capital amortizado hasta un periodo de un préstamo amortizable por el método alemán*



$$m_k = C_0 - C_k$$

EJERCICIO 3.2.

Datos:

- Nominal del préstamo = C_0 = 60.000 euros.
- Tipo de interés efectivo anual anticipado = 3,5%
- Duración de la operación = 10 años.
- Método de amortización alemán.

Cuestiones:

1) Cálculo de los términos amortizativos constantes.
2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.
3) Capital amortizado hasta el sexto año.
4) Cuadro de amortización.

Solución:

1) Cálculo de los términos amortizativos constantes:

Para calcular los términos amortizativos constantes aplicamos la expresión de la equivalencia financiera en el origen y obtenemos:

$$60.000 = a \cdot \frac{1-(1-0,035)^{10}}{0,035} \Rightarrow a = \frac{60.000 \cdot 0,035}{1-(1-0,035)^{10}} = 7.006,59 \text{ €}$$

2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.

$$C_4 = a \cdot \frac{1-(1-0,035)^{10-4}}{0,035} = 7.006,59 \cdot \frac{1-(1-0,035)^{6}}{0,035} = 38.528,30 \text{ €}$$

3) Capital amortizado hasta el sexto año.

$$m_6 = C_0 - C_6 = 60.000 - 7.006,59 \cdot \frac{1-(1-0,035)^{4}}{0,035} = 33.410,99 \text{ €}$$

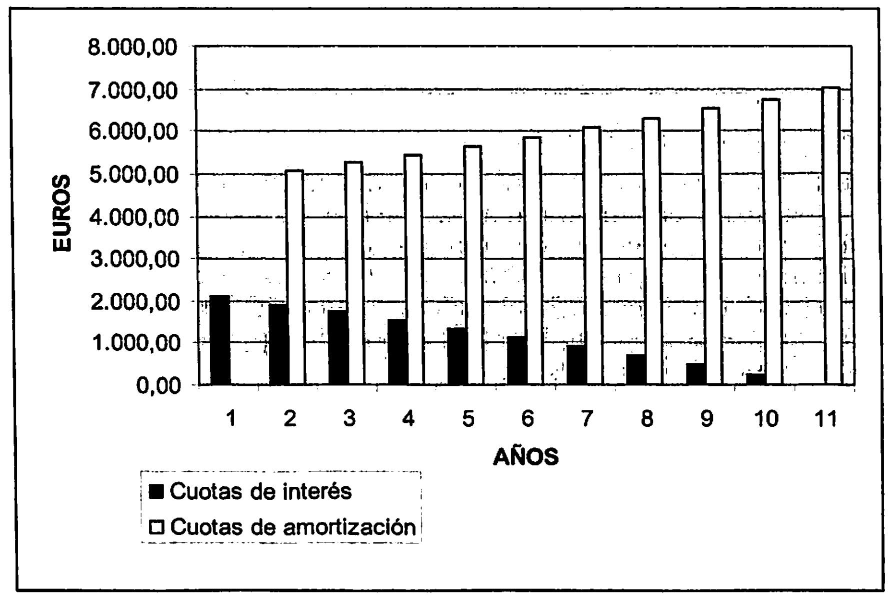
4) Cuadro de amortización:

Cuando el tipo de interés es anticipado es más fácil construir el cuadro de amortización comenzando por el último año.

CUADRO 3.2. *Método de amortización alemán*

n	a_k	I_k	M_k	m_k	C_k
0	2.100,00	2.100,00			60.000,00
1	7.006,59	1.922,04	5.084,55	5.084,55	54.915,45
2	7.006,59	1.737,63	5.268,97	10.353,52	49.646,48
3	7.006,59	1.546,52	5.460,07	15.813,59	44.186,41
4	7.006,59	1.348,49	5.658,10	21.471,69	38.528,31
5	7.006,59	1.143,27	5.863,32	27.335,01	32.664,99
6	7.006,59	930,62	6.075,98	33.410,98	26.589,02
7	7.006,59	710,24	6.296,35	39.707,33	20.292,67
8	7.006,59	481,88	6.524,71	46.232,05	13.767,95
9	7.006,59	245,23	6.761,36	52.993,41	7.006,59
10	7.006,59	0,00	7.006,59	60.000,00	0,00

FIGURA 3.10. *Método de amortización alemán*



2.1.3. Método de amortización mediante términos amortizativos variables en progresión aritmética

Son aquellas operaciones financieras de amortización de capital en las que el prestamista entrega una cuantía C_0 en un momento inicial al prestatario y éste se compromete a devolver el capital recibido mediante términos amortizativos variables en progresión aritmética, es decir:

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2 \cdot d$$

....

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d$$

donde:

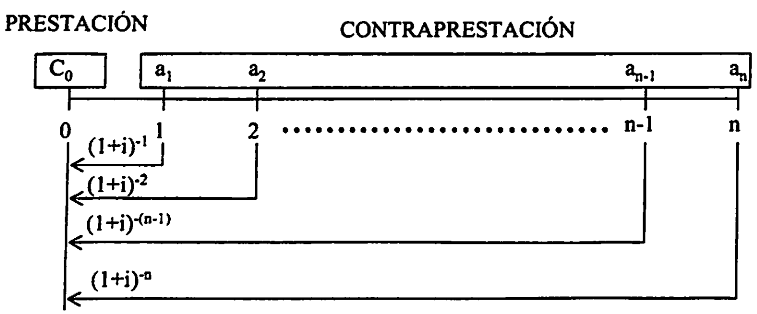
d: Razón de la progresión aritmética, que puede tomar los siguientes valores:

$d > 0 \Rightarrow$ Progresión aritmética creciente.

$d < 0 \Rightarrow$ Progresión aritmética decreciente.

i: Tipo de interés constante.

FIGURA 3.11. *Esquema de un préstamo amortizable mediante términos amortizativos variables en progresión aritmética*



a) *Equivalencia financiera en el origen*

Si recurrimos al postulado de equivalencia financiera de capitales según el cual "toda operación financiera implica una existencia de una equivalencia financiera de las sumas de capitales respectivas de la prestación y de la contraprestación en base a una ley financiera previamente establecida", la equivalencia en el origen de esta operación financiera consiste en igualar en dicho instante los capitales que integran la prestación del prestamista con los capitales que integran la contraprestación del prestamista, que son las siguientes:

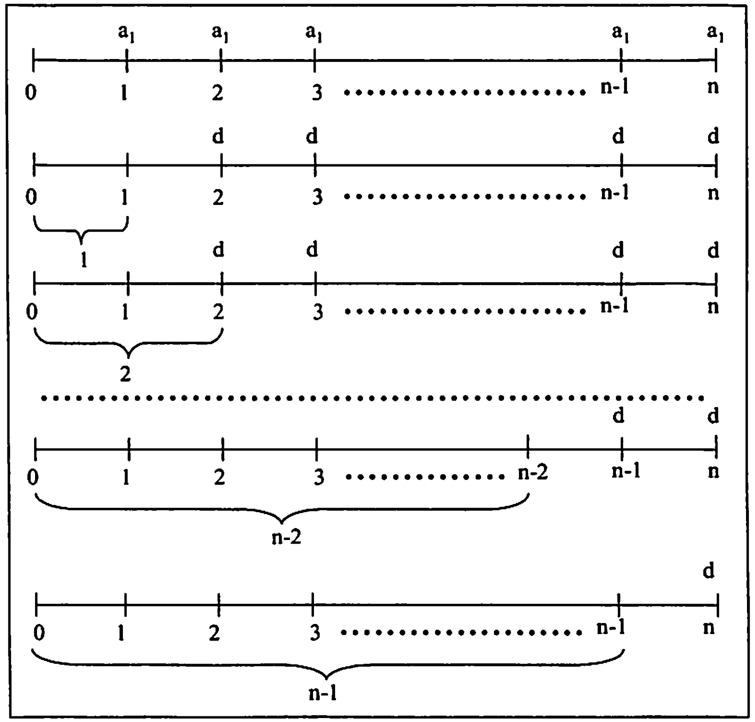
- Prestación del prestamista: $(C_0, 0)$
- Contraprestación del prestamista: $(a_1,1),(a_2,2),...,(a_n,n)$

Para obtener la equivalencia financiera en el origen descomponemos la renta variable en n rentas constantes que constituyen la contraprestación del prestamista, hallamos el valor actual de todas ellas y su suma será igual a la prestación del prestamista o C_0.

Las n rentas constantes son las siguientes:

- Una renta de n términos de cuantía a_1.
- Una renta de n–1 términos de cuantía d y diferida un periodo.
- Una renta de n–2 términos de cuantía d y diferida dos periodos.
- Una renta de un término de cuantía d y diferida n–1 periodos.

FIGURA 3.12. *Descomposición de una renta variable en progresión aritmética en n rentas constantes*



$$C_0 = a_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + 1/d \cdot a_{\overline{n-1}|i} + 2/d \cdot a_{\overline{n-2}|i} + ... + n-1/d \cdot a_{\overline{1}|i} = a_1 \cdot a_{\overline{n}|i} +$$

$$+d \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} \cdot (1+i)^{-1} + d \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-2)}}{i} \cdot (1+i)^{-2} + ... + d \cdot \frac{1-(1+i)^{-1}}{i} \cdot (1+i)^{-(n-1)} =$$

$$= a_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i} \cdot \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + ... + (1+i)^{-(n-1)} - (n-1) \cdot (1+i)^{-n}\right] =$$

$$= a_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i} \cdot \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + ... + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n} - n \cdot (1+i)^{-n}\right] =$$

$$= a_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i} \cdot \left[a_{\overline{n}|i} - n \cdot (1+i)^{-n}\right] = \left[a_1 + \frac{d}{i}\right] \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{d \cdot n}{i} \cdot (1+i)^{-n}$$

Si sumamos y restamos a esta última expresión $\frac{d \cdot n}{i}$:

$$\left[a_1 + \frac{d}{i}\right] \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{d \cdot n}{i} \cdot (1+i)^{-n} + \frac{d \cdot n}{i} - \frac{d \cdot n}{i} = \left[a_1 + \frac{d}{i}\right] \cdot a_{\overline{n}|i} + d \cdot n \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{d \cdot n}{i}$$

Finalmente se obtiene la expresión de la equivalencia financiera en el origen:

$$\boldsymbol{C_0 = \left(a_1 + \frac{d}{i} + d \cdot n\right) \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{d \cdot n}{i}}$$

donde:

a_1: Término amortizativo correspondiente al primer periodo.

d : Razón en la que varían los términos amortizativos.

n : Duración de la operación.

i : Tipo de interés efectivo anual.

b) *Relación entre las cuotas de amortización de dos periodos consecutivos k y $k+1$*

Una vez conocida la equivalencia financiera en el origen de este préstamo, se procede a encontrar una relación entre las cuotas de amortización de dos periodos consecutivos a partir de las ecuaciones de los términos amortizativos de esos periodos, k y $k+1$:

$$a_k = I_k + M_k = C_{k-1} \cdot i + M_k$$

$$a_{k+1} = I_{k+1} + M_{k+1} = C_k \cdot i + M_{k+1}$$

donde:

a_k : Término amortizativo correspondiente al periodo k.

I_k : Cuota de interés correspondiente al periodo k.

M_k : Cuota de amortización correspondiente al periodo k.

C_k : Capital pendiente al final del periodo k.

i : Tipo de interés efectivo anual.

Se restan ambas ecuaciones y obtenemos:

$$a_k - a_{k+1} = (C_{k-1} - C_k) \cdot i + M_k - M_{k+1}$$

Teniendo en cuenta que:

$$a_{k+1} - a_k = d$$

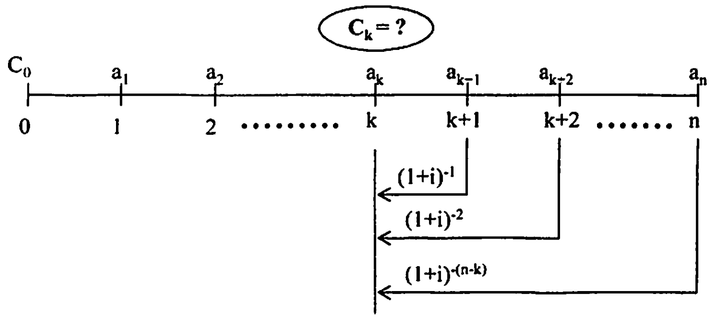
$$C_k = C_{k-1} - M_k$$

se obtiene finalmente la relación entre las cuotas de amortización de dos periodos consecutivos:

$$\boldsymbol{M_{k+1} = M_k(1+i) + d}$$

c) *Cálculo del capital pendiente al final de un periodo k*

FIGURA 3.13. *Esquema para el cálculo del capital pendiente de un préstamo amortizable mediante términos amortizativos variables en progresión aritmética*



$$C_k = \frac{a_{k+1}}{1+i} + \frac{a_{k+2}}{(1+i)^2} + \dots\dots\dots + \frac{a_n}{(1+i)^{n-k}}$$

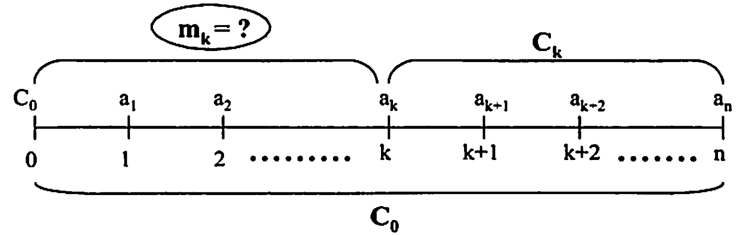
$$C_k = \left(a_{k+1} + \frac{d}{i} + d \cdot (n-k)\right) \cdot a_{\overline{n-k}|i} - \frac{d \cdot (n-k)}{i}$$

O también:

$$C_k = C_0 - m_k = M_{k+1} + M_{k+2} + \dots + M_n$$

d) *Capital amortizado hasta un periodo determinado k*

FIGURA 3.14. *Esquema para el cálculo del capital amortizado hasta un periodo de un préstamo amortizable mediante términos amortizativos variables en progresión aritmética*



$$m_k = C_0 - C_k$$

EJERCICIO 3.3.

Datos:

- Nominal del préstamo = C_0 = 60.000 euros.
- Tipo de interés efectivo anual = 3,5%
- Duración de la operación = 10 años.
- Método de amortización mediante términos amortizativos variables en progresión aritmética de razón 100 euros.

Cuestiones:

1) Cálculo de los términos amortizativos constantes.
2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.
3) Capital amortizado hasta el sexto año.
4) Cuadro de amortización.

Solución:

1) Cálculo de los términos amortizativos.

Para calcular los términos amortizativos aplicamos la expresión de la equivalencia financiera en el origen y obtenemos:

$$60.000 = \left(a_1 + \frac{100}{0,035} + 100 \cdot 10\right) \cdot a_{\overline{10}|0,035} - \frac{100 \cdot 10}{0,035}$$

$$a_1 = 6.792,81\ €$$

$$a_2 = a_1 + 100 = 6.792,81 + 100 = 6.892,81\ €$$

$$a_3 = a_2 + 100 = 6.892,81 + 100 = 6.992,81\ €$$

....

$$a_{10} = a_1 + 9 \cdot 100 = 6.792,81 + 900 = 7.692,81\ €$$

2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.

$$C_4 = \left(a_5 + \frac{100}{0,035} + 100 \cdot (10-4)\right) \cdot a_{\overline{10-4}|0,035} - \frac{100 \cdot (10-4)}{0,035}$$

donde:

$$a_5 = 6.792,81 + 4 \cdot 100 = 7.192,81\ €$$

Por tanto:

$$C_4 = \left(7.192,81 + \frac{100}{0,035} + 100 \cdot 6\right) \cdot a_{\overline{6}|0,035} - \frac{100 \cdot 6}{0,035} = 39.605,98\ €$$

3) Capital amortizado hasta el sexto año.

$$m_6 = C_0 - C_6 = 60.000 - 27.689,55 = 32.310,45\ €$$

donde:

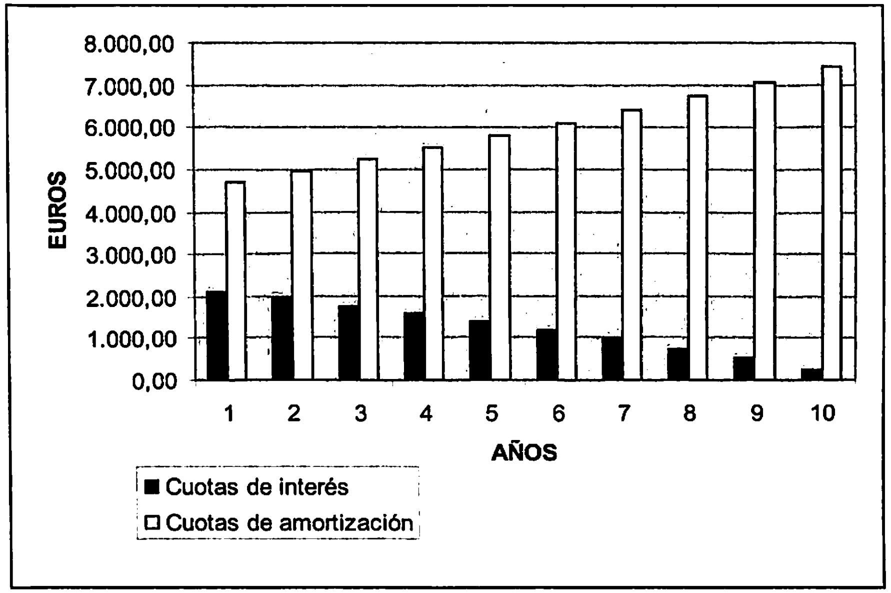
$$C_6 = \left(7.392,81 + \frac{100}{0,035} + 100 \cdot 4\right) \cdot a_{\overline{4}|0,035} - \frac{100 \cdot 4}{0,035} = 27.689,55\ €$$

4) Cuadro de amortización:

CUADRO 3.3. *Método de amortización mediante términos amortizativos variables en progresión aritmética*

n	a_k	I_k	M_k	m_k	C_k
0					60.000,00
1	6.792,81	2.100,00	4.692,81	4.692,81	55.307,19
2	6.892,81	1.935,75	4.957,06	9.649,86	50.350,14
3	6.992,81	1.762,25	5.230,55	14.880,41	45.119,59
4	7.092,81	1.579,19	5.513,62	20.394,04	39.605,96
5	7.192,81	1.386,21	5.806,60	26.200,63	33.799,37
6	7.292,81	1.182,98	6.109,83	32.310,46	27.689,54
7	7.392,81	969,13	6.423,67	38.734,14	21.265,86
8	7.492,81	744,31	6.748,50	45.482,64	14.517,36
9	7.592,81	508,11	7.084,70	52.567,34	7.432,66
10	7.692,81	260,14	7.432,66	60.000,00	0,00

FIGURA 3.15. *Método de amortización mediante términos amortizativos variables en progresión aritmética*



Dentro de estos préstamos que se amortizan mediante rentas variables en progresión aritmética se encuentra un caso particular, conocido como *método italiano*, caracterizado porque las cuotas de amortización son constantes en todos los periodos, es decir:

$$M_1 = M_2 = ... = M_n = M$$

a) *Cálculo de las cuotas de amortización constantes*

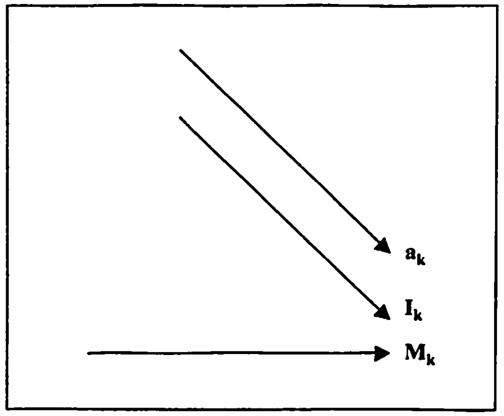
La suma de todas las cuotas de amortización tiene que ser igual al capital prestado. En este caso:

$$C_0 = M_1 + M_2 + ... + M_n = n \cdot M \Rightarrow \boldsymbol{M = \frac{C_0}{n}}$$

b) *Razón en la que varían los términos amortizativos y las cuotas de interés k y $k+1$*

Las cuotas de interés son decrecientes ya que el capital pendiente a medida que transcurre el plazo es menor y las cuotas de amortización son constantes. Los términos amortizativos tienen que decrecer en la misma proporción que las cuotas de interés, razón que se obtiene de restar las expresiones que proporcionan los términos amortizativos de dos periodos consecutivos, k y $k+1$:

FIGURA 3.16. *Variación de los términos amortizativos y sus componentes en el método italiano*



$$a_k = I_k + M_k = C_{k-1} \cdot i + M$$

$$a_{k+1} = I_{k+1} + M_{k+1} = C_k \cdot i + M$$

$$a_{k+1} - a_k = (C_k - C_{k-1}) \cdot i = -M \cdot i$$

Teniendo en cuenta que:

$$C_k = C_{k-1} - M_k$$

$$a_{k+1} - a_k = d$$

se obtiene finalmente la razón de la progresión aritmética, *d*, en que decrecen tanto los términos amortizativos como las cuotas de interés:

$$\boldsymbol{d = -M \cdot i = \frac{-C_0 \cdot i}{n}}$$

c) *Cálculo del capital pendiente al final de un periodo k*

$$\boldsymbol{C_k = (n-k) \cdot M = (n-k) \cdot \frac{C_0}{n}}$$

d) *Capital amortizado hasta un periodo determinado k*

$$\boldsymbol{m_k = k \cdot M = k \cdot \frac{C_0}{n}}$$

EJERCICIO 3.4.

Datos:

- Nominal del préstamo = C_0 = 60.000 euros.
- Tipo de interés efectivo anual = 3,5%

- Duración de la operación = 10 años.
- Método de amortización italiano.

Cuestiones:

1) Cálculo de los términos amortizativos.
2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.
3) Capital amortizado hasta el sexto año.
4) Cuadro de amortización.

Solución:

1) Cálculo de los términos amortizativos.

   Para calcular los términos amortizativos hallamos previamente las cuotas de amortización constantes:

$$M = \frac{60.000}{10} = 6.000 \text{ €}$$

$$a_1 = I_1 + M = C_0 \cdot i + M = 60.000 \cdot 0,035 + 6.000 = 8.100 \text{ €}$$

$$a_2 = I_2 + M = C_1 \cdot i + M = (60.000 - 6.000) \cdot 0,035 + 6.000 = 7.890 \text{ €}$$

....

$$a_{10} = I_{10} + M = C_9 \cdot i + M = 6.000 \cdot 0,035 + 6.000 = 6.210 \text{ €}$$

2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.

$$C_4 = (10-4) \cdot 6.000 = 36.000 \text{ €}$$

3) Capital amortizado hasta el sexto año.

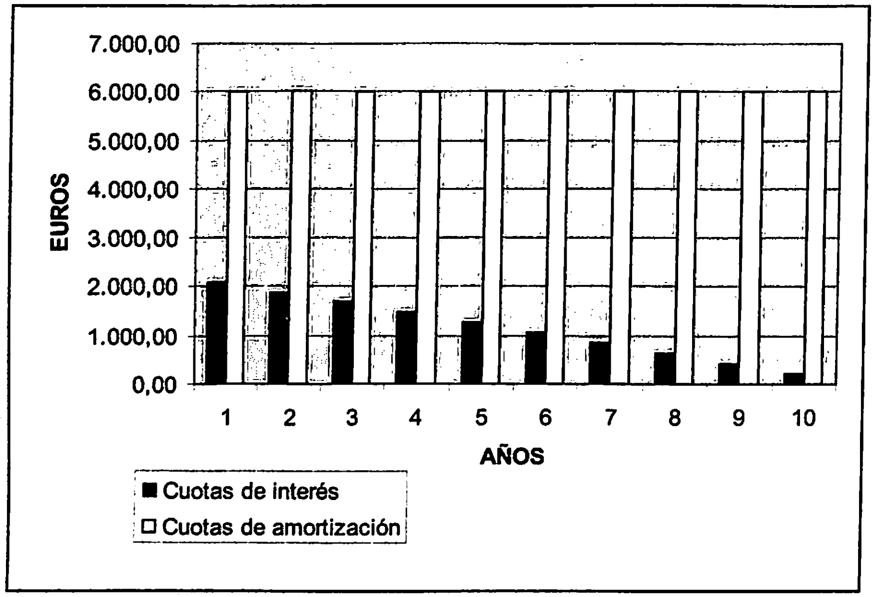
$$m_6 = 6 \cdot 6.000 = 36.000 \text{ €}$$

4) Cuadro de amortización:

CUADRO 3.4. *Método de amortización italiano*

n	a_k	I_k	M_k	m_k	C_k
0					60.000,00
1	8.100,00	2.100,00	6.000,00	6.000,00	54.000,00
2	7.890,00	1.890,00	6.000,00	12.000,00	48.000,00
3	7.680,00	1.680,00	6.000,00	18.000,00	42.000,00
4	7.470,00	1.470,00	6.000,00	24.000,00	36.000,00
5	7.260,00	1.260,00	6.000,00	30.000,00	30.000,00
6	7.050,00	1.050,00	6.000,00	36.000,00	24.000,00
7	6.840,00	840,00	6.000,00	42.000,00	18.000,00
8	6.630,00	630,00	6.000,00	48.000,00	12.000,00
9	6.420,00	420,00	6.000,00	54.000,00	6.000,00
10	6.210,00	210,00	6.000,00	60.000,00	0,00

FIGURA 3.17. *Método de amortización italiano*



2.1.4. Método de amortización mediante términos amortizativos variables en progresión geométrica

Son aquellas operaciones financieras de amortización de capital en las que el prestamista entrega una cuantía C_0 en un momento inicial al prestatario y éste se compromete a devolver el capital recibido mediante términos amortizativos variables en progresión geométrica y con un tipo de interés constante, es decir:

$$a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
....
$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

donde:

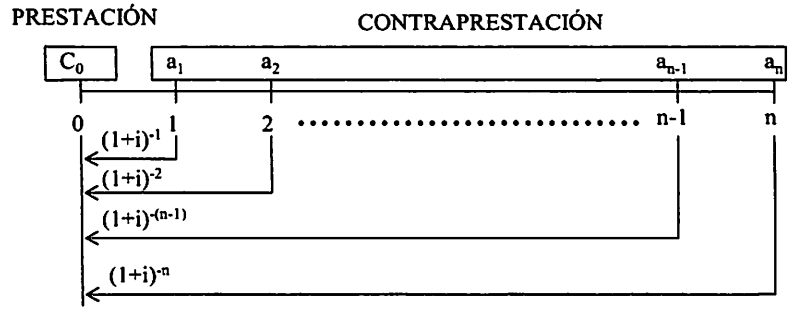
q: Razón de la progresión geométrica, que puede tomar los siguientes valores:

$0 < q < 1 \Rightarrow$ Progresión geométrica decreciente.

$q > 1 \Rightarrow$ Progresión geométrica creciente.

i: Tipo de interés constante.

FIGURA 3.18. *Esquema de un préstamo amortizable mediante términos amortizativos variables en progresión geométrica*



a) *Equivalencia financiera en el origen*

Si recurrimos al postulado de equivalencia financiera de capitales según el cual "toda operación financiera implica una existencia de una equivalencia financiera de las sumas de capitales respectivas de la prestación y de la contraprestación en base a una ley financiera previamente establecida", la equivalencia en el origen de esta operación financiera consiste en igualar en dicho instante los capitales que integran la prestación del prestamista con los capitales que integran la contraprestación del prestamista, que son las siguientes:

- Prestación del prestamista: $(C_0, 0)$
- Contraprestación del prestamista: $(a_1,1),(a_2,2),\ldots,(a_n,n)$

Por tanto:

$$C_0 = \frac{a_1}{1+i} + \frac{a_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(1+i)^n} = \frac{a_1}{1+i} + \frac{a_1 \cdot q}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{a_1 \cdot q^{n-1}}{(1+i)^n} =$$
$$= a_1 \cdot \left[\frac{1}{1+i} + \frac{q}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{q^{n-1}}{(1+i)^n}\right]$$

La expresión entre corchetes es una progresión geométrica de razón $\frac{q}{1+i}$. Por tanto, aplicamos la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica y obtenemos:

$$C_0 = a_1 \cdot \left[\frac{1}{1+i} + \frac{q}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{q^{n-1}}{(1+i)^n}\right] = a_1 \cdot \frac{\frac{1}{1+i} - \frac{q^{n-1}}{(1+i)^n} \cdot \frac{q}{1+i}}{1 - \frac{q}{1+i}} = a_1 \cdot \frac{\frac{1}{1+i} \cdot \left(1 - \frac{q^n}{(1+i)^n}\right)}{\frac{1+i-q}{1+i}}$$

$$\mathbf{C_0 = a_1 \cdot \frac{1 - \frac{q^n}{(1+i)^n}}{1+i-q}}$$

donde:

a_1 : Término amortizativo correspondiente al primer periodo.

q : Razón en la que varían los términos amortizativos.

n : Duración de la operación.

i : Tipo de interés efectivo anual.

b) *Relación entre las cuotas de amortización de dos periodos consecutivos k y $k+1$.*

Una vez conocida la equivalencia financiera en el origen de este préstamo, se procede a encontrar una relación entre las cuotas de amortización de dos periodos consecutivos a partir de las ecuaciones de los términos amortizativos de esos periodos, k y $k+1$:

$$a_k = I_k + M_k = C_{k-1} \cdot i + M_k$$

$$a_{k+1} = I_{k+1} + M_{k+1} = C_k \cdot i + M_{k+1}$$

donde:

a_k : Término amortizativo correspondiente al periodo k.
I_k : Cuota de interés correspondiente al periodo k.
M_k : Cuota de amortización correspondiente al periodo k.
C_k : Capital pendiente al final del periodo k.
i : Tipo de interés efectivo anual.

Se restan ambas ecuaciones y obtenemos:

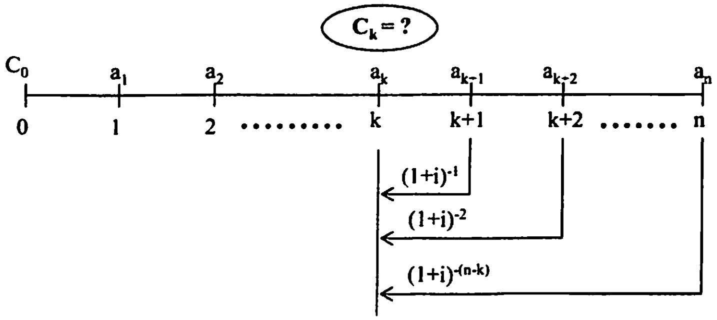
$$a_k - a_{k+1} = (C_{k-1} - C_k) \cdot i + M_k - M_{k+1}$$

Teniendo en cuenta que $C_k = C_{k-1} - M_k$ se obtiene finalmente la relación entre las cuotas de amortización de dos periodos consecutivos:

$$\mathbf{M_{k+1} = M_k(1+i) + a_{k+1} - a_k}$$

c) *Cálculo del capital pendiente al final de un periodo k*

FIGURA 3.19. *Esquema para el cálculo del capital pendiente de un préstamo amortizable mediante términos amortizativos variables en progresión geométrica*



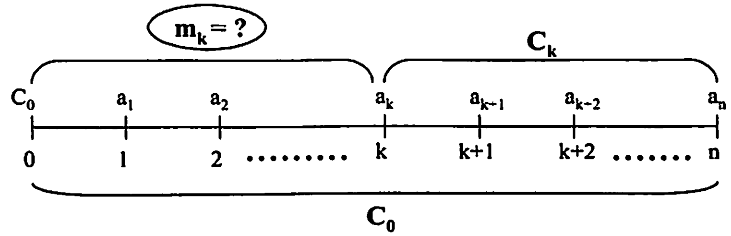
$$C_k = \frac{a_{k+1}}{1+i} + \frac{a_{k+2}}{(1+i)^2} + \ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{a_n}{(1+i)^{n-k}} \Rightarrow \mathbf{C_k = a_{k+1} \cdot \frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^{n-k}}{1+i-q}}$$

O también:

$$\mathbf{C_k = C_0 - m_k = M_{k+1} + M_{k+2} + \ldots + M_n}$$

d) *Capital amortizado hasta un periodo determinado k*

FIGURA 3.20. *Esquema para el cálculo del capital amortizado hasta un periodo de un préstamo amortizable mediante términos amortizativos variables en progresión geométrica*



$$\mathbf{m_k = C_0 - C_k}$$

EJERCICIO 3.5.

Datos:

- Nominal del préstamo = C_0 = 60.000 euros.
- Tipo de interés efectivo anual = 3,5%
- Duración de la operación = 10 años.
- Método de amortización mediante términos amortizativos variables en progresión geométrica de forma que cada término se incrementa en un 10% sobre el término del periodo anterior.

Cuestiones:

1) **Cálculo de los términos amortizativos.**
2) **Capital pendiente transcurridos cuatro años.**
3) **Capital amortizado hasta el sexto año.**
4) **Cuadro de amortización.**

Solución:

1) **Cálculo de los términos amortizativos.**

Para calcular los términos amortizativos aplicamos la expresión de la equivalencia financiera en el origen y obtenemos:

$$60.000 = a_1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1,10}{1,035}\right)^{10}}{1+0,035-1,10}$$

$$a_1 = 4.649,76\ €$$

$$a_2 = 4.649,76 \cdot 1,10 = 5.114,74\ €$$

....

$$a_{10} = 4.649,76 \cdot 1,10^9 = 10.963,89\ €$$

2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.

$$C_4 = a_5 \cdot \frac{1-\left(\frac{1,10}{1,035}\right)^6}{1+0,035-1,10}$$

donde:

$a_5 = 4.649,76 \cdot 1,10^4 = 6.807,71$ €

Por tanto:

$$C_4 = 6.807,71 \cdot \frac{1-\left(\frac{1,10}{1,035}\right)^6}{1+0,035-1,10} = 46.205,11 \text{ €}$$

3) Capital amortizado hasta el sexto año.

$m_6 = C_0 - C_6 = 60.000 - 34.961,60 = 25.038,40$ €

donde:

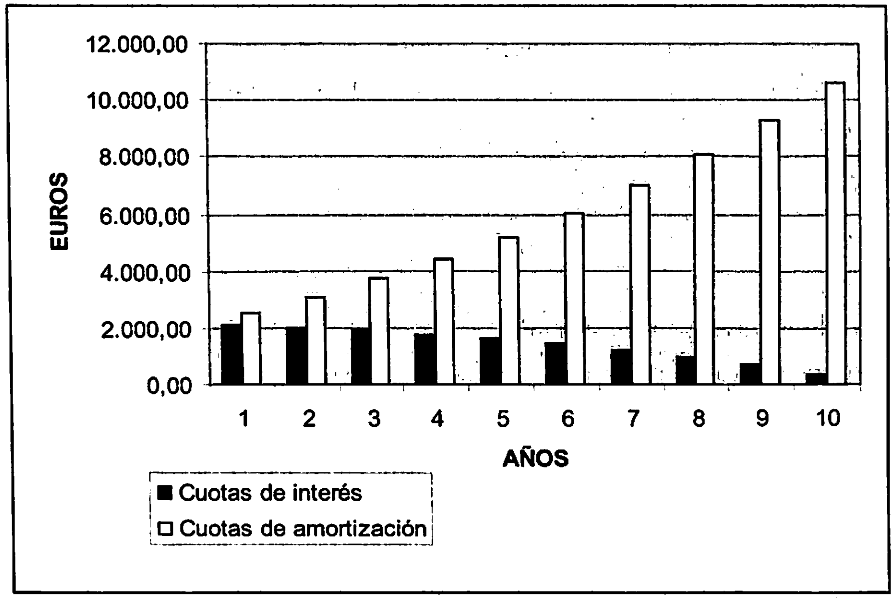
$$C_6 = 8.237,33 \cdot \frac{1-\left(\frac{1,10}{1,035}\right)^4}{1+0,035-1,10} = 34.961,60 \text{ €}$$

4) Cuadro de amortización:

CUADRO 3.5. *Método de amortización mediante términos amortizativos variables en progresión geométrica*

n	a_k	I_k	M_k	m_k	C_k
0					60.000,00
1	4.649,76	2.100,00	2.549,76	2.549,76	57.450,24
2	5.114,74	2.010,76	3.103,98	5.653,74	54.346,26
3	5.626,21	1.902,12	3.724,09	9.377,83	50.622,17
4	6.188,83	1.771,78	4.417,06	13.794,89	46.205,11
5	6.807,71	1.617,18	5.190,54	18.985,42	41.014,58
6	7.488,49	1.435,51	6.052,98	25.038,40	34.961,60
7	8.237,33	1.223,66	7.013,68	32.052,08	27.947,92
8	9.061,07	978,18	8.082,89	40.134,97	19.865,03
9	9.967,18	695,28	9.271,90	49.406,87	10.593,13
10	10.963,89	370,76	10.593,13	60.000,00	0,00

FIGURA 3.21. *Método de amortización mediante términos amortizativos variables en progresión geométrica*



2.2. PRÉSTAMOS CON TIPO DE INTERÉS VARIABLE

Los préstamos con tipo de interés variable[3] son aquellos en los que el tipo de interés no permanece fijo durante todo el horizonte temporal de la operación.

Se distinguen las siguientes modalidades de préstamos con tipo de interés variable[4]:

- *Préstamos predeterminados o definidos a priori:* Son aquellos en los que los tipos de interés a aplicar, la duración de la operación y la cuantía de los términos amortizativos se conocen al inicio de la operación.
- *Préstamos posdeterminados o definidos ex post:* Son aquellos en los que los tipos de interés no quedan determinados al inicio de la operación, por lo que se desconocen bien las cuantías de los términos amortizativos o bien la duración de la operación.
  - ➢ Los tipos de interés se fijan periodo a periodo.
  - ➢ Préstamos a tipos de interés referenciados o indiciados: Son aquellos en los que la ley de variabilidad de los tipos de interés se establece al inicio de la operación.

Se analizan a continuación los préstamos a tipos de interés referenciados o indiciados por ser los más utilizados tanto a nivel nacional como internacional. Estos préstamos surgen en la década de los ochenta debido a las elevadas tasas de inflación

(3) Para un análisis detallado de los préstamos con tipo de interés variable véase: GONZÁLEZ VELASCO, M.ª del C. (2000), *Análisis financiero de los préstamos hipotecarios*, Colección Arithmós de Economía, núm. 1, Secretariado de Publicaciones y Medios Audiovisuales, Universidad de León, págs. 40-84.

(4) Véase, al respecto, GARCÍA BOZA, J. Y CÁCERES APOLINARIO, R. M. (1998), "Préstamos hipotecarios: Análisis financiero", *Actualidad Financiera*, noviembre, págs. 35-49.

y a la volatilidad de los tipos de interés. Por el lado de la demanda, permiten a los prestatarios beneficiarse de las bajadas de los tipos de interés y mantener los costes financieros adaptados a la evolución del mercado y por el lado de la oferta, las entidades financieras encuentran en estas operaciones financieras una forma más idónea para cubrirse de los riesgos, sobre todo, del riesgo de interés.

El tipo de interés aplicable en cada periodo se puede calcular como:

$$i = I_r + m + \delta$$

$$i = x \cdot I_r$$

$$i = I + m_r + \delta$$

donde:

I_r : Tipo de interés de referencia[5].

m : Margen constante (positivo, nulo o negativo). En el primer periodo no se solía aplicar con la finalidad de captar más clientela.

m_r: Margen variable igual a la variación absoluta (positiva, nula o negativa) experimentada, desde cierta fecha establecida en el contrato, por un índice o tipo de interés de referencia.

x : Porcentaje de un tipo de interés de referencia.

δ : Redondeo. En el caso de los créditos y préstamos garantizados mediante hipoteca, caución, prenda u otra garantía equivalente que se formalicen a tipo de interés variable, el redondeo habrá de efectuarse al extremo del intervalo pactado más próximo, sin que éste pueda sobrepasar al octavo de punto (0,125)[6].

Actualmente, los tipos de interés de referencia oficiales son:

- EURIBOR a un año. Es el índice más utilizado como referencia en los préstamos hipotecarios para calcular la revisión de los tipos de interés variable. Se define como la media aritmética simple mensual de los valores diarios del índice de referencia euríbor que figura en el anexo del *Reglamento de ejecución (UE) 2016/1368 de la Comisión de 11 de agosto de 2016, por el que se establece una lista de los índices de referencia cruciales utilizados en los mercados financieros.* El Banco de España dejará de realizar los cálculos simples para la obtención de la media mensual, y pasará a publicar y replicar la información elaborada por el administrador de dicho índice, el *European Money Markets Institute (EMMI).*
- EURIBOR a una semana, un mes, tres meses, seis meses. Para cada uno de los plazos, se define como la media aritmética simple mensual de los valores diarios del índice de referencia euríbor, que figura en el anexo del *Reglamento de Ejecución (UE) 2016/1368 de la Comisión, de 11 de agosto de 2016 por el que se establece una lista de los índices de referencia cruciales utilizados en los mercados financieros.* Estas medias son calculadas por el *European Money Markets Institute (EMMI).*
- Tipo de rendimiento interno en el mercado secundario de la deuda pública. Este tipo de interés oficial de referencia se define como la media ponderada por volúmenes nominales de negociación de los rendimientos internos de los valores emitidos por el Estado con vencimiento residual entre dos y seis años, negociados en operaciones simples al contado en los seis meses inmediatamente anteriores. Esta media se toma del dato del índice RODE "Deuda Pública de 2 a 6 años (S)" que es calculado por Sociedad de Bolsas, S. A. y publicado en la página web de BME Renta Variable desde mayo de 2021.
- Permuta de intereses/*Interest Rate Swap*, IRS al plazo de cinco años. Es la media simple mensual de los tipos de interés diarios del tipo anual para *swap* de intereses, para operaciones denominadas en euros, con vencimiento a cinco años, calculados por la IBA (*ICE Benchmark Administration*) y publicados en su página web bajo el identificador de serie EUR Rates 1200.
- Tipo de los préstamos hipotecarios a más de tres años, para adquisición de vivienda libre, IRPH concedidos por el conjunto de las entidades de crédito. Es un índice frecuente para la revisión de tipos en los préstamos hipotecarios a interés variable. Es la media simple de los tipos de interés medios ponderados de las operaciones de préstamo con garantía hipotecaria de plazo igual o superior a tres años para la adquisición de vivienda libre iniciadas o renovadas por los bancos y cajas de ahorro en el mes a que se refiere el índice. En el cálculo de la media se utilizan tipos anuales equivalentes.
- Tipo medio de los préstamos hipotecarios entre uno y cinco años, concedidos por las entidades de crédito en la zona del euro. Es la media aritmética ponderada por el volumen de operaciones, de los tipos de interés aplicados a las nuevas operaciones de préstamo o crédito a vivienda en las que se prevea un período de fijación del tipo de interés de entre uno y cinco años, realizados en euros con hogares residentes en la zona del euro. Según lo establecido en el anejo 8 de la Circular 5/2012 de Banco de España, este índice no se corregirá en el caso de que el BCE modificara posteriormente el tipo publicado.
- Tipo de interés de referencia basado en el *Euro short-term rate* (€STR). Este índice se define como el tipo de interés a distintos plazos que el BCE elabora basado en el tipo de interés *Euro short-term rate* (€STR) y lo publica el BCE a través de su *Statistical Data Warehouse (SDW)*, o en cualquier otro medio por el que difunda dicha información.
- MIBOR a un año (Madrid Interbank Offered Rate). Es el tipo de interés interbancario que se aplica en el mercado bursátil de Madrid. Es la base de los tipos de préstamo interbancario definida como el tipo de interés para grandes transacciones interbancarias en el mercado bancario internacional. Se mantiene para las operaciones formalizadas con anterioridad al 1 de enero de 2000.

Se analizan los casos más frecuentes en la práctica diaria:

- Préstamos con términos amortizativos predeterminados.
- Préstamos con términos amortizativos posdeterminados.
  - ➢ Cuotas de amortización constantes.
  - ➢ Recálculo de términos amortizativos.

2.2.1. Préstamos con términos amortizativos predeterminados

Los préstamos a tipo de interés variable con términos amortizativos predeterminados son aquellos en los que los términos amortizativos se conocen desde el inicio de la

(5) Actualmente los tipos de interés de referencia oficiales son los que se establecen en el artículo 27 de la *Orden EHA/2899/2011 de 28 de octubre*, modificada por la *Orden ETD/699/2020 de 24 de junio*, y se definen en la norma decimocuarta y anejo 8 de la *Circular 5/2012 del Banco de España*, modificada por la *Circular 1/2021*.

(6) Disposición adicional duodécima de la Ley 44/2002, de 22 de noviembre, de Medidas de Reforma del Sistema Financiero, pág. 41326 (BOE núm. 281 de 23 de noviembre).

operación, ya sean constantes o variables, y la duración se desconoce a priori, ya que vendrá determinada por la evolución de los tipos de interés.

Uno de los casos más frecuentes es aquel que presenta términos amortizativos constantes calculados con el tipo de interés aplicable en el primer periodo de la operación financiera mediante la equivalencia financiera en el origen, es decir:

$$C_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i_1}$$

$$a = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|i_1}}$$

Las cuotas de interés de cada periodo se calculan aplicando los tipos de interés de dichos periodos:

$$I_1 = C_0 \cdot i_1$$
$$I_2 = C_1 \cdot i_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$I_n = C_{n-1} \cdot i_n$$

Para calcular la cuota de amortización y el capital pendiente en un periodo determinado k, así como el capital amortizado hasta dicho periodo se pueden utilizar las expresiones generales de las operaciones financieras de amortización de capital:

$$M_k = a_k - I_k$$
$$C_k = C_0 - m_k$$
$$m_k = C_0 - C_k$$

En el último periodo es necesario efectuar un ajuste en la cuota de amortización y, por tanto, en el término amortizativo para que se amortice totalmente el préstamo de tal manera que se cumpla que $C_{n-1} = M_n$.

EJERCICIO 3.6.

Datos:

- Nominal del préstamo = C_0 = 60.000 euros.
- Duración de la operación = 10 años.
- Tipo de interés variable: tipo de referencia (Euribor-1 año) más un margen de 0,5 puntos porcentuales y redondeado al octavo punto porcentual más próximo. Los tipos de referencia son los siguientes:

Años	Euribor-1 año
1	2,73
2	2,98
3	2,97
4	3,20
5	2,95
6	2,96
7	2,70
8	3,05
9	2,80
10	2,78

- Los términos amortizativos son constantes y se calculan con el interés a aplicar en el primer periodo.

Cuestiones:

1) Cálculo de los términos amortizativos constantes.
2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.
3) Capital amortizado hasta el sexto año.
4) Cuadro de amortización.

Solución:

1) Cálculo de los términos amortizativos constantes.

Se calculan los tipos de interés aplicables en cada periodo:

Años	Euribor-1 año	i
1	2,73	2,75
2	2,98	3,00
3	2,97	3,00
4	3,20	3,25
5	2,95	3,00
6	2,96	3,00
7	2,70	2,75
8	3,05	3,00
9	2,80	2,75
10	2,78	2,75

Se calculan los términos amortizativos constantes a partir de la expresión de la equivalencia en el origen y del interés aplicable en el primer periodo:

$$60.000 = a \cdot a_{\overline{10}|0,0275}$$

$$a = 6944,38 \text{ €}$$

2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.

$$C_4 = C_0 - m_4 = 60.000 - 21.576,23 = 38.423,77 \text{ €}$$

donde:

$$M_1 = a - I_1 = a - C_0 \cdot i_1 = 6.944,38 - 60.000 \cdot 0,0275 = 5.294,38 \text{ €}$$
$$M_2 = a - I_2 = a - C_1 \cdot i_2 = 6.944,38 - (60.000 - 5.294,38) \cdot 0,03 = 5.303,21 \text{ €}$$
$$M_3 = a - I_3 = a - C_2 \cdot i_3 = 6.944,38 - (60.000 - 10.597,59) \cdot 0,03 = 5.462,31 \text{ €}$$
$$M_4 = a - I_4 = a - C_3 \cdot i_4 = 6.944,38 - (60.000 - 16.059,90) \cdot 0,0325 = 5.516,33 \text{ €}$$
$$m_4 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 21.576,23 \text{ €}$$

3) Capital amortizado hasta el sexto año.

$$m_6 = m_4 + M_5 + M_6 = 21.576,23 + 5.791,67 + 5.965,42 = 33.333,32 \text{ €}$$

donde:

$$m_4 = 21.576,23 \text{ €}$$
$$M_5 = a - I_5 = a - C_4 \cdot i_5 = 6.944,38 - (60.000 - 21.576,23) \cdot 0,03 = 5.791,67 \text{ €}$$
$$M_6 = a - I_6 = a - C_5 \cdot i_6 = 6.944,38 - (60.000 - 27.367,90) \cdot 0,03 = 5.965,42 \text{ €}$$

4) **Cuadro de amortización:**

CUADRO 3.6. *Método de amortización mediante términos amortizativos predeterminados constantes*

n	i	a_k	I_k	M_k	m_k	C_k
0						60.000,00
1	0,0275	6.944,38	1.650,00	5.294,38	5.294,38	54.705,62
2	0,0300	6.944,38	1.641,17	5.303,21	10.597,60	49.402,40
3	0,0300	6.944,38	1.482,07	5.462,31	16.059,91	43.940,09
4	0,0325	6.944,38	1.428,05	5.516,33	21.576,24	38.423,76
5	0,0300	6.944,38	1.152,71	5.791,67	27.367,91	32.632,09
6	0,0300	6.944,38	978,96	5.965,42	33.333,33	26.666,67
7	0,0275	6.944,38	733,33	6.211,05	39.544,38	20.455,62
8	0,0300	6.944,38	613,67	6.330,71	45.875,09	14.124,91
9	0,0275	6.944,38	388,43	6.555,95	52.431,04	7.568,96
10	0,0275	7.777,10	208,15	7.568,96	60.000,00	0,00

2.2.2. Préstamos con términos amortizativos postdeterminados

Los préstamos a tipo de interés variable con términos amortizativos postdeterminados son aquellos en los que se conoce la duración de la operación desde el inicio y los términos amortizativos se desconocen a priori, ya que vendrán determinados por la evolución de los tipos de interés.

Entre los casos más frecuentes cabe destacar el que presenta cuotas de amortización predeterminadas constantes y el que se basa en el recálculo de los términos amortizativos con cuotas de amortización postdeterminadas.

2.2.2.1. *Préstamos con términos amortizativos postderminados y cuotas de amortización predeterminadas constantes*

En estos préstamos se fija al inicio de la operación la cuota de amortización constante que tiene que pagar el prestatario al prestamista. A posteriori, los términos amortizativos vienen determinados por la evolución de los tipos de interés.

En primer lugar se calculan las cuotas de amortización constantes:

$$M = \frac{C_0}{n}$$

Las cuotas de interés de cada periodo se calculan aplicando los tipos de interés de dichos periodos:

$$I_1 = C_0 \cdot i_1$$
$$I_2 = C_1 \cdot i_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$I_n = C_{n-1} \cdot i_n$$

Para calcular el término amortizativo y el capital pendiente en un periodo determinado k, así como el capital amortizado hasta dicho periodo se pueden utilizar las expresiones generales de las operaciones financieras de amortización de capital:

$$a_k = I_k + M$$
$$C_k = C_0 - m_k = n \cdot M - k \cdot M = (n - k) \cdot M$$
$$m_k = C_0 - C_k = k \cdot M$$

EJERCICIO 3.7.

Datos:

- **Nominal del préstamo = C_0 = 60.000 euros.**
- **Duración de la operación = 10 años.**
- **Tipo de interés variable: tipo de referencia (Euribor-1 año) más un margen de 0,5 puntos porcentuales y redondeado al octavo de punto porcentual más próximo. Los tipos de referencia son los siguientes:**

Años	Euribor-1 año
1	2,73
2	2,98
3	2,97
4	3,20
5	2,95
6	2,96
7	2,70
8	3,05
9	2,80
10	2,78

- **Las cuotas de amortización son constantes.**

Cuestiones:

1) **Cálculo del término amortizativo del tercer año.**
2) **Capital pendiente transcurridos cuatro años.**
3) **Capital amortizado hasta el sexto año.**
4) **Cuadro de amortización.**

Solución:

1) **Cálculo del término amortizativo del tercer año.**

Se calculan los tipos de interés aplicables en cada periodo:

Años	Euribor-1 año	i
1	2,73	2,75
2	2,98	3,00
3	2,97	3,00
4	3,20	3,25
5	2,95	3,00
6	2,96	3,00
7	2,70	2,75
8	3,05	3,00
9	2,80	2,75
10	2,78	2,75

Se calculan las cuotas de amortización constantes:

$$M = \frac{C_0}{n} = \frac{60.000}{10} = 6.000$$

Se calcula el término amortizativo del tercer año:

$$a_3 = I_3 + M = C_2 \cdot i_3 + M = (C_0 - m_2) \cdot i_3 + M =$$
$$= (60.000 - 2 \cdot 6.000) \cdot 0{,}03 + 6.000 = 7.440 \text{ €}$$

2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.

$$C_4 = C_0 - m_4 = 60.000 - 4 \cdot 6.000 = 36.000 \text{ €}$$

3) Capital amortizado hasta el sexto año.

$$m_6 = 6 \cdot M = 6 \cdot 6.000 = 36.000 \text{ €}$$

4) Cuadro de amortización:

CUADRO 3.7. *Método de amortización mediante términos amortizativos postdeterminados y cuotas de amortización predeterminadas constantes*

n	i	a_k	I_k	M_k	m_k	C_k
0						60.000,00
1	0,0275	7.650,00	1.650,00	6.000,00	6.000,00	54.000,00
2	0,0300	7.620,00	1.620,00	6.000,00	12.000,00	48.000,00
3	0,0300	7.440,00	1.440,00	6.000,00	18.000,00	42.000,00
4	0,0325	7.365,00	1.365,00	6.000,00	24.000,00	36.000,00
5	0,0300	7.080,00	1.080,00	6.000,00	30.000,00	30.000,00
6	0,0300	6.900,00	900,00	6.000,00	36.000,00	24.000,00
7	0,0275	6.660,00	660,00	6.000,00	42.000,00	18.000,00
8	0,0300	6.540,00	540,00	6.000,00	48.000,00	12.000,00
9	0,0275	6.330,00	330,00	6.000,00	54.000,00	6.000,00
10	0,0275	6.165,00	165,00	6.000,00	60.000,00	0,00

2.2.2.2. *Préstamos con términos amortizativos postderminados y cuotas de amortización postdeterminadas*

En los préstamos a tipo de interés variable con términos amortizativos y cuotas de amortización postdeterminados se fija al inicio de la operación la duración de la misma y se desconocen las cuotas de interés y las cuotas de amortización y, por tanto, los términos amortizativos, que dependen de la evolución de los tipos de interés.

Los préstamos más frecuentes dentro de esta modalidad se basan en el recálculo de los términos amortizativos en el momento de la revisión de los tipos de interés a aplicar. Y, para ello, se utilizan únicamente las expresiones que permiten obtener el capital pendiente al final de un periodo determinado en los métodos de amortización tradicionales. De esta manera surgen nuevos procedimientos amortizativos en los que se supone que el interés a utilizar para el recálculo de los términos amortizativos permanece constante hasta el final de la operación.

En primer lugar se calculan los términos amortizativos:

$$C_0 = a_1 \cdot a_{\overline{n}|i_1} \Rightarrow \boldsymbol{a_1} = \frac{\boldsymbol{C_0}}{\boldsymbol{a_{\overline{n}|i_1}}}$$

$$C_1 = a_2 \cdot a_{\overline{n-1}|i_2} \Rightarrow \boldsymbol{a_2} = \frac{\boldsymbol{C_1}}{\boldsymbol{a_{\overline{n-1}|i_2}}}$$

$$C_{n-1} = a_n \cdot a_{\overline{1}|i_n} \Rightarrow \boldsymbol{a_n} = \frac{\boldsymbol{C_{n-1}}}{\boldsymbol{a_{\overline{1}|i_n}}}$$

Las cuotas de interés de cada periodo se calculan aplicando los tipos de interés de dichos periodos:

$$I_1 = C_0 \cdot i_1$$
$$I_2 = C_1 \cdot i_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$I_n = C_{n-1} \cdot i_n$$

Para calcular la cuota de amortización y el capital pendiente en un periodo determinado k, así como el capital amortizado hasta dicho periodo se pueden utilizar las expresiones generales de las operaciones financieras de amortización de capital:

$$M_k = a_k - I_k$$
$$C_k = C_0 - m_k$$
$$m_k = C_0 - C_k$$

EJERCICIO 3.8.

Datos:

- Nominal del préstamo = C_0 = 60.000 euros.
- Duración de la operación = 10 años.
- Tipo de interés variable: tipo de referencia (Euribor-1 año) más un margen de 0,5 puntos porcentuales y redondeado al octavo de punto porcentual más próximo. Los tipos de referencia son los siguientes:

Años	Euribor-1 año
1	2,73
2	2,98
3	2,97
4	3,20
5	2,95
6	2,96
7	2,70
8	3,05
9	2,80
10	2,78

- Recálculo de los términos amortizativos en el momento de la revisión del tipo de interés.

Cuestiones:

1) Cálculo de los términos amortizativos de los dos primeros años.
2) Cuadro de amortización.

Solución:

1) Cálculo de los términos amortizativos.

Se calculan los tipos de interés aplicables en cada periodo:

Años	Euribor-1 año	i
1	2,73	2,75
2	2,98	3,00
3	2,97	3,00
4	3,20	3,25
5	2,95	3,00
6	2,96	3,00
7	2,70	2,75
8	3,05	3,00
9	2,80	2,75
10	2,78	2,75

Se calculan los términos amortizativos de los dos primeros años:

$$60.000 = a_1 \cdot a_{\overline{10|}0{,}0275} \Rightarrow a_1 = 6.944{,}38\ €$$

$$M_1 = a_1 - I_1 = a_1 - C_0 \cdot i_1 = 6.944{,}38 - 60.000 \cdot 0{,}0275 = 5.294{,}38\ €$$

$$C_1 = C_0 - M_1 = 60.000 - 5.294{,}38 = 54.705{,}62 = a_2 \cdot a_{\overline{9|}0{,}03}$$

$$a_2 = 7.026{,}05\ €$$

$$M_2 = a_2 - I_2 = a_2 - C_1 \cdot i_2 = 7.026{,}05 - 54.705{,}62 \cdot 0{,}03 = 5.384{,}88\ €$$

$$C_2 = C_0 - m_2 = 60.000 - 10.679{,}26 = 49{,}320{,}74 = a_3 \cdot a_{\overline{8|}0{,}03}$$

$$a_2 = 7.026{,}05\ €$$

2) Cuadro de amortización.

CUADRO 3.8. *Método de amortización mediante términos amortizativos y cuotas de amortización postdeterminados*

n	i	a_k	I_k	M_k	m_k	C_k
0						60.000,00
1	0,0275	6.944,38	1.650,00	5.294,38	5.294,38	54.705,62
2	0,0300	7.026,05	1.641,17	5.384,88	10.679,27	49.320,73
3	0,0300	7.026,05	1.479,62	5.546,43	16.225,70	43.774,30
4	0,0325	7.092,40	1.422,66	5.669,74	21.895,44	38.104,56
5	0,0300	7.034,01	1.143,14	5.890,87	27.786,31	32.213,69
6	0,0300	7.034,01	966,41	6.067,60	33.853,90	26.146,10
7	0,0275	6.992,00	719,02	6.272,99	40.126,89	19.873,11
8	0,0300	7.025,75	596,19	6.429,55	46.556,44	13.443,56
9	0,0275	7.000,30	369,70	6.630,61	53.187,05	6.812,95
10	0,0275	7.000,30	187,36	6.812,95	60.000,00	0,00

2.3. PRÉSTAMOS CON TIPO DE INTERÉS MIXTO

Los préstamos con tipo de interés mixto son los que combinan un plazo a interés fijo con un plazo a interés variable.

Suponiendo que los k primeros periodos el tipo de interés es constante y durante los $n-k$ periodos restantes el tipo de interés es variable, los términos amortizativos se calculan como:

$$C_0 = a \cdot a_{\overline{n|}i} \Rightarrow \quad a = \frac{C_0}{a_{\overline{n|}i}}$$

(términos amortizativos constantes de los k primeros años).

$$C_k = a' \cdot a_{\overline{n-k|}i_{k-1}} \quad a' = \frac{C_k}{a_{\overline{n-k|}i_{k+1}}}$$

(términos amortizativos constantes de los $n-k$ periodos restantes)

Las cuotas de interés de cada periodo se calculan aplicando los tipos de interés de dichos periodos:

$$I_1 = C_0 \cdot i$$

$$I_2 = C_1 \cdot i$$

....

$$I_k = C_{k-1} \cdot i$$

$$I_{k+1} = C_k \cdot i_{k+1}$$

$$I_{k+2} = C_{k+1} \cdot i_{k+2}$$

....

$$I_n = C_{n-1} \cdot i_n$$

Para calcular la cuota de amortización y el capital pendiente en un periodo determinado k, así como el capital amortizado hasta dicho periodo se pueden utilizar las expresiones generales de las operaciones financieras de amortización de capital:

$$M_k = a_k - I_k$$

$$C_k = C_0 - m_k$$

$$m_k = C_0 - C_k$$

En el último periodo es necesario efectuar un ajuste en la cuota de amortización y, por tanto, en el término amortizativo para que se amortice totalmente el préstamo de tal manera que se cumpla $C_{n-1} = M_n$.

EJERCICIO 3.9.

Datos:

- Nominal del préstamo = C_0 = 60.000 euros.
- Duración de la operación = 10 años.
- Tipo de interés constante del 4% efectivo anual durante los tres primeros años y variable durante el resto de los periodos.

- El tipo de interés variable es el tipo de referencia (Euribor-1 año) más un margen de 0,5 puntos porcentuales y redondeado al octavo de punto porcentual más próximo. Los tipos de referencia son los siguientes:

Años	Euribor-1 año
4	3,20
5	2,95
6	2,96
7	2,70
8	3,05
9	2,80
10	2,78

- Los términos amortizativos son constantes durante el plazo a tipo de interés constante y durante el plazo a tipo de interés variable. En este último caso se calculan teniendo en cuenta el interés a aplicar en el cuarto periodo.

Cuestiones:

1) Cálculo de los términos amortizativos correspondientes a los plazos a tipo de interés constante y a tipo de interés variable.
2) Cuadro de amortización.

Solución:

1) Cálculo de los términos amortizativos.

Años	Euribor-1 año	i
1		4
2		4
3		4
4	3,20	3,25
5	2,95	3,00
6	2,96	3,00
7	2,70	2,75
8	3,05	3,00
9	2,80	2,75
10	2,78	2,75

Se calculan los términos amortizativos correspondientes al plazo a interés constante:

$60.000 = a \cdot a_{\overline{10}|0,04}$

$a = 7.397,46$ € (los tres primeros periodos)

$M_1 = a_1 - I_1 = a_1 - C_0 \cdot i = 7.397,46 - 60.000 \cdot 0,04 = 4.997,46$ €

$M_2 = M_1 \cdot (1+i) = 4.997,46 \cdot 1,04 = 5.197,36$ €

$M_3 = M_2 \cdot (1+i) = 5.197,36 \cdot 1,04 = 5.405,25$ €

$60.000 - m_3 = 60.000 - 15.600,07 = 44.399,93 = a' \cdot a_{\overline{10-3}|0,0325}$

$a' = 7.193,77$ € (los restantes periodos)

2) Cuadro de amortización.

CUADRO 3.9. *Préstamo con interés mixto*

n	i	a_k	I_k	M_k	m_k	C_k
0						60.000,00
1	0,0400	7.397,46	2.400,00	4.997,46	4.997,46	55.002,54
2	0,0400	7.397,46	2.200,10	5.197,35	10.194,81	49.805,19
3	0,0400	7.397,46	1.992,21	5.405,25	15.600,06	44.399,94
4	0,0325	7.193,77	1.443,00	5.750,77	21.350,83	38.649,17
5	0,0300	7.193,77	1.159,48	6.034,29	27.385,12	32.614,88
6	0,0300	7.193,77	978,45	6.215,32	33.600,45	26.399,55
7	0,0275	7.193,77	725,99	6.467,78	40.068,23	19.931,77
8	0,0300	7.193,77	597,95	6.595,82	46.664,04	13.335,96
9	0,0275	7.193,77	366,74	6.827,03	53.491,07	6.508,93
10	0,0275	6.687,92	179,00	6.508,93	60.000,00	0,00

TEMA 4

OPERACIONES FINANCIERAS DE AMORTIZACIÓN DE CAPITAL: PRÉSTAMOS (Y II)

1. PRÉSTAMOS CON CARENCIA

En algunos casos la entidad prestamista ofrece la posibilidad de pactar carencia total o carencia parcial de pagos (sólo se abonan cuotas de interés) durante el primer o los primeros años de vigencia del préstamo con la finalidad de que el cliente pueda ahorrar en esos primeros años. Sin embargo, esta opción supone un mayor coste real para el prestatario como consecuencia del aplazamiento del pago correspondiente a los primeros periodos.

Se analizan los préstamos con carencia que más se conceden en la actualidad: método de amortización francés y método de amortización italiano.

1.1. PRÉSTAMOS CON CARENCIA TOTAL DE PAGOS

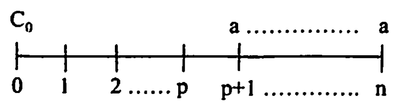
La carencia total de pagos consiste en amortizar el préstamo pactando un periodo de diferimiento de los pagos, es decir, en el primer o en los primeros años el prestatario no entregará ninguna cuantía al prestamista.

Para analizar los préstamos con carencia total de pagos nos centramos en la expresión de la equivalencia financiera en el origen, del cálculo del capital pendiente en un periodo determinado y del capital amortizado hasta un periodo determinado.

1.1.1. Préstamos con carencia total de pagos: método de amortización francés

En este caso, el prestamista entrega al prestatario una cuantía C_0 al prestatario y éste se compromete a devolver esta cuantía al prestamista junto con los intereses que se han generado en la operación mediante el pago de términos amortizativos constantes, pero pactando carencia total de términos durante los p primeros periodos.

FIGURA 4.1. *Préstamo con carencia total de pagos utilizando el método de amortización francés*



a) *Equivalencia financiera en el origen*

Si recurrimos al postulado de equivalencia financiera de capitales según el cual "toda operación financiera implica una existencia de una equivalencia financiera de las sumas de capitales respectivas de la prestación y de la contraprestación en base a una ley financiera previamente establecida", la equivalencia en el origen de esta operación financiera consiste en igualar en dicho instante los capitales que integran la prestación del prestamista con los capitales que integran la contraprestación del prestamista, que son las siguientes:

- Prestación del prestamista: $(C_0, 0)$
- Contraprestación del prestamista:

$(0,1),(0,2),\ldots,(0,p),(a,p+1),(a,p+2),\ldots,(a,n)$

Por tanto,

$$C_0 = a \cdot a_{\overline{n-p}|i} \cdot (1+i)^{-p}$$

donde:

p: Número de periodos con carencia total de pagos.

i: Tipo de interés efectivo anual de la operación.

n: Duración de la operación.

C_0: Cuantía del préstamo.

b) *Capital pendiente al final de un periodo determinado k*

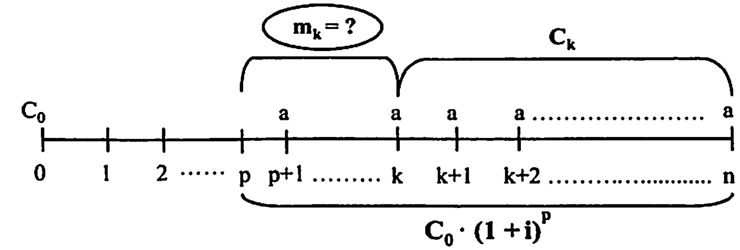
$$C_k = a \cdot a_{\overline{n-k}|i}$$

El capital pendiente al final del periodo p será:

$$C_p = C_0 \cdot (1+i)^p = a \cdot a_{\overline{n-p}|i}$$

c) *Capital amortizado hasta un periodo determinado k*

FIGURA 4.2. *Esquema para el cálculo del capital amortizado hasta un periodo de un préstamo amortizable por el método francés con carencia total de pagos*



Por tanto:

$$m_k = C_0 \cdot (1+i)^p - C_k$$

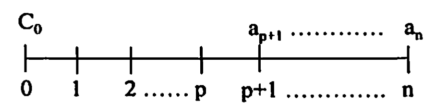
También se puede obtener como:

$$m_k = M_{p+1} + M_{p+2} + \ldots\ldots + M_k = M_{p+1} \cdot S_{\overline{k-p}|i}$$

1.1.2. Préstamos con carencia total de pagos: método de amortización italiano

En este caso, el prestamista entrega al prestatario una cuantía C_0 al prestatario y éste se compromete a devolver esta cuantía al prestamista junto con los intereses que se han generado en la operación mediante el pago de cuotas de amortización constantes, pero pactando carencia total de términos durante los p primeros periodos.

FIGURA 4.3. *Préstamo con carencia total de pagos utilizando el método de amortización italiano*



a) *Equivalencia financiera en el origen*

Si recurrimos al postulado de equivalencia financiera de capitales según el cual "toda operación financiera implica una existencia de una equivalencia financiera de las sumas de capitales respectivas de la prestación y de la contraprestación en base a una ley financiera previamente establecida", la equivalencia en el origen de esta operación financiera consiste en igualar en dicho instante los capitales que integran la prestación del prestamista con los capitales que integran la contraprestación del prestamista, que son las siguientes:

- Prestación del prestamista: $(C_0, 0)$
- Contraprestación del prestamista:

$(0,1),(0,2),\ldots,(0,p),(a_{p+1},p+1),(a_{p+2},p+2),\ldots,(a_n,n)$

Por tanto:

$$C_0 = \left[\frac{a_{p+1}}{1+i} + \frac{a_{p+2}}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(1+i)^{n-p}}\right] \cdot (1+i)^{-p}$$

donde:

p : Número de periodos con carencia total de pagos.

i: Tipo de interés efectivo anual de la operación.

n: Duración de la operación.

C_0 : Cuantía del préstamo.

b) *Capital pendiente al final de un periodo determinado k.*

Previamente se hallan las cuotas de amortización constantes:

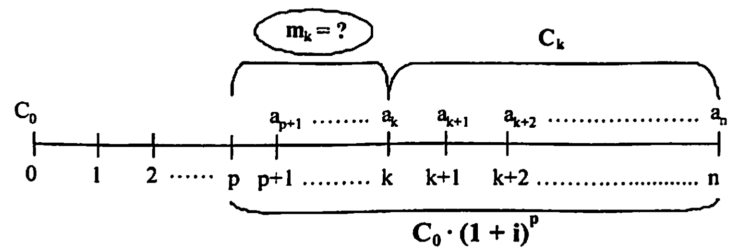
$$M = \frac{C_0 \cdot (1+i)^p}{n-p}$$

Se calcula el capital pendiente al final del periodo k:

$$\boldsymbol{C_k = (n-k) \cdot M}$$

c) *Capital amortizado hasta un periodo determinado k*

FIGURA 4.4. *Esquema para el cálculo del capital amortizado hasta un periodo de un préstamo amortizable por el método italiano con carencia total de pagos*



Por tanto:

$$\boldsymbol{m_k = C_0 \cdot (1+i)^p - C_k}$$

También se puede obtener como:

$$\boldsymbol{m_k = M_{p+1} + M_{p+2} + \ldots\ldots + M_k = (k-p) \cdot M}$$

EJERCICIO 4.1.

Datos:

- Nominal del préstamo = C_0 = 60.000 euros.
- Tipo de interés efectivo anual = 4%
- Duración de la operación = 10 años.
- Método de amortización francés.
- Carencia total de pagos durante los dos primeros años.

Cuestiones:

1) Cálculo de los términos amortizativos constantes.
2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.

3) Capital amortizado hasta el sexto año.
4) Cuadro de amortización.

Solución:

1) Cálculo de los términos amortizativos constantes:

Para calcular los términos amortizativos constantes aplicamos la expresión de la equivalencia financiera en el origen y obtenemos:

$$60.000 = a \cdot a_{\overline{8}|0{,}04} \cdot (1+0{,}04)^{-2} \Rightarrow a = \frac{60.000 \cdot (1+0{,}04)^2}{a_{\overline{8}|0{,}04}} = 9.638{,}86\ €$$

2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.

$$C_4 = a \cdot a_{\overline{10-4}|0{,}04} = 9.638{,}86 \cdot a_{\overline{6}|0{,}04} = 50.528{,}22\ €$$

3) Capital amortizado hasta el sexto año.

$$m_6 = C_0 \cdot (1+0{,}04)^2 - C_6 = 60.000 \cdot (1+0{,}04)^2 - 9.638{,}86 \cdot a_{\overline{10-6}|0{,}04} = 29.907{,}95\ €$$

4) Cuadro de amortización:

CUADRO 4.1. *Préstamo amortizable por el método de amortización francés con carencia total de pagos*

n	a_k	I_k	M_k	m_k	C_k
0					60.000,00
1	0,00	0,00	0,00	0,00	62.400,00
2	0,00	0,00	0,00	0,00	64.896,00
3	9.638,86	2.595,84	7.043,02	7.043,02	57.852,98
4	9.638,86	2.314,12	7.324,74	14.367,77	50.528,23
5	9.638,86	2.021,13	7.617,73	21.985,50	42.910,50
6	9.638,86	1.716,42	7.922,44	29.907,94	34.988,06
7	9.638,86	1.399,52	8.239,34	38.147,28	26.748,72
8	9.638,86	1.069,95	8.568,91	46.716,19	18.179,81
9	9.638,86	727,19	8.911,67	55.627,86	9.268,14
10	9.638,86	370,73	9.268,14	64.896,00	0,00

1.2. PRÉSTAMOS CON CARENCIA PARCIAL DE PAGOS

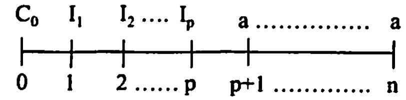
La carencia parcial de pagos consiste en amortizar el préstamo entregando en el primer o en los primeros periodos sólo las cuotas de interés.

Para analizar los préstamos con carencia parcial de pagos nos centramos en la expresión de la equivalencia financiera en el origen, del cálculo del capital pendiente en un periodo determinado y del capital amortizado hasta un periodo determinado.

1.2.1. Préstamos con carencia parcial de pagos: método de amortización francés

En este caso, el prestamista entrega al prestatario una cuantía C_0 al prestatario y éste se compromete a devolver esta cuantía al prestamista junto con los intereses que se han generado en la operación mediante el pago de términos amortizativos constantes, pero entregando sólo las cuotas de interés durante los p primeros periodos.

FIGURA 4.5. *Préstamo con carencia parcial de pagos utilizando el método de amortización francés*



a) *Equivalencia financiera en el origen*

Si recurrimos al postulado de equivalencia financiera de capitales según el cual "toda operación financiera implica una existencia de una equivalencia financiera de las sumas de capitales respectivas de la prestación y de la contraprestación en base a una ley financiera previamente establecida", la equivalencia en el origen de esta operación financiera consiste en igualar en dicho instante los capitales que integran la prestación del prestamista con los capitales que integran la contraprestación del prestamista, que son las siguientes:

- Prestación del prestamista: $(C_0, 0)$
- Contraprestación del prestamista:

$(I_1,1),(I_2,2),....,(I_p,p),(a,p+1),(a,p+2),....,(a,n)$

Por tanto:

$$C_0 = a \cdot a_{\overline{n-p}|i}$$

donde:

p : Número de periodos con carencia parcial de pagos.

i: Tipo de interés efectivo anual de la operación.

n: Duración de la operación.

C_0 : Cuantía del préstamo.

b) *Capital pendiente al final de un periodo determinado k.*

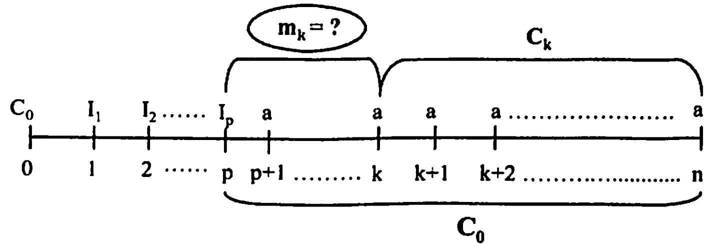
$$C_k = a \cdot a_{\overline{n-k}|i}$$

El capital pendiente al final del periodo p será:

$$C_p = C_0$$

c) *Capital amortizado hasta un periodo determinado k*

FIGURA 4.6. *Esquema para el cálculo del capital amortizado hasta un periodo de un préstamo amortizable por el método francés con carencia parcial de pagos*



Por tanto:

$$m_k = C_0 - C_k$$

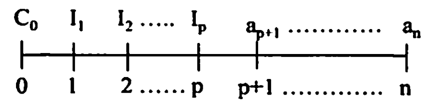
También se puede obtener como:

$$m_k = M_{p+1} + M_{p+2} + ...+ M_k = M_{p+1} \cdot S_{\overline{k-p}|i}$$

1.2.2. Préstamos con carencia parcial de pagos: método de amortización italiano.

En este caso, el prestamista entrega al prestatario una cuantía C_0 al prestatario y éste se compromete a devolver esta cuantía al prestamista junto con los intereses que se han generado en la operación mediante el pago de cuotas de amortización constantes, pero entregando sólo las cuotas de interés durante los p primeros periodos.

FIGURA 4.7. *Préstamo con carencia parcial de pagos utilizando el método de amortización italiano*



a) *Equivalencia financiera en el origen*

Si recurrimos al postulado de equivalencia financiera de capitales según el cual "toda operación financiera implica una existencia de una equivalencia financiera de las sumas de capitales respectivas de la prestación y de la contraprestación en base a una ley financiera previamente establecida", la equivalencia en el origen de esta operación financiera consiste en igualar en dicho instante los capitales que integran la prestación del prestamista con los capitales que integran la contraprestación del prestamista, que son las siguientes:

- Prestación del prestamista: $(C_0, 0)$
- Contraprestación del prestamista:

$(I_1,1),(I_2,2),....,(I_p,p),(a_{p+1},p+1),(a_{p+2},p+2),....,(a_n,n)$

Por tanto:

$$C_0 = \frac{a_{p+1}}{1+i} + \frac{a_{p+2}}{(1+i)^2} + ... + \frac{a_n}{(1+i)^{n-p}}$$

donde:

p : Número de periodos con carencia parcial de pagos.

i: Tipo de interés efectivo anual de la operación.

n: Duración de la operación.

C_0 : Cuantía del préstamo.

b) *Capital pendiente al final de un periodo determinado k.*

Previamente se hallan las cuotas de amortización constantes:

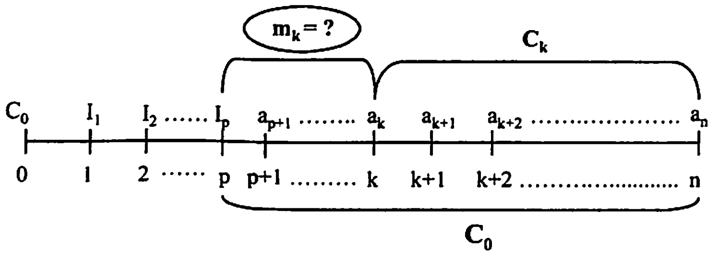
$$M = \frac{C_0}{n-p}$$

Se calcula el capital pendiente al final del periodo *k*:

$$C_k = (n - k) \cdot M$$

c) *Capital amortizado hasta un periodo determinado k*

FIGURA 4.8. *Esquema para el cálculo del capital amortizado hasta un periodo de un préstamo amortizable por el método italiano con carencia parcial de pagos*



Por tanto:

$$m_k = C_0 - C_k$$

También se puede obtener como:

$$m_k = M_{p+1} + M_{p+2} + \ldots\ldots + M_k = (k - p) \cdot M$$

EJERCICIO 4.2.

Datos:

- Nominal del préstamo = C_0 = 60.000 euros.
- Tipo de interés efectivo anual = 4%
- Duración de la operación = 10 años.
- Método de amortización italiano.
- En los dos primeros años sólo se pagan cuotas de interés.

Cuestiones:

1) Cálculo del término amortizativo del tercer año.
2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.
3) Capital amortizado hasta el sexto año.
4) Cuadro de amortización.

Solución:

1) Cálculo del término amortizativo del tercer año.

Primero se calculan las cuotas de amortización constantes:

$$M = \frac{C_0}{n-p} = \frac{60.000}{10-2} = \frac{60.000}{8} = 7.500 \text{ €}$$

Se calcula el término amortizativo del tercer año:

$$a_3 = I_3 + M = C_2 \cdot i + M = 60.000 \cdot 0{,}04 + 7.500 = 9.900 \text{ €}$$

2) Capital pendiente transcurridos cuatro años.

$$C_4 = (10 - 4) \cdot M = 6 \cdot 7.500 = 45.000 \text{ €}$$

3) Capital amortizado hasta el sexto año.

$$m_6 = M_3 + M_4 + M_5 + M_6 = 4 \cdot M = 4 \cdot 7.500 = 30.000 \text{ €}$$

4) Cuadro de amortización:

CUADRO 4.2. *Préstamo amortizable por el método de amortización italiano con carencia parcial de pagos*

n	a_k	I_k	M_k	m_k	C_k
0					60.000,00
1	2.400,00	2.400,00	0,00	0,00	60.000,00
2	2.400,00	2.400,00	0,00	0,00	60.000,00
3	9.900,00	2.400,00	7.500,00	7.500,00	52.500,00
4	9.600,00	2.100,00	7.500,00	15.000,00	45.000,00
5	9.300,00	1.800,00	7.500,00	22.500,00	37.500,00
6	9.000,00	1.500,00	7.500,00	30.000,00	30.000,00
7	8.700,00	1.200,00	7.500,00	37.500,00	22.500,00
8	8.400,00	900,00	7.500,00	45.000,00	15.000,00
9	8.100,00	600,00	7.500,00	52.500,00	7.500,00
10	7.800,00	300,00	7.500,00	60.000,00	0,00

2. RESERVA MATEMÁTICA O SALDO FINANCIERO

La reserva matemática o saldo financiero en un momento determinado *t* es la diferencia entre el valor de los capitales de la prestación y el valor de los capitales de la contraprestación en dicho momento, de acuerdo con una ley financiera previamente establecida.

2.1. MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE LA RESERVA MATEMÁTICA

Se analizan tres métodos para el cálculo de la reserva matemática o saldo financiero: método retrospectivo, método prospectivo y método recurrente.

2.1.1. Método retrospectivo

El cálculo de la reserva matemática en un momento determinado *t* por el método retrospectivo consiste en hallar la diferencia en dicho instante entre el valor de los capitales de la prestación y el valor de los capitales de la contraprestación anteriores al momento *t*, es decir, en hallar la diferencia en el momento *t* entre las obligaciones satisfechas hasta dicho instante por las dos partes que intervienen en la operación.

Se trata de un método que tiene en cuenta el pasado de la operación financiera, anterior al instante *t*, en el que se va a calcular la reserva matemática.

Sea una operación financiera con:

- Prestación: $(C_1,t_1),(C_2,t_2),...,(C_n,t_n)$
- Contraprestación: $(C_1\cdot,t_1\cdot),(C_2\cdot,t_2\cdot),...,(C_n\cdot,t_n\cdot)$

El cálculo de la reserva matemática por el método retrospectivo se calcula como:

$$R_t = \sum_{t_i \le t} C_i \cdot L(t_i,t) - \sum_{t_j\cdot \le t} C_j\cdot L(t_j\cdot,t) = S_t - S_t\cdot$$

donde:

R_t : Reserva matemática o saldo financiero en el momento t.

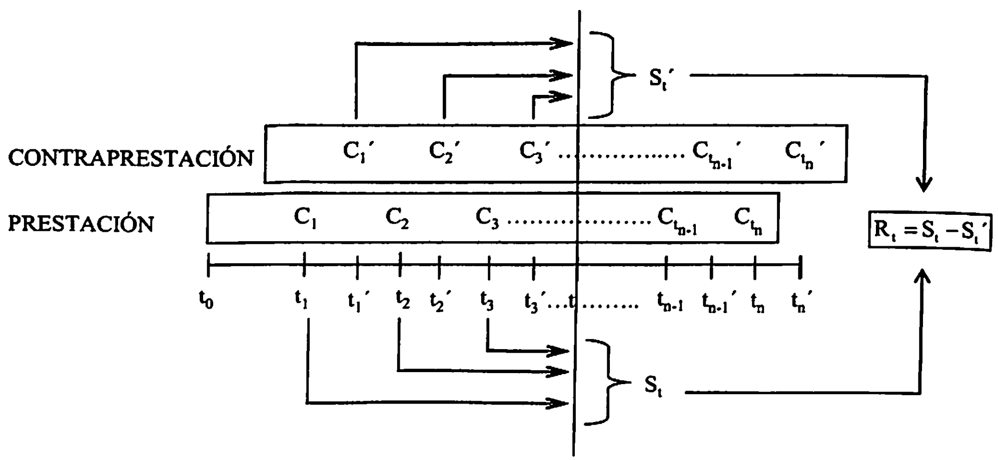
S_t : Suma de los valores de los capitales de la prestación anteriores al momento t y valorados en dicho momento.

S_t' : Suma de los valores de los capitales de la contraprestación anteriores al momento t y valorados en dicho momento.

t: Momento en el que se va a calcular la reserva matemática o saldo financiero. Se cumple: $t \in [t_1, t_n\cdot]$.

$L(t_i,t)$: Factor de capitalización para capitalizar una cuantía desde t_i hasta t.

FIGURA 4.9. *Esquema para el cálculo de la reserva matemática por el método retrospectivo*



La reserva matemática puede tomar los siguientes valores:

1) $R_t > 0 \Rightarrow S_t > S_t'$

Se trata de un saldo o reserva positiva que indica que el prestamista (entrega los capitales de la prestación) adopta una posición acreedora y el prestatario una posición deudora.

2) $R_t < 0 \Rightarrow S_t < S_t'$

Se trata de un saldo o reserva negativa que indica que el prestamista (entrega los capitales de la prestación) adopta una posición deudora y el prestatario una posición acreedora.

3) $R_t = 0 \Rightarrow S_t = S_t'$

Se trata de un saldo o reserva nulo, lo cual nos indica que la operación se encuentra saldada.

EJERCICIO 4.3.

Cuestión:

Sea la operación financiera constituida por:

- Prestación: $(1.000,1),(1.500,2),(3.000,5)$
- Contraprestación: $(500,2),(2.500,3),(2.694,35,\ 6)$

El tipo de interés efectivo anual es el 4%.

Calcular la reserva matemática en el instante 4 por el método retrospectivo.

Solución:

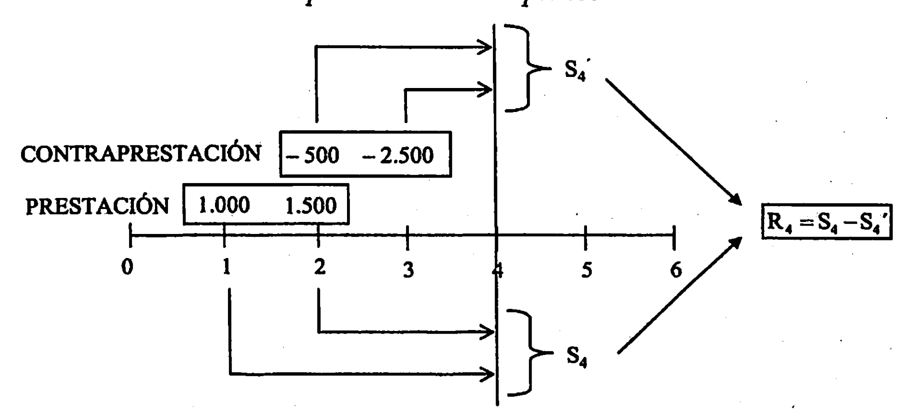
Se calcula la diferencia entre el valor de los capitales de la prestación y el valor de los capitales de la contraprestación en el momento 4, pero sólo considerando los capitales anteriores a dicho momento.

$$S_4 = 1.000\cdot L(1,4) + 1.500\cdot L(2,4) = 1.000\cdot 1{,}04^3 + 1.500\cdot 1{,}04^2 = 2.747{,}26\ €$$

$$S_4\cdot = 500\cdot L(2,4) + 2.500\cdot L(3,4) = 500\cdot 1{,}04^2 + 2.500\cdot 1{,}04 = 3.140{,}80\ €$$

$$R_4 = S_4 - S_4\cdot = 2.747{,}26 - 3.140{,}80 = -393{,}54\ €$$

FIGURA 4.10. *Esquema para el cálculo de la reserva matemática por el método retrospectivo*



Se trata de una reserva matemática negativa ya que el valor de los capitales de la contraprestación en el instante 4 es mayor que el valor de los capitales de la prestación en dicho instante, es decir, $R_4 < 0 \Rightarrow S_4' > S_4$, lo que indica un saldo a favor del prestatario que adopta la posición acreedora y en contra del prestamista que adopta la posición deudora.

2.1.2. Método prospectivo

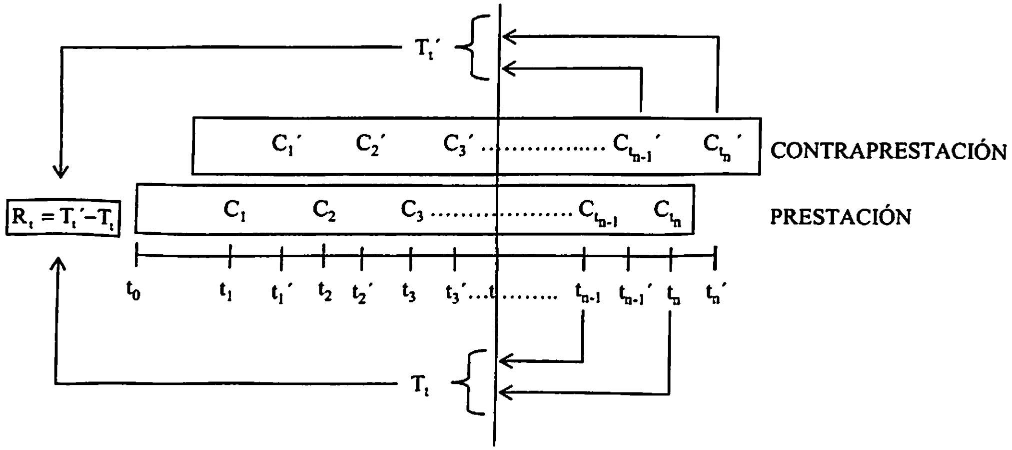
El cálculo de la reserva matemática en un momento determinado t por el método prospectivo consiste en hallar la diferencia en dicho instante entre el valor de los capitales de la contraprestación y el valor de los capitales de la prestación posteriores al momento t, es decir, en hallar la diferencia en el momento t entre las obligaciones pendientes de las dos partes que intervienen en la operación.

Se trata de un método que tiene en cuenta el futuro de la operación financiera, posterior al instante t, en el que se va a calcular la reserva matemática.

Sea una operación financiera con:

- Prestación: $(C_1,t_1),(C_2,t_2),\dots,(C_n,t_n)$
- Contraprestación: $(C_1{'},t_1{'}),(C_2{'},t_2{'}),\dots,(C_n{'},t_n{'})$

FIGURA 4.11. *Esquema para el cálculo de la reserva matemática por el método prospectivo*



El cálculo de la reserva matemática por el método prospectivo deriva de la aplicación del principio de equivalencia financiera por el cual el valor de los capitales que integran la prestación tiene que ser igual al valor de los capitales que integran la contraprestación en cualquier instante, conforme a una ley financiera previamente establecida. Por tanto, aplicando este principio en el instante t se cumple:

$$\sum_{t_i\le t} C_i\cdot L(t_i,t)+\sum_{t_i>t} C_i\cdot A(t,t_i)=\sum_{t_j{'}\le t} C_j{'}\cdot L(t_j{'},t)+\sum_{t_j{'}>t} C_j{'}\cdot A(t,t_j{'})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{t_i\le t} C_i\cdot L(t_i,t)-\sum_{t_j{'}\le t} C_j{'}\cdot L(t_j{'},t)=\sum_{t_j{'}>t} C_j{'}\cdot A(t,t_j{'})-\sum_{t_i>t} C_i\cdot A(t,t_i)$$

La parte izquierda de esta última ecuación constituye la reserva matemática en el instante t por el método retrospectivo y la parte derecha por el método prospectivo:

$$\boldsymbol{R_t=\sum_{t_j{'}>t} C_j{'}\cdot A(t,t_j{'})-\sum_{t_i>t} C_i\cdot A(t,t_i)}$$

donde:

$L(t_i,t)$: Factor de capitalización para capitalizar una cuantía desde t_i hasta t.

$A(t,t_i)$: Factor de actualización para descontar una cuantía desde t_i hasta t.

t: Instante en el que se va a calcular la reserva matemática o saldo financiero. Se cumple: $t\in[t_1,t_n{'}]$.

$$T_t{'}=\sum_{t_j{'}>t} C_j{'}\cdot A(t,t_j{'})$$

$T_t{'}$ es la suma de los valores de los capitales de la contraprestación en el instante t, pero sólo se tienen en cuenta los capitales posteriores a dicho instante.

$$T_t=\sum_{t_i>t} C_i\cdot A(t,t_i)$$

T_t es la suma de los valores de los capitales de la prestación en el instante t, pero sólo se tienen en cuenta los capitales posteriores a dicho instante.

La reserva matemática puede tomar los siguientes valores:

1) $R_t>0\Rightarrow T_t{'}>T_t$

Se trata de un saldo o reserva positiva que indica que el prestamista (entrega los capitales de la prestación) adopta una posición acreedora y el prestatario una posición deudora.

2) $R_t<0\Rightarrow T_t{'}<T_t$

Se trata de un saldo o reserva negativa que indica que el prestamista (entrega los capitales de la prestación) adopta una posición deudora y el prestatario una posición acreedora.

3) $R_t=0\Rightarrow T_t=T_t{'}$

Se trata de un saldo o reserva nulo, lo cual nos indica que la operación se encuentra saldada.

EJERCICIO 4.4.

Cuestión:

Sea la operación financiera constituida por:

- Prestación: (1.000,1),(1.500,2),(3.000,5)
- Contraprestación: (500,2),(2.500,3),(2.694,35, 6)

El tipo de interés efectivo anual es el 4%.

Calcular la reserva matemática en el instante 4 por el método prospectivo.

Solución:

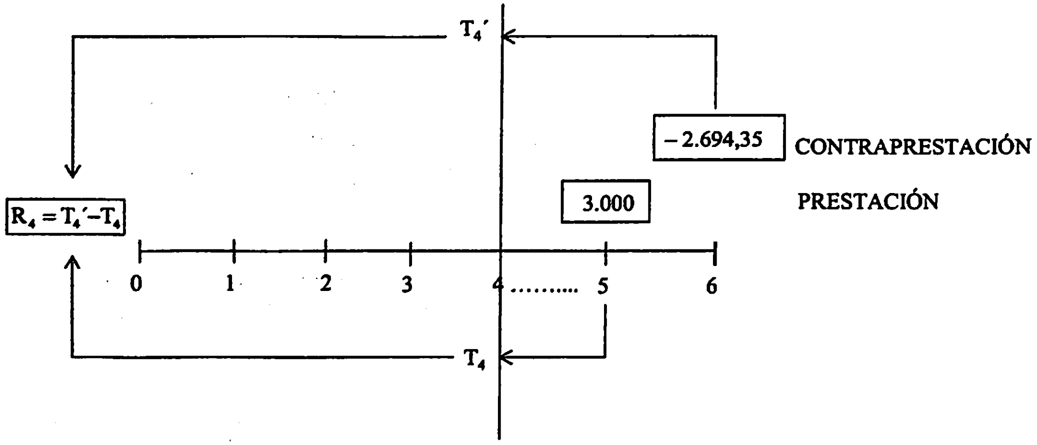
Se calcula la diferencia entre el valor de los capitales de la contraprestación y el valor de los capitales de la prestación en el instante 4, pero sólo considerando los capitales posteriores a dicho instante.

$$T_4{'}=2.694,95\cdot A(4,6)=\frac{2.694,95}{(1,04)^2}=2.491,63\ €$$

$$T_4=3.000\cdot A(4,5)=\frac{3.000}{1,04}=2.884,62\ €$$

$$R_4=T_4{'}-T_4=2.491,63-2.884,62=-392,93\ €$$

FIGURA 4.12. *Esquema para el cálculo de la reserva matemática por el método prospectivo*



Se trata de una reserva matemática negativa ya que el valor de los capitales de la contraprestación en el instante 4 es menor que el valor de los capitales de la prestación en dicho instante, es decir, $R_4 < 0 \Rightarrow T_4' > T_4$, lo que indica un saldo a favor del prestatario que adopta la posición acreedora y en contra del prestamista que adopta la posición deudora.

2.1.3. Método recurrente

El cálculo de la reserva matemática en un momento determinado t', posterior a t, consiste en calcular la reserva por el método retrospectivo, pero teniendo en cuenta la reserva matemática en el instante t.

La reserva matemática por el método retrospectivo en el instante t' se calcula como:

$$R_{t'} = S_{t'} - S'_{t'} = \sum_{t_i \le t'} C_i \cdot L(t_i,t') - \sum_{t_j' \le t'} C_j' \cdot L(t_j',t') =$$

$$= \left[\sum_{t_i \le t} C_i \cdot L(t_i,t) \cdot L(t,t') + \sum_{t<t_i \le t'} C_i \cdot L(t_i,t') \right] -$$

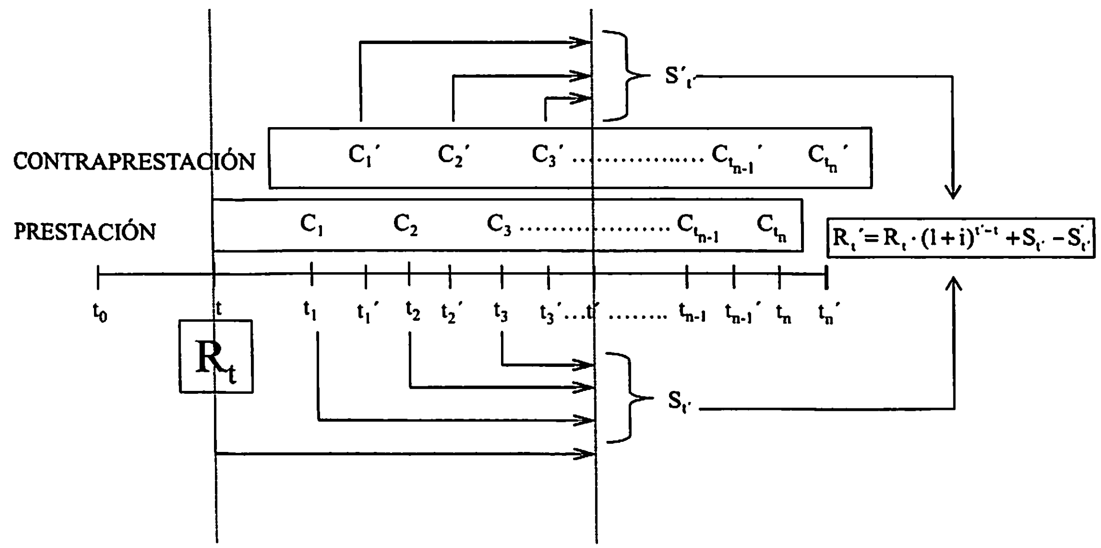
$$- \left[\sum_{t_j' \le t} C_j' \cdot L(t_j',t) \cdot L(t,t') + \sum_{t<t_j' \le t'} C_j' \cdot L(t_j',t') \right] =$$

$$= \left[\sum_{t_i \le t} C_i \cdot L(t_i,t) - \sum_{t_j' \le t} C_j' \cdot L(t_j',t) \right] \cdot L(t,t') + \left[\sum_{t<t_i \le t'} C_i \cdot L(t_i,t') - \sum_{t<t_j' \le t'} C_j' \cdot L(t_j',t') \right]$$

$$\boldsymbol{R_{t'} = R_t \cdot L(t,t') + \sum_{t<t_i \le t'} C_i \cdot L(t_i,t') - \sum_{t<t_j' \le t'} C_j' \cdot L(t_j',t')}$$

Por tanto, el valor de la reserva en t' por el método recurrente es igual al valor de la reserva matemática en un instante anterior $t < t'$, valorada en t', más la diferencia entre el valor en t' de los capitales de la prestación y de la contraprestación comprendidos entre t y t', valorados también en t'.

FIGURA 4.13. *Esquema para el cálculo de la reserva matemática por el método recurrente*



EJERCICIO 4.5.

Cuestión:

Sea la operación financiera constituida por:

- Prestación: $(1.000,1),(1.500,2),(3.000,5)$
- Contraprestación: $(500,2),(2.500,3),(2.694{,}35,\ 6)$

El tipo de interés efectivo anual es el 4%.

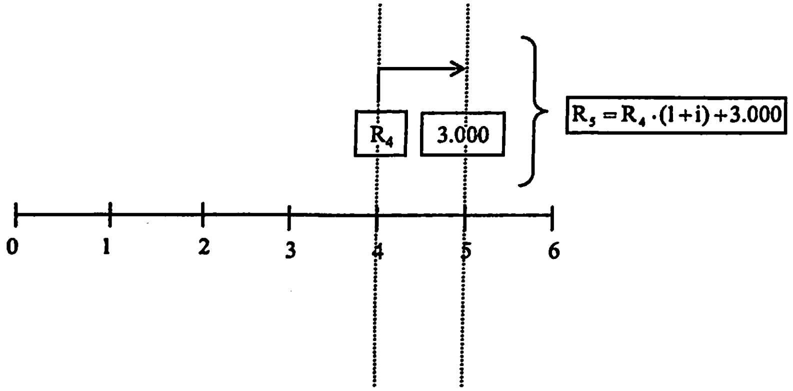
Calcular la reserva matemática en el instante 5 si la reserva en el instante 4 es –393,54 euros.

Solución:

Se calcula la diferencia entre el valor de los capitales de la prestación y el valor de los capitales de la contraprestación en el instante 5, pero sólo considerando los capitales comprendidos entre los instantes 4 y 5. A esta diferencia se le suma la reserva del instante 4 capitalizada hasta el instante 5.

$$R_5 = R_4 \cdot 1{,}04 + 3.000 = -393{,}54 \cdot 1{,}04 + 3.000 = 2.590{,}72\ €$$

FIGURA 4.14. *Esquema para el cálculo de la reserva matemática por el método recurrente*



Se trata de una reserva matemática positiva que indica un saldo a favor del prestamista que adopta la posición acreedora y en contra del prestatario que adopta la posición deudora.

2.2. ANÁLISIS DINÁMICO DE LA RESERVA MATEMÁTICA.

El análisis dinámico de la reserva matemática permite conocer su evolución a lo largo de toda la operación financiera. Por tanto, permite conocer en cada momento el sentido crediticio de la misma a través de la valoración financiera de las posiciones de las partes.

La reserva matemática R_t varía al variar el instante t dentro del intervalo $[t_1, t_n']$ según la estructura concreta de la prestación y de la contraprestación. En toda operación financiera la reserva matemática tomas los valores extremos siguientes:

- Para $t = t_1 \Rightarrow R_{t_1} = C_1$. Es decir, en el primer vencimiento de la operación la reserva matemática coincide con el capital correspondiente a dicho vencimiento.
- Para $t = t_n' \Rightarrow R_{t_n'} = 0$. Es decir, en el último vencimiento de la operación la reserva matemática es nula.
- Para $\left.\begin{matrix} t < t_1 \\ t > t_n' \end{matrix}\right\} \Rightarrow R_t = 0$. Es decir, antes del primer vencimiento y después del último vencimiento la reserva matemática es nula.

Sea una operación financiera:

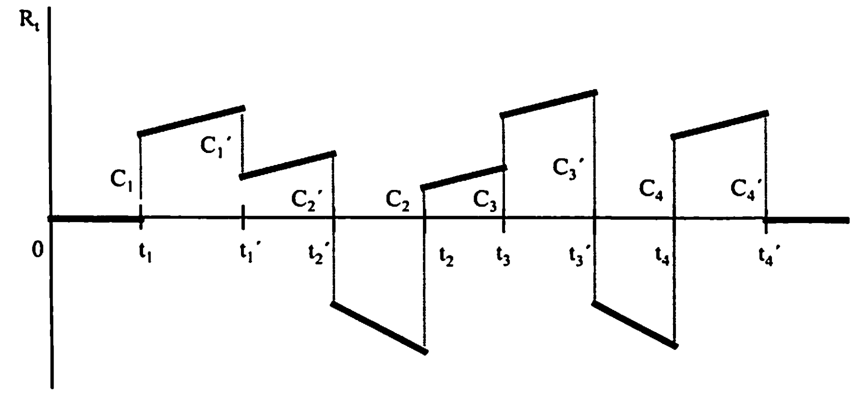
- Prestación: $(C_1, t_1), (C_2, t_2), (C_3, t_3), (C_4, t_4)$
- Contraprestación: $(C_1', t_1'), (C_2', t_2'), (C_3', t_3'), (C_4', t_4')$

donde:

$t_1 < t_1' < t_2' < t_2 < t_3 < t_3' < t_4 < t_4'$

La evolución de la reserva matemática se puede representar gráficamente como se muestra en la figura siguiente.

FIGURA 4.15. *Representación gráfica de la evolución de la reserva matemática*



3. CANCELACIÓN ANTICIPADA DE PRÉSTAMOS

En algunos casos el prestatario puede optar por cancelar anticipadamente el préstamo debido a varias causas, entre las que podemos destacar la evolución de los tipos de interés con tendencia bajista. Sin embargo, normalmente esta cancelación solía conllevar un coste para el prestatario que se denominaba "comisión por cancelación anticipada" que, en el caso de los préstamos a tipo variable, no podía exceder del 1% del capital pendiente en el momento de la cancelación[1], aunque para los préstamos a tipo fijo se recomendaba que no superase el 4% del capital pendiente, pero esta limitación no estaba establecida legalmente.

La cancelación puede ser de dos tipos:

- *Cancelación total:* Cuando se cancela totalmente la deuda en un momento determinado de tal manera que el prestatario no tiene que hacer frente a más pagos a partir de ese momento.
- *Cancelación parcial:* Cuando se cancela parcialmente la deuda en un momento determinado entregando en dicho momento una cantidad determinada[2] de tal manera que el prestatario tiene que hacer frente a más pagos a partir de ese momento.

Para cancelar un préstamo en un momento determinado el prestatario debe pagar el capital o la deuda pendiente en dicho momento, incrementado, en su caso, en las comisiones por cancelación anticipada correspondientes.

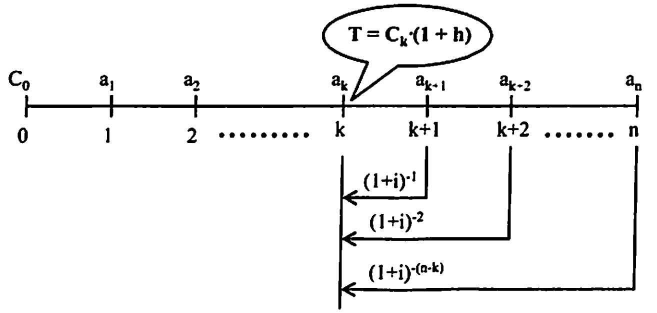
(1) Tal como se señala en el art. 3 de la *Ley 2/1994, de 30 de marzo, sobre subrogación y modificación de préstamos hipotecarios*, publicada en el BOE núm. 80 de 4 de abril de 1994.

(2) Normalmente en las escrituras de préstamos hipotecarios se solía establecer una limitación al prestatario para poder efectuar una cancelación anticipada y que consistía en que la cantidad a anticipar de forma parcial tenía que ser como mínimo igual a un número de las cuotas a pagar periódicamente o no superar un determinado porcentaje del capital pendiente en el momento de la cancelación. También era frecuente pactar operaciones con comisiones por cancelación parcial nulas.

3.1. CANCELACIÓN ANTICIPADA TOTAL

El esquema de un préstamo con cancelación anticipada total se puede observar en la figura siguiente:

FIGURA 4.16. *Cancelación anticipada total de un préstamo*



donde:

T: Cantidad total a pagar por el prestatario al prestamista en el momento de la cancelación total.

C_k: Capital pendiente transcurridos k periodos.

h: Comisión por cancelación anticipada, expresado como porcentaje a aplicar sobre el capital pendiente.

En el caso del método de amortización francés:

$$\boldsymbol{T = C_k \cdot (1 + h)}$$

CUADRO 4.3. *Cálculo del capital pendiente al final de un periodo determinado*

TIPO DE PRÉSTAMO	CAPITAL PENDIENTE (C_k)
Préstamo con términos amortizativos y tipo de interés constantes	$C_k = a \cdot a_{\overline{n-k\|}i}$
Préstamo con términos amortizativos variables en progresión aritmética y tipo de interés constante	$C_k = \left(a_{k+1} + \frac{d}{i} + d\cdot(n-k)\right)\cdot a_{\overline{n-k\|}i} - \frac{d\cdot(n-k)}{i}$
Préstamo con términos amortizativos variables en progresión geométrica y tipo de interés constante	$C_k = a_{k+1}\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^{n-k}}{1+i-q}\right)$
Préstamo con cuotas de amortización y tipo de interés constantes	$C_k = (n-k)\cdot M = (n-k)\cdot\frac{C_0}{n}$
Todos los préstamos	$C_k = C_0 - m_k$

EJERCICIO 4.6.

Datos:

- Nominal del préstamo = C_0 = 90.000 euros (préstamo formalizado con anterioridad a la entrada en vigor de la Ley 41/2007)
- Tipo de interés nominal = 4,5%
- Duración de la operación = 15 años
- Términos amortizativos mensuales constantes.
- Cancelación total a los diez años.
- Comisión por cancelación anticipada = 0,25% sobre el capital pendiente.

Cuestión:

¿Qué cantidad tendrá que pagar el prestatario al prestamista para cancelar la operación?

Solución:

Se calculan los términos amortizativos mensuales constantes utilizando el tipo de interés efectivo mensual:

$$i_{12} = \frac{J_{(12)}}{12} = \frac{0,045}{12} = 0,00375$$

$$90.000 = a \cdot a_{\overline{180|}0,00375} \Rightarrow a = 688,49\ €$$

Se calcula el capital pendiente a los diez años (120 meses):

$$C_{120} = 688,49 \cdot a_{\overline{180-120|}0,00375} = 688,49 \cdot a_{\overline{60|}0,00375} = 36.930,18\ €$$

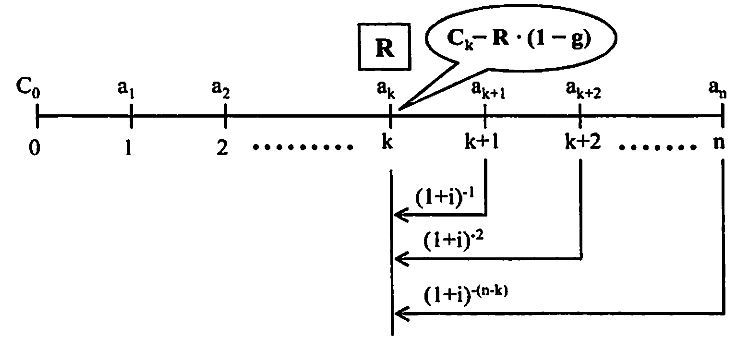
Por último se obtiene la cantidad a pagar por el prestatario al prestamista en el momento de la cancelación:

$$T = C_{120} \cdot (1 + h) = 36.930,18 \cdot (1 + 0,0025) = 40.030,01\ €$$

3.2. CANCELACIÓN ANTICIPADA PARCIAL

El esquema de un préstamo hipotecario con cancelación parcial se puede observar en la figura siguiente:

FIGURA 4.17. *Cancelación anticipada parcial de un préstamo*



donde:

R: Cantidad a reembolsar por el prestatario al prestamista en el momento de la cancelación parcial.

C_k : Capital pendiente transcurridos k periodos.

g: Comisión por cancelación anticipada, expresado como porcentaje a aplicar sobre el capital cancelado parcialmente.

Las opciones más frecuentes que se pueden presentar son las siguientes:

1) Se entrega la cantidad correspondiente en el momento de la cancelación parcial y se mantiene el plazo de la operación con la consiguiente reducción de los términos amortizativos que deben ser satisfechos a partir de dicho momento.
2) Entregada la cantidad a cuenta en el momento de la cancelación parcial, se mantienen los términos amortizativos acortando, como consecuencia, el plazo de la operación.
3) Se suspende el pago de los términos amortizativos durante un determinado número de periodos de acuerdo con el importe de la cantidad que se ha aportado para la cancelación parcial. A partir de estos periodos sin pago se satisfacen el resto de los términos amortizativos previstos. Esta es la opción menos frecuente de las tres.

En el caso del método de amortización francés:

1) Cálculo de los nuevos términos amortizativos manteniéndose el plazo de la operación:

$$C_k - R\cdot(1-g) = a_x \cdot a_{\overline{n-k|}i} \Rightarrow \boldsymbol{a_x = \frac{C_k - R\cdot(1-g)}{a_{\overline{n-k|}i}}}$$

donde:

a_x : Nuevos términos amortizativos a partir del periodo k.

$a_x < a$

a: Término amortizativo inicial.

n: Duración de la operación.

C_k : Capital pendiente al final del periodo k.

R: Cantidad entregada en el momento de la cancelación parcial.

g: Comisión por cancelación anticipada (porcentaje sobre la cantidad entregada en el momento de la cancelación parcial R).

2) Cálculo del nuevo plazo restante de la operación manteniéndose los términos amortizativos:

$$\boldsymbol{C_k - R\cdot(1-g) = a\cdot a_{\overline{x|}i}}$$

donde:

x: Nuevo plazo restante de la operación desde el momento de la cancelación parcial o final del periodo k.

$x < n - k$

n: Duración de la operación.

C_k : Capital pendiente al final del periodo k.

R: Cantidad entregada en el momento de la cancelación parcial.

g: Comisión por cancelación anticipada (porcentaje sobre la cantidad entregada en el momento de la cancelación parcial R).

3) Cálculo de los nuevos términos amortizativos manteniéndose el plazo de la operación después de la suspensión de los pagos de h periodos después de la cancelación parcial:

$$C_k - R\cdot(1-g) = \frac{a_x \cdot a_{\overline{n-k-h|}i}}{(1+i)^h} \Rightarrow \boldsymbol{a_x = \frac{[C_k - R\cdot(1-g)]\cdot(1+i)^h}{a_{\overline{n-k-h|}i}}}$$

donde:

a_x : Nuevos términos amortizativos a partir de h periodos sin pagos a partir del periodo k.

n: Duración de la operación.

C_k : Capital pendiente al final del periodo k.

R: Cantidad entregada en el momento de la cancelación parcial.

g: Comisión por cancelación anticipada (porcentaje sobre la cantidad entregada en el momento de la cancelación parcial R).

EJERCICIO 4.7.

Datos:

- **Nominal del préstamo = C_0 = 90.000 euros (préstamo formalizado con anterioridad a la entrada en vigor de la Ley 41/2007)**
- **Tipo de interés nominal = 4,5%**
- **Duración de la operación = 15 años.**
- **Términos amortizativos mensuales constantes.**
- **Cancelación parcial de 6.000 euros a los diez años.**
- **Comisión por cancelación anticipada = 1,5% sobre el capital pendiente.**

Cuestiones:

1) **Calcular los nuevos términos amortizativos a partir de la cancelación si se mantiene el plazo de la operación inicial.**
2) **Calcular el plazo restante de la operación si sigue pagando los términos amortizativos iniciales.**
3) **Calcular los nuevos términos amortizativos si suspende los pagos dos años después de la cancelación.**

Solución:

1) **Cálculo de los nuevos términos amortizativos a partir de la cancelación si se mantiene el plazo de la operación inicial.**

Se calculan los términos amortizativos mensuales constantes utilizando el tipo de interés efectivo mensual:

$$i_{12} = \frac{J_{(12)}}{12} = \frac{0,045}{12} = 0,00375$$

$$90.000 = a \cdot a_{\overline{180}|0,00375} \Rightarrow a = 688,49 \text{ €}$$

Se calcula el capital pendiente a los diez años (120 meses):

$$C_{120} = 688,49 \cdot a_{\overline{180-120}|0,00375} = 688,49 \cdot a_{\overline{180-120}|0,00375} = 36.930,18 \text{ €}$$

Por último se obtiene la cuantía de los nuevos términos amortizativos a partir de la cancelación:

$$C_{120} - R \cdot (1-g) = a_x \cdot a_{\overline{60}|0,00375}$$

$$36.930,18 - 6.000 \cdot (1 - 0,015) = a_x \cdot a_{\overline{60}|0,00375}$$

$$a_x = 578,31 \text{€} < a = 688,49 \text{€}$$

2) Cálculo del plazo restante de la operación si sigue pagando los términos amortizativos iniciales.

$$C_{120} - R \cdot (1-g) = a \cdot a_{\overline{x}|0,00375}$$

$$36.930,18 - 6.000 \cdot (1 - 0,0025) = 688,49 \cdot a_{\overline{x}|0,00375}$$

$$x = 49 \text{ meses} < n - k = 60 \text{ meses}$$

3) Cálculo de los nuevos términos amortizativos si suspende los pagos dos años después de la cancelación.

$$C_{120} - R \cdot (1-g) = \frac{a_x \cdot a_{\overline{n-k-h}|0,00375}}{(1+i)^h}$$

$$36.930,18 - 6.000 \cdot (1 - 0,0025) = \frac{a_x \cdot a_{\overline{180-120-24}|0,00375}}{(1+0,00375)^{24}} = \frac{a_x \cdot a_{\overline{36}|0,00375}}{(1+0,00375)^{24}}$$

$$a_x = 1.007,04 \text{ €}$$

3.3. RÉGIMEN DE COMPENSACIÓN POR AMORTIZACIÓN ANTICIPADA (ARTS. 7, 8 Y 9 DE LA LEY 41/2007)

La Ley 41/2007, de 7 de diciembre, por la que se modifica la Ley 2/1981, de 25 de marzo, de Regulación del Mercado Hipotecario y otras normas del sistema hipotecario y financiero, de regulación de las hipotecas inversas y el seguro de dependencia y por la que se establece determinada norma tributaria, regula el régimen de compensación por amortización anticipada (arts. 7 a 9, ambos inclusive), que sustituye al anterior de comisión para los préstamos hipotecarios concertados a partir de la entrada en vigor de esta Ley, de modo que en ningún contrato podrá cobrarse por ambos conceptos. En primer lugar, cambia la denominación de la comisión por amortización anticipada por la de compensación al ser esta más acorde con su naturaleza. En segundo lugar, se divide esta compensación por amortización anticipada entre la compensación que se hace a la entidad por desistir de un contrato y generarle una pérdida por los costes de origen del préstamo, y la compensación por el riesgo de tipo de interés de la entidad cuando se amortiza

anticipadamente en coyunturas de bajadas en los tipos de interés. Se introducen dos elementos para que esta segunda compensación guarde relación con la pérdida económica real para la entidad. El primero es el establecimiento de una base de cálculo que refleje de manera más precisa la exposición al riesgo de la entidad. El segundo es la prohibición del cobro de la compensación en aquellos casos en que la amortización genera una ganancia de capital para la entidad prestataria, no teniendo por tanto una motivación económica.

En las cancelaciones subrogatorias y no subrogatorias, totales o parciales, que se produzcan en los créditos o préstamos hipotecarios[3], la cantidad a percibir por la entidad acreedora en concepto de compensación por desistimiento no podrá ser superior:

a) al 0,5 por ciento del capital amortizado anticipadamente cuando la amortización anticipada se produzca dentro de los cinco primeros años de vida del crédito o préstamo, o

b) al 0,25 por ciento del capital amortizado anticipadamente cuando la amortización anticipada se produzca en un momento posterior al indicado en el número anterior.

Si se hubiese pactado una compensación por desistimiento igual o inferior a la indicada en el apartado anterior, la compensación a percibir por la entidad acreedora será la pactada.

3.4. REEMBOLSO ANTICIPADO (ART. 23 DE LA LEY 5/2019)

La *Ley 5/2019, de 15 de marzo, reguladora de los contratos de crédito inmobiliario* establece, como novedad, el derecho del prestatario a reembolsar, con carácter general, todo o parte del préstamo sin tener que soportar comisiones o compensaciones para el prestamista. Únicamente se satisfará al prestamista la pérdida financiera de éste cuando el reembolso se produzca en los primeros años de vigencia del contrato (difieren entre los contratos a tipo variable y los contratos a tipo fijo), y siempre que esa pérdida no supere aplicando unos porcentajes máximos previstos legalmente (art. 23).

En los contratos de préstamo a tipo de interés variable, o en aquellos tramos variables de cualquier otro préstamo, las partes podrán establecer contractualmente una compensación o comisión a favor del prestamista para alguno de los dos siguientes supuestos que serán excluyentes entre sí: a) en caso de reembolso o amortización anticipada total o parcial del préstamo durante los 5 primeros años de vigencia del contrato de préstamo, se podrá establecer una compensación o comisión a favor del prestamista que no podrá exceder del importe de la pérdida financiera que pudiera sufrir el prestamista, con el límite del 0,15 por ciento del capital reembolsado anticipadamente; o b) en caso de reembolso o amortización anticipada total o parcial

(3) Según el art. 7 de la *Ley 41/2007* esta compensación por desistimiento será de aplicación a los contratos de crédito o préstamo hipotecario formalizados con posterioridad a la entrada en vigor de esta Ley y aunque no conste en los mismos la posibilidad de amortización anticipada, cuando concurra alguna de las siguientes circunstancias: a) que se trate de un préstamo o crédito hipotecario y la hipoteca recaiga sobre una vivienda y el prestatario sea persona física, b) que el prestatario sea persona jurídica y tribute por el régimen fiscal de empresas de reducida dimensión en el Impuesto sobre Sociedades, c) en dichos contratos de crédito o préstamo hipotecario no podrá cobrarse comisión por amortización anticipada total o parcial. En cualquier caso, la entidad estará obligada a expedir la documentación bancaria que acredite el pago del préstamo sin cobrar ninguna comisión por ello.

del préstamo durante los 3 primeros años de vigencia del contrato de préstamo, se podrá establecer una compensación o comisión a favor del prestamista que no podrá exceder del importe de la pérdida financiera que pudiera sufrir el prestamista, con el límite del 0,25 por ciento del capital reembolsado anticipadamente (art. 23).

En caso de novación del tipo de interés aplicable o de subrogación de un tercero en los derechos del acreedor, siempre que en ambos casos suponga la aplicación durante el resto de vigencia del contrato de un tipo de interés fijo en sustitución de otro variable, la compensación o comisión por reembolso o amortización anticipada no podrá superar la pérdida financiera que pudiera sufrir el prestamista, con el límite del 0,15 por ciento del capital reembolsado anticipadamente, durante los 3 primeros años de vigencia del contrato de préstamo. Transcurridos los 3 primeros años de vigencia del contrato de préstamo el prestamista no podrá exigir compensación o comisión alguna en caso de novación del tipo de interés aplicable o de subrogación de acreedor en los que se pacte la aplicación, en adelante y para el resto de la vida del préstamo, de un tipo de interés fijo (art. 23).

En los contratos de préstamo a tipo de interés fijo o en aquellos tramos fijos de cualquier otro préstamo, podrá establecerse contractualmente una compensación o comisión a favor del prestamista que tendrá los siguientes límites: a) en caso de reembolso o amortización anticipada total o parcial del préstamo durante los 10 primeros años de vigencia del contrato de préstamo o desde el día que resulta aplicable el tipo fijo, se podrá establecer una compensación o comisión a favor del prestamista que no podrá exceder del importe de la pérdida financiera que pudiera sufrir el prestamista, con el límite del 2 por ciento del capital reembolsado anticipadamente; y b) en caso de reembolso o amortización anticipada total o parcial del préstamo desde el fin del período señalado en la letra a) hasta el final de la vida del préstamo, se podrá establecer una compensación o comisión a favor del prestamista que no podrá exceder del importe de la pérdida financiera que pudiera sufrir el prestamista, de conformidad con la forma de cálculo prevista en el apartado siguiente, con el límite del 1,5 por ciento del capital reembolsado anticipadamente (art. 23).

La pérdida financiera sufrida por el prestamista se calculará, proporcionalmente al capital reembolsado, por diferencia negativa entre el capital pendiente en el momento del reembolso anticipado y el valor presente de mercado del préstamo. El valor presente de mercado del préstamo se calculará como la suma del valor actual de las cuotas pendientes de pago hasta la siguiente revisión del tipo de interés y del valor actual del capital pendiente que quedaría en el momento de la revisión de no producirse la cancelación anticipada. El tipo de interés de actualización será el de mercado aplicable al plazo restante hasta la siguiente revisión.

El valor de mercado se calculará, considerando como tipos de interés de referencia, los tipos *Interest Rate Swap* (IRS) a los plazos de 2, 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20 y 30 años que publicará el Banco de España y a los que se añadirá un diferencial. Este diferencial se fijará como la diferencia existente, en el momento de contratación de la operación, entre el tipo de interés de la operación y el IRS al plazo que más se aproxime, en ese momento, hasta la siguiente fecha de revisión del tipo de interés o hasta la fecha de su vencimiento[4].

(4) Véase, al respecto, el art. 2.10 de la *Orden ECE/482/2019, de 26 de abril*, por la que se modifican la *Orden EHA/1718/2010, de 11 de junio, de regulación y control de la publicidad de los servicios y productos bancarios*, y la *Orden EHA/2899/2011, de 28 de octubre, de transparencia y protección del cliente de servicios bancarios.*

EJERCICIO 4.8.

Datos:

- Nominal del préstamo = C_0 = 300.000 euros
- Tipo de interés nominal = 2,4%
- Duración de la operación = 30 años.
- Términos amortizativos mensuales constantes.
- IRS a 30 años = 1% (en el momento de la contratación)
- IRS a 10 años = 0,75% (en el momento de la amortización total)

Cuestión:

Calcular la pérdida financiera y la compensación por riesgo de tipo de interés a abonar por el prestatario al prestamista en los dos casos siguientes:

a) si amortiza anticipadamente el préstamo transcurridos 22 años.

b) si amortiza anticipadamente 100.000 euros transcurridos 22 años.

Solución:

a) Cálculo de la pérdida financiera y de la compensación por riesgo de tipo de interés si se cancela totalmente el préstamo transcurridos 22 años.

Se calculan los términos amortizativos mensuales constantes a partir de equivalencia financiera en el origen con el tipo de interés efectivo mensual:

$$i_{12} = \frac{J_{(12)}}{12} = \frac{0,024}{12} = 0,0020$$

$$n = 30\,\text{años} = 360 \text{ meses}$$

$$300.000 = a \cdot a_{\overline{360}|0,0020} \Rightarrow a = 1.169,82\ €$$

Se calcula el capital pendiente transcurridos 22 años (264 meses):

$$C_{264} = 1.169,82 \cdot a_{\overline{360-264}|0,0020} = 1.169,82 \cdot a_{\overline{96}|0,0020} = 102.087,19\ €$$

Se calcula el tipo de interés de mercado para calcular el valor de mercado transcurridos 264 meses:

Diferencial = Tipo del préstamo – IRS (momento de la contratación) =

= 0,024–0,01 = 0,014

Tipo de interés de mercado = IRS (momento de la amortización) +

+ Diferencial = 0,0075 + 0,014 = 0,0215 (tipo nominal)

$$\text{Tipo de interés de mercado (tipo efectivo mensual)} = \frac{0,0225}{12} = 0,0019$$

Se calcula el valor de mercado transcurridos 294 meses:

$$V_{264} = 1.169,82 \cdot a_{\overline{360-264}|0,0019} = 1.169,82 \cdot a_{\overline{96}|0,0019} = 102.567,24\ €$$

Se calcula la pérdida financiera para el prestamista:

$$\text{Pérdida} = C_{264} - V_{264} = 102.087,19 - 102.567,24 = -480,05\ €$$

Se calcula la compensación por riesgo de tipo de interés a abonar por el prestatario al prestamista:

Límite a abonar = 0,015 · 102.087,19 = 1.531,31 € (el porcentaje a aplicar para calcular el límite es el 1,5% de la cantidad amortizada anticipadamente ya que la amortización anticipada es al final del año 22, es decir, posterior al año 10).

Compensación por riesgo de tipo de interés = 480,05 € por no superar el límite.

b) Cálculo de la pérdida financiera y de la compensación por riesgo de tipo de interés si se cancela parcialmente el préstamo transcurridos 22 años.

Se calculan los términos amortizativos mensuales constantes a partir de equivalencia financiera en el origen con el tipo de interés efectivo mensual:

$$i_{12} = \frac{J_{(12)}}{12} = \frac{0,024}{12} = 0,0020$$

$n = 30$ años $= 360$ meses

$300.000 = a \cdot a_{\overline{360}|0,0020} \Rightarrow a = 1.169,82$ €

Se calcula el capital pendiente transcurridos 22 años (264 meses):

$C_{264} = 1.169,82 \cdot a_{\overline{360-264}|0,0020} = 1.169,82 \cdot a_{\overline{96}|0,0020} = 102.087,19$ €

Se calcula el tipo de interés de mercado para calcular el valor de mercado transcurridos 264 meses:

Diferencial = Tipo del préstamo – IRS (momento de la contratación) =

= 0,024–0,01 = 0,014

Tipo de interés de mercado = IRS (momento de la amortización) +

+ Diferencial = 0,0075 + 0,014 = 0,0215 (tipo nominal)

Tipo de interés de mercado (tipo efectivo mensual) $= \frac{0,0225}{12} = 0,0019$

Se calcula el valor de mercado transcurridos 294 meses:

$V_{264} = 1.169,82 \cdot a_{\overline{360-264}|0,0019} = 1.169,82 \cdot a_{\overline{96}|0,0019} = 102.567,24$ €

Se calcula la pérdida financiera para el prestamista:

Pérdida $= C_{264} - V_{264} = 102.087,19 - 102.567,24 = -480,05$ €

Se calcula el porcentaje que representa la cuantía amortizada anticipadamente sobre el capital pendiente antes de la cancelación parcial:

$$\frac{100.000}{102.087,19} = 0,9796 = 97,96\%$$

Se calcula la pérdida financiera proporcional para el prestamista:

Pérdida proporcional $= 0,9796 \times 480,05 = 470,26$ €

Límite a abonar = 0,015 · 100.000 = 15.000 € (el porcentaje a aplicar para calcular el límite es el 1,5% de la cantidad amortizada anticipadamente ya que la amortización anticipada es al final del año 22, es decir, posterior al año 10).

Compensación por riesgo de tipo de interés = 470,26 € por no superar el límite.

EJERCICIO 4.9.

Datos:

- Nominal del préstamo mixto = C_0 = 300.000 euros
- Duración de la operación = 30 años.
- Tipo de interés nominal = 2,4% (los 10 primeros años)
- Tipo de interés nominal = EURIBOR + 0,50% (los años restantes)
- Términos amortizativos mensuales constantes.
- IRS a 30 años = 1% (en el momento de la contratación)
- IRS a 2 años = 0,25% (en el momento de la amortización total)

Cuestión:

Calcular la pérdida financiera y la compensación por riesgo de tipo de interés a abonar por el prestatario al prestamista si amortiza anticipadamente el préstamo transcurridos 8 años.

Solución:

Se calculan los términos amortizativos mensuales constantes a partir de la equivalencia financiera en el origen con el tipo de interés efectivo mensual de los 10 primeros años del préstamos:

$$i_{12} = \frac{J_{(12)}}{12} = \frac{0,024}{12} = 0,0020$$

$n = 30$ años $= 360$ meses

$300.000 = a \cdot a_{\overline{360}|0,0020} \Rightarrow a = 1.169,82$ €

Se calcula el capital pendiente transcurridos 8 años (96 meses):

$C_{96} = 1.169,82 \cdot a_{\overline{360-96}|0,0020} = 1.169,82 \cdot a_{\overline{264}|0,0020} = 239.757,87$ €

Se calcula el tipo de interés de mercado para calcular el valor de mercado transcurridos 96 meses:

Diferencial = Tipo del préstamo – IRS (momento de la contratación) =

= 0,024 – 0,01 = 0,014

Tipo de interés de mercado = IRS (momento de la amortización) + Diferencial =

= 0,0025 + 0,014 = 0,0165 (tipo nominal)

Tipo de interés de mercado (tipo efectivo mensual) $= \frac{0,0165}{12} = 0,0014$

Se calcula el valor de mercado transcurridos 96 meses como la suma del capital pendiente de amortizar de la parte fija y el valor actualizado del capital pendiente de amortizar al final de la parte fija en el caso de no producirse la amortización anticipada:

$C_{120} = 1.169,82 \cdot a_{\overline{360-120}|0,0019} = 1.169,82 \cdot a_{\overline{240}|0,0019} = 225.290,02$ €

$$V_{96} = 1.169,82 \cdot a_{\overline{120-96}|0,0014} + \frac{225.290,02}{(1+0,0014)^{120-96}} =$$

$$= 1.169,82 \cdot a_{\overline{24}|0,0014} + \frac{225.290,02}{(1+0,0014)^{24}} = 245.441,41 \text{ €}$$

Se calcula la pérdida financiera para el prestamista:

Pérdida $= C_{96} - V_{96} = 239.757,87 - 245.441,41 = -5.683,54$€

Se calcula la compensación por riesgo de tipo de interés a abonar por el prestatario al prestamista:

Límite a abonar = 0,02 · 239.757,87 = 4.795,15 € (el porcentaje a aplicar para calcular el límite es el 2% de la cantidad amortizada anticipadamente ya que la amortización anticipada es al final del año 8, es decir, anterior al año 10).

Compensación por riesgo de tipo de interés = 4.795,15 € ya que se aplica el límite porque la pérdida financiera es mayor.

4. COSTE, RENTABILIDAD Y T. A. E

Para hallar el coste efectivo o real, la rentabilidad efectiva o real y la T. A. E. de una operación financiera es necesario utilizar las características comerciales que alteran la prestación o la contraprestación de cualquiera de las partes que intervienen en la operación.

En un préstamo se pueden pactar, por un lado, *características comerciales unilaterales* que consituyen todos aquellos pagos o cobros que afectan únicamente a una de las partes que interviene en la operación. Cabe citar, entre otros: los gastos de tasación, los honorarios registrables y notariales, los gastos de gestoría y los impuestos.

Y, por otro lado, *características comerciales bilaterales* constituidas por todos aquellos pagos que afectan a ambas partes. Cabe citar, entre otros: la comisión de apertura, la comisión por cancelación anticipada y otros gastos bancarios.

4.1. COSTE EFECTIVO O REAL PARA EL PRESTATARIO

Se define el coste efectivo o real para el prestatario como aquella tasa porcentual anual pagadera a término vencido equivalente que iguala en cualquier fecha los efectivos recibidos y entregados por el prestatario a lo largo de la operación.

Por tanto, se define el *coste efectivo o real para el prestatario,* i_p, como la tasa anual porcentual equivalente pagadera a término vencido, que iguala la prestación real del prestatario (lo que recibe realmente) con la contraprestación real del prestatario (lo que entrega realmente), teniendo en cuenta todas las características comerciales que afectan al prestatario en relación con la operación, tanto las unilaterales como las bilaterales, es decir:

- Prestación real del prestatario: $(C_0 - G_p^i, 0)$
- Contraprestación real del prestatario:

$$\left[(a_1 + g_1, 1), (a_2 + g_2, 2), \ldots, (a_n + g_n + G_p^f, n)\right]$$

donde:

C_0 : Cuantía o principal del préstamo.

G_p^i : Gastos iniciales a cargo del prestatario.

a_k : Término amortizativo del periodo k ($k = 1, 2, \ldots, n$).

g_k : Gastos periódicos a cargo del prestatario en el periodo k ($k = 1, 2, \ldots, n$).

G_p^f : Gastos en el momento de la cancelación a cargo del prestatario.

Por tanto:

$$C_0 - G_p^i = \frac{a_1 + g_1}{1 + i_k} + \frac{a_2 + g_2}{(1 + i_k)^2} + \ldots + \frac{a_n + g_n + G_p^f}{(1 + i_k)^{n \cdot k}}$$

$$i_p = (1 + i_k)^k - 1$$

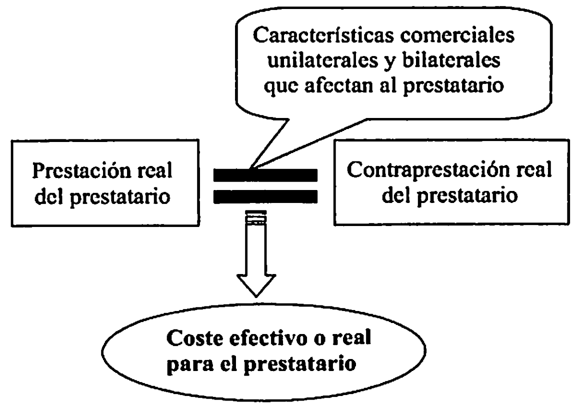
donde k es el número de veces que el año contiene al periodo elegido (meses, semestres, etc.).

En el método de amortización francés y suponiendo gastos periódicos constantes g:

$$C_0 - G_p^i = (a + g) \cdot a_{\overline{n \cdot k}|i_k} + \frac{G_p^f}{(1 + i_k)^{n \cdot k}}$$

$$\boldsymbol{i_p = (1 + i_k)^k - 1}$$

FIGURA 4.18. *Coste efectivo o real para el prestatario.*



4.2. RENTABILIDAD EFECTIVA O REAL PARA EL PRESTAMISTA

Se define la rentabilidad efectiva o real para el prestamista como aquella tasa porcentual anual pagadera a término vencido equivalente que iguala en cualquier fecha los efectivos recibidos y entregados por el prestamista a lo largo de la operación.

Por tanto, se define la *rentabilidad efectiva o real para el prestamista,* i_a, como la tasa anual porcentual equivalente pagadera a término vencido, que iguala la prestación real del prestamista (lo que entrega realmente) con la contraprestación real del prestamista (lo que recibe realmente), teniendo en cuenta todas las características comerciales que afectan al prestamista en relación con la operación, tanto las unilaterales como las bilaterales, es decir:

- Prestación real del prestamista: $(C_0 + G_a^i, 0)$
- Contraprestación real del prestamista:

$$\left[(a_1 - g_1, 1), (a_2 - g_2, 2), \ldots, (a_n - g_n - G_a^f, n)\right]$$

donde:

C_0 : Cuantía o principal del préstamo.

G_a^i : Gastos iniciales a cargo del prestamista.

a_k : Término amortizativo del periodo k (k = 1, 2, ..., n).

g_k : Gastos periódicos a cargo del prestamista en el periodo k (k = 1, 2, ..., n).

G_a^f : Gastos en el momento de la cancelación a cargo del prestamista.

Por tanto:

$$C_0 + G_a^i = \frac{a_1 - g_1}{1 + i_k} + \frac{a_2 - g_2}{(1 + i_k)^2} + \ldots + \frac{a_n - g_n - G_a^f}{(1 + i_k)^{n \cdot k}}$$

$$\mathbf{i_a = (1 + i_k)^k - 1}$$

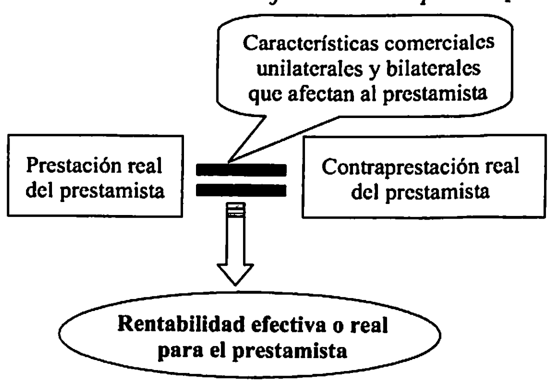
donde k es el número de veces que el año contiene al periodo elegido (meses, semestres, etc.).

En el método de amortización francés y suponiendo gastos periódicos constantes g:

$$C_0 + G_a^i = (a - g) \cdot a_{\overline{n \cdot k}|i_k} - \frac{G_a^f}{(1 + i_k)^{n \cdot k}}$$

$$i_a = (1 + i_k)^k - 1$$

FIGURA 4.19. *Rentabilidad efectiva o real para el prestamista*



4.3. T. A. E. O TASA ANUAL EQUIVALENTE

Se define las tasa anual equivalente (TAE) como aquella tasa porcentual anual pagadera a término vencido equivalente, que expresa la equivalencia anual entre la suma de los valores actualizados de las disposiciones de crédito y la suma de los valores actualizados de los importes de los reembolsos y pagos de gastos[5].

(5) Véase, al respecto, el Anexo II de la *Ley 5/2019, de 15 de marzo, reguladora de los contratos de crédito inmobiliario.* Según el art. 4 de esta Ley la TAE "es el coste total del préstamo para el prestatario, expresado como porcentaje anual del importe total del préstamo concedido, más

La equivalencia financiera que permite obtener la TAE, según la normativa vigente se expresa como:

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \cdot (1 + TAE)^{-t_k} = \sum_{l=1}^{m'} D_l \cdot (1 + TAE)^{-s_l}$$

donde:

C_k: es el importe de la disposición número k.

D_l: es el importe del reembolso o pago de gastos número l.

k: es el número de orden de cada una de las disposiciones de fondos.

l: es el número de orden de cada uno de los reembolsos o pagos.

m: es el número de orden de la última disposición.

m': es el número de orden del último reembolso o pago de gastos.

t_k: es el intervalo de tiempo, expresado en años y fracciones de año, entre la fecha de la primera operación de disposición de fondos y la fecha de cada una de las disposiciones siguientes.

s_l: es el intervalo de tiempo, expresado en años y fracciones de año, entre la fecha de la primera disposición y la fecha de cada reembolso o pago.

Sin embargo, la TAE no proporciona el coste efectivo o real para el prestatario ya que para su cálculo sólo se tienen en cuenta las características comerciales bilaterales que intervienen en la operación.

Según la *Ley 5/2019*, para calcular la TAE de un préstamo hipotecario se tendrá en cuenta el tipo de interés nominal (TIN) de la operación y los gastos obligatorios que supongan un coste directo para el prestatario de la operación. Se pueden distinguir dos tipos de gastos obligatorios en un préstamos hipotecario:

- Gastos de constitución de la hipoteca (comisión de apertura y gastos de tasación de la vivienda). El resto de gastos de constitución los asumirá la entidad financiera desde la Ley 5/2019 (gastos de gestoría, registro, notaríao, impuesto sobre transmisiones patrimoniales y actos jurídicos documentados y copia de escritura si la solicita).
- Gastos periódicos (cuotas de los productos vinculados como los seguros o los costes de mantenimiento de una cuenta bancaria que tal vez se deba abrir para domiciliar la nómina en la entidad financiera).

Los gastos opcionales no se incluirían para el cálculo de la TAE. Por ejemplo: las comisiones por subrogación y/o novación, las compensaciones por riesgo de tipo de interés.

Por tanto, se define la *tasa anual equivalente (TAE)* de un préstamo hipotecario como la tasa anual porcentual equivalente pagadera a término vencido, que iguala la prestación real del prestatario (lo que recibe realmente) con la contraprestación real del prestatario (lo que entrega realmente), teniendo en cuenta la normativa vigente. Por tanto, es la tasa anual equivalente que que iguala, en cualquier fecha, el valor actual de los efectivos entregados y recibidos a lo largo de la operación.

- Prestación real del prestatario: $(C_0 - G_p^i, 0)$

los costes aparejados, si ha lugar, y que corresponde, sobre una base anual, al valor actual de todos los compromisos futuros o existentes, tales como disposiciones de fondos, reembolsos y gastos, convenidos por el prestamista y el prestatario".

- Contraprestación real del prestatario: $[(a_1+g_1,1),(a_2+g_2,2),\dots,(a_n+g_n)]$

donde:

C_0 : Cuantía o principal del préstamo.

G_p^i : Gastos iniciales a cargo del prestatario (comisión de apertura y gastos de tasación).

a_k : Término amortizativo del periodo k ($k = 1, 2, \dots, n$).

g_k : Gastos periódicos a cargo del prestatario en el periodo k ($k = 1, 2, \dots, n$) (cuotas de seguros obligatorios, etc.).

Por tanto:

$$C_0 - G_p^i = \frac{a_1+g_1}{1+i_k} + \frac{a_2+g_2}{(1+i_k)^2} + \dots + \frac{a_n+g_n}{(1+i_k)^{n\cdot k}}$$

$$T.A.E. = (1+i_k)^k - 1$$

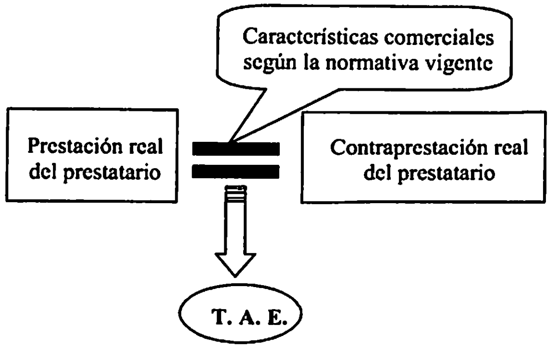
donde k hace referencia a la frecuencia de capitalización de los intereses dentro de un año (2 para frecuencia mensual, 4 para frecuencia trimestral, etc.).

En el método de amortización francés y suponiendo gastos periódicos constantes g:

$$C_0 - G_p^i = (a+g)\cdot a_{\overline{n\cdot k}|i_k}$$

$$\mathbf{T.A.E. = (1+i_k)^k - 1}$$

FIGURA 4.20. Tasa Anual Equivalente (T. A. E.)



Para el caso de las operaciones a tipo de interés variable[6]:

- la TAE Variable se calculará bajo el supuesto teórico de que el tipo de referencia inicial permanece constante, durante toda la vida de la operación, en el último nivel conocido en el momento de celebración del contrato, y, si se pactara un tipo de interés fijo para cierto período inicial, este se tendrá en cuenta en el cálculo, pero únicamente durante dicho período inicial. En estos casos, la tasa anual equivalente solo tendrá efectos informativos, y se hará seguir de la expresión "esta TAE Variable se ha calculado bajo la hipótesis de que los

(6) Véase, al respecto, la norma decimotercera de la *Circular 5/2012, de 27 de junio, del Banco de España, a entidades de crédito y proveedores de servicios de pago, sobre transparencia de los servicios bancarios y responsabilidad en la concesión de préstamos.*

índices de referencia no varían; por tanto, esta TAE Variable variará con las revisiones del tipo de interés".

- Cuando se trate de una operación a tipo de interés variable en la que se establezcan límites a su variación, dichos límites deberán tenerse en cuenta para el cálculo de la tasa anual equivalente.
- En las operaciones a tipo de interés variable, las modificaciones que experimenten los índices de referencia no se reflejarán en el coste efectivo remanente hasta que no afecten al tipo nominal de la operación. La indicación del coste efectivo se acompañará de la expresión "variará con las revisiones del tipo de interés".

En la *Circular 5/2012*, se indica que en los documentos de liquidación debe facilitarse periódicamente a los clientes el *coste efectivo remanente* (CER), que se calculará teniendo en cuenta exclusivamente el plazo pendiente hasta el vencimiento o amortización y los conceptos de coste que resten por pagar si la operación sigue su curso normal.

En la definición de la TAE debemos reflejar una serie de objeciones:

- En la práctica, la TAE se puede identificar con el coste efectivo o real para el prestatario si se incluyesen para su cálculo todas las características comerciales que afectan al prestatario. En caso contrario, la TAE sería inferior al coste efectivo o real para el prestatario.
- Esta definición es correcta sólo bajo la hipótesis de reinversión de los términos amortizativos a la TAE, ya que se utiliza la capitalización compuesta. Sin embargo, esto no se corresponde con la realidad ya que no se tiene en cuenta el comportamiento de los tipos de interés en el mercado.
- La TAE no es significativa en los préstamos a tipo de interés variable ya que se presupone que el tipo de interés inicial permanece constante, lo cual no es cierto.
- La TAE exige resolver una ecuación de grado n que, en el caso de prestación única y contraprestación múltiple, se puede resolver utilizando las funciones financieras de las calculadoras financieras y de las hojas de cálculo. Pero cuando la prestación es múltiple y el prestatario acuda a la refinanciación pueden aparecer inversiones no simples o con términos amortizativos de distintos signos, el cálculo es más complejo. Cabe recordar aquí que la TAE se asimila a la tasa interna de retorno (TIR) en la valoración y selección proyectos de inversión.
- La TAE permite comparar y facilitar la selección entre diferentes préstamos ya que permite cuantificar las diferencias existentes en los mismos en los distintos componentes del coste, no solo del tipo de interés nominal de la operación[7].

(7) Véase, al respecto:
SÁEZ MADRID, J. B. y GONZÁLEZ VILA, L. (1997), "Rentabilidad y coste efectivos desde las perspectivas de los sujetos de una operación de préstamo" en ALEGRE, A., BIAYNA, A. y RODRÍGUEZ, A. (1997), *Matemática de las Operaciones Financieras'97*, Universidad de Barcelona, págs. 421-451.

EJERCICIO 4.10.

Datos:

- Nominal del préstamo = C_0 = 300.000 euros.
- Tipo de interés nominal = 2,4%
- Duración de la operación = 20 años.
- Términos amortizativos mensuales constantes.
- Comisión de apertura = 0,5% sobre el nominal del préstamo.
- Gastos de tasación = 350 euros.
- Honorarios de notario y registro = 1.200 euros.
- Gastos de gestoría = 300 euros.
- Seguro vinculado al préstamo = 40 euros mensuales.
- Impuesto sobre transmisiones patrimoniales y actos jurídicos documentados = 4.500 euros.

Cuestiones:

1) Calcular el coste efectivo o real para el prestatario.
2) Calcular la rentabilidad efectiva o real para el prestamista.
3) Calcular la TAE.

Solución:

1) Cálculo del coste efectivo o real para el prestatario.

Se calculan los términos amortizativos mensuales constantes utilizando el tipo de interés efectivo mensual:

$$i_{12} = \frac{J_{(12)}}{12} = \frac{0,024}{12} = 0,0020$$

$$300.000 = a \cdot a_{\overline{240|}0,00375} \Rightarrow a = 1.575,13\ €$$

- Prestación real para el prestatario (lo que recibe realmente):

$$300.000 - 0,005 \cdot 300.000 - 350 = 298.150 \text{ euros (en el origen)}.$$

- Contraprestación real para el prestatario (lo que entrega realmente):

$$1.575,13 + 40 = 1.615,13 \text{ (todos los meses)}.$$

Se igualan ambos conceptos y se obtiene el coste efectivo o real para el prestatario:

$$298.150 = 1.615,13 \cdot a_{\overline{240|}i_{12}}$$

$$i_{12} = 0,00228408819$$

$$i_p = (1 + 0,00228408819)^{12} - 1 = 0,028$$

2) Cálculo de la rentabilidad efectiva o real para el prestamista.

Se calcula la prestación y contraprestación real para el prestamista teniendo en cuenta todas las características comerciales que le afectan:

- Prestación real para el prestamista (lo que entrega realmente):

$$300.000 + 1.200 + 300 + 4.500 = 306.000 \text{ euros (en el origen)}.$$

- Contraprestación real para el prestamista (lo que recibe realmente):

$$1.575,13 + 40 = 1.615,13 \text{ (todos los meses)}.$$

Se igualan ambos conceptos y se obtiene la rentabilidad efectiva o real para el prestamista:

$$306.000 = 1.615,13 \cdot a_{\overline{240|}i_{12}}$$

$$i_{12} = 0,0020776608$$

$$i_a = (1 + 0,0020776608)^{12} - 1 = 0,025$$

3) Cálculo de la TAE.

En este caso la TAE coincide con el coste efectivo o real para el prestatario.

TEMA 5
ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS

SUMARIO: 1. VALORACIÓN DE LOS ACTIVOS DE RENTA FIJA. 2. ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS. 3. EVOLUCIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS. 3.1. *Evolución de la estructura temporal de tipos de interés en ambiente de certidumbre.* 3.2. *Teoría de las expectativas puras.* 3.3. *Teoría de la preferencia por la liquidez.* 3.4. *Teoría de la segmentación de mercados.* 3.5. *Teoría del hábitat preferido.* 4. ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS. 4.1. *Método recursivo o bootstrapping.* 4.2. *Métodos econométricos.* 4.3. *Modelos de equilibrio dinámico.* 5. APLICACIONES DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS.

1. VALORACIÓN DE LOS ACTIVOS DE RENTA FIJA

Las hipótesis que caracterizan un mercado perfecto, donde sólo se negocian bonos, son:

1. No existen fricciones.
    - No hay costes de transacción ni impuestos.
    - Los títulos son infinitamente divisibles, no hay limitación en las cantidades mínimas y máximas de títulos negociados.
    - Se aceptan ventas en descubierto ya que es posible vender títulos que no se poseen, es decir, siempre se pueden asumir posiciones deudoras.
    - No existe riesgo de insolvencia.
2. Competitividad.
    - Los agentes económicos son maximizadores del beneficio, es decir, en la elección de dos cuantías monetarias prefieren siempre la de cuantía mayor, a igualdad de condiciones.
    - Los agentes son precio-aceptantes o *price taker*, es decir, no tienen la posibilidad de influir en el precio de los títulos con su actividad.
3. Ausencia de arbitraje, es decir, no se pueden obtener beneficios sin asumir riesgos.

Dentro de la gran variedad de emisiones de títulos se analizan tres que resultan fundamentales para comprender, desde el punto de vista financiero, la valoración de los activos de renta fija: los bonos cupón cero y los bonos con cupón.

a) *Bonos cupón cero básicos*

Los bonos cupón cero básicos (en adelante bonos básicos) son títulos que garantizan al inversor el pago, por parte del emisor, de un euro en una fecha futura establecida *T*. Para adquirir este derecho el inversor debe pagar en el momento actual un precio $P(t,T)$ al emisor si *t* es también la fecha de emisión o al propietario del título si la emisión tiene lugar antes del instante *t*.

FIGURA 5.1. *Esquema de un bono cupón cero básico*

El precio del bono básico $P(t,T)$ es el valor actual de un euro descontado al tipo de interés sin riesgo de una inversión que tiene un plazo de vida *T*, donde $t \leq T$.

Si se considera $t = 0$:

$$\boldsymbol{P(0,T) = \frac{1}{(1+r_T)^T}}$$

donde:

$P(0,T)$: precio del bono básico.

T: plazo hasta el vencimiento.

r_T: tipo de interés al contado correspondiente al plazo [0, T].

- *Teorema de decrecimiento del precio del bono básico respecto al vencimiento:*

Se supone que en el momento *t* tenemos dos bonos básicos con vencimientos *T* y *T´* respectivamente, donde $t \leq T \leq T'$, y que la compraventa del título que vence en *T* sea también posible en el vencimiento *T´*.

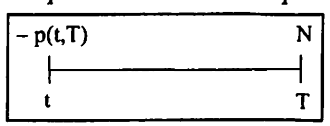
Según este teorema, para evitar el arbitraje sin riesgo, se debe cumplir:

$$P(t,T) > P(t,T'), \quad t \leq T < T'$$

b) *Bonos cupón cero no básicos*

Los bonos cupón cero no básicos son títulos que garantizan al inversor el pago, por parte del emisor, de *N* euros en una fecha futura establecida *T*. Para adquirir este derecho el inversor debe pagar en el momento actual *t* un precio $p(t,T)$ al emisor si *t* es también la fecha de emisión o al propietario del título si la emisión tiene lugar antes del instante *t*.

FIGURA 5.2. *Esquema de un bono cupón cero no básico*



La compra de un bono cupón cero se configura como una operación financiera de intercambio que, desde el punto de vista del inversor, puede ser formalizada como:

- Prestación (lo que entrega): $(-p(t,T),t)$
- Contraprestación (lo que recibe): (N,T)

donde:

$p(t,T) > 0$

$N > 0$

$t \leq T$

N: valor nominal, facial o de reembolso.

$p(t,T)$: valor o precio de emisión si la obligación es comprada directamente al emisor, o precio de compra si la transacción se efectúa en el mercado secundario.

$T - t$: Periodo hasta el vencimiento.

El precio del bono no básico $p(t,T)$ es el valor actual del valor nominal descontado al tipo de interés al contado correspondiente al periodo [0, T].

Si se considera $t = 0$:

$$\boldsymbol{p(t,T) = \frac{N}{(1+r_T)^T}}$$

donde:

$p(0,T)$: precio del bono no básico.

T: plazo hasta el vencimiento.

r_T: tipo de interés al contado correspondiente al plazo [0, T].

- *Teorema de independencia del importe:*

Si se tiene en cuenta la hipótesis de que los bonos cupón cero son perfectamente divisibles es posible construir una cartera que contenga una cantidad *N* de tales títulos.

El coste de adquisición de la cartera es: $N \cdot P(t,T)$ ya que el precio de cada bono básico es $P(t,T)$ y además los agentes son *price taker*.

Según este teorema, para evitar el arbitraje sin riesgo, se debe cumplir que:

$$p(t,T) = N \cdot P(t,T)$$

donde:

$P(t,T)$: Precio en el momento *t* del bono básico con vencimiento *T*.

N: Valor nominal del bono cupón cero no básico.

$p(t,T)$: Precio en el momento *t* del bono cupón cero no básico.

Los bonos básicos constituyen una pieza clave en este teorema, más conocido como *ecuación fundamental de valoración de activos financieros*, que se deriva de la condición de ausencia de arbitraje y refleja que "el precio actual de un bono debe ser igual al precio de la cartera réplica[1] de dicho bono construida con bonos básicos".

(1) Dos activos financieros o carteras de activos se replican cuando los recursos generados por ambas son, con certeza, los mismos en cualquier momento futuro.

EJERCICIO 5.1.

Cuestión:

Obtener la cartera réplica y su coste, a partir de bonos básicos, de un bono cupón cero de nominal 5.000 euros, plazo hasta el vencimiento 5 años y tipo de interés al contado del 2% correspondiente al periodo [0, 5].

$P(0; 0{,}25) = 0{,}98$ euros

$P(0, 1) = 0{,}93$ euros

$P(0; 0{,}25; 1) = 0{,}948979592$ euros

Solución:

La cartera réplica estará formada por 5.000 bonos básicos de vencimiento 5 años.

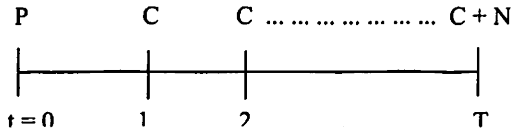
Coste de la cartera réplica:

$$\text{Coste} = 5.000 \cdot P(0,5) = 5.000 \cdot \frac{1}{(1+0{,}02)^5} = 4.528{,}65 \text{ euros}$$

c) *Bonos con cupón*

Los bonos con cupón son títulos que garantizan al inversor el pago, por parte del emisor, de cupones de interés periódicos y de N euros en una fecha futura establecida T. Para adquirir este derecho el inversor debe pagar en el momento actual t un precio P al emisor si t es también la fecha de emisión o al propietario del título si la emisión tiene lugar antes del instante t.

FIGURA 5.3. *Esquema de un bono con cupón*



donde:

$C = N \cdot i_C$ (valor del cupón).

N : Valor nominal del bono.

i_C : Tipo de interés del cupón.

P: Precio del bono con cupón en el momento t.

Si en el instante t se consideran los bonos básicos que vencen en distintas fechas (1, 2, ..., T), por la perfecta divisibilidad de los bonos, es posible construir una cartera que contenga a_k bonos básicos con vencimiento en t_k. Si $t = 0$, el precio en t de esta cartera se calcula como:

$$P = \frac{C}{1+r_1} + \frac{C}{(1+r_2)^2} + \ldots + \frac{C+N}{(1+r_T)^T}$$

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+r_t)^t} + \frac{N}{(1+r_T)^T}$$

donde:

r_T : tipo de interés al contado correspondiente al plazo [0, t].

- *Teorema de la linealidad en el precio del bono con cupón:*

Para evitar arbitraje sin riesgo se debe cumplir:

$$P = \sum_{k=1}^{T} F_k \cdot P(t,k)$$

donde:

P: precio del bono con cupón.

F_k: flujo del periodo k del bono con cupón.

$P(t, k)$: precio del bono básico correspondiente al periodo [t, k].

El teorema de linealidad en el precio permite replicar un bono con cupón uniendo varios bonos básicos. En este caso, al bono con cupón se le denomina *bono derivado* o *bono replicable*.

EJERCICIO 5.2.

Cuestión:

Obtener la cartera réplica y su coste a partir de bonos básicos, de un bono con cupón de nominal 5.000 euros, cupón anual de 50 euros y vencimiento 5 años. Los tipos de interés al contado correspondientes a los periodos [0,1], [0,2], [0,3], [0,4] y [0,5] son: 0,10%, 0,15%, 0,25%, 1%, 1,5% y 2%, respectivamente.

Solución:

La cartera réplica estará formada por:

- 50 bonos básicos de vencimiento un año.
- 50 bonos básicos de vencimiento dos años.
- 50 bonos básicos de vencimiento tres años.
- 50 bonos básicos de vencimiento cuatro años.
- 5.050 bonos básicos de vencimiento cinco años.

Coste de la cartera réplica:

$$\text{Coste} = 50 \cdot P(0,1) + 50 \cdot P(0,2) + 50 \cdot P(0,3) + 50 \cdot P(0,4) + 5.050 \cdot P(0,5) =$$

$$= 50 \cdot \frac{1}{1+0{,}0010} + 50 \cdot \frac{1}{(1+0{,}0015)^2} + 50 \cdot \frac{1}{(1+0{,}0025)^3} + 50 \cdot \frac{1}{(1+0{,}015)^4} +$$

$$+ 5.050 \cdot \frac{1}{(1+0{,}02)^5} = 4.770{,}48 \text{ euros}$$

Se distinguen los siguientes tipos de bonos con cupón:

a) Bonos emitidos a la par: cuando el precio coincide con el nominal.

b) Bonos emitidos sobre la par: cuando el precio es mayor que el nominal.

c) Bonos emitidos bajo la par: cuando es precio es menor que el nominal.

Modalidades de precios:

- Precio limpio (*clean price*): es el precio ex-cupón, que no incorpora el cupón corrido. Los precios cotizados son precios ex-cupón.
- Precio sucio (*gross price*): es el precio total del bono, que incluye el cupón corrido.

Cupón corrido (CC):

Es la parte del precio de un bono correspondiente al interés devengado desde el pago del último cupón.

$$CC = C \cdot \frac{N^{\circ}\ de\ días\ transcurridos\ desde\ el\ pago\ del\ último\ cupón}{N^{\circ}\ de\ días\ entre\ el\ pago\ de\ cupones}$$

El precio total del bono (P) es la suma del precio ex-cupón y del cupón corrido:

$$P = P_{ex-cupón} + CC$$

Ambos precios se pueden expresar en porcentaje sobre el nominal o en euros.

EJERCICIO 5.3.

Cuestión:

Calcular, el 20 de junio de 2022, el precio de la Obligación del Tesoro Público, que tiene las siguientes características, tal como se publica en el Boletín de Liquidación del Mercado de Deuda Pública y Renta Fija Privada de ese día: 6% de tipo de interés del cupón anual, con fecha de vencimiento el 31 de enero de 2029, precio ex-cupón de 122,8009% y nominal 1.000 euros.

OPERACIONES DE COMPRAVENTA SIMPLE AL CONTADO. DEUDA DEL ESTADO
SALE AND PURCHASE TRANSACTIONS. PUBLIC DEBT

Descripción del valor *Security details*		Nº de Ops. *# Trades*	Volúmenes (€) *Turnover (€)*	Precio (Ex - Cupón) *Price (Ex coupon)*			TIR *IRR*	Anterior *Previous*	
Cód ISIN *ISIN Code*	Emisión *Issue*		Nominal *Nominal*	Máximo *High*	Medio *Average*	Mínimo *Low*		Precio *Price*	Fecha *Date*
ES0000011668	OBL TESORO PÚBLICO- 6,000 01/2029	7	35,314	122,8019	122,8009	121,7173	2,2490	121,7284	17-06-22

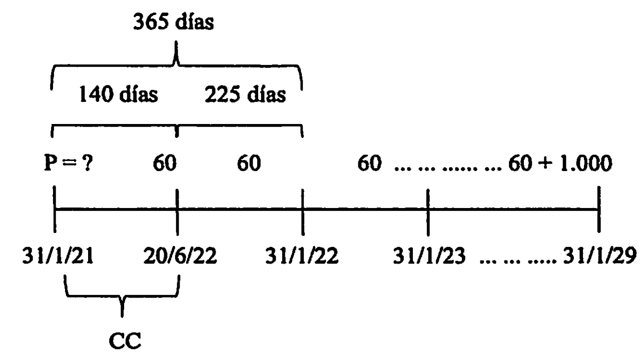
Solución:

$$P = P_{ex-cupón} + CC$$

$$P_{ex-cupón} = 1,288009 \cdot 1.000 = 1.288,009\ euros$$

$$C = 0,06 \cdot 1.000 = 60\ euros$$

FIGURA 5.4. *Esquema de la Obligación del Tesoro Público*



$$CC = 60 \cdot \frac{140}{365} = 23,0137\ euros = 23,0137\%$$

$$P = 1.288,009 + 23,0137 = 1.311,0227\ euros = 131,1023\%$$

Por tanto, se trata de una Obligación del Tesoro Público emitida sobre la par ya que su precio es mayor que el nominal (1.311,02 euros > 1.000 euros).

EJERCICIO 5.4.

Cuestión:

Calcular, el 20 de junio de 2022, el precio de la Obligación del Tesoro Público, que tiene las siguientes características, tal como se publica en el Boletín de Liquidación del Mercado de Deuda Pública y Renta Fija Privada de ese día: 2,70% de tipo de interés del cupón anual, con fecha de vencimiento el 30 de octubre de 2048, precio ex-cupón de 90,0011% y nominal 1.000 euros.

ES00000012A97	BON TESORO PUBLICO- 0,450 10/2022	16	247,290	100,2030	100,1826	100,1700	-0,0548	100,2050	17-06-22
ES00000012B39	OBL TESORO PÚBLICO- 1,400 04/2028	5	239,986	95,4390	94,0357	93,9549	2,5045	94,4752	17-06-22
ES00000012B47	OBL TESORO PÚBLICO- 2,700 10/2048	10	850,336	91,6038	90,0011	88,7793	3,2692	89,8121	17-06-22
ES00000012B62	BON TESORO PÚBLICO- 0,350 07/2023	13	582,558	99,6884	99,4196	99,3570	0,8794	99,3951	17-06-22

Solución:

$$P = P_{ex-cupón} + CC$$

$$P_{ex-cupón} = 0,900011 \cdot 1.000 = 900,011\ euros$$

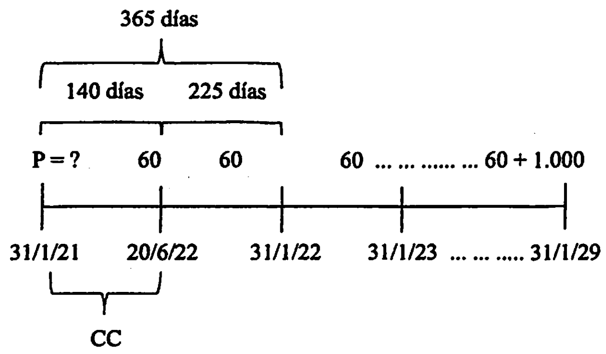
$$C = 0,0270 \cdot 1.000 = 27\ euros$$

$$CC = 27 \cdot \frac{232}{365} = 17,1616\ euros = 17,1616\%$$

$$P = 900,011 + 17,1616 = 917,1726\ euros = 91,7173\%$$

Por tanto, se trata de una Obligación del Tesoro Público emitida bajo la par ya que su precio es menor que el nominal (917,17 euros < 1.000 euros).

FIGURA 5.5. *Esquema de la Obligación del Tesoro Público*



Dentro de los bonos con cupón se encuentran también los bonos indexados o indiciados que son aquellos que están referenciados a algún índice (inflación, PIB, *commodities*, divisas, índices bursátiles, etc.). Normalmente se emiten por las administraciones públicas para cubrir riesgos derivados de situaciones de inestabilidad económica, pero también por gobiernos de economías estables que los utilizan como medio de financiación pública. Los bonos indexados más comunes son los referenciados a la inflación[2], cuyas principales ventajas son: permiten diversificar el riesgo y ofrecen cobertura frente a la inflación.

A continuación se muestran las características de los bonos indexados a la inflación europea:

- Nominal 1.000 euros.
- Cupón real: porcentaje fijo del nominal, que se determina en la emisión y permanece fijo a lo largo de la vida del bono.
- Cupón pagadero, que se redondeará al céntimo más cercano y se calcula como:

$$\textit{Cupón pagadero} = \textit{Cupon real} \cdot \textit{Coeficiente de indexación}$$

La cifra resultante se redondeará al céntimo más cercano para determinar el importe a pagar del cupón.

- Índice de referencia: Índice de Precios al Consumo Armonizado ex-tabaco (IPCA) para la zona euro, publicado mensualmente por Eurostat.
- Índice de Referencia diario: se trata de un índice que mide la inflación día a día y se calcula por interpolación lineal atendiendo a la siguiente fórmula:
  - ➢ El índice de referencia aplicable al primer día de un mes *m* es el IPC del mes *m-3*.
  - ➢ El índice de referencia para los otros días del mes *m* se calcula por interpolación lineal entre el IPC del mes *m-3* y el IPC del mes *m-2*, atendiendo a la siguiente fórmula:

(2) La primera emisión fue en el Reino Unido en 1981 y en 2014 se produce la primera emisión de bonos soberanos indexados españoles (SPGBEI). Los más conocidos son los emitidos en Estados Unidos desde 1997 y que se denominan *Inflation-Protected Securities* (IPS) o *Treasury Inflation-Protected Securities* (TIPS), cuando son bonos del Tesoro americano los referenciados a la inflación.

$$IR_{d,m} = IPC_{m-3} + (IPC_{m-2} - IPC_{m-3}) \cdot \frac{d-1}{dd}$$

donde:

d: día del mes de la fecha de cálculo.

dd: número de días del mes de la fecha de cálculo.

- Índice Base: índice de referencia en la fecha de inicio de devengo del primer cupón. Referencia a partir de la cual se calcula la inflación acumulada a lo largo de la vida del bono.
- Coeficiente de Indexación (CI), que se publican en la página web del Tesoro Público y se obtienen de la siguiente expresión:

$$CI_{d,m} = \frac{\textit{Índice de Referencia}_{d,m}}{\textit{Índice Base}}$$

- Reglas de redondeo: los índices de referencia y los coeficientes de indexación se truncarán al sexto decimal y se redondearán al quinto decimal.
- Indexación: el coeficiente de indexación correspondiente a la fecha de pago se aplicará a todos los flujos de caja del bono, tanto cupones como principal. Para el cálculo del cupón corrido también se aplicará el coeficiente de indexación correspondiente.
- Amortización, que se calcula como:

$$\textit{Amortización} = \textit{Nominal} \cdot \textit{Coeficiente de indexación de la fecha de vencimiento}$$

En el caso de que el índice de referencia correspondiente a la fecha de vencimiento fuera inferior al índice base, el importe de la amortización será igual al nominal.

- Cupón corrido:

$$\textit{CC indexado} = \textit{Cupón corrido} \cdot \textit{Coeficiente de indexación}$$

- Revisiones del índice: las revisiones que puedan producirse en los IPCA tras su publicación inicial no afectarán al cupón anual, cupón corrido o principal calculados en base a dichos índices de referencia.
- Índice Sustitutivo (IS): si el IPCA no ha sido publicado con una antelación mínima de quince días antes de la fecha de pago para un mes *t* determinado, se empleará un índice sustitutivo, calculado según la siguiente fórmula:

$$IS_t = IPC_{t-1} \cdot \frac{IPC_{t-1}}{IPC_{t-13}}$$

Los pagos de cupón o principal efectuados en base al índice sustitutivo no podrán dar lugar a revisiones en los pagos que hubiesen sido previamente establecidos.

- Cambio de base: en caso de producirse un cambio de base en el cálculo del IPCA, la transición entre los dos meses cuyos índices hayan sido calculados con diferentes bases se efectuará de modo que no se altere la evolución normal del coeficiente de indexación.
- Base de cálculo: Actual/Actual de la Asociación Internacional del Mercado de Capitales (ICMA).

EJERCICIO 5.5.

Cuestión:

Calcular, el 24 de junio de 2022, el precio y la TIR de una Obligación del Tesoro Público indexada a la inflación europea, que tiene las siguientes características, según el Boletín de Liquidación de Deuda Pública de Renta Fija y Privada:

- Código ISIN: ES00000127C8
- Tipo de interés del cupón: 1%
- Fecha de vencimiento: 30 de noviembre de 2030
- Precio ex-cupón: 105,6227%

Además, se dispone de la siguiente información de Eurostat:

- Índice de Precios al Consumo Armonizado (IPCA) de la zona Euro de marzo de 2022:
- IPCA de la zona Euro de abril de 2022:
- Índice base: 100,33319%

Solución:

Se calcula el índice de referencia correspondiente al 24 de junio de 2022 (después de truncado al 6.° decimal y redondeado al 5.° decimal):

$$IR_{24,6} = IPC_{3-3} + (IPC_{3-2} - IPC_{3-3}) \cdot \frac{24-1}{30} = IPC_{marzo} + (IPC_{abril} - IPC_{marzo}) \cdot \frac{23}{30} =$$

$$= 114,12 + (114,78 - 114,12) \cdot \frac{23}{30} = 114,6260000000 = 114,626$$

Se calcula el coeficiente de indexación correspondiente al 24 de junio de 2022 (después de truncado al 6.° decimal y redondeado al 5.° decimal):

$$CI_{24,6} = \frac{IR_{24,6}}{\acute{I}ndice\ Base} = \frac{114,626}{100,33319} = 1,14245$$

Se calcula el cupón real:

$$C = 1.000 \cdot 0,10 = 10\ euros$$

Se calcula el cupón pagadero (cupón real indexado):

$$Cupón\ real\ indexado = C \cdot CI_{24,6} = 10 \cdot 1,14245 = 11,42\ euros$$

Se calcula el cupón corrido:

$$CC = Cupón \cdot \frac{N^{o}\ \text{días entre el 30/11/2021 y el 24 de junio de 2022}}{N^{o}\ \text{días de devengo del cupón}} =$$

$$= (1.000 \cdot 0,10) \cdot \frac{206}{365} = 5,64\ euros$$

Se calcula el cupón corrido indexado:

$$Cupón\ corrido\ indexado = CC \cdot CI_{24,6} = 5,64 \cdot 1,14245 = 6,45\ euros$$

Se calcula el precio de la Obligación del Tesoro Público no indexada:

$$P_{obligación}\ (\text{no indexada}) = P_{ex-cupón} + CC =$$

$$= 1,056227 \cdot 1.000 + 5,64 = 1.061,87\ euros$$

Se calcula el precio de la Obligación del Tesoro Público indexada:

$$P_{obligación}\ (\text{indexada}) = P_{ex-cupón\ indexado} + CC_{indexado} =$$

$$= 1.056,23 \cdot 1,14245 + 11,42 = 1.213,13\ euros$$

Se calcula la TIR de la Obligación del Tesoro Público indexada, igualando el precio con los flujos futuros (todos ellos indexados con el coeficiente de indexación):

Fecha	Flujos
24/06/2022	-1.213,13 €
30/11/2022	11,42 €
30/11/2023	11,42 €
30/11/2024	11,42 €
30/11/2025	11,42 €
30/11/2026	11,42 €
30/11/2027	11,42 €
30/11/2028	11,42 €
30/11/2029	11,42 €
30/11/2030	1.153,87 €
TIR	0,3230%

$$1.213,13 = \frac{11,42}{(1+TIR)^{\frac{159}{365}}} + \frac{11,42}{(1+TIR)^{\frac{159}{365}+1}} + \frac{11,42}{(1+TIR)^{\frac{159}{365}+2}} + \ldots + \frac{11,42}{(1+TIR)^{\frac{159}{365}+7}} +$$

$$+ \frac{1.153,87}{(1+TIR)^{\frac{159}{365}+8}} \Rightarrow TIR = 0,3230\%$$

donde el último flujo resulta de sumar la amortización indexada y el último cupón indexado, siendo la amortización indexada:

$$Amortización\ indexada = 1.000 \cdot 1,14245 = 1.142,45\ euros$$

$$Último\ flujo\ indexado = 1.142,45 + 11,42 = 1.153,87\ euros$$

Se calcula la TIR de la Obligación del Tesoro Público sin indexar y se puede comprobar que coincide con la de la Obligación indexada ya que este tipo de productos ofrecen cobertura ante el riesgo de inflación:

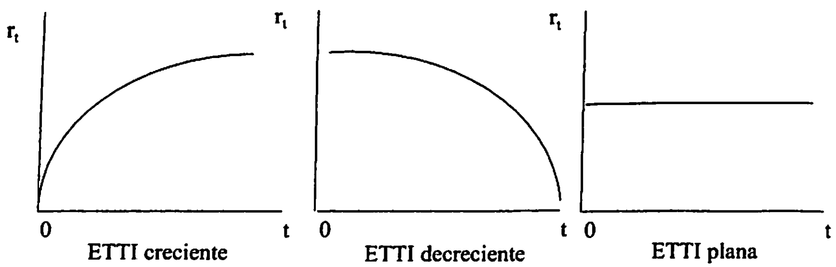
Fecha	Flujos
24/06/2022	-1.061,87 €
30/11/2022	10,00 €
30/11/2023	10,00 €
30/11/2024	10,00 €
30/11/2025	10,00 €
30/11/2026	10,00 €
30/11/2027	10,00 €
30/11/2028	10,00 €
30/11/2029	10,00 €
30/11/2030	1.010,00 €
TIR	0,3230%

$$1.061,87=\frac{10}{(1+TIR)^{\frac{159}{365}}}+\frac{10}{(1+TIR)^{\frac{159}{365}+1}}+\frac{10}{(1+TIR)^{\frac{159}{365}+2}}+....+\frac{10}{(1+TIR)^{\frac{159}{365}+7}}+$$
$$+\frac{1.010}{(1+TIR)^{\frac{159}{365}+8}}\Rightarrow TIR=0,3230\%$$

2. ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS

La estructura temporal de tipos de interés (ETTI) es la relación entre los tipos de interés y los plazos hasta el vencimiento. Se puede representar la ETTI al contado o a plazo si se utilizan los tipos de interés al contado o a plazo, respectivamente. Por tanto, si en el eje X de un gráfico se muestran los plazos hasta el vencimiento y en el eje Y los tipos de interés al contado la ETTI será al contado, mientras que si en el eje Y se muestran los tipos de interés a plazo la ETTI será a plazo.

FIGURA 5.6. *Formas simples de la ETTI*



La ETTI puede adoptar diversas formas, pero las más simples son las siguientes:

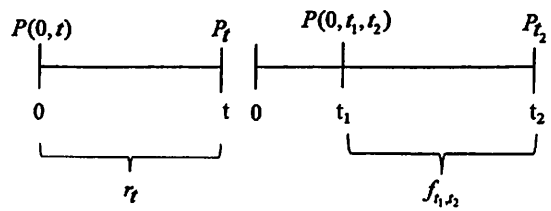
a) ETTI plana: cuando los tipos de interés a todos los plazos hasta el vencimiento son iguales.

b) ETTI creciente (curva normal o positiva): cuando los tipos de interés a plazos más largos son mayores que los tipos de interés a plazos más cortos. Es la forma más lógica ya que hay más riesgo de invertir a largo plazo que a corto plazo.

c) ETTI decreciente (curva invertida o negativa): cuando los tipos de interés a corto plazo son mayores que los tipos de interés a largo plazo, lo cual podría indicar que se aproxima una recesión y los estados bajarán los tipos de interés para intentar incentivar la economía. Esta ETTI no es habitual.

Sean dos operaciones financieras, una al contado y otra a plazo:

FIGURA 5.7. *Esquema de una operación al contado y a plazo*



donde:

$P(0,t)$: precio, en el instante 0, de un activo con plazo hasta el vencimiento t, donde $t = 1, 2, \ldots, T$.

r_t: tipo de interés al contado (*spot rate*) correspondiente al plazo $[0, t]$.

$P(0,t_1,t_2)$: precio, en el instante t_1, de un activo en una operación a plazo, cuyo plazo es $t_2 - t_1$, donde $t_2 - t_1 = 1, 2, 3, \ldots T-1$.

f_{t_1,t_2}: tipo de interés a plazo (*forward rate*) correspondiente al plazo $[t_1,t_2]$.

La ETTI al contado relaciona los tipos de interés al contado con su plazo hasta el vencimiento, mientras que la curva de tipos de interés a plazo en un instante t_1 relaciona los tipos de interés a plazo con su plazo hasta el vencimiento desde ese instante.

Cabe resaltar que todos los datos reales utilizados para poder representar estas curvas deben proceder de activos con el mismo riesgo de crédito y por este motivo se suelen utilizar los tipos de los activos cupón cero de deuda pública. Como indica Mascareñas (2022), estas curvas de rendimientos cupón-cero pueden ser un sustituto o proxy de las ETTI porque los tipos de interés sin riesgo utilizados proceden de títulos de deuda emitidos por el Estado, pero sólo cuando el Estado controla la emisión de la moneda en la que se emiten dichos títulos de deuda. Así, por ejemplo, ninguno de los países miembros de la Eurozona controla la emisión del Euro, sino que lo hacen de forma conjunta y, en este caso, no todos tienen el mismo riesgo de insolvencia y habría que elegir a uno de los países como el más seguro para calcular el tipo de interés sin riesgo en la Eurozona o, alternativamente, construir un ETTI basada en todas las emisiones con la máxima calificación (AAA) de la zona Euro como realiza el Banco Central Europeo.

EJERCICIO 5.6.

Cuestión:

Se dispone de la siguiente información sobre títulos cupón cero, cuyo nominal es 1.000 euros y sin cupón corrido:

Años	Precio (euros)
1	1.010,101
2	1.015,170
3	1.015,151
4	1.010,063
5	995,015
6	976,332
7	932,718
8	905,398
9	890,256
10	870,203

Calcular los tipos de interés al contado y los tipos de interés a plazo después de un año considerando el régimen de capitalización compuesta.

Solución:

Se calculan los tipos al contado:

$$P_t=\frac{1.000}{(1+r_t)^t}\Rightarrow r_t=\left(\frac{1.000}{P_t}\right)^{\frac{1}{t}}-1,\quad t=1,2,....,10\ \textit{años}$$

$$r_1 = \left(\frac{1.000}{1.10,101}\right) - 1 = 0,01 = -1\%$$

$$r_2 = \left(\frac{1.000}{1.015,170}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = -0,0075 = -0,75\%$$

$$r_2 = \left(\frac{1.000}{1.015,170}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = -0,0075 = -0,75\%$$

$$r_3 = \left(\frac{1.000}{1.015,151}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = -0,0050 = -0,50\%$$

y así sucesivamente hasta calcular el tipo de interés al contado a 10 años.

Se calculan los tipos de interés a plazo después de un año:

$$(1+r_{t_2})^{t_2} = (1+r_{t_1})^{t_1} \cdot f(t_1,t_2)^{t_2-t_1} \Rightarrow f(t_1,t_2) = \left(\frac{(1+r_{t_2})^{t_2}}{(1+r_{t_1})^{t_1}}\right)^{\frac{1}{t_2-t_1}} - 1$$

donde:

$t_1 = 1$ *año*

$t_2 - t_1 = 1,2,3,...,9$ *años*

$$f(1,2) = \left(\frac{(1+r_2)^2}{(1+r_1)}\right) - 1 = \left(\frac{(1-0,0075)^2}{(1-0,01)}\right) - 1 = -0,0050 = -0,50\%$$

$$f(1,3) = \left(\frac{(1+r_3)^3}{(1+r_1)}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \left(\frac{(1-0,0050)^2}{(1-0,01)}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = -0,0025 = -0,25\%$$

$$f(1,4) = \left(\frac{(1+r_4)^4}{(1+r_1)}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{(1-0,0025)^2}{(1-0,01)}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = -0,00 = 0\%$$

y así sucesivamente.

Años	Precio (euros)	Tipos al contado (en %)	Tipos a plazo (%)
1	1.010,101	-1,00	-0,50
2	1.015,170	-0,75	-0,25
3	1.015,151	-0,50	0,00
4	1.010,063	-0,25	0,38
5	995,015	0,10	0,68
6	976,332	0,40	1,34
7	932,718	1,00	1,58
8	905,398	1,25	1,59
9	890,256	1,30	1,67
10	870,203	1,40	

Se presentan a continuación los gráficos de la ETTI al contado aproximadas por las ecuaciones de tendencia en Excel (tendencia polinómica de grado 6):

FIGURA 5.8. *ETTI al contado*

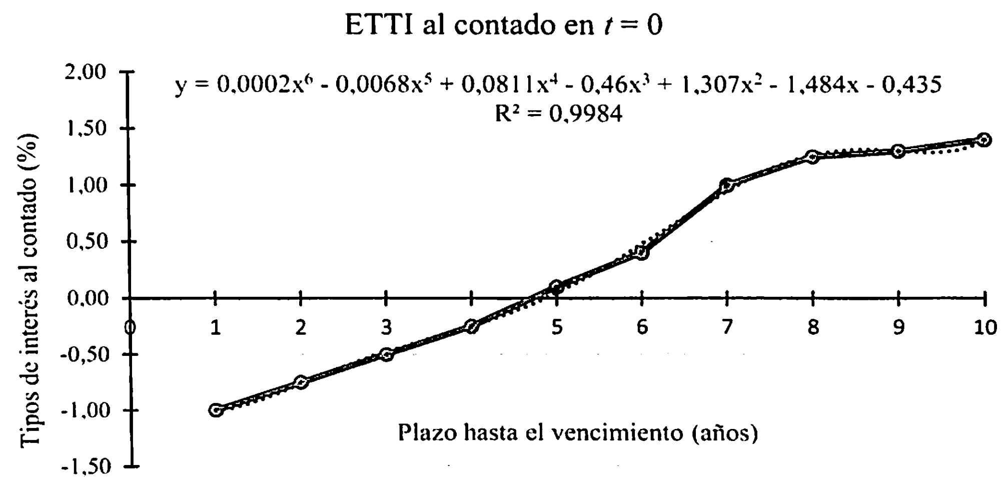
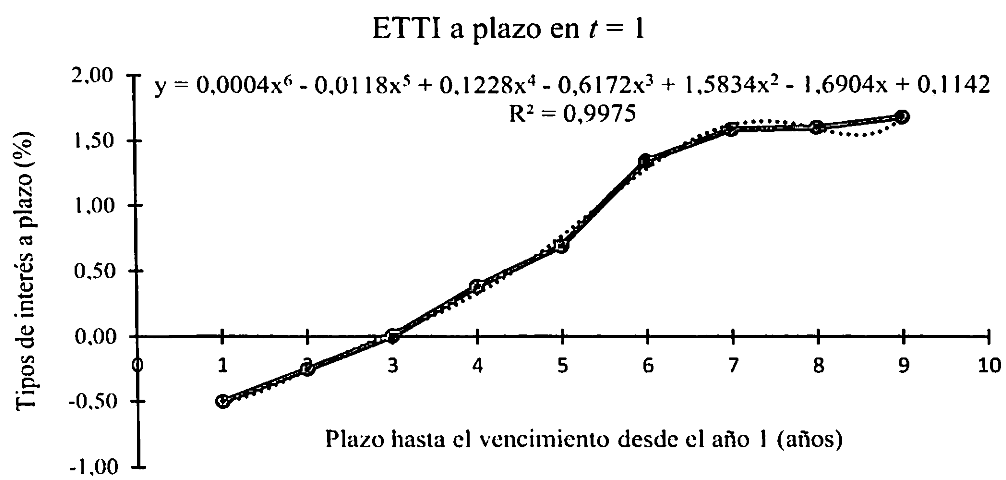


FIGURA 5.9. *ETTI a plazo*



3. EVOLUCIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS

Existen varias teorías que explican la evolución de la ETTI, pero es necesario conocer previamente cómo sería la ETTI en un futuro en ambiente de certidumbre.

3.1. EVOLUCIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS EN AMBIENTE DE CERTIDUMBRE

Si existe certidumbre total respecto a los tipos de interés futuros y no existen costes de transacción, el tipo *forward* correspondiente a un plazo $[t_1,t_2]$ debería coincidir con el tipo de interés al contado futuro vigente en t_1 para el plazo $[0, t_2\text{-}t_1]$:

$$f_{t_1,t_2} = r^{*}_{t_1,t_2}$$

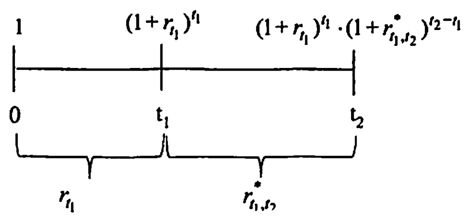
Lutz (1940) desarrolla su teoría a partir de las siguientes hipótesis:

- Los inversores conocen a priori los tipos de interés al contado a corto plazo que estarán vigentes en las fechas futuras.
- No existen costes de transacción.
- Los activos financieros con distintos vencimientos son perfectamente sustitutivos, lo que permite a los inversores maximizar su beneficio invirtiendo indistintamente en títulos a corto y largo plazo.

Si los tipos de interés *forward* difiriesen de los tipos de interés futuros, se generarían oportunidades de especulación que podrían ser explotadas por los inversores neutrales al riesgo. Posibles estrategias:

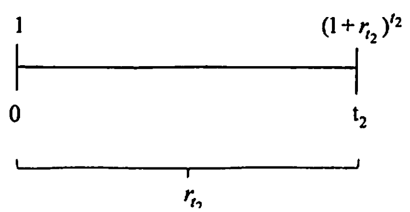
1) Inversión a largo plazo

a) Invertir 1 euro a un plazo $[0,t_1]$ en bonos cupón cero con vencimiento t_1 y reinvertir el producto de esta inversión a un plazo $[0,t_2-t_1]$.



$$V_{t_2} = (1+r_{t_1})^{t_1}\cdot(1+r^{*}_{t_1,t_2})^{t_2-t_1}$$

b) Invertir 1 euro a un plazo $[0,t_2]$ en bonos cupón cero con vencimiento t_2.



$$V'_{t_2} = (1+r_{t_2})^{t_2} = (1+r_{t_1})^{t_1}\cdot(1+f_{t_1,t_2})^{t_2-t_1}$$

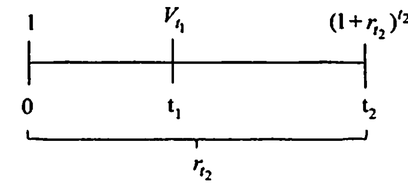
Se podrían presentar los siguientes casos:

- Si $r^{*}_{t_1,t_2} > f_{t_1,t_2} \Rightarrow V_{t_2} > V'_{t_2}$, el inversor no estaría dispuesto a invertir en bonos cupón cero con vencimiento t_2 mientras no aumente r_{t_2} o disminuya r_{t_1}. Por tanto, adoptaría la primera estrategia, es decir, invertiría 1 euro a un plazo $[0,t_1]$ en bonos cupón cero con vencimiento t_1 y reinvertiría el producto de esta inversión a un plazo $[0,t_2-t_1]$.

- Si $r^{*}_{t_1,t_2} < f_{t_1,t_2} \Rightarrow V_{t_2} < V'_{t_2}$, el inversor no estaría dispuesto a invertir en bonos cupón cero con vencimiento t_1 mientras no aumente r_{t_1} o disminuya r_{t_2}. Por tanto, adoptaría la segunda estrategia, es decir, invertiría 1 euro a un plazo $[0,t_2]$ en bonos cupón cero con vencimiento t_2.
- Sólo en el caso en el que $r^{*}_{t_1,t_2} = f_{t_1,t_2} \Rightarrow V_{t_2} = V'_{t_2}$ se llegaría a una situación de equilibrio en el que el inversor podría adoptar cualquiera de las dos estrategias anteriores porque serían equivalentes.

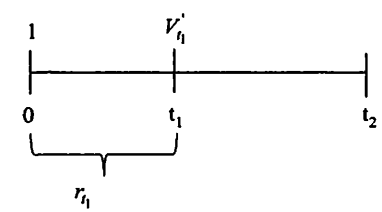
2) Inversión a corto plazo

- Invertir 1 euro en bonos cupón cero con vencimiento a un plazo t_2 y venderlos cuando haya transcurrido el plazo t_1.



$$V_{t_1} = \frac{(1+r_{t_2})^{t_2}}{(1+r^{*}_{t_1,t_2})^{t_2-t_1}}$$

- Invertir 1 euro en bonos cupón cero con vencimiento t_1.



$$V'_{t_1} = (1+r_{t_1})^{t_1}$$

Se podrían presentar los siguientes casos:

- Si $r^{*}_{t_1,t_2} > f_{t_1,t_2} \Rightarrow V_{t_1} > V'_{t_1}$, el inversor no estaría dispuesto a invertir en bonos cupón cero con vencimiento t_1 mientras no disminuya r_{t_2} o aumente r_{t_1}. Por tanto, adoptaría la primera estrategia, es decir, invertiría 1 euro en bonos cupón cero con vencimiento a un plazo t_2 y los vendería cuando haya transcurrido el plazo t_1.
- Si $r^{*}_{t_1,t_2} < f_{t_1,t_2} \Rightarrow V_{t_1} < V'_{t_1}$, el inversor no estaría dispuesto a invertir en bonos cupón cero con vencimiento t_2 mientras no aumente r_{t_2} o disminuya r_{t_1}. Por tanto, adoptaría la segunda estrategia, es decir, invertiría en bonos cupón cero con vencimiento t_1.
- Sólo en el caso en el que $r^{*}_{t_1,t_2} = f_{t_1,t_2} \Rightarrow V_{t_1} = V'_{t_1}$ se llegaría a una situación de equilibrio en el que el inversor podría adoptar cualquiera de las dos estrategias anteriores porque serían equivalentes.

Según Lutz (1940), en ambiente de certidumbre, los tipos de interés al contado a largo plazo coinciden con la media geométrica de los tipos de interés futuros a corto plazo:

$$(1+r_T)^T = (1+r_1)\cdot(1+f_{1,2})\cdot\ldots\cdot(1+f_{T-1,T})$$

$$(1+r_T)^T = (1+r_1)\cdot(1+r_{1,2}^*)\cdot\ldots\cdot(1+r_{T-1,T}^*)$$

$$(1+r_T) = \sqrt[T]{(1+r_1)\cdot(1+r_{1,2}^*)\cdot\ldots\cdot(1+r_{T-1,T}^*)}$$

En ambiente de certidumbre, la ETTI puede adoptar las siguientes formas:

- ETTI creciente: si los tipos de interés futuros van aumentando los tipos al contado aumentan con el plazo.
- ETTI decreciente: si los tipos de interés futuros van disminuyendo los tipos al contado disminuyen con el plazo.
- ETTI plana: si los tipos de interés futuros son iguales al tipo al contado a corto plazo.

Se resumen a continuación las siguientes teorías explicativas de la evolución de la ETTI: la teoría de las expectativas puras, la teoría de la preferencia por la liquidez, la teoría de segmentación de mercados y la teoría del hábitat preferido.

3.2. TEORÍA DE LAS EXPECTATIVAS PURAS

Los fundamentos de esta teoría se encuentran en Fisher (1930), Hicks (1939) y Lutz (1940). Se asume implícitamente que los agentes económicos que intervienen en el mercado son neutrales al riesgo.

Se basan en que las expectativas sobre los futuros tipos de interés al contado a corto plazo tienen una influencia determinante en los tipos de interés al contado a largo plazo existentes en un momento dado.

Se han desarrollado diferentes versiones sobre las expectativas para desarrollar teorías que expliquen la evolución de la ETTI.

Según la hipótesis de las expectativas puras (caso más simple) el valor fijado por el mercado para los tipos a plazo coincide exactamente con el valor que el mercado espera para los tipos al contado futuros, es decir, los tipos de interés *forward* son estimadores insesgados de insesgado de las expectativas del mercado (esperanza matemática) sobre los tipos de interés al contado futuros.

$$f_{t_1,t_2} = E_t\left[r_{t_1,t_2}^*\right]$$

donde:

f_{t_1,t_2} : tipo de interés a plazo entre los instantes T_1 y T_2.

$E_t\left[r_{t_1,t_2}^*\right]$: expectativa sobre el tipo de interés al contado que prevalecerá entre las fechas T_1 y T_2, tomada desde el momento actual inicial 0.

r_{t_1,t_2}^* : tipo de interés al contado futuro vigente entre las fechas T_1 y T_2.

Una ETTI creciente sería debida a una expectativa alcista sobre los tipos de interés a corto plazo, una ETTI decreciente indicaría una expectativa bajista sobre estos tipos y una ETTI plana reflejaría que el mercado espera un mantenimiento de los tipos de interés en el futuro.

3.3. TEORÍA DE LA PREFERENCIA POR LA LIQUIDEZ

Empíricamente los títulos a largo plazo son más sensibles a la variación de la ETTI que los títulos a corto plazo.

Según la teoría propuesta por Hicks (1939):

- los agentes económicos, que tienen aversión al riesgo, consideran los títulos a largo plazo como inversiones más arriesgadas y prefieren adquirir títulos más líquidos, es decir, a corto plazo.
- los inversores sólo invertirán en títulos a largo plazo a cambio de una prima de liquidez, que será mayor cuanto mayor sea el plazo hasta el vencimiento de los bonos, ya que existe mayor incertidumbre sobre los tipos futuros y, además, los títulos a largo plazo soportan mayor riesgo de precio.
- Como consecuencia, los tipos de interés a plazo son estimadores sesgados del valor esperado por el mercado para los tipos al contado futuro, es decir, los tipos a plazo deben ser mayores que la expectativa sobre los tipos de interés al contado futuros y el sesgo será la prima de liquidez.

$$f_{t,t+1} = E_t\left[r_{t,t+1}^*\right] + L_t$$

donde:

$f_{t,t+1}$: tipo de interés a plazo correspondiente al plazo $[t,t+1]$.

$E_t\left[r_{t,t+1}^*\right]$: tipo de interés a un año que se espera que esté vigente dentro de t periodos.

$r_{t,t+1}^*$: tipo de interés al contado futuro vigente entre las fechas t y $t+1$.

L_t: prima de liquidez correspondiente al periodo $[t,t+1]$.

El tipo de interés a plazo correspondiente a un periodo, según esta teoría, tendrá dos componentes:

- Los tipos de interés al contado que se espera estén vigentes al comienzo de dicho periodo, de forma similar a lo indicado en la teoría de las expectativas.
- La primera de liquidez correspondiente a ese periodo.

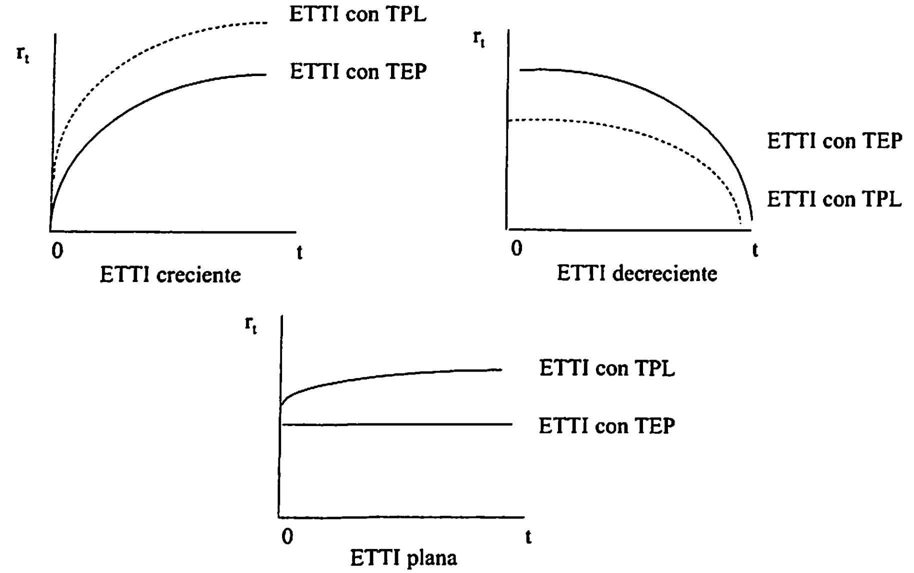
Para incentivar a los inversores a invertir a largo plazo, los agentes económicos que piden prestado los fondos deben compensar con un tipo de interés superior al que ofrecen las inversiones a corto plazo, es decir, deben ofrecer una prima de liquidez positiva obtenida como diferencia entre el tipo de interés a plazo y la expectativa sobre el tipo de interés al contado futuro.

Las primas de liquidez deben ser crecientes con el plazo y deben aumentar a una tasa decreciente:

$$L_1 < L_2 < \ldots < L_T$$

Según esta teoría, la ETTI estará por encima de la ETTI en la que solo se tenía en cuenta la teoría de las expectativas debido a la prima de liquidez positiva. Además, los títulos con plazos hasta el vencimiento difierentes ya no serán sustitutos perfectos ya que el rendimiento esperado con la inversión en un título a largo plazo será mayor a la que se esperaría obtener para un mismo periodo mediante la reinversión sucesiva en títulos a corto plazo.

FIGURA 5.10. *Formas de la ETTI con la teoría de las expectativas puras (TEP) y la teoría de la preferencia por la liquidez (TPL)*



3.4. TEORÍA DE LA SEGMENTACIÓN DE MERCADOS

Según esta teoría, que se remonta a Culbertson (1957), los precios de los títulos con plazos hasta el vencimiento distintos pueden estar rígidamente interrelacionados entre sí en base al principio de exclusión de arbitraje, ya que diversos inversores prefieren, por varios motivos, poseer títulos pertenecientes a un segmento particular del mercado, sin tener en cuenta los precios de los demás títulos. Existen, por tanto, diferentes mercados en función de los títulos que en ellos se negocian. La forma de la ETTI deriva así de las condiciones de la oferta y de la demanda de cada uno de los segmentos del mercado, con independencia del resto de los segmentos y de las expectativas de los agentes económicos sobre los tipos de interés futuros.

Esta teoría supone que los agentes económicos son totalmente aversos al riesgo y no proporciona una determinada relación entre los tipos de interés futuros esperados y los tipos a plazo.

3.5. TEORÍA DEL HÁBITAT PREFERIDO

Esta teoría combina los postulados de las teorías anteriores (Modigliani y Sutch, 1967) ya que para la formación de los distintos tipos de interés se tienen en cuenta las expectativas de los agentes económicos y el hábitat que prefieren.

$$f_{t,t+1} = E_t\left[r^*_{t,t+1}\right] + L'_t$$

Se supone que los individuos son aversos al riesgo, por lo que sólo estarán dispuestos a no hacer coincidir el horizonte de sus inversiones con su hábitat a cambio de una compensación o prima por plazo. Esta puede ser de cualquier signo, dependiendo de los hábitats preferidos de los oferentes o prestamistas y demandantes o prestatarios de fondos. Si existe un exceso de oferta de activos de un determinado plazo, los prestamistas estarán dispuestos a ofrecer una prima positiva para compensar el riesgo que supone para los prestatarios salirse de su hábitat. Por el contrario, si existe un exceso

de demanda, los prestatarios estarán dispuestos a aceptar una menor rentabilidad para compensar a los prestamistas que renuncian a su hábitat.

EJERCICIO 5.7.

Cuestión:

Si en el momento actual la ETTI es la siguiente:

$r_1 = 2\%;\ r_2 = 2{,}5\%;\ r_3 = 3\%;\ r_4 = 3{,}5\%;\ r_5 = 4\%$

obtener la ETTI transcurrido un año en ambiente de certidumbre.

Solución:

En ambiente de certidumbre:

$$f_{t_1,t_2} = r^*_{t_1,t_2} = {}_{t_1}r_{t_2-t_1}$$

Por tanto:

$${}_1r_1 = r^*_{1,2} = f_{1,2}$$
$${}_1r_2 = r^*_{1,3} = f_{1,3}$$
$${}_1r_3 = r^*_{1,4} = f_{1,4}$$
$${}_1r_4 = r^*_{1,5} = f_{1,5}$$

$$(1+r_2)^2 = (1+r_1)\cdot(1+r^*_{1,2})$$

$$r^*_{1,2} = \frac{(1+r_2)^2}{(1+r_1)} - 1 = \frac{(1+0{,}025)^2}{(1+0{,}02)} - 1 = 0{,}03$$

$$(1+r_3)^3 = (1+r_1)\cdot(1+r^*_{1,3})^2$$

$$r^*_{1,3} = \left[\frac{(1+r_3)^3}{(1+r_1)}\right]^{1/2} - 1 = \left[\frac{(1+0{,}03)^3}{(1+0{,}02)}\right]^{1/2} - 1 = 0{,}0350$$

$$(1+r_4)^4 = (1+r_1)\cdot(1+r^*_{1,4})^3$$

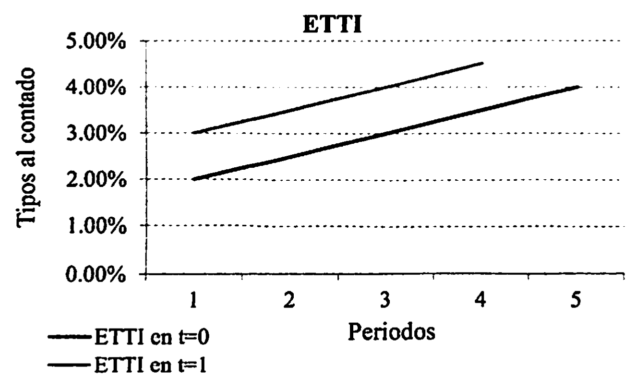
$$r^*_{1,4} = \left[\frac{(1+r_4)^4}{(1+r_1)}\right]^{1/3} - 1 = \left[\frac{(1+0{,}035)^4}{(1+0{,}02)}\right]^{1/3} - 1 = 0{,}04$$

$$(1+r_5)^5 = (1+r_1)\cdot(1+r^*_{1,5})^4$$

$$r^*_{1,5} = \left[\frac{(1+r_5)^5}{(1+r_1)}\right]^{1/4} - 1 = \left[\frac{(1+0{,}04)^5}{(1+0{,}02)}\right]^{1/4} - 1 = 0{,}0451$$

ETTI transcurrido un año:

$${}_1r_1 = r^*_{1,2} = f_{1,2} = 0{,}03$$
$${}_1r_2 = r^*_{1,3} = f_{1,3} = 0{,}0350$$
$${}_1r_3 = r^*_{1,4} = f_{1,4} = 0{,}04$$
$${}_1r_4 = r^*_{1,5} = f_{1,5} = 0{,}0451$$



EJERCICIO 5.8.

Cuestión:

Si en el momento actual la ETTI es la siguiente:

$r_1 = 2\%; r_2 = 3\%; r_3 = 3{,}5\%; r_4 = 3{,}8\%; r_5 = 4\%$

obtener la ETTI transcurrido un año si los tipos de interés en t=1 son los esperados en t=0 y los tipos *forward* incorporan una prima $L_t = 0{,}05 \cdot t\%$ correspondiente al plazo [t,t+1] y se mantiene constante a lo largo del tiempo.

Solución:

De la ETTI vigente en t=0 se pueden obtener los tipos *forward* correspondientes a los plazos [1,2], [2,3], [3,4] y [4,5], con la siguiente expresión:

$$(1+r_{t+1})^{t+1} = (1+r_t)^t \cdot (1+f_{t,t+1})$$

Por tanto, se calculan los tipos de interés a un año esperados dentro de 1, 2, 3 y 4 años, respectivamente, según la teoría pura de las expectativas.

$$(1+r_2)^2 = (1+r_1)\cdot(1+f_{1,2}) \Rightarrow f_{1,2} = \frac{(1+r_2)^2}{(1+r_1)} - 1 = \frac{(1+0{,}03)^2}{(1+0{,}02)} - 1 = 0{,}0401$$

$$(1+r_3)^3 = (1+r_2)^2\cdot(1+f_{2,3}) \Rightarrow f_{2,3} = \frac{(1+r_3)^3}{(1+r_2)^2} - 1 = \frac{(1+0{,}035)^3}{(1+0{,}03)^2} - 1 = 0{,}0451$$

$$(1+r_4)^4 = (1+r_3)^3\cdot(1+f_{3,4}) \Rightarrow f_{3,4} = \frac{(1+r_4)^4}{(1+r_3)^3} - 1 = \frac{(1+0{,}038)^4}{(1+0{,}035)^3} - 1 = 0{,}0470$$

$$(1+r_5)^5 = (1+r_4)^4\cdot(1+f_{4,5}) \Rightarrow f_{4,5} = \frac{(1+r_5)^5}{(1+r_4)^4} - 1 = \frac{(1+0{,}04)^5}{(1+0{,}038)^4} - 1 = 0{,}0480$$

Sin embargo, de acuerdo con la teoría de la preferencia por la liquidez, estos tipos *forward* contienen los tipos esperados futuros y una prima por riesgo.

Por tanto, se calculan los tipos esperados futuros:

$$f_{t,t+1} = E_t\left[r^*_{t,t+1}\right] + L_t$$

$$E_0\left[r^*_{1,2}\right] = f_{1,2} - L_1 = 0{,}0401 - 0{,}0005 = 0{,}0396$$

$$E_0\left[r^*_{2,3}\right] = f_{2,3} - L_2 = 0{,}0451 - 0{,}001 = 0{,}0441$$

$$E_0\left[r^*_{3,4}\right] = f_{3,4} - L_3 = 0{,}0470 - 0{,}0015 = 0{,}0455$$

$$E_0\left[r^*_{4,5}\right] = f_{4,5} - L_4 = 0{,}0480 - 0{,}002 = 0{,}046$$

Si en t=1 las expectativas sobre los tipos de interés futuros a un año no hubiesen cambiado, es decir:

$$E_1\left[r^*_{t,T}\right] = E_0\left[r^*_{t,T}\right]$$

Entonces la ETTI en esta fecha se puede obtener recalculando los tipos *forward* en t=1 como la suma de los tipos de interés esperados y la prima correspondiente.

$${}_1f_{2,3} = E_1\left[r^*_{2,3}\right] + L_1 = 0{,}0441 + 0{,}0005 = 0{,}0446$$

$${}_1f_{3,4} = E_1\left[r^*_{3,4}\right] + L_2 = 0{,}0455 + 0{,}001 = 0{,}0465$$

$${}_1f_{4,5} = E_1\left[r^*_{4,5}\right] + L_3 = 0{,}046 + 0{,}0015 = 0{,}0475$$

Se calcula finalmente la ETTI en t = 1 según la teoría de la preferencia por la liquidez:

$${}_1r_1 = E_0\left[r^*_{1,2}\right] = 0{,}0396$$

$$(1+{}_1r_2)^2 = (1+{}_1r_1)\cdot(1+{}_1f_{2,3}) \Rightarrow {}_1r_2 = \left[(1+{}_1r_1)\cdot(1+{}_1f_{2,3})\right]^{1/2} - 1 =$$
$$= [(1+0{,}0396)\cdot(1+0{,}0446)]^{1/2} - 1 = 0{,}0421$$

$$(1+{}_1r_3)^3 = (1+{}_1r_1)\cdot(1+{}_1f_{2,3})\cdot(1+{}_1f_{3,4}) \Rightarrow$$
$${}_1r_3 = \left[(1+{}_1r_1)\cdot(1+{}_1f_{2,3})\cdot(1+{}_1f_{3,4})\right]^{1/3} - 1 =$$
$$= [(1+0{,}0396)\cdot(1+0{,}0446)\cdot(1+0{,}0465)]^{1/3} - 1 = 0{,}0434$$

$$(1+{}_1r_4)^4 = (1+{}_1r_1)\cdot(1+{}_1f_{2,3})\cdot(1+{}_1f_{3,4})\cdot(1+{}_1f_{4,5}) \Rightarrow$$
$${}_1r_4 = \left[(1+{}_1r_1)\cdot(1+{}_1f_{2,3})\cdot(1+{}_1f_{3,4})\cdot(1+{}_1f_{4,5})\right]^{1/4} - 1 =$$
$$= [(1+0{,}0396)\cdot(1+0{,}0446)\cdot(1+0{,}0465)\cdot(1+0{,}0475)]^{1/4} - 1 = 0{,}0454$$

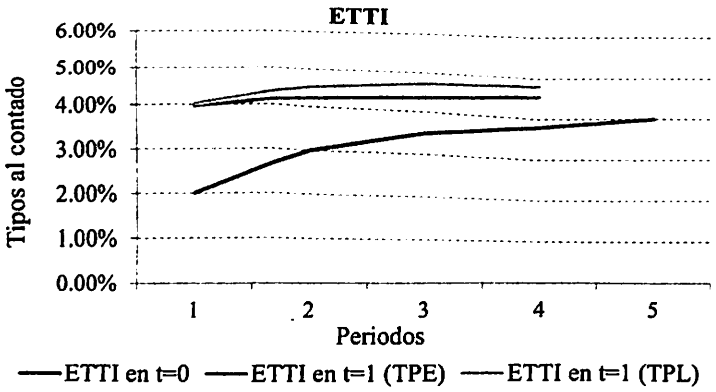
ETTI transcurrido un año:

${}_1r_1 = 0{,}039$

${}_1r_2 = 0{,}0421$

${}_1r_3 = 0{,}0434$

${}_1r_4 = 0{,}0454$



4. ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS

El principal problema para obtener la ETTI es la no disponibilidad de bonos cupón cero para todos los vencimientos. Por este motivo es necesario recurrir a diferentes métodos de estimación. Destacan:

- Método recursivo o *bootstrapping*.
- Modelos econométricos.
- Modelos de equilibrio dinámico.

La selección de uno u otro método depende de varios factores, como pueden ser: el tipo de datos disponibles (tipos de interés de bonos a la par, tipos de interés cupón cero, precios de bonos, etc.), la frecuencia de los datos disponibles (diario, mensual, etc.) o la ubicación regular o irregular de los datos en el horizonte temporal.

La estimación de la ETTI se lleva a cabo a partir de diversos instrumentos financieros. Si se dispone de cotizaciones de instrumentos cuyo interés se hace efectivo al vencimiento de la operación, como pueden ser los tipos de interés de depósitos interbancarios, el cálculo de sus correspondientes factores de descuento es inmediato. No obstante, en los mercados habrá que considerar las convenciones de la divisa en cuanto a la entrada en vigor de la operación asociada a las fechas spot o contado.

4.1. MÉTODO RECURSIVO O BOOTSTRAPPING

Es un método que permite obtener, de modo recurrente, el tipo cupón cero correspondiente a un plazo a partir de los tipos cupón cero correspondientes a plazos previos.

El método *bootstrapping* es adecuado cuando se dispone de datos de tipos de interés periódicos, con frecuencia anual y el mismo riesgo crediticio. Se aplica principalmente cuando la fuente de información son los *Interest Rate Swap* (IRS) correspondientes a la parte fija de los swaps (permutas financieras de tipos de interés), que equivalen a un bono a la par (con precio igual a 100 unidades monetarias y TIR igual al tipo de interés del cupón), emitido el día que se negocia y con el TIR e interés del cupón igual al tipo de interés fijo del *swap*. Así se puede obtener la ETTI a partir de los tipos fijos de los swaps para un conjunto de vencimientos consecutivos aplicando la técnica de *bootstrapping*.

Cuando la información se obtiene de las operaciones del mercado de deuda pública, la gran dispersión en los plazos, vencimiento y pago de cupones hace que el método requiera una elaboración previa de los datos para su aplicación. Existen diversas técnicas para centrar la información en vencimientos periódicos. La más habitual es la creación de títulos virtuales con vencimiento a un año, dos años, etc. Estos títulos virtuales se construyen haciendo coincidir la TIR con el tipo de interés de emisión y así se consigue convertir la curva de rendimientos o de TIR en una curva de tipos cupón cero. La diferencia entre ambos tipos corresponde al sesgo del cupón. Cuando la curva de tipos es creciente, el sesgo del cupón es positivo y esta relación se invierte si la curva decrece con respecto al plazo.

EJERCICIO 5.9.

Cuestión:

Si se dispone de la siguiente información:

IRS_1=0,05 n=1 año

IRS_2=0,08 n=2 años

IRS_3=0,10 n=3 años

Calcular los tipos cupón cero por el método de *bootstrapping*.

Solución:

$$100=(5+100)\cdot FD_1 \Rightarrow FD_1=\frac{100}{105}=0,952380952$$

$$0,952380952=\frac{1}{1+r_1}\Rightarrow r_1=0,05$$

$$100=8\cdot FD_1+108\cdot FD_2 \Rightarrow FD_2=0,855379189$$

$$0,855379189=\frac{1}{(1+r_2)^2}\Rightarrow r_2=0,0812$$

$$100=10\cdot FD_1+10\cdot FD_2+110\cdot FD_3 \Rightarrow FD_3=0,744749078$$

$$0,744749078=\frac{1}{(1+r_3)^3}\Rightarrow r_3=0,1032$$

4.2. MÉTODOS ECONOMÉTRICOS

Los *métodos econométricos* se basan en métodos convencionales de regresión e incorporan la incertidumbre en la formación de las expectativas sobre los tipos de interés ya que en los modelos a estimar se incorpora un término error.

La ETTI y la estructura temporal de los precios al contado proporcionan la misma información expresada de distinta forma. Por tanto, se puede obtener la ETTI estimando la función de descuento, que debe cumplir los siguientes requisitos:

- Ser monótona y decreciente.
- Ser positiva.
- Tomar el valor 1 en el instante inicial y el valor cero en ∞:

$A(0,0) = 1$

$A(0,\infty) = 0$

Estos métodos tratan de estimar la función de descuento, bien directamente o bien suponiendo que la misma adopta cierta forma funcional.

La ecuación de no arbitraje del precio de un bono se expresa como:

$$P_b = P_t + CC_t = C \cdot \sum_{k=1}^{m} [1 + i(t,k)]^{-(k-t)} + 100 \cdot [1 + i(t,m)]^{-(m-t)}$$

$$\boldsymbol{P_b = \sum_{k=1}^{m} A(t,k) + 100 \cdot A(t,m)}$$

donde:

P_t : Precio del bono en el instante t excluido el cupón o precio ex-cupón.

CC_t : Cupón corrido o devengado desde la fecha en que se cobró el último cupón hasta el instante t, que se calcula como:

$$CC_t = C \cdot \frac{\text{Número de días desde el pago del último cupón}}{\text{Número de días entre pago de cupones}}$$

$P_b = P_t + CC_t$ (precio de un bono en el instante t).

C: Cupón del bono.

k: Periodo de tiempo entre el instante t y la fecha de pago del cupón $(k = 1,2,...,m)$.

$i(t,k)$: Tipo de interés al contado para el vencimiento k.

$A(t,k)$: Valor de la función de descuento para el vencimiento k.

Esta ecuación se asemeja a una ecuación de regresión lineal si se le añade un término error. En dicha ecuación los coeficientes a estimar son los valores de la función de descuento para los distintos vencimientos, $A(0,k)$, y los regresores, el importe de los cupones y el principal. De esta manera se pueden estimar directamente valores discretos de la función de descuento e interpolar para obtener los restantes. Sin embargo, para poder llevar a cabo la regresión, se requiere disponer de más bonos que vencimientos que determinen el número de parámetros a estimar.

Cuando no es posible la estimación directa de la función de descuento, una alternativa consiste en imponer una determinada forma funcional a ésta. La aproximación más trivial consiste en utilizar un polinomio de grado k:

$$A(0,k) = 1 + a_1 \cdot b^1 + a_2 \cdot b^2 + ... + a_k \cdot b^k$$

Un polinomio de grado suficientemente elevado puede aproximar cualquier función. Sin embargo, dicha función tiene una expresión única para todo el horizonte temporal de la ETTI, por lo que ajustará mejor aquellos tramos de la curva en los que se disponga de más datos, y además puede resultar difícil ajustar los extremos de la curva. Un polinomio de grado muy elevado puede producir inestabilidad en los parámetros a estimar.

Sin embargo, McCulloch (1971 y 1975)) señala que esta aproximación conduce a ajustes muy suaves en el corto plazo y demasiado explosivos en el largo plazo, salvo que el orden del polinomio sea muy alto. Propone en sus métodos la aproximación

mediante funciones *esplines*[3] de orden cúbico o cuadrático. Este método supone que la función de descuento asume una determinada forma funcional, que es una combinación lineal de funciones. En su primer trabajo utilizó esplines cuadráticos y, en el segundo, *esplines* cúbicos, que son funciones polinómicas definidas por intervalos. Propone además que el número de funciones a incorporar sea la raíz cuadrada del número de títulos disponibles.

El método de aproximación mediante esplines cúbicos ha sido muy utilizado y presenta varias ventajas:

- Se estima la estructura temporal para el periodo continuo observado.
- Permite una estimación lineal.
- Es suficientemente flexible para captar las distintas formas de la función de descuento.

Sin embargo, también presenta varios inconvenientes:

- Conduce a formas poco suaves en el extremo más alejado de la curva.
- Implica una función de descuento que diverge con el vencimiento en lugar de tender a cero.
- No garantiza que la función de descuento sea consistentemente decreciente con el vencimiento.

Por estos motivos se han presentado varias alternativas al método de McCulloch: polinomios Bernstein (Schaefer, 1981); esplines exponenciales (Vasicek y Fong, 1982); polinomios exponenciales (Chambers, Carleton y Waldman, 1984); suavización de esplines (Fisher, Nychka y Zervos, 1995), etc., que, en general, no han mejorado el método de McCulloch, bien porque no son flexibles, bien porque no obtienen mejores resultados e implican métodos de estimación complejos y costosos.

Nelson y Siegel (1987) proponen un método que es uno de lo más utilizados actualmente por los bancos centrales nacionales para estimar las ETTI. Svensson (1994) ha modificado ligeramente este método introduciendo una mayor flexibilidad. Se tratan de modelos estáticos que tratan de estimar la estructura temporal de tipos de interés en un instante determinado. También se denominan modelos parsimoniosos porque conducen a curvas suaves y flexibles.

Nelson y Siegel consideran que los tipos de interés a plazo tienden hacia un valor constante en el futuro y adoptan la siguiente forma funcional para la tasa instantánea a plazo:

$$\boldsymbol{f(m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-m/\tau_1} + \beta_2 \cdot \frac{m}{\tau_1} \cdot e^{-m/\tau_1}}$$

que se trata de una función Laguerre, obtenida como solución de una ecuación diferencial de segundo orden.

(3) Una función *espline* es una función continua a trozos, que se unen en unos puntos de enlace denominados nudos. En estos puntos de enlace las funciones que se unen deben tomar el mismo valor y tener la misma forma de manera que se garantice que la función resultante sea continuamente diferenciable. Cuanto mayor sea el número de nudos más se incrementa la flexibilidad de la curva resultante, pero si este número es excesivo se pueden reflejar observaciones anómalas (*outliers*) no muy relevantes desde el punto de vista económico. En cambio, si el número de nudos es muy bajo no se consigue un ajuste adecuado de la ETTI. McCulloch propone utilizar un número de nudos de forma que cada subintervalo de la curva tenga el mismo número de fechas de vencimiento de los bonos cotizados.

Los parámetros a estimar tienen la siguiente interpretación:

- β_0 es una constante positiva.
- β_1 puede ser positivo o negativo e indica que el primer término exponencial $\beta_1 \cdot e^{-m/\tau_1}$ es monótonamente decreciente o creciente, respectivamente.
- β_2 puede ser positivo o negativo e indica que el segundo término exponencial $\beta_2 \cdot \frac{m}{\tau_1} \cdot e^{-m/\tau_1}$ produce una curvatura (un máximo o un mínimo).

Además se cumple:

$$\lim_{m\to\infty} f(m) = \beta_0$$

$$\lim_{m\to 0} f(m) = \beta_0 + \beta_1$$

lo cual nos indica que el tipo instantáneo a plazo converge a un valor constante, β_0, cuando el periodo hasta el vencimiento tiende a ∞ y a otro valor constante, $\beta_0 + \beta_1$, cuando tiende a cero. Por tanto, β_0 representa el tipo instantáneo a plazo correspondiente al periodo hasta el vencimiento más amplio dentro del rango de datos considerado y $\beta_0 + \beta_1$ constituye el tipo instantáneo a plazo correspondiente al menor periodo hasta el vencimiento (normalmente, la tasa a un día, también conocida como *overnight rate*).

Los tipos al contado se pueden obtener como una media de los tipos a plazo. Si consideramos el periodo hasta el vencimiento continuo, se trata de hallar la integral del tipo instantáneo a plazo entre dicho periodo:

$$r(m) = \int_{t=0}^{t=m} f(t)\cdot dt = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left[\frac{1-e^{-m/\tau_1}}{m/\tau_1}\right] + \beta_2 \cdot \left[\frac{1-e^{-m/\tau_1}}{m/\tau_1} - e^{-m/\tau_1}\right]$$

$$\boldsymbol{r(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\cdot\left[\frac{1-e^{-m/\tau_1}}{m/\tau_1}\right] - \beta_2 \cdot e^{-m/\tau_1}}$$

Se sustituye esta expresión en la función de descuento continuo:

$$\boldsymbol{A(0,m) = e^{r(m)\cdot m} = e^{\beta_0\cdot m + (\beta_1+\beta_2)\cdot\tau_1\cdot\left[1-e^{-m/\tau_1}\right] - \beta_2\cdot m\cdot e^{-m/\tau_1}}}$$

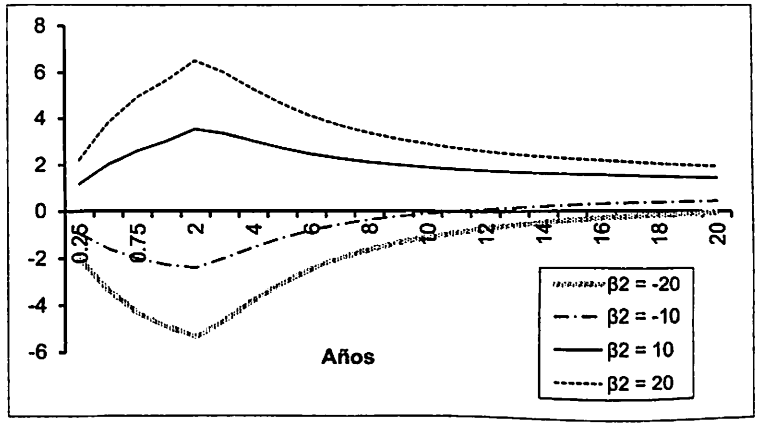
Y finalmente se estima la ecuación del precio de los bonos:

$$\boldsymbol{P_b = \sum_{k=1}^{m} e^{\beta_0\cdot k + (\beta_1+\beta_2)\cdot\tau_1\cdot\left[1-e^{-k/\tau_1}\right] - \beta_2\cdot k\cdot e^{-k/\tau_1}} + 100\cdot e^{\beta_0\cdot m + (\beta_1+\beta_2)\cdot\tau_1\cdot\left[1-e^{-m/\tau_1}\right] - \beta_2\cdot m\cdot e^{-m/\tau_1}}}$$

teniendo en cuenta que el vector de parámetros $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)$ se estima por mínimos cuadrados no lineales o máxima verosimilitud.

Nelson y Siegel (1987) muestran que esta función permite representar varias formas de la curva de tipos de interés. Para ello establecen los siguientes valores para los parámetros: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -1$ y $\tau_1 = 1$, con lo cual la expresión del tipo a plazo en un instante determinado sólo depende de los valores de β_2, a los cuales asigna los siguientes valores 20, 10, -10 y -20. Las posibles formas de la curva de tipos a plazo con estos datos se pueden obtener en la siguiente figura.

FIGURA 5.11. *Formas de la curva de tipos de interés al contado*



Los parámetros a estimar para obtener las ETTI al contado tienen la misma interpretación que para los tipos a plazo:

- β_0 representa el tipo a plazo más largo.
- β_1 permite determinar el segmento a corto plazo de la curva.
- β_2 determina el segmento a medio plazo de la curva.
- τ_1 tiene que ser positivo para garantizar la convergencia a largo plazo a β_0. Cuanto menor sea τ_1 menor será el valor de m en el que el tipo a plazo casi coincide con el valor límite β_0.

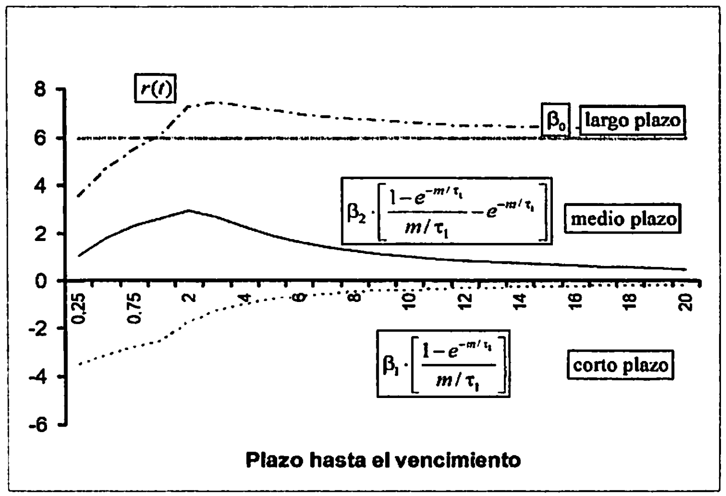
También se cumple:

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \beta_0$$

$$\lim_{t\to 0} r(t) = \beta_0 + \beta_1$$

En la Figura 5.12 se muestra la descomposición de la forma funcional del tipo al contado en un instante determinado según Nelson y Siegel (1987) teniendo en cuenta los siguientes valores: $\beta_0 = 6$, $\beta_1 = -4$, $\beta_2 = 10$ y $\tau_1 = 1$.

FIGURA 5.12. *Descomposición de la curva de Nelson y Siegel*



También se puede comprobar que la curva puede adoptar diversas formas dependiendo de la relación entre los parámetros, tal como se muestra en la Figura 5.13:

FIGURA 5.13. *Formas de la curva de Nelson y Siegel*

Forma de la curva	β_0	β_1	β_2	τ_1	Restricción
Creciente y cóncava	+	–	+	+	$\lvert\beta_1\rvert \geq \lvert\beta_2\rvert$
Creciente	+	–	–	+	$\lvert\beta_1\rvert \geq \lvert\beta_2\rvert$
Decreciente y convexa	+	+	–	+	$\lvert\beta_1\rvert \geq \lvert\beta_2\rvert$
Decreciente	+	+	+	+	$\lvert\beta_1\rvert \geq \lvert\beta_2\rvert$
Con joroba y encima de β_0	+	+	+	+	$\lvert\beta_1\rvert < \lvert\beta_2\rvert$
Con joroba y corta a β_0	+	–	+	+	$\lvert\beta_1\rvert < \lvert\beta_2\rvert$
Con depresión y debajo de β_0	+	–	–	+	$\lvert\beta_1\rvert < \lvert\beta_2\rvert$
Con depresión y corta a β_0	+	+	–	+	$\lvert\beta_1\rvert < \lvert\beta_2\rvert$

El modelo de Svensson (1994) modifica el de Nelson y Siegel en el sentido de que introduce más flexibilidad en las posibles curvas a cambio de añadir un tercer término exponencial con dos parámetros, β_3 y τ_2. Esto permite una segunda curvatura en las curvas de tipos al contado y de tipos a plazo.

La forma funcional que adopta el tipo instantáneo a plazo muestra la siguiente expresión:

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-m/\tau_1} + \beta_2 \cdot \frac{m}{\tau_1} \cdot e^{-m/\tau_1} + \beta_3 \cdot \frac{m}{\tau_2} \cdot e^{-m/\tau_2}$$

y el tipo instantáneo al contado se obtiene como en el modelo anterior:

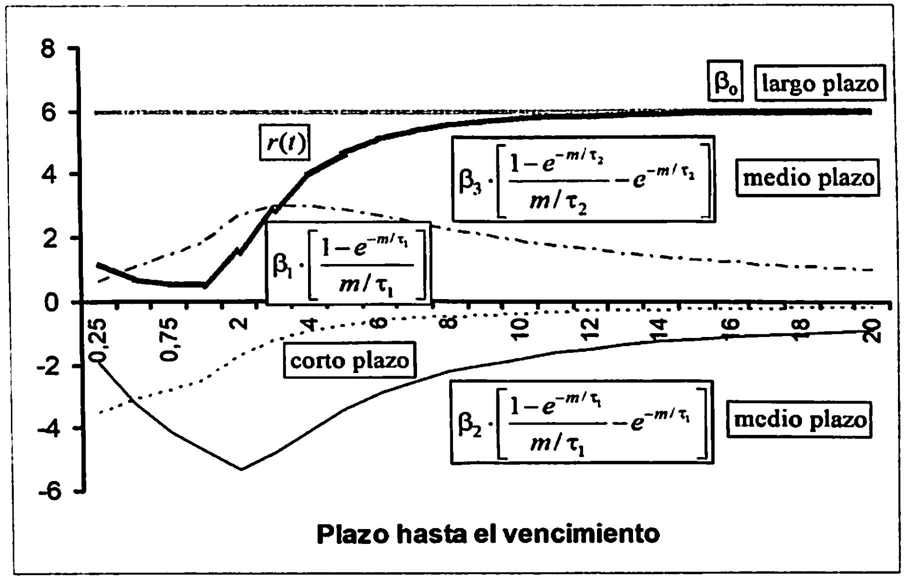
$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left[\frac{1-e^{-m/\tau_1}}{m/\tau_1}\right] + \beta_2 \cdot \left[\frac{1-e^{-m/\tau_1}}{m/\tau_1} - e^{-m/\tau_1}\right] + \beta_3 \cdot \left[\frac{1-e^{-m/\tau_2}}{m/\tau_2} - e^{-m/\tau_2}\right]$$

$$r(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \left[\frac{1-e^{-m/\tau_1}}{m/\tau_1}\right] - \beta_2 \cdot e^{-m/\tau_1} + \beta_3 \cdot \left[\frac{1-e^{-m/\tau_2}}{m/\tau_2} - e^{-m/\tau_2}\right]$$

La introducción de los nuevos parámetros, β_3 y τ_2, permite introducir una mayor flexibilidad en la curva que el modelo de Nelson y Siegel, pero su interpretación es similar a la de los parámetros β_2 y τ_1.

En la Figura 5.14 se muestra la descomposición de la forma funcional del tipo al contado en un instante determinado según Svensson (1987) teniendo en cuenta los siguientes valores: $\beta_0 = 6$, $\beta_1 = -4$, $\beta_2 = -18$, $\tau_1 = 1$, $\beta_3 = 10$ y $\tau_2 = 2$.

FIGURA 5.14. *Descomposición de la curva de Svensson*



Uno de los métodos utilizados para estimar los parámetros es el de mínimos cuadrados ordinarios no lineales que consiste en minimizar una de las dos siguientes funciones objetivo:

1. La suma de errores en precios al cuadrado:

$$Min \sum_{k=1}^{n} \left[\left(P_{bk} - \widehat{P_{bk}}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)\right)\right]^2 \text{ (según Nelson y Siegel).}$$

$$Min \sum_{k=1}^{n} \left[\left(P_{bk} - \widehat{P_{bk}}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1, \beta_3, \tau_2)\right)\right]^2 \text{ (según Svensson).}$$

donde:

P_{bk} : Precio observado del bono k.

$\widehat{P_{bk}}$: Precio teórico o estimado del bono k.

n : Número de bonos.

Desafortunadamente la minimización en precios puede llevar a un sobreajuste de los precios de los bonos a largo plazo con respecto a los bonos a corto plazo, dada la relación entre el TIR, el precio y el plazo hasta el vencimiento de un bono. Para corregir este problema se suele ponderar el error en precios por un valor que coincide con el inverso de la duración de Macaulay. De esta forma, las funciones objetivo a minimizar serían las siguientes:

$$Min \sum_{k=1}^{n} \left[\left(P_{bk} - \widehat{P_{bk}}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)\right)\right]^2 \cdot \Phi_k \text{ (según Nelson y Siegel).}$$

$$Min \sum_{k=1}^{n} \left[\left(P_{bk} - \widehat{P_{bk}}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1, \beta_3, \tau_2)\right)\right]^2 \cdot \Phi_k$$

donde:

Φ_k: Inversa de la duración relativa de Macaulay del bono k.

$$\Phi_k = \frac{1/D_k}{1/\sum_{k=1}^{n} D_k}$$

2. La suma de errores en TIR al cuadrado:

$$Min\sum_{k=1}^{n}\left[\left(TIR_{bk} - \widehat{TIR_{bk}}(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\tau_1)\right)\right]^2 \text{(según Nelson y Siegel)}.$$

$$Min\sum_{k=1}^{n}\left[\left(TIR_{bk} - \widehat{TIR_{bk}}(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\tau_1,\beta_3,\tau_2)\right)\right]^2 \text{(según Svensson)}.$$

donde:

TIR_{bk} : *TIR* real del bono k.

$\widehat{TIR_{bk}}$: *TIR* teórica o estimada del bono k.

n : Número de bonos.

En los dos criterios de optimización utilizados es necesario partir de un vector de parámetros inicial.

4.3. MODELOS DE EQUILIBRIO DINÁMICO

Todos los métodos anteriores son modelos estáticos porque proporcionan las ETTI en un instante determinado. Por el contrario, los modelos dinámicos son métodos basados en la dinámica del mercado y derivados de la teoría de valoración de opciones. El modelo para la función precio puede seleccionarse teniendo en cuenta las hipótesis económicas que regulan la evolución del mercado de títulos. Es el caso, por ejemplo, de los modelos estocásticos para la ETTI definidos en el campo continuo, en los cuales se asume que el estado del mercado es completamente determinado por un número limitado de variables estado, las cuales evolucionan de forma impredecible.

El caso más estudiado es aquel en el que las variables base siguen trayectorias aleatorias continuas. Se basa en dos premisas fundamentales:

- Establecimiento de hipótesis probabilísticas sobre la dinámica estocástica de las variables estado que permiten la modelización estocástica de la dinámica de estas variables.
- Cumplimiento de las hipótesis de los mercados perfectos: no friccionalidad, competitividad y ausencia de arbitraje.

En los denominados modelos unifactoriales la única variable estado es la tasa instantánea de interés al contado. Entre éstos, cabe destacar los modelos clásicos de Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985), que consideran que la tasa instantánea de interés al contado (*spot rate*) sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr(t) = \mu(t,r(t))\cdot dt + \mu(t,r(t))\cdot dW(t)$$

donde:

- $r(t)$: Valor en t de la tasa instantánea de interés a corto plazo.
- $\mu(t,r(t))$: Tendencia de la evolución de la tasa instantánea de interés a corto plazo. Depende del valor en t de la tasa instantánea de interés y del instante t.
- $\sigma(t,r(t))$: Volatilidad o desviación estándar de la evolución de la tasa instantánea de interés a corto plazo. También depende del valor en t de la tasa instantánea de interés y del instante t.
- $W(t)$: Proceso de Wiener, con media cero y varianza dt.

Los modelos unifactoriales son muy restrictivos ya que dependen únicamente de una variable estado, en este caso de la tasa instantánea de interés a corto plazo, permitiéndose desplazamientos paralelos de la curva, lo cual implica que los movimientos de los títulos están perfectamente correlacionados. Por ello, diversos autores utilizan modelos bifactoriales con una variable estado más como, por ejemplo, la diferencia entre las tasas instantáneas a corto y a largo plazo, la tasa instantánea a largo plazo, la volatilidad de la tasa instantánea a corto plazo, etc. Cabe citar los modelos de Schaefer y Schwartz (1984) y de Heath, Jarrow y Morton (1992). Son métodos más realistas, pero no admiten fórmulas cerradas para calcular el precio de los títulos a valorar, es decir, la ecuación diferencial no tiene solución y se debe resolver por métodos numéricos. Si se utilizan tres o más variables estado los modelos se denominan multifactoriales, pero no mejoran los resultados obtenidos con respecto a los modelos bifactoriales y, además, son modelos mucho más complejos en su resolución.

En términos rigurosos, la estimación de la ETTI definida por los modelos estocásticos requiere la especificación de los parámetros que caracterizan las distribuciones de probabilidad de las variables estado. Para ello se observa el proceso histórico de estas variables, teniendo en cuenta que la estimación basada únicamente en los valores de emisión de los títulos observados a una misma fecha no permite identificar completamente la ETTI y se denomina modelo de calibración de los datos.

5. APLICACIONES DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS

La ETTI al contado y los tipos a plazo se utilizan para calcular los precios de diferentes instrumentos financieros. A continuación se muestra cómo pueden utilizarse para calcular el precio de un bono con cupón.

FIGURA 5.15. *Precio de un bono con cupón con ETTI al contado*

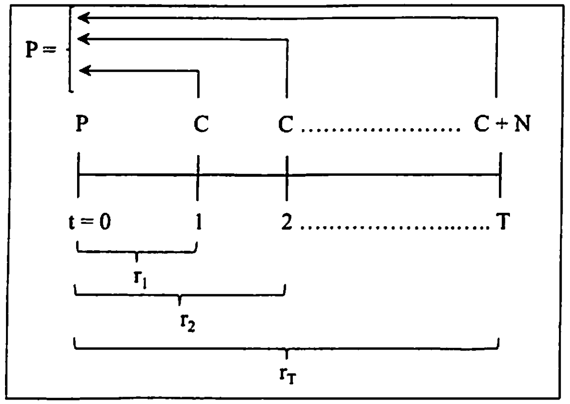
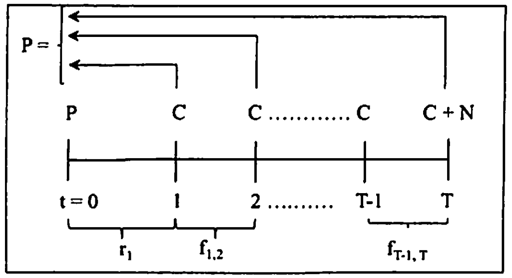


FIGURA 5.16. *Precio de un bono con cupón con tipos a plazo*



donde:

$C = N \cdot i_C$ (valor del cupón).

N: Valor nominal del bono.

i_C: Tipo de interés del cupón.

r_T: Tipo de interés al contado correspondiente al plazo [0,T].

$f_{T-1,T}$: Tipo de interés a plazo correspondiente al plazo [T − 1,T].

P: Precio del bono con cupón en el momento t.

Precio del bono con cupón con la ETTI al contado:

$$P = \frac{C}{(1+r_1)} + \frac{C}{(1+r_2)^2} + ... + \frac{C+N}{(1+r_T)^T} = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+r_t)^t} + \frac{C+N}{(1+r_T)^T}$$

Precio del bono con cupón con la ETTI a plazo:

$$P = \frac{C}{(1+r_1)} + \frac{C}{(1+r_1)(1+f_{1,2})} + ... + \frac{C+N}{(1+r_1)(1+f_{1,2})(1+f_{T-1,T})}$$

Además, si las ETTI van variando de forma creciente, decreciente o mixta, los precios también variarán, de forma que si las ETTI van creciendo los precios irán decreciendo y viceversa.

EJERCICIO 5.10.

Cuestión:

Calcular el precio de un Bono del Estado con las siguientes características:

- Nominal: 1.000 euros
- Tipo de interés del cupón anual: 1,80%
- Plazo hasta el vencimiento: 5 años

en cada uno de los casos de las siguientes ETTI que van creciendo de forma paralela 0,5% sobre el anterior:

Años	ETTI (%)	ETTI (%)	ETTI (%)	ETTI (%)	ETTI (%)
0					
1	-0,5	0	0,5	1	1,5
2	0,5	1	1,5	2	2,5
3	1	1,5	2	2,5	3
4	1,5	2	2,5	3	3,5
5	2	2,5	3	3,5	4

Solución:

$$P_{bono} = \frac{18}{(1-0,005)} + \frac{18}{(1+0,005)^2} + \frac{18}{(1+0,01)^3} + \frac{18}{(1+0,015)^4} + \frac{1.018}{(1+0,02)^5} = 992,38 \textit{ euros}$$

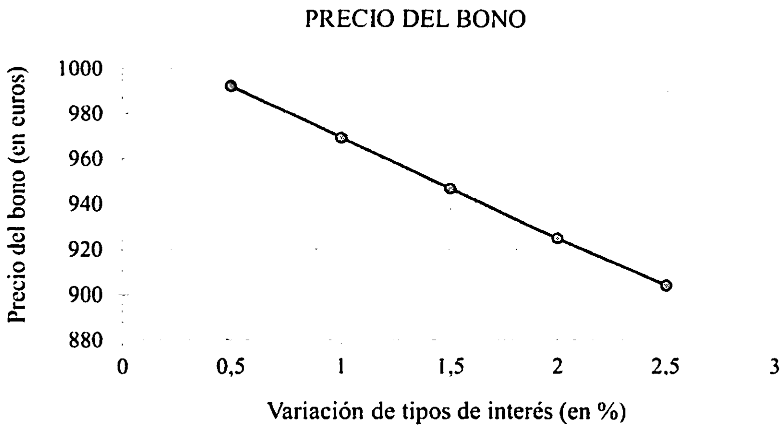
$$P_{bono} = \frac{18}{(1-0)} + \frac{18}{(1+0,01)^2} + \frac{18}{(1+0,015)^3} + \frac{18}{(1+0,02)^4} + \frac{1.018}{(1+0,025)^5} = 969,25 \textit{ euros}$$

$$P_{bono} = \frac{18}{(1+0,005)} + \frac{18}{(1+0,015)^2} + \frac{18}{(1+0,02)^3} + \frac{18}{(1+0,025)^4} + \frac{1.018}{(1+0,03)^5} = 946,79 \textit{ euros}$$

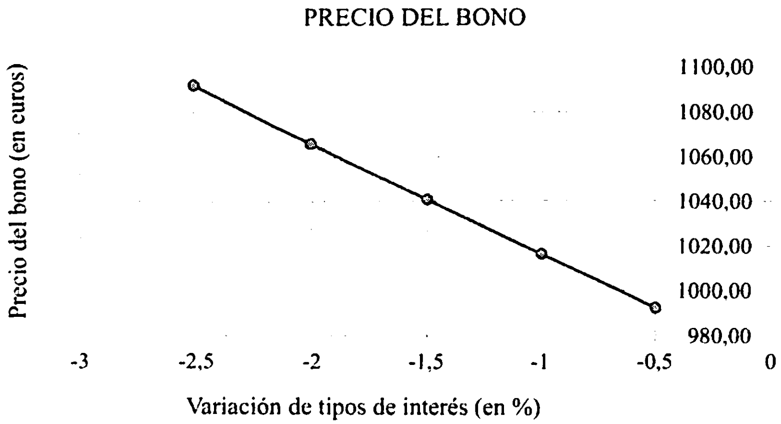
$$P_{bono} = \frac{18}{(1+0,01)} + \frac{18}{(1+0,02)^2} + \frac{18}{(1+0,025)^3} + \frac{18}{(1+0,03)^4} + \frac{1.018}{(1+0,035)^5} = 924,96 \textit{ euros}$$

$$P_{bono} = \frac{18}{(1+0,015)} + \frac{18}{(1+0,025)^2} + \frac{18}{(1+0,03)^3} + \frac{18}{(1+0,035)^4} + \frac{1.018}{(1+0,04)^5} = 903,75 \textit{ euros}$$

Por tanto el precio del bono disminuye a medida que los tipos de interés de la ETTI aumentan de forma paralela sobre la ETTI inicial:



Y se podría comprobar también lo contrario, que el precio del bono aumenta a medida que los tipos de interés de la ETTI disminuyen de forma paralela sobre la ETTI inicial:



EJERCICIO 5.11.

Cuestión:

Calcular el precio de un Bono del Estado con las siguientes características:

- Nominal: 1.000 euros
- Tipo de interés del cupón anual: 1,80%
- Plazo hasta el vencimiento: 5 años

si el tipo de interés al contado del primer año es el 0,5% y se dispone de los siguientes tipos a plazo implícitos anuales:

$f_{1,2} = 0,60\%$

$f_{2,3} = 0,80\%$

$f_{3,4} = 0,90\%$

$f_{4,5} = 1\%$

Solución:

$$P_{bono} = \frac{18}{(1+0,005)} + \frac{18}{(1+0,005)(1+0,006)} + \frac{18}{(1+0,005)(1+0,006)(1+0,008)} + 1$$

$$+ \frac{18}{(1+0,005)(1+0,006)(1+0,008)(1+0,009)} +$$

$$+ \frac{18}{(1+0,005)(1+0,006)(1+0,008)(1+0,009)(1+0,01)} = 1.051,07 \textit{euros}$$

TEMA 6

DURACIÓN, CONVEXIDAD E INMUNIZACIÓN FINANCIERA

SUMARIO: 1. DURACIÓN. 2. CONVEXIDAD. 3. INMUNIZACIÓN FINANCIERA.

1. DURACIÓN

El precio de un bono con cupón se calcula como:

$$P = \frac{F_1}{(1+r)} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{F_T}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

donde:

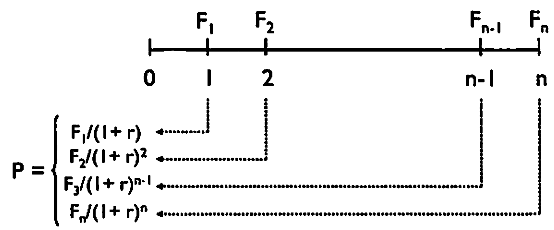
P : precio del bono con cupón. Si se expresa en % sobre el valor nominal se denomina "precio teórico", lo que permite comparar activos con diferentes vencimientos.

F_t : cuantía del *t*-ésimo flujo generado por el activo.

r : TIR, que puede ser la de la deuda pública o la de cupón cero de plazo hasta el vencimiento más un diferencial.

n : plazo hasta el vencimiento.

FIGURA 6.1. *Cálculo del precio de un bono con cupón*



Los factores que influyen en el precio de bono son:

- El plazo hasta el vencimiento, que influye de forma inversa (a mayor plazo menor precio o a menor plazo mayor precio).
- La rentabilidad o TIR, que también influye de forma inversa (a mayor TIR menor precio o a menor TIR mayor precio).
- El cupón, que influye de forma directa (a mayor cupón mayor precio o a menor cupón menor precio).

La duración de Macaulay (1938) es una medida del plazo efectivo hasta el vencimiento de un bono y se calcula como la media ponderada de los plazos hasta el vencimiento de cada flujo, considerando como ponderaciones los valores actuales relativos de cada flujo.

$$D=\sum_{t=1}^{n}\frac{t\cdot\frac{F_t}{(1+r)^t}}{P}=\sum_{j=1}^{n}t\cdot\omega_t$$

donde:

$$\omega_t=\frac{\frac{F_t}{(1+r)^t}}{P}$$

ω_t: ponderación del plazo hasta el vencimiento t.

Los factores que influyen en la duración son:

a) Plazo hasta el vencimiento:

- La duración de un bono cupón cero es igual a su plazo hasta el vencimiento. Por tanto, la duración de un bono cupón cero es siempre mayor que la de un bono con cupón si tienen el mismo plazo hasta el vencimiento.
- La duración de un bono con cupón es menor que su plazo hasta el vencimiento, si éste es finito y superior a la unidad.
- La duración de un bono con cupón que cotice a la par o por encima de la par es una función monótona creciente respecto del plazo hasta el vencimiento y tiende a (1+r)/r cuando el plazo hasta el vencimiento tiende a infinito.
- La duración de un bono con cupón que cotice por debajo de la par alcanza un máximo antes de que el plazo hasta el vencimiento sea infinito, para descender posteriormente hacia el límite (1+r)/r.
- La duración de un bono perpetuo es:

$$D=\frac{1+r}{r}$$

b) Tipo de interés del cupón: la duración de un bono está inversamente relacionada con el tipo de interés del cupón, excepto en el caso de los bonos perpetuos.

c) TIR: la duración de un bono con cupón está inversamente relacionada con la TIR.

d) Frecuencia en el pago de cupones: tiene una relación inversa con la duración.

e) Proximidad o lejanía al pago del cupón: a mayor proximidad menor duración.

La duración es una medida muy utilizada para la gestión de carteras de activos de renta fija por tres motivos principalmente:

- Es una medida del plazo efectivo hasta el vencimiento de la cartera.
- Es una herramienta fundamental para la inmunización de carteras de los riesgos de tipos de interés.

- Es una medida de la sensibilidad de una cartera de activos de renta fija a fluctuaciones de los tipos de interés. Hicks (1939) la considera como una medida de la elasticidad del valor de una serie de flujos respecto al factor de descuento.

La relación formal entre el riesgo de tipo de interés (variación del precio de un activo antes una variación de tipos de interés) y la duración se resume en los dos teoremas siguientes:

1. La variación relativa del precio del bono es proporcional a su duración y está relacionada con la variación absoluta de la rentabilidad de mercado (Fisher, 1966).

$$\frac{\Delta P}{P}\simeq -D\cdot\frac{\Delta r}{1+r} \qquad \Delta P\simeq -P\cdot\frac{D}{1+r}\cdot\Delta r$$

$$\frac{\Delta P}{P}\simeq -D_M\cdot\Delta r \qquad \Delta P\simeq -P\cdot D_C\cdot\Delta r$$

$$D_M=\frac{D}{1+r}$$

donde:

$D_C = D_M$ es la duración corregida o modificada.

r: rentabilidad del mercado o TIR.

$\frac{\Delta P}{P}$ es la variación relativa del precio (en porcentaje).

ΔP es la variación absoluta del precio (en unidades monetarias).

2. Cuanto mayor sea la duración, mayorá será la variación relativa en el precio de un bono para un cambio en el TIR del bono (Hopewell y Kaufman, 1973).

La duración también se puede calcular a partir de la sensibilidad y de la duración corregida, teniendo en cuenta que:

a) La sensibilidad del precio de un bono a la variación de tipos de interés es la derivada primera del precio del bono respecto a la variación de la TIR:

$$S=\sum_{t=1}^{n}-t\cdot\frac{F_t}{(1+r)^{t+1}}$$

- La duración corregida es la sensibilidad relativa con respecto al precio, cambiada de signo:

$$D_C=-\frac{S}{P}=\sum_{t=1}^{n}\frac{t\cdot\frac{F_t}{(1+r)^{t+1}}}{P}$$

Por tanto:

$$D=D_C\cdot(1+r)$$

$$D=-\frac{S}{P}\cdot(1+r)$$

La duración de una cartera de títulos de renta fija es la media ponderada de las duraciones de los títulos que componen la cartera, teniendo en cuenta que las ponderaciones son las proporciones del valor actual de los títulos de cada tipo sobre el valor total de la cartera:

$$D_{cartera} = \sum_{t=1}^{n} D_t \cdot \frac{P_t}{V_{cartera}}$$

D_t: duración de un título del tipo *t*.

P_t: valor actual de los títulos del tipo *t*.

$V_{cartera}$: valor total de la cartera.

Una medida alternativa a la duración para valorar el riesgo de tipo de interés es el Valor del Punto Básico (*Basic Point Value*), que es la variación absoluta en el precio de un activo de renta fija derivado de una variación de un punto básico (0,01%) en su TIR. Se expresa en unidades monetarias y deriva de la aplicación del teorema de Fisher (1966).

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D \cdot \frac{\Delta r}{1+r}$$

$$\Delta P \approx -P \cdot D_C \cdot \Delta r$$

$$VPB = -P \cdot D_C \cdot 0{,}0001$$

Las ventajas del Valor del Punto Básico con respecto a la duración (Oberhoffer, 1988):

- El BPV expresa de forma concreta la sensibilidad del precio de un activo con respecto al tipo de interés, en unidades monetarias, en lugar de hacerlo de forma abstracta como la duración.
- El BPV no requiere una interpretación correcta del contexto en el que es calculado. Sin embargo, para entender la duración de un título se debe calcular su precio y su TIR. El BPV resume en una única cifra el efecto de las tres variables anteriores.

Y su principal inconveniente es que no debe ser utilizado para comparar el riesgo de mercado de títulos diferentes debido a que el BPV depende de cuál sea el valor de esos títulos.

Sin embargo, la duración y el Valor del Punto Básico presentan una serie de limitaciones como medidas del riesgo de tipo de interés:

- Son sólo medidas correctas del riesgo de tipo de interés para cambios lo suficientemente pequeños del tipo de interés.
- Son medidas precisas del riesgo de tipo de interés sólo para los títulos al descuento o cupón cero.
- Para los demás títulos serán medidas del riesgo de tipos de interés si la ETTI es plana y se desplaza de forma paralela, es decir, todos los tipos de interés de la ETTI varían en la misma proporción.

La duración representa el momento de primer orden de la distribución de las ponderaciones ω_t, que representan los valores actuales relativos de cada flujo F_t con respecto al valor actual del bono:

$$\omega_t = \frac{\frac{F_t}{(1+r)^t}}{P} \quad \text{, donde } t = 1, 2, \ldots, n.$$

mientras que la duración de segundo orden hace referencia al momento de segundo orden y proporciona una medida de dispersión temporal del flujo respecto al instante inicial (DT). La duración de segundo orden (D^2) se mide en unidades de tiempo al cuadrado porque expresa una media ponderada de tiempos al cuadrado. Para proporcionar la medida de dispersión en unidades de tiempo es suficiente calcular la raíz cuadrada.

$$D^2 = \sum_{t=1}^{n} \frac{(t-t_0)^2 \cdot \frac{F_t}{(1+r)^t}}{P} = \sum_{j=1}^{n} (t-t_0)^2 \cdot \omega_t$$

$$DT = \sqrt{D^2}$$

EJERCICIO 6.1.

Cuestión:

Un bono con plazo hasta el vencimiento de 15 años tiene un tipo de interés del cupón anual del 5% y una rentabilidad hasta el vencimiento del 6%. Calcular:

a) El precio del bono.

b) La duración.

c) ¿Qué sucederá con el precio del bono si la rentabilidad hasta el vencimiento se incrementa 100 puntos básicos?

d) El valor del punto básico.

e) La duración de segundo orden.

f) El índice de dispersión temporal.

Solución:

a) El precio del bono.

$$P = 50 \cdot a_{\overline{15}|0,06} + \frac{1.000}{(1{,}06)^{15}} = 902{,}88 \text{ €}$$

b) La duración.

$$D = \frac{1 \cdot \frac{50}{1{,}06} + 2 \cdot \frac{50}{(1{,}06)^2} + \ldots + 14 \cdot \frac{50}{(1{,}06)^{14}} + 15 \cdot \frac{1.050}{(1{,}06)^{15}}}{902{,}88}$$

$D = 10{,}66$ aæos

c) ¿Qué sucederá con el precio del bono si la rentabilidad hasta el vencimiento se incrementa 100 puntos básicos?

$$\frac{\Delta P}{P} = -D_M \cdot \Delta r = -\frac{10{,}66}{1+0{,}06} \cdot 1 = -10{,}06\%$$

$$\frac{P_1 - P_0}{P_0} = -10{,}06\%$$

$$P_1 = P_0 \cdot (1-0{,}1006) = 902{,}88 \cdot (1-0{,}1006) = 812{,}05 \textit{ euros}$$

$$\Delta P = P_1 - P_0 = 812{,}05 - 902{,}88 = -90{,}83 \textit{ euros}$$

d) El valor del punto básico.

$$VPB = -P \cdot D_C \cdot 0,0001 = -902,88 \cdot \frac{10,66}{1+0,06} \cdot 0,0001 = -0,91 \; euros$$

El valor del punto básico indica que, ante un aumento de un punto básico en el tipo de interés (0,01%) el precio del bono disminuirá 0,91 euros.

e) La duración de segundo orden.

$$D^2 = \frac{1 \cdot \frac{50}{1,06} + 2^2 \cdot \frac{50}{(1,06)^2} + \ldots + 14^2 \cdot \frac{50}{(1,06)^{14}} + 15^2 \cdot \frac{1.050}{(1,06)^{15}}}{902,88} = 139,45 \; años^2$$

f) El índice de dispersión temporal.

$$DT = \sqrt{D^2} = \sqrt{139,45} = 11,81 \; años$$

EJERCICIO 6.2.

Cuestión:

Calcular la duración de un bono perpetuo que paga 100 euros anualmente si la rentabilidad hasta el vencimiento es el 8%.

Solución:

$$D = \frac{1+0,08}{0,08} = 13,50 \; años$$

EJERCICIO 6.3.

Calcular la duración de la siguiente cartera de activos de renta fija:

- 100 Bonos del Estado de nominal de 10.000 euros, con vencimiento tres años, interés del cupón del 5%.
- 500 Letras del Tesoro, nominal de 1.000 euros y vencimiento un año.
- 200 participaciones preferentes con cupón anual de 100 euros.

Si la TIR es el 4%, calcular:

Solución:

Datos:

- 100 Bonos del Estado
  N = 10.000 euros
  n = 3 años
  i_c = 0,05

- 500 Letras del Tesoro
  N = 5.000 euros
  n = 1 año
- 200 participaciones preferentes
  C = 100 euros anuales
  TIR = 0,04

Se calcula el precio y la duración de un Bono del Estado:

$$P_{Bonos} = 500 \cdot a_{\overline{3}|0,04} + \frac{10.000}{(1+0,04)^3} = 10.277,51 \text{ €}$$

$$D_{Bonos} = \frac{1 \cdot \frac{500}{1+0,04} + 2 \cdot \frac{500}{(1+0,04)^2} + 3 \cdot \frac{10.500}{(1+0,04)^3}}{10.277,51} = 2,86 \; años$$

Se calcula el precio y la duración de una Letra del Tesoro:

$$P_{Letras} = \frac{1.000}{1+0,04} = 961,54 \text{ €}$$

$$D_{Letras} = 1 \; año$$

Se calcula el precio y la duración de una participación preferente:

$$P_{Participaciones} = \frac{100}{0,04} = 2.500 \text{ €}$$

$$D_{Participaciones} = \frac{1+0,04}{0,04} = 26 \; años$$

Se calcula el valor de la cartera:

$$V_{Cartera} = 100 \cdot 10.277,51 + 500 \cdot 961,54 + 200 \cdot 2.500 = 2.008.521 \; euros$$

Se calculan las ponderaciones de cada tipo de activo en el valor de la cartera:

$$\omega_{Bonos} = \frac{100 \cdot 10.277,51}{2.008.521} = 0,5117 = 51,17\%$$

$$\omega_{Letras} = \frac{500 \cdot 961,54}{2.008.521} = 0,2394 = 23,94\%$$

$$\omega_{Letras} = \frac{200 \cdot 2.500}{2.008.521} = 0,2489 = 24,89\%$$

$$\omega_{Bonos} + \omega_{Letras} + \omega_{Participaciones} = 100\%$$

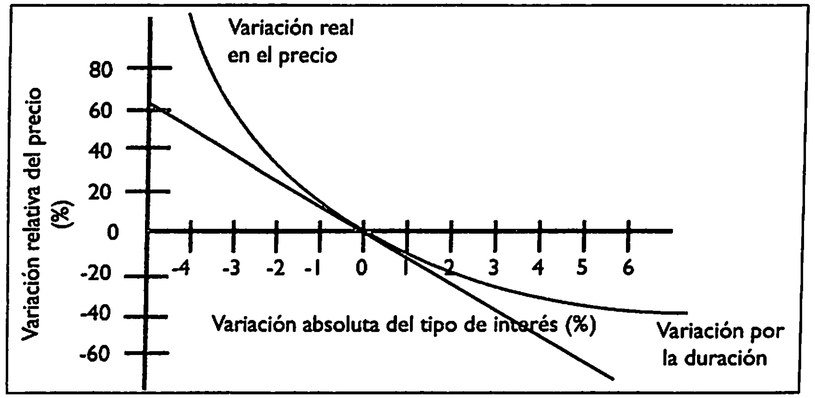
Se calcula la duración de la cartera:

$$D_{Cartera} = \frac{2,86 \cdot 100 \cdot 10.277,51 + 1 \cdot 500 \cdot 961,54 + 26 \cdot 200 \cdot 2.500}{2.008.521} =$$
$$= 2,86 \cdot 0,5117 + 1 \cdot 0,2394 + 26 \cdot 0,2489 = 8,18 \; años$$

2. CONVEXIDAD

La relación entre la variación relativa en el precio de un bono y su TIR no es lineal, sino estrictamente convexa. La duración proporciona una buena aproximación para cambios pequeños en la rentabilidad, pero no para fluctuaciones grandes.

FIGURA 6.2. *Relación entre la variación relativa del precio de un bono ante una variación absoluta del tipo de interés*



La convexidad es la curvatura de la relación precio-rentabilidad de un bono y permite estimar con mayor precisión la variación en el precio de un bono respecto a la variación del tipo de interés ya que la utilización de la duración:

- Subestima el aumento del precio cuando baja la rentabilidad.
- Sobrestima la bajada del precio cuando aumenta la rentabilidad.

Se desarrolla la función de precio de un bono como función del tipo de interés con el teorema de Taylor y se obtiene:

$$\Delta P = \frac{dP}{dr} \cdot \Delta r + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2P}{dr^2} \cdot (\Delta r)^2 + \text{Resto}$$

donde:

- el primer sumando refleja la variación absoluta del precio del bono ante una variación absoluta del tipo de interés, debida a la duración.
- el segundo sumando refleja la variación absoluta del precio del bono ante una variación absoluta del tipo de interés, debida a la convexidad.

Si se dividen ambos miembros de la ecuación anterior por el precio se obtiene:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{dP}{dr} \cdot \frac{1}{P} \cdot \Delta r + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2P}{dr^2} \cdot \frac{1}{P} \cdot (\Delta r)^2 + \text{Resto}$$

donde:

- el primer sumando refleja la variación relativa del precio del bono ante una variación absoluta del tipo de interés, debida a la duración.
- el segundo sumando refleja la variación relativa del precio del bono ante una variación absoluta del tipo de interés, debida a la convexidad.

Por tanto:

- En términos absolutos, la variación absoluta del precio del bono ante una variación del tipo de interés debida a la convexidad es igual a la variación absoluta del precio no explicada por su duración corregida.
- En términos relativa, la variación porcentual del precio del bono ante una variación del tipo de interés debida a la convexidad es igual a la variación relativa del precio no estimada por su duración corregida.

La convexidad absoluta es la segunda derivada parcial del precio de un bono respeto a la variación de la TIR:

$$C = \frac{d^2P}{dr^2} = \sum_{t=1}^{n} t \cdot (t+1) \cdot \frac{F_t}{(1+r)^{t+2}}$$

La convexidad modificada o corregida:

$$C_M = \frac{C}{P}$$

El coeficiente de convexidad:

$$CC = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2P}{dr^2} \cdot \frac{1}{P} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \frac{1}{P} = \frac{1}{2} \cdot C_M$$

La convexidad de un Bono Perpetuo:

$$C = \frac{d^2P}{dr^2} = \frac{2 \cdot C}{r^3}$$

***donde*:**

$$P = \frac{C}{r}$$

La convexidad de una cartera de títulos de renta fija es la media ponderada de las duraciones de los títulos que componen la cartera, teniendo en cuenta que las ponderaciones son las proporciones del valor actual de los títulos de cada tipo sobre el valor total de la cartera:

$$C_{cartera} = \sum_{t=1}^{n} C_t \cdot \frac{P_t}{V_{cartera}}$$

D_t: duración de un título del tipo *t*.

P_t: valor actual de los títulos del tipo *t*.

$V_{cartera}$: valor total de la cartera.

En términos generales la convexidad es siempre positiva y beneficia siempre a las carteras de renta fija porque la mayor convexidad de una cartera de renta fija supone que:

- Ante bajadas del tipo de interés, el valor de la cartera aumenta por encima de lo previsto según su duración corregida.
- Ante subidas del tipo de interés, la caída del valor de la cartera es inferior a la prevista por su duración corregida.

EJERCICIO 6.4.

Un bono con vencimiento a 15 años y un cupón del 5% se vende a una rentabilidad inicial al vencimiento del 5%. El bono se amortiza por su valor nominal, que es de 1.000 euros. Si la rentabilidad se incrementa 200 puntos básicos, calcular:

a) La duración modificada.

b) La convexidad.

c) El valor del punto básico.

d) La variación en el precio del bono debida a la duración y el precio estimado.

e) La variación en el precio del bono debida a la duración+convexidad y el precio estimado.

f) Los errores debidos a la estimación con la duración y a la duración+convexidad.

Solución:

a) La duración modificada.

$$D=\frac{1\cdot\frac{50}{1,05}+2\cdot\frac{50}{(1,05)^2}+\ldots+14\cdot\frac{50}{(1,05)^{14}}+15\cdot\frac{1.050}{(1,05)^{15}}}{1.000}=10,54\ \textit{años}$$

$$D_M=\frac{10,54}{1,05}=10,04\ \textit{años}$$

b) La convexidad.

$$C=\sum_{t=1}^{15}F_t\cdot t\cdot(t+1)\cdot(1,05)^{-t-2}=1\cdot 2\cdot\frac{50}{(1+0,05)^3}+2\cdot 3\cdot\frac{50}{(1+0,05)^4}+\ldots+$$

$$+15\cdot 16\cdot\frac{1.050}{(1+0,05)^{15}}=135.080$$

$$C_M=\frac{C}{P}=\frac{135.080}{1.000}=135,08$$

c) La variación en el precio del bono debida a la duración y el precio estimado.

$$\frac{\Delta P}{P}=-D_M\cdot\Delta r=-10,04\cdot 2=-20,08\%$$

$$\Delta P=-1.000\cdot 0,2008=-200,80\ \textit{euros}$$

$$\widehat{P}_1=P_0\cdot(1-0,2008)=1.000\cdot(1-0,2008)$$

$$\widehat{P}_1=799,20\ \textit{euros}$$

d) La variación en el precio del bono debida a la duración+convexidad y el precio estimado.

$$\frac{\Delta P}{P}=-D_M\cdot\Delta r+\frac{1}{2}\cdot C\cdot(\Delta r)^2$$

$$\frac{\Delta P}{P}=-10,04\cdot 0,02+\frac{1}{2}\cdot 135,08\cdot(0,02)^2$$

$$\frac{\Delta P}{P}=-0,1738=-17,38\%$$

$$\Delta P=-1.000\cdot 0,1738=-173,80\ \textit{euros}$$

$$\widehat{P}_1'=P_0\cdot(1-0,1738)=1.000\cdot(1-0,1738)=826,20\ \textit{euros}$$

e) Los errores debidos a la estimación con la duración y a la duración+convexidad.

Se calcula el precio del bono después del incremento de la rentabilidad:

$$P_1=\frac{50}{1,07}+\frac{50}{(1,07)^2}+\ldots+\frac{50}{(1,07)^{14}}+\frac{1.050}{(1,07)^{15}}$$

$$P_1=50\cdot a_{\overline{15|}0,07}+\frac{1.050}{(1,07)^{15}}=817,84\ \textit{euros}$$

Se calcula el error debido a la estimación con la duración:

$$\varepsilon_D=P_1-\widehat{P}_1=817,84-799,20=18,64\ \textit{euros}$$

Se calcula el error debido a la estimación con la duración+convexidad:

$$\varepsilon_{D+C}=P_1-\widehat{P}_1'=817,84-826,20=-8,36\ \textit{euros}$$

EJERCICIO 6.5.

Cuestión:

Calcular la convexidad de un bono perpetuo que paga 100 euros anualmente si la rentabilidad hasta el vencimiento es el 8%.

Solución:

$$C=\frac{2\cdot 100}{0,08^3}=390.625$$

EJERCICIO 6.6.

Calcular la convexidad de la siguiente cartera de activos de renta fija:

- 100 Bonos del Estado de nominal de 10.000 euros, con vencimiento tres años, interés del cupón del 5%.
- 500 Letras del Tesoro, nominal de 1.000 euros y vencimiento un año.
- 200 participaciones preferentes con cupón anual de 100 euros.

Si la TIR es el 4%, calcular:

Solución:

Datos:

- 100 Bonos del Estado
  N = 10.000 euros
  n = 3 años
  i_c = 0,05
- 500 Letras del Tesoro
  N = 5.000 euros
  n = 1 año
- 200 participaciones preferentes
  C = 100 euros anuales
  TIR = 0,04

Se calcula el precio y la convexidad de un Bono del Estado:

$$P_{Bonos} = 500 \cdot a_{\overline{3}|0,04} + \frac{10.000}{(1+0,04)^3} = 10.277,51\ €$$

$$C_{Bonos} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{500}{(1+0,04)^3} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{500}{(1+0,04)^4} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{10.500}{(1+0,04)^5} = 107.016,22$$

Se calcula el precio y la convexidad de una Letra del Tesoro:

$$P_{Letras} = \frac{1.000}{1+0,04} = 961,54\ €$$

$$C_{Letras} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1.000}{(1+0,04)^3} = 1.777,99$$

Se calcula el precio y la convexidad de una participación preferente:

$$P_{Participaciones} = \frac{100}{0,04} = 2.500\ €$$

$$C_{Participaciones} = \frac{2 \cdot 100}{0,04^3} = 3.125.000$$

Se calcula el valor de la cartera:

$$V_{Cartera} = 100 \cdot 10.277,51 + 500 \cdot 961,54 + 200 \cdot 2.500 = 2.008.521\ \textit{euros}$$

Se calculan las ponderaciones de cada tipo de activo en el valor de la cartera:

$$\omega_{Bonos} = \frac{100 \cdot 10.277,51}{2.008.521} = 0,5117 = 51,17\%$$

$$\omega_{Letras} = \frac{500 \cdot 961,54}{2.008.521} = 0,2394 = 23,94\%$$

$$\omega_{Letras} = \frac{200 \cdot 2.500}{2.008.521} = 0,2489 = 24,89\%$$

$$\omega_{Bonos} + \omega_{Letras} + \omega_{Participaciones} = 100\%$$

Se calcula la convexidad de la cartera:

$$C_{Cartera} = \frac{107.016,22 \cdot 100 \cdot 1.777,99 \cdot 500 \cdot 961,54 + 3.125.000 \cdot 200 \cdot 2.500}{2.008.521} =$$
$$= 107.016,22 \cdot 0,5117 + 1.777,99 \cdot 0,2394 + 3.125.000 \cdot 0,2489 = 805.185,85$$

3. INMUNIZACIÓN FINANCIERA

La inmunización financiera es una de las principales estrategias pasivas de gestión de carteras de renta fija, que son aquellas que están diseñadas para la consecución de una serie de objetivos independientemente de la evolución de los tipos de interés.

Muchos bancos tienen una mala casación entre el vencimiento de los activos y los pasivos debido a la estructura de su balance ya que las partidas de activo tienen una mayor duración que las partidas de pasivo, es decir, que las primeras son más sensibles a la variación de tipos de interés.

FIGURA 6.3. *Balance de situación de un banco (actividad tradicional)*

Activos	Pasivos
Préstamos a la clientela	Depósitos de la clientela

$D_A > D_P$

Sin embargo, en el caso de las compañías de seguros ocurre al contrario ya que sus partidas de pasivo tienen una mayor duración que sus partidas de activos.

La inmunización financiera clásica, analizada en los trabajos de Macaulay (1938), Samuelson (1945), Redington (1952) y Fisher y Weil (1971), puede ser definida como una metodología dirigida a aislar los efectos que, un cambio en los tipos de interés, puede tener sobre el valor de una cartera.

La inmunización de una cartera tiene como objetivo que el valor final de la inversión no sea inferior al previsto al inicio del horizonte temporal del inversor sin que afecte lo que suceda con los tipos de interés durante este periodo.

Toda estrategia de inmunización se basa en dos premisas:

- La necesidad del inversor de establecer un horizonte temporal para su inversión, que no debe confundirse con el plazo hasta el vencimiento.
- La estructura temporal de los tipos de interés se desplaza generalmente con variaciones paralelas. Esto implica que la rentabilidad de los bonos se mueve de la misma forma y con independencia de su plazo.

La inmunización trata de eliminar la sensibilidad del precio a los cambios en los tipos de interés a través de equilibrar la duración de los flujos de entradas con la duración de los flujos de salidas. Según el teorema de inmunización de Fisher y Weil (1971) una cartera estará inmunizada si su duración coincide con el horizonte temporal del inversor. Así, el riesgo del tipo de interés y el riesgo de reinversión se intentarán neutralizar[1].

(1) El riesgo de tipo de interés (riesgo a corto plazo o riesgo de precio) se refiere al riesgo de variación en el precio de un bono ante variaciones del tipo de interés. En cambio el

Las estrategias de inmunización pueden desarrollarse en base a dos criterios:

1. Intentando que los flujos de entrada y de salida sean iguales, es decir, que los créditos sean iguales a los débitos en cuantía y en fechas de exigibilidad y la cartera de activos y pasivos sólo tenga cuantías nulas. Esta situación se conoce como *perfect matching* o "política de casar operaciones".
2. Eliminando el riesgo de la cartera, al hacer coincidir la duración de los flujos de entrada con la duración de los flujos de salida.

Los inversores en renta fija se enfrentan a dos tipos de riesgo de tipo de interés, que se compensan:

- Riesgo de precio: incrementos en el tipo de interés producen pérdidas de capital.
- Riesgo de reinversión: incrementos en el tipo de interés incrementan la tasa de reinversión de los ingresos.

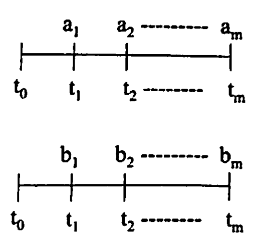
Si la duración de la cartera coincide con el horizonte temporal del inversor, ambos riesgos se compensan y la cartera está inmunizada ante la variación de tipos de interés.

Tal como señala Redington (1952) el núcleo de la teoría de la inmunización clásica se basa en dos definiciones y en dos reglas.

Las dos definiciones se refieren al *flujo de entradas o de activos* (inversiones más intereses) y al *flujo de salidas o pasivos* (indemnizaciones más gastos menos primas).

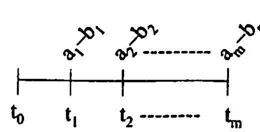
Se consideran dos operaciones financieras cuyos términos se hacen efectivos en los mismos vencimientos:

FIGURA 6.4. *Esquemas de dos operaciones financieras*



Se puede obtener la operación financiera conjunta o compuesta calculando las diferencias entre las cuantías de los términos de las dos operaciones financieras en cada uno de los vencimientos:

FIGURA 6.5. *Esquema de la operación financiera conjunta*



Se considera la primera operación financiera como un flujo de entradas o de activos, pactados en t_0, para los vencimientos $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Y la segunda como un flujo de salidas o de pasivos, pactados también en t_0, para los vencimientos $t_1, t_2, \ldots, t_m$. La

riesgo de reinversión (riesgo de medio o largo plazo) hace referencia al riesgo de no obtener la rentabilidad ofrecida inicialmente por el mercado como consecuencia de las variaciones en los tipos de interés.

operación conjunta, obtenida por diferencia entre un flujo de entradas y otro flujo de salidas, es una cartera de activos y pasivos.

Sean V_A y V_P los valores actuales de todos los flujos de entrada (activos) y de salidas (pasivos), respectivamente, que se obtienen de las siguientes expresiones:

$$V_A = \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot e^{-\delta t_k}$$

$$V_P = \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot e^{-\delta t_k}$$

Las dos reglas en las que se basa el núcleo de la teoría de la inmunización financiera clásica son las siguientes:

Regla 1:

En el momento actual el valor actual de los flujos de activos coincide con el valor actual de los flujos de pasivos. Si se produce un cambio en la tasa instantánea de interés de δ a $\delta' = \delta + \varepsilon$ con un consiguiente cambio de V_A y V_P *a* V_A' y V_P', la posición de la cartera después del cambio de la tasa instantánea de interés se obtiene a través del teorema de Taylor:

$$V_A' - V_P' = (V_A - V_P) + \frac{\partial (V_A - V_P)}{\partial \delta} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 (V_A - V_P)}{\partial \delta^2} \cdot \varepsilon^2 + \ldots + \text{Resto}$$

En el desarrollo del teorema de Taylor el primer término es nulo por los supuestos de partida. También es lógico que, si no se produce un beneficio o pérdida cualquiera que sea el cambio en la tasa instantánea de interés, las derivadas sucesivas serán nulas. En la práctica, la primera derivada es la más importante para cambios pequeños de la tasa instantánea de interés y, por tanto, Redington (1952) define una cartera como inmunizada si se cumple:

$$\boldsymbol{\frac{\partial (V_A - V_P)}{\partial \delta} = 0}$$

De esta primera regla se deduce que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V_A}{\partial \delta} &= -\sum_{k=1}^{m} t_k \cdot a_k \cdot^{-\delta t_k} = -V_A \cdot D_A \\ \frac{\partial V_P}{\partial \delta} &= -\sum_{k=1}^{m} t_k \cdot b_k \cdot^{-\delta t_k} = -V_P \cdot D_P \end{aligned}\right\} V_A \cdot D_A = V_P \cdot D_P \Rightarrow D_A = D_P \text{ ya que } V_A = V_P$$

La duración de la cartera de activos es igual a la duración de la cartera de pasivos. El término *duración* fue utilizado por Fisher y Weil ya que Redington utilizó la expresión *plazo medio.*

Regla 2:

Si la segunda derivada del desarrollo de Taylor es positiva, teniendo en cuenta que el coeficiente $\frac{\varepsilon^2}{2!}$ es positivo, cualquier cambio en la tasa instantánea de interés producirá un beneficio en la cartera. Por tanto, es deseable que la segunda derivada sea positiva para que la cartera resulte inmunizada, es decir:

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 (V_A - V_P)}{\partial \delta^2} > 0}$$

De esta segunda regla se deduce que:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_A}{\partial \delta^2} &= \sum_{k=1}^{m} t_k^2 \cdot a_k \cdot e^{-\delta t_k} = V_A \cdot C_A^2 \\ \frac{\partial^2 V_P}{\partial \delta^2} &= \sum_{k=1}^{m} t_k^2 \cdot b_k \cdot e^{-\delta t_k} = V_P \cdot C_P^2\end{aligned}\right\} V_A \cdot C_A^2 > V_P \cdot C_P^2 \Rightarrow C_A^2 > C_P^2 \text{ ya que } V_A = V_P$$

La convexidad de la cartera de activos es mayor que la convexidad de la cartera de pasivos. Redington utilizó la expresión *spread con respecto al plazo medio* para referirse a la convexidad.

Con estas condiciones la cartera de activos y pasivos estará inmunizada respecto a cualquier variación de la tasa instantánea de interés con cualquier desplazamiento paralelo de la función $\delta(0,n) = \delta$.

Redington (1952) trabaja sólo con cambios paralelos en la estructura temporal de tipos de interés, mientras que Fisher y Weil (1971) demuestran su teorema de inmunización considerando que todos los tipos de interés varían en la misma proporción.

EJERCICIO 6.7.

Cuestión:

Un inversor dispone de la siguiente cartera de renta fija:

- 1.000 Bonos del Estado, de 3 años de vencimiento, nominal 5.000 euros, tipo de interés del cupón 4%.
- 2.000 Letras del Tesoro, de un año de vencimiento y nominal 2.000 euros.
- 500 Bonos Perpetuos, con cupón anual de 250 euros.

La rentabilidad del mercado es el 4,5%.

Si el inversor dispone de 100.000 euros, calcular la composición de la cartera para que esté inmunizada si su horizonte temporal de inversión es de 10 años teniendo en cuenta que los Bonos Perpetuos serán el doble de las Letras del Tesoro.

Indicar también las estrategias a adoptar por el inversor para conseguir que la cartera está inmunizada.

Solución:

Se calcula el precio y la duración de los Bonos del Estado:

$$P_{Bono} = 200 \cdot a_{\overline{3}|0,045} + \frac{5.000}{(1+0,045)^3} = 4.931,27\text{ €}$$

$$D_{Bono} = \frac{1 \cdot \frac{200}{1+0,045} + 2 \cdot \frac{200}{(1+0,045)^2} + 3 \cdot \frac{5.200}{(1+0,045)^3}}{4.931,27} = 2,88 \text{ \textit{años}}$$

Se calcula el precio y la duración de las Letras del Tesoro:

$$P_{Letra} = \frac{2.000}{1+0,045} = 1.913,87\text{ €}$$

$$D_{Letra} = 1 \text{ \textit{año}}$$

Se calcula el precio y la duración de los Bonos Perpetuos:

$$P_{Perpetuo} = \frac{250}{0,045} = 5.555,55 \text{ \textit{euros}}$$

$$D_{Perpetuo} = \frac{1+0,045}{0,045} = 23,22 \text{ \textit{años}}$$

Se calcula la composición de la cartera para que esté inmunizada, teniendo en cuenta que el horizonte temporal del inversor tiene que ser igual a la duración de la cartera:

$$\left.\begin{aligned}10 &= D_{Cartera} = D_{Bonos} \cdot \omega_{Bonos} + D_{Letras} \cdot \omega_{Letras} + D_{Perpetuos} \cdot \omega_{Perpetuos} \\ 1 &= \omega_{Bonos} + \omega_{Letras} + \omega_{Perpetuos}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}10 &= 2,88 \cdot \omega_{Bonos} + \omega_{Letras} + 23,22 \cdot 2 \cdot \omega_{Letras} \\ 1 &= \omega_{Bonos} + 3 \cdot \omega_{Letras}\end{aligned}\right\}$$

$$\omega_{Letras} = 0,1835$$

$$\omega_{Bonos} = 1 - 3 \cdot \omega_{Letras} = 0,4495$$

$$\omega_{Perpetuos} = 2 \cdot \omega_{Letras} = 0,3670$$

Se calculan las cantidades invertidas en cada tipo de activos:

$$Q_{Bonos} = 0,4495 \cdot 100.000 = 44.950 \text{ \textit{euros}}$$

$$Q_{Letras} = 0,1835 \cdot 100.000 = 18.350 \text{ \textit{euros}}$$

$$Q_{Perpetuos} = 0,3670 \cdot 100.000 = 36.700 \text{ \textit{euros}}$$

Se calcula la composición de la cartera para que esté inmunizada:

$$n_{Bonos} = \frac{44.950}{4.931,27} = 9,11 \simeq 9$$

$$n_{Letras} = \frac{18.350}{1.913,87} = 9,50 \simeq 9$$

$$n_{Perpetuos} = \frac{30.700}{5.555,55} = 6,60 \simeq 6$$

Por tanto, para que la cartera esté inmunizada debe tener la siguiente composición: 9 Bonos del Estado, 9 Letras del Tesoro y 6 Bonos Perpetuos.

Las estrategias que adoptará el inversor para ello serán:

- Venta: 1.000 – 9 = 991 Bonos del Estado.
- Venta: 2.000 – 9 = 1.991 Letras del Tesoro.
- Venta: 500 – 6 = 494 Bonos Perpetuos.

BIBLIOGRAFÍA

ANTHONY, M. y BIGGS, N. (1996), *Mathematics for Economics and Finance*, Cambridge, Cambridge University Press.

ATKINSON, M. E. y DICKSON, D. C. M. (2002), *An introduction to Actuarial Studies*, Massachusetts, Edward Elgar Publishing.

AVILÉS GARCÍA, F. (2001), *Las operaciones financieras en los exámenes*, Madrid, Centro de Estudios Financieros.

BACHELIER, L. (1900), "Théorie de la spéculation (Thesis)", *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure*, vol. III, núm. 17, págs. 21-86. Versión en ingles: Cootner. P. H. (1964), *Random Character of Stock Market Prices*, Massachusetts Institute of Technology.

BIERWAG, G. (1991), *Análisis de la duración. La gestión del riesgo de tipo de interés*, Madrid, Alianza Editorial.

CHAN, W-S. y TSE, Y-K (2021), *Financial Mathematics for Actuaries*, World Scientific Publishing.

COX, J. C., INGERSOLL, J. E. y ROSS, S. A. (1985), "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica*, núm. 53, págs. 385-407.

CULBERTSON, J. M. (1957), "The Term Structure of Interest Rates", *Quarterly Journal of Economics*, núm. 71, págs. 485-517.

DE FELICE, M. y MORICONI, F. (1991), *La teoria dell'immunizzazione finanziaria. Modelli e strategie*, Bologna, Società Editrice il Mulino.

ETHERIDGE, A. (2002), *A Course in Financial Calculus*, Cambridge, Cambridge University Press.

FANJUL SUÁREZ, J. L., ALMOGUERA GÓMEZ, A. y GONZÁLEZ VELASCO, M.ª DEL C. (2001), *Análisis de las Operaciones Financieras*, Madrid, Ediciones Civitas.

FERRUZ AGUDO, L., PORTILLO TARRAGONA, M. P. y SARTO MARZAL, J. L. (2005), *Dirección financiera del riesgo de interés*, Madrid, Ediciones Pirámide (Grupo Anaya, S. A.).

FISHER, L. (1930), *The Theory of Interest*, New York, The MacMillan Company.

FISHER, L. y WEIL, R. L. (1971), "Coping with the risk of interest rate fluctuations: Returns to Bondholders from Naïve and optimal strategies", *Journal of Business*, vol. 44, núm. 4, págs. 408-431.

FISHER, M.; NYCHKA, D. y ZERVOS, D. (1994), "Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines", *Working Paper, núm.* 1, Board of Governors of the Federal Reserve System.

FREIXAS, X. (1992), "Estructura temporal de los tipos de interés: hipótesis teóricas y resultados empíricos", *Investigaciones Económicas*, Segunda época, vol. XVI, núm. 2, págs. 187-203.

GARCÍA BOZA, J. (1989), "La tasa efectiva de coste en las operaciones bancarias activas", *Actualidad Financiera*, núm. 39, págs. 2557-2580.

GARCÍA BOZA, J. y CÁCERES APOLINARIO, R. M. (1998), "Préstamos hipotecarios: Análisis financiero", *Actualidad Financiera*, noviembre, págs. 35-49.

GARRETT, S. J. (2013), *An Introduction to the Mathematics of Finance. A Deterministic Approach*, Elsevier, segunda edición.

GIL PELAEZ, L. (1987), *Matemática de las Operaciones Financieras*, Madrid, Editorial A. C.

GIL PELÁEZ, L. ET AL. (1993), *Matemática de las Operaciones Financieras. Problemas resueltos*, Madrid, AC, págs. 223-354.

GONZÁLEZ CATALÁ, V. T. (1992), *Análisis de las Operaciones Financieras, Bancarias y Bursátiles*, Madrid, Ediciones Ciencias Sociales.

GONZÁLEZ CATALÁ, V. T. (1991), *Enfoque práctico de las operaciones de la Matemática Financiera*, Madrid, Ediciones Ciencias Sociales, págs. 183-280.

GONZÁLEZ VELASCO, M.ª del C. (2000), *Análisis financiero de los préstamos hipotecarios*, Colección Arithmós de Economía, núm. 1, Secretariado de Publicaciones y Medios Audiovisuales, Universidad de León.

GONZÁLEZ VELASCO, M.ª del C. (2008), *Análisis de las operaciones financieras (220 supuestos resueltos)*, Navarra, Editorial Aranzadi, S. A.

HEATH, D, JARROW, R. y MORTON, A., "Bond pricing and the term structure of interest rates. A new methodology", *Econometrica*, núm. 60, págs. 77-105.

HICKS, J. R. (1939), *Value and Capital*, Oxford, Oxford University Press.

HO, T. S. y LEE, S.-B (1986), "Term structure movements and the pricing of interest rate contingent claims", *The Journal of Finance*, núm. 41, págs. 1011-1029.

INGERSOLL, J. Jr. (1987), *Theory of Financial Decision Making*, Maryland (USA), Rowman & Littlefield Publishers.

KELLISON, S. G. (2008), *The Theory of Interest*, tercera edición, McGraw-Hill Education.

LAMOTHE FERNÁNDEZ, P. y PRIETO PÉREZ, F. (1993), *Los activos de renta fija. Valoración y principios de gestión*, Madrid, Bolsa de Madrid.

LONGSTAFF, F. A. y SCHWARTZ, E. S. (1992), "A two-factor interest rate model and contingent claims valuation", *The Journal of Fixed Income*, núm. 3, págs. 16-23.

LUTZ, F. A. (1940), "The structure of interest rates", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 55, núm. 1, págs. 36-63.

MACAULAY, F. (1938), "Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the U. S. since 1856", *National Bureau of Economic Research*, New York.

MARÍN, J. M. y RUBIO, G. (2001), *Economía Financiera*, Barcelona, Antoni Bosch, editor.

MARTÍNEZ BARBEITO, J. y VILLALÓN, J. G. (2003), *Introducción al cálculo estocástico aplicado a la modelización económico-financiero-actuarial*, La Coruña, Netbiblo, S. L.

McCULLOCH, J. H. (1971), "Measuring the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Business*, vol. 44 (enero), págs. 19-31.

McCULLOCH, J. H. (1975), "The Tax-Adjusted Yield Curve", *The Journal of Finance*, vol. 30, núm. 3 (junio), págs. 811-830.

McCUTCHEON, J. J. y SCOTT, W. F. (2002), *An Introduction to the Mathematics of Finance*, Oxford, Butterworth Heinemann.

MENEU, V., JORDÁ, M. P. y BARREIRA, M. T. (1994), *Operaciones financieras en el mercado español*, Barcelona, Editorial Ariel, S. A.

MENEU, V., NAVARRO, E. y BARREIRA, M. T. (1992), *Análisis y gestión del riesgo de interés*, Barcelona, Editorial Ariel, S. A.

MODIGLIANI, F. y SUTCH, R. (1967), "Debt Management and the Term Structure of Interest Rates: An Empirical Analysis of Recent Experience", *Journal of Political Economics*, vol. 74, núm. 4.

MORICONI, F. (1995), *Matematica Finanziaria*, Bologna, Società Editrice il Mulino.

NAVARRO, E. y NAVE, J. M. (2001), *Fundamentos de Matemáticas Financieras*, Barcelona, Antoni Bosch editor.

NELSON, C. R. y SIEGEL, A. F. (1987), "Parsimonious Modeling of Yield Curves for U. S. Treasury Bills", *Journal of Business*, vol. 60, núm. 4, págs. 473-489.

NIETO DE ALBA, U. (1990), *Matemática financiera y cálculo bancario*, Madrid, Centro de Formación del Banco de España.

NUÑEZ, S. (1995), "Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés en España: elección entre métodos alternativos", *Documento de Trabajo*, núm. 9522, Banco de España.

NUÑEZ, S. (1995), "Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés para el caso español", *Boletín Económico del Banco de España*, mayo, págs. 59-67.

PABLO LÓPEZ, A. DE (2000), *Manual práctico de Matemática Comercial y Financiera: lógica financiera, rentas y operaciones a corto plazo*, Madrid, Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, segunda edición.

PABLO LÓPEZ, A. DE (2001), *Manual práctico de Matemática Comercial y Financiera: préstamos y empréstitos, riesgo y gestión de renta fija, leasing, inflación y otras operaciones*, Madrid, Editorial Centro de Estudios Ramón Areces.

REDINGTON, F. M. (1952), "Review of the Principles of Life-Office Valuations", *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. 78, núm. 350, págs. 0286-0340.

ROGERS, L. C. G. (1995), "Which model for term-structure of interest rates should one use?" en DAVIS, M., DUFFIE, D., FLEMING, W. y SHREVE, S., *Mathematical Finance*, Institute for Mathematics and its Applications, Vol. 65, edit. Springer-Verlag, New York, págs. 93-115

ROSS, M. (2003), *An Elementary Introduction to Mathematical Finance. Options and Other Topics*, second edition, Cambridge, Cambridge University Press.

RUCKMAN, C. y FRANCIS, J. (2005). *Financial Mathematics. A Practical Guide for Actuaries and Other Business Professionals*, BPP Professional Education.

SÁEZ MADRID, J. B. y GONZÁLEZ VILA, L. (1997), "Rentabilidad y coste efectivos desde las perspectivas de los sujetos de una operación de préstamo" en ALEGRE, A., BIAYNA, A. y RODRÍGUEZ, A. (1997), *Matemática de las Operaciones Financieras'97*, Universidad de Barcelona, págs. 421-451.

SAMUELSON, P. A. (1945), "The Effect of Interest Rate Increases on the Banking System", *The American Economic Review*, vol. 35, núm. 4, págs. 16-27.

SAMUELSON, P. (1965), "Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly", *Industrial Management Review*, núm. 6, págs. 41-50.

SCHAEFER, S. M. (2001), *The Foundations of Continuous Time Finance*, Cheltenham, Edward Elgar Publishing, Inc.

SCHAEFER, S. M. y SCHWARTZ, E. S. (1984), "A two factor model of the term structure: an approximate analytical solution", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, núm. 19, págs. 413-423.

SVENSSON, L. E. O. (1994), "Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994", *Working Paper*, núm. 4871, National Bureau of Economic Research.

SVENSSON, L. E. O. (1995), "Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson & Siegel Method", *Quarterly Review*, núm. 3, págs. 13-26, Sveriges Riksbank.

VASICEK, O. A. (1977), "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Economics*, núm. 5, págs. 177-188.

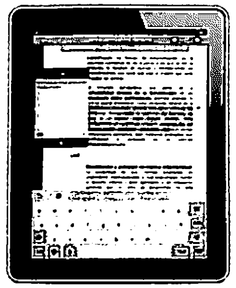
VASICEK, O. A. y FONG, H. G. (1982), "Term Structure Modeling Using Exponential Splines", *The Journal of Finance*, vol. 37, núm. 2 (mayo), págs. 339-348.

WIENER, N. (1923), "Differential space", *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 2, págs. 131-174.

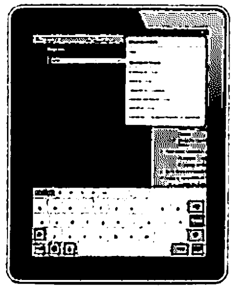
WILDERS, R. J. (2020), *Financial Mathematics for Actuarial Science*, CRC Press, Taylor & Francis Group.

ZAGST, R. (2002), *Interest Rate Management*, Springer Finance, Berlin.

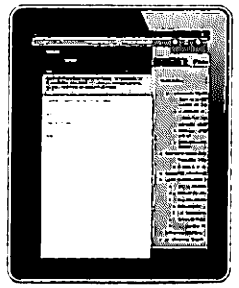
FUNCIONALIDADES DE UN LIBRO ELECTRÓNICO EN **PROVIEW**



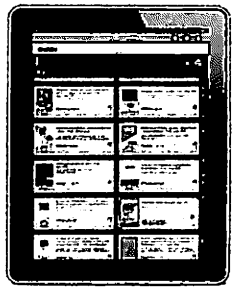
SELECCIONA Y DESTACA TEXTOS
Haces anotaciones y escoges los colores para organizar tus notas y subrayados.



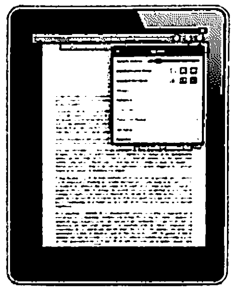
USA EL TESAURO PARA ENCONTRAR INFORMACIÓN
Al comenzar a escribir un término, aparecerán las distintas coincidencias del índice del Tesauro relacionadas con el término buscado.



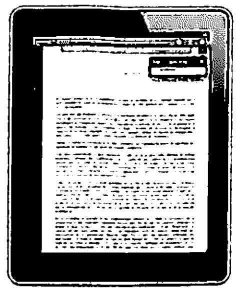
HISTÓRICO DE NAVEGACIÓN
Vuelve a las páginas por las que ya has navegado.



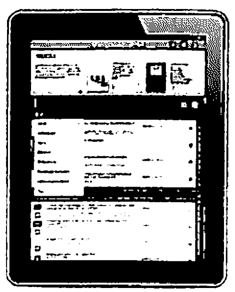
ORDENAR
Ordena tu biblioteca por: Título (orden alfabético), tipo (libros y revistas), editorial, jurisdicción o área del Derecho.



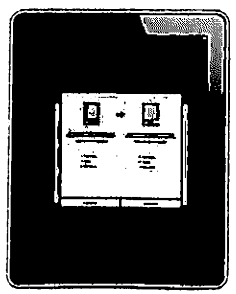
CONFIGURACIÓN Y PREFERENCIAS
Escoge la apariencia de tus libros y revistas en ProView cambiando la fuente del texto, el tamaño de los caracteres, el espaciado entre líneas o la relación de colores.



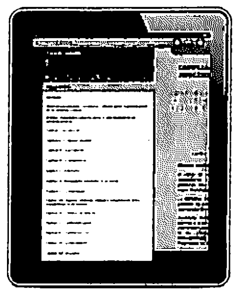
MARCADORES DE PÁGINA
Crea un marcador de página en el libro tocando en el icono de Marcador de página situado en el extremo superior derecho de la página.



BÚSQUEDA EN LA BIBLIOTECA
Busca en todos tus libros y obtén resultados con los libros y revistas donde los términos fueron encontrados y las veces que aparecen en cada obra.



IMPORTACIÓN DE ANOTACIONES A UNA NUEVA EDICIÓN
Transfiere todas sus anotaciones y marcadores de manera automática a través de esta funcionalidad.



SUMARIO NAVEGABLE
Sumario con accesos directos al contenido.

THOMSON REUTERS®

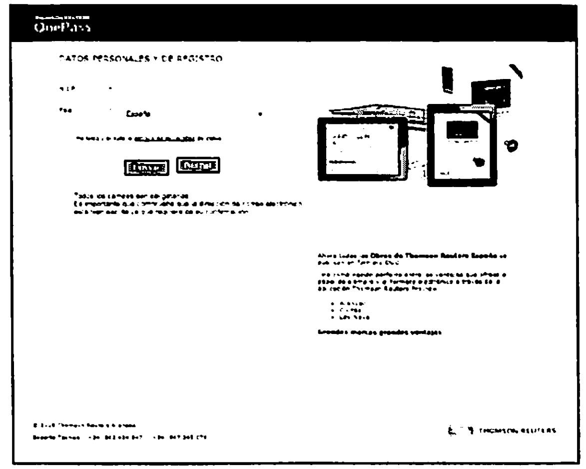
INFORMACIÓN IMPORTANTE: Si has recibido previamente un correo electrónico con el asunto **"Proview – Confirmación de Acceso"**, para acceder a Thomson Reuters Proview™ deberás seguir los pasos que en él se detallan.

Estimado/a cliente/a,

Para acceder a la versión electrónica de este libro, por favor, accede a **http://onepass.aranzadi.es**

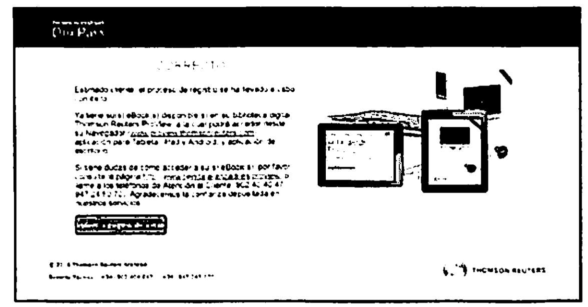
Tras acceder a la página citada, introduce tu dirección de correo electrónico (*) y el código que encontrarás en el interior de la cubierta del libro. A continuación pulsa enviar.

Si te has registrado anteriormente en **"One Pass"** (**), en la siguiente pantalla se te pedirá que introduzcas el NIF asociado al correo electrónico. Finalmente, te aparecerá un mensaje de confirmación y recibirás un correo electrónico confirmando la disponibilidad de la obra en tu biblioteca.



Si es la primera vez que te registras en **"One Pass"** (**), deberás cumplimentar los datos que aparecen en la siguiente imagen para completar el registro y poder acceder a tu libro electrónico.

- Los campos **"Nombre de usuario"** y **"Contraseña"** son los datos que utilizarás para acceder a las obras que tienes disponibles en **Thomson Reuters Proview™** una vez descargada la aplicación, explicado al final de esta hoja.



Cómo acceder a **Thomson Reuters Proview™:**

- **iPhone e iPad:** Accede a AppStore y busca la aplicación **"ProView"** y descárgatela en tu dispositivo.
- **Android:** accede a Google Play y busca la aplicación **"ProView"** y descárgatela en tu dispositivo.
- **Navegador:** accede a **www.proview.thomsonreuters.com**

Servicio de Atención al Cliente
Ante cualquier incidencia en el proceso de registro de la obra no dudes en ponerte en contacto con nuestro Servicio de Atención al Cliente. Para ello accede a nuestro Portal Corporativo en la siguiente dirección **www.thomsonreuters.es** y una vez allí en el apartado del **Centro de Atención al Cliente** selecciona la opción de **Acceso** a Soporte para no Suscriptores (compra de Publicaciones).

(*) Si ya te has registrado en **Proview™** o cualquier otro producto de Thomson Reuters (a través de One Pass), deberás introducir el mismo correo electrónico que utilizaste la primera vez.
(**) **One Pass:** Sistema de clave común para acceder a Thomson Reuters Proview™ o cualquier otro producto de Thomson Reuters.

THOMSON REUTERS®

TRATADOS Y MANUALES DE ECONOMÍA

Análisis de las Operaciones Financieras para Actuarios
Financial Mathematics for Actuaries

Este libro desarrolla los contenidos de la asignatura Análisis de las Operaciones Financieras (Financial Mathematics) de la versión de octubre de 2019 del Core Syllabus for Actuarial Training in Europe de la Asociación Actuarial Europea (Actuarial Association of Europe) y sustituye al libro Análisis de las Operaciones Financieras (Core Syllabus for Actuarial Training in Europe) que incluía los contenidos de esta asignatura de la versión de octubre de 2011 del Core Syllabus de la Asociación Actuarial Europea (Actuarial Association of Europe).

El Core Syllabus for Actuarial Training in Europe es el plan de estudios básico, que contiene la formación mínima requerida para ejercer la profesión actuarial. Contiene tres secciones: la educación actuarial básica, con nueve áreas de aprendizaje (estadística, economía, finanzas, sistemas financieros, activos, datos y sistemas, modelos actuariales, gestión de riesgos actuariales y práctica personal y profesional actuarial), habilidades avanzadas y requisitos previos necesarios. Además, cada área de aprendizaje de la educación básica actuarial contiene un número de subáreas.

El objetivo de este libro es desarrollar los contenidos recogidos para la asignatura Análisis de las Operaciones Financieras (Financial Mathematics) en la última versión de octubre de 2019 del Core Syllabus for Actuarial Training in Europe, que se encuentra incluida en la tercera área de aprendizaje Finanzas (Finance).

La obra es fruto de la experiencia acumulada en la impartición de esta materia desde su implantación en diferentes titulaciones de la Universidad de León (Grado en Finanzas, Grado en Administración y Dirección de Empresas, Grado en Economía y en las extinguidas Licenciatura en Ciencias Actuariales y Financieras y Diplomatura en Ciencias Empresariales) y de la utilización de bibliografía especializada.

Este libro constituye un complemento ideal para todos aquellos Manuales de la asignatura Análisis de las Operaciones Financieras, que se imparte actualmente en los planes de estudio de las diferentes titulaciones citadas anteriormente u otras similares, así como del complemento formativo Análisis de las Operaciones Financieras, necesario para cursar el Máster en Ciencias Actuariales y Financieras, y que se exige a todos aquellos estudiantes que quieren realizar este Máster y no han recibido esta formación previamente.

Sus características facilitan una doble función: puede ser utilizado por los docentes para facilitar el aprendizaje a los alumnos, sobre todo a los futuros actuarios, y como recurso de apoyo para su formación e investigación, pero también puede ser utilizado por actuarios y otros profesionales ya que se trata de un texto de aplicación inmediata que permite resolver dudas sobre las distintas operaciones presentes en la contratación mercantil actual.

Este libro también podría ser recomendado por la Asociación Actuarial Europea como recurso de aprendizaje para preparar los contenidos de Financial Mathematics del Core Syllabus for Actuarial Training in Europe.

El precio de esta obra incluye la publicación en formato DÚO sin coste adicional (papel + libro electrónico).

C. M.: 80008058
ISBN: 978-84-1125-640-7
9 788411 256407