

# ANÁLISIS METODOLÓGICO DE LOS MÉTODOS ESTADÍSTICOS EN EL CÁLCULO DE LAS RESERVAS O PROVISIONES TÉCNICAS DE PRESTACIONES EN LOS SEGUROS NO VIDA.

Dr. Jesús Vegas Asensio

*Catedrático de Matemática Actuarial  
de la Universidad Complutense de Madrid*

**Keywords:** Triángulo de pagos y de número de siniestros, Método “Chain-ladder”; modelo de regresión bifactorial log-lineal; run-off error; eficiencia; probabilidad de insuficiencia.

## ABSTRACT

Teniendo en cuenta que podemos agrupar los siniestros de cualquier ramo en cuatro categorías: pendientes de pago (cuantía cierta); notificados y pendientes de liquidación (cuantía aleatoria); ocurridos y no notificados (IBNR) y cubiertos pero no ocurridos, surge el importante problema de la aplicación de métodos estadísticos en la valoración de los siniestros pendientes en las tres últimas categorías.

En este artículo se trata de identificar el modelo estocástico que sirve de fundamento al método “chain-ladder”, frecuentemente

aplicado en la valoración de las provisiones pendientes de liquidación y en las IBNR.

Una vez fundamentado un método estadístico es necesario analizar su eficiencia. Esto requiere, en general, el uso de técnicas de simulación , a fin de conocer la variable aleatoria que mide el error o desviación de la provisión y estimar el recargo técnico o de seguridad de las reservas o provisiones.

## **1. MARCO LEGAL**

Las Reservas o Provisiones Técnicas de prestaciones en los Ramos No Vida están reguladas por las directivas Comunitarias 91/674/CEE de 19 de Diciembre de 1991, relativa a las cuentas anuales y a las cuentas consolidadas de las empresas de seguros y 92/49/CEE de 18 de Junio de 1992 relativa al Seguro Directo distinto del Seguro de Vida.

Sin embargo, esta última Directiva se remite a efectos de Provisiones Técnicas a la primera de las Directivas anteriormente citadas.

En concreto, el artículo 60 de la Directiva 91/647/CEE de 19.12.91, establece en los seguros no vida que " la provisión se constituirá, en principio, por separado para cada siniestro por el importe previsible de los gastos futuros. Podrán utilizarse métodos

estadísticos siempre que la provisión constituida sea suficiente, habida cuenta de la naturaleza de los riesgos. Sin embargo, los Estados miembros podrán supeditar la utilización de tales métodos a una autorización previa.

Dicha provisión tendrá asimismo en cuenta los siniestros ocurridos pero no declarados en la fecha de cierre del balance; para calcular dicha provisión, se tendrá en cuenta la experiencia previa en lo que se refiere al número y al importe de los siniestros declarados después del cierre del balance.

También se tendrán en cuenta los gastos de liquidación de siniestros, cualquiera que sea su origen."

## **2. MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE VALORACIÓN**

En un enfoque actuarial del tema podemos agrupar los siniestros de un Ramo o modalidad de seguro en cuatro categorías:

- Pendientes de pago (cuantía cierta).
- Notificados pero pendientes de liquidación (cuantía aleatoria).
- Ocurridos y no notificados.
- Cubiertos pero no ocurridos.

Las Reservas o Provisiones asociadas a cada categoría se tipifican, en consecuencia, según el nivel de información del asegurador en la fecha de la valoración. Si la información es de carácter puramente estadístico surgen las Reservas para siniestros cubiertos no ocurridos (usualmente denominadas de Riesgos en Curso) y ocurridos y no notificados (IBNR). Si la información es mixta-estadística e individualizada nos hallamos ante la reserva para siniestros pendientes de liquidación, y si, finalmente, se dispone de información individual respecto al coste de cada siniestro tenemos la reserva para siniestros pendientes de pago.

La estimación caso por caso de la reserva o provisión para siniestros pendientes de liquidación ha sido objeto de críticas por distintos autores, sobre todo como método exclusivo de cálculo de las provisiones. Por ejemplo, Lemaire (1985), referente al seguro del automóvil, dice que " la técnica mas frecuentemente usada (incluso impuesta en muchos casos por las autoridades de control) es la estimación caso por caso; la evaluación caso por caso del coste de cada siniestro pendiente por un experimentado empleado que tratará de tener en cuenta toda la información sobre el siniestro, la situación económica, y la previsible generosidad de los jueces.

Sin embargo, este método es muy criticado. Es una técnica costosa, basada casi exclusivamente en el juicio subjetivo realizado por un empleado. Ya que el optimismo o pesimismo (incluso la somnolencia) pueden contagiarse en el departamento, las provisiones

pueden verse afectadas de serios errores que poseen la doble desventaja de ser acumulativos y ser desconocidos durante varios años".

Nuestra opinión, referida al Seguro del Automóvil en España, es que cuando solo se dispone de la información incluida en el parte de siniestro firmado por el asegurado, esta información suele adolecer de tres clases de defectos que repercuten muy negativamente en la cuantificación de las Provisiones Individualizadas (caso por caso).

- A menudo no se consignan todos los daños susceptibles de posterior reclamación al asegurador.
  
- Puede haber valoraciones erróneas en los daños consignados en el parte de siniestro.
  
- La autovaloración de la Responsabilidad del asegurado no siempre coincide con una apreciación objetiva de la misma, lo que podría originar reservas infradotadas por el sistema individual.

Respecto a la información dimanante del procedimiento judicial, ésta se caracteriza en ocasiones por ser tardía, insuficiente y poco fiable, debido fundamentalmente a los escasos medios con que cuenta la Administración de Justicia en España en la actualidad.

Los inconvenientes del método individual caso por caso dan origen a la consideración de métodos estadísticos o globales en la valoración de las reservas o provisiones para siniestros pendientes de liquidación. Sin embargo, a nuestro juicio el Ramo o modalidad de seguro donde se apliquen estos métodos colectivos, debe cumplir los siguientes requisitos básicos:

Existencia de gran número de siniestros (alta frecuencia de siniestralidad).

Homogeneidad (posibilidad de agrupación en clases homogéneas).

Regularidad en cuanto al acaecimiento de los siniestros (de forma que sea predecible su comportamiento futuro en términos estadísticos).

Que se trate de siniestros de baja cuantía estimada (en general, los grandes siniestros requieren una valoración individualizada que tenga en cuenta todos los datos contenidos en el expediente).

La información estadística sea suficiente, es decir, no se obtenga de muestras demasiado pequeñas (esta información puede ser propia y/o común a un grupo de Entidades).

### **3. CLASIFICACIÓN**

El problema de la valoración de estas provisiones para prestaciones es un problema de estimación de la esperanza matemática o valor medio de la siniestralidad futura, condicionada a la información de los pagos ya efectuados correspondientes a los siniestros terminados y pendientes. Desde el punto de vista actuarial se trata, por tanto, de resolver una cuestión similar a la que surge en la teoría de la tarificación en la que, como es bien sabido, hay que obtener estimadores optimales de la prima pura o siniestralidad media o esperada de cada riesgo asegurado.

En esta línea metodológica, los métodos estadísticos de estimación o valoración de provisiones de siniestros pendientes surgen en la literatura actuarial hace más de 30 años, si bien las publicaciones más completas sobre esta materia son relativamente recientes. Por ejemplo, Taylor (1986); Institute of Actuaries (1989).

Por nuestra parte proponemos la siguiente clasificación al respecto:

#### **1 - Promedios en sentido estricto**

Aunque como hemos dicho anteriormente toda provisión es una estimación de la esperanza matemática de la siniestralidad futura, incluimos en este apartado los métodos del coste medio y del tiempo

medio de liquidación en sus distintas variantes y siempre que, lógicamente, no se hallen comprendidos en cualquiera de las dos siguientes categorías de métodos.

### Métodos del coste medio

En primer lugar se agrupan los siniestros en clases homogéneas, por ejemplo, en el seguro del automóvil, siniestros de "daños propios sin contrario", "daños propios con contrario", "responsabilidad civil daños materiales a otros vehículos", "responsabilidad civil daños materiales a otros objetos no automóviles", etc.

La existencia de homogeneidad ha de conseguirse con un criterio estadístico, es decir:

- a) Que el coste medio del siniestro sea distinto en cada clase.
- b) Que la dispersión de las cuantías de los siniestros dentro de cada clase sea mínima.

Para cada clase homogénea se estima el coste medio por año de ocurrencia del siniestro, es decir.  $\hat{C}_{ij}$

$\forall i = 1, 2, 3, \dots, N$  (año de ocurrencia)

$\forall j = 1, 2, 3, \dots, H$  (clases homogéneas)

La reserva o provisión a constituir resulta,

$$PTP = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^H \hat{C} * n_{ij} * [1 + \gamma_j]$$

siendo,

$n_{ij}$  = Número de siniestros, del año de ocurrencia (i) y categoría (j), en tramitación al cierre del ejercicio.

$\gamma_{ij}$  = Tasa unitaria de incremento en el coste de los siniestros (i,j) en el próximo ejercicio, con respecto al coste medio estimado. (Por ejemplo, debido a la inflación esperada en las reparaciones por talleres en el seguro del automóvil, si se ha tomado como estimador de  $C_{ij}$  el coste medio de los siniestros terminados en el ejercicio).

### Método del tiempo medio

A partir de una clase homogénea de siniestros en primer término se estima el tiempo medio de liquidación y pago de los siniestros (TML) tal que:

$$TML = \frac{\sum_{i=1}^n C_i t_i}{\sum_{i=1}^n C_i}$$

$t_i$  = Tiempo desde que ocurre (o se notifica) el siniestro hasta su pago (medido en días).

$C_i$  = Importe del siniestro pagado en  $t$  .

$n$  = Número de siniestros que componen la muestra.

La provisión a constituir al cierre del ejercicio es:

$$PTP = \frac{C}{365} \hat{TML} (1 + \gamma) \quad [1]$$

donde,

$C$  = Importe total de siniestros pagados en el ejercicio.

$\gamma$  = Tasa unitaria de variación en el importe total pagado en el próximo ejercicio con respecto al ejercicio de cierre.

En consecuencia  $C(1 + \gamma)$  es la estimación de los pagos totales en concepto de siniestralidad del ejercicio siguiente al del cálculo de la provisión.

La expresión [ 1 ] se debe calcular por categorías homogéneas de siniestros a fin de lograr una mejor estimación de los parámetros (TML) y ( $\gamma$ ).

Si el ratio  $C/P = \bar{C}$  (pagos sobre primas) es estable en el tiempo, de [ 1 ], resulta

$$PTP = \frac{C}{365} \hat{TML}(1 + \gamma) = \bar{C} \hat{TML} \left( \frac{P}{365} \right) (1 + \gamma)$$

La ponderación de ( $\hat{TML}$ ) es necesaria ya que los siniestros de mayor cuantía tienen normalmente un tiempo más elevado de liquidación. Y en ( $\gamma$ ) está incluido el componente de inflación económica y social que afecta al coste de los siniestros, así como la incidencia estimada de las variaciones en el volumen y composición de la cartera.

A su vez de [ 1 ] también se obtiene el ratio

$$\frac{C}{PTP} = \frac{365}{\hat{TML}} \frac{1}{(1+\gamma)}$$

Es decir, como es lógico el cociente de pagos divididos por la provisión para prestaciones es función decreciente del tiempo medio de liquidación.

## 2 - Métodos basados en el "run-off" triángulo

Como información básica se considera el triángulo de pagos (generalmente acumulados) de una clase homogénea:

Año de ocurrencia (i) (o de notificación)	Año de pago (j)					
	1	2	3	...	t-1	t ...
1	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	...	$C_{1t-1}$	$C_{1t}$
2	$C_{21}$	$C_{22}$	$C_{23}$	...	$C_{2t-1}$	...
3	$C_{31}$	$C_{32}$	...	...	...	
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
t-1	$C_{t-1,1}$	$C_{t-1,2}$	...	...	...	
t	$C_{t,1}$					

$C_{ij}$  = Total pagado al final del año (j) de los siniestros ocurridos (o notificados) en (i), siendo

$$C_{ij} = \sum_{h=1}^j X_{ih}$$

$X_{ih}$  = Importe pagado en el año (h) correspondiente a los siniestros ocurridos en el año (i).

Cada diagonal del triángulo de pagos es un ejercicio económico. Por ejemplo,  $C_{13}$  ,  $C_{22}$  , y  $C_{31}$  representan los

pagos acumulados en el tercer año de observación y  $C_{1t}$ ,  $C_{2t-1}$ , ...,  $C_{t-1,2}$  y  $C_{t,1}$  son los pagos acumulados en el ejercicio  $t$ . La información correspondiente a los elementos del triángulo situados a la derecha de la diagonal principal (año  $t$ ) son, en estos momentos, desconocidos (pagos futuros de siniestros pendientes).

Si la provisión del ejercicio ( $i$ ) la denominamos  $PTP(i)$ ; y  $C_{i\infty}$  el importe total pagado correspondiente al citado ejercicio (cifra aún desconocida), la provisión para siniestros pendientes al cierre del año  $t$  es:

$$PTP(t) = \sum_{i=1}^t PTP(i) = \sum_{i=1}^t [C_{i\infty} - C_{i,t+i+1}]$$

Se trata de estimar ( $C_{i\infty}$ )  $i = 1, 2, \dots, t$  a fin de determinar la provisión total. Teóricamente el estimador de  $PTP(i)$  es la esperanza condicionada:

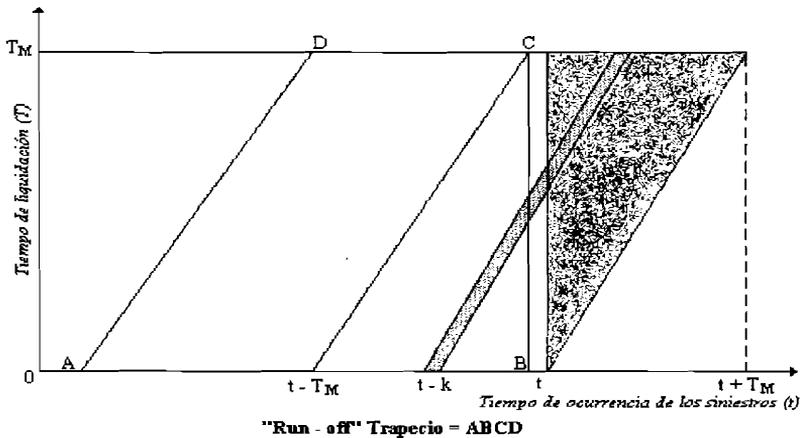
$$\hat{PTP}(i) = E [\hat{C}_{i\infty} - C_{i,t+i+1} \mid C_{i\infty} - C_{i,t+i+1}]$$

Entre las decenas de métodos que tratan de estimar este valor medio o esperado de los pagos futuros condicionado a los pagos ya efectuados, podemos señalar, por ser más utilizados en la práctica, los siguientes.

- Chain - ladder
- Link - ratio
- Separación (Taylor)
- Primas (Pentikainen)
- Bornhutter - Ferguson, etc.

El triángulo de pagos acumulados se debe completar con la información proveniente del triángulo de número de siniestros.

Investigaciones recientes sobre esta materia están tomando como información base para el cálculo de la reserva o provisión el "run-off" trapecio en sustitución del clásico triángulo de pagos (o de número de siniestros) definido anteriormente.



### 3 - Métodos basados en la Teoría de la Credibilidad

Surgen cuando se da entrada a estimadores bayesianos, por lo que en último término, los métodos anteriores se pueden considerar casos particulares en los que sólo se tiene en cuenta la información muestral (objetiva) de la clase homogénea de siniestros estudiada. Según cómo se formalice la distribución a priori de los parámetros a estimar nos podemos encontrar ante enfoques subjetivistas o, alternativamente, objetivistas, de la misma manera que ocurre, por ejemplo, en la teoría de la tarificación.

En esta categoría destacan los métodos de regresión m.c. de Bühlman, Straub, De Vylder, Hachemeister, etc.

Por último, conviene señalar que la mayoría de los métodos estadísticos son aplicables, con las adaptaciones correspondientes, tanto a las Provisiones de Siniestros pendientes de liquidación, como a las IBNR.

### **4 - MODELO ESTOCÁSTICO DEL MÉTODO CHAIN LADDER**

La mayoría de los métodos de valoración de reservas o provisiones técnicas incluidos en la clasificación anterior tienen una base teórica fundamentada en un modelo estocástico. En efecto,

partamos del "run-off" triángulo del número de siniestros no acumulado, como puede ser por ejemplo, y referido al caso de las reservas IBNR, el siguiente:

---

$N_{11}$	$N_{12}$	$N_{13}$	$N_{14}$	$N_{15}$
$N_{21}$	$N_{22}$	$N_{23}$	$N_{24}$	
$N_{31}$	$N_{32}$	$N_{33}$		
$N_{41}$	$N_{42}$			
$N_{51}$				

---

donde

$N_{ij}$  = Número de siniestros ocurridos en el año (i) y notificados en el año (j).

$N_{i.}$  = Número total de siniestros comunicados correspondientes al ejercicio (i). Equivale a la suma de la fila i-sima del triángulo.

$N_{.j}$  = Número total de siniestros notificados en el año (j) de notificación. Se obtiene sumando los términos de la columna (j).

$N_{..}$  = Número total de siniestros comunicados hasta la fecha.

$$N_{..} = \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} N_{ij}$$

A partir del triángulo de siniestros no acumulado se obtiene el triángulo de siniestros acumulado, cuyo término general ( $A_{ij}$ ) indica el número total de siniestros ocurridos en ( $i$ ) y notificados en los ( $j$ ) primeros años.

Por tanto, se verifica

$$A_{iM_i} = N_i$$

donde ( $M_i$ ) expresa el último (máximo) periodo de notificación correspondiente al ejercicio de ocurrencia ( $i$ ).

### Método chain ladder

Este método consiste en estimar el número total de siniestros que se notificarán al asegurador en un determinado año de ocurrencia, multiplicando el número de siniestros acumulado  $N_i$  (o  $A_{iM_i}$ ) por un factor ( $F$ ) que representa el incremento esperado, en porcentaje, del total de siniestros debido a los siniestros aún no notificados.

Para obtener este factor, el método estima el incremento esperado, en porcentaje, originado por los siniestros notificados en el periodo de notificación inmediato siguiente, y este factor intermedio se calcula para todo ejercicio ( $j$ ).

En consecuencia, denominando  $f_j$  el factor intermedio correspondiente al periodo de notificación  $j$ , resulta:

$$F = f_j * f_{j+1} * f_{j+2} * \dots * f_{M_1}$$

Los parámetros multiplicativos ( $f$ ) se estiman mediante el cociente:

Suma de la columna  $j+1$  del triángulo acumulado.

$$\hat{f}_j = \frac{A_{.j+1}}{A_{.j+1} - N_{.j+1}} = \frac{\text{Suma de la columna } j+1 \text{ del triángulo acumulado}}{\text{Diferencia de las sumas de las columnas } j+1 \text{ en los triángulos acumulado y no acumulado.}}$$

Diferencia de las sumas de las columnas  $j+1$  en los triángulos acumulado y no acumulado.

Como en la información disponible no figura los posibles siniestros comunicados a partir del periodo  $M_1$ , el factor  $f_{M_1}$  se debe elegir a priori. En muchas ocasiones se toma como valor la unidad, si bien se debe tomar  $f_{M_1} > 1$  cuando razonablemente se espere que haya siniestros del primer año de observación pendientes de notificación.

En consecuencia, el estimador de  $F$  queda:

$$\hat{F}_j = \hat{f}_j * \hat{f}_{j+1} * \hat{f}_{j+2} * \dots * \hat{f}_{M_1}$$

y el de frecuencia de siniestralidad por póliza en el periodo i-simo

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\hat{F}_{Mi} * A_{iMi}}{\sum P(i)}$$

$\sum P(i)$  Número de pólizas correspondientes al periodo i.

El numerador de la fracción anterior expresa el número total estimado de siniestros que se van a notificar correspondientes todos ellos al ejercicio de ocurrencia i.

Una interpretación del factor intermedio f es la siguiente:

Sea  $q_j$  la probabilidad de que un siniestro se notifique en el periodo j condicionada a que se haya notificado en los j primeros periodos. Entonces, la estimación de  $q_j$  la podemos definir mediante la expresión:

$$\hat{q}_j = \frac{N_{.j}}{A_{.j}} \frac{\text{Suma de la columna (j) en el triángulo no acumulado}}{\text{Suma de la columna (j) en el triángulo acumulado}}$$

Por tanto,

$$\hat{f}_j = \frac{1}{1 - \hat{q}_{j+1}}$$

y

$$\frac{1}{\hat{F}_j} = (1 - \hat{q}_{j+1})(1 - \hat{q}_{j+2})(1 - \hat{q}_{j+3}) \dots (1 - \hat{q}_{jM_j})$$

donde el primer miembro de la igualdad  $\{ 1/\hat{F}_j \}$  es el valor estimado de la probabilidad referida al suceso de comunicación de un siniestro en los  $j$  primeros años.

### Fundamento estocástico

En la hipótesis de que el número de siniestros siga un proceso de Poisson, con media o intensidad de siniestralidad que define cada una de las distribuciones marginales  $\lambda(t)$ , entonces el número esperado de siniestros correspondientes a  $t$  es  $\lambda(t) \cdot \sum P(t)$ .

Si el proceso fuera de Poisson ponderado se mantendría la validez metodológica de lo que vamos a ver si bien con mucha mayor complejidad analítica.

El tiempo de comunicación de un siniestro cualquiera se puede considerar la suma de dos variables de tipo continuo: el tiempo desde

la cobertura del riesgo hasta la ocurrencia del siniestro y el tiempo desde la ocurrencia del siniestro hasta su notificación al asegurador. Si la función de distribución de la citada variable suma es  $F(j)$ , la probabilidad  $P_j$  de que un siniestro determinado se notifique en el período  $j$  se puede poner:

$$P_j = F(j) - F(j-1)$$

o bien

$$P_j = \int_j^{j+\Delta_j} dF(j)$$

De acuerdo con la hipótesis del proceso de Poisson simple, la distribución de la variable aleatoria  $N_{ij}$  del triángulo no acumulado sigue el modelo de Poisson con media  $\lambda(i) \cdot P_j \cdot \sum P(i)$  donde figuran los parámetros  $\lambda(i)$  y  $P_j$  que vamos a estimar por el método de la máxima verosimilitud.

Este número medio o esperado de siniestros, correspondiente a la casilla  $(ij)$  del triángulo no acumulado, se puede expresar de forma exponencial  $e^{a + b \cdot i + c \cdot j}$ , es decir se trata de un modelo de dos factores de tipo logarítmico lineal sin interacción entre ambos factores.

Volviendo al problema de la estimación, la función de verosimilitud de la muestra en este caso resulta,

$$L(N) = \prod_{ij} \frac{e^{-\lambda(i)P_j \sum P(i)} [\lambda(i)P_j \sum P(i)]^{N_{ij}}}{N_{ij}!}$$

de donde

$$\log L(N) = \sum_{ij} N_{ij} [\log \lambda(i) + \log P_j + \log \sum P(i)] - \lambda(i)P_j \sum P(i)$$

Las condiciones necesarias o de primer orden son

$$\frac{\partial \log L(N)}{\partial \lambda(i)} = 0$$

$$\frac{\partial \log L(N)}{\partial P_j} = 0$$

Se demuestra <sup>(13)</sup> que estas condiciones se cumplen para

$$\hat{\lambda}(i) = \frac{N_i}{\sum P(i) \hat{F}(M_i)}$$

y

$$\hat{P}_j = \frac{N_j}{\sum [\sum P(i) \cdot \hat{\lambda}(i)]}$$

---

<sup>13</sup> Dummer, R.M. (1987) "Analysing Casualty insurance claim counts" MacNeill & Umphrey

donde el primer sumatorio del denominador recoge los períodos de ocurrencia cuyo último período de notificación es, al menos, j.

Las soluciones anteriores son equivalentes a

$$\hat{F}(j) = \frac{1}{\hat{F}_j}$$

$$\hat{P}_j = \frac{\hat{q}_j}{\hat{F}_j}$$

y

$$\hat{\lambda}(i) = \frac{\hat{F}_{M_i} * N_i}{\sum P(i)}$$

Lo que nos permite establecer la identidad

$$\hat{\lambda}(i) = \hat{\lambda}_i$$

Es decir, el método chain ladder, en las condiciones expuestas, equivale a una estimación Máxima verosimilitud de un modelo estocástico log-lineal de dos factores.

El proceso precedente ha partido de la igualdad  $F(M_1)=1$ .

Si, por el contrario,  $F(M_1) < 1$ , entonces no habría más que multiplicar  $\hat{P}_j$  y dividir  $\hat{\lambda}(i)$  por  $F(M_1)$  para obtener la solución correcta.

En el período  $M_i$ , la estimación del total de siniestros condicionada al período de ocurrencia  $i$  es el resultado de sumar los siniestros ya notificados más la estimación de los pendientes de comunicar. Esto es, llamando  $\hat{\lambda}_i(M_i)$  al estimador tenemos

$$\hat{\lambda}_i(M_i) \sum P(i) = N_i + \hat{\lambda}_i \cdot \sum P(i) [1 - \hat{F}(M_i)]$$

Teniendo en cuenta que

$$\hat{P}_j = \frac{\hat{q}_j}{\hat{F}_j}$$

sustituyendo y haciendo operaciones queda

$$\hat{\lambda}_i(M_i) \sum P(i) = \hat{F}_{M_i} \cdot N_i$$

lo que prueba la igualdad

$$\hat{\lambda}_i(M_i) = \hat{\lambda}(i) = \hat{\lambda}_i$$

La estimación de  $P_j$  por el método de la máxima verosimilitud se puede interpretar considerando que  $\hat{q}_j$  es un estimador de la probabilidad de notificar un siniestro en (j) sabiendo que se ha comunicado en los primeros (j) períodos,  $1 - \hat{q}_j$  es la estimación de la probabilidad condicionada de ser declarado antes de (j) y, finalmente,  $1/\hat{F}_j$  es la probabilidad no condicionada de notificarse en (j).

En consecuencia, tenemos

$$\hat{P}_j = \frac{\hat{q}_j}{\hat{F}_j} \cong \text{Probabilidad no condicionada de que un siniestro se comunice en el período (j).}$$

( $F \cong$  Factor del método chain ladder)

El modelo de regresión bifactorial en que se fundamenta el método de valoración actuarial que estamos analizando (chain ladder) obtiene como valores ajustados a cada casilla del triángulo, los promedios estimados

$$\bar{N}_{ij} = \hat{\lambda}(i) \cdot P_j \sum P(i)$$

por lo que las desviaciones del modelo son

$$d_{ij} = N_{ij} - \bar{N}_{ij}$$

En definitiva, haciendo uso de un método estadístico de cálculo de las Reservas o provisiones técnicas de prestaciones se obtienen los mismos resultados que si aplicamos el método de estimación por máxima verosimilitud a un determinado modelo de probabilidad. Esta metodología, que permite identificar el modelo estocástico subyacente en el método de valoración actuarial que se está estudiando, es aplicable a la mayoría de los citados métodos y presenta un gran interés teórico-práctico.

## **5.- PROPIEDADES QUE DEBEN CUMPLIR LOS MÉTODOS ESTADÍSTICOS**

Como cuestión previa es conveniente identificar las fuentes de error que pueden dar origen a desviaciones entre las reservas o provisiones constituidas y los pagos futuros de los siniestros pendientes.

1.- Errores o desviaciones del modelo o método aplicado en la valoración. En este apartado destaca el posible incumplimiento de las hipótesis en que se base el método en cuestión.

Por ejemplo, los errores derivados de que no se cumpla la hipótesis que las columnas del "run-off" triángulo son proporcionales

(método chain ladder), o la existencia de cierta heterogeneidad en las clases homogéneas de siniestros que pueda originar subestimaciones en las valoraciones de los costes de los siniestros pendientes (métodos del coste medio).

2.- Errores estadísticos propios de la estimación de parámetros o de distribuciones de probabilidad. A igualdad de condiciones podemos reducir esta segunda fuente de error aumentando, si es posible, el tamaño y representatividad de la muestra que nos sirva de información para el cálculo de la provisión técnica de prestaciones.

3.- Errores estocásticos derivados de las fluctuaciones aleatorias de los pagos futuros con respecto a las predicciones efectuadas, fluctuaciones existentes aún en aquellos casos (teóricos, por supuesto) en que tanto el método aplicado como los parámetros estimados sean totalmente correctos.

En segundo término, vamos a definir los siguientes conceptos:

a. Desviación de la Provisión o "run-off" error.

$$e(t) = PTP(t) - \sum_{u,h} Xp(u,t+h)$$

donde  $e(t) \equiv$  "run-off" error o desviación de la reserva o provisión al final del año  $t$ .

$PTP(t) \cong$  Reserva (o provisión) técnica de prestaciones al final de la anualidad  $t$ .

$\sum X_p(u, t+h) \cong$  Pagos reales futuros de los siniestros pendientes en  $t$ , agregados según el ejercicio de ocurrencia o de notificación ( $u$ ). Esta suma recoge los pagos hasta la liquidación del último siniestro.

En la práctica  $e(t)$  sólo puede determinarse obviamente cuando se hayan finiquitado todos los siniestros pendientes en el año  $t$ , pero para identificar la distribución de la variable aleatoria  $e(t)$  se pueden utilizar técnicas de simulación como figura recogido en el siguiente epígrafe.

A nuestro juicio, el régimen sancionador previsto en la legislación española vigente a causa del posible déficit en el cálculo de las Provisiones Técnicas de Prestaciones no se debe referir al error " $e(t)$ " sino a las desviaciones negativas que eventualmente se hayan podido producir una vez actualizadas a partir de  $t$  las reservas o provisiones en base a la información disponible respecto a la evolución real de los pagos de siniestros pendientes.

b. Siniestralidad agregada  $X(t)$ .

Se define como:  $X(t) = X_p(t) + PTP(t) - PTP(t-1)$

El primer sumando expresa los pagos por siniestros efectuados en el ejercicio  $t$ , cualquiera que sea el ejercicio de ocurrencia (o notificación). Los dos últimos términos recogen la variación de las reservas o provisiones técnicas de prestaciones en el citado año  $t$ .

Finalmente en tercer lugar hay que dar entrada al concepto de eficiencia, teniendo en cuenta que en la literatura actuarial sobre la materia existen varios criterios para medir la eficiencia de los métodos estadísticos en la valoración de las reservas de siniestros pendientes.

De conformidad con PenttiKainen-Rantala (1992), podemos establecer las siguientes tres propiedades:

1. Probabilidad de insuficiencia de la reserva aceptablemente pequeña.

Es decir:

$$P[e(t) + \gamma(t) < 0] \leq \varepsilon \quad (\text{probabilidad de insolvencia})$$

donde  $\gamma(t)$  es un recargo de seguridad, que incluso teóricamente, puede venir recogido de forma implícita en el margen de solvencia de la Entidad.

2. El recargo de seguridad  $\gamma(t)$  sea lo más pequeño posible.

3. Las fluctuaciones de la siniestralidad agregada  $X(t)$  en la cuenta de resultados del asegurador sean suficientemente pequeñas.

De la condición 1.- se deduce que, para un mismo método de cálculo de la provisión, una modalidad con mayor dispersión en los pagos futuros necesitará mayores reservas de siniestros a fin de operar con los mismos principios de seguridad.

En un reciente estudio (1992) Pentikainen y Rantala han obtenido por simulación los valores numéricos del error relativo  $e(t) / PTP(t)$  y el ratio de siniestralidad sobre primas  $X(t) / \sum P$ , ambos en porcentaje, mediante la generación por ordenador de 25 ejercicios, y aplicando los métodos del chain-ladder (C-L), el de las primas ( $P_r$ ) y, en tercer lugar, un sistema mixto combinación de los dos anteriores (Mix.).

Los valores mínimos y máximos resultantes del citado estudio se recogen a continuación:

	C-L	P	Mix.
$e(t)/PTP(t)$ {			
mín.	-16,0%	-12,0%	-9,7%
máx.	14,9%	9,1%	9,7%
$X(t)/\sum P$ {			
mín.	55 %	89 %	80 %
máx.	136 %	106 %	117 %

En este estudio las reservas de siniestros conocidos se incluyen en los términos en X (pagos) dejando para las Provisiones los siniestros IBNR.

De las cifras anteriores se deduce que tanto en el "run-off" error como en la tasa de siniestralidad el método chain-ladder es el más volátil de los tres sistemas considerados, en el sentido que es el que arroja mayores fluctuaciones anuales en sus valores numéricos, es decir, tiene mayor dispersión.

En el primer caso -error de la provisión- se produce la desigualdad.

$$\sigma_{C-L} > \sigma_{Pr} > \sigma_{Mix.}$$

mientras que en el segundo -tasa de siniestralidad- la relación de orden de las desviaciones típicas es

$$\sigma_{C-L} > \sigma_{Mix.} > \sigma_{Pr}$$

En consecuencia, dada una modalidad de seguro determinada, el método chain-ladder necesitará mayores reservas (mayor recargo de seguridad) que los otros métodos para que la probabilidad de insuficiencia esté acotada superiormente por un  $\epsilon$  dado (primera

condición de eficiencia de un buen método) a igualdad de las restantes condiciones.

## **6.- PLANTEAMIENTO ESTOCÁSTICO DEL RUN-OFF ERROR**

Este enfoque surge al identificar la variable aleatoria  $e(t)$  - "Run-off" error- para cada método estadístico de estimación de las provisiones.

Nos remitimos en este apartado a nuestro artículo "El Método TML de valoración de reservas en el seguro directo y en el reaseguro cuota parte" XXV Congreso Internacional de Actuarios. Bruselas 1995. En dicha ponencia una vez estimada a partir de datos empíricos la función de densidad del tiempo de liquidación de los siniestros e introduciendo una serie de hipótesis simplificadoras, obtuvimos mediante simulación en Turbo-Pascal la distribución del "run-off" error en porcentaje de las propias Reservas o Provisiones, lo que nos permitió determinar, por ejemplo, el recargo técnico o de seguridad  $\gamma(t)$  una vez fijada la probabilidad de insolvencia ( $\epsilon$ ).

## **7.- PRODUCTOS DE LAS INVERSIONES**

El apartado 1F) del artículo 60 de la Directiva /91/647/CEE de 19-12-1991 dice que los Estados miembros podrán permitir que se

efectúe una deducción o descuento explícito para tomar en consideración los productos de las inversiones. Esta deducción o descuento sólo podrá efectuarse cuando se cumplan las condiciones siguientes:

I) El plazo medio previsto para la liquidación de los siniestros, será por lo menos de cuatro años después del establecimiento de las cuentas.

II) La deducción o descuento se hará de acuerdo con una base prudencial reconocida, previa información a la autoridad competente en lo relativo a todo cambio de método.

III) La empresa tendrá en cuenta, en el cálculo del coste total de la liquidación de los siniestros, todos los factores que pudieran suponer un aumento de dicho coste.

IV) La empresa dispondrá de los datos que sean suficientes para establecer un modelo fiable para el plazo de pago de siniestros.

V) El tipo de interés utilizado para la actualización no será superior a una estimación prudente del tipo de rendimiento del activo que se invierta con carácter de provisión para siniestros durante el plazo necesario para el pago de dichos siniestros. Además, no será superior al menor de los dos tipos siguientes:

\* el del rendimiento de dichos activos durante los cinco últimos años.

\* el del rendimiento de dichos activos en el año que preceda al establecimiento del balance.

Cuando la empresa efectúe una deducción o descuento deberá indicar en el Anexo el importe global de las provisiones antes de la deducción o descuento, las categorías de siniestros para los que se efectúe una deducción o descuento y para cada categoría de siniestros, los métodos empleados, en especial los tipos utilizados para las estimaciones mencionadas en los incisos III) y V) del párrafo precedente y los criterios para la estimación del plazo que deberá transcurrir antes de la liquidación de los siniestros.

La inclusión de los productos financieros nos permite replantear las expresiones formuladas en el epígrafe 5 de este artículo, las cuales quedan de la forma siguiente:

a. Desviaciones de la provisión o "run-off" error.

$$e(t) = PTP(t) - \sum_{u,h} Xp(u,t+h) * V(t,t+h)$$

El sustraendo expresa el valor actual de los pagos futuros hasta la liquidación total de los siniestros pendientes.

En la práctica el factor financiero de descuento o actualización  $V(t,t+h)$  es, usualmente, igual a

$$\frac{1}{(1+i)^h}$$

( $i \cong$  Tanto anual constante de interés técnico) es decir, según Ley de descuento compuesto.

b. Siniestralidad agregada.

$$X(t) = X_p(t) + PTP(t) - PTP(t-1) - i(t) \frac{PTP(t-1) + PTP'(t)}{2}$$

donde  $PTP'(t)$  es la parte de la reserva o provisión al final del ejercicio  $t$  que estaba ya incluida en  $PTP(t-1)$ .

## **BIBLIOGRAFÍA**

- Claims Reserving Manual (1989). Institute of Actuaries. London.
- Dayking C.D.; Pentikainen, T. and Pesonen, M. (1994) "Practical Risk Theory for actuaries". Chapman & Hall. London.
- Dummer, R.M. (1987) "Analyzing Casualty insurance claims counts". MacNeill & Umphrey.
- Pentikainen, T. y Rantala, J. (1992) "A simulation procedure for comparing different claims reserving methods". ASTIN BULL.
- Vegas Asensio, J. y Nieto de Alba, V. "Matemática Actuarial" (1993). Mapfre.
- Vegas Asensio, J. (1995) "El método TML de valoración de reservas en el seguro directo y en el Reaseguro couta-parte". XXV I.A.C. Bruselas.

## **RESUMEN**

En este artículo se analizan, en primer lugar, los requisitos básicos que deben cumplirse para una correcta aplicación de los métodos estadísticos en el cálculo de las Provisiones o Reservas de siniestros en los seguros no vida. A continuación se establece una clasificación al respecto en tres categorías: Promedios en sentido estricto, Métodos basados directamente en el "run-off" triángulo o en el "run-off" trapecio y, finalmente, los métodos derivados de la Teoría de la Credibilidad.

Un aspecto de gran importancia consiste en identificar el modelo estocástico que sirva de fundamento al método estadístico de valoración de reservas que se trate de analizar. En este sentido, uno de los métodos más utilizados en la práctica actuarial - conocido habitualmente por "chain-ladder" - equivale a una estimación máxima verosimilitud de un modelo estocástico de regresión log-lineal de dos factores sin interacción entre ambos, por lo que son aplicables en este caso las propiedades de que gozan estos estimadores.

El análisis de la eficiencia de los métodos estadísticos de valoración requiere la definición de la variable aleatoria "run-off" error, o desviación de la provisión, lo que permite, a su vez, determinar el recargo técnico o de seguridad de las Provisiones una vez fijada la probabilidad de insuficiencia ( $\epsilon$ ).

Finalmente, se introduce de forma explícita del producto de las inversiones afectas a las Reservas o Provisiones de siniestros, en el marco de la Directiva Comunitaria 91/647/CEE de 19.12.1991.