

Teoría de cópulas. Introducción y aplicaciones a Solvencia II

Luis Latorre Lloréns

Área de Seguro y Previsión Social

Teoría de cópulas

Introducción y aplicaciones a Solvencia II

Luis Latorre Lloréns

Fundación **MAPFRE**

Fundación MAPFRE no se hace responsable del contenido de esta obra, ni el hecho de publicarla implica conformidad o identificación con la opinión del autor o autores.

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista en la ley.

© 2017, Fundación MAPFRE
Paseo de Recoletos, 23
28004 Madrid (España)

www.fundacionmapfre.org

ISBN: 978-84-9844-647-0

Depósito Legal: M-18220-2017

Maquetación y producción editorial: Cyan, Proyectos Editoriales, S.A.

A M^a Carmen, Mónica y Noemi

Luis Latorre Lloréns es doctor en Ciencias Económicas, Actuario de seguros y licenciado en Derecho. En 1970 ingresó en el cuerpo de Inspección de Seguros del Ministerio de Hacienda y en 1980 en el de Inspectores de Finanzas del Estado. Ha desempeñado los cargos de Subdirector General de Inspección y Director del Gabinete de Estudios y Relaciones Internacionales de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones. Ha sido también ponente decano en el Tribunal Económico Administrativo Central, en donde prestó servicios hasta su jubilación, en el año 2007.

Durante varios años fue profesor en la Escuela de Hacienda Pública y en la Facultad de Ciencias del Seguro (Universidad Pontificia de Salamanca) en donde impartió materias de carácter actuarial.

PRESENTACIÓN

Desde 1975 Fundación MAPFRE desarrolla actividades de interés general para la sociedad en distintos ámbitos profesionales y culturales, así como acciones destinadas a la mejora de las condiciones económicas y sociales de las personas y de los sectores menos favorecidos de la sociedad.

Desde el Área de Seguro y Previsión Social trabajamos con el objetivo de promover y difundir el conocimiento y la cultura del seguro y la previsión social.

En cuanto a las actividades orientadas hacia la sociedad en general, creamos contenidos gratuitos y universales en materia de seguros que divulgamos a través de la página web *Seguros y Pensiones para Todos*. Organizamos actividades educativas y de sensibilización mediante cursos de formación para el profesorado, talleres para escolares y visitas gratuitas para grupos al Museo del Seguro. Asimismo publicamos guías divulgativas para dar a conocer aspectos básicos del seguro.

Además de esta labor divulgativa, apoyamos la investigación mediante la elaboración de informes sobre mercados aseguradores y otros temas de interés, la concesión de ayudas para la investigación en seguros y previsión social, la publicación de libros y cuadernos de temática aseguradora y la organización de jornadas y seminarios. Nuestro compromiso con el conocimiento se materializa en un Centro de Documentación especializado que da soporte a todas nuestras actividades y que está abierto al público en general.

Dentro de estas actividades se encuadra la publicación del cuaderno de la Fundación nº 219 *Teoría de cúpulas. Introducción y aplicaciones a Solvencia II* que con múltiples ejemplos y de manera muy didáctica nos muestra de forma práctica el problema de la dependencia de los riesgos para las entidades aseguradoras a través de la teoría de cúpulas.

Todas nuestras actividades se encuentran en internet disponibles y accesibles, para usuarios de todo el mundo de una manera rápida y eficaz a través de nuestra página web: www.fundacionmapfre.org

Seguro y Previsión Social
Fundación MAPFRE

PRÓLOGO

Constituye para mí una gran satisfacción tener la oportunidad de prologar esta nueva obra de Luis Latorre. Lo es por la personalidad del autor y lo es también por la posibilidad de conocer el resultado de un análisis en profundidad en una materia del mayor interés en el análisis de riesgos.

Luis Latorre, inspector de Seguros del Estado e inspector de Hacienda del Estado, ocupó cargos de relevancia en la Dirección General de Seguros en una época difícil de cambios para el sector asegurador. Aunque profesionalmente orientó su actividad hacia otros ámbitos de la función pública, hemos tenido siempre la oportunidad de contar con su análisis riguroso y reflexivo -características ambas tan definidoras de su personalidad- en una gran diversidad de asuntos en el ámbito actuarial y de los seguros en general.

El autor, con la perspectiva de una extensa experiencia, una impecable formación y un gran sentido crítico se adentra con su habitual capacidad pedagógica en la teoría de cópulas y su aplicación práctica a la gestión de riesgos en el ámbito de Solvencia II.

El nuevo régimen de Solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras establece exigencias de capital en función del nivel de riesgo que asuma cada entidad. Se estima la solvencia de la entidad con un determinado grado de probabilidad. Las entidades deben valorar, en el cálculo del capital de solvencia, varios riesgos distintos realizando una agregación.

Para describir el comportamiento de varias variables, la teoría de cópulas aparece como una alternativa eficaz a los coeficientes de correlación empleados en la fórmula estándar, siendo capaz de medir la dependencia en cada tramo. En concreto, permite una mejora en el análisis y el estudio de dependencia de los riesgos. Las entidades que elaboren sus propios modelos internos en la evaluación de su solvencia podrán aplicar las cópulas si los consideran los instrumentos adecuados de acuerdo a su perfil específico de riesgo.

En esta obra el autor expone de forma clara y práctica, con multitud de ejemplos, la gran utilidad de las cópulas en el análisis de los riesgos en el sector asegurador.

Desde la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones le trasladamos nuestro agradecimiento por seguir contribuyendo al desarrollo de las aplicaciones de estadística y la matemática actuarial a la gestión aseguradora. Trabajos tan valiosos como este, ofrecen muchas posibilidades de desarrollo en la aplicación práctica del negocio asegurador.

Hago extensivo el agradecimiento a la Fundación Mapfre que colabora permanentemente para que se reconozca al sector asegurador el servicio que presta a la sociedad y a la economía en su conjunto.

Sergio Álvarez Camiña
Director General de Seguros y Fondos de Pensiones

AGRADECIMIENTOS

Son varias las personas que me han ayudado en la redacción de este trabajo, ya sea dándome útiles orientaciones, ya manifestando su buena disposición a colaborar en mi propósito de una forma u otra. Éste ha sido el caso de los profesores **José Antonio Gil Fana, Antonio Heras Martínez** (ambos de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense de Madrid) y **María Victoria Rivas López** (profesora del Centro Universitario Villanueva, adscrito a dicha universidad) así como también de **Lorenzo Esteban Jódar, Carlos Montalvo Reuelta y Daniel Pérez Ortiz**, los tres inspectores de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones que en aquellas fechas prestaban servicios en EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*). Agradezco profundamente a todos ellos su actitud generosa.

He recibido otras ayudas que, de forma concreta, sirvieron para allanar obstáculos, corregir errores en el texto o, en general, mejorarlo. Aquí debo citar a **Guillermo Ayala Gallego** (profesor del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Valencia) que tuvo la amabilidad de leer el borrador y cuyas observaciones sobre el mismo fueron muy útiles para mí. **Enrique Lloréns Fuster** (profesor del Departamento de Análisis Matemático de la misma universidad) no sólo me asistió en la resolución de ciertas cuestiones matemáticas sino que, además, me puso en contacto con el profesor Ayala. Por su parte, **José Luis Lloréns Fuster** (profesor de la Universidad Politécnica de Valencia) me hizo valiosas sugerencias sobre la presentación del texto, lo que me permitió suplir, al menos en gran parte, mi torpeza al respecto. **José Luis Vilar Zanón** (profesor de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense de Madrid) tuvo asimismo la paciencia de leer el trabajo y sus valiosas observaciones contribuirán a mejorar su claridad.

Es también de justicia citar aquí a **Juan Aldaz Isanta**, compañero de la Dirección General de Seguros y gran amigo. Sin sus innumerables orientaciones y consejos a lo largo de muchos años de amistad y trabajo en equipo, es muy probable que la semilla de mi afición al estudio hubiera caído en terreno baldío.

Manifiesto también mi gratitud a **Fundación MAPFRE** por haber accedido a la publicación de este trabajo y especialmente a **María José Albert Pérez**, a **Mercedes Sanz Septién** y a **Ana Sojo Gil**, quienes, con su proverbial competencia profesional y amabilidad, tanto me han ayudado para que aquél salga a la luz.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	23
1. Cópulas y mercados financieros	23
2. Cópulas y sector asegurador	26
3. Propósito y estructura de este trabajo	37
4. Notación utilizada y referencias en el texto	40
I. LA DEPENDENCIA ENTRE RIESGOS	43
1. Dependencia y correlación	43
2. Distribuciones esféricas	51
3. Distribuciones elípticas	53
4. Otras medidas de dependencia: coeficientes de Spearman y de Kendall	60
II. CÓPULAS	65
1. Algunas ideas intuitivas sobre las cópulas	65
2. Definición de cópula. Propiedades de las cópulas	73
3. Cópulas y dependencia	82
4. Cópulas arquimedianas	93

La cópula de Gumbel	96
La cópula de Clayton	97
La cópula de Frank	98
5. ¿Por qué se llaman arquimedianas?	99
6. Una importante propiedad de las cópulas arquimedianas	101
7. “Funciones copulativas” y distribuciones multivariantes	113
8. Cópulas de supervivencia	117
9. Ejemplos de construcción de cópulas	124
10. Cópulas de valores extremos	136
III. NÚMEROS Y CÓPULAS	141
1. La cópula empírica	141
2. Ajuste de cópulas	144
3. Simulación de cópulas	152
Cópula gaussiana. Factorización de Cholesky	153
Cópula t	156
Procedimiento general	158
Cópula de Marshall-Olkin	162

IV. OTRAS CUESTIONES SOBRE CÓPULAS. EJEMPLOS	163
1. Cópulas mixtas y su aplicación práctica	163
2. Regresión mediana	169
3. Cópulas arquimedianas multivariantes	172
4. Ejemplos de cálculo del VaR	176
A) Dos riesgos	176
B) Tres riesgos	179
5. Determinación del VaR: Coeficientes de correlación y cópulas. Examen de la aproximación lognormal de Solvencia II (“no-vida”)	188
Ejemplo 1: t de Student bivalente	189
Ejemplo 2: t de Student bivalente (modificada)	192
Ejemplo 3: Distribución normal bivalente	194
Ejemplo 4: Cópula de Gumbel con márgenes lognormales	196
V. APLICACIÓN DE LAS CÓPULAS AL CÁLCULO DEL CAPITAL DE SOLVENCIA EXIGIDO A LAS EMPRESAS ASEGURADORAS POR “SOLVENCIA II”. ESTUDIO DE UN EJEMPLO NUMÉRICO	199
1. Descripción de las normas más relevantes	199
Clasificación del negocio asegurador	206
Riesgo de prima y de reserva	207

Los riesgos de caída de cartera y de catástrofe	209
Capital para el sub-módulo de prima y de reserva	209
2. Datos utilizados y limitaciones de nuestro estudio	210
3. Estructura de dependencia de los datos	214
4. Las distribuciones marginales empíricas	214
5. La cópula empírica	216
6. Ajuste de modelos de cópula por procedimientos gráficos	220
Cópula de Gumbel	221
Cópula de Clayton	222
Cópula de Frank	223
Cópula gaussiana	225
Cópula t	227
7. Los gráficos “cuantil-cuantil” ($q-q$)	229
8. La medida de Frees y Valdez	230
9. La función de verosimilitud	231
10. Modelos para las distribuciones marginales	232
11. Medidas de riesgo para una cartera de seguros compuesta por riesgos X o por riesgos Y	237

12. Cálculo del Capital de Solvencia de una cartera compuesta por riesgos X e Y , según el método de las correlaciones establecido en Solvencia II	238
13. Cálculo del Capital de Solvencia de una cartera compuesta por riesgos X e Y , con aplicación de las cópulas	239
a) Método de la simulación de Montecarlo	240
b) Método del ajuste de una función de distribución a n simulaciones de la suma $X+Y$	241
c) Método del cálculo directo	245
14. Las correlaciones en la cola de la distribución	249
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	251
BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL	255
ÍNDICE ALFABÉTICO	259

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	46
Figura 1.2	47
Figura 1.3	48
Figura 1.4	48
Figura 1.5	54
Figura 1.6	55
Figura 1.7	56
Figura 2.1	69
Figura 2.2	71
Figura 2.3	72
Figura 2.4	75
Figura 2.5	80
Figura 2.6	81
Figura 2.7	81
Figura 2.8	83
Figura 2.9	84
Figura 2.10	87
Figura 2.11	92
Figura 2.12	95
Figura 2.13	97
Figura 2.14	98
Figura 2.15	99
Figura 2.16	103
Figura 2.17	104
Figura 2.18	105
Figura 2.19	106
Figura 2.20	108
Figura 2.21	116
Figura 2.22	117
Figura 2.23	118

Figura 2.24	119
Figura 2.25	121
Figura 2.26	124
Figura 2.27	126
Figura 2.28	127
Figura 2.29	128
Figura 2.30	131
Figura 2.31	134
Figura 2.32	138
Figura 3.1	145
Figura 3.2	150
Figura 3.3	156
Figura 3.4	158
Figura 4.1	165
Figura 4.2	165
Figura 4.3	166
Figura 4.4	168
Figura 4.5	171
Figura 4.6	172
Figura 4.7	179
Figura 4.8	192
Figura 4.9	194
Figura 4.10	195
Figura 4.11	198
Figura 5.1	213
Figura 5.2	213
Figura 5.3	216
Figura 5.4	218
Figura 5.5	219
Figura 5.6	220
Figura 5.7	220
Figura 5.8	222
Figura 5.9	223
Figura 5.10	225
Figura 5.11	227

Figura 5.12	228
Figura 5.13	230
Figura 5.14	233
Figura 5.15	236
Figura 5.16	236
Figura 5.17	242
Figura 5.18	243
Figura 5.19	244

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 1.1	61
Cuadro 2.1	92
Cuadro 3.1a	145
Cuadro 3.1b	146
Cuadro 3.2	149
Cuadro 3.3	162
Cuadro 4.1	165
Cuadro 4.2	166
Cuadro 4.3	167
Cuadro 4.4	167
Cuadro 4.5	168
Cuadro 4.6	181
Cuadro 4.7	182
Cuadro 4.8	183
Cuadro 4.9	183
Cuadro 4.10	185
Cuadro 4.11	186
Cuadro 4.12	187
Cuadro 4.13	187
Cuadro 4.14	191
Cuadro 4.15	193
Cuadro 4.16	194
Cuadro 4.17	195
Cuadro 4.18	197
Cuadro 4.19	197
Cuadro 5.1	214
Cuadro 5.2	217
Cuadro 5.3	219
Cuadro 5.4	221
Cuadro 5.5	226

Cuadro 5.6	229
Cuadro 5.7	231
Cuadro 5.8	232
Cuadro 5.9	233
Cuadro 5.10	233
Cuadro 5.11	234
Cuadro 5.12	238
Cuadro 5.13	239
Cuadro 5.14	243
Cuadro 5.15	244
Cuadro 5.16	249
Cuadro 5.17	250

ÍNDICE DE EXPRESIONES

(1.1)	53
(1.2)	55
(1.3)	56
(1.4)	56
(1.5)	58
(1.6)	64
(2.1)	66
(2.2a)	68
(2.2b)	68
(2.3)	70
(2.4)	77
(2.5)	78
(2.6)	79
(2.7)	82
(2.8)	83
(2.9)	86
(2.10)	87
(2.11)	87
(2.12a)	88
(2.12b)	88
(2.13)	89
(2.14)	93
(2.15)	95
(2.16)	95
(2.17)	96
(2.18)	96
(2.19)	97
(2.20)	97
(2.21)	98
(2.22)	98

(2.23)	101
(2.24)	106
(2.25)	109
(2.26)	109
(2.27)	109
(2.28)	111
(2.28a)	112
(2.28b)	112
(2.29)	113
(2.30)	130
(2.31)	130
(2.32)	132
(2.33)	133
(2.34)	137
(3.1)	147
(3.2)	147
(3.3)	148
(4.1)	170
(4.2)	170
(4.3)	173
(4.4a)	174
(4.4a)	174
(4.5a)	177
(4.5b)	177
(4.6)	192
(5.1)	203
(5.2)	204
(5.3)	205
(5.4)	208
(5.4a)	216
(5.4b)	231
(5.5)	245
(5.6)	247
(5.7)	248

INTRODUCCIÓN

1. CÓPULAS Y MERCADOS FINANCIEROS

En septiembre de 1999 David X. Li publicó en Nueva York el artículo “*On Default Correlation: A Copula Function Approach*”. Este trabajo, de carácter académico, aportó a su autor tal notoriedad que, pocos años después, llevó a un columnista del Financial Times a afirmar que Li había sido “el actuario más influyente del mundo”. El 23 de febrero de 2009 se publicaba, en la revista norteamericana Wired, el artículo “*Recipe for Disaster: the formula that killed Wall Street*”, cuyo autor (F. Salmon) decía que, tras la enorme fama y prestigio alcanzados por David Li, las cosas habían cambiado hasta el punto de que podía sentirse agradecido por seguir teniendo un puesto de trabajo en el mundo de las finanzas, cuando sólo un año y medio antes nadie se hubiera extrañado de que ganara el premio Nobel. ¿Quién es este matemático?

David X. Li nació en una zona rural de China¹ en donde vivió hasta iniciar sus estudios de Economía en la prestigiosa Universidad de Nankai. En 1987 y tras aprender francés en cuatro meses viajó a Canadá y obtuvo un MBA en la Universidad de Quebec, un máster en matemática actuarial y un doctorado en estadística en la de Waterloo (Ontario). En 1997 empezó a trabajar en el Canadian Imperial Bank of Commerce y tres años más tarde se trasladó a Nueva York. Allí prestó sus servicios en la unidad de “Riskmetrics” de J.P. Morgan y publicó el famoso artículo ya mencionado. En este trabajo aplicaba la cópula gaussiana a la valoración de los CDOs (“*Collateralized Debt Obligations*”); en primer lugar, basaba el cálculo de las probabilidades de insolvencia de los diversos activos en el valor de mercado de su correspondiente “*spread*” o prima de riesgo, teniendo en cuenta también la proporción de recobro sobre la inversión total, en caso de insolvencia. Obtenida la probabilidad de insolvencia durante un año, deducía el tanto instantáneo correspondiente y con él la función de densidad de la variable expresiva del “tiempo

¹ Datos biográficos obtenidos de Wikipedia.

hasta la insolvencia” del activo en cuestión (supervivencia). Aceptaba la distribución exponencial como modelo para dicha variable. Pero, como dice Embrechts (2009), “*al contrario de lo que ocurre con la normal o la t multivariante, no existe una función de distribución estándar exponencial d -dimensional*”. Para obtener una función de distribución multivariante cuyos márgenes fueran exponenciales, utilizó la cópula Gauss². Este modelo meta-gaussiano —continúa diciendo P. Embrechts— se hizo enormemente popular y causó problemas porque el mercado creyó demasiado en él. Se llegó a decir que la cópula gaussiana es el peor invento para la gestión del riesgo de crédito que ha habido nunca.

En agosto de 2004 Moody’s incorporó la cópula gaussiana a sus métodos para valorar CDOs³. Dice Sam Jones que los bancos ya no necesitaban mantener los riesgos, sino que, al ser capaces de evaluarlos mediante complejas matemáticas, podían “empaquetarlos” y comercializarlos como cualquier otra inversión. En lugar de ir cobrando los intereses y las amortizaciones de un préstamo hipotecario, los bancos los agrupaban y troceaban, clasificando cada tramo según su calificación crediticia y transfiriendo los productos a entidades especiales que, a su vez, emitían bonos para obtener efectivo. La facilidad de liquidar estos activos pudo incentivar la realización de más operaciones cuyos créditos subyacentes tuvieran una insuficiente calidad. Así, en el año 2000 el total de CDOs emitidos era de unos 70.000 millones de dólares, mientras que hacia 2006-2007 la cifra alcanzó los 500.000 millones por año. En 2010 descendía a sólo 10.000 millones.⁴

¿A qué se debe la asombrosa evolución del prestigio profesional de Li y los acontecimientos que en el mundo financiero sobrevinieron en función de aquellos vaivenes? Las críticas dirigidas a este actuario y a su idea de aplicar las cópulas a las finanzas no son del todo justas, porque los acontecimientos ocurridos obedecieron a circunstancias que no le son del todo imputables. Es verdad que la fórmula ideada por Li cuantifica la interrelación de riesgos con base en los coeficientes de correlación lineal, pero esa práctica ya venía siguiéndose, como el autor reconoce en el artículo que le dio fama. Y también ha de aceptarse que el método propuesto

² <http://cyrusfarivar.com/docs/li.defaultcorrelation.pdf>

³ Sam Jones, artículo publicado en Financial Times.

⁴ E. Forslund y D. Johansson: “*Gaussian Copulas. What happens when models fail?*”. Noviembre 2012.

por Li fue utilizado en muchos casos por quienes no lo entendían del todo y que probablemente no sólo se usó, sino que se abusó de él⁵ al considerarlo como una fórmula para medir los riesgos y su dependencia, sin preocuparse de si el modelo y los datos introducidos eran o no adecuados a la realidad circundante.

Al desprestigio del método de Li pudo contribuir, en efecto, la inadecuación de los parámetros aplicados en la fórmula, parámetros que estaban basados en una experiencia positiva y alcista en los mercados. El semanario *The Economist* publicó un artículo el 29 de abril de 2009 titulado “*In defense of the gaussian copula*”, en que se argumentaba que las limitaciones de todo modelo deben tenerse muy presentes y que es necesario controlar la adecuación de los parámetros, cuya validez temporal puede ser breve.

Probablemente la mayor crítica que cabe hacer se refiere a la utilización del modelo gaussiano —y, con él, de la correlación lineal— para medir la dependencia entre riesgos, sin que ello fuera correcto en este caso por las características y comportamiento de tales riesgos. En agosto de 1999 P. Embrechts, A. McNeil y D. Straumann habían ya publicado un importante artículo significativamente titulado “*Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls*”; gran parte de este trabajo se dedicaba a estudiar en qué condiciones la correlación es una medida de la dependencia y a advertir del peligro de extender el uso de aquel concepto más allá del ámbito de las distribuciones elípticas. Más recientemente, en enero de 2010, C. Donnelly y P. Embrechts han publicado el artículo “*The Devil is in the tails: actuarial mathematics and the subprime mortgage crisis*”. Se trata de un trabajo en que analizan la cuestión, describen el modelo de Li y concluyen que la cópula gaussiana, al carecer de la “dependencia en colas”⁶ no es capaz de reflejar el fenómeno de la mayor dependencia entre insolvencias en situaciones de crisis, como lo son otros modelos de cópula.

El concepto estadístico de cópula aparece en 1959, cuando A. Sklar formuló su célebre teorema, que afirma que toda distribución multivariante puede expresarse en términos de cópulas y que, recíprocamente, a partir de una cópula puede

⁵ “*Confessions of a Risk Manager*”, *The Economist*, 7 de agosto de 2008.

⁶ Nos ocuparemos de este concepto en el Capítulo II, 3.

construirse una función de distribución multivariante. Es un concepto muy útil en muchas situaciones en que interese modelizar la dependencia entre variables aleatorias y construir una gran variedad de funciones de distribución multivariantes. No tiene nada de extraño que encuentre muchas aplicaciones en el ámbito de las finanzas, la gerencia de riesgos y el seguro.

Pero, ¿qué son las cópulas? En el Capítulo II se responde a esta pregunta y por el momento nos conformamos con anticipar que son expresiones matemáticas de la dependencia entre dos o más variables aleatorias; las cópulas contienen toda la información relativa a la dependencia entre esas variables, pero nada dicen acerca de su comportamiento marginal. Según veremos en dicho Capítulo, cualquier función de distribución multivariante regula dos cuestiones: a) Cómo se distribuyen las variables aleatorias aisladamente consideradas, es decir, cuál es su distribución marginal, y b) Qué relación de dependencia existe entre las mismas. Si, simbólicamente, imagináramos la información contenida en una distribución multivariante como la suma de los anteriores apartados a) más b), entonces podríamos “despejar” (también simbólicamente) el b), que sería la cópula. Y conocida ésta, sería posible “añadirle” las mismas distribuciones marginales para llegar a la función multivariante original, o bien a otra distinta si las marginales añadidas también fueran distintas. Partiendo, pues, de una misma cópula obtenemos tantas funciones de distribución como conjuntos distintos de distribuciones marginales le vayamos aplicando. Estas funciones de distribución, elaboradas conectando la cópula con las marginales, se llaman “meta-distribuciones”.

2. CÓPULAS Y SECTOR ASEGURADOR

La teoría de cópulas encuentra múltiples aplicaciones en el campo actuarial. La dependencia entre riesgos es allí objeto de una atención creciente. Antes, la matemática del seguro tomaba como indiscutible la hipótesis de independencia entre los diversos riesgos relevantes. Así, en el seguro de vida, se aceptaba la independencia entre las probabilidades de supervivencia de los integrantes de un grupo de personas, aún cuando sus componentes vivieran en unas mismas condiciones determinantes de su estado de salud o estuvieran vinculadas por lazos familiares o afectivos que pudieran suponer una dependencia entre la duración de la vida de

unos y otros. Las cópulas ofrecen la posibilidad de tener en cuenta las posibles dependencias entre tales riesgos.

En los seguros distintos al de vida, es clara la posible aplicación de las cópulas; pensemos, por ejemplo, en contratos que cubran riesgos dependientes entre sí, o en la posibilidad de acontecimientos que afecten simultáneamente a varias pólizas.

A la hora de calcular las condiciones económicas que garanticen la solvencia del asegurador, es también evidente la utilidad de estos modelos de dependencia para tener en cuenta la relación que pueda existir entre unos riesgos cubiertos en las pólizas emitidas y otros, o entre alguno de éstos y los riesgos de similar naturaleza aceptados en reaseguro, por ejemplo.

Pero desde época relativamente reciente se está produciendo un fenómeno que puede traer un creciente uso de las cópulas en el campo actuarial. Se trata de que los sistemas de solvencia para entidades aseguradoras que van implantándose en las legislaciones, incorporan la característica de pretender estar basados en el verdadero y total nivel de riesgo que afecta a cada entidad. Con ello se quiere que cada asegurador evalúe el riesgo a que está sometido por medio de un análisis de los varios orígenes posibles de hechos desfavorables para su economía y, en función del resultado de este cálculo, determine qué recursos financieros requerirá para ser solvente con un cierto grado de probabilidad. Otra consecuencia deseada de este nuevo enfoque es alcanzar un mayor equilibrio en las condiciones de concurrencia de las empresas de seguros, al discriminar las exigencias para la solvencia de cada una según la verdadera importancia de los riesgos a que esté sometida: A más riesgo (lo que, por ejemplo, puede suponer más rentabilidad de sus inversiones y primas más baratas), más capital de solvencia. El problema planteado por esta concepción de los sistemas de solvencia está en cómo sumar, o agregar, los capitales exigidos por cada uno de los riesgos considerados. Si, en un hipotético sistema, los riesgos considerados fueran tres (riesgo de suscripción, de crédito y de inversiones, por ejemplo) y una vez evaluados los capitales necesarios para afrontar cada uno de ellos con un grado de probabilidad suficientemente alto —considerado cada riesgo aislada o independientemente de los demás— fueran, por ejemplo, de 200, 50 y 100 unidades monetarias, ¿cuál será el capital para afrontar el conjunto de los tres? La respuesta está en función del grado de

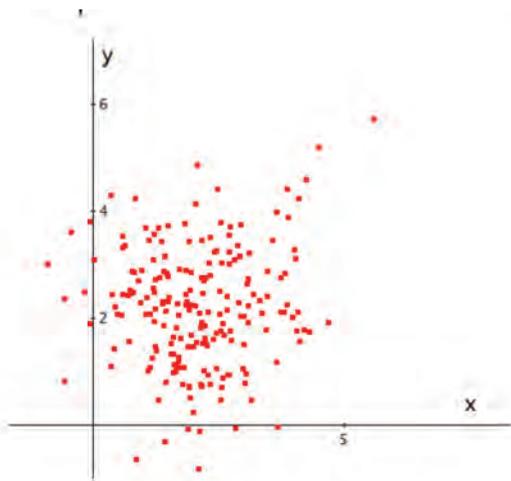
dependencia entre estos riesgos. Si fueran perfectamente dependientes, de manera que variasen todos al unísono, entonces se ve intuitivamente que el capital total tendría que ser la suma $200 + 50 + 100$ unidades monetarias. Pero, fuera de este supuesto tan poco realista, la respuesta a aquella pregunta ya no es tan inmediata y dependería de la forma en que esos tres riesgos se comportan conjuntamente. Y aquí es donde las cópulas podrían constituir un interesante instrumento de análisis.

Desde principios de los años 1990, la *National Association of Insurance Commissioners* (NAIC) de los Estados Unidos puso en marcha un sistema (expresivamente llamado *Risk Based Capital* ó RBC, es decir, capital basado en el nivel de riesgo de cada asegurador) para regular los requisitos que han de reunir los aseguradores con el fin de alcanzar un cierto grado de solidez financiera. El sistema participa de las características a que nos venimos refiriendo, al incorporar en el cálculo del capital de solvencia varios riesgos distintos y hacerlos intervenir de diferente manera, según la dependencia o independencia de cada uno respecto de los restantes. Así, una vez determinados los capitales necesarios para cada riesgo, se agregan todos para llegar al capital total, pero esa agregación es una suma simple cuando se considera que hay total dependencia, mientras que otras veces se acepta la independencia entre unos y otros riesgos y aquélla se lleva a cabo mediante la raíz cuadrada de una suma de cuadrados.

A principios de los años 2000 Suiza implantó el sistema conocido como SST (*Swiss Solvency Test*), también encaminado a exigir de cada asegurador el nivel de capitales de solvencia que exija la medida de los riesgos a que esté sometido. Dicho sistema de solvencia, así como el de Basilea establecido para la Banca, influyó fuertemente en la normativa de la Comunidad Europea conocida como Solvencia II, para diferenciarlo del sistema que lo ha venido precediendo durante muchos años. Este primitivo sistema no pretendía fundarse en la totalidad de los riesgos que afectan al asegurador, sino sólo en los cubiertos por las pólizas; no se planteaba problema alguno de dependencia entre varios riesgos (separaba los riesgos de los seguros de vida y los distintos al de vida). El nuevo sistema de Solvencia II, por el contrario, trata de cubrir varios tipos de riesgos de los que afectan a las empresas de seguros (operacional, suscripción de seguros distintos del seguro de vida, suscripción del seguro de vida, suscripción del seguro de enfermedad,

riesgo de mercado y riesgo de incumplimiento de la contraparte o riesgo de crédito). A su vez, y a través de la estructura modular a la que nos referiremos en el Capítulo V, cada uno de éstos se divide en otros, todo lo cual plantea el problema de cómo agregarlos hasta llegar al capital total o “Capital de Solvencia Obligatorio”, conocido también por las siglas CSO o SCR, estas últimas del inglés *Solvency Capital Requirement*. ¿Cómo se hace esta agregación? En el “modelo estándar” que establece Solvencia II, se logra mediante los coeficientes de correlación de cada par de riesgos del mismo nivel y módulo (o sub-módulo); en la mayoría de los casos se supone que las variables aleatorias representativas de cada riesgo se distribuyen normalmente con media nula y la varianza que el propio sistema aporta; otras veces se recurre igualmente a dichas correlaciones, las cuales permiten determinar la desviación típica de la variable suma de varios riesgos, y se adopta el modelo logarítmico-normal, lo que conduce al capital correspondiente a dicha suma. Es decir, que Solvencia II no es excepción a la regla de que los sistemas de solvencia basados en varios riesgos exigen analizar la dependencia entre ellos. El sistema resuelve la cuestión con los coeficientes de correlación lineal como instrumento para medir la dependencia. Como veremos en el Capítulo I, tal proceder es correcto sólo en el ámbito de las distribuciones elípticas, lo que apunta a la teoría de cópulas como eficaz alternativa para modelizarlos. En efecto, el coeficiente de correlación mide el grado de dependencia lineal de una distribución a lo largo de todo su rango; pero esta dependencia puede ser mucho mayor en una zona de la distribución que en el resto. En la práctica, encontramos en ocasiones variables o riesgos cuya dependencia es débil o nula en condiciones normales, mientras que, bajo situaciones extremas (por ejemplo, una crisis económica o sanitaria, una catástrofe natural, etcétera) la correlación es considerable. Un ejemplo es la gráfica siguiente, en la que cabe distinguir, a simple vista, un núcleo integrado por la mayoría de los valores, que no aparentan correlación alguna; pero, en la zona positiva extrema de ambas variables (para valores de cada una superiores a 4, aproximadamente), el comportamiento conjunto es claramente distinto, al mostrar una correlación positiva considerable. Si calculamos el coeficiente de correlación separadamente para ambas zonas, tendríamos que, en la primera, éste es prácticamente nulo, mientras que en la segunda es, aproximadamente, 0,9. La correlación del conjunto de todos estos puntos sería 0,08. Observemos que la correlación alta se da precisamente en la “cola” de la distribución, es decir, en la zona en que tanto X como Y toman valores elevados, que en muchas aplicaciones

es la más relevante. Este ejemplo manifiesta dos cosas: primera, el peligro de utilizar el coeficiente de correlación en ciertos casos y la segunda, que una posible solución para evitarlo es “ajustar” dicho coeficiente, es decir, elevarlo para que refleje la dependencia lineal en la zona extrema, más que en el conjunto. Conviene que nos detengamos brevemente en esta cuestión.



En un informe de la Asociación Actuarial Internacional fechado en 2004, se defiende el uso de las cópulas en sistemas de solvencia basados en una pluralidad de riesgos.⁷ Mientras el coeficiente de correlación —sea lineal, por rangos, etcétera— al consistir en un solo número, es inadecuado para describir el comportamiento conjunto de dos variables a lo largo de sus rangos de variación —salvo que aquél sea uniforme— la cópula es una función y por tanto resulta versátil y capaz de medir la dependencia en cada tramo. Según se concluye en un informe del *Group Consultatif Actuariel Européen*⁸ las cópulas tienen la ventaja de reconocer dependencias cambiantes en la cola de la distribución y de ahí que la Asociación

⁷ “A Global Framework for Insurer Solvency Assessment”. *Research Report of the Insurer Solvency Assessment Working Party*.

⁸ «*Diversification. Technical Paper*», 31 de octubre de 2005.

Actuarial Internacional proponga su uso como el método teóricamente correcto para calcular los efectos de la diversificación; (dichos efectos —añadimos aquí— están en función de la dependencia existente entre los riesgos en juego: a mayor dependencia, menor será la atenuación que sobre el riesgo total genere la agrupación de todos y recíprocamente; de ahí que medir los efectos de la diversificación exija conocer la dependencia entre las variables o riesgos intervinientes). Ahora bien, en dicho informe se reconocen las dificultades de cálculo que las cópulas pueden plantear y se ofrece como alternativa a las mismas la utilización de una matriz de correlaciones ajustada, es decir, modificada para que refleje las correlaciones entre las variables en la cola de la distribución. El problema que plantea esta alternativa es cómo cuantificar estos coeficientes de correlación lineal “en la cola”. Los datos de que habitualmente se dispone en esa zona de las distribuciones suelen ser escasos, insuficientes para estimar los coeficientes y la única solución viable consiste en determinarlos acudiendo al buen juicio y experiencia. Es frecuente graduar las correlaciones en la cola en valores que sean múltiplos de un cierto valor, por ejemplo 0,25, para llegar así a la gama de valores 0, 0,25, 0,50, 0,75 y 1, según se califique la correlación de nula, escasa, apreciable-moderada, alta y total. Ésta es la solución adoptada en la normativa de Solvencia II referente al llamado “modelo estándar”; no se recurre en él a las cópulas, sino que se opta —quizá por el principio de proporcionalidad⁹— por la solución de aplicar coeficientes de correlación en la cola de las distribuciones.

El mismo sistema Solvencia II admite la posibilidad de que las empresas elaboren sus propios modelos internos para determinar las condiciones que garanticen su solvencia y, por tanto, puedan aplicar las cópulas si consideran que estos instrumentos resultan más adecuados que el empleo de dichas correlaciones. Y es que, en efecto, estos modelos estadísticos pueden desempeñar un papel importante en el campo actuarial; examinaremos unos pocos ejemplos que ponen de manifiesto la creciente atención que vienen mereciendo por parte de los estudiosos, conscientes de la utilidad de las cópulas en el sector asegurador.

⁹ Según el preámbulo de la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 25 de Noviembre de 2009 (Directiva de Solvencia II), el principio de proporcionalidad consiste en no imponer requisitos que puedan resultar demasiado gravosos para las pequeñas o medianas empresas de seguros.

Quizá uno de los trabajos más frecuentemente citados en materia de teoría de cópulas sea el artículo de Frees y Valdez “*Understanding Relationships Using Copulas*”. Los autores muestran cómo el planteamiento de diversas situaciones propias del seguro de vida conduce a diversos tipos de cópulas. Desarrollan un ejemplo numérico para estudiar la dependencia que en el seguro de responsabilidad civil se da entre el importe de la indemnización y el de los gastos generados por la liquidación de las prestaciones (*Allocated loss adjustment expense* o ALAE). Se trata de un ejercicio basado en datos reales, obtenidos del *Insurance Services Office, Inc.* Una vez elegida la cópula y distribuciones marginales que mejor se ajustan a los datos utilizados, se aportan dos ejemplos de cómo puede aprovecharse el conocimiento de la función de distribución bivalente que resulta de aquéllas. Uno, es la tarificación de un reaseguro de exceso de pérdida con determinadas características. Y el otro consiste en elaborar varias funciones de regresión cuantílica, que permiten obtener información acerca del coste del ALAE para cada valor de la indemnización.

Otro caso es Staudt, (2010), en cuyo artículo “*Tail Risk, Systemic Risk and Copulas*” desarrolla un ejemplo de cómo determinar el “*tail conditional expectation*” o “*expected shortfall*”¹⁰ al 95 % de una cartera compuesta por 4 líneas o tipos de seguros: responsabilidad civil general, responsabilidad civil de vehículos comerciales, multirriesgos sobre los bienes comerciales y responsabilidad civil comercial. Aplica dos tipos de cópulas (gaussiana y t) a una serie de datos consistentes en ratios de siniestralidad observados entre 1986 y 2008, recopilados por el Departamento de Seguros del Estado de Texas.

Un tercer ejemplo que traemos aquí es el de G. Venter. En uno de sus artículos (“*Tails of Copulas*”) utiliza 727 pares de cifras, representativas de daños ocasionados por huracanes en dos estados colindantes (Maryland y Delaware) con el fin de obtener un modelo de dependencia entre las siniestralidades que se ocasionan en uno y otro territorio. Otro artículo de este autor (“*Quantifying Correlated Reinsurance*”

¹⁰ Según se examinará en el Capítulo V, ambas denominaciones inglesas significan el “valor medio condicionado a que la variable supere el cuantil prefijado” o bien “déficit medio”. Se refiere al valor medio de la variable X , condicionado a que $X > VaR$. Por ejemplo, el VaR al 99 % es el valor que tiene la propiedad de que X sólo lo supera con una probabilidad del 1 %, pero nada informa acerca de la cuantía aquellos valores de X superiores a dicho VaR . Este inconveniente trata de salvarlo dicho “déficit medio”.

Exposures Using Copulas”) se dedica a estudiar una aplicación de la cópula t a la cobertura del riesgo de catástrofes naturales, que pueden originar dependencia entre los resultados de tres líneas de seguro: daños a las viviendas, daños a instalaciones comerciales y automóviles.

También en España el tema de las cópulas ha merecido la atención de los estudiosos del seguro y para mostrarlo citaremos sólo algunos ejemplos.

P. Durán y L. A. Otero son autores de la monografía, publicada en 2010, “El análisis financiero dinámico como herramienta para el desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II”¹¹. El análisis financiero dinámico se define como el proceso consistente en la simulación de la actividad aseguradora de forma integral, a través de la modelización estocástica de las variables determinantes de la evolución de activos y pasivos. Estas variables, numerosas, presentan dependencias entre sí, lo que lleva a los autores a examinar diversos métodos para generar dependencia entre ellas. Se refieren, en primer lugar, al empleo de la estructura de cascada¹² en que las variables, que están interrelacionadas, se ordenan o estructuran para establecer líneas de influencia de unas sobre otras a través de métodos de regresión. Otro procedimiento consiste en aplicar la matriz de correlaciones a los factores de riesgo cuyos valores se simulen, con el fin de lograr escenarios realistas, en que los distintos aspectos de la empresa aseguradora presenten dependencias similares a las que se dan en la práctica. En tercer lugar se refieren los autores al método de Iman y Conover para generar números aleatorios dependientes entre sí. Este método parte de muestras de números aleatorios generadas para simular, por ejemplo, dos factores de riesgo, X e Y ; en primer lugar, se simulan cifras correspondientes a ambos factores según su respectiva distribución marginal, sin dependencia alguna entre ellos. Para lograr que presenten el grado de correlación deseado, se simulan valores de una distribución bivalente con el coeficiente de correlación elegido y a continuación se ordenan los valores simulados de X , (de menor a mayor) y de Y , y se asocian de la misma forma en que aparezcan los pares simulados según la distribución bivalente con el coeficiente de correlación seleccionado. Con ello, obtenemos pares (X,Y) cuya

¹¹ Fundación MAPFRE, Instituto de Ciencias del Seguro. Madrid, 2010.

¹² Un ejemplo de este tipo de modelos lo proporciona Wilkie, (1986).

correlación por rangos es la misma que la de dicha distribución bivalente. En cuarto lugar se aborda el estudio de las cópulas, reconociéndose así la utilidad de estos modelos en el análisis financiero dinámico.

La Universidad de Barcelona ha publicado, en fechas 2011/13, un trabajo en inglés titulado “*A correlation sensitivity analysis of non-life underwriting risk in solvency capital requirement estimation*”, cuyos autores (L. Bermúdez, A. Ferri y M. Guillén) toman como punto de partida datos reales, obtenidos en la página web de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones (Ministerio de Economía) y correspondientes a todo el mercado español de seguros no-vida, durante el período 2000-2009. A partir de estos datos, se trata de determinar el capital de solvencia obligatorio (conocido también como “*capital solvency requirement*” o SCR, según vimos) tanto en el modelo *estándar* establecido en las normas de Solvencia II como en el *interno* que se propone y aquí es donde los autores utilizan varios tipos de cópulas. Este modelo interno consiste, en resumen, en considerar como variable aleatoria el resultado económico del siguiente ejercicio en cada línea de seguro no-vida; dicha variable es la suma algebraica de cuatro componentes: primas, prestaciones, gastos y otros gastos; a su vez, el importe de cada uno de estos cuatro componentes en el ejercicio próximo se estima por medio de un modelo de regresión lineal simple. El paso de los resultados futuros de cada línea de seguro al resultado global se hace bajo varias hipótesis en cuanto a la estructura de dependencia de las diversas líneas de seguro y su comportamiento marginal. Se consideran como alternativas para tal estructura la cópula de Gauss y la t con diversos grados de libertad. Para las distribuciones marginales se admite igualmente la alternativa Gauss - t de Student, lo que genera 4 posibilidades. El cálculo del SCR se refiere al conjunto de las empresas aseguradoras no-vida y se lleva a cabo por la vía del modelo estándar y por la del modelo interno. Se comparan los resultados obtenidos con base en la matriz de correlaciones propuesta por QIS¹³ con los que genera la hipótesis de independencia y de dependencia total. En la t de Student se varían los grados de libertad, para así comparar también los resultados.

En la tesis doctoral de A. Ferri (Universidad de Barcelona, Septiembre de 2012) se determina el SCR (riesgo de suscripción no-vida) según el modelo estándar de

¹³ QIS = «*Quantitative Impact Study*».

Solvencia II con una base de datos similar a la del trabajo anterior, aunque extendida a 2010, bajo diversas hipótesis en cuanto a las matrices de correlación, mostrándose la alta sensibilidad del resultado ante cambios en éstas. Definido un modelo interno basado en la predicción del resultado de cada línea de seguro, se aplican las cópulas de Gauss y de Student con diversos parámetros. Este trabajo contiene una fórmula de credibilidad para los coeficientes de correlación basada en la Estadística bayesiana.

Junto al mercado propiamente asegurador, encontramos en la realidad económica nuevas fórmulas que permiten aprovechar los enormes volúmenes de los mercados de capitales para la cobertura de los riesgos cedidos por los asegurados y reasegurados. Estas empresas cuentan así con instrumentos alternativos al reaseguro clásico para la cobertura de sus riesgos; a cambio de una parte de sus ingresos por primas, reciben activos que les permitirán obtener una compensación en caso de que ocurran eventos determinantes de una siniestralidad elevada. El proceso es paralelo al de securitización iniciado en la banca, pero hay importantes diferencias. Así como en ésta se trata de reducir los riesgos que afectan al activo del balance, en el sector asegurador esta securitización va encaminada a cubrir los riesgos del lado pasivo, es decir, de las obligaciones nacidas de operaciones de seguro o de reaseguro aceptado¹⁴. Ejemplos de estas vías alternativas de cesión de riesgos son los *Industry loss warranties* y los bonos de catástrofes.

La teoría de cópulas ha encontrado también aplicación en el planteamiento de los citados instrumentos de cobertura de riesgos, puesto que las catástrofes naturales o de otra índole pueden causar daños a un gran número de bienes, lo que puede provocar la coincidencia de siniestralidades excesivas para el asegurador o reasegurador en más de una línea de seguro; nuevamente nos encontramos, por tanto, con riesgos dependientes entre sí. La determinación de la equivalencia financiero-actuarial de las aludidas operaciones ha suscitado también el interés de los actuarios en España. Así, M.V. Rivas, M.J. Pérez y A. Cuesta han publicado dos trabajos, "*Aplicación de la teoría de cópulas al cálculo de la prima de emisión de los bonos sobre catástrofes*"¹⁵ y "*Cálculo empírico basado en la teoría de cópulas de un Industry Loss*

¹⁴ J. De Mey, [2007].

¹⁵ M.V. Rivas, M.J. Pérez y A. Cuesta [2004].

Warranty"¹⁶. Los autores describen estas operaciones, examinan sus clases y sus efectos. En los bonos de catástrofes (o *CAT bonds*), el asegurador o reasegurador que desea protección frente al riesgo de catástrofes promueve la emisión de tales bonos a través de una entidad específica (*special purpose vehicle*); estos títulos tienen dos ventajas principales para el suscriptor (que, habitualmente, es un fondo de riesgo o *hedge fund*, un fondo de pensiones, una entidad aseguradora, etcétera): por una parte, le ofrecen, a cambio del riesgo que incorporan, una rentabilidad mayor que los bonos convencionales y, por otra, las fluctuaciones en el valor de mercado de estos bonos de catástrofes guardan muy baja correlación con la de los restantes de renta fija, lo que es un incentivo para el inversor que desee diversificar su cartera. En caso de que ocurra la catástrofe a la que el bono está asociado, el inversor soporta el riesgo en los términos preestablecidos, bien dejando de percibir el importe de los cupones, bien, además, con la pérdida del derecho a recuperar todo o parte del principal. En los *Industry Loss Warranties*, el "comprador" de esta forma de "transferencia alternativa de riesgos" (empresa de seguros o reaseguros que desea cobertura para el caso de siniestralidad extraordinaria de los tipos de seguro a que la operación se refiere) paga una "prima" al "vendedor" (que puede ser un *hedge fund* o fondo de riesgo, o bien un reasegurador). A cambio, obtiene el derecho a percibir una cantidad de dinero en caso de que ocurra una catástrofe del tipo preestablecido (por ejemplo, huracán, terremoto o cualquier tipo de catástrofe natural, etcétera) en el territorio a que la operación se refiere y dentro del período también fijado, que haya ocasionado unos daños totales al sector asegurador superiores a la cifra establecida (por ejemplo, 20.000 millones de dólares); estos daños se determinan por medio de unos índices de pérdidas (por ejemplo, los elaborados por *Property Claims Services* para diversas zonas de los Estados Unidos). Si la catástrofe reúne los requisitos así fijados, el comprador de la garantía tendrá derecho a percibir la suma de dinero establecida en el contrato (por ejemplo, 100 millones de dólares). En el trabajo sobre los *Industry Loss Warranties*, los autores se proponen determinar el importe de la prima de una de estas operaciones, referentes a cobertura de daños extraordinarios por catástrofe natural que afecte a dos líneas de seguro (daños y responsabilidad civil). Ante la dificultad de obtener datos reales, se ha llevado a cabo una simulación de las cuantías de los daños. El cálculo se hace por medio de simulaciones, adoptando diversas hipótesis acerca de las distribuciones marginales

¹⁶ M.V. Rivas, M.J. Pérez y A. Cuesta (2007).

(log-normal, Pareto, logística, paralogística, exponencial) y de las estructuras de dependencia. El trabajo contiene una exposición de la teoría de cópulas.

Las cópulas, por tanto, irrumpen en el mundo actuarial como un instrumento que puede aportar soluciones en muchos casos. Pero ello no significa que carezcan de inconvenientes. Ya hemos hecho referencia a las dificultades de cálculo que pueden plantear, pero hay otros. Quizá el principal sea que suele resultar problemático determinar el modelo de cópula más adecuado para una situación dada. Los datos requeridos para el ajuste de cópulas han de ser muy numerosos y no suele contarse con información suficiente. Es raro que un solo asegurador disponga de experiencia estadística en forma de varios cientos de observaciones del vector que interese para el caso (por ejemplo, pares de valores (x, y) significativos de la siniestralidad observada en dos tipos de seguro) y eso representa una grave dificultad a la hora, por ejemplo, de elaborar un modelo interno de solvencia. Y aún si dispusiera de una larga experiencia, habría que evitar utilizar datos que, por su antigüedad, carecieran de representatividad sobre los fenómenos que pretendieran modelizarse. De ahí que sea importante organizar la obtención de estadísticas procedentes de un gran número de empresas, de forma que sean aptas como bases de datos para este tipo de trabajos.

3. PROPÓSITO Y ESTRUCTURA DE ESTE TRABAJO

Los cinco Capítulos que siguen contienen una introducción básica a las cópulas, redactada con la intención de lograr claridad en la exposición y carácter práctico, con multitud de ejemplos. Va destinada a los actuarios, estudiantes de materias actuariales y, en general a quienes deseen tener una idea de qué son y para qué sirven las cópulas. Se pretende aportar los conceptos necesarios para que, quien esté interesado, pueda profundizar en el estudio con mayor facilidad. Fieles a dicho carácter práctico, incluimos en este trabajo una aplicación de la teoría de cópulas a la determinación del capital de solvencia en un supuesto de seguros de responsabilidad civil, según criterios de la normativa de Solvencia II y valiéndonos de datos reales.

En el Capítulo I se trata del concepto de dependencia entre variables aleatorias y se comienza por estudiar varios ejemplos de cómo el coeficiente de correlación

lineal puede conducir a conclusiones erróneas. Se determina en qué ámbitos puede utilizarse este coeficiente como medida de la dependencia estadística, lo que exige estudiar las distribuciones esféricas y elípticas. Ello se hace mediante un ejemplo y varias gráficas. El Capítulo concluye con el examen de otras medidas de la dependencia, como los coeficientes de Kendall y de Spearman.

El siguiente Capítulo podría considerarse como el núcleo de este trabajo, porque contiene casi toda la teoría sobre las cópulas que examinamos, siempre a un nivel básico o elemental y con gran número de ejemplos numéricos. Comienza este Capítulo II con un Epígrafe en que se introduce el concepto de cópula de forma intuitiva y se presentan dos casos de las llamadas cópulas implícitas, es decir, la gaussiana y la t , para, a continuación, entrar en el estudio del concepto de cópula y de sus propiedades. A la luz de este concepto volvemos a examinar el de dependencia, para poner de manifiesto cómo los coeficientes de correlación de Kendall y de Spearman están en función exclusivamente de la cópula y no de las distribuciones marginales, como ocurre con el coeficiente lineal de Pearson, que sí depende de dichos márgenes. Y lo mismo ocurre con el importantísimo concepto de la “dependencia en colas”, que viene a continuación y cuya medida calcularemos para las cópulas elípticas. Las llamadas cópulas arquimedianas, de tanta transcendencia práctica, se estudian a seguidamente y dentro de ellas veremos los modelos de Gumbel, de Frank y de Clayton. Nos ha parecido que valía la pena dedicar espacio y esfuerzo a la demostración de la fórmula que, en las cópulas arquimedianas, relaciona la función de distribución de la variable $C(U, V)$ con la función generador de la cópula¹⁷. Al igual que se ha hecho en otras ocasiones, se opta por incluir la demostración en lugar de limitarnos a sustituir ésta por una referencia bibliográfica para encontrarla.

El siguiente Epígrafe de este Capítulo II describe cómo unir o vincular una cópula con las funciones de distribución marginal, para obtener así una función de distribución multivariante. Otra cuestión de interés que examinamos en este Capítulo es la cópula de supervivencia; se explica el concepto, se aportan ejemplos y se presenta la llamada de cópula HRT, útil en aplicaciones actuariales.

¹⁷ Expresión (2.23)

Al principio de este Capítulo II se hace referencia a las cópulas elípticas como ejemplos de las implícitas; en el Epígrafe 9 se aportan más casos de cómo obtener cópulas a partir de distribuciones bivariantes que responden a problemas prácticos. Uno de estos casos es la cópula de Marshall-Olkin, que se examina con cierto detenimiento. Finaliza este Capítulo con una breve referencia a las cópulas de valores extremos.

En el Capítulo III se abordan varias cuestiones numéricas referentes a las cópulas, comenzando por la cópula empírica. A continuación se trata del ajuste de cópulas a una base de datos, describiéndose cómo obtener información relevante a partir de la propia cópula empírica; se hace también referencia al método gráfico de Genest y Rivest. Aunque este método es propio de las cópulas arquimedianas, lo extendemos a otros tipos de cópulas por medio de simulaciones estocásticas. También se describe la medida de Frees y Valdez para valorar el ajuste de un modelo de cópula a la cópula empírica y el "coeficiente τ acumulativo" que describe G. Venter. Por último, se examina el método de la máxima verosimilitud y el criterio de Akaike para comparar diversos modelos de cópula.

La simulación aleatoria de cópulas es también materia de este Capítulo. Se describe cómo efectuarla en cada uno de los modelos descritos y se incluyen varios ejemplos.

El Capítulo IV tiene un carácter eminentemente práctico. Comienza con el estudio de las cópulas mixtas y de la regresión cuantílica, siempre con ejemplos numéricos, para seguir con una breve referencia al complicado tema de las cópulas arquimedianas multivariantes. A continuación se estudian varios ejemplos de cálculo del *VaR* con dos o tres riesgos; en el primer caso los cálculos se efectúan mediante la integración de las correspondientes funciones de densidad, mientras que el caso de tres riesgos, el *VaR* se determina a través de simulaciones de Montecarlo. Los resultados numéricos de cada supuesto se acompañan de los obtenidos bajo la hipótesis de distribución logarítmico-normal de la suma o conjunto de los riesgos considerados. El último Epígrafe de este Capítulo se dedica a la mencionada aproximación logarítmico normal y a estudiar los efectos que produce en el cálculo del *VaR* en diversos supuestos.

El último Capítulo, también de índole práctica, se destina a la aplicación de las cópulas al cálculo del capital de solvencia en el caso concreto de dos líneas de seguro (responsabilidad civil general y responsabilidad civil de vehículos de motor), siguiendo los criterios establecidos por la normativa de Solvencia II. Los datos utilizados en este caso han sido obtenidos de unas estadísticas publicadas en forma de gráfico en un documento de CEIOPS;¹⁸ no se trata, por tanto, de datos simulados, sino reales. Tras una exposición resumida de las normas de Solvencia II más relevantes, se desarrolla esta aplicación práctica paso a paso, siguiendo el proceso que quedó esbozado en Capítulos anteriores, es decir, se obtiene la cópula empírica y las distribuciones marginales, a las que se busca un modelo teórico. Se comparan varios modelos de cópula por los métodos ya enumerados y se determina que la que mejor se ajusta a los datos disponibles es la cópula de Frank. A partir de ella y de dichos modelos para las distribuciones marginales, se llega a la distribución de probabilidades y se determina el *VaR* y el *TailVaR* al 99,5% (que es la probabilidad exigida por la normativa europea). La conclusión obtenida es una cifra de capital de solvencia inferior a la que resultaría de dicha normativa, lo que pone de manifiesto que en el caso contemplado no queda justificada la elevación de coeficientes de correlación para atender a la existente en la cola de las distribuciones.

4. NOTACIÓN UTILIZADA Y REFERENCIAS EN EL TEXTO

Las variables aleatorias se designan mediante letras mayúsculas (salvo casos en que se acostumbre a designarlas de otra forma, como ocurre con la χ^2) y los vectores o matrices, sean o no aleatorios, en negrita.

LN significa logaritmo neperiano.

Se utiliza habitualmente la coma para separar enteros de decimales, pero, excepcionalmente, se usa el punto; esto último se hace cuando se inserta en el texto el resultado obtenido de una aplicación informática. En dicho supuesto el tipo de letra, la forma de ciertos símbolos, etcétera, puede también diferir del utilizado en

¹⁸ *Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors.*

el texto. Un ejemplo de esto lo encontramos en la Nota a pie de página número 24. Con los caracteres insertados en las gráficas ocurrirá lo mismo.

Los Capítulos quedan divididos en Epígrafes numerados. Para citar uno de ellos se escribe el número del Capítulo y el del Epígrafe, separados ambos por un punto. Así, III.2 es el Epígrafe número 2 del Capítulo III.

Análogamente, para identificar los Cuadros se acude también a dos números separados por un punto: el primero significa el Capítulo en que se encuentra y el segundo, el número de orden dentro del Capítulo. Y lo mismo ocurre con las Figuras. Así, la Figura 4.2 es la segunda dentro del Capítulo IV.

Se ha procurado que los ejemplos queden destacados del texto general y para lograrlo, cada uno de ellos va encabezado por un título en negrita con el número, según el mismo sistema que el empleado para las Figuras y la expresión del objetivo o finalidad del Ejemplo propuesto. Además, el texto del ejemplo cuenta con unos márgenes laterales algo superiores a los generales, para que el lector pueda determinar fácilmente dónde empieza y dónde termina. Se ha seguido este criterio a lo largo de todo texto salvo en los Epígrafes dedicados a contener ejemplos, por haberse considerado innecesario; aún en estos casos dichos ejemplos quedan destacados del texto. Tal es el caso del Capítulo IV, Epígrafe 4.

Las demostraciones más largas o dificultosas también han quedado destacadas, tanto con la reducción de márgenes en la misma medida que los ejemplos, como también mediante la inserción de

Con ello se intenta que salte a la vista la extensión de esas demostraciones, cuyo seguimiento puede no convenir al lector más interesado en el resultado que en el procedimiento para llegar a él.

A las fórmulas o expresiones que lo requieran, se asocian dos números entre paréntesis, separados por un punto. Por ejemplo, la expresión (2.5) está en el Capítulo II y es la número 5.

I. LA DEPENDENCIA ENTRE RIESGOS

1. DEPENDENCIA Y CORRELACIÓN

En muchas situaciones tiene interés conocer en qué medida el resultado de una variable estadística se relaciona con el de otra u otras. Cuando se trata de determinar los fondos propios que un asegurador necesita para lograr un cierto nivel de solvencia, será preciso conocer cómo se comportan los diversos riesgos que le afectan: si, al materializarse o sobrevenir uno de estos riesgos, la probabilidad de que acaezcan otros resulta o no modificada.

Es frecuente utilizar el coeficiente de correlación lineal para medir el grado de dependencia y así se hace en los modelos de Solvencia II para entidades aseguradoras que la Unión Europea implanta. Tal práctica sólo es correcta cuando las variables aleatorias con las que trabajamos se distribuyan conjuntamente según el modelo normal. Para ser más precisos: sólo cuando la distribución conjunta de las variables estocásticas sea normal multivariante puede interpretarse como independencia entre ellas el hecho de que el coeficiente de correlación sea cero¹⁹. Si X e Y son variables aleatorias con función de distribución $F(x,y)$ y ésta coincide con el modelo normal bivalente con coeficiente de correlación ρ , si $\rho=0$, X e Y son independientes. En el caso de otras distribuciones elípticas²⁰, como la t de Student, por ejemplo, hay dependencia entre X e Y aunque ρ sea cero, si bien tal dependencia entre ambas está en función sólo de ese coeficiente.

En efecto, la función de densidad conjunta del modelo normal bivalente (0,1) es:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp[-0,5(x^2 + y^2 - 2\rho \cdot x \cdot y)/(1 - \rho^2)]$$

¹⁹ Embrechts, McNeil y Straumann, (2002).

²⁰ Sobre las distribuciones elípticas, véase el Epígrafe 3 de este Capítulo. Las distribuciones elípticas bivalentes se caracterizan porque los puntos en que la densidad es constante, forman una elipse. A esta clase pertenecen la distribución normal y la t de Student con $\rho \neq 0$.

Si hacemos $\rho=0$ podemos expresar $f(x,y)$ como producto de las densidades marginales de X y de Y , lo que demuestra su independencia.

En cambio, en el caso de la distribución t bivalente con n grados de libertad la función de densidad conjunta es:

$$f(x,y) = \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \pi \cdot n \sqrt{1-\rho^2}} \left[1 + \frac{x^2+y^2-2\rho \cdot x \cdot y}{n(1-\rho^2)} \right]^{-((n+2)/2)}$$

Pues bien, si $\rho=0$ resulta una función que no puede expresarse como producto de las densidades marginales, faltando así la condición necesaria y suficiente para la independencia entre X y Y en este caso.

En este Epígrafe examinaremos cuatro ejemplos que ilustran el error que se comete al utilizar la correlación para medir la independencia en situaciones inadecuadas. En los dos primeros el error proviene de que las distribuciones no son elípticas, mientras que en los otros dos, las distribuciones son elípticas pero el coeficiente se utiliza de forma incorrecta.

Ejemplo 1.1: Dos variables perfectamente dependientes cuyo coeficiente de correlación lineal es cero

Se trata de un caso frecuentemente citado. Si N es una variable aleatoria normal $(0,1)$, N^2 es perfectamente dependiente de ella: conocido el valor de N , obtenemos N^2 . Y sin embargo, el coeficiente de correlación entre ambas variables es nulo, como es fácil ver: su covarianza es cero, al anularse los momentos de orden impar en la distribución normal. Por medio de unas cifras, ilustraremos el error al que conduciría una indebida aplicación de la correlación en casos como éste. Empecemos por considerar dos variables independientes N_1 y N_2 en \mathbb{R} . Llamemos X a N_1 y Y a N_2^2 y nos interesa calcular la probabilidad de que la suma $X + Y$ supere cierto límite s . Si F_x y F_y son las funciones de distribución marginal de X y Y , mientras que f_x y f_y son las respectivas densidades, dicha probabilidad será (teniendo en cuenta que $Y > 0$):

$$\text{Prob}[X + Y \leq s] = \int_{-\infty}^{\infty} F_x(s-y) \cdot f_y(y) dy = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{s-y} f_x(u) \cdot f_y(y) \cdot du \cdot dy$$

La función de distribución de Y es:

$$F_Y(y) = \text{Prob}(Y^2 \leq y) = F_Y(\sqrt{y}) - F_Y(-\sqrt{y})$$

Admitamos ahora que, además de independientes, N_1 y N_2 son normales $(0,1)$.

La función de densidad de Y será:

$$f_Y(y) = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}}$$

Por tanto,

$$\text{Prob}[X + Y \leq s] = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{s-y} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}} du dy$$

Si, por ejemplo, $s=6$ obtenemos que $\text{Prob}(X+Y \leq 6) = 0,983$ y $\text{Prob}(X+Y > 6) = 0,017$.

Pero ¿qué ocurre si $N_1 = N_2$ es decir, cuando $X=N_1$ e $Y=N_1^2$? Ya hemos dicho que la correlación entre ambas es nula, igual que ocurría en el caso que acabamos de examinar, en que por hipótesis X e Y son independientes. Ahora la probabilidad que nos interesa es, designando por N una variable normal $(0,1)$:

$$\text{Prob}(X+Y \leq 6) = \text{Prob}(N + N^2 \leq 6) = \text{Prob}[(N - 2)(N + 3) \leq 0] =$$

$$\text{Prob}(-3 < N \leq 2) = F_X(2) - F_X(-3) = 0,976.$$

Es decir, que resulta $\text{Prob}(X+Y > 6) = 0,024$, un 41% más alta que la probabilidad obtenida en el caso precedente pese a que, en ambos, el coeficiente de correlación es nulo.

Ejemplo 1.2: Variables con la misma correlación lineal y diferente grado de dependencia

Este caso está sugerido por el que proponen Embrechts, McNeil y Straumann (2002). Dos distribuciones bivariantes con el mismo coeficiente de correlación (en ambos casos, $\rho = 0,7$) e iguales distribuciones marginales (gamma con parámetros 3 y 1), presentan distintos grados de dependencia; para mostrarlo, representan gráficamente 1000 puntos simulados a partir de cada una de

ambas distribuciones de probabilidad; en la primera parte de la gráfica sólo unos pocos puntos están más allá de los límites $x=8$, $y=8$ mientras que en la segunda los puntos que superan ambos valores —que podríamos considerar como “umbrales de peligrosidad”— son muchos más.

A continuación haremos un ejercicio similar. En las Figuras 1.1 y 1.2 tenemos puntos aleatorios —2000 en cada una— obtenidos mediante simulación de dos distribuciones bivariantes, ambas con $\rho=0,6$ y márgenes exponenciales con media igual a 5. Pero hay diferencias importantes entre ambas. En la Figura 1.1, sólo un par de puntos supera simultáneamente el umbral de 25 unidades de abscisa y ordenada, mientras que en la Figura 1.2, son numerosos. La segunda distribución genera, por tanto, más valores “extremos” o “peligrosos” que la primera, pese a que en ambas $\rho=0,6$ y a que su comportamiento marginal es idéntico. Esta mayor “peligrosidad” se aprecia también observando cómo la suma de ambas variables supera el umbral de 60 unidades con mayor frecuencia en la segunda distribución que en la primera. En realidad $\text{Prob}(X+Y>60)$ es el 1,1 por 1000 en el primer modelo probabilístico y casi el doble (1,8 por 1000) en el segundo²¹.

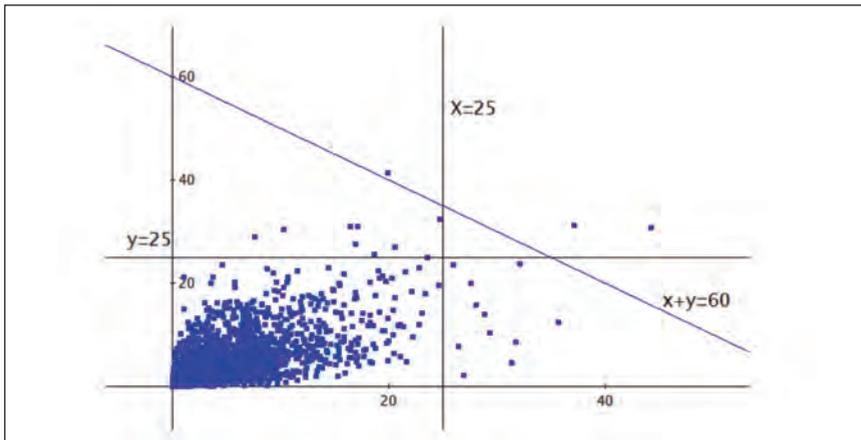


Figura 1.1: Simulación de 2000 puntos; cópula Gauss y márgenes exponenciales.

²¹ La distribución simulada en la Figura 1.1 tiene como estructura de dependencia la cópula gaussiana con $\rho=0,666$; la de la Figura 1.2, la cópula es Gumbel con parámetro 1,543. En ambas las distribuciones marginales son exponenciales con media 5.

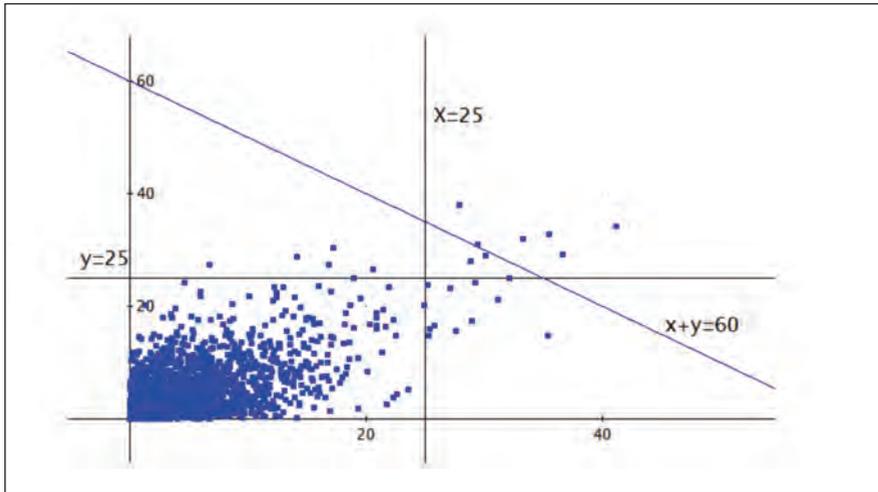


Figura 1.2: Simulación de 2000 puntos; cópula Gumbel y márgenes exponenciales.

Hemos de llamar la atención sobre un hecho importante. Los autores ya citados en el Ejemplo 1.2 afirman²² que la correlación y la covarianza son medidas naturales del grado de dependencia en el ámbito de las distribuciones elípticas; una distribución elíptica queda determinada por su matriz de covarianzas²³ y por sus distribuciones marginales. Ahora bien, esto no significa que, en la clase de las distribuciones elípticas, no haya de manejarse la correlación con cuidado, porque también en dicho ámbito puede aquélla llevarnos a engañosas apreciaciones del grado de dependencia entre variables aleatorias, según se ve en el siguiente Ejemplo 1.3.

Ejemplo 1.3: El coeficiente de correlación lineal puede conducir a conclusiones engañosas, aún dentro del ámbito de las distribuciones elípticas

En cada una de las Figuras 1.3 y 1.4 se representan 2000 puntos simulados de una distribución bivalente con correlación $\rho=0,6$ y márgenes con media cero

²² Embrechts, McNeil y Straumann (2002).

²³ La matriz de covarianzas Σ es semi-definida positiva y simétrica.

Si llamamos D_Σ a la matriz diagonal coincidente con la diagonal principal de Σ y designamos por P a la matriz de correlaciones, podemos plantear la siguiente relación entre Σ y P :

$$P = D_\Sigma^{-1/2} \cdot \Sigma \cdot D_\Sigma^{-1/2}.$$

y varianza igual a 2 en ambos casos. La diferencia está en que, en la Figura 1.3 la distribución bivalente es la normal, mientras que en la Figura 1.4 los puntos representados proceden de una t de Student con $n=4$ grados de libertad. Dentro de la clase de las distribuciones elípticas a que ambas pertenecen, con un mismo coeficiente de correlación se originan distribuciones con muy distinta peligrosidad, como ilustra el distinto número de puntos (x, y) tales que $x+y>7$ en uno y otro caso.

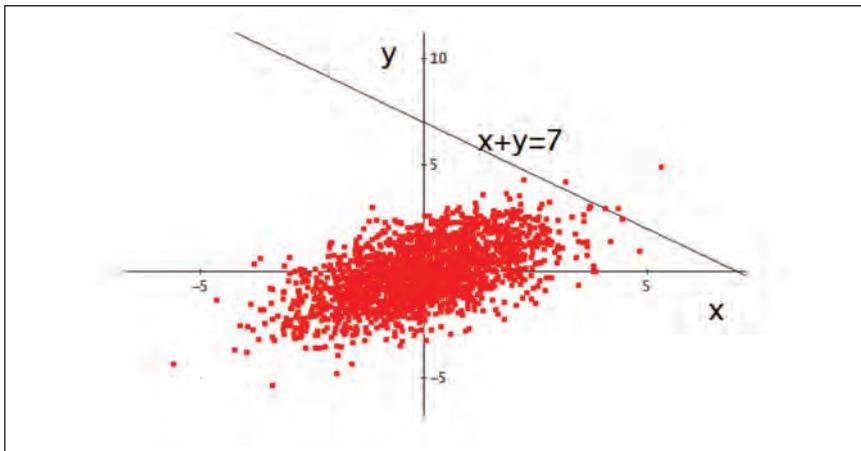


Figura 1.3: Simulación de 2000 puntos de una normal bivalente $(0, \sqrt{2})$ con $\rho=0,6$.

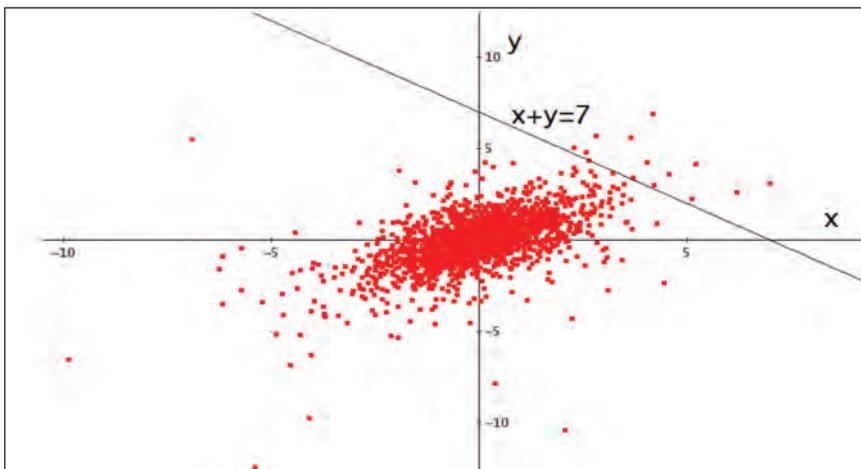


Figura 1.4: Simulación de 2000 puntos de una t bivalente con $\rho=0,6$ y $n=4$ grados de libertad.

Ejemplo 1.4: Otro caso de incorrecta aplicación de la correlación lineal

Proponemos un supuesto numérico más que confirma la conclusión del Ejemplo 1.3, es decir, que el coeficiente de correlación, aún dentro de las distribuciones elípticas, puede llevar a errores.

Supongamos que un asegurador opera en dos líneas de negocio, A y B. En ambas la siniestralidad media es 20 y la desviación típica es de 2 unidades monetarias. El coeficiente de correlación entre las siniestralidades de A y de B es cero. Dichas siniestralidades se distribuyen conjuntamente según el modelo normal. Si sabemos que en el ramo B la siniestralidad va a superar las 25 unidades, ¿qué podemos decir acerca de que ocurra lo mismo en el A? Al ser ambos ramos independientes, la información de B no es útil para predecir nada acerca de A. La probabilidad de que en éste la siniestralidad supere las 25 unidades es 0,006 y no depende de lo ocurrido en B.

Caso distinto tenemos cuando la distribución conjunta de las siniestralidades sigue el modelo t de Student. Si suponemos que $n=4$ (número de grados de libertad), la probabilidad de que la siniestralidad en A supere las 25 unidades monetarias, sabiendo que ello ha ocurrido en B, es 0,0964. Y si no tuviéramos información sobre B, o bien en la hipótesis de que considerásemos sólo la línea de seguro A, la probabilidad de que en ésta la siniestralidad superase el umbral de 25, sería, aproximadamente, 0,0121, es decir, que en el modelo t, aún con $\rho=0$, las variables A y B son dependientes.

El distinto comportamiento de las variables en uno y otro modelo probabilístico puede también expresarse así: si entendiéramos que una correlación nula equivale a independencia y nos interesara calcular la probabilidad de siniestralidades altas (mayores que 25) simultáneamente en A y en B, tendríamos que, en el modelo normal esta probabilidad es de $0,006^2 = 0,036$ milésimas y en el t calcularíamos erróneamente que es de $0,0121^2 = 0,146$ milésimas, asumiendo una independencia que no existe. Efectivamente, en el modelo t la probabilidad de que ambas siniestralidades superaran el umbral de 25

unidades es de 1,16 milésimas y por tanto muy superior²⁴. Concluimos una vez más que el coeficiente ρ no sirve para determinar si existe o no independencia entre variables aleatorias cuando la distribución conjunta de ellas no sea el modelo gaussiano, si bien desempeña, en las demás distribuciones elípticas, como es la t de Student, el papel de medir la dependencia, aunque de otra manera (sin que incorrelación equivalga a independencia). Lo comprobaremos empíricamente siguiendo con este Ejemplo 1.4: en la distribución biva-riante de Student que acabamos de utilizar, hagamos que $\rho=0,5$. En tal caso, la dependencia es mayor que antes y la probabilidad de que ambas siniestra- lidades (la de A y la de B) superen simultáneamente el umbral de 25 unidades es de 3,5 milésimas, es decir, aproximadamente el triple que si $\rho=0$ ²⁵.

Además de las limitaciones del coeficiente de correlación que hemos venido ilus- trando mediante ejemplos, aún pueden citarse otros inconvenientes de esta me- dida de dependencia:

- 1) El coeficiente de correlación no depende sólo de la estructura de dependencia entre las variables aleatorias, sino que su valor queda influido también por las distribuciones marginales de éstas. Su comportamiento estadístico aislado, al- tera, por tanto, el valor de ρ .

²⁴ La probabilidad 0,0121 para la t de Student procede del cálculo $\frac{\Gamma(4,5)}{\sqrt{0\pi}} \int_{25}^{\infty} [1 + (x-20)^2/8]^{-2,5}$. La proba- bilidad $\text{Prob}(A>25;B>25) = 1,16$ milésimas en el modelo t propuesto resulta de:

$$\int_{25}^{\infty} \int_{25}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \pi} \left(1 + \frac{\left(\frac{x-20}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{y-20}{\sqrt{2}} \right)^2}{4} \right)^{-3} dx dy$$

$$\text{Prob}(A>25 | B>25) = \text{Prob}(A>25;B>25) / \text{Prob}(B>25) = 0,00116 / 0,0121 = 0,0964.$$

²⁵ El cálculo es ahora:

$$\int_{25}^{\infty} \int_{25}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot (1 - 0,5^2)} \left(1 + \frac{\left(\frac{x-20}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{y-20}{\sqrt{2}} \right)^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot \frac{x-20}{\sqrt{2}} \cdot \frac{y-20}{\sqrt{2}}}{4 \cdot (1 - 0,5^2)} \right)^{-3} dx dy$$

- 2) Requiere que las varianzas sean finitas; de lo contrario, el coeficiente de correlación no está definido. Esto impide utilizar el coeficiente en casos como el señalado por Moscadelli (2004) referente al riesgo operacional, en donde aparecen distribuciones con media y varianza infinita.
- 3) El coeficiente de correlación entre dos variables, X , Y se ve alterado cuando aplicamos a éstas una transformación creciente y no lineal, T ; es decir, que la correlación entre X e Y difiere de la existente entre $T(X)$ y $T(Y)$. Por ejemplo,

$$\rho(X, Y) \neq \rho[\text{LN}(X), \text{LN}(Y)].$$

2. DISTRIBUCIONES ESFÉRICAS

Su densidad es constante en cualquier hiperesfera. En el caso bidimensional, $F(x, y)$ es esférica si la densidad $f(x, y)$ es constante en cualquier punto (x, y) de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, para cualquier r . Si dibujamos las curvas de nivel de la función de densidad conjunta $f(x, y)$ para diversos valores de ésta, resulta que dichas curvas son circunferencias con centro en el origen. De esta forma, la densidad $f(x, y)$ es en realidad una función del radio de las circunferencias concéntricas y podemos escribir para un vector aleatorio \mathbf{X} en \mathbb{R}^n :

$$f(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = g(\sum_1^n (x_i)^2)$$

Por ejemplo, en la $N(0, 1)$ bivalente con márgenes independientes,

$$f(1, 1) = \frac{1}{2\pi} e^{-2/2} = 0,0585$$

El valor de la densidad será el mismo para cualquier par (x_1, x_2) tal que

$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

Si aplicamos a (x_1, x_2) una transformación que traslade dicho punto a otro dentro de la misma circunferencia obtenemos igual densidad. Esta transformación ha de ser ortogonal y se logra multiplicando el vector $(X_1, X_2)'$ por una matriz

ortogonal A (es ortogonal si $A' = A^{-1}$). Por tanto, si A es una matriz ortogonal $n \times n$ y X un vector de orden n ,

y también:

$$A \cdot X = {}_d X^{26}$$

$$X = {}_d A' \cdot X. \quad 27$$

Ejemplo 1.5: Transformación ortogonal aplicada a una distribución esférica

Sean X_1 y X_2 variables normales (0,1) e independientes. En el punto (1,1) su densidad, como hemos visto, es 0,0585. Aplicamos al vector $X = (X_1, X_2)'$ la transformación ortogonal $A \cdot X$, en donde

$$A = \begin{pmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{pmatrix}$$

Si $X_1 = X_2 = 1$ obtendremos el punto (1,366; 0,366) al que igualmente corresponde la densidad $f(1,366; 0,366) = 0,0585$.

La función característica de una distribución esférica en \mathbb{R}^n será (si escribimos indistintamente $t(j)$ y t_i):

$$\varphi_X(T) = E(e^{t'X}) = E(e^{i \sum t(j) \cdot X(j)})$$

²⁶ El símbolo $=_d$ significa que las variables que figuran a ambos lados del mismo siguen la misma ley de distribución estadística.

²⁷ En el caso de la normal bivalente, cualquier vector (X_1, X_2) tendrá una distribución uniforme si sus componentes determinan puntos de la misma circunferencia de radio, por ejemplo, igual a 1; si hacemos ahora $X_1 = \cos(\Phi)$, $X_2 = \sin(\Phi)$ (siendo Φ el ángulo que forma el radio que pasa por (X_1, X_2) con el eje de abscisas, resulta que Φ es una variable uniforme (0, 2π). Por otra parte, cualquier punto aleatorio (N_1, N_2) del espacio bidimensional puede expresarse como producto de una variable $R \geq 0$ por (X_1, X_2) , es decir, que $N_1 = R \cdot X_1$, $N_2 = R \cdot X_2$. Este hecho puede aprovecharse para simular números aleatorios distribuidos normalmente a partir de números aleatorios [o, más exactamente, pseudoaleatorios] uniformes (0,1). Para obtener N_1 simulamos el radio de la circunferencia, R ; como R^2 es la suma de los cuadrados de dos variables independientes y normales (0, 1), su función de distribución es $F(x) = \text{Prob}(R^2 \leq x) = 1 - e^{-x/2}$, es decir, la de una variable χ_2^2 . Pero $F(X)$ es uniforme (0,1) y por tanto, si simulamos un número aleatorio U_j , uniforme (0,1) podemos hacer que $U_j = 1 - e^{-x/2}$ y, por tanto, $x = -2 \cdot \text{LN}(1 - U_j)$ es un valor posible de R^2 ; la simulación aleatoria del radio R será $x = (-2 \cdot \text{LN}(1 - U_j))^{0.5}$. Por otra parte, al ser Φ uniforme (0, 2π), resulta que $2\pi U_2$ será una simulación de Φ , si U_2 es asimismo uniforme e independiente de U_j . Por tanto, el producto $R \cdot X = (-2 \cdot \text{LN}(U_1))^{0.5} \cdot \cos(2\pi U_2)$ será una simulación del número aleatorio N_1 y $R \cdot Y = (-2 \cdot \text{LN}(U_1))^{0.5} \cdot \sin(2\pi U_2)$ lo será de N_2 [es irrelevante sustituir $1 - U_j$ por U_j en estas expresiones]. Éstas son las conocidas fórmulas utilizadas para convertir un par de números aleatorios uniformes (0,1) e independientes, en otro par N_1 y N_2 , ambos normales (0,1) y también independientes entre sí.

Pero si X tiene distribución esférica, $X = A^T \cdot X$ (siendo A ortogonal) y por tanto,

$$\varphi_X(T) = E(e^{i T^T X}) = E(e^{i T^T A^T X}) = E(e^{i (AT)^T X}) = \varphi_X(AT)$$

Es decir, que la función característica de una distribución esférica tiene la propiedad de ser constante para valores de T que estén en la hipersfera (para $n = 2$, en una circunferencia), lo que permite —de forma análoga a lo que ocurre con la función de densidad— concluir que dicha función depende sólo de la suma $\sum_1^n t_i^2$, es decir:

$$\varphi_X(T) = h_X(T^T T) = h_X(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2) \quad (1.1)$$

Ejemplos de distribuciones esféricas, además de la normal con media cero y variables incorrelacionadas, son también la t de Student y la distribución de Cauchy multivariantes, todas ellas con coeficientes de correlación nulos, márgenes iguales entre sí y simétricos. Pero, dentro de las esféricas, ya sabemos que es la normal multivariante la única en que correlación nula significa independencia entre las variables.

3. DISTRIBUCIONES ELÍPTICAS

Una distribución elíptica resulta de hacer una transformación afín sobre una esférica. Dicha transformación lleva a cabo, sobre la variable esférica, un cambio en las unidades, un giro y una traslación. La ecuación de la transformación afín de un vector X en \mathbb{R}^n es

$$Y = C \cdot X + M$$

En donde C es una matriz $n \times n$ y M un vector n .

Ejemplo 1.6(a): Transformación de una distribución esférica en otra, elíptica

Si $X = (X_1, X_2)$ es una variable esférica en \mathbb{R}^2 y queremos transformarla en otra, tal que X_1 [componente horizontal] quede multiplicada por 2 y X_2 [vertical] por 0,8, haremos $Y = A \cdot X$, en donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Si aplicamos esta transformación a la circunferencia de radio 2, $x_1^2 + x_2^2 = 4$ obtenemos la elipse $0,25 y_1^2 + 1,5625 y_2^2 = 4$, representada en la Figura 1.5.

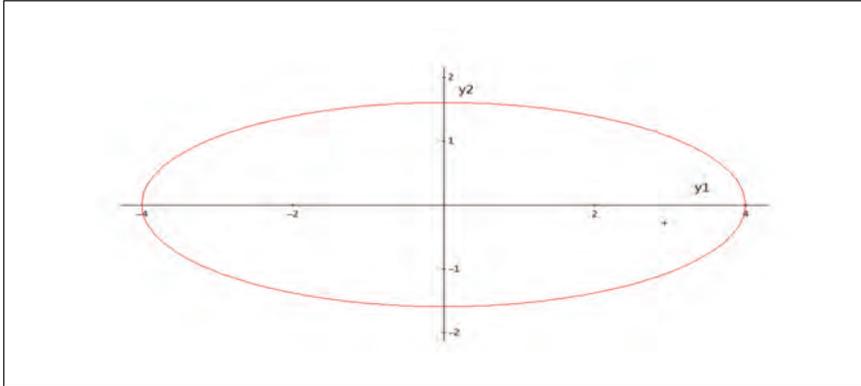


Figura 1.5: Elipse obtenida por transformación de una circunferencia.

Si ahora deseamos imprimir a dicha elipse un giro de $\theta = 30$ grados en sentido contrario a las agujas del reloj, premultiplicamos a Y por la matriz ortogonal

$$B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{bmatrix}$$

y resulta la elipse representada en la Figura 1.6, cuya ecuación es:

$$0,25(0,866z_1 + 0,5z_2)^2 + 1,5625(0,866z_2 - 0,5z_1)^2 = 4$$

En tercer lugar, para trasladar dicha elipse, por ejemplo, 3 unidades horizontalmente y 1 unidad en sentido vertical, en ambos casos en sentido positivo (es decir, hacia la derecha y hacia arriba), sumamos el vector:

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

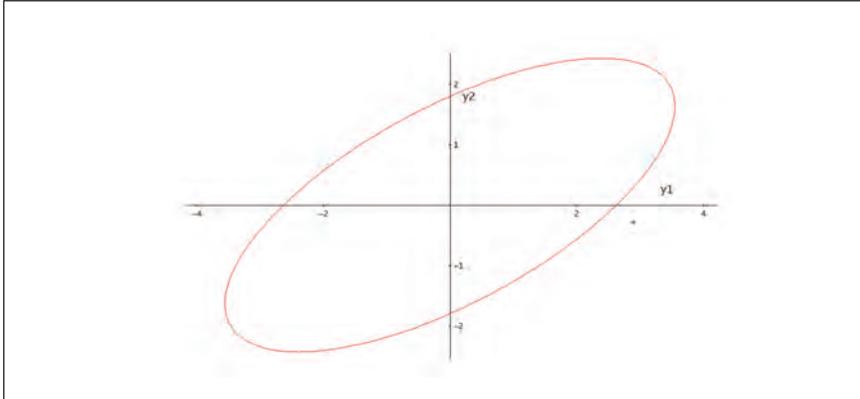


Figura 1.6: Giro de la elipse por transformación ortogonal.

con lo cual $W = Z + M$ y $Z = W - M$. Obtenemos así la elipse de la Figura 1.7, cuya ecuación resulta de sustituir z_1, z_2 , por $w_1 - 3, w_2 - 1$, respectivamente. Por tanto, es consecuencia de aplicar una transformación afín sobre una circunferencia representativa de los puntos con igual densidad en una distribución esférica bivalente. Esta elipse tiene la propiedad de que, a cualquiera de sus puntos (w_1, w_2) corresponde igual densidad de probabilidad y de ahí el nombre de “distribución elíptica”.

En general, en las distribuciones elípticas la densidad es constante en cualquier punto de un elipsoide.

En resumen, para llegar a la última elipse a partir de la circunferencia inicial, hemos hecho la transformación

$$W = B \cdot A \cdot X + M = C \cdot X + M \quad (1.2)$$

siendo

$$C = B \cdot A = \begin{bmatrix} 1.732 & -0.4 \\ 1 & 0.693 \end{bmatrix}$$

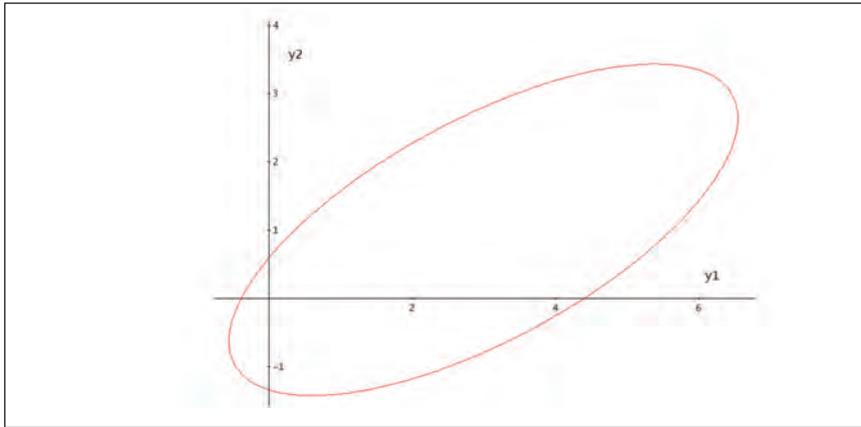


Figura 1.7: Elipse desplazada por suma de un vector.

Si aplicamos las anteriores transformaciones al caso general de una distribución esférica en \mathbb{R}^n , obtenemos la distribución elíptica. De la función de densidad de la primera, podemos pasar, por tanto, a la función de densidad de la distribución elíptica, según vamos a ver con nuestro Ejemplo en dos dimensiones.

Si en (1.2) despejamos X nos queda $X = C^{-1}(W - M)$ y, por tanto, $X' = (W - M)'(C')^{-1}$. De aquí que $X'X = (W - M)'(C')^{-1}C^{-1}(W - M)$. Pero $(C')^{-1}C^{-1} = (CC')^{-1}$ y si hacemos $CC' = \Sigma$ resulta, con los datos de nuestro ejemplo (con 4 decimales, como máximo):

$$CC' = \Sigma = \begin{pmatrix} 3,16 & 1,455 \\ 1,455 & 1,48 \end{pmatrix}; \quad \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0,578 & -0,568 \\ -0,568 & 1,234 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Σ es una matriz simétrica, porque equivale al producto de una matriz (C) por su traspuesta. Por tanto, queda $X'X = (W - M)' \Sigma^{-1} (W - M)$. Observemos que Σ^{-1} es también simétrica. En efecto, si Σ lo es, entonces $\Sigma = \Sigma'$ y en consecuencia $\Sigma^{-1} = (\Sigma')^{-1} = \Sigma^{-1}'$.

Por tanto, si en la función de densidad de X hacemos el cambio de variable anterior, obtenemos:

$$g(X'X) = g((W - M)' \Sigma^{-1} (W - M)) / (|\Sigma|)^{1/2} \quad (1.4)$$

Hay que dividir entre el jacobiano de la transformación, que es la raíz cuadrada del determinante de Σ .

La función característica de la distribución elíptica en \mathbb{R}^n será, teniendo en cuenta que $W = C.X + M$:

$$E(e^{iT'W}) = e^{iT'M} \cdot E(e^{iT'CX}).$$

Pero $E(e^{iT'CX})$ es la función característica de la variable esférica X con vector de parámetros $C'T$, que es (ver expresión (1.1)):

$$h_x(T'CC'T) = h_x(T'\Sigma'T)$$

Por tanto, la función característica de la distribución elíptica en \mathbb{R}^n , de $W = C.X + M$ es:

$$E(e^{iT'W}) = e^{iT'M} \cdot h_x(T'\Sigma'T)$$

$$(\Sigma = CC')$$

Ejemplo 1.6(b): Transformación de una distribución esférica en otra, elíptica

Ilustraremos mediante este Ejemplo la operación que convierte una variable t de Student bivalente con $n=4$ grados de libertad y $\rho=0$ en otra variable, pasando así de una esférica a otra, elíptica; la varianza de las distribuciones marginales es igual a 2. Aplicamos a esta distribución esférica la transformación utilizada hasta ahora, cuyos datos introduciremos en (1.4) teniendo en cuenta que, para la t bivalente con 4 grados de libertad, la función $g(X'X)$ es:

$$g(X'X) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{X'X}{4}\right)^{-3}$$

De la transformación aplicada resulta la función de densidad conjunta

$$j(W'W) = \frac{1}{2\pi(|\Sigma|)} \left(1 + \frac{1}{4} ((W-M)' \cdot \Sigma^{-1} \cdot (W-M))\right)^{-3} =$$

$$= \frac{1}{3,2\pi} \left[1 + \frac{1}{4} (0,578w_1^2 + 1,234w_2^2 - 1,137w_1w_2 - 2,332w_1 + 0,941w_2 + 3,027)\right]^{-3}.$$

Mediante unas transformaciones algebraicas algo tediosas expresaremos esta función de densidad en una forma más reconocible como propia de la t bivariente modificada, para que tenga los valores medios y varianzas elegidos (ver expresión [4.6]²⁸); en este caso la media de W_1 es 3 y la de W_2 es 1. Las varianzas, en el caso general de la distribución t, son iguales a $\nu/(\nu-2)$ pero en nuestro ejemplo ello no tiene por qué ser así; en efecto, recordemos que la presente distribución bivariente resulta de una esférica (t con 4 grados de libertad y correlación nula) deformada y desplazada caprichosamente, lo que determina que las dispersiones marginales tengan valores diferentes de $4/(4-2)=2$.

La función de densidad bivariente, expresada en la forma anunciada, es la siguiente:

$$f(\mathbf{W}) = j(\mathbf{W}'\mathbf{W}) =$$

$$\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2) \cdot \sqrt{(1 - 0.673^2)} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 2.514 \cdot 1.72 \cdot 2} \left[1 + \frac{\frac{(w_1 - 3)^2}{3.16} + \frac{(w_2 - 1)^2}{1.48} - \frac{2 \cdot 0.673 \cdot (w_1 - 3) \cdot (w_2 - 1)}{\sqrt{3.16} \cdot \sqrt{1.48}}}{4 \cdot (1 - 0.673^2)} \right]^{-3} \quad (1.5)$$

Sería erróneo concluir que, de la misma forma que 3 y 1 son, en nuestro ejemplo, los valores medios de W_1 y W_2 , 3,16 y 1,48 son las varianzas respectivas; ni lo son, ni tampoco Σ es la matriz de covarianzas. Eso sí, ésta resulta de multiplicar a Σ por una constante k de manera que la transformación equivalente sea

$$\mathbf{W} = \sqrt{k} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{X}/\sqrt{k}) + \mathbf{M}.$$

Para comprobarlo, calculamos las varianzas de W_1 y W_2 mediante las correspondientes integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (w_i - m_i)^2 \cdot f_i(w_i) dw_i$$

²⁸ Página 192.

($i = 1, 2$) en donde f_i es la respectiva función de densidad marginal y m_i la media. Los resultados son:

$$\text{Var}(W_1) = \sigma_1^2 = 6,32; \sigma_1 = 2,514$$

$$\text{Var}(W_2) = \sigma_2^2 = 2,96; \sigma_2 = 1,720$$

Además, calculamos que $\text{Cov}(W_1, W_2) = E[(W_1 - 3) \cdot (W_2 - 1)] \approx 2,91$ ²⁹; por tanto,

$$\rho \approx 2,91 / (2,514 \cdot 1,720) \approx 0,673,$$

valor que coincide con el que figura en (1.5). Por tanto, la matriz de covarianzas Σ_0 y su inversa, son, respectivamente:

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 6,32 & 2,91 \\ 2,91 & 2,96 \end{pmatrix}; \quad (\Sigma_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,289 & -0,284 \\ -0,284 & 0,617 \end{pmatrix}$$

lo que nos dice, por comparación con (1.3), que la constante $k = 2$ (igual a $4 / (4 - 2)$):

$$\Sigma_0 = 2\Sigma$$

Para que la matriz de covarianzas $\Sigma_0 = k\Sigma$ figure en la función de densidad conjunta, la transformación $X \rightarrow W$ ha de ser:

$$X'X = \sqrt{k} \cdot (W - M)' \cdot (\Sigma^{-1} / k) \cdot (W - M) \cdot \sqrt{k} = \sqrt{k} \cdot (W - M)' \cdot \Sigma_0^{-1} \cdot (W - M) \cdot \sqrt{k} =$$

$$\sqrt{2} \cdot (W - M)' \cdot \Sigma_0^{-1} \cdot (W - M) \cdot \sqrt{2}$$

Y por tanto la función de densidad conjunta es

$$f(X) = [1 + \frac{1}{4} (\sqrt{2} \cdot (W - M)' \cdot \Sigma_0^{-1} \cdot (W - M) \cdot \sqrt{2})]^{-2} / (\pi \cdot |\Sigma_0|)^{1/2}$$

²⁹ Obtenemos este resultando integrando el producto $(w_1 - 3)(w_2 - 1)$ por la función de densidad conjunta, [expresión (1.5)].

Esta función expresa la densidad de una t bivalente con matriz de covarianzas Σ_0 , 4 grados de libertad y media (3, 1); su coeficiente de correlación es 0,673 y las desviaciones típicas de los márgenes, 2,514 y 1,720. Es la misma función (1.5), aunque con apariencia algo diferente, porque ahora figura expresamente la matriz de covarianzas.

Embrechts, McNeil y Straumann (2002) señalan varias falacias relacionadas con el coeficiente de correlación. Una de ellas es que éste, junto con las distribuciones marginales, determina la ley de distribución conjunta. Pues bien, esto no es así en general. Sólo es cierto en el caso de las distribuciones elípticas.

4. OTRAS MEDIDAS DE DEPENDENCIA: COEFICIENTES DE SPEARMAN Y DE KENDALL

La condición necesaria y suficiente para que dos o más variables aleatorias continuas sean *independientes* entre sí, es que su función de densidad conjunta sea igual al producto de las funciones de densidad marginal. La cuestión deja de ser tan clara cuando nos preguntamos por la *dependencia*: así como es inmediato determinar si hay o no independencia estadística, medir el grado de dependencia presenta mayor dificultad, porque hay diversas formas de dependencia³⁰ y mientras no se defina ésta no podemos hablar de su medición.³¹

Si X e Y son variables continuas con funciones de distribución $u = F_X(x)$ y $v = F_Y(y)$ respectivamente, obtenemos las variables uniformes $[0,1]$ U y V mediante las transformaciones $U = F_X(X)$, $V = F_Y(Y)$. Pues bien, aquellas propiedades o características de X e Y que siguen presentes en sus transformadas U y V se dice que son invariantes al cambio de escala (*scale invariant*), es decir, no dependen de la distribución marginal de cada una, sino que tales propiedades radican en el comportamiento conjunto o asociación —si la hay— entre X e Y . De ahí la importancia e interés de los tipos de dependencia estadística inmunes a las respectivas

³⁰ R.B. Nelsen, (2006).

³¹ Por ejemplo, el coeficiente de correlación mide la dependencia lineal; los coeficientes ρ_s (de Spearman) y τ (de Kendall) que veremos más adelante, miden la dependencia, entendida como concordancia.

distribuciones marginales. Uno de estos tipos de dependencia es la concordancia. Dos variables X e Y son concordantes si los valores grandes (pequeños) de X tienden a presentarse con valores grandes (pequeños) de Y . Este tipo de dependencia no está en función de la forma en que se distribuyan, por separado, X e Y .

Ejemplo 1.7: Concordancia

Sean 4 pares (X, Y) como los que figuran en las dos primeras columnas del Cuadro 1.1.

X	Y	$N(X)$	$N(Y)$	$E(X)$	$E(Y)$
0,1	0,3	0,54	0,62	0,095	0,26
0,2	0,5	0,58	0,69	0,18	0,39
0,3	0,4	0,62	0,65	0,26	0,33
1,0	1,2	0,84	0,88	0,63	0,70

Cuadro 1.1: La concordancia es invariante a la escala (ejemplo).

Según dichas columnas, de las 6 comparaciones posibles sobre cada pareja (X, Y) y las restantes, hay 5 concordantes y 1 discordante; por ejemplo, la comparación entre $(0,1; 0,3)$ y $(0,2; 0,5)$ es concordante (ambos elementos del primer par son inferiores a sus respectivos del segundo), mientras que entre $(0,2; 0,5)$ y $(0,3; 0,4)$ hay discordancia. Pues bien, si hacemos las mismas comparaciones entre las columnas $N(X) - N(Y)$ y entre $E(X) - E(Y)$ obtenemos el mismo resultado; las columnas N contienen la transformada de la respectiva variable según la función de distribución normal $(0,1)$ y las columnas E , lo mismo para la exponencial de parámetro 1. Es decir, que si adoptamos como concepto de dependencia la concordancia, diremos que la dependencia entre estas dos variables da lugar a 5 comparaciones concordantes y 1 discordante. El coeficiente τ de Kendall, que examinamos más adelante, se basa en este tipo de comparaciones para evaluar el grado de dependencia (entendida como concordancia) entre dos variables. Pero antes nos referiremos al coeficiente de Spearman.

El coeficiente de correlación de Spearman se obtiene de la siguiente forma. Sean X e Y las dos variables cuya dependencia queremos medir; sus respectivas funciones de distribución son F_X y F_Y . Si X e Y fueran perfectamente dependientes (y en

consecuencia, concordantes), al menor valor posible de X correspondería el menor posible de Y , al siguiente de X el siguiente de Y y así sucesivamente hasta los mayores de ambas, que irían igualmente emparejados. Y lo mismo ocurriría con los valores $u = F_X(x)$ y $v = F_Y(y)$. Pues bien, el coeficiente de correlación de rangos de Spearman $\rho_s(X, Y)$ es igual al coeficiente de correlación lineal entre las variables U y V (siendo éstas las transformadas de X e Y según sus respectivas funciones de distribución marginal, es decir: $U = F_X(X)$, $V = F_Y(Y)$) y, por tanto, $\rho_s(X, Y) = \rho(U, V) = 12\text{cov}(U, V)$. El valor de este coeficiente no depende de dichas distribuciones marginales, porque sólo mide el grado de coincidencia en el orden de X y de Y . Así, si tenemos sólo 3 pares (X, Y) el coeficiente será $\rho_s = 1$ tanto en el caso $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ como si los pares son $(1, 2)$, $(20, 3)$, $(21, 4)$.

El coeficiente τ de Kendall aplicado a una muestra, resulta de contar el número de parejas cuyos valores superan al de las demás (pares concordantes), así como el número de las que sólo un elemento de cada par supere a su correspondiente en las restantes (pares discordantes). La diferencia entre ambos números, dividida entre el de las comparaciones posibles, es igual a este coeficiente. En el ejemplo anterior $(2, 3)$ supera a $(1, 2)$; $(3, 4)$ supera a los otros dos pares; luego el primer cómputo (el de los concordantes) da $1 + 2 = 3$. El segundo (discordantes) da cero y $\tau = 3/3 = 1$. Si los pares fueran $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$ el valor del coeficiente sería $\tau = (2 - 1)/3 = 0,333$.

El valor de τ , referido a una muestra de n pares, es, si tenemos en cuenta que para variables continuas el número de pares posibles es la suma de concordantes (c) más discordantes (d):

$$\tau = \frac{c-d}{n(n-1)/2} = \frac{c-d}{c+d}$$

La versión poblacional del coeficiente es:

$$\tau = \text{Prob}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \text{Prob}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

en donde (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) son dos pares independientes de la variable bivalente (X, Y) .

Dos variables aleatorias (X, Y) que están asociadas de tal manera que para cualesquiera (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) , $(X_1 < X_2) \Rightarrow (Y_1 < Y_2)$, son comonotónicas. Si, por el contrario $(X_1 < X_2) \Rightarrow (Y_1 > Y_2)$, son contra-comonotónicas. La comonotonicidad implica, por tanto, que $\tau = \rho_s = 1$, mientras que el caso opuesto significa que ambos coeficientes valen -1 . Es decir, si X e Y son concordantes, son comonotónicas y ambas medidas son iguales a 1. Y lo contrario ocurre si son discordantes.

Veamos ahora algunas propiedades de las medidas de Spearman y Kendall.

Primera: Al igual que en el coeficiente de correlación lineal, existe simetría, es decir, $\rho_s(X, Y) = \rho_s(Y, X)$; $\tau(X, Y) = \tau(Y, X)$.

Segunda: Según acabamos de ver, ambas medidas están comprendidas entre -1 y $+1$.

Tercera: Si aplicamos a X y a Y sendas transformaciones T_1 y T_2 estrictamente crecientes, los coeficientes ρ_s y τ de las variables $T_1(X)$ y $T_2(Y)$ no se alteran. Esto es así, dado que los rangos de $T_1(X)$ coinciden con los de X y los de $T_2(Y)$ con los de Y , al ser ambas transformaciones monótonas crecientes. Si la transformación $T_1(X)$ es monótona decreciente,

$$\rho_s(T_1(X), Y) = -\rho_s(X, Y); \tau(T_1(X), Y) = -\tau(X, Y).$$

Cuarta: La independencia entre X e Y implica la nulidad de ambos coeficientes. En ρ_s esto es evidente, porque $F_X(X)$ y $F_Y(Y)$ serán en tal caso variables independientes uniformemente distribuidas en $[0, 1]$ y su coeficiente de correlación lineal será nulo. En el caso de la τ de Kendall, la independencia implica que $\text{Prob}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) = \text{Prob}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0) = 1/2$, por tanto $\tau = 0$.

Observemos que la última propiedad no se extiende al caso opuesto: es decir, que $\rho_s = \tau = 0$ no implica independencia.

Es más, no existe medida de dependencia $\delta(X, Y)$ que cumpla simultáneamente estas dos propiedades:

a) $(\delta(X, Y) = 0) \Rightarrow$ independencia entre X e Y .

b) Para $T(X)$ monótona decreciente, $\delta(T(X), Y) = -\delta(X, Y)$.

En efecto, ambas propiedades son contradictorias o incompatibles entre sí, según puede demostrarse de la siguiente forma³². Sea (X, Y) un vector aleatorio distribuido uniformemente en la circunferencia de radio uno y centro en $(0,0)$. Por tanto, $(X, Y) = (\cos\Phi, \text{sen}\Phi)$, siendo Φ una variable uniforme $(0, 2\pi)$. A lo largo de esa circunferencia, todo punto (X, Y) tiene, por tanto, la misma densidad de probabilidad. Por tanto, $\delta(X, Y) = \delta(-X, Y)$. Pero si aplicamos ahora la transformación monótona decreciente $T(X) = -X$ y suponemos que la anterior propiedad (b) se cumple, tendremos que $\delta(-X, Y) = -\delta(X, Y)$. Resulta así que ha de ser $\delta(X, Y) = \delta(-X, Y) = -\delta(X, Y)$, lo cual sólo puede cumplirse si $\delta(X, Y) = 0$. Y, sin embargo, X e Y son dependientes, puesto que $X^2 + Y^2 = 1$.

Veamos ahora la relación existente entre el coeficiente τ de dos variables (X, Y) y la función de distribución conjunta de las mismas $F(x, y)$. Dicha relación es:

$$\tau = 4 \iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) \cdot dF(x, y) - 1. \quad (1.6)$$

Demostración: Si X e Y son variables aleatorias continuas, con márgenes F_X y F_Y , entonces, para dos pares aleatorios (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) ,

$$\tau = 2 \cdot \text{Prob}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1 = 4 \cdot \text{Prob}[(X_1 < X_2) \wedge (Y_1 < Y_2)] - 1$$

ya que $\text{Prob}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) + \text{Prob}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0) = 1$; además, el producto positivo puede obtenerse tanto si $X_1, Y_1 < X_2, Y_2$ como si $X_1, Y_1 > X_2, Y_2$.

Por tanto,

$$\tau = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Prob}[(X_1 < x) \wedge (Y_1 < y)] \cdot dF(x, y) - 1 = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) \cdot dF(x, y) - 1$$

Tendremos oportunidad de utilizar más adelante esta relación. Para el coeficiente ρ_S existe una equivalencia parecida, en función de la cópula, que veremos en el Capítulo siguiente.

³² Embrechts, McNeil y Straumann, (2002).

II. CÓPULAS

1. ALGUNAS IDEAS INTUITIVAS SOBRE LAS CÓPULAS

Resumir en un único coeficiente la dependencia entre variables aleatorias no es satisfactorio. Sólo si la distribución conjunta es elíptica el coeficiente de correlación mide el grado de dependencia³³; y tampoco la correlación de rangos es suficiente, porque sus coeficientes (τ de Kendall y ρ de Spearman) dan idea de la comonotonidad, que es una forma de dependencia entre muchas. Lo mismo cabe decir del coeficiente de dependencia en la cola de la distribución (*tail dependence*), que se refiere a otro modo de considerar a la dependencia y que veremos en el Epígrafe 3 de este Capítulo.

Si no es suficiente confiar la medida de la dependencia a un solo número, no queda más solución que buscar la fórmula que nos describa dicha dependencia, es decir, determinar la estructura de la misma entre las variables. Eso precisamente es lo que hace la cópula.

Sea $F(x_1, x_2, \dots, x_d)$ la función de distribución conjunta de d variables continuas, X_1, X_2, \dots, X_d . Esta función describe el comportamiento conjunto de dichas variables y así, nos permite obtener la probabilidad de que una variable no supere cierto valor, con independencia del que tomen las otras (distribución marginal) o conociendo el valor asumido por éstas (distribución condicionada) o, por último, que las otras tomen valores inferiores o superiores a los que se especifiquen. Es decir, que dentro de la función $F(x_1, x_2, \dots, x_d)$ hay dos tipos de información:

- a) Sobre el comportamiento de cada variable considerada aisladamente de las demás: $F_i(x_i)$ = distribución marginal.

³³ Con la cautela de que sólo en la distribución normal multivariante $\rho_{ij} = 0$ significa independencia entre X_i y X_j según vimos en el Capítulo anterior.

- b) Sobre el comportamiento conjunto de las variables. Este comportamiento radica en la estructura de dependencia entre las variables, la cual viene modelizada por la cópula: “la naturaleza no paramétrica de la dependencia entre dos variables aleatorias es expresada por la cópula”.³⁴

Si prescindimos de todo rigor y aceptamos un lenguaje simbólico e intuitivo, diríamos que, para obtener dicha cópula hay que analizar la función de distribución conjunta —que suponemos continua— para “eliminar” de la misma las d distribuciones marginales que encierra y quede tan sólo el restante elemento que hay en ella, que es la cópula.

Llamemos a las d distribuciones marginales continuas

$$u_i = F_i(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, d)$$

La forma de eliminar de la distribución conjunta el efecto que en ella produce que X_i se distribuya según la función $F_i(x_i)$ es “deshacer” esta transformación de x_i a u_i o viceversa, y sustituir a x_i poniendo en su lugar a la transformada inversa $F_i^{-1}(u_i)$. Si hacemos lo mismo con todas las variables obtendremos una nueva función que no dependerá de las distribuciones marginales (aunque la inversa de éstas pueda aparecer en su expresión³⁵) sino que contiene sólo la información referente a cómo dependen entre sí las d variables $X_1 \dots X_d$.

Para ilustrar lo dicho proponemos el Ejemplo 2.1.

Ejemplo 2.1: Si de una función de distribución conjunta “eliminamos” a las marginales, queda la estructura de dependencia o cópula

Supongamos la función de distribución bivalente

$$F(x,y) = [1 - \exp(-\lambda_1 x)] \cdot [1 - \exp(-\lambda_2 y)] \quad (2.1)$$

³⁴ Nelsen, (2006), página 52. Es decir, la cópula es un concepto ajeno o distinto a la distribución marginal y contiene la ley de dependencia entre las variables intervinientes en la distribución multivariante.

³⁵ Observemos que $F_i^{-1}(u_i)$ se introduce en la función de distribución conjunta para anular o deshacer el contenido de ésta en cuanto a la distribución marginal de x_i .

Las funciones de distribución marginal de X e Y son, respectivamente:

$$\begin{aligned} u &= F_X(x) = 1 - \exp[-\lambda_1 x] \\ v &= F_Y(y) = 1 - \exp[-\lambda_2 y] \end{aligned}$$

Y las transformadas inversas,

$$\begin{aligned} x &= F_X^{-1}(u) = -\text{LN}(1-u)/\lambda_1 \\ y &= F_Y^{-1}(v) = -\text{LN}(1-v)/\lambda_2 \end{aligned}$$

Al sustituir x e y en (2.1) obtenemos una función de (u,v) , es decir, la cópula, que en este caso toma la forma

$$C(u,v) = u.v$$

que es la cópula de independencia. Esta cópula es común a cualesquiera variables que sean independientes, sean exponenciales, normales, etcétera (estamos, evidentemente, en el caso $d=2$).

Es decir, el paso de la función de distribución conjunta a la cópula es el siguiente:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_d^{-1}(u_d)) = C(u_1, u_2, \dots, u_d)$$

La función $C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ o cópula se llama así porque conecta o acopla las distribuciones marginales $u_i = F_i(x_i)$ a la estructura de dependencia, en que la cópula consiste, para llegar a la función de distribución conjunta. La cópula es una función de distribución de variables uniformes $(0,1)$, U_1, \dots, U_d y convierte cualquier punto del *cubo* de lado unitario en el espacio de d dimensiones, en un número real del intervalo $[0, 1]$. Es decir, $[0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$. En efecto, tengamos en cuenta que las $U_i = F_i(x_i)$ son variables uniformes $(0,1)$ y que la transformación $u_i = F_i(x_i)$ es monótona creciente:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_d) &= \text{Prob}[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_d \leq x_d] = \\ \text{Prob}[F_1^{-1}(U_1) \leq F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(U_2) \leq F_2^{-1}(u_2), \dots, F_d^{-1}(U_d) \leq F_d^{-1}(u_d)] &= \\ \text{Prob}[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_d \leq u_d] &= C(u_1, u_2, \dots, u_d) \end{aligned}$$

Veamos ahora dos ejemplos especialmente importantes.

Ejemplo 2.2: La cópula gaussiana de $d = 2$ dimensiones

Apliquemos la transformación $x_i = F_i^{-1}\{u_i\}$ a la función de distribución normal bivalente $\Phi(x,y)$:

$$\begin{aligned} \Phi(x,y) &= \Phi(\Phi_X^{-1}(u), \Phi_Y^{-1}(v)) = \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi_X^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi_Y^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} dx dy = C_\rho(u,v) \quad (2.2a) \end{aligned}$$

Φ_X y Φ_Y representan las distribuciones marginales de X y Y (ambas $N(0,1)$). La función $\Phi(x,y)$, además de contener a las dos marginales anteriores, gobierna la dependencia entre X y Y . Para representar gráficamente a la estructura de dependencia optamos por la función de densidad de la cópula; dicha función, $c(u,v)$ es:

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x \partial y} \frac{dx dy}{du dv} = \varphi(x,y) \cdot \frac{1}{\varphi(x)\varphi(y)} \quad (2.2b)$$

Si, por ejemplo, queremos obtener la densidad de la cópula en el punto $u = 0,6$; $v = 0,3$, suponiendo que el valor del parámetro ρ sea 0,5, no tenemos más que calcular las respectivas transformadas inversas de ambos valores según las distribuciones marginales, es decir:

$$\begin{aligned} x &= \Phi^{-1}(0,6) = 0,253 \\ y &= \Phi^{-1}(0,3) = -0,524 \end{aligned}$$

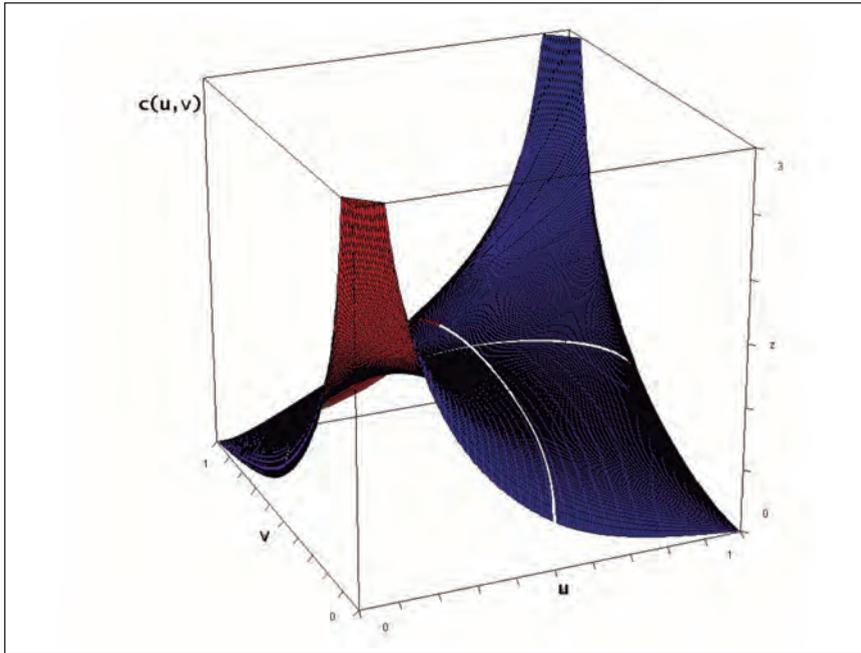


Figura 2.1: Función de densidad de la cópula gaussiana con parámetro $\rho = 0,5$.

A continuación sustituimos estos valores en (2.2b) (en donde introducimos el valor $\rho = 0,5$ en la función de densidad conjunta $\phi(x,y)$) y obtenemos $c(0,6; 0,3) = 0,997$. En la Figura 2.1 se representa la función de densidad de la cópula gaussiana para dicho parámetro $\rho = 0,5$.

Es fácil darse cuenta, a la vista de la Figura 2.1 (y también de la 2.2, en que se representa la densidad de la cópula t) que la cópula gaussiana (y la t), que proceden de distribuciones elípticas, *no son* distribuciones elípticas.

Ejemplo 2.3: La cópula t bivalente

Se obtiene por un procedimiento totalmente análogo al que acabamos de ver para la cópula gaussiana. La cópula es, llamando $t(\cdot)$ a la función de distribución t univariante:

$$C_{n,\rho}(u,v) = \int_{-\infty}^{t^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t^{-1}(v)} \frac{1}{\pi \cdot n \cdot \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \left(1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{n(1-\rho^2)}\right)^{-((n+2)/2)} dx dy$$

y su función de densidad,

$$c_{n,\rho} = \tau_{n,\rho}(x,y) \cdot \frac{1}{\tau(x) \cdot \tau(y)} \quad (2.3)$$

en donde $\tau_{n,\rho}(x,y)$ representa la función de densidad t bivalente con n grados de libertad y coeficiente de correlación ρ , mientras que $\tau(x)$ y $\tau(y)$ son las funciones de densidad marginal t de Student, con n grados de libertad.

Si, por ejemplo, hacemos $n = 3$ y $\rho = 0,5$ podemos calcular el valor de la densidad de la cópula en cualquier punto de $[0, 1]^2$. Consideramos, como antes, el punto $u = 0,6$; $v = 0,3$. Con estos valores resulta:

$$\begin{aligned} t_3^{-1}(0,6) &= 0,277 \\ t_3^{-1}(0,3) &= -0,584 \end{aligned}$$

y al sustituir tales valores en (2.3) se obtiene:

$$c_{3,0,5}(0,6; 0,3) = 1,006$$

En la Figura 2.2 se representa la función de densidad de la cópula t con los parámetros especificados.

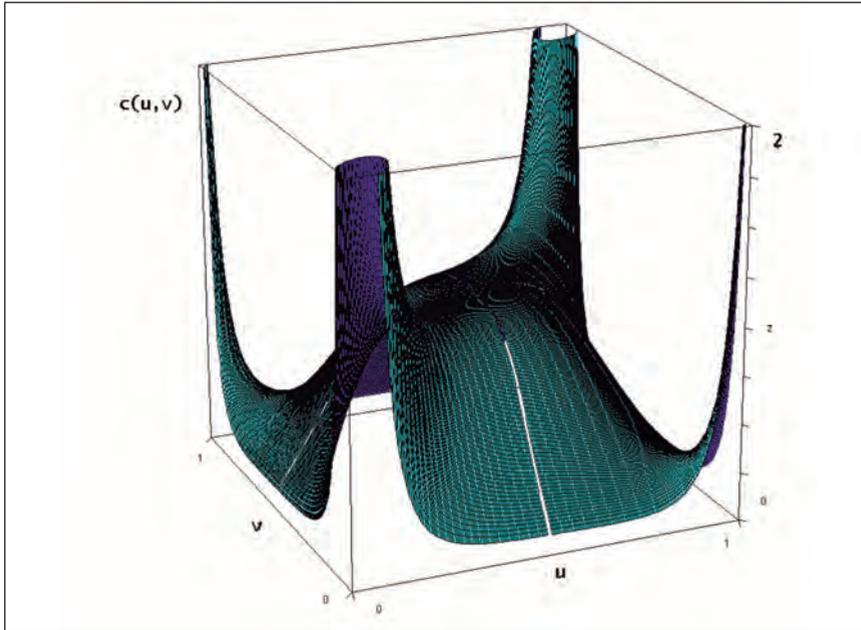


Figura 2.2: Función de densidad de la cópula t con parámetros $n = 3$ y $\rho = 0,5$.

Hacemos dos observaciones. La primera, resumen de lo anterior, es que la función cópula $C(u,v)$ está implícita en la función de distribución $F(x,y)$ como lo están también las distribuciones marginales. Una y otras están imbricadas en $F(x,y)$ y la idea es separarlas, aislar una de las otras, lo que nos permite obtener la cópula $C(u,v)$. Y acoplando o uniendo a la cópula las distribuciones marginales, volvemos a la función de distribución original:

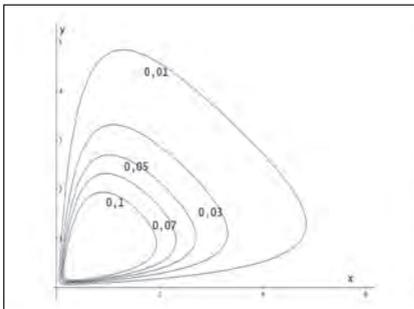
$$C(u,v) = C(F_x(x), F_y(y)) = F(x,y)$$

Este resultado nos lleva a la segunda observación. Si en lugar de sustituir u y v por sus respectivas funciones de distribución marginal originales —con lo que volveríamos a la función bivalente de partida $F(x,y)$ — acoplamos otras funciones de distribución distintas, como $\Psi_x(x)$ y $\Psi_y(y)$ obtendremos **otra** función de distribución bivalente $\Psi(x,y)$:

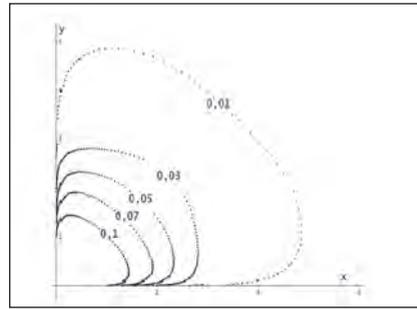
$$C(u,v) = C(\Psi_x(x), \Psi_y(y)) = \Psi(x,y).$$

Esta nueva función de distribución tiene la misma cópula que la bivalente original $F(x,y)$ pero nuevos márgenes, $\Psi_x(x)$ y $\Psi_y(y)$. La posibilidad de combinar una estructura de dependencia con distintos márgenes o viceversa, hace de las cópulas un instrumento generador de gran número de modelos multivariantes, para adaptarse a la realidad lo mejor posible. En el Epígrafe 7 de este mismo Capítulo desarrollaremos este punto, pero ahora propondremos unos ejemplos en $d=2$ dimensiones, de cómo la separación entre estructura de dependencia o cópula, por un lado y distribuciones marginales, por otro, permite unir diversos modelos de una y otras para dar lugar a una amplia variedad de distribuciones multivariantes.

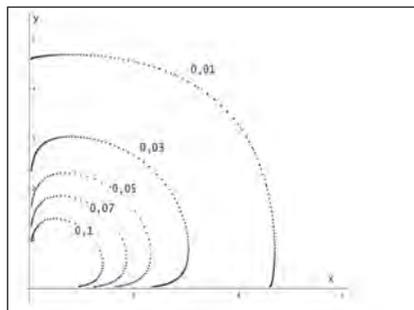
Ejemplo 2.4: Distribuciones resultantes de combinar distintas cópulas y márgenes



(a): Cópula gaussiana con $\rho=0,4$; márgenes lognormales con media y desviación típica 2



(b): Cópula gaussiana con $\rho=0,4$; márgenes exponenciales con media y desviación típica 2



(c): Cópula t con $\rho=0,4$ y $\nu=5$; márgenes exponenciales con media y desviación típica

Figura 2.3: Representación de varias funciones de densidad mediante curvas de nivel.

En resumen:

(a) y (b) tienen la misma cópula, pero distintos márgenes.

(b) y (c) tienen distinta cópula, pero iguales márgenes.

Elegimos una cópula gaussiana con parámetro $\rho = 0,4$ y la vinculamos con márgenes lognormales con medias y desviaciones típicas iguales a 2, tanto para X como para Y . Ello genera la función de densidad representada en la Figura 2.3(a) por medio de sus curvas de nivel.

En la parte (b) de la Figura 2.3 tenemos la función de densidad de la distribución que difiere de la anterior sólo en los márgenes, que ahora son exponenciales con media y desviación típica 2.

Por último, en (c) se representa la densidad de una distribución cuya cópula es t de Student con parámetro $\rho = 0,4$ y $\nu = 5$ grados de libertad; las distribuciones marginales son exponenciales de iguales características que en (b).

Las curvas de nivel representadas en la Figura 2.3 manifiestan las marcadas diferencias entre las distintas distribuciones resultantes de las combinaciones que hemos llevado a cabo.

2. DEFINICIÓN DE CÓPULA. PROPIEDADES DE LAS CÓPULAS

Una cópula $C(\mathbf{u}) = C(u_1, u_2, \dots, u_n)$ es una función de distribución de n variables aleatorias uniformes $[0,1]$. Por tanto, a cada vector en $[0,1]^n$ hace corresponder un número en $[0,1]$. Para que $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$ sea, en estas condiciones, una función de distribución, ha de reunir los requisitos siguientes:

1. Ser no-decreciente en cada uno de sus componentes u_i ³⁶.
2. La distribución marginal de U_i que es $C(1, 1, \dots, u_i, \dots, 1)$, equivale a u_i . Por otra parte $C(1,1, \dots, 1) = 1$ como no podía menos de suceder (hacemos $u_i=1$).
3. La función C es n-creciente. En general, se dice que una función $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es n-creciente si, para cualquier hiper-rectángulo $[x_1^{(1)}, x_1^{(2)}]. [x_2^{(1)}, x_2^{(2)}]. \dots [x_n^{(1)}, x_n^{(2)}]$ (siendo $x_i^{(1)} \leq x_i^{(2)}$ para $i=1,2, \dots, n$) cuyos vértices se encuentran en el dominio de definición de F se verifica que:

$$F[x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots, x_{n-1}^{(2)}, x_n^{(2)}] - F[x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots, x_{n-1}^{(2)}, x_n^{(2)}] - F[x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_3^{(2)}, \dots, x_{n-1}^{(2)}, x_n^{(2)}] - F[x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(1)}, \dots, x_{n-1}^{(2)}, x_n^{(2)}] - \dots - F[x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots, x_{n-1}^{(2)}, x_n^{(1)}] + F[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(2)}, \dots, x_{n-1}^{(2)}, x_n^{(2)}] + F[x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_{n-1}^{(2)}, x_n^{(2)}] + \dots + F[x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots, x_{n-1}^{(1)}, x_n^{(1)}] - \dots \pm F[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_{n-1}^{(1)}, x_n^{(1)}] \geq 0.$$

Observemos que cada término de la anterior expresión lleva el signo más o menos según que el número de veces que figura el extremo inferior de un intervalo (es decir, $x_i^{(1)}$) sea par o impar. En seguida veremos una aplicación a nuestro caso.

En el caso de las cópulas la propiedad en cuestión viene exigida por el hecho de que ha de verificarse, para $a^{(i)} \leq b^{(i)}$, que

$$\text{Prob}[U^{(1)} \in [a^{(1)}, b^{(1)}]; U^{(2)} \in [a^{(2)}, b^{(2)}]; \dots; U^{(d)} \in [a^{(d)}, b^{(d)}]] \geq 0$$

Veamos lo anterior en dos dimensiones, para lo que nos valdremos de la Figura 2.4.

$$\text{Prob(D)} = C(b,d) - C(a,c) - \text{Prob(B)} - \text{Prob(A)}$$

$$\text{Prob(B)} = C(a,d) - C(a,c)$$

³⁶ Puede sustituirse esta primera propiedad por la de ser $C(0, \dots, 0, u_i, 0, \dots, 0) = 0$. El resultado es equivalente. Para el caso bidimensional, tenemos que, al ser $C(1, v) = v$ (según exige la Condición 2ª), $C(1, 0) = C(0, 1) = 0$ y por ser C no decreciente en u y en v resulta que $C(u, 0)$ y $C(0, v)$ han de ser cero necesariamente (al ser $u, v \leq 1$). Y, recíprocamente, para el rectángulo $[0, u] \times [v, v+k]$ ($k > 0$), resulta que $C(u, v+k) - C(0, v+k) - C(u, v) + C(0, v) \geq 0$ o bien $C(u, v+k) - C(u, v) \geq 0$ lo que demuestra que $C(u, v)$ es no-decreciente en v y lo mismo para u .

$$\text{Prob}(A) = C(b,c) - C(a,c).$$

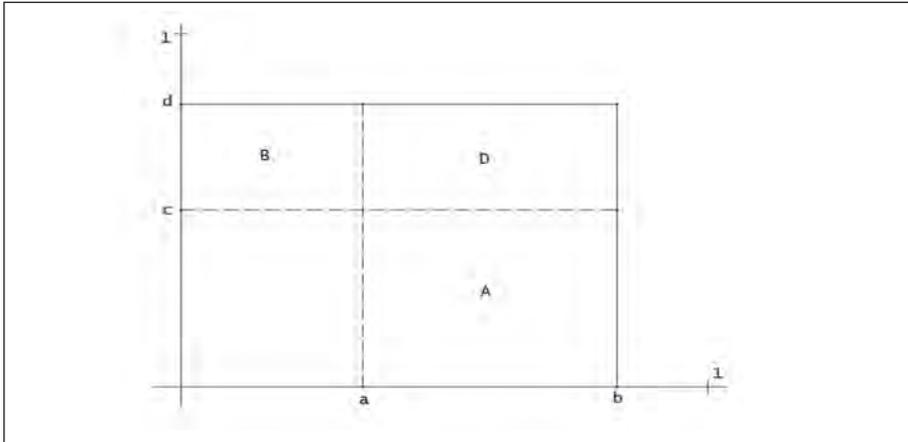


Figura 2.4.

Es decir, que la función $C(u,v)$ es “2-creciente”³⁷ y ello puede expresarse así:

$$\begin{aligned} \text{Prob}(D) &= C(b,d) - C(a,c) - C(a,d) + C(a,c) - C(b,c) + C(a,c) = \\ &C(b,d) - C(a,d) + C(a,c) - C(b,c) \geq 0 \end{aligned}$$

En la teoría de cópulas es importante el **teorema de Sklar**, formulado en 1959³⁸. Afirma que si $F(x_1, x_2, \dots, x_d)$ es una distribución con marginales continuas F_1, F_2, \dots, F_d entonces existe una única cópula $C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)) = F(x_1, x_2, \dots, x_d)$. Y recíprocamente, si C es una cópula y las F_i ($i = 1, 2, \dots, d$) son funciones de distribución continuas, entonces existe una única función $F(x_1, x_2, \dots, x_d)$ tal que se cumple la identidad $C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)) = F(x_1, x_2, \dots, x_d)$. Dicha función $F(x_1, x_2, \dots, x_d)$ es una función de distribución multivariante con los márgenes F_i (si las variables no son continuas la cópula no es única).

Veamos algunas propiedades de las cópulas:

1ª) Invariación o invarianza: Sea $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_d\}'$ un vector de variables aleatorias

³⁷ En el epígrafe 6 volveremos sobre este concepto e introduciremos el de C-medida.

³⁸ La demostración de este teorema puede verse en R. Nelsen, (2006).

continuas cuya cópula es $C(u_1, u_2, \dots, u_d)$. Si aplicamos a cada variable X_i una transformación T_i monótona creciente, las variables $Y_i = T_i(X_i)$ tienen la misma cópula $C(u_1, u_2, \dots, u_d)$.

Para demostrarlo empecemos por llamar C_Y a la cópula de las variables transformadas Y_i , mientras que F_i y G_i son las distribuciones marginales de las X_i y de las Y_i respectivamente.

$$C_Y[G_1(x_1) \dots G_d(x_d)] = \text{Prob}[Y_1 \leq x_1 \dots Y_d \leq x_d] =$$

$$\text{Prob}[T_1^{-1}(Y_1) \leq T_1^{-1}(x_1) \dots T_d^{-1}(Y_d) \leq T_d^{-1}(x_d)]$$

$$= \text{Prob}[X_1 \leq T_1^{-1}(x_1) \dots X_d \leq T_d^{-1}(x_d)] =$$

$$C[F_1(T_1^{-1}(x_1)) \dots F_d(T_d^{-1}(x_d))].$$

Pero al ser las T_i funciones monótonas crecientes,

$$G_i(x_i) = \text{Prob}[Y_i \leq x_i] = \text{Prob}[T_i(X_i) \leq x_i] = \text{Prob}[X_i \leq T_i^{-1}(x_i)] = F_i[T_i^{-1}(x_i)]$$

y por tanto hemos demostrado que

$$C_Y[G_1(x_1), G_2(x_2), \dots, G_d(x_d)] = C[G_1(x_1), G_2(x_2), \dots, G_d(x_d)].$$

Los argumentos $G_i(x_i)$ pueden tomar cualquier valor comprendido en $[0, 1]$ al ser continuas las variables X_i .

Esta propiedad significa que la estructura de dependencia no se ve alterada cuando aplicamos a las variables sendas transformaciones crecientes. O, en otras palabras, que la forma en que las variables "se mueven" en la misma dirección depende sólo de la cópula. No está en función de las distribuciones marginales, cuyo

efecto en el seno de la distribución conjunta consiste en transformar a las variables uniformes U_1, U_2, \dots, U_d según la respectiva función monótona creciente $U_i = F_i(X_i)$. El coeficiente de correlación depende de la cópula, pero también de las distribuciones marginales. En cambio, los coeficientes τ de Kendall y ρ de Spearman están en función sólo de la cópula.

Ejemplo 2.5: Efecto de una transformación monótona creciente sobre la cópula de una variable bivalente

Si sobre dos variables X_1, X_2 , con función de distribución normal bivalente de parámetro ρ hacemos la transformación $Y_i = \exp(\sigma_i X_i + \mu_i)$ obtenemos una nueva distribución conjunta cuyos márgenes son log-normales. La cópula de las variables $\{Y_1, Y_2\}$ sigue siendo la gaussiana con parámetro ρ . Observación: El coeficiente de correlación $\rho(Y_1, Y_2) \neq \rho$ porque la transformación $X_i \rightarrow Y_i$ no es lineal.

Sean ahora dos variables X_1 y X_2 cuya cópula es gaussiana de parámetro ρ ; sus distribuciones marginales son $F_1(x_1)$ y $F_2(x_2)$. El coeficiente de correlación entre ambas, es decir, $\rho(X, Y)$ no es ρ (salvo que dichas distribuciones marginales se identificaran con la normal). En estas condiciones, existe una fórmula que relaciona el coeficiente τ entre X e Y , y el parámetro ρ de su cópula; dicha fórmula es:

$$\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi} \arcsen(\rho) \quad (2.4)$$

Hay una relación análoga para el coeficiente de Spearman:

$$\rho_S(X_1, X_2) = \frac{6}{\pi} \arcsen(0,5\rho).^{39}$$

³⁹ La demostración de estas fórmulas puede verse en McNeil, Frey y Embrechts, (2005), página 215.

Ejemplo 2.6: Variable normal bivalente a la que se aplica transformación $Y = \Phi(X)$. Significado del parámetro ρ

Si en la distribución normal bivalente $\Phi_\rho(X_1, X_2)$ hacemos la transformación monótona creciente $Y_i = \Phi(X_i)$ (para $i = 1, 2$ y siendo Φ la función de distribución normal univariante) obtenemos un par de variables Y_1, Y_2 cuya cópula es también gaussiana. La nueva función de distribución conjunta $G(y_1, y_2)$ coincidirá con dicha cópula gaussiana; el parámetro ρ de ésta no significa el coeficiente de correlación entre las variables $Y_1 \equiv U, Y_2 \equiv V$, sino entre X_1 y X_2 (la transformación $Y_i = \Phi(X_i)$ tampoco es lineal y, por tanto, implica una alteración del coeficiente de correlación lineal). El coeficiente τ entre U y V es en este caso:

$$\tau(U, V) = \frac{2}{\pi} \arcsen(\rho)$$

2ª) Densidad de la cópula: Vimos en el epígrafe anterior cómo se obtiene en los casos particulares allí examinados. En general,

$$C(u_1, \dots, u_n) = C[F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)] = F(x_1, \dots, x_n)$$

y la función de densidad de la cópula será:

$$c(u_1, \dots, u_n) = \partial^n C(u_1, \dots, u_n) / (\partial u_1 \dots \partial u_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \frac{dx_1}{du_1} \frac{dx_2}{du_2} \dots \frac{dx_n}{du_n} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)}$$

en donde f y f_i representan las correspondientes funciones de densidad conjunta y marginales, respectivamente.

3ª) Probabilidad condicionada: A partir de una cópula $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$ podemos obtener la distribución condicionada a los valores de una o más variables. En el caso bivalente,

$$C(v \mid U=u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Prob}(u < U \leq u+h; V \leq v)}{\text{Prob}(u < U \leq u+h)} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(u+h; v) - C(u; v)}{h} = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \quad (2.5)$$

Para obtener el anterior resultado tenemos en cuenta que la densidad de U es constante e igual a 1 en $[0, 1]$, al ser variable uniforme $(0,1)$.

En general,

$$C[u_1 | u_2, \dots, u_n] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Prob}[u_1 \leq U_1; u_2 < U_2 \leq u_2 + h; \dots; u_n < U_n \leq u_n + h]}{\text{Prob}[u_2 < U_2 \leq u_2 + h; \dots; u_n < U_n \leq u_n + h]}$$

Cuando h tiende a cero, el numerador, dividido entre h^{n-1} , tiende a

$$\frac{\partial^{n-1} C(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_2 \dots \partial u_n}$$

Por otra parte, el límite del denominador dividido también entre h^{n-1} , es la función de densidad conjunta de las variables U_2, \dots, U_n ; si llamamos $C_1(u_2, u_3, \dots, u_n)$ a la función de distribución marginal de dichas variables, la correspondiente función de densidad conjunta será

$$\frac{\partial^{n-1} C_1(u_2, \dots, u_n)}{\partial u_2 \dots \partial u_n}$$

Por tanto, la función de distribución de u_1 , condicionada a las restantes $n-1$ variables, es:

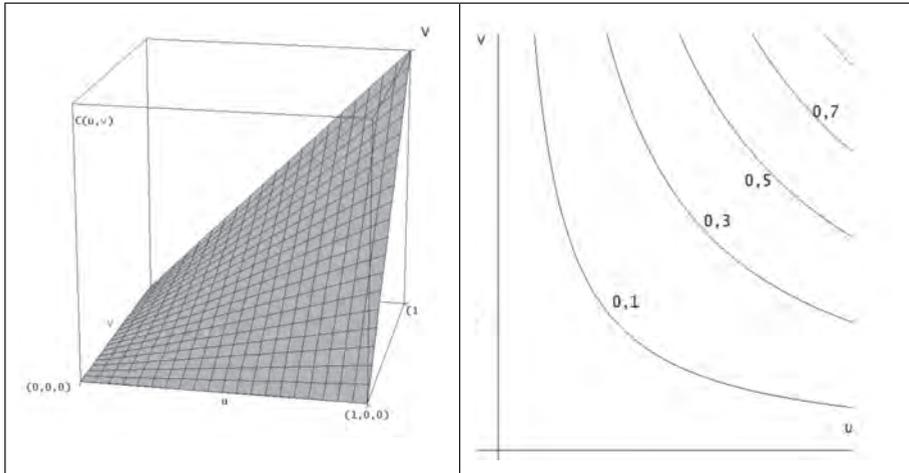
$$C(u_1 | u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial^{n-1} C(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_2 \dots \partial u_n} / \frac{\partial^{n-1} C_1(u_2, \dots, u_n)}{\partial u_2 \dots \partial u_n} \quad (2.6)$$

4ª) Cópula de independencia: Representa el supuesto en que las variables X e Y son entre sí independientes y su expresión es $C(u, v) = u \cdot v$. Suele designarse con la letra I . En las Figuras 2.5(a) 2.5(b) se ve la forma de esta cópula tanto en tres dimensiones (parte a) como mediante curvas de nivel (b).

5ª) Cópulas máxima y mínima: Así como las medidas de dependencia tienen límites máximo y mínimo (tal ocurre con el coeficiente de correlación, con la τ de Kendall, etc.), nos preguntamos si en la función de dependencia o cópula ocurre algo similar. La respuesta es positiva y la dan las cotas de Fréchet-Hoeffding, que son aplicables a las funciones de distribución multivariante en general y por lo tanto también a las cópulas. Supongamos dos variables aleatorias uniformes $(0,1)$, U y V ; el caso extremo de dependencia se da cuando ambas variables toman

siempre el mismo valor, es decir, $U = V$. En tal caso $\text{Prob}[U \leq u; V \leq v] = \text{Prob}[U \leq u; U \leq v] = \min(u, v)$, que es el valor máximo posible de la función de distribución para el punto (u, v) . Si $V = 1 - U$ tenemos el caso opuesto:

$$\text{Prob}[U \leq u; V \leq v] = \text{Prob}[U \leq u; U > 1 - v] = \text{Prob}[1 - v < U \leq u] = u - 1 + v,$$



(a): Superficie en 3 dimensiones

(b): Curvas de nivel

Figura 2.5: Cópula de independencia.

El límite inferior es, por tanto, $u + v - 1$, sin que pueda ser negativo. De ahí que las cotas sean:

$$\max [(u + v - 1), 0] \leq C(u, v) \leq \min(u, v).$$

Puede comprobarse fácilmente que en el caso bidimensional a que nos referimos ambas cotas son, a su vez, cópulas, porque cumplen las propiedades necesarias para ello⁴⁰. Se acostumbra a designarlas por $W(u, v)$ y $M(u, v)$ (cópula mínima y máxima, respectivamente) y sus gráficos están en las Figuras 2.6(a) y 2.6(b). Las Figuras 2.7(a) y 2.7(b) representan las curvas de nivel de estas cópulas.

⁴⁰ Véase el comienzo de este epígrafe.

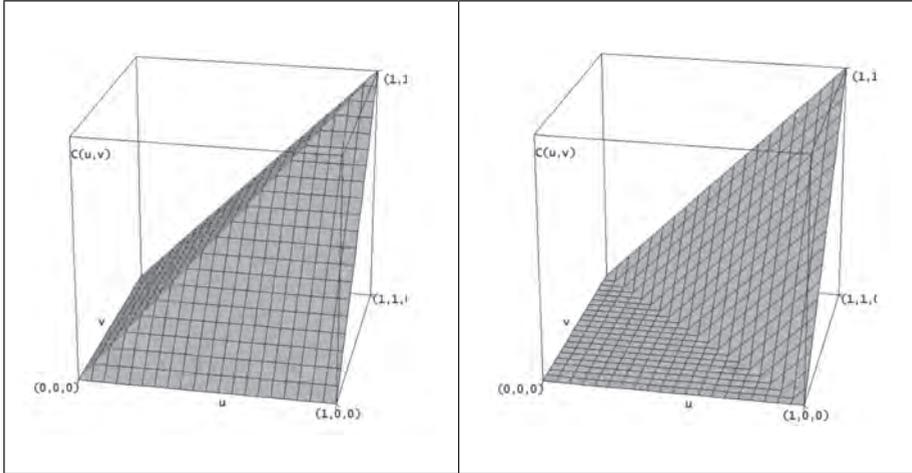


Figura 2.6(a): Cópula máxima.

Figura 2.6(b): Cópula mínima.

La densidad de M está contenida a lo largo de la diagonal $(0,0) - (1,1)$ y es constante e igual a $\sqrt{2}/2$; la de W se encuentra en la diagonal $(1,0) - (0,1)$ y tiene el mismo valor.

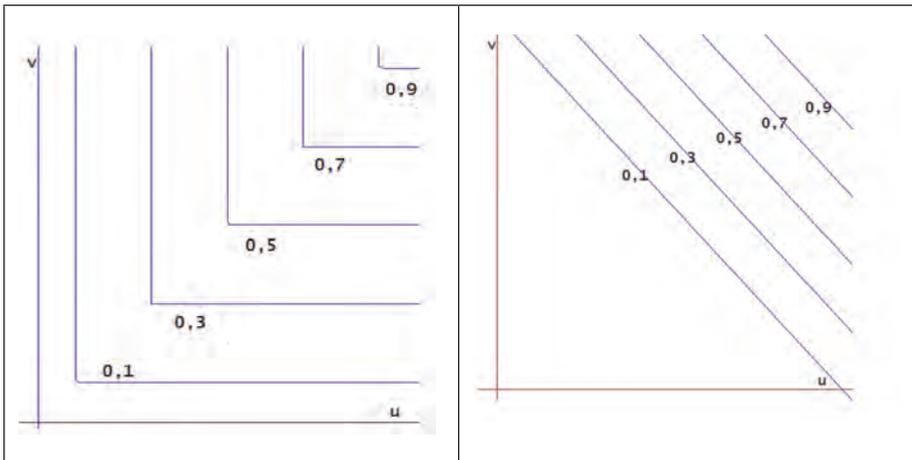


Figura 2.7(a): Cópula máxima, curvas de nivel

Figura 2.7(b): Cópula mínima, curvas de nivel

La cópula $M(u, v)$ significa la dependencia total entre dos variables X e Y , entendida dicha dependencia en el sentido de comonotonidad⁴¹, mientras que $W(u, v)$ representa la contramonotonidad: Cuando X es grande, Y es pequeña y viceversa.

En el caso pluridimensional las cotas de Fréchet-Hoeffding son:

$$\max\{u_1 + \dots + u_d - d + 1, 0\} \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq \min\{u_1, \dots, u_d\}$$

Si $d > 2$ la cota inferior no es una cópula⁴².

3. CÓPULAS Y DEPENDENCIA

Una vez que hemos introducido el concepto de cópula, estamos en condiciones de volver a examinar el tema de la dependencia entre variables aleatorias contando con este nuevo y útil instrumento. La cópula es la expresión de la estructura de dependencia entre variables y por tanto no es sorprendente que, medidas de dependencia como el ρ_s de Spearman, el τ de Kendall u otras que veremos más adelante, estén sólo en función de la cópula y sean, por tanto, “inmunes” a la forma que tengan las distribuciones marginales de las variables. Es verdad que el coeficiente de correlación de Pearson se aparta de esta norma, pero ello se debe a que el tipo de dependencia que mide es la dependencia lineal y en ella es determinante el comportamiento marginal de dichas variables, al definir la escala de éstas y por tanto el grado de variación conjunta a lo largo de la recta.

Empezamos por referirnos nuevamente a la ρ_s de Spearman. Este coeficiente equivale a

$$\rho_s = 12 \int_0^1 \int_0^1 [C(u, v) - u \cdot v] \, du \, dv \quad (2.7)$$

⁴¹ Ver Capítulo I.

⁴² McNeil, Frey, Embrechts, (2005), página 200.

Para demostrar esta equivalencia observamos que, dados dos puntos x, z cualesquiera en la recta, (Figura 2.8) la distancia entre ambos es

$$x - z = \int_{-\infty}^{\infty} (1_{(t>z)} - 1_{(t>x)}) ds,$$

en donde $1_{(R)}$ es la función indicador, que vale 1 si se verifica R y 0



Figura 2.8.

en caso contrario. En efecto, esta integral equivale a

$$\int_z^{\infty} du - \int_x^{\infty} du = \int_z^x du$$

Si consideramos ahora dos dimensiones (Figura 2.9), resultará:

$$\text{Área de } A = (x_1 - z_1).(x_2 - z_2) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1(s>z_1).1(t>z_2) - 1(s>x_1).1(t>z_2) - 1(s>z_1).1(t>x_2) + 1(s>x_1).1(t>x_2)] ds dt \quad (2.8)$$

La integral de cada término del integrando equivale al área de los recintos siguientes:

- Primer término: $A + B + C + D$
- Segundo término: $C + D$
- Tercer término: $B + C$
- Cuarto término: C

Por tanto, se cumple (2.8).

Consideremos ahora un par de variables (X_1, X_2) con función de distribución conjunta $F(x_1, x_2)$ y márgenes F_1 y F_2 ; el coeficiente de correlación lineal entre X_1 y X_2 es ρ ; hacemos también $E[X_1] = \mu_1$; $E[X_2] = \mu_2$.

Si (Z_1, Z_2) es un par independiente del anterior, con la misma distribución conjunta, tendremos:

$$E[(X_1 - Z_1).(X_2 - Z_2)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1(s > Z_1).1(t > Z_2) - 1(s > X_1).1(t > Z_2) - 1(s > Z_1).1(t > X_2) + 1(s > X_1).1(t > X_2)) ds dt\right].$$

Observemos ahora que, por ejemplo $E[1\{s > Z_1\}]$ es el valor medio de una variable dicotómica Z_1 que puede ser mayor o menor que s ; por tanto, dicho valor medio equivale a $F_1(s)$. De aquí que, en virtud de la independencia entre los pares (X_1, X_2) por un lado y (Z_1, Z_2) , por otro,

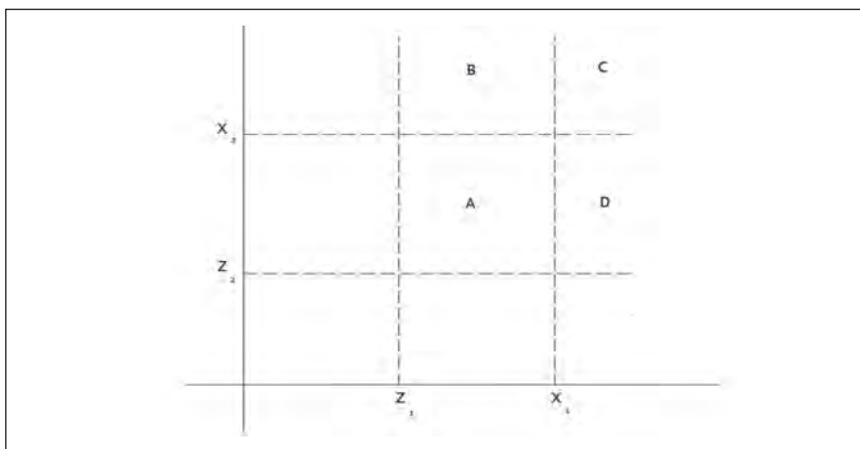


Figura 2.9.

$$E[(X_1 - Z_1).(X_2 - Z_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(s,t) - F_1(s).F_2(t) - F_1(s).F_2(t) + F(s,t)) ds dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(s,t) - F_1(s).F_2(t)) ds dt.$$

Por otra parte,

$$E[(X_1 - Z_1) \cdot (X_2 - Z_2)] = E\{[(X_1 - \mu_1) - (Z_1 - \mu_1)] \cdot [(X_2 - \mu_2) - (Z_2 - \mu_2)]\} = 2 \cdot \text{cov}(X_1, X_2),$$

puesto que los valores medios de los productos $(X_1 - \mu_1)(Z_2 - \mu_2)$ y $(X_2 - \mu_2)(Z_1 - \mu_1)$ se anulan y los valores medios de $(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)$ y de $(Z_1 - \mu_1)(Z_2 - \mu_2)$ coinciden, al tener (X_1, X_2) la misma distribución conjunta que (Z_1, Z_2) .

Por tanto,

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(s, t) - F_1(s) \cdot F_2(t)) ds dt.$$

Demostrada esta equivalencia para las variables X_1, X_2 , la aplicamos a $U = F_1(X_1)$ y $V = F_2(X_2)$, $(U, V \in [0, 1]^2)$ cuya función de distribución conjunta es $C(u, v)$ y así resulta que:

$$\text{cov}(U, V) = \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - u \cdot v) du dv$$

y en consecuencia obtenemos, para $\rho_S = 12 \cdot \text{cov}(U, V)$, la expresión (2.7), en donde el coeficiente ρ_S aparece como una función de la cópula, exclusivamente.

La fórmula (2.7) nos dice que ρ_S es proporcional al volumen comprendido entre la cópula $C(u, v)$ de las variables (X_1, X_2) y la cópula de independencia $u \cdot v$. Si dicho volumen es grande, por apartarse $C(u, v)$ de $u \cdot v$, el valor de la integral será alto; pero es posible que dicho valor sea bajo, o incluso nulo, pese a que $C(u, v)$ tenga valores muy alejados de $u \cdot v$, si los excesos compensan a los defectos. De ahí que una medida de la dependencia, propuesta por Schweizer y Wolff es:

$$\sigma = 12 \int_0^1 \int_0^1 (|C(u, v) - u \cdot v|) du dv$$

el integrando es ahora el valor absoluto de la diferencia entre ambas cópulas.

Nelsen (2006) propone un interesante ejemplo de aplicación de esta medida,⁴³ referida a dos variables (X, Y) perfectamente dependientes entre sí de forma que ambas son las coordenadas de puntos de una circunferencia de radio 1, siendo constante la densidad en dichos puntos. Pues bien, en este caso el resultado es $\sigma = 0,25$. La perfecta dependencia no conduce en este caso a un coeficiente de dependencia igual a la unidad porque X e Y no son comonotónicas.

También el coeficiente τ puede expresarse en función de la cópula. A partir de (1.6) [página 64] escribimos la función de distribución conjunta $F(x, y)$ como $C[F_1(x_1), F_2(x_2)]$:

$$\tau = 4 \int \int_{R^2} C[F_1(x_1), F_2(x_2)] dC[F_1(x_1), F_2(x_2)] - 1 \quad (2.9)$$

si hacemos el cambio de variable $u = F_1(x_1)$, $v = F_2(x_2)$ nos queda:

$$\tau = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

Como observa Nelsen, esta integral puede interpretarse como el valor medio de la variable $C(U, V)$, en donde C es la función de distribución conjunta de dos variables uniformes $(0, 1)$ ⁴⁴.

Un concepto de interés es la “**dependencia en colas**” (en inglés *tail dependence*). Para ilustrarlo comparemos las partes (a) y (b) de la Figura 2.10; cada una de ellas contiene 500 puntos simulados de dos cópulas distintas con el mismo coeficiente $\tau = 0,50$ ⁴⁵. Su dependencia es, por tanto, del mismo grado si la entendemos en el sentido de concordancia. Cuando interese la posibilidad o riesgo de coincidencia de valores altos o extremos de la distribución, advertiremos la mayor peligrosidad de la cópula simulada en (b), cuya dependencia en la cola derecha es mayor.

Necesitamos, por tanto, una medida de la dependencia entre U y V —o, lo que es equivalente, entre las variables $X = F_x^{-1}(U)$ e $Y = F_y^{-1}(V)$ — en la cola o extremo de

⁴³ Página 209.

⁴⁴ Nelsen (2006), página 162.

⁴⁵ Figura 2.10(a), cópula Frank con $\theta = 5,74$; Figura 2.10(b), cópula Gumbel con $\theta = 2$.

la distribución (superior o inferior, según los casos; en este ejemplo es de mayor interés la dependencia en el extremo superior). Ésta es la “dependencia en colas”, cuyo coeficiente se define (para las variables X, Y con distribución conjunta $F(x,y)$ y márgenes F_X y F_Y) como:

$$\lambda_{\text{sup}} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \text{Prob}(X > F_X^{-1}(\alpha) \mid Y > F_Y^{-1}(\alpha)) \quad (2.10)$$

λ_{sup} mide, por tanto, la dependencia entre X e Y en el extremo positivo de la distribución; observemos que α tiende a 1 por la izquierda, puesto que X e Y van creciendo hacia ∞ . Por tanto, (2.10) es, en realidad, el coeficiente en la cola superior y de ahí el subíndice, para distinguirlo de λ_{inf} relativo a la cola inferior.

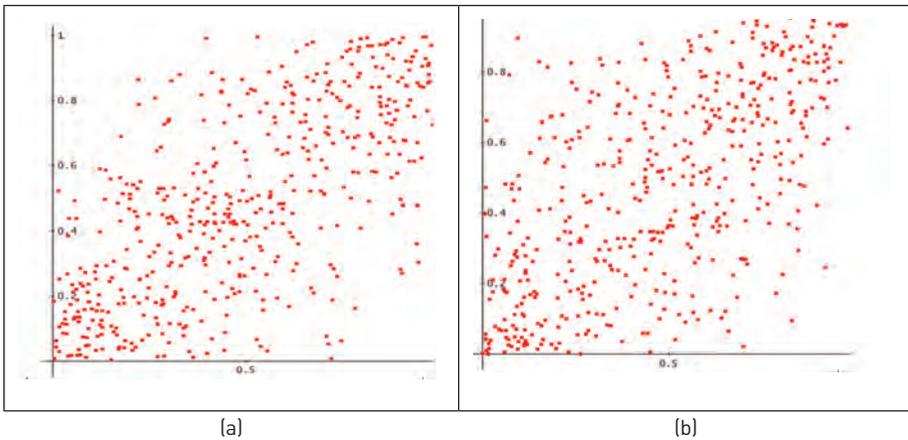


Figura 2.10: Simulación de 500 puntos de dos cópulas diferentes, ambas con coeficiente $\tau=0,5$

Si aplicamos a las anteriores desigualdades las transformaciones monótonas crecientes $U = F_X(X)$ y $V = F_Y(Y)$, obtenemos:

$$\lambda_{\text{sup}} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \text{Prob}(U > \alpha \mid V > \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{\bar{C}(\alpha, \alpha)}{1 - \alpha} \quad (2.11)$$

siendo $\bar{C}(u, v) = \text{Prob}(U > u; V > v)$.

Esto nos indica que la dependencia en la cola de una distribución de X, Y está en función de la cópula exclusivamente (no de las distribuciones marginales), de

igual manera a lo que ocurre con los coeficientes τ y ρ_s . Y también significa que el valor que tome λ radicaré en el comportamiento asintótico de dicha cópula.

Para calcular λ_{sup} observemos que $\bar{C}(u, v) = 1 - u - v + C(u, v)$; esta equivalencia puede comprobarse con un razonamiento similar al empleado en el Epígrafe 3, Figura 2.9; o también Epígrafe 8 [cópulas de supervivencia, Figura 2.22]. De ahí que

$$\bar{C}(\alpha, \alpha) = 1 - 2\alpha + C(\alpha, \alpha)$$

y, por tanto,

$$\lambda_{\text{sup}} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2\alpha + C(\alpha, \alpha)}{1 - \alpha} \quad (2.12a)$$

De forma parecida obtenemos

$$\lambda_{\text{int}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \text{Prob}(U \leq \alpha \mid Y \leq \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{C(\alpha, \alpha)}{\alpha} \quad (2.12b)$$

En el caso de las cópulas implícitas, como la gaussiana y la t , no puede calcularse directamente el límite que figura en (2.12) y de ahí que haya de seguirse otro camino para llegar al coeficiente⁴⁶. Demostraremos a continuación que éste es nulo en la cópula de Gauss (salvo que $\rho = 1$) mientras que en la cópula t el coeficiente de dependencia en colas equivale a $2 \cdot \text{Prob}[t_{v+1} > \sqrt{v+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}]$.

En efecto, aplicando la regla de L'Hôpital en (2.12a),

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{\bar{C}(\alpha, \alpha)}{1 - \alpha} = \lambda_{\text{sup}} = - \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{d\bar{C}(\alpha, \alpha)}{d\alpha}$$

Además, $\partial \bar{C} / \partial u = -1 + \partial C / \partial u$; e igualmente: $\partial \bar{C} / \partial v = -1 + \partial C / \partial v$.

⁴⁶ Desarrollamos a continuación lo indicado al respecto por Embrechts, McNeil y Straumann (2002).

Recordemos ahora —expresión (2.5) y razonamiento que nos condujo a ella— que si $F(x,y)$ es una función de distribución derivable,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \text{Prob}(Y \leq y \mid X=x) f(x)$$

(siendo $f(x)$ la función de densidad de X). Si aplicamos esto a una cópula $C(u,v)$ obtenemos $\frac{\partial \bar{C}}{\partial u} = \text{Prob}(V \leq v \mid U=u)$.⁴⁷; por tanto,

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial u} = -1 + \text{Prob}[V \leq v \mid U = u] = -\text{Prob}[V > v \mid U = u]$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial v} = -1 + \text{Prob}[U \leq u \mid V = v] = -\text{Prob}[U > u \mid V = v]$$

La diferencial total $d\bar{C}(u,v)$ es:

$$d\bar{C}(u,v) = -\text{Prob}[V > v \mid U = u] du - \text{Prob}[U > u \mid V = v] dv.$$

Si hacemos $u = v = \alpha$ y admitimos que $\bar{C}(u,v) = \bar{C}(v,u)$ nos queda:

$$d\bar{C}(\alpha, \alpha) = -2\text{Prob}[V > \alpha \mid U = \alpha] d\alpha$$

y en consecuencia,

$$\lambda_{\text{sup}} = -\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{d\bar{C}}{d\alpha} = 2 \lim \text{Prob}[V > \alpha \mid U = \alpha]^{47} \quad (2.13)$$

Esta relación permite calcular el coeficiente de la **cópula gaussiana**, cuya simetría da lugar a la igualdad entre los coeficientes de dependencia en la cola superior y en la inferior. Para ello, tengamos en cuenta, llamando N_1 y N_2 a dos variables independientes (y normales $[0, 1]$), que si X e Y son variables también normales $[0, 1]$ pero con coeficiente de correlación ρ ,

$$X = N_1$$

$$Y = \rho \cdot N_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot N_2$$

⁴⁷ Comparemos este resultado con la expresión (2.11), en donde el condicionante era $V > \alpha$, pero el límite no se duplicaba, como ocurre aquí.

Por tanto, la variable $(Y | X=x)$ es $\rho \cdot x + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot N_2$, es decir, una variable normal con media $\rho \cdot x$ y desviación típica $\sqrt{1 - \rho^2}$ y la probabilidad buscada será, llamando Φ a la función de distribución normal $(0, 1)$,

$$\lambda = 2 \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \text{Prob}[V > \alpha | U = \alpha] = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \text{Prob}(Y > y | X > x) =$$

$$2 \lim_{x \rightarrow \infty} \text{Prob} \left[1 - \Phi \left(\frac{x - \rho \cdot x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \right] = 0 \quad (\text{para } \rho \neq 1)$$

(salvo que $\rho=1$). Por tanto, en la cópula de Gauss no hay dependencia en las colas si $\rho < 1$.

Utilizaremos también la relación (2.13) para obtener el coeficiente de dependencia λ de la **cópula t**. Si el par se distribuye según la t bivalente con ν grados de libertad y coeficiente de correlación ρ , nuestro primer objetivo es determinar cómo se distribuye la variable condicionada $(Y | X=x)$. Si llamamos $f(x,y)$ y $f(x)$ a las funciones de densidad conjunta y marginal, respectivamente, tendremos que:

$$f(y | x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = c \cdot \left(1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{\nu(1-\rho^2)} \right)^{-(\nu+2)/2} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{\nu} \right)^{(\nu+1)/2}$$

siendo $c = \frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2}) \sqrt{\pi\nu} \sqrt{1-\rho^2}}$,

$$f(y | x) = c \cdot \left(1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{\nu(1-\rho^2)} \right)^{-(\nu+2)/2} \cdot \left(\frac{\nu}{\nu+x^2} \right)^{(\nu+2)/2} \cdot \left(\frac{\nu}{\nu+x^2} \right)^{1/2} =$$

$$c \cdot \left(\frac{\nu(1-\rho^2) + y^2 - 2\rho xy + x^2 + x^2\rho^2 - x^2\rho^2}{(\nu+x^2)(1-\rho^2)} \right)^{-(\nu+2)/2} \cdot \left(\frac{\nu}{\nu+x^2} \right)^{1/2} =$$

$$c \cdot \left(\frac{(\nu+x^2)(1-\rho^2) + (y-\rho x)^2}{(\nu+x^2)(1-\rho^2)} \right)^{-(\nu+2)/2} \cdot \left(\frac{\nu}{\nu+x^2} \right)^{1/2} =$$

$$c \cdot \left(1 + \frac{(y-\rho x)^2}{(\nu+x^2)(1-\rho^2)} \right)^{-(\nu+2)/2} \cdot \frac{\nu^{1/2}}{\sqrt{\nu+x^2}} =$$

$$\frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2}) \sqrt{(\nu+1)\pi} \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{\nu+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{(y-\rho x)^2}{(\nu+x^2)(1-\rho^2)} \right)^{-(\nu+2)/2}$$

Para llegar a la última expresión hemos multiplicado y dividido por $\sqrt{\nu+1}$. Si comparamos lo obtenido con la función $f(x)$ (densidad de la t de Student) concluimos que aquello es la función de densidad de una variable t con $\nu+1$ grados de libertad, multiplicada por

$$\frac{\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\nu+x^2}}$$

y de la que se resta $\rho \cdot x$. Es decir:

$$[(Y|X = x) - \rho \cdot x] \cdot \frac{\sqrt{v+1}}{\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{v+x^2}} = t_{v+1}$$

En otras palabras: si X e Y se distribuyen conjuntamente según la t de Student, entonces la diferencia entre la variable Y , condicionada a un cierto valor de $X=x$, y el producto ρx , multiplicada dicha diferencia por

$$\sqrt{v+1}/(\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{v+x^2}),$$

es una variable $A(x,y)$ que se distribuye como una t con $v+1$ grados de libertad.

Para obtener el coeficiente λ (tampoco hay necesidad de distinguir entre el superior y el inferior, por la simetría de la distribución t y de su cópula) hemos de determinar el límite de $A(x,y)$, si tanto y como x tienden simultáneamente a infinito, que equivale a:

$$\frac{\sqrt{v+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1-\rho)}{x\sqrt{1+v/x^2}} = \frac{\sqrt{v+1}\sqrt{(1-\rho)^2}}{\sqrt{(1-\rho)(1+\rho)}} = \sqrt{v+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}$$

Si sustituimos este resultado en la función de distribución t de Student obtenemos una probabilidad inferior a 1 (salvo que sea $\rho=-1$) lo que significa que el coeficiente λ es mayor que cero⁴⁸. Por tanto, en la cópula t hay dependencia en la cola y el coeficiente (superior e inferior al ser simétrica la distribución) es:

$$\lambda(v,\rho) = 2 \cdot \text{Prob}[t_{v+1} > \sqrt{v+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}]$$

(t_{v+1} representa una variable t con $v+1$ grados de libertad).

⁴⁸ Si dicha probabilidad es menor que 1, ello significa que la expresión (2.13) dará un valor del coeficiente mayor que cero. Hacer que y tienda a infinito equivale a que, en dicha expresión, $\alpha \rightarrow 1$.

El Cuadro 2.1 contiene valores de λ para algunos pares (v, ρ) .

En la Figura 2.11 se representa la función $\lambda(v, \rho)$ (es decir, coeficiente de dependencia en ambas colas en el caso de la cópula t); en la Figura se ve cómo, para un número fijo de grados de libertad, λ aumenta al hacerlo ρ mientras que, a igual correlación, la dependencia en colas aumenta al disminuir v .

En el Epígrafe 6 determinaremos el coeficiente de dependencia en colas de varios tipos de cópulas arquimedianas.

$\rho \backslash v$	2	5	10	30^{49}
-0,7	0,025	0,001	0	0
-0,3	0,099	0,016	0,001	0
0,0	0,182	0,050	0,007	0
0,3	0,293	0,122	0,033	0
0,7	0,519	0,343	0,191	0,026

Cuadro 2.1: Varios valores de la función $\lambda(v, \rho)$

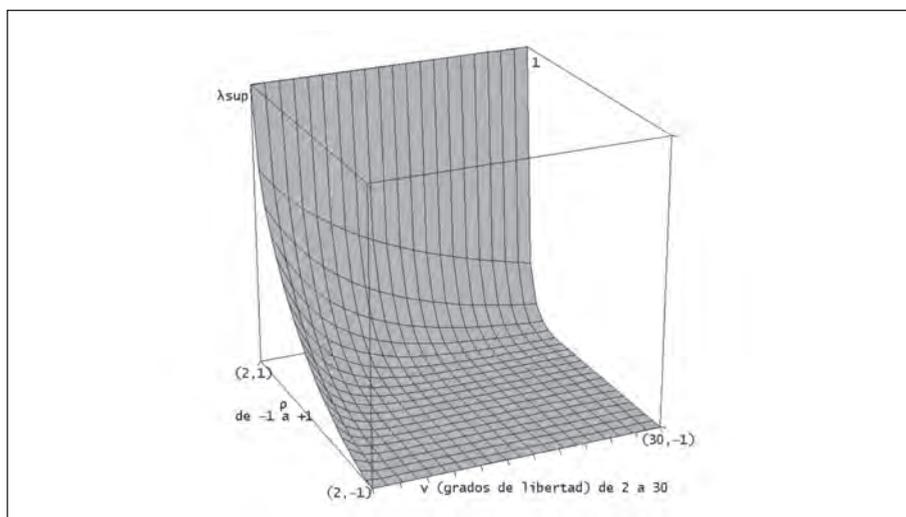


Figura 2.11: Función $\lambda(v, \rho)$

⁴⁹ Los ceros de esta columna no significan ausencia total de dependencia, sino valores inferiores a una milésima.

4. CÓPULAS ARQUIMEDIANAS

Las arquimedianas son una clase de cópulas cuya gran importancia radica en dos circunstancias: En primer lugar, sus interesantes propiedades, que hacen de ellas un instrumento de fácil aplicación, al menos en el caso bivariante; y en segundo lugar, su notable variedad, que posibilita construir modelos adaptables a muchas situaciones.

Hay cópulas arquimedianas de uno o más parámetros y también bivalentes o multivalentes⁵⁰. Nos limitaremos ahora a las cópulas arquimedianas bivalentes y de un parámetro.

Una manera de introducirnos en estas cópulas es la siguiente⁵¹: La cópula de independencia $C(u,v) = u \cdot v$ puede también escribirse así:

$$C(u,v) = e^{-[-\text{LN}(u) - \text{LN}(v)]}$$

Si hacemos $\varphi(t) = -\text{LN}(t)$ resultará que $\varphi^{-1}(t) = e^{-\varphi(t)}$. Por tanto $u \cdot v = e^{-\varphi(u) - \varphi(v)}$ y esto, expresado en función de $\varphi(\cdot)$ y de su inversa da lugar a:

$$C(u,v) = u \cdot v = \varphi^{-1}[\varphi(u) + \varphi(v)] \quad (2.14).$$

La función $\varphi(t)$ es continua, decreciente y convexa. Además, $\varphi(1) = 0$. Con estas condiciones de φ , la expresión (2.14) es una cópula, concretamente la de independencia, como acabamos de ver. La pregunta que surge ahora es: ¿Qué ocurrirá si aplicamos (2.14) con una función $\varphi(t)$ que reúna las expresadas características, pero que sea distinta de $-\text{LN}(t)$?

Por ejemplo, si $\varphi_\theta(t) = [-\text{LN}(t)]^\theta$, entonces $t = \exp[-\varphi_\theta^{-1}(t)]$.

Es decir que $\varphi^{-1}(t) = \exp[-t^{1/\theta}]$ y por tanto la cópula resultante es, en virtud de (2.14):

$$C(u,v) = \exp[-\{\varphi(u) + \varphi(v)\}^{1/\theta}] = \exp[-\{[-\text{LN}(u)]^\theta + [-\text{LN}(v)]^\theta\}^{1/\theta}].$$

⁵⁰ En el Capítulo IV haremos una referencia a cópulas arquimedianas multivalentes.

⁵¹ Nelsen (2006), página 151 y ejemplo 4.2(a) de la página 112.

Esta función resulta ser una cópula (llamada cópula de Gumbel) que veremos más adelante.

A la función $\varphi_\theta(t)$ se le llama “generador” y ha de reunir las características que hemos dicho para que (2.14) sea una cópula, es decir:

1. Que sea continua (no necesariamente derivable).
2. Que sea monótona decreciente.
3. Que $\varphi_\theta(1) = 0$.
4. Que sea convexa.

En la Figura 2.12 se representan dos tipos de función [designada como $\Phi(t)$] que reúnen estas características. La función φ (Φ en la gráfica) es “generador estricto” si $\varphi(0) = \infty$; en este caso φ^{-1} está definida para cualquier valor de la ordenada positiva. En otro caso (Figura 2.12(b)) φ^{-1} sólo está definida para valores de la ordenada comprendidos en $[0, \varphi(0)]$ y de ahí que haya que definirla convencionalmente para ordenadas superiores a $\varphi(0)$; ello se logra haciendo $\varphi^{-1}(t) = 0$ para $t \geq \varphi(0)$. A esta inversa con definición parcialmente convencional se denomina “pseudo-inversa” y ha de designarse por $\varphi^{[-1]}$, porque la notación $\varphi^{-1}(t)$ es específica del generador estricto. Por tanto, si el generador es estricto, $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Una vez caracterizada la función generador $\varphi_\theta(t)$ falta demostrar que las funciones de la forma (2.14) obtenidas con tales generadores reúnen los requisitos propios de las cópulas. El de ser creciente⁵² puede demostrarse que se cumple por ser el generador convexo (Demostración en Nelsen (2006), página 111).

Además:

$$C(u, 1) = \varphi^{[-1]}[\varphi(u) + \varphi(1)] = \varphi^{[-1]}[\varphi(u)] = u$$

$$C(u, 0) = \varphi^{[-1]}[\varphi(u) + \varphi(0)] = 0, \text{ puesto que:}$$

⁵² Véase epígrafe 2, condición 3ª.

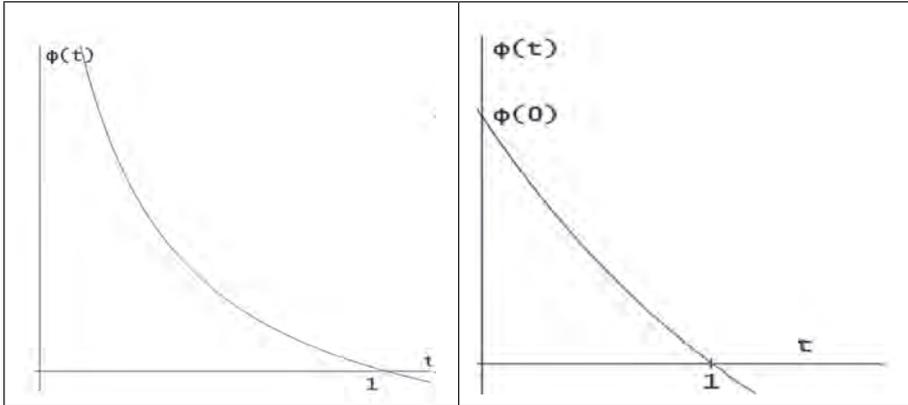


Figura 2.12(a): Generador estricto.

Figura 2.12(b): Generador no estricto.

- Si φ es generador estricto, $\varphi(0) = \infty$ y, por tanto, $\varphi^{[-1]}[\varphi(u) + \infty] = 0$
- Si φ es generador no estricto, $C(u, 0) = \varphi^{[-1]}[r] = 0$, al ser $r = \varphi(u) + \varphi(0) \geq \varphi(0)$.

Las cópulas arquimedianas son simétricas, en el sentido de que se pueden intercambiar sus variables: Es inmediato ver que $C(u, v) = C(v, u)$.

Tienen la propiedad asociativa, ya que $C[C(u, v), w] = C[u, C(u, w)]$; para comprobarlo, observemos que

$$C[C(u, v), w] = \varphi^{[-1]}[\varphi(C(u, v)) + \varphi(w)]$$

De (2.14) resulta inmediatamente que

$$\varphi[C(u, v)] = \varphi(u) + \varphi(v) \quad (2.15)$$

y, por tanto,

$$C[C(u, v), w] = \varphi^{[-1]}[\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)] = C[u, C(v, w)] \quad (2.16).$$

Otra característica de las cópulas arquimedianas es que, $\forall u \in [0, 1] C(u,u) < u$:

$$C(u,u) = \varphi^{[-1]} [2 \varphi(u)] < \varphi^{[-1]} [\varphi(u)] = u;$$

el signo de desigualdad está justificado por ser $\varphi(y)$, por tanto, también $\varphi^{[-1]}$ decreciente.

Veamos ahora algunos casos de cópulas arquimedianas⁵³. Nos limitaremos aquí a exponer su función generador y expresión de la respectiva cópula, con algunos comentarios generales. Dejamos para más adelante el cálculo del coeficiente τ y la dependencia en colas.⁵⁴

La cópula de Gumbel

Su generador es

$$\varphi_{\theta}(t) = [-\text{LN}(t)]^{\theta} \quad (\theta \geq 1) \quad (2.17).$$

y por tanto, la cópula tiene la expresión siguiente:

$$C(u,v) = \exp\{- [(-\text{LN}(u))^{\theta} + (-\text{LN}(v))^{\theta}]^{1/\theta}\} \quad (2.18).$$

En la Figura 2.13(a) se representa la función de densidad de la cópula de Gumbel y en la 2.13(b) mil puntos simulados de la misma, en ambos casos con un parámetro $\theta=2$. Como puede verse, este modelo concentra la mayor densidad en el ángulo superior derecho, es decir, en valores de u y v próximos a 1; esta cópula puede ser de aplicación, por tanto, si la dependencia entre las variables X e Y es más fuerte precisamente al coincidir valores altos de una y otra.

⁵³ Sólo examinaremos tres casos de cópulas arquimedianas. Nelsen [2006], páginas 116 a 118, incluye una tabla con 22 tipos de estas cópulas.

⁵⁴ Epígrafe 6.

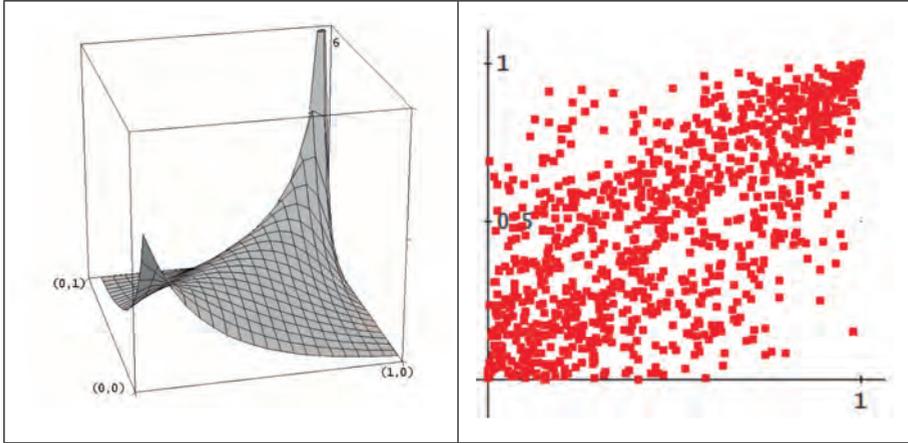


Figura 2.13(a): Densidad Gumbel, $\theta=2$.

Figura 2.13(b): 1000 puntos Gumbel, $\theta=2$.

La cópula de Clayton

Su función $\varphi_{\theta}(t)$ es:

$$\varphi_{\theta}(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta} \quad (\theta \neq 0, \quad -1 \leq \theta < \infty) \quad (2.19)$$

y por tanto, la cópula:

$$C(u,v) = [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta} \quad (2.20).$$

Con la cópula de Clayton ocurre lo contrario que con la anterior, de Gumbel: Las mayores densidades están en el ángulo inferior izquierdo y de ahí que se utilice cuando la dependencia entre las variables sea mayor en el caso de que valores bajos de una tienda a coincidir con valores bajos de la otra variable (Figura 2.14).

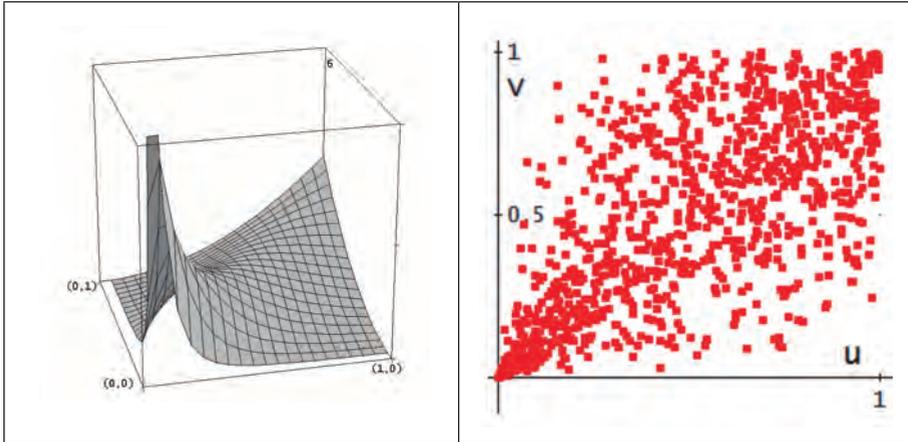


Figura 2.14(a): Densidad Clayton, $\theta=2$.

Figura 2.14(b): 1000 puntos Clayton, $\theta=2$.

La cópula de Frank

Esta cópula es simétrica radialmente, igual que ocurre con las cópulas elípticas; por tanto, las densidades están igualmente repartidas en zonas próximas a $(0,0)$ y a $(1,1)$ del cuadrado $[0, 1]^2$. En las Figuras 2.15(a) y (b) se observan estas características.

El generador de esta cópula es:

$$\varphi_{\theta}(t) = -\text{LN} \frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1} \quad (2.21)$$

($\theta =$ cualquier número real, salvo el 0).

y la función $C(u,v)$:

$$C(u,v) = -\frac{1}{\theta} \text{LN} \left[1 + \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right] \quad (2.22)$$

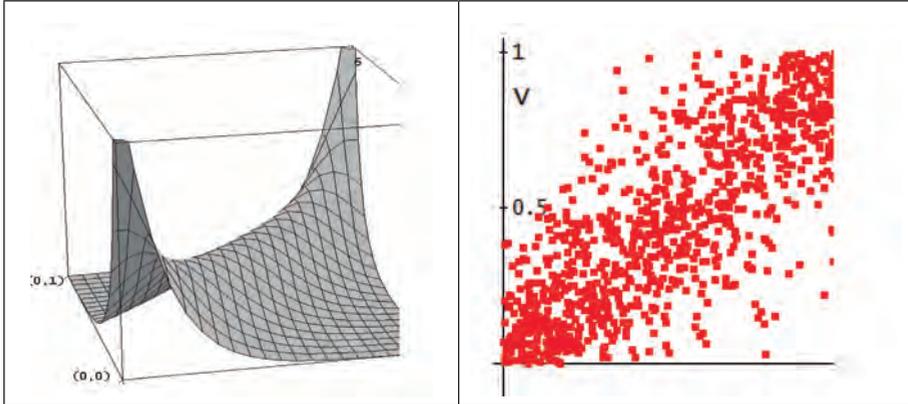


Figura 2.15(a): Densidad Frank, $\theta=8$.

Figura 2.15(b): 1000 puntos Frank, $\theta=8$.

La variedad de cópulas arquimedianas es, según apuntamos anteriormente, muy amplia. Como afirma Nelsen (2006)⁵⁵ se pueden construir las cópulas arquimedianas que se quiera, sólo con encontrar funciones que sirvan como generadores.

Concluimos este epígrafe con una observación. Muchas cópulas arquimedianas conducen, para ciertos valores del parámetro θ , a la cópula máxima M , a la mínima, W o a la de independencia I . Por ejemplo, con la cópula de Frank llegamos a M cuando $\theta \rightarrow \infty$. La cópula de Clayton se identifica con M si $\theta \rightarrow \infty$, etcétera. Ahora bien, esto no significa que con el paso al límite de $C_\theta(u,v)$ no podamos salir de la clase arquimediana. En efecto, la cópula máxima $M(u,v) = \min\{u,v\}$ no es arquimediana, como veremos en el epígrafe siguiente.

5. ¿POR QUÉ SE LLAMAN ARQUIMEDIANAS?

El término “cópula” aplicado a las funciones que ya conocemos es relativamente reciente; fue introducido por Sklar en 1959. Arquímedes vivió en el siglo III antes de Cristo. ¿Cómo se explica, entonces, tan flagrante anacronismo?

⁵⁵ Página 114.

Nelsen se ocupa de esta cuestión⁵⁶ y explica que el origen está en el axioma de Arquímedes: Dados dos números reales positivos a, b , existe siempre un entero n tal que $n.a > b$. Y las cópulas arquimedianas tienen una propiedad que recuerda este axioma. De similar forma que la multiplicación de n por a genera un nuevo número, la introducción de u y v en la función $C(u,v)$ da lugar a un tercer número. Si reiteramos esta operación a partir de un número inicial $u \in [0,1]$ obtenemos, aplicando (2.14) y (2.15):

$$\begin{aligned}
 C_1 &= u \\
 C_2 &= C(u, C_1) = C(u, u) = \varphi^{[-1]}[\varphi(u) + \varphi(u)] = \\
 &\quad \varphi^{[-1]}[2 \cdot \varphi(u)]. \\
 C_3 &= C(u, C_2) = C\{u, \varphi^{[-1]}[2 \varphi(u)]\} = \varphi^{[-1]}\{\varphi(u) + 2 \\
 &\quad \varphi(u)\} = \varphi^{[-1]}[3 \cdot \varphi(u)] \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 C_{n+1} &= C(u, C_n) = C\{u, \varphi^{[-1]}[n \varphi(u)]\} = \varphi^{[-1]}\{\varphi(u) + \\
 &\quad n \varphi(u)\} = \varphi^{[-1]}[(n+1) \cdot \varphi(u)].
 \end{aligned}$$

De lo anterior y del hecho de que la función $\varphi^{[-1]}$ es monótona decreciente, deducimos la propiedad (que recuerda el axioma de Arquímedes) según la cual en cualquier cópula arquimediana $C(u,v)$, siempre existe un entero n tal que $C_n = \varphi^{[-1]}[n \cdot \varphi(u)] < v$. Para lograr esta desigualdad no tenemos más que elegir un n suficientemente grande.

Ahora bien, lo sorprendente es que no sólo las arquimedianas, sino otras muchas cópulas cumplen la condición que atribuye su denominación a las primeras. Sea $C(u,v)$ una cópula tal que para todo punto (u,v) perteneciente al cuadrado $[0,1]^2$ cumpla la condición de ser menor que la cópula máxima, es decir:

$$C(u,v) < \min\{u,v\}$$

⁵⁶ Páginas 115, 122 y siguientes.

Sobre esta base podemos elaborar la sucesión siguiente:

$$C_1 = C(u, u) < u$$

$$C_2 = C(u, C_1) < C_1$$

$$C_3 = C(u, C_2) < C_2$$

.....

$$C_{n+1} = C(u, C_n) < C_n$$

Tenemos, por tanto, $u > C_1 > C_2 > \dots > C_n > \dots$ que es una sucesión de números positivos, infinita, decreciente e inferiormente acotada en 0 (puesto que toda cópula ha de cumplir $C(u, 0) = 0$). Por tanto, la sucesión $C_n \rightarrow 0$ y siempre será posible encontrar un número entero n tal que $C_n < v$, por pequeño que v sea.

La cópula máxima no es arquimediana, porque se identifica con el valor menor de sus dos componentes $\{u, v\}$.

Concluimos que la denominación de estas cópulas no es adecuada, porque hace referencia a una característica que comparten con muchas otras. Es decir, hay cópulas que también merecen el calificativo de "arquimedianas" y no pertenecen a la familia de las que habitualmente se llaman así.

6. UNA IMPORTANTE PROPIEDAD DE LAS CÓPULAS ARQUIMEDIANAS

Abordamos ahora el estudio de una fórmula de gran utilidad que es, quizá, una de las principales razones de que el uso de las cópulas arquimedianas esté tan extendido. Esta fórmula es:

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} \quad [2.23]$$

en donde $K_C(t) = \text{Prob}[C(U, V) \leq t]$ y $\varphi'^+(t)$ es la derivada por la derecha de la función generador.

La importancia de la fórmula (2.23) radica en posibilitar la fácil comparación entre un modelo concreto de cópula arquimediana y la cópula empírica⁵⁷. Esta comparación se hace con las probabilidades que la fórmula permite conocer para cada valor de t , por un lado, y las frecuencias observadas por otro. En el Capítulo IV y sobre todo en el V , haremos uso reiterado de (2.23).

Para demostrar dicha relación,⁵⁸ empezamos por introducir el concepto de **H -volumen** de un recinto B . Sea una función $H(x, y)$ y B un rectángulo perteneciente a su dominio de definición (Figura 2.16). El H -volumen de B es:

$$V_H(B) = H[x(2), y(2)] - H[x(2), y(1)] - H[x(1), y(2)] + H[x(1), y(1)].$$

Esto puede expresarse también:

$$V_H(B) = \int \int_B \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy = \int_{y(1)}^{y(2)} \int_{x(1)}^{x(2)} \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy.$$

Si H es una función de distribución, $V_H(B)$ mide la probabilidad del recinto B , es decir, $\text{Prob}[x(1) < X < x(2); y(1) < Y < y(2)]$.

Si $V_H(B) \geq 0$ la función H es 2-creciente; en tal caso a H se le llama H -medida de B .

⁵⁷ La cópula empírica será objeto de estudio en el Capítulo III. De momento podemos identificar cópula empírica con la versión muestral de la cópula.

⁵⁸ La demostración que sigue se basa en la de Nelsen, [2006] páginas 127 y siguientes.

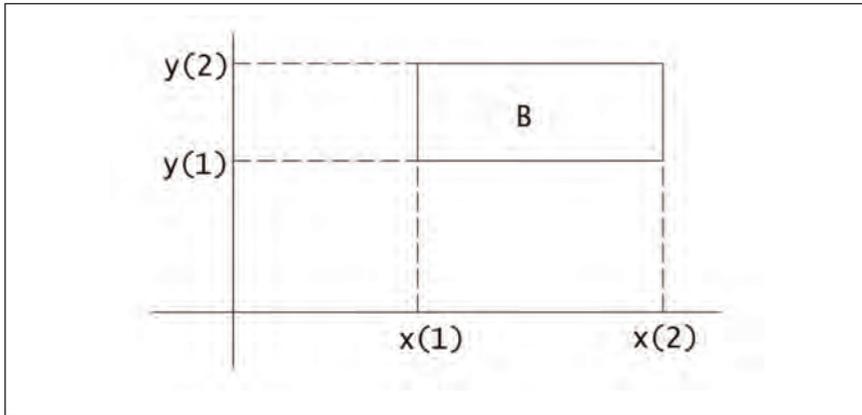


Figura 2.16.

Por ejemplo, en la cópula máxima $M=\min\{u,v\}$ la densidad está concentrada en la diagonal del cuadrado $[0,1]^2$, según se ve en la Figura 2.17. Sólo tienen densidad los puntos $\{u,v\}$ que están debajo de la diagonal $(0,0)-(1,1)$ del cuadrado—base.

Consideremos, por ejemplo, el rectángulo [perteneciente a dicho cuadrado—base y exterior a esta última diagonal]:

$$B = [0,5 < u < 0,6] \times [0,2 < v < 0,3].$$

La M-medida de B será:

$$V_M(B) = M(0,6; 0,3) - M(0,6; 0,2) - M(0,5; 0,3) + M(0,5; 0,2) = 0,3 - 0,2 - 0,3 + 0,2 = 0.$$

Ello nos indica que en B no hay probabilidad, porque ningún punto de la recta que la concentra está contenido en B . La cópula M presenta, encima de B , la forma de una superficie plana descendente hacia el eje u .

En general, la C -medida sobre B es la probabilidad que hay sobre el rectángulo B , según la cópula C . Observemos que $C(u,v)$ es la C -medida cuando $B = [0, u] \times [0, v]$.

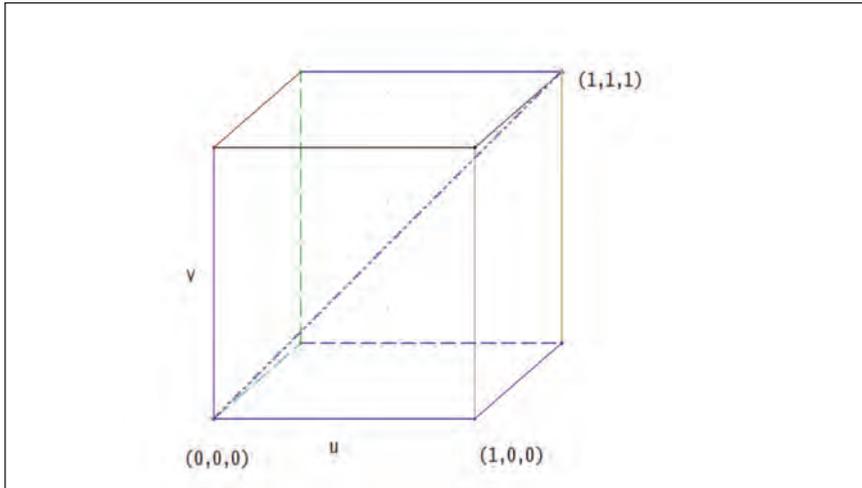


Figura 2.17.

Podemos definir a B como el conjunto de puntos $\{u, v\} \in I^2$ tal que $C(u, v) \leq t$ y preguntarnos por la probabilidad de que $C(U, V) \leq t$. Esa probabilidad es la que mide la función $K_C(t) = \text{Prob}[C(U, V) \leq t]$, de manera que $K_C(t)$ es la función de distribución de la variable aleatoria $C(U, V)$ (siendo U y V variables uniformes $(0,1)$ con distribución conjunta $C(u, v)$).

Para demostrar (2.23) consideremos un valor fijo de $t \in [0, 1]$ al que llamaremos $t(0)$. (Figura 2.18, en que se representa la función generador de la cópula $C(u, v)^{59}$).

Designamos por w a la ordenada correspondiente a $t(0)$, es decir, a $\varphi[t(0)]$; dividimos el intervalo $[0, w]$ en n partes iguales: $0, w/n, 2w/n, \dots, kw/n, \dots, nw/n$. A continuación determinamos el valor de la abscisa que corresponde a cada una de las $n+1$ ordenadas originadas por esa división:

⁵⁹ En esta gráfica se representa como $\Phi(kw/n)^{[-1]}$ lo que en el texto designamos como $\Phi(kw/n)^{[-1]}$ o bien, para mayor simplicidad, $\Phi(kw/n)^{-1}$.

<u>Ordenada</u>	<u>Abscisa correspondiente</u>
$v(n) = 0$	$u(n) = 1$
$v(n-1) = w/n$	$u(n-1)$
$v(n-2) = 2w/n$	$u(n-2)$
.....
$v(k+1) = (n-k-1)w/n$	$u(k+1) = u[n-(n-k-1)]$
$v(k) = (n-k)w/n$	$u(k) = u[n-(n-k)]$
$v(k-1) = (n-k+1)w/n$	$u(k-1) = u[n-(n-k+1)]$
.....
$v(1) = (n-1)w/n$	$u(1) = u[n-(n-1)]$
$v(0) = nw/n$	$u(0) = u[n-n] = t(0)$

Nos fijamos ahora en la cópula arquimediana generada por la función $\Phi(t)$:

$C(u,v) = \Phi^{-1}[\Phi(u) + \Phi(v)]$; la ecuación de la curva de nivel de $C(u,v)$ correspondiente a $t(0)$ será $C(u,v) = t(0)$ y, por tanto:

$$\Phi(u) + \Phi(v) = \Phi[t(0)]$$

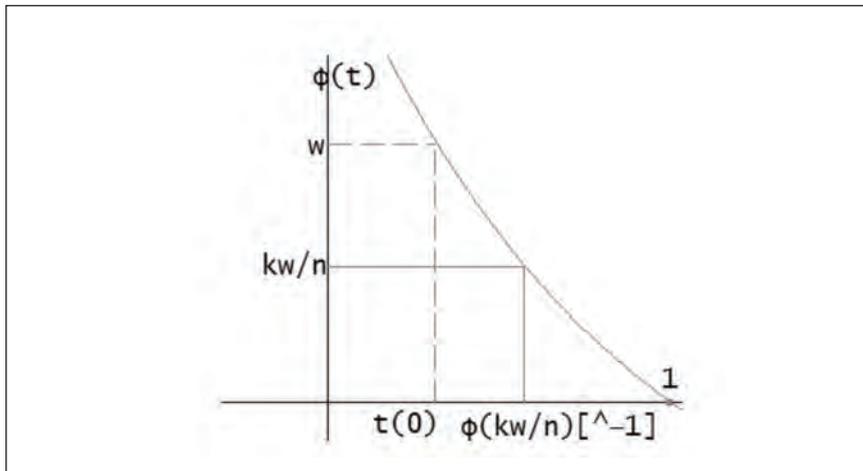


Figura 2.18.

o bien, despejando v :

$$v = \Phi^{-1}[\Phi(t(0)) - \Phi(u)] \quad (2.24)$$

Si $u = 1$,

$$v = \Phi^{-1}[\Phi(t(0)) - \Phi(1)] = t(0).$$

Y si $v = 1$,

$$1 = \Phi^{-1}[\Phi(t(0)) - \Phi(u)]$$

y de aquí resulta $\Phi(1) = 0 = \Phi[t(0)] - \Phi(u)$; luego $t(0) = u$.

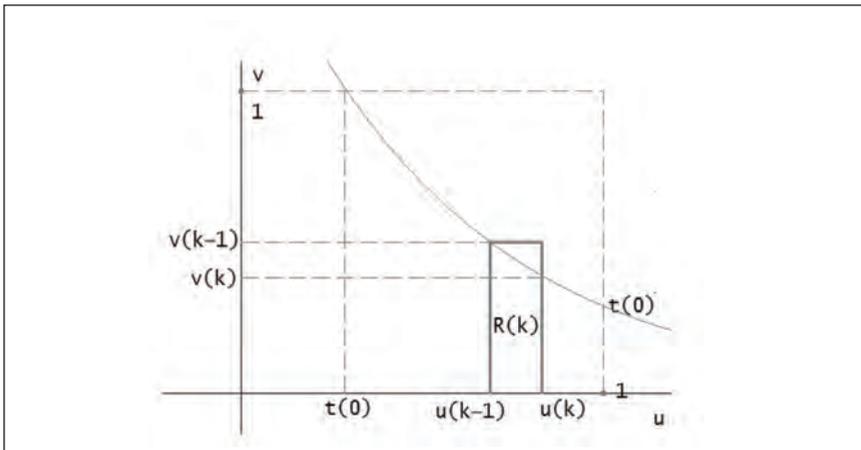


Figura 2.19.

Estamos ya en condiciones de calcular la C-medida del rectángulo $R(k)$ (Figura 2.19); llamamos $t(0)$ a la abscisa menor de la curva de nivel $C(u,v) = t(0)$, según la gráfica; la mayor es 1; la división del intervalo $[t(0), 1]$ en n secciones coincidirá con la que llevamos a cabo anteriormente (Figura 2.18); los puntos que nos interesan son los cuatro vértices del rectángulo $R(k)$. El primero de los inferiores tiene como abscisa $u(k-1)$ y es $u(k-1) = \Phi^{-1}\left(\frac{n-k+1}{n}w\right)$; y el segundo,

$u(k) = \Phi^{-1}\left(\frac{n-k}{n}w\right)$; la ordenada de los dos vértices superiores es, en virtud de (2.24) y teniendo en cuenta que $\Phi(t|0) = w$ (ver Figura 2.18),

$$\begin{aligned} v(k-1) &= \Phi^{-1}[\phi(t|0) - \phi(u(k-1))] = \Phi^{-1}\left[w - \phi\Phi^{-1}\left(\frac{n-k+1}{n}w\right)\right] = \\ &= \Phi^{-1}\left[w - \frac{n-k+1}{n}w\right] = \Phi^{-1}\left[\frac{k-1}{n}w\right]. \end{aligned}$$

El rectángulo $R(k) = R_k$ es, por tanto: $R_k = [u(k-1), u(k)] \times [0, v(k-1)]$; y por consiguiente, $V_C(R_k)$ será:

$$\begin{aligned} V_C(R_k) &= C[u(k), v(k-1)] - C[u(k), 0] - C[u(k-1), v(k-1)] + \\ &C[u(k-1), 0] = \\ &C[u(k), v(k-1)] - C[u(k-1), v(k-1)]. \\ C[u(k), v(k-1)] &= \Phi^{-1}[\phi(u(k) + \phi(v(k-1)))] = \Phi^{-1}\left[\phi\Phi^{-1}\left(\frac{n-k}{n}w\right) + \right. \\ &\left.\phi\Phi^{-1}\left(\frac{k-1}{n}w\right)\right] = \Phi^{-1}\left[\frac{n-k}{n}w + \frac{k-1}{n}w\right] = \Phi^{-1}\left(\frac{n-1}{n}w\right). \\ C[u(k-1), v(k-1)] &= \Phi^{-1}[\phi(u(k-1) + \phi(v(k-1)))] = \\ &\Phi^{-1}\left[\phi\Phi^{-1}\left(\frac{n-k+1}{n}w\right) + \phi\Phi^{-1}\left(\frac{k-1}{n}w\right)\right] = \Phi^{-1}\left[\frac{n-k+1}{n}w + \frac{k-1}{n}w\right] = \\ &\Phi^{-1}(w). \end{aligned}$$

De aquí que, finalmente $V_C(R_k) = \Phi^{-1}\left(\frac{n-1}{n}w\right) - \Phi^{-1}(w)$. Sumamos todos los rectángulos R_k desde $k = 1$ hasta n :

$$\sum_{k=1}^n V_C(R_k) = n\left[\Phi^{-1}\left(w - \frac{w}{n}\right) - \Phi^{-1}(w)\right]$$

Nuestro propósito inmediato es obtener el área comprendida entre la curva de nivel de la Figura 2.19 y el eje de abscisas. Para ello hemos de calcular el límite del anterior sumatorio cuando el número de rectángulos aumenta indefinidamente, es decir, cuando $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n\left[\Phi^{-1}\left(w - \frac{w}{n}\right) - \Phi^{-1}(w)\right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} -w \frac{\Phi^{-1}(w) - \Phi^{-1}(w-w/n)}{w/n} \\ &= -w \frac{d\Phi^{-1}}{dw} \end{aligned}$$

La derivada obtenida es la de la función $\Phi^{-1}(w)$ y es la derivada por la izquierda. Equivale a la C-medida de la superficie rayada (Figura 2.20) y también puede expresarse así:

$$-w \frac{d\phi^{-1}}{dw^-} = -\frac{w}{dw/dt^+} = -\frac{w}{\phi'(t)^+}$$

La derivada es ahora por la derecha, al ser $\Phi(t)$ una función decreciente.

Finalmente, la C-medida $K_C(t)$ se obtendrá sumando al resultado anterior la medida del rectángulo $[0, t(0)] \times 1$, que es $t(0)^{60}$. Por tanto, si ahora volvemos a designar a la función generador como $\phi(t)$ tenemos que para cualquier t del intervalo $(0, 1)$,

$$K_C(t) = t - \phi(t)/\phi'(t)^+.$$

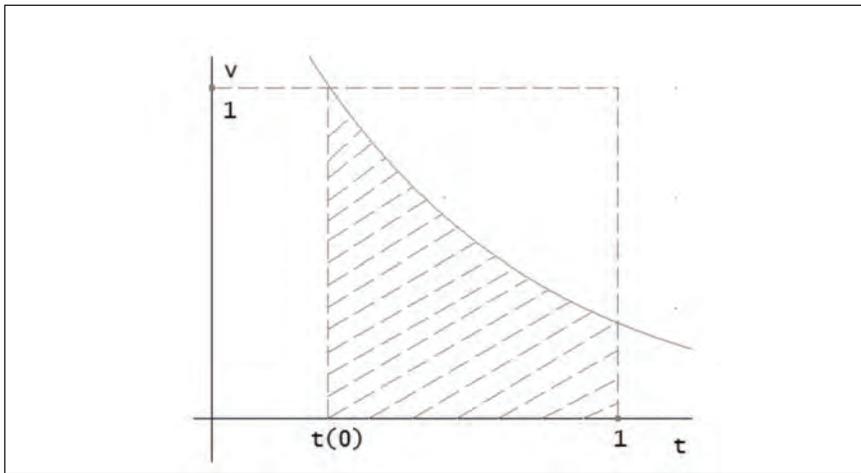


Figura 2.20.

⁶⁰ $K_C([0, t(0)] \times 1) = C(t(0), 1) - C(0, 1) - C(t(0), 0) + C(0, 0) = t(0)$

Por ejemplo, en una cópula de Gumbel con $\theta=2$, la expresión anterior será:

$$K_C(t) = t - \frac{2 \text{LN}(t)}{t}$$

De (2.9) y (2.23) puede deducirse una interesante relación entre el coeficiente τ de Kendall y el generador $\varphi(t)$. La expresión (2.9) puede escribirse así:

$$\tau = 4 \cdot E[C(U, V)] - 1$$

Pero (2.23) nos da la función de distribución de $C(U, V)$, es decir, $\text{Prob}[C(U, V) \leq t] = K_C(t)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \cdot \int_0^1 t \cdot dK_C(t) - 1 = [4 \cdot t \cdot K_C(t)]_0^1 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt - 1 = 3 - 4 \int_0^1 \left[t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} \right] dt = \\ &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \end{aligned} \quad (2.25)$$

Esta fórmula es de gran importancia porque permite relacionar el valor muestral de τ con el parámetro θ del modelo arquimediano elegido, abriendo la posibilidad de un método de estimación similar al «método de los momentos».

Por otra parte, (2.25) permite obtener fácilmente el valor de τ en las cópulas arquimedias, como vamos a ver en seguida.

a) La **cópula Gumbel** tiene como generador (2.17) y por tanto:

$$\tau = 1 - \frac{4}{\theta} \int_0^1 t(-\text{LN}(t)) dt = 1 - \frac{1}{\theta} \quad (2.26)$$

b) El generador de la **cópula Clayton** es (2.19) y de ahí que:

$$\begin{aligned} \tau &= 1 + \frac{4}{\theta} \int_0^1 t^{\theta+1} - t dt \\ &= \frac{\theta}{\theta+2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

c) En el caso de la **cópula Frank** el generador viene dado por (2.21). Su derivada es:

$$\frac{\theta}{1 - e^{\theta t}}$$

Demostremos a continuación que, en este modelo de cópula, la expresión de τ en función de θ viene dada por (2.28).

Para aplicar (2.25) hemos de calcular la integral

$$I = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt = \frac{1}{\theta} \int_0^1 (e^{\theta t} - 1) \cdot \text{LN} \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} dt$$

Al integrar por partes expresamos el resultado en forma de límite cuando tiende a cero el extremo inferior de integración; de esta forma se evitarán las indeterminaciones que de otro modo aparecerían en el integrando (por ejemplo, al hacer $t=0$ en el cociente cuyo logaritmo figura en él):

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \left[\left(\frac{e^{\theta t}}{\theta} - t \right) \cdot \text{LN} \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right]_x^1 - \int_x^1 \left(\frac{e^{\theta t}}{\theta} - t \right) \frac{(-\theta) \cdot e^{-\theta t}}{e^{-\theta t} - 1} dt$$

Definimos ahora las funciones $A(x)$ y $B(x)$ y la integral C , de manera que sea

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} [A(x) - B(x) + C]:$$

$$A(x) = \left[\left(t - \frac{e^{\theta t}}{\theta} \right) \text{LN} \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right]_x^1 = 0 - \left(x - \frac{e^{\theta x}}{\theta} \right) \text{LN} \left(\frac{e^{-\theta x} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right)$$

cuando x tiende a cero el contenido del primer paréntesis equivale a $-1/\theta$; de aquí que, en adelante, tomemos como valor de $A(x)$:

$$A(x) = -\frac{1}{\theta} \text{LN} \frac{e^{-\theta x} - 1}{e^{-\theta} - 1};$$

$$B(x) = \int_x^1 \frac{e^{\theta t}}{\theta} \frac{(-\theta) \cdot e^{-\theta t}}{e^{-\theta t} - 1} dt = \int_x^1 \frac{e^{\theta t}}{e^{\theta t} - 1} dt = \frac{1}{\theta} \text{LN} \frac{e^{\theta} - 1}{e^{\theta x} - 1};$$

$$C = \int_0^1 \frac{\theta t \cdot e^{-\theta t}}{1 - e^{-\theta t}} dt = \int_0^1 \frac{\theta t dt}{e^{\theta t} - 1} = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{s ds}{e^s - 1}$$

Esta última integral recibe el nombre de “integral de Debye”; en general, la forma de estas integrales, es:

$$D_k(\theta) = \frac{k}{\theta^k} \int_0^{\theta} \frac{s^k}{e^s - 1} ds$$

Por tanto, $C = D_1(\theta)$.

Calculamos ahora el límite de $A(x) - B(x)$ cuando $x \rightarrow 0$:

$$\lim [A(x) - B(x)] = -\frac{1}{\theta} \lim \left[\text{LN} \frac{e^{-\theta x} - 1}{e^{-\theta} - 1} + \text{LN} \frac{e^{\theta} - 1}{e^{\theta x} - 1} \right]$$

Como la función logarítmica es continua en $(0, \infty)$ puede calcularse el anterior límite mediante la regla de L'Hôpital y a continuación el logaritmo de dicho límite (por la derecha).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\theta x} - 1}{e^{\theta x} - 1} \frac{e^{\theta} - 1}{e^{-\theta} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\theta e^{-\theta x}}{\theta e^{\theta x}} \frac{e^{\theta} - 1}{e^{-\theta} - 1} = -1 \cdot \frac{e^{\theta} - 1}{e^{-\theta} - 1} = e^{\theta}.$$

El logaritmo del límite es θ y en consecuencia el límite de $A(x) - B(x)$ al tender x a cero es $-\frac{1}{\theta} \theta = -1$; de aquí que $I = \frac{1}{\theta}(-1 + D_1(\theta))$ y, finalmente,

$$\tau = 1 + 4I = 1 - \frac{4}{\theta} [1 - D_1(\theta)] \quad (2.28)$$

siendo $D_1(\theta)$ la ya citada integral de Debye con parámetro $k = 1$.

Obtenidas las fórmulas para τ en estos tres modelos de cópulas, finalizamos este Epígrafe con la expresión de los coeficientes de dependencia en colas. Al tratarse de cópulas explícitas, no hay más que aplicar (2.12a) y (2.12b) para λ_{sup} y λ_{inf} . Para llegar al coeficiente respectivo obtenemos la función $f(\alpha) = C(\alpha, \alpha)$ y su derivada y aplicamos a continuación la regla de L'Hôpital en el cálculo del límite en las citadas expresiones (2.12a y 2.12b).

a) Cópula de Gumbel.

$$f(\alpha) = \exp[-2(-\text{LN}(\alpha))^{\theta}]^{1/\theta} = \exp[2^{1/\theta} \cdot \text{LN}(\alpha)] = \alpha^{2^{1/\theta}}.$$

$$f'(\alpha) = 2^{1/\theta} \alpha^{2^{1/\theta} - 1}.$$

$$\lambda_{\text{sup}} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2\alpha + \alpha^{2\frac{1}{\theta}}}{1 - \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{-2 + 2\theta \cdot \alpha^{2\frac{1}{\theta}-1}}{-1} = 2 - 2\frac{1}{\theta} \quad (2.28a)$$

Cuanto mayor sea θ , más alta será la dependencia en la cola superior. El coeficiente λ_{inf} es nulo:

$$\lambda_{\text{inf}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha^{2\frac{1}{\theta}}}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha^{2\frac{1}{\theta}-1}}{1} = 0$$

b) Cópula de Clayton.

$$f(\alpha) = (2 \cdot \alpha^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}.$$

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{\theta} (-\theta) \cdot 2 \cdot \alpha^{-\theta-1} (2 \cdot \alpha^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} = 2 \cdot \alpha^{-\theta-1} (2 \cdot \alpha^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1}.$$

$$\lambda_{\text{sup}} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2\alpha + (2 \cdot \alpha^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{1 - \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{-2 + 2 \cdot \alpha^{-\theta-1} (2 \cdot \alpha^{-\theta} - 1)^{-(\theta+1)/\theta}}{1 - \alpha} =$$

$$\lim \left(2 - \frac{2}{\alpha^{\theta+1} (2 \cdot \alpha^{-\theta} - 1)^{(\theta+1)/\theta}} \right) = 2 - 2 = 0.$$

$$\lambda_{\text{inf}} = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{2}{\alpha^{\theta+1} (2 \cdot \alpha^{-\theta} - 1)^{(\theta+1)/\theta}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{2}{\alpha^{\theta \cdot (\theta+1)/\theta} (2 \cdot \alpha^{-\theta} - 1)^{(\theta+1)/\theta}} =$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{2}{(2 - \alpha^\theta)^{(\theta+1)/\theta}} = 2^{-1/\theta} \quad (2.28b)$$

Como era de esperar, la cópula de Clayton presenta dependencia en la cola inferior, exclusivamente, que será tanto mayor cuanto más grande sea θ .

c) Cópula de Frank.

$$f(\alpha) = -\frac{1}{\theta} \text{LN} \left[1 + \frac{(e^{-\theta\alpha} - 1)^2}{e^{-\theta} - 1} \right]; \quad f'(\alpha) = \frac{2e^{-\theta\alpha} \cdot (e^{-\theta\alpha} - 1) / (e^{-\theta} - 1)}{1 + \frac{(e^{-\theta\alpha} - 1)^2}{e^{-\theta} - 1}}$$

Observemos que $f'(1) = 2$; y $f'(0) = 0$; por tanto,

$$\lambda_{\text{sup}} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{-2 + f'(\alpha)}{-1} = 0; \quad \text{y también } \lambda_{\text{inf}} = 0.$$

La simetría de esta cópula es congruente con la igualdad de ambos coeficientes de dependencia que, además, son nulos como ocurría en la cópula gaussiana.

7. “FUNCIONES COPULATIVAS” Y DISTRIBUCIONES MULTIVARIANTES

Ya hemos visto que el Teorema de Sklar⁶¹ nos dice que a partir de una cópula y de unas distribuciones marginales puede obtenerse una distribución multivariante. Éste es el origen de la aplicación más interesante de las cópulas. Con ellas podemos formar funciones de distribución. Al separar las “piezas” que integran la distribución multivariante (cópula por una parte y márgenes por otra) y ser éstas susceptibles de combinarse entre sí, podemos formar una gran variedad de funciones de distribución.

Sea $C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ una cópula de d dimensiones y las F_i ($i = 1, 2, \dots, d$) sus respectivas distribuciones marginales continuas; si hacemos $u_i = F_i(x_i)$ obtenemos

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = C(F_1, F_2, \dots, F_d) = F(x_1, x_2, \dots, x_d)$$

que es la función de distribución resultante, también llamada “metadistribución”. Calculemos ahora la función de densidad conjunta $f(x_1, x_2, \dots, x_d)$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d) = \frac{\partial^d F(x_1, x_2, \dots, x_d)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_d} = \frac{\partial^d C(u_1, u_2, \dots, u_d)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_d} f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_d(x_d) \quad (2.29)$$

en donde las $f_i(x_i)$ son las densidades marginales. Es decir, que la función de densidad conjunta es igual a la función de densidad de la cópula, multiplicada por el producto de las densidades marginales. La expresión (2.29) ha de manejarse con cuidado porque, tal como acabamos de escribirla, en el primer miembro aparecen x_1, x_2, \dots, x_d como variables independientes y en el tercero, además de ellas, u_1, u_2, \dots, u_d .

Ya vimos en (2.2b) el caso de la cópula gaussiana bivalente, cuya densidad escribimos ahora como $c(u, v) = \varphi[r(u), s(v)] / \{\varphi[r(u)] \cdot \varphi[s(v)]\}$ (en donde $\varphi(r, s)$ representa la función de densidad normal bivalente y $\varphi(\cdot)$ la densidad de la variable normal

⁶¹ Epígrafe 2.

univariante); las funciones $r(u)$ y $s(v)$ son las transformadas inversas según dicha normal univariante, es decir que:

$$r(u) = \Phi^{-1}(u), s(v) = \Phi^{-1}(v),$$

siendo $\Phi(\cdot)$ la función de distribución normal univariante. Si nos ceñimos al caso bivalente y deseamos aplicar [2.29] cuando se trata de dos variables X, Y con cópula gaussiana y márgenes con funciones de distribución $F_X(x)$ y $F_Y(y)$ y densidades $f_X(x), f_Y(y)$ resultará:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} f_X(x) f_Y(y) = \frac{\varphi[r(u),s(v)]}{\varphi(r(u))\varphi(s(v))} f_X(x) f_Y(y)$$

Pero u y v son funciones de x e y , respectivamente, al ser $u = F_X(x)$, $v = F_Y(y)$ y por eso podemos escribir:

$$f(x,y) = \frac{\varphi\{r[u(x)],s[v(y)]\}}{\varphi\{r[u(x)]\}\varphi\{s[v(y)]\}} f_X(x) f_Y(y)$$

La función $f(x, y)$ representada en la Figura 2.3(b) por medio de sus curvas de nivel es la densidad de una distribución con cópula Gauss con $\rho = 0,4$ y márgenes exponenciales⁶² con parámetro $a=2$.

Ejemplo 2.7: Densidad de probabilidad de una “metadistribución” Gauss-exponencial.

Tomaremos la anterior función $f(x,y)$ con los expresados parámetros para ilustrar cómo calcular la densidad de probabilidad en el punto en que las variables exponenciales tomen, por ejemplo, los valores $x = 5, y = 3$; en ellos la ordenada de la función de distribución exponencial respectiva es $u = 1 - e^{-5/2} = 0,9179$; $v = 1 - e^{-3/2} = 0,7769$. En una distribución normal (0,1) el valor r que corresponde a una probabilidad acumulada igual a 0,9179 es 1,3911; y el valor s tal que $\Phi(s) = 0,7769$ es $s = 0,7618$. Por tanto, la densidad buscada será:

$$f(5,3) = \frac{\varphi\{0,9179;0,7618\}}{\varphi\{0,9179\}\varphi\{0,7618\}} \frac{1-0,9179}{2} \frac{1-0,7618}{2}$$

⁶² Por tanto, su función de distribución es $E(x) = 1 - e^{-x/a}$.

Las dos últimas fracciones equivalen, cada una, a la correspondiente densidad exponencial, puesto que $u = 1 - e^{-x/2}$; como la densidad es $-e^{-x/2}/2$, ésta se identifica con la primera de ambas fracciones y otro tanto cabe decir respecto de Y en cuanto a la última fracción.

$$f(5,3) \approx \frac{0,0643}{0,1516 \times 0,2985} \times 0,041 \times 0,1115 \approx 0,0065.$$

Camino parecido hay que seguir para obtener la función de densidad de la otra cópula implícita que hemos visto, la cópula t .

En la Figura 2.3(a) tenemos la densidad de la metadistribución Gauss-lognormal. Esta función puede obtenerse por el mismo procedimiento que acabamos de describir, pero también representando directamente la función de densidad lognormal bivalente, es decir,

$$f(x, y) = \frac{\text{EXP} \left[\frac{0,5 \cdot \left(\left(\frac{\text{LN}(x) - \mu}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{\text{LN}(y) - \mu}{\sigma} \right)^2 - 2 \cdot \rho \cdot \frac{\text{LN}(x) - \mu}{\sigma} \cdot \frac{\text{LN}(y) - \mu}{\sigma} \right)}{1 - \rho^2} \right]}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2 \cdot x \cdot y \cdot \sqrt{(1 - \rho^2)}}$$

con los valores $\mu = 0,346$; $\sigma = 0,832$; $\rho = 0,4$.

Cuando la cópula a la que conectamos las distribuciones marginales es de carácter explícito, el proceso es mucho más sencillo⁶³. Tomemos como ejemplo la cópula de Gumbel, a la que vinculamos dos distribuciones marginales iguales de tipo exponencial con parámetro $a=2$. La función de distribución que combina ambas características (cópula y márgenes) se obtiene al sustituir las variables u y v de dicha cópula, por su equivalencia en la distribución exponencial, es decir, $u = 1 - e^{-x/2}$; $v = 1 - e^{-y/2}$. La función de densidad $f(x, y)$ será, como siempre, el producto

⁶³ En Venter (2002) hay varios gráficos que permiten comparar las densidades de diversas distribuciones resultantes de la conexión de varios tipos de cópulas con densidades logarítmico-normales.

de la densidad de la cópula, $c(u,v)$, por el de las densidades marginales. En este caso:

$$c_{\theta}[u(x), v(y)] = \frac{e^{-\frac{x}{a}} \cdot e^{-\frac{y}{a}}}{a^2}$$

c_{θ} es la densidad de la cópula de Gumbel, es decir:

$$\frac{e^{-\left(\frac{\theta}{a}(-\ln(u)) + \frac{\theta}{a}(-\ln(v))\right)} \cdot \left(\frac{\theta-1}{a}(-\ln(u))\right)^{\theta-1} \cdot \left(\frac{\theta-1}{a}(-\ln(v))\right)^{\theta-1} \cdot \left(\frac{\theta}{a}\right)^{\theta} \cdot \left(\frac{\theta}{a}\right)^{\theta} \cdot \left(\frac{\theta}{a}\right)^{\theta}}{u \cdot v \cdot \left(\frac{\theta}{a}\right)^{\theta} \cdot \left(\frac{\theta}{a}\right)^{\theta}}$$

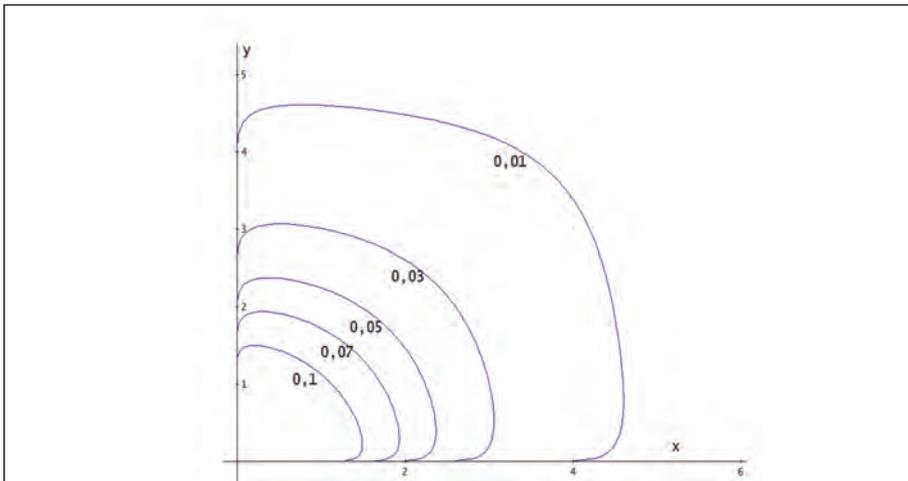


Figura 2.21: Curvas de nivel de la densidad de la distribución con cópula de Gumbel de parámetro $\theta=1,355$ y márgenes exponenciales de media y desviación típica iguales a 2.

Si, por ejemplo, $\theta=1,355$ (con lo que $\tau=0,262^{64}$) resulta, para $a=2$, la densidad $f(x,y)$ representada por medio de curvas de nivel que aparecen en la Figura 2.21.

⁶⁴ Hemos elegido $\tau=0,262$ por ser éste el de la cópula gaussiana de las distribuciones representadas en las Figuras 2.3(a) y 2.3(b), según resulta de la expresión [2.4].

8. CÓPULAS DE SUPERVIVENCIA

En algunas aplicaciones se utiliza la función de supervivencia $\text{Prob}\{X>x\} = 1 - F(x) = \bar{F}(x)$ en lugar de la función de distribución $F(x)$. Si se trata de dos variables, X, Y con función de distribución conjunta $H(x,y)$ y márgenes $F(x)$ y $G(y)$ —que en lo sucesivo designaremos por H, F , y G , respectivamente— siendo $C(u, v)$ la correspondiente cópula, tendremos que $H = C(F,G) = C(u,v)$ y la función de supervivencia conjunta será (Figura 2.22):

$$\text{Prob}\{X>x, Y>y\} = \bar{H}(x,y) = 1 - F(x) - G(y) + H(x,y).$$

En la Figura 2.23 se representa a \bar{H} para el caso en que la estructura de dependencia entre X e Y sea la cópula Gumbel con $\theta = 2$ y los márgenes sean exponenciales con parámetro 1. Llamamos $\bar{C}(u,v)$ a la función análoga a $\bar{H}(x,y)$, es decir, $\bar{C}(u,v) = \text{Prob}\{U>u; V>v\} = 1 - u - v + C(u,v)$.

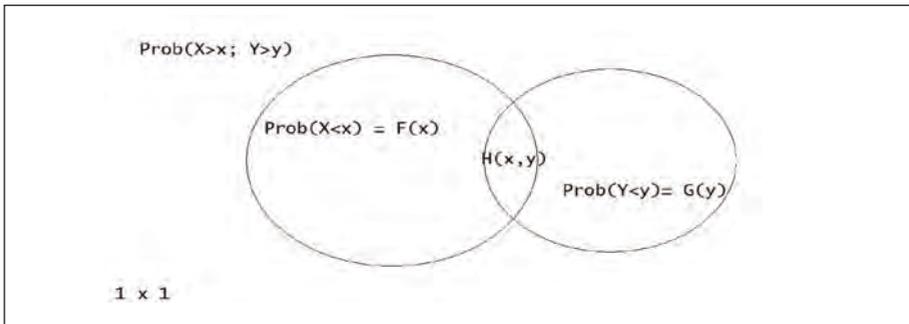


Figura 2.22.

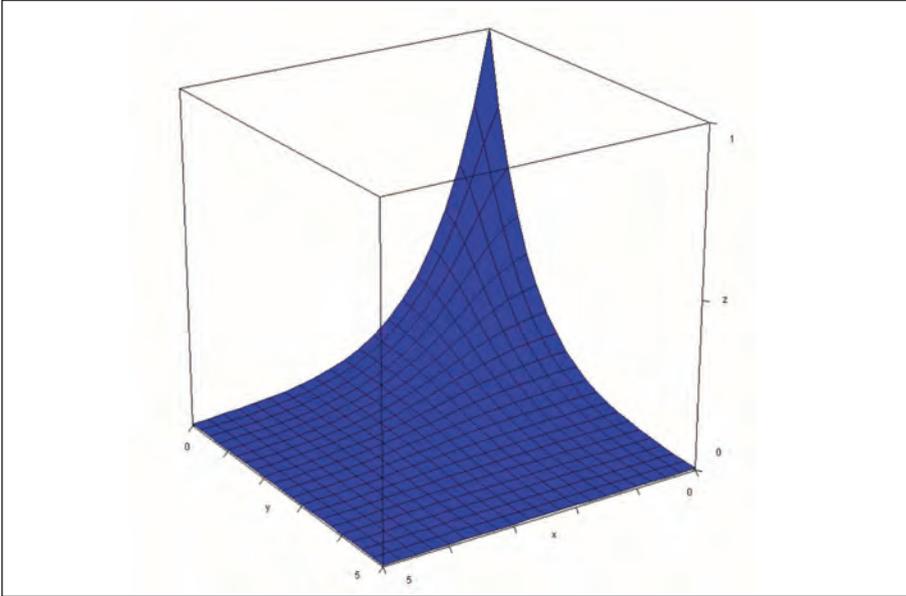


Figura 2.23: Función de supervivencia conjunta de la distribución con cópula Gumbel con $\theta = 2$ y márgenes exponenciales de parámetro 1.

Su gráfica, con los mismos datos para la estructura de dependencia que los de la Figura 2.23, está en la Figura 2.24.

Si en la función \bar{C} introducimos u y v obtenemos $\bar{C}(u,v) = \bar{H}(x,y)$ (como de costumbre, $u = F(x)$; $v = G(y)$); pero si en \bar{C} insertamos $1-u$, $1-v$, la función resultante es, evidentemente, distinta. La llamamos cópula de supervivencia, designándola por $\hat{C}(u,v)$. Es decir:

$$\hat{C}(u,v) = \bar{C}(1-u, 1-v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$$

De manera similar a $C(u,v) = C(F,G) = H(x,y)$, la relación con la cópula de supervivencia es $\hat{C}(\bar{F}, \bar{G}) = \bar{H}(x,y)$.

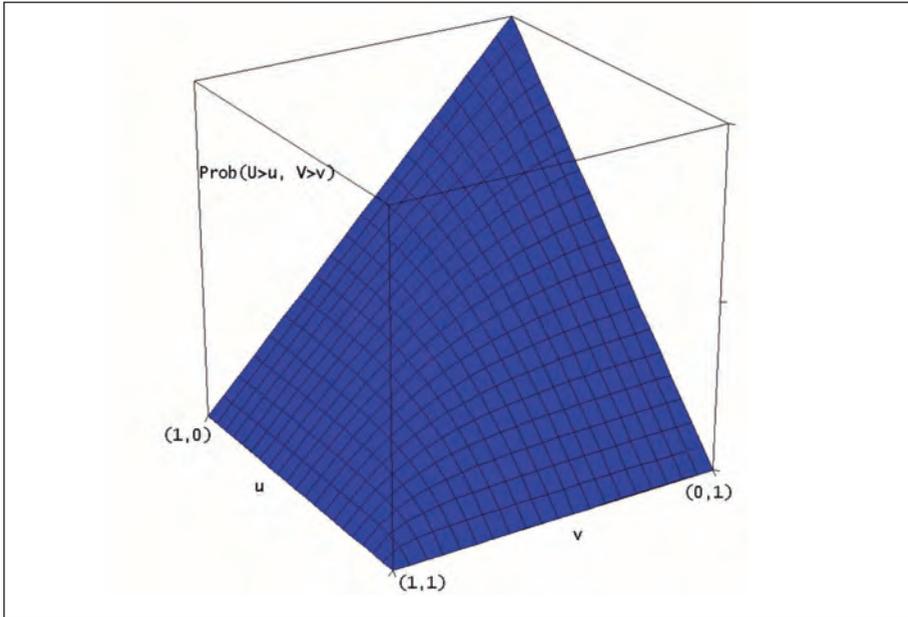


Figura 2.24: Función $\bar{C}(u,v) = \text{Prob}(U > u; V > v)$ correspondiente a la cópula de Gumbel de parámetro $\theta = 2$.

Que $\hat{C}(u,v)$ es una cópula puede confirmarse al comprobar que cumple las propiedades de estas funciones:

1) $\hat{C}(u, 1) = u + 1 - 1 + C(1-u, 0) = u$ (y lo mismo para v).

2) Si $a < b$ y $c < d$ se verifica que:

$$\hat{C}(b,d) - \hat{C}(a,d) - \hat{C}(b,c) + \hat{C}(a,c) \geq 0$$

En efecto,

$$\begin{aligned} & b + d - 1 + C(1-b, 1-d) - a - d + 1 - C(1-a, 1-d) - b - c + 1 - \\ & C(1-b, 1-c) + a + c - 1 + C(1-a, 1-c) = \\ & C(1-a, 1-c) - C(1-a, 1-d) - C(1-b, 1-c) + C(1-b, 1-d) \geq 0 \end{aligned}$$

ya que: $1-a > 1-b$ y $1-c > 1-d$ y que C es una cópula.

Observamos ahora lo siguiente:

En primer lugar, que la función $\bar{C}(u,v) = \text{Prob}\{U>u; V>v\}$ no es una cópula, según se ve claramente en la Figura 2.24. Y en segundo término, que en esta misma función $\bar{C}(u,v)=1-u-v+C(u,v)$ hemos introducido $1-u=\bar{F}$ y $1-v=\bar{C}$ en el lugar de u y v respectivamente, con lo cual $\bar{C}(1-u, 1-v) = u+v-1+C(1-u, 1-v)$. Es éste un paso fundamental en la génesis de \hat{C} porque significa pasar a contemplar o medir a \bar{C} desde el ángulo superior derecho del cuadrado $[0, 1]^2$ y no, como originariamente, desde el inferior izquierdo. Es decir, que en \bar{C} aparecen u y v que, evidentemente, son variables cuyo punto cero se encuentra en dicho ángulo inferior izquierdo. Al introducir \bar{F} y \bar{C} en lugar de u y de v trasladamos este origen desde $(0,0)$ a $(1,1)$ y con ello logramos una función \hat{C} que guarda, con respecto a C , la simetría que veremos más adelante.

En la Figura 2.25 se representan las densidades de la cópula Clayton y de su cópula de supervivencia, con parámetro $\theta=3$. En la parte (a) se ve la densidad de esta cópula Clayton como superficie en tres dimensiones, y en (c) mediante algunas curvas de nivel; en (b) y (d) está la cópula de supervivencia de dicha cópula, representada también de ambas maneras. Al observar esta Figura en sus cuatro partes, queda claro que la cópula de supervivencia tiene su densidad distribuida en $[0, 1]^2$ de manera simétrica a la cópula original:

$$\frac{\partial^2 \hat{C}(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (u + v - 1 + C(1-u, 1-v)) = \frac{\partial^2 C(1-u, 1-v)}{\partial u \partial v}.$$

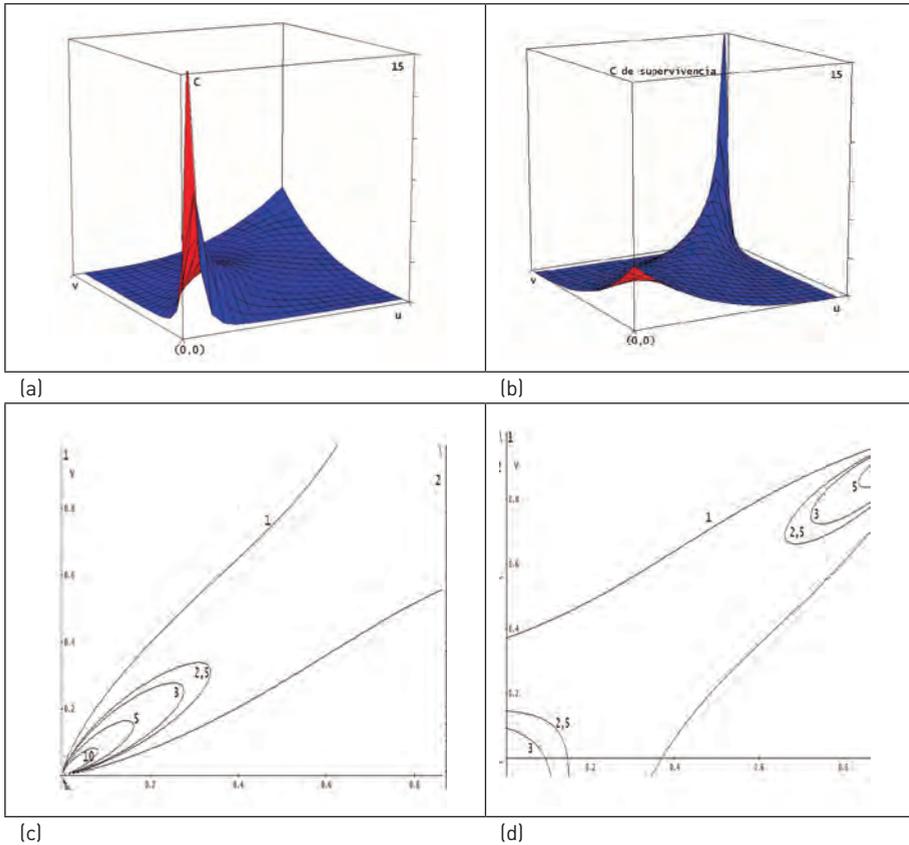


Figura 2.25: Densidad de la cópula de Clayton —(a) y (c)— y de su cópula de supervivencia —(b) y (d)— para $\theta=3$.

La cópula de supervivencia que corresponde a la cópula de Clayton y cuya densidad está representada en las partes (b) y (d) de la anterior Figura, tiene interés en las aplicaciones actuariales, porque, al igual que la cópula de Gumbel, concentra mayor densidad en la proximidad de $(1,1)$, es decir, del ángulo superior derecho de $[0,1]^2$. Esta cópula de supervivencia se conoce como cópula HRT (de su denominación en inglés *heavy right tail copula*). Su coeficiente τ es el mismo, lógicamente, que el de la cópula de Clayton de igual parámetro. La expresión de la cópula HRT es:

$$C(u,v)=u + v - 1 + [(1 - u)^{-\theta} + (1 - v)^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}$$

Ya hemos visto que $\hat{C}(u,v) = \hat{C}(F,G) = \bar{C}(\bar{F},\bar{G})$ y que, por tanto,

$$\hat{C}(\bar{F},\bar{G}) = \bar{C}(F,G) = \bar{H}(x,y).$$

La densidad en el punto (u,v) según $\hat{C}(u,v)$ coincide con la densidad en $(1-u, 1-v)$ según $C(u,v)$. Por eso algunos autores denominan a la cópula de supervivencia “*flipped copula*”⁶⁵. Una forma alternativa de obtener $\hat{C}(u,v)$, seguiría los siguientes pasos:

- a) Calcular la función de densidad de la cópula original $C(u,v)$ y situarla en el punto $(1-u, 1-v)$, es decir

$$c(1-u, 1-v) = \frac{\partial^2 C(1-u, 1-v)}{\partial u \partial v}.$$

Esta función de densidad guarda simetría respecto de $c(u,v)$.

- b) Calcular la función de distribución a que corresponde la de densidad $c(1-u, 1-v)$. Esa función de distribución es la cópula de supervivencia. En efecto:

$$\hat{C}(u,v) = \iint_{0,0}^{u,v} \frac{\partial^2 C(1-r, 1-s)}{\partial r \partial s} dr ds.$$

Hacemos el cambio de variables

$$1 - r = r'; \quad dr' = -dr$$

$$1 - s = s'; \quad ds' = -ds'$$

$$\hat{C}(u,v) = \int_1^{1-u} \int_1^{1-v} \frac{\partial^2 C(r',s')}{\partial r' \partial s'} dr' ds' =$$

$$= C(1-u, 1-v) - C(1-u, 1) - C(1, 1-v) + C(1,1) =$$

$$= u + v - 1 + C(1-u, 1-v).$$

⁶⁵ Venter (2002); coloquialmente, significa poner la cópula al revés o en dirección opuesta.

Queda comprobado, por tanto, que la cópula correspondiente a la densidad simétrica (es decir, a $c(1-u, 1-v)$) es precisamente la cópula de supervivencia.

¿Qué hemos conseguido, entonces, con la cópula de supervivencia? Obtener un modelo de estructura de dependencia distinto del original, de manera que si éste no era útil para representar el fenómeno de interés, la cópula de supervivencia constituye una alternativa más a la hora de seleccionar el modelo más adecuado.

Hemos dicho más arriba, refiriéndonos a la cópula de supervivencia de Clayton, que tiene el mismo coeficiente τ que la cópula de Clayton. Por otra parte, ya sabemos que en las aplicaciones actuariales tienen especial importancia aquellas cópulas con dependencia en la cola superior, puesto que modelizan fenómenos en que sucesos desfavorables en un cierto riesgo tiendan a ir acompañados de sucesos desfavorables en otro u otros riesgos. De ahí que tenga interés comparar la dependencia en la cola derecha de la cópula de supervivencia de Clayton con la cópula de Gumbel, que es el único modelo de los tres estudiados en el Epígrafe 4 que tiene esa propiedad.

Para hacer tal comparación, partimos de la hipótesis de que ambas cópulas —cuyos parámetros designamos como θ_G y θ_C según se trate de la cópula de Gumbel o de la de Clayton— tienen el mismo coeficiente τ de Kendall. Si ponemos el respectivo parámetro en función del coeficiente τ [expresiones (2.26) y (2.27)] y sustituimos cada expresión resultante en (2.28a) y (2.28b), resulta, designando a los respectivos coeficientes de dependencia en la cola superior, de Gumbel y de Clayton (cópula de supervivencia) como λ_G y λ_C :

$$\begin{aligned}\lambda_G &= 2 - 2^{1-\tau} \\ \lambda_C &= 2^{-(1-\tau)/(2\tau)}\end{aligned}$$

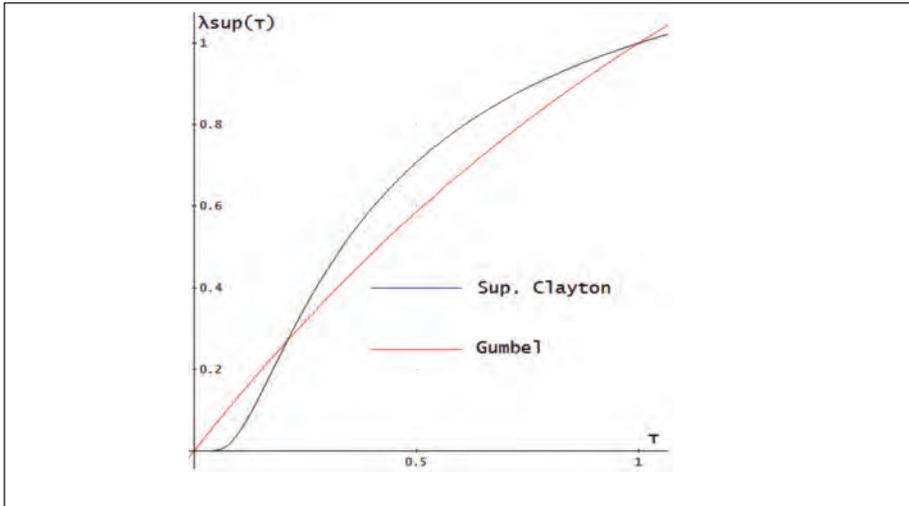


Figura 2.26: Dependencia en la cola derecha de la cópula de Gumbel y de la cópula de supervivencia de Clayton, en función del coeficiente τ .

Según puede apreciarse en la Figura 2.26, la cópula de supervivencia de Clayton presenta, para igual coeficiente τ , una dependencia en la cola superior más elevada que la de Gumbel, siempre que dicho coeficiente sea mayor que 0,21, aproximadamente, lo que supone, en la cópula de Gumbel, un parámetro igual a 1,264, y en la de Clayton de 0,528 (valores aproximados). La máxima diferencia entre el coeficiente λ_{sup} se produce para la abscisa $\tau = 0,5$. Este valor del coeficiente τ corresponde a un parámetro $\theta = 2$ tanto en la cópula de supervivencia de Clayton como en la de Gumbel.

9. EJEMPLOS DE CONSTRUCCIÓN DE CÓPULAS

Hemos visto ya algunos ejemplos de cópulas implícitas (la gaussiana, la cópula t). Expondremos a continuación unos casos más en que, por un camino u otro, se llega a la cópula a partir de la distribución conjunta.

El **primero** de estos casos lo sugiere un ejemplo propuesto por T. Schmidt (2006) y lo planteamos de la siguiente forma: Sean dos variables X , Y con la misma

función de distribución, $G(\cdot)$. Realizamos un experimento que genera un valor para cada variable. Ambos resultados son independientes entre sí. Pero si conociéramos el menor de estos dos valores y el importe del mismo, ganaríamos información acerca del otro, que necesariamente no sería inferior al primero. Por tanto, las variables $N = \min\{X, Y\}$ y $M = \max\{X, Y\}$ no son independientes y nos proponemos obtener su función de distribución conjunta y su cópula. A dicha función de distribución conjunta la designaremos $F\{x,y\} = \text{Prob}\{N \leq x; M \leq y\}$. Pues bien, $F\{x,y\}$ es:

$$F\{x,y\} = 2G[\min(x, y)]G(y) - G[\min(x, y)]^2.$$

En efecto, para que $\{N \leq x\}$ y $\{M \leq y\}$ es necesario que se produzca el suceso $S = [X \leq \min(x, y); Y \leq y]$ o bien $S' = [Y \leq \min(x, y); X \leq x]$ (de ahí que haya de multiplicarse por 2 el primer término de la expresión de $F\{x,y\}$); pero no basta eso, porque en S y S' se incluyen los sucesos $X > Y$ e $Y > X$ respectivamente. Es decir, dentro de S es posible que X supere a Y , y en S' que ocurra lo contrario; la probabilidad de que ambas variables sean inferiores a $\min(x, y)$ y que una de ellas supere a la otra, es $1/2 G[\min(x, y)]^2$. Esta probabilidad ha de multiplicarse por 2, por la misma razón que el minuendo.

La distribución marginal de N es $u = \text{Prob}\{N \leq x\} = 2G(x) - G(x)^2$: Para que X sea menor que x y, además, resulte ser N , es necesario que X no supere a x (cuya probabilidad es $G(x)$) y dentro de ello, hay que eliminar el suceso $X > Y$; $\text{Prob}\{X > Y\} = G(x) \cdot G(x)/2$. Como N puede también identificarse con Y , hay que multiplicar por 2.

En cuanto a la distribución marginal de M , $v = \text{Prob}\{M \leq y\}$, es $G(y)^2$. Si $Y = M$ ha de ocurrir que tanto X como Y no superen a Y , pero además, que $X < Y$. Es decir, $G(y) \cdot G(y)/2$, probabilidad que hay que duplicar porque también puede ser $X = M$.

A partir de las distribuciones marginales resulta:

$$x = G^{-1}(u)$$

$$y = G^{-1}(v)$$

y sustituyendo x e y en $F(x,y)$ obtenemos la cópula. Si admitimos que $G(\cdot)$ es una función de distribución uniforme $(0,1)$, entonces $u=2x-x^2$; $v=y^2$. En consecuencia,

$$x = 1 - \sqrt{1-u}$$

$$y = +\sqrt{v}$$

En este caso, la cópula es:

$$F(G^{-1}(u), G^{-1}(v)) =$$

$$= C(u,v) = 2\min[(1 - \sqrt{1-u}), \sqrt{v}] \cdot \sqrt{v} - \min[(1 - \sqrt{1-u}), \sqrt{v}]^2.$$

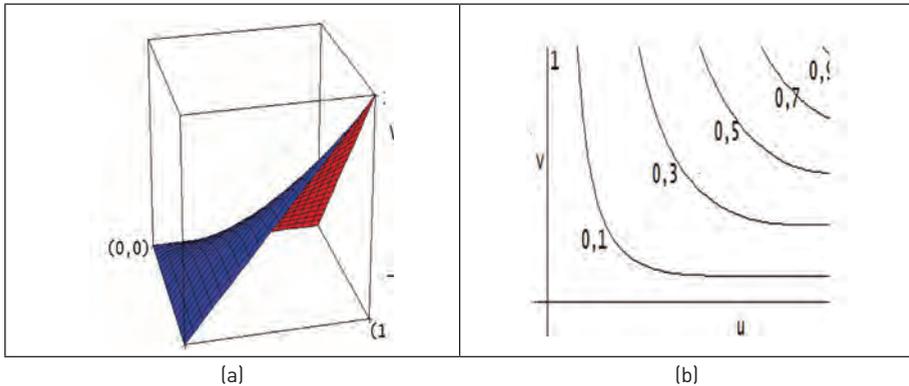


Figura 2.27: Cópula correspondiente al primer ejemplo examinado.

Su representación está en la Figura 2.27, en su parte (a) como una superficie en tres dimensiones y en la (b) mediante curvas de nivel.

La densidad de la anterior cópula (Figura 2.28) es:

$$c(u,v) = \frac{0,5}{\sqrt{v} \cdot \sqrt{1-u}} \cdot \mathbf{1}_{(1-\sqrt{1-u} < \sqrt{v})} + 0 \cdot \mathbf{1}_{(1-\sqrt{1-u} > \sqrt{v})}$$

(recordemos que la función $\mathbf{1}_{(R)}$ vale 1 si se verifica R y 0 en caso contrario).

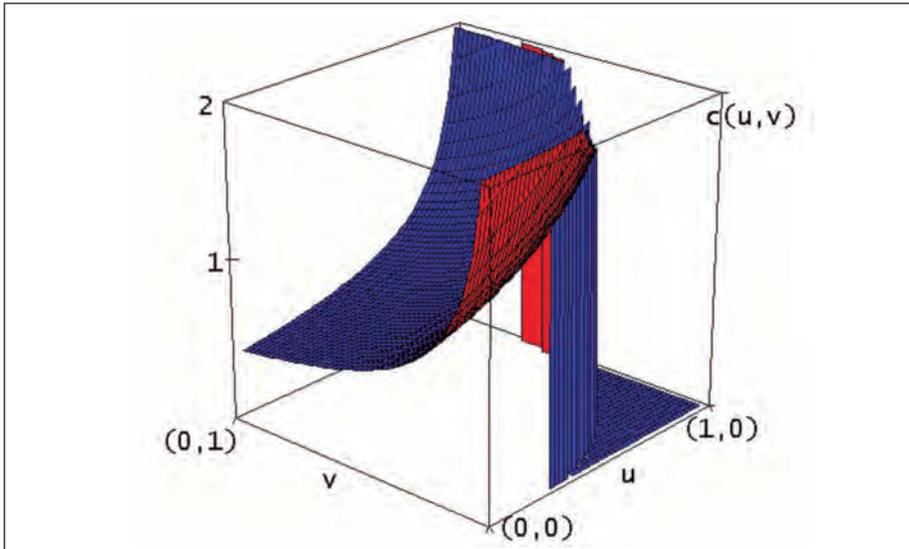


Figura 2.28: Densidad de la cópula correspondiente al primer ejemplo examinado.

Hay una discontinuidad en la curva $v = 2 - u - 2\sqrt{1 - u}$. La densidad es mayor si u y v están próximos al origen. Ello exige que N y M tengan valores cercanos a 0, lo que significa que su dependencia es mayor: Si M es pequeño, también ha de serlo N . Algo similar ocurre si u y v toman valores grandes (próximos a 1), porque también entonces la dependencia es alta. Si X está, por ejemplo, en un entorno de 0,9, necesariamente M tendrá un valor alto.

Para valores (u, v) tales que $v < 2 - u - 2\sqrt{1 - u}$ la densidad es nula, pues esta desigualdad significa que $y < x$; si N toma un valor en el entorno de x , M no puede tomar un valor próximo a y .

Por último, si x es bajo e y alto (caso que se corresponde con el ángulo inferior izquierdo de la gráfica, cerca del punto 0,1) la densidad es baja porque estamos ante un supuesto en que N está próximo a 0 y los valores posibles de M pueden oscilar en casi todo su rango.

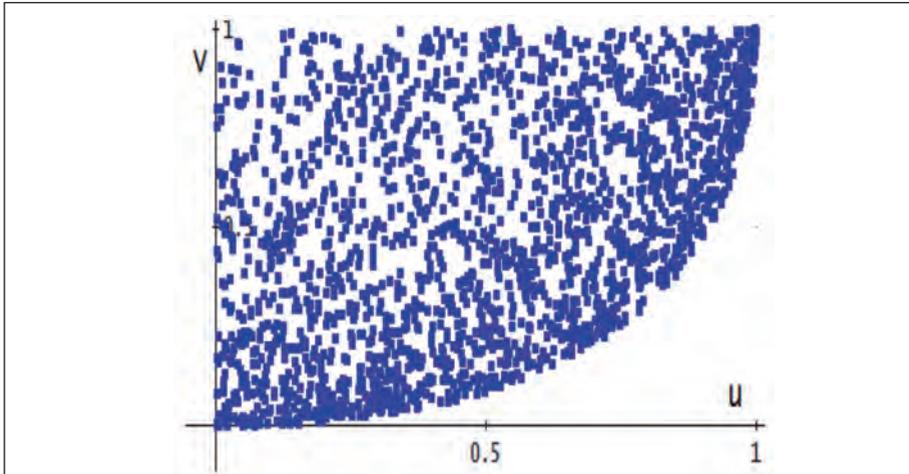


Figura 2.29: 2000 puntos simulados de la cópula representada en las Figuras 2.27 y 2.28.

En la Figura 2.29 tenemos 2000 simulaciones de esta cópula, que permiten observar su congruencia con la forma de la densidad según la Figura 2.28. Curva de discontinuidad y carácter no simétrico de esta cópula.

El **segundo** ejemplo de cómo se puede construir una cópula a partir de un problema práctico nos conduce a la cópula de Marshall-Olkin.⁶⁶

Supongamos un sistema integrado por dos elementos, 1 y 2 (por ejemplo, un avión bimotor, etc.) sometidos cada uno de ellos a una causa específica de fallo y, además, a otra causa común a ambos. Estas tres causas son sucesos aleatorios, independientes entre sí, que siguen la ley de Poisson con parámetros λ_1 , λ_2 y λ_{12} respectivamente. Por tanto, el tiempo de espera Z_i hasta que sobrevenga la causa i ($i = 1, 2, 12$) se distribuye según la función:

$$\text{Prob}\{Z_i \leq t\} = 1 - e^{-\lambda_i t}.$$

⁶⁶ Nelsen, (2006), página 52; Schmidt, (2006).

Llamamos X e Y a las variables representativas del tiempo o duración del funcionamiento de los elementos 1 y 2. Por tanto, $X = \min\{Z_1, Z_{12}\}$; $Y = \min\{Z_2, Z_{12}\}$. La probabilidad de que $\{X > x, Y > y\}$ será:

$$\begin{aligned}\bar{H}(x,y) &= \text{Prob}\{Z_1 > x\} \cdot \text{Prob}\{Z_2 > y\} \cdot \text{Prob}\{Z_{12} > \max(x,y)\} = \\ &= \exp(-\lambda_1 x) \cdot \exp(-\lambda_2 y) \cdot \exp(-\lambda_{12} \max(x,y)) = \\ &= \exp(-\lambda_1 x) \cdot \exp(-\lambda_2 y) \cdot \exp(-\lambda_{12} (x + y - \min(x,y))) = \\ &= \exp(-(\lambda_1 + \lambda_{12})x) \cdot \exp(-(\lambda_2 + \lambda_{12})y) \cdot \exp(\lambda_{12} \min(x,y)).\end{aligned}$$

$\bar{H}(x,y)$ es la función de supervivencia conjunta de las variables X e Y , cuyas distribuciones marginales (funciones de supervivencia) son:

$$\bar{F}(x) = \text{Prob}\{X > x\} = \text{Prob}\{Z_1 > x\} \cdot \text{Prob}\{Z_{12} > x\} = \exp(-(\lambda_1 + \lambda_{12})x)$$

$$\bar{G}(y) = \text{Prob}\{Y > y\} = \text{Prob}\{Z_2 > y\} \cdot \text{Prob}\{Z_{12} > y\} = \exp(-(\lambda_2 + \lambda_{12})y)$$

Hacemos: $\bar{F} = u$, $\bar{G} = v$:

$$x = -\text{LN}(u)/(\lambda_1 + \lambda_{12}); y = -\text{LN}(v)/(\lambda_2 + \lambda_{12}).$$

Recordemos [Epígrafe 8 de este Capítulo] que la cópula correspondiente a la función de supervivencia conjunta es $\tilde{C}(u,v) = \bar{C}(1-u, 1-v)$.

Por tanto en la anterior expresión de $\bar{H}(x,y)$ sustituimos a x e y por $\bar{F}^{-1}(u)$ y $\bar{G}^{-1}(v)$, respectivamente y nos queda:

$$\begin{aligned}\bar{H}(x,y) &= \bar{C}(1-u, 1-v) = \tilde{C}(u,v) = \\ &= \exp[\text{LN}(u)] \cdot \exp[\text{LN}(v)] \cdot \exp[\lambda_{12} \cdot \min(-\text{LN}(u)/(\lambda_1 + \lambda_{12}), -\text{LN}(v)/(\lambda_2 + \lambda_{12}))].\end{aligned}$$

Hacemos ahora

$$\lambda_{12}/(\lambda_1 + \lambda_{12}) = \alpha; \lambda_{12}/(\lambda_2 + \lambda_{12}) = \beta.$$

$$\hat{C}(u,v) = u.v.\exp[\min\{-\alpha.LN(u), -\beta.LN(v)\}] =$$

$$\min\{u^{1-\alpha}.v, u.v^{1-\beta}\} \quad (0 < \alpha, \beta < 1). \quad (2.30)$$

Ésta es la **cópula de Marshall-Olkin**.

La derivada $\partial^2 C/(\partial u \partial v)$ es:

$$\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} = (1-\alpha).u^{-\alpha} \cdot I_{(v^\beta < u^\alpha)} + (1-\beta).v^{-\beta} \cdot I_{(u^{-\alpha} < v^\beta)}$$

Los parámetros α y β regulan la forma de esta función. Sólo si $\alpha = \beta$ es la cópula simétrica, en cuyo caso coincide con **la cópula de Cuadras-Augé**, a la que nos referiremos al final de este Epígrafe.

Si α es grande (próximo a 1), λ_1 es pequeño en relación a λ_{12} ; ello significa que el tiempo medio de espera del suceso que afecta al elemento 1 es mucho mayor que el que afecta a ambos elementos y, por tanto, es muy frecuente que $X = \min\{Z_1, Z_{12}\}$ se identifique con Z_{12} ; y si β es también alto, Y será igual a Z_{12} con gran probabilidad, lo que se traduce en una gran dependencia entre X e Y .

Si ambos parámetros son bajos, ocurre lo contrario y se produce una gran dispersión entre X e Y .

Una observación importante en relación con la cópula de Marshall-Olkin es que se compone de una parte continua y otra singular. Esta afirmación se comprueba al calcular la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} du dv \quad (2.31)$$

y comprobar que su valor es inferior a 1. El resto de la probabilidad hasta 1 se encuentra a lo largo de la curva $u^\alpha = v^\beta$.

Veamos cómo se obtienen los componentes continuo y singular de la función $C(u,v)$ ⁶⁷. Para calcular la anterior integral hay que distinguir los dos sectores de $[0,1]^2$ separados por la curva $u^\alpha = v^\beta$, es decir:

– Si $u^\alpha \leq v^\beta$ $C(u, v) = u \cdot v^{1-\beta}$

– Si $u^\alpha \geq v^\beta$ $C(u, v) = v \cdot u^{1-\alpha}$

Si $u^\alpha = v^\beta$ los puntos se mueven a lo largo de la curva y coinciden los valores de la cópula en ambos sectores; en efecto, en los puntos de la curva se verifica que:

$$u \cdot v^{1-\beta} = v^{\beta/\alpha+1-\beta} = v^{(1+\alpha/\beta - \alpha) \cdot \beta/\alpha} = u^{1-\alpha} \cdot v$$

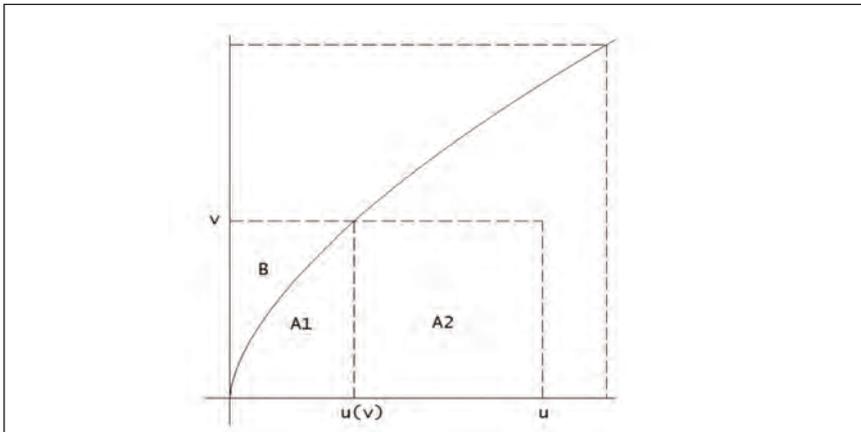


Figura 2.30.

Pues bien, el valor de la integral para cualquier par (u,v) tal que $v < u^{\alpha/\beta}$, es decir,

$$A = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2 C(s,t)}{\partial s \partial t} ds dt$$

⁶⁷ Nelsen (2006), página 54.

será la parte continua de $C(u, v)$ y equivaldrá a la suma de las probabilidades que, según la cópula $C(u, v)$ corresponden a los recintos $A_1 + A_2 + B$. En otras palabras, equivaldrá a la suma de la C-medida⁶⁸ de A_1 , más la de A_2 , más la de B , que designamos respectivamente por $C(A_1)$, $C(A_2)$, $C(B)$. La curva de la Figura 2.30 tiene como ecuación $v = u^{\alpha/\beta}$; $u(v)$ es igual a $v^{\beta/\alpha}$, siendo v la ordenada del recinto de integración. Es decir, $u(v)$ es la abscisa que corresponde, según la curva, a dicha ordenada máxima. La probabilidad del recinto de integración, es decir, $C(u, v)$ (para $v < u^{\alpha/\beta}$) está, pues, compuesta por los tres sumandos $C(A_1)$, $C(A_2)$ y $C(B)$ siguientes:

$$\begin{aligned} C(A_1) &= \int_0^{u(v)} \int_0^{s^{\alpha/\beta}} (1 - \alpha) \cdot s^{-\alpha} \cdot ds \cdot dt = \int_0^{u(v)} (1 - \alpha) \cdot s^{-\alpha} \cdot s^{\alpha/\beta} \cdot ds = \\ &= (1 - \alpha) \frac{u(v)^{-\alpha + \frac{\alpha}{\beta} + 1}}{-\alpha + \frac{\alpha}{\beta} + 1} = \frac{\beta - \alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} v^{1 - \beta + \beta/\alpha} \\ C(A_2) &= \int_{u(v)}^u \int_0^v (1 - \alpha) \cdot s^{-\alpha} \cdot ds \cdot dt = \int_{u(v)}^u (1 - \alpha) \cdot s^{-\alpha} \cdot v \cdot ds = \\ &= (u^{1-\alpha} - u(v)^{1-\alpha}) \cdot v = v \cdot u^{1-\alpha} - v^{1 - \beta + \beta/\alpha} \end{aligned}$$

Los puntos $(u, v) \in B$ cumplen la condición $v^\beta > u^\alpha$. En consecuencia, la C-medida de B es:

$$\begin{aligned} C(B) &= \int_0^v \int_0^{t^{\beta/\alpha}} (1 - \beta) \cdot t^{-\beta} \cdot dt \cdot ds = \int_0^v (1 - \beta) \cdot t^{-\beta} \cdot t^{\beta/\alpha} \cdot dt = \\ &= (1 - \beta) \cdot \frac{v^{-\beta + \frac{\beta}{\alpha} + 1}}{-\beta + \frac{\beta}{\alpha} + 1} = \frac{\alpha - \alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} v^{1 - \beta + \beta/\alpha} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} A &= C(A_1) + C(A_2) + C(B) = \frac{\beta - \alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} v^{1 - \beta + \beta/\alpha} + v \cdot u^{1-\alpha} - v^{1 - \beta + \beta/\alpha} + \\ &+ \frac{\alpha - \alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} v^{1 - \beta + \beta/\alpha} = \\ &= v \cdot u^{1-\alpha} - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} v^{1 - \beta + \beta/\alpha} \end{aligned} \tag{2.32}$$

⁶⁸ Sobre la C-medida, véase Epígrafe 6 de este Capítulo.

Observemos ahora que $v.u^{1-\alpha}$ es la expresión de la cópula para $v^\beta \leq u^\alpha$. Por tanto, el segundo término, con signo negativo, es el importe de la probabilidad concentrada en el segmento de curva $v = u^{\alpha/\beta}$ comprendido en el recinto de integración. Y observemos también que, al ser los márgenes continuos, en dicha curva no hay ningún punto que tenga masa de probabilidad. El segundo término de A puede también escribirse:

$$\frac{-\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta} (v^\beta)^{(\alpha+\beta-\alpha\beta)/(\alpha\beta)} \quad (2.33)$$

Es decir, que para (u,v) tal que $u^\alpha > v^\beta$ el valor de $C(u,v) = v.u^{1-\alpha}$ está integrado por:

- Parte singular = (2.33)
- Parte continua, el resto, dado por (2.32).

De manera similar obtendríamos, para (u,v) tal que $u^\alpha < v^\beta$, que el valor de $C(u,v) = u.v^{1-\beta}$ se compone de:

- Parte singular = $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta} (u^\alpha)^{(\alpha+\beta-\alpha\beta)/(\alpha\beta)}$
- Parte continua, el resto.

Si consideramos cualquier par $(u,v) \in [0,1]^2$ y llamamos S a la parte singular y A a la continua, obtenemos las expresiones⁶⁹:

$$S = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta} [\min(u^\alpha, v^\beta)]^{(\alpha+\beta-\alpha\beta)/(\alpha\beta)}$$

$$A = \min(u.v^{1-\beta}, v.u^{1-\alpha}) - S$$

Si $u = v = 1$ obtendremos la C-medida en $[0,1]^2$ de la parte continua y de la parte singular. Por ejemplo, si $\alpha = 0,6$ y $\beta = 0,7$, la parte continua equivale a la integral (2.31), que en este caso es igual a

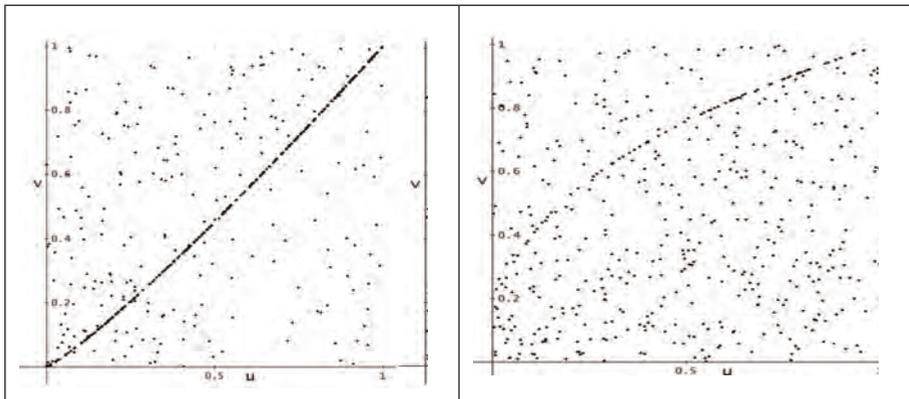
$$\int_0^1 \int_0^1 (1-0,6).u^{-0,6} \cdot \mathbf{1}_{(v^{0,7} < u^{0,6})} + (1-0,7).v^{-0,7} \cdot \mathbf{1}_{(u^{0,6} < v^{0,7})} = 0,5227$$

⁶⁹ Nelsen (2006), página 54.

La parte singular es

$$\frac{0,6 \times 0,7}{0,6 + 0,7 - 0,7 \times 0,7} = 0,4773.$$

Cuando $\alpha = \beta = 1$ toda la densidad de probabilidad está concentrada a lo largo de la curva $u^\alpha = v^\beta$ (que en este caso es la recta $v = u$) y la cópula de Marshall-Olkin coincide con la cota superior de Fréchet-Hoeffding.



(a) Parámetros: $\alpha = 0,8$; $\beta = 0,7$.

(b) Parámetros: $\alpha = 0,2$; $\beta = 0,5$.

Figura 2.31: 500 simulaciones de la cópula Marshall-Olkin.

La Figura 2.31 muestra cómo cambia el aspecto de los puntos simulados de esta cópula al variar los parámetros. Si éstos están más próximos a la unidad, los puntos aparecen más concentrados en la curva, lo que indica una más alta dependencia. Y si $\alpha > \beta$, como ocurre en la parte (a) de la Figura, la curva es convexa desde abajo.

El **tercer** ejemplo que vamos a examinar consiste en llegar a la cópula de Clayton por medio de la dependencia que genera un parámetro aleatorio, común a dos distribuciones⁷⁰. Se trata, por tanto, de variables aleatorias mixtas.

Supongamos dos variables X e Y distribuidas exponencialmente con parámetro λ .

⁷⁰ Frees y Valdez, (1998).

Hagamos que dicho parámetro sea, a su vez, aleatorio y distribuido según la función gamma (α, β) . X e Y son independientes entre sí, si sus distribuciones respectivas se condicionan a un valor de λ . Pero si λ varía, X e Y son dependientes, al estar su distribución en función del parámetro común λ .

$$\begin{aligned}\text{Prob}[X > x \mid \lambda] &= e^{-\lambda x} \\ \text{Prob}[Y > y \mid \lambda] &= e^{-\lambda y}\end{aligned}$$

La función de densidad gamma de parámetros (α, β) es:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} \cdot x^{\alpha-1}$$

Por tanto, la función de supervivencia de X es:

$$\bar{F}(x) = \text{Prob}(X > x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta \lambda} \cdot \lambda^{\alpha-1} d\lambda = \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

es decir, la distribución de Pareto. Análogamente, la función de supervivencia de Y es

$$\bar{G}(y) = \text{Prob}(Y > y) = \left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

Por el mismo razonamiento obtenemos $\text{Prob}(X > x; Y > y)$, teniendo en cuenta, además, su independencia condicionada a λ :

$$\begin{aligned}\bar{H}(x,y) = \text{Prob}(X > x; Y > y) &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \cdot e^{-\lambda y} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta \lambda} \cdot \lambda^{\alpha-1} d\lambda = \left(1 + \frac{x+y}{\beta}\right)^{-\alpha} \\ &= [\bar{F}^{-1/\alpha} + \bar{G}^{-1/\alpha} - 1]^{-\alpha}\end{aligned}$$

La equivalencia $\bar{H}(x,y) = \bar{C}(F,G) = \hat{C}(\bar{F}, \bar{G})$ ⁷¹ y la fórmula de la cópula de Clayton, que es

$$C(u,v) = (F^{-1/\alpha} + G^{-1/\alpha} - 1)^{-\alpha}$$

⁷¹ Epígrafe 8 de este Capítulo.

nos permiten concluir que el anterior resultado conduce a la cópula de supervivencia de Clayton⁷². En efecto, si $\bar{H}(x,y)=[\bar{F}^{-1/\alpha} + \bar{G}^{-1/\alpha} - 1]^{-\alpha}$, entonces la cópula de supervivencia, denominada en este caso cópula HRT⁷³, es:

$$\hat{C}(F, G) = \bar{C}(1-F, 1-G) = F + G - 1 + [\bar{F}^{-1/\alpha} + \bar{G}^{-1/\alpha} - 1]^{-\alpha}$$

Otra forma de construir una cópula consiste en combinar otras para llegar a una nueva. Éste es el caso de la cópula de Cuadras-Augé, que consiste en la media geométrica de la cópula máxima y la cópula de independencia, es decir:

$$C(u,v) = (F^{-1/\alpha} + G^{-1/\alpha} - 1)^{-\alpha}$$

Si $\min\{u,v\} = u$, entonces $C(u,v) = u \cdot v^{1-\theta}$; si $\min\{u,v\} = v$, $C(u,v) = v \cdot u^{1-\theta}$. Y para $u = v$, la función es $C(u,v) = u^{2-\theta} = v^{2-\theta}$; si, además, $\theta = 1$, la densidad de probabilidad se concentra en la recta $u = v$, como ocurre en la cópula máxima.

10. CÓPULAS DE VALORES EXTREMOS

Sean $\{X_1, Y_1\}, \dots, \{X_n, Y_n\}$ n pares independientes de variables; la distribución conjunta de cada par es $H(x, y)$ y los márgenes respectivos, $F_X(x)$ y $G_Y(y)$ (en lo sucesivo, F y G). La cópula de X y Y es C . Hacemos $M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$; $N = \max\{Y_1, \dots, Y_n\}$. ¿Cuál es la cópula de las variables M y N ? ¿Sigue siendo C o, por el contrario, es otra distinta?

Para contestar a esta pregunta empezamos por escribir que

$$\text{Prob}[M \leq x] = (F(x))^n = F_M(x)$$

$$\text{Prob}[N \leq y] = (G(y))^n = G_N(y)$$

⁷² Si comparamos la anterior expresión $C(u, v)$ con (2.20) vemos que $\alpha=1/\theta$.

⁷³ Véase Epígrafe 8 de este Capítulo.

ya que el hecho de que M y N no superen a x y a y requiere que cada una de las n variables (independientes) de cada serie sean menores o iguales que x e y . Además, la probabilidad de que $M \leq x$ y $N \leq y$ será:

$$\text{Prob}[M \leq x; N \leq y] = \{H(x,y)\}^n = \{C(F, G)\}^n = \{C(F_M^{1/n}, G_N^{1/n})\}^n = C(\{u^{1/n}, v^{1/n}\})^n, \text{ siendo}$$

$$u = F_M(x)$$

$$v = G_N(y).$$

Si llamamos $C_n(u,v)$ a la cópula de M y N , la equivalencia anterior puede expresarse:

$$C_n(u,v) = C(\{u^{1/n}, v^{1/n}\})^n$$

Ahora bien, hay cópulas $C(u,v)$ que verifican la igualdad

$$C(u,v) = C(\{u^{1/n}, v^{1/n}\})^n \text{ (para todo } n > 0) \quad (2.34)$$

es decir, la cópula de las variables $\{X_i, Y_i\}$ y la de las variables $\{M, N\}$ son la misma. En tal caso se dice que la cópula $C(u,v)$ es max-estable. Por ejemplo, la cópula de Gumbel es max-estable:

$$C(u,v) = \exp\{-[(-\text{LN}(u))^\theta + (-\text{LN}(v))^\theta]^{1/\theta}\};$$

$$\{C(u^{1/n}, v^{1/n})\}^n = \exp\{-n[(-\text{LN}(u)/n)^\theta + (-\text{LN}(v)/n)^\theta]^{1/\theta}\} =$$

$$= \exp\{-n[(-\text{LN}(u))^\theta/n^\theta + (-\text{LN}(v))^\theta/n^\theta]^{1/\theta}\} = C(u,v).$$

En cambio, la cópula de Clayton es un ejemplo de cópula que no es max-estable; de hecho, la única cópula arquimediana que es max-estable es la de Gumbel.⁷⁴ La cópula de Clayton tiene como expresión:

$$C(u,v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$$

$$\{C(u^{1/n}, v^{1/n})\}^n = (u^{-\theta/n} + v^{-\theta/n} - 1)^{-n/\theta} \neq C(u,v)$$

⁷⁴ Nelsen, (2006), página 143.

En La Figura 2.32 se representa la densidad de $[C(u^{1/n}, v^{1/n})]^n$ ($n = 5$), siendo C la cópula de Clayton con parámetro $\theta = 3$, para que sea comparable con la densidad representada en la Figura 2.25(a), a la misma escala. La comparación sugiere que al aumentar n , la cópula resultante se iría aproximando a la cópula de independencia, puesto que el efecto es equivalente a si hacemos que disminuya el parámetro en el modelo de Clayton.

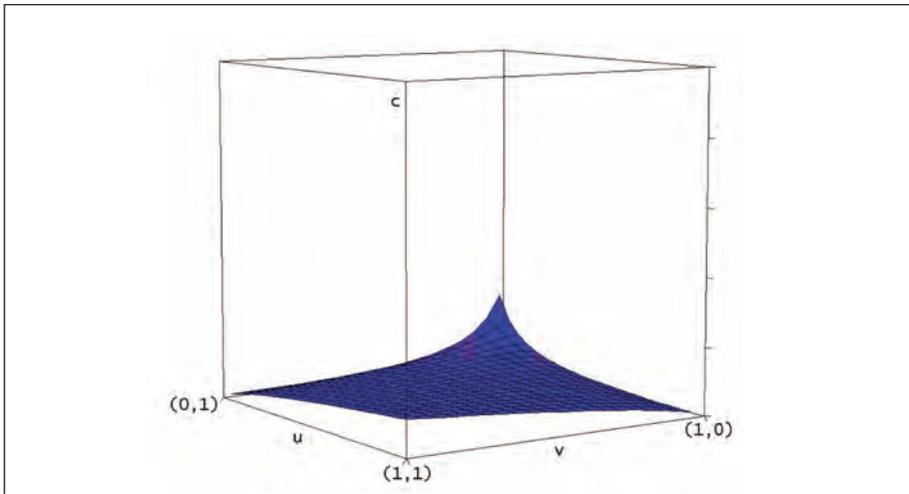


Figura 2.32: Densidad de $[C(u^{1/5}, v^{1/5})]^5$ (C = cópula de Clayton con $\theta = 3$).

Puesto que $[M, N] = [\text{máx}[X_1, \dots, X_n], \text{máx}[Y_1, \dots, Y_n]]$, la dependencia entre M y N es, en general, distinta de la que existe entre X_i e Y_i ; por tanto, no es extraño que la cópula de $[M, N]$ sea distinta de la cópula de $[X_i, Y_i]$. Sólo algunos modelos de cópula tienen la propiedad de ser max-estables.

Volvamos ahora a la expresión (2.34). Si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} [C(u^{1/n}, v^{1/n})]^n$, a este límite lo llamamos cópula de valores extremos $C_\infty(u, v)$. Los términos “cópula max-estable” y “cópula de valores extremos” son equivalentes. En efecto, si la cópula es max-estable verifica (2.34) y, por tanto se cumple para cualquier número real por grande que sea. Y si la cópula es de valores extremos, entonces también es max-estable. Al ser de valores extremos se verificará que

$$\begin{aligned}
C_{\infty}(u, v) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [C(u^{1/n}, v^{1/n})]^n = \lim_{m \rightarrow \infty} [C(u^{1/(mr)}, v^{1/(mr)})]^{mr} = \\
&= [C_{\infty}(u^{1/r}, v^{1/r})]^r.
\end{aligned}$$

Ejemplos de situaciones en que serían de aplicación las cópulas de valores extremos son la existencia en un mismo río de dos presas de alturas x e y , y el riesgo de desbordamiento o inundación por superar el nivel fluvial dichas alturas; o, en el campo asegurador, la existencia de dos riesgos cubiertos dependientes entre sí y de los que interese conocer la distribución del mayor siniestro procedente de cada uno, etcétera. Las cópulas de valores extremos tienen también amplia aplicación por la conveniencia de aprovechar ciertas propiedades matemáticas de estas cópulas, en las que no podemos entrar aquí.⁷⁵

⁷⁵ A. Cebrián, M. Denuit y P. Lambert, (2003).
Z. Bahraoui, C. Bolancé y A. Pérez Marín, (2014).
W. Hürlimann, (2014).

III. NÚMEROS Y CÓPULAS

1. LA CÓPULA EMPÍRICA

Una cópula bivalente $C(u,v)$ es una distribución de probabilidad conjunta de dos variables uniformes $(0, 1)$, que denominaremos U y V . Análogamente, una cópula empírica es una distribución de frecuencias conjuntas de dos variables estadísticas uniformes $(0,1)$. La cópula empírica es, por tanto, la vertiente muestral de la cópula probabilística. Obviamente, lo que acabamos de decir se aplica también a cualquier número de dimensiones.

El problema que plantea la cópula empírica es que las variables estadísticas a las que se refiere no son directamente observables. La muestra consiste en n pares (x_i, y_i) de manera que sólo a través de la distribución marginal de cada variable podemos obtener las frecuencias acumuladas u_i, v_j es decir, las variables estadísticas a las que se refiere la distribución de frecuencias o cópula empírica. De ahí que la definición usual de la cópula empírica se haga a partir de la muestra de n pares $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ como la función $c_n(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$:

$$c_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{\text{número de pares } (x,y) \text{ tales que } x \leq x_i, y \leq y_j}{n}$$

en donde x_i, y_j ($1 \leq (i,j) \leq n$) son los estadísticos de orden de la muestra.

La anterior función $c_n(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ puede también expresarse en términos de $u_i = \text{Frec}[x \leq x_i]$, $v_j = \text{Frec}[y \leq y_j]$ ⁷⁶ siendo Frec (variable \leq valor) la función de distribución marginal empírica respectiva. Para lograr que esta función marginal sea continua, hacemos la hipótesis de que, entre dos puntos sucesivos cualesquiera observados en la muestra, x_i, x_{i+1} , la densidad es constante.⁷⁷

⁷⁶ Capítulo V, Epígrafe 5.

⁷⁷ Capítulo V, Epígrafe 4.

Según la anterior definición, la cópula empírica de una muestra de n pares (x,y) será una matriz $n \times n$. Pero puede también representarse con una matriz $m \times m$ ($m < n$), en cuyo caso el elemento (r,s) significará la frecuencia con que se ha presentado el resultado $x \leq a, y \leq b$ (a y b son los mayores enteros que cumplen la condición $a \leq n.r/m; b \leq n.s/m$). Así, para los 10 pares (x, y) :

1.402292295	0.7344288455
6.242761505	5.149936903
1.842511966	3.382081075
5.320182172	3.957362118
2.898189821	1.776479923
-0.7218487096	1.108182432
1.975015405	1.420984141
4.893449601	4.238316959
2.506188294	3.234729338
5.34738886	2.694866817

obtenemos una cópula empírica que adopta la forma de la siguiente matriz 10 x 10:

0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3
0.1	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.4	0.4	0.4	0.4
0.1	0.2	0.3	0.3	0.3	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5
0.1	0.2	0.3	0.4	0.4	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6
0.1	0.2	0.3	0.4	0.4	0.5	0.6	0.6	0.7	0.7
0.1	0.2	0.3	0.4	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.8
0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.9
0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1

Por ejemplo, el elemento $(6, 7)$, igual a 0,6, significa la frecuencia de pares (x,y) cuyos dos miembros cumplen la condición de ser $x \leq x_6, y \leq y_7$. En efecto, x_6 e y_7

son los valores que ocupan el lugar 6 y 7 del respectivo estadístico de orden; así, $x_6 = 2,898\dots; y_7 = 3,382\dots$ ⁷⁸.

Si quisiéramos representar la anterior cópula mediante una matriz 4 x 4, tendríamos:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.7 \\ 0.2 & 0.5 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}$$

Cada columna o fila supone ahora una frecuencia acumulada de 0,25 de manera que, por ejemplo, el elemento (2, 3), es decir, 0,5 significa que el 50 por 100 de los pares (x,y) cumplen la condición de ser no superiores al estadístico de orden número 5 y 7, respectivamente, es decir, a 2,506 y 3,382⁷⁹.

Según dijimos anteriormente, transformar los pares observados (x,y) en sus correspondientes (u,v) requeriría conocer las funciones de distribución marginal; como ello no es posible en la práctica, es necesario hacer alguna hipótesis sobre ellas. Cuando adoptamos como tales a las distribuciones empíricas, la matriz $c_n(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ definida anteriormente y aquella cuyo elemento (i, j) significa el número de pares (u_i, v_j) tales que $u_i \leq i/n; v_j \leq j/n$, coinciden.

Puede también obtenerse la matriz de frecuencias

$$c_n(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) = \frac{1}{n}$$

si el par (x,y) está en la muestra, y $c_n(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) = 0$ en caso contrario. Es decir, que se trataría de la cópula empírica que en lugar de expresar frecuencias acumuladas,

⁷⁸ El estadístico de orden de x , una vez emparejado con y , forma la matriz traspuesta:

$$\begin{bmatrix} -0,721 & 1,402 & 1,842 & 1,975 & 2,506 & 2,898 & 4,893 & 5,320 & 5,347 & 6,242 \\ 1,108 & 0,734 & 3,382 & 1,420 & 3,234 & 1,776 & 4,238 & 3,957 & 2,694 & 5,149 \end{bmatrix}$$

El estadístico de orden de y es:

$$0,734 < 1,108 < 1,420 < 1,776 < 2,694 < 3,234 < 3,382 < 3,957 < 4,238 < 5,149$$

⁷⁹ $[2 \times 0,25] \times 10 = 5; [3 \times 0,25] \times 10 = 7,5.$

expresaría frecuencias. Con las cifras del ejemplo anterior, la matriz sería:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

2. AJUSTE DE CÓPULAS

La cuestión que abordamos ahora es cómo seleccionar la cópula que mejor se adapte a la muestra observada.

Hay, ante todo, una aproximación **no paramétrica**, que consiste en observar la cópula empírica y extraer las principales características de la dependencia que en ella se manifiesten. La representación gráfica de los pares de valores (u_i, v_i) podrá dar una idea del grado de dependencia y de si existe dependencia en colas, etcétera (Figura 2.10, por ejemplo).

También puede representarse gráficamente la cópula empírica y compararse con las cópulas máxima, mínima y de independencia, según se hace en las Figuras 5.5, 5.6 y 5.7 por medio de curvas de nivel.

Ejemplo 3.1: Dependencia en la cola y cópula empírica

Un ejemplo de búsqueda de la dependencia en colas en la propia cópula empírica sería el siguiente. En la Figura 2.13(b) se representan 1000 puntos simulados de la cópula de Gumbel con parámetro $\theta = 2$. A partir de los 1000 pares (u, v) elaboramos la cópula empírica bajo la forma de una matriz de

50x50 elementos. Para obtener una idea del coeficiente de dependencia en la cola superior, tratamos de determinar valores, según la cópula empírica, de la fórmula (2.11) aunque sin paso al límite (es decir, valores del cociente $\frac{\bar{C}(\alpha, \alpha)}{1-\alpha}$ para varios valores de α próximos a 1). Designaremos a estos valores por $\hat{\lambda}$. En el Cuadro 3.1a se recogen los datos obtenidos con referencia a dicha cola superior, a partir de $\alpha = 0,74$. En la Figura 3.1 se representan los puntos de abscisa α y ordenada coincidente con la correspondiente cifra de la tercera fila del Cuadro 3.1a, es decir, con los valores $\hat{\lambda}$.

α	0,74	0,76	0,78	0,80	0,82	0,84	0,86	0,88	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98
$C(\alpha, \alpha)$	0,661	0,68	0,70	0,73	0,76	0,78	0,80	0,83	0,86	0,89	0,92	0,95	0,97
$\hat{\lambda}$	0,70	0,69	0,65	0,64	0,64	0,63	0,60	0,58	0,64	0,65	0,68	0,65	0,55

Cuadro 3.1a: Aproximaciones del coeficiente de dependencia en la cola superior. Cópula empírica.

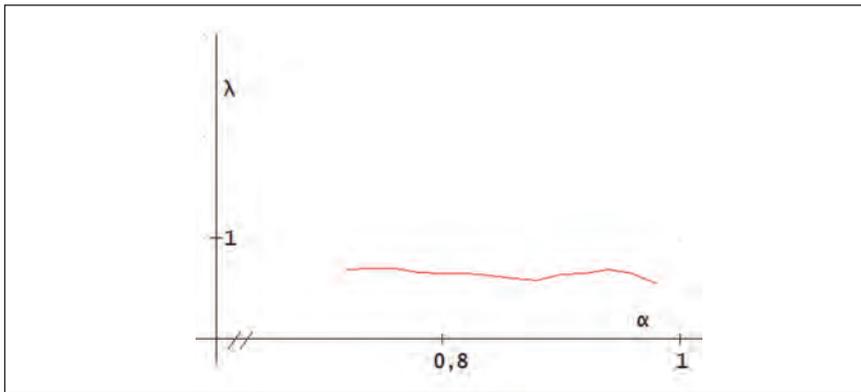


Figura 3.1: Dependencia en la cola de una simulación de la Cópula de Gumbel con $\theta = 2$

Puede observarse que cuando la abscisa α se va acercando a 1, la ordenada (es decir, $\hat{\lambda}$) se mantiene lejos de cero, en las proximidades de 0,50; ello es congruente con la cópula Gumbel, cuyo coeficiente de dependencia en la cola superior es, según (2.28.a), $2 - 2^{1/\theta} = 2 - 2^{1/2} = 0,586$.

El coeficiente de dependencia en la cola inferior que resulta de la cópula empírica también señalaría al modelo de Gumbel como posible candidato. En

efecto, recordemos que $\lambda_{\text{inf}} = C(\alpha, \alpha)/(\alpha)$; si a la vista de la matriz de la cópula empírica 50x50, elaboramos un cuadro similar al 3.1a, pero referido a valores de α cercanos a 0, obtenemos el resultado que resume el Cuadro 3.1b. A la vista de él, es evidente que para valores de α más cercanos a 0, el valor de $\hat{\lambda}$ también se aproxima a cero. El coeficiente de dependencia en la cola inferior es nulo en la cópula de Gumbel.

α	0,06	0,04	0,02
$C(\alpha, \alpha)$	0,013	0,005	0,003
$\hat{\lambda}$	0,014	0,005	0,003

Cuadro 3.1b: Aproximaciones del coeficiente de dependencia en la cola inferior. Cópula empírica.

Con el ejemplo examinado se pone de manifiesto cómo el examen de la cópula empírica permite acotar la selección de posibles modelos por medio de la dependencia en colas⁸⁰.

En segundo lugar, podemos valernos del **método gráfico** de Genest y Rivest para seleccionar el modelo de cópula arquimediana más adecuado para nuestros datos; este método utiliza las expresiones (2.23) y (2.25) y consiste en comparar la probabilidad $K(w) = \text{Prob}[C(U, V; \theta) \leq w]$ según un modelo concreto de cópula, $C(u, v; \theta)$, con la frecuencia del suceso {cópula empírica $\leq w$ }. La idea es la siguiente: una vez calculada la τ de Kendall a partir de la muestra, la expresión (2.25) permite determinar el parámetro θ del modelo de cópula arquimediana que deseemos considerar; obtenemos así una estimación de dicho parámetro por un método que recuerda el conocido “método de los momentos”. A continuación, sustituimos esta estimación $\hat{\theta}$ en el modelo de cópula y aplicamos (2.23), para obtener la función

$$K(t, \hat{\theta}) = \text{Prob}[C(U, V; \hat{\theta}) \leq t]$$

y calcular así n puntos $(t_i, K(t_i))$, que representamos gráficamente para observar si están o no próximos a la curva $K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$. Esta comparación puede también hacerse mediante un gráfico $q - q$ ⁸¹. Cabe también buscar una función analítica

⁸⁰ R. Cintas del Río, [2006].

⁸¹ Capítulo 5, Epígrafe 7.

$P(t, \hat{\theta})$ que se adapte a dichos n puntos (por ejemplo, un polinomio ajustado por mínimos cuadrados) y aplicar la medida de Frees y Valdez (1998), que viene dada por

$$\int_0^1 [K(t, \hat{\theta}) - P(t, \hat{\theta})]^2 \cdot dP(t, \hat{\theta}) \quad (3.1)$$

Esta integral da una medida de la distancia entre las funciones $K(t, \hat{\theta})$ y $P(t, \hat{\theta})$; en el Capítulo 5, Epígrafe 8, se estudia una aplicación práctica de la misma, que sirve de criterio para elegir la cópula más adecuada.

Hemos dicho que el método descrito es de aplicación a las cópulas arquimedia-
nas, porque las expresiones (2.23) y (2.25) en que se basa, son de aplicación sólo a cópulas de esta clase. Pero puede extenderse la aplicación del método a otros tipos de cópulas si es posible estimar θ a partir de la muestra y determinar valores de la función $K(t, \hat{\theta}) = \text{Prob}[C(U, V; \hat{\theta}) \leq t]$ por medio de simulaciones⁸². En caso de la cópula gaussiana, utilizaremos la relación

$$\rho = \text{sen}(\pi \cdot \tau / 2) \quad (3.2)$$

que permite calcular el parámetro ρ en función del coeficiente τ de la muestra. Esta misma fórmula puede también aplicarse a otra cópula elíptica, la t de Student, cuyo parámetro ν (grados de libertad) puede estimarse mediante máxima verosimilitud⁸³.

Estudiaremos a continuación una variante del método gráfico a la que se refiere G. Venter (2002) y que él denomina «tau acumulativo», aunque nosotros preferimos rebautizar como « **τ parcial**». Consiste este procedimiento en calcular los valores del coeficiente τ de una cópula cuando entran en el cálculo valores (u, v) no superiores a z ; es decir, obtenemos así un coeficiente para una distribución bidimensional truncada; en lugar de calcular el τ de los pares $(u, v) \in [0, 1]^2$, limitamos nuestro cálculo a $(u, v) \in [0, z]^2$, siendo $0 \leq z \leq 1$; resulta así una función $J(z)$ que podemos representar gráficamente y que ilustra cómo evoluciona la dependencia

⁸² Capítulo 5, Epígrafe 6.

⁸³ McNeil, Frey y Embrechts, (2005).

(medida con el coeficiente τ) al variar el tamaño del cuadrado $[0, z]^2$ según el modelo de cópula y el parámetro considerados. Si hacemos lo mismo con un modelo distinto, obtendremos otra curva diferente y podremos observar sus diferencias con la anterior.

Pues bien, si calculamos $J(z)$ para la cópula empírica, resultará una función a la que llamaremos \hat{j} y que compararemos con la de otros modelos para así determinar cuál es más adecuado para nuestros datos.

Dada una cópula bivalente y uniparamétrica $C_\theta(u, v)$, la expresión (2.9) permite calcular su coeficiente τ por medio de una integral doble extendida al cuadrado $[0, 1]^2$. El problema que nos planteamos es cuál será el valor del « τ parcial», al que llamaremos $\tau(z)$. Este valor es:

$$\tau(z) = 4 \frac{\int_0^z \int_0^z C(u, v) c(u, v) du dv}{C(z, z)^2} - 1 \quad (3.3).$$

Observemos, como hace G. Venter, que la integral de la expresión (2.9) equivale a una media de $C(u, v)$ ponderada según las probabilidades $c(u, v) du dv$, las cuales, evidentemente, suman la unidad en $[0, 1]^2$. Si nos limitamos, como en (3.3), al recinto de integración $[0, z]^2$, la suma de aquéllas podrá ser inferior a la unidad si $z \leq 1$ y de ahí que, para que el cálculo sea correcto, es decir, para que el resultado sea una media ponderada cuyos pesos sumen la unidad, haya que dividir la integral entre $C(z, z)$. Pero el resultado así obtenido no sería comparable con el valor de τ , al corresponder a un cuadrado de tamaño menor que el total $[0, 1]^2$ y de ahí que hayamos de dividir una segunda vez entre $C(z, z)$, con el fin de «elevar» el anterior resultado, al que correspondería a dicho cuadrado total.

Ejemplo 3.2: El método del τ parcial

Vamos a aplicar este método de ajuste a unos datos simulados de la Cópula Gumbel con parámetro $\theta=2$ (por tanto, $\tau=0,5$); es decir, sabemos de antemano que el modelo más adecuado ha de ser el de Gumbel y la utilidad de este ejercicio consiste en comprobar cómo el método del « τ parcial» puede ayudar a discriminar modelos y ayudarnos a elegir el más adecuado a los datos disponibles. Partimos de los 1000 pares (u_i, v_i) representados en la Figura 2.13(b).

Estos datos nos permiten calcular el τ parcial para unos cuantos valores de z , por ejemplo, $z=0,1; 0,2; \dots; 0,9; 1$. El resultado está en el Cuadro 3.2.

z	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1.0
\hat{J}	-0,035	0,008	0,125	0,186	0,205	0,240	0,260	0,320	0,414	0,505

Cuadro 3.2: Varios valores del “tau” parcial.
(el valor muestral de τ es, por tanto, 0,505).

A continuación, aplicamos (3.3) para obtener la función $J(z)$ para tres modelos de cópula: Gumbel, Clayton y Frank.

La Figura 3.2, además de incluir las funciones $J(z)$ de los tres modelos de cópula mencionados (todos ellos con parámetro elegido para que τ sea 0,5, es decir, $\theta=2$ en las cópulas de Gumbel y Clayton y 5,74 en la de Frank), se representa, mediante una línea quebrada, la función $\hat{J}(z)$. Puede verse cómo la cópula de Gumbel es, como era de esperar, la que mejor se ajusta a los datos, sobre todo en valores de z superiores a 0,5. Para valores inferiores el método no resulta muy fiable por el escaso número de pares que entran en el cálculo. La función $J(z)$ de la cópula de Clayton es constante e igual a 0,5, con los datos introducidos.

En **tercer lugar** nos referimos al método de máxima verosimilitud para estimar el parámetro (o los parámetros) de la cópula. Como hemos apuntado anteriormente⁸⁴ los puntos $\{u_i, v_i\}$ no son observables directamente a la vista de la muestra de n pares $\{x_i, y_i\}$ —y de ahí que se les considere como una “pseudo-muestra” — sino que subyacen en éstos y son accesibles sólo si conocemos las funciones de distribución marginal, lo que no ocurre en la práctica. Ante esta situación, caben varias alternativas⁸⁵:

⁸⁴ Epígrafe 1 de este Capítulo.

⁸⁵ T. Mikosch (2006) da una visión crítica del empleo de las cópulas y de los procedimientos para ajustar modelos de cópulas a la base de datos disponible.

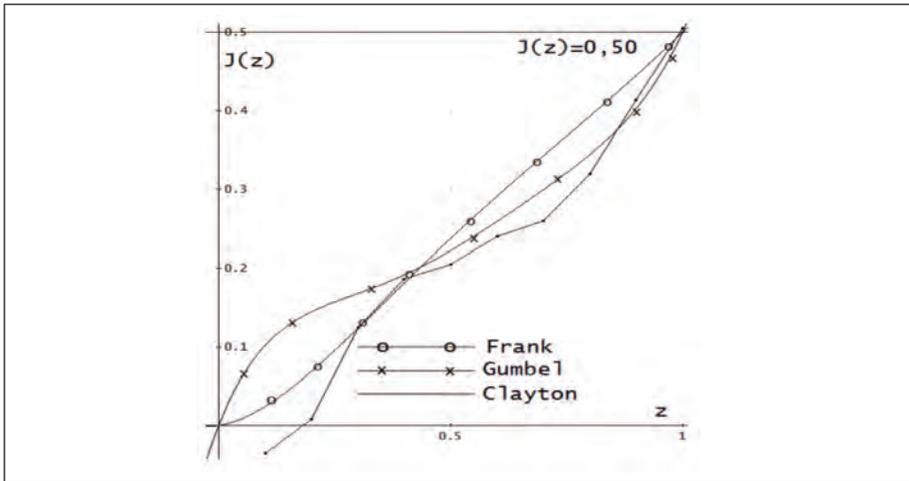


Figura 3.2: Función $J(z)$ para tres modelos de cópula y su comparación con los valores empíricos, que vienen representados por la línea quebrada.

- a) Si conocemos la familia a que pertenecen las distribuciones marginales, podremos expresar la función de densidad conjunta de (X, Y) mediante el producto de las densidades marginales multiplicado por la densidad de la cópula⁸⁶. La cuestión consistirá, entonces, en estimar un número de parámetros igual a la suma de los que figuren en dichas funciones de densidad marginal y de la cópula. Se tratará de determinar los valores que maximicen la siguiente expresión (suponiendo una distribución bivalente cuyos márgenes dependan de un solo parámetro α_i y una cópula asimismo uniparamétrica):

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \theta) = \sum_{i=1}^n \text{LN} [f_X(x_i; \alpha_1) \cdot f_Y(y_i; \alpha_2) \cdot c(F_X(x_i; \alpha_1), F_Y(y_i; \alpha_2); \theta)]$$

Las F representan las funciones de distribución marginal; las densidades se designan con la letra minúscula; n es el tamaño de la muestra, es decir, el número de pares (x_i, y_i) observados.

⁸⁶ Expresión (2.29)

b) La situación habitual es la ignorancia de las distribuciones marginales, en cuyo caso se presentan, a su vez, dos soluciones alternativas:⁸⁷

Primera, la estimación paramétrica de las distribuciones marginales, conocida como "IFM" (siglas de su denominación en inglés, *Inference functions for margins*). Este procedimiento consta de dos pasos para ajustar datos a funciones; en el primero, se buscan las funciones de distribución que mejor se adapten a las observaciones, obteniendo así modelos para los márgenes. En la segunda fase, una vez invertidos los valores (x_i, y_i) de las observaciones según dichos modelos F_x y F_y , se busca la cópula adecuada a los pares $u = F_x(x)$, $v = F_y(y)$. Es claro que la selección de las funciones F_x y F_y influirá en la cópula resultante. Los pares (u_i, v_i) no son consecuencia de la observación directa — como, por el contrario, sí lo son x_i e y_i — sino que resultan de aplicar dichas funciones F_x y F_y ; de ahí que a los pares resultantes (u_i, v_i) se les considere como "pseudo-observaciones".

Segunda, la estimación no paramétrica de las distribuciones marginales. Esta solución se basa en los estadísticos de orden de las variables univariantes observadas. La estimación máximo-verosímil de la cópula, que llevaremos a cabo a partir de los pares (u_i, v_i) obtenidos con este segundo procedimiento, se denomina "estimación máximo-verosímil canónica" o "pseudo-verosímil". Tiene la ventaja de que la cópula resultante no queda afectada por una elección inadecuada de las distribuciones marginales⁸⁸. A las distribuciones marginales propias de este método las llamaremos "distribuciones marginales empíricas" y su intervención en el proceso justifica que se califique de semiparamétrico a este método. Estas funciones de distribución marginal fueron examinadas en el Epígrafe 1 de este Capítulo, en donde vimos cómo hacer para que sean continuas; las designamos por F_x^{ec} y F_y^{ec} (el superíndice hace referencia a su condición de empírica y continua). El inconveniente de las marginales empíricas se presenta en su cola derecha, porque es allí en donde los datos suelen ser más escasos. Para evitar la falta de fiabilidad que ello supone, puede recurrirse a

⁸⁷ Véase, por ejemplo, R. Shaw y G. Spivak (2009). A. Staudt, (2010) examina con ejemplos los errores a que puede conducir una mala elección de las distribuciones marginales, al determinar la estructura de dependencia.

⁸⁸ A. Staudt, (2010).

ajustar un modelo adecuado a dicho extremo de la distribución, tal como el de Pareto o el logarítmico-normal,⁸⁹

En definitiva, la estimación se reducirá al parámetro o parámetros de la cópula (en nuestro caso, uno solo), es decir, la cuestión consistirá en maximizar

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \text{LN} [c(F_{X^{ec}}(x_i), F_{Y^{ec}}(y)); \theta].$$

Habitualmente será necesario recurrir a métodos numéricos para determinar el argumento que maximiza la función.

Es obvio que estos tres enfoques que hemos examinado sobre el ajuste de cópulas no son excluyentes entre sí, sino complementarios.

Para comparar el ajuste de varios modelos a una base de datos suele utilizarse el criterio de Akaike (*Akaike Information Criterion*, AIC), que consiste en calcular

$$\text{AIC} = -2 \cdot \text{LN}(\text{verosimilitud máxima}) + 2 \cdot (\text{número de parámetros estimados})$$

y elegir como mejor el modelo al que corresponda un menor valor de AIC. Cuando el número de parámetros estimados en los distintos modelos que se comparan es el mismo, el criterio consiste, sencillamente, en elegir aquél que tenga una verosimilitud más alta.

3. SIMULACIÓN DE CÓPULAS

Es muy útil simular cópulas para resolver ciertos problemas prácticos que presentan dificultades de cálculo. La realización de un gran número de simulaciones permite aproximarse a la probabilidad del fenómeno simulado.

Normalmente estaremos interesados en simular variables distribuidas según una determinada ley multivariante, más que en la simulación de su cópula. Pero ya

⁸⁹ McNeil, Frey y Embrechts, [2005], página 233.

sabemos que ésta vincula a la distribución conjunta con las marginales, de manera que un punto simulado de la cópula, (u_1, u_2, \dots, u_d) , permite obtener una realización de la variable conjunta (x_1, x_2, \dots, x_d) al aplicar la transformación $x_i = F_i^{-1}(u_i)$ (siendo F_i la distribución marginal de X_i).

En este Epígrafe examinaremos cómo simular cópulas, cuestión que puede dividirse en otras dos, según que la cópula que deseemos simular sea implícita o explícita. En el primer caso, la forma de proceder es la siguiente:

1. Simular la variable (X_1, X_2, \dots, X_d) distribuida según la ley cuya cópula implícita se trata de simular (por ejemplo, la variable t multidimensional). Obtenemos así d valores (x_1, x_2, \dots, x_d) .
2. Obtener valores de la cópula mediante $u_i = F_i(x_i)$ (para $i = 1, 2, \dots, d$).

Éste es el caso de las cópulas gaussiana y t , que veremos con más detalle a continuación.

Como de costumbre propondremos también un ejemplo para cada una de ambas cópulas elípticas.

Después de dichos modelos implícitos abordaremos la simulación en el caso de las cópulas arquimedianas y de Marshall-Olkin.

Cópula gaussiana. Factorización de Cholesky

El primer paso es simular el vector $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_d)'$ en donde las Y_i son normales $(0,1)$ con matriz de covarianzas Σ ⁹⁰. En virtud de (1.2) podemos escribir:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}$$

en donde \mathbf{C} es la matriz que transforma un vector esférico \mathbf{X} en el vector \mathbf{Y} .⁹¹

⁹⁰ Al ser las variables Y_i normales $(0,1)$, la matriz de covarianzas coincide con la matriz de correlaciones.

⁹¹ Capítulo I, Epígrafe 3.

Damos por resuelta la cuestión de cómo simular variables normales independientes entre sí;⁹² por tanto, si conociéramos C obtendríamos Y aplicando la anterior expresión, pero no nos es dada dicha matriz, sino la de covarianzas, Σ . Por (1.3) sabemos que $C.C' = \Sigma$ y el problema de obtener el vector Y puede resolverse con la factorización de Cholesky. A partir de una matriz Σ simétrica y definida positiva, dicha factorización consiste en encontrar una matriz triangular inferior T tal que $T.T' = \Sigma$. En efecto, si conocemos T , entonces $Y = T.X$, ya que

$$Y'.Y = X'.T'.T.X = X'.\Sigma.X = X'.C'.C.X.$$

Ejemplo 3.3: Simulación de la cópula gaussiana

Suponemos que la matriz de covarianzas Σ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.4 \\ 0.9 & 1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

la matriz triangular T sería:

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.825 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observemos que $T.T' = \Sigma$.

Y si quisiéramos simular una distribución normal trivariante con la matriz de covarianzas Σ anterior, aplicaríamos $Y = T.X$ con el siguiente resultado:

$$Y_1 = 0,4 X_1 + 0,825 X_2 + 0,4 X_3$$

$$Y_2 = 0,8 X_2 + 0,6 X_3$$

$$Y_3 = X_3$$

⁹² Nota 11, Capítulo I.

Si, por ejemplo, obtuviéramos 5 simulaciones del vector \mathbf{X} (normales 0,1 e independientes entre sí) como las siguientes (cada fila es una simulación de \mathbf{X})

$$\begin{bmatrix} 0.6948 & -1.064 & 0.08318 \\ -0.9596 & -1.302 & 0.437 \\ 0.406 & 1.23 & -0.189 \\ -0.9157 & 0.04525 & 0.2425 \\ -0.3371 & -0.1704 & 0.1742 \end{bmatrix}$$

las correspondientes simulaciones del vector \mathbf{Y} serían:

$$\begin{bmatrix} -0.566608 & -0.801292 & 0.08318 \\ -1.28319 & -0.7794 & 0.437 \\ 1.10155 & 0.8706 & -0.189 \\ -0.23194875 & 0.1817 & 0.2425 \\ -0.20574 & -0.0318 & 0.1742 \end{bmatrix}$$

Para obtener simulaciones de la cópula gaussiana, no tenemos más que aplicar la transformación $u = \Phi(y)$ (Φ =función de distribución normal 0,1) a cada elemento de \mathbf{Y} . Por ejemplo, para las 5 simulaciones del vector \mathbf{Y} anterior, obtendríamos:

$$\begin{bmatrix} 0.2854 & 0.2115 & 0.5331 \\ 0.09974 & 0.2178 & 0.6689 \\ 0.8645 & 0.808 & 0.425 \\ 0.4083 & 0.572 & 0.5958 \\ 0.4185 & 0.4873 & 0.5691 \end{bmatrix}$$

En resumen, el algoritmo para simular un vector \mathbf{Y} normal (0,1) con matriz de covarianzas Σ y su correspondiente cópula, es el siguiente:

1. Obtener la factorización de Cholesky $\Sigma = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}'$.
2. Simular un vector \mathbf{X} normal (0,1) de variables independientes.
3. Calcular $\mathbf{Y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}$.

4. Aplicar la transformación $u = \Phi(y)$, es decir, determinar la probabilidad acumulada que corresponde a cada valor simulado y según el modelo normal $(0,1)$.
5. Repetir los anteriores pasos 2º a 4º muchas veces.

Finalmente, simularemos 1000 puntos de la cópula gaussiana con parámetro $\rho = 0,7$, que representamos gráficamente en la Figura 3.3:

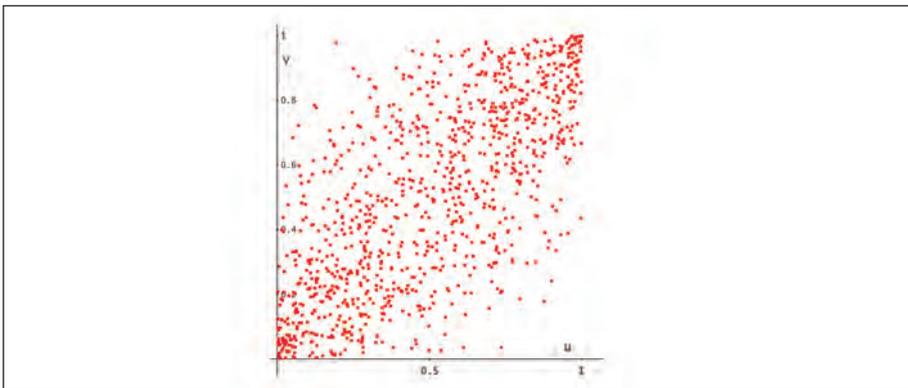


Figura 3.3: 1000 puntos simulados de la cópula de Gauss con $\rho = 0,7$.

Cópula t

Un vector X de variables t equivale a

$$X = \frac{Y}{\sqrt{S}}$$

en donde Y es un vector de variables normales $(0,1)$ con matriz de covarianzas Σ , y $S = \chi^2_\nu / \nu = (\sum_1^\nu z_i^2) / \nu$ (las z_i son normales $0,1$ e independientes, tanto entre sí como de las Y_i).

Ejemplo 3.4: Simulación de la cópula t

Vamos a simular un vector X de orden 3, de variables t de Student con parámetro $\nu = 6$ y matriz Σ igual a la utilizada en el ejemplo anterior, referente a la

simulación de la cópula gaussiana. El resultado es la siguiente matriz de 3 columnas y 5 filas (cada fila es una simulación del vector)

$$\begin{bmatrix} 0.7769 & 0.3322 & -2.006 \\ -1.187 & -1.109 & -1.127 \\ 1.126 & 1.303 & -0.204 \\ 0.9822 & 1.224 & 1.152 \\ -2.049 & -1.753 & 0.05054 \end{bmatrix}$$

A partir de la simulación del vector X de variables t , obtenemos la cópula aplicando a cada elemento de dicho vector la transformación $u = t(x)$ siendo $t(x)$ la función de distribución t de Student univariante. Para las 5 simulaciones anteriores, las correspondientes a la cópula serían:

$$\begin{bmatrix} 0.7666 & 0.6244 & 0.0458 \\ 0.14 & 0.1549 & 0.1513 \\ 0.8484 & 0.8798 & 0.4225 \\ 0.818 & 0.8665 & 0.8534 \\ 0.0432 & 0.0651 & 0.5193 \end{bmatrix}$$

Para simular un vector X de variables t y de su correspondiente cópula, se siguen, por tanto, los pasos siguientes:

1. Obtener una simulación del vector Y normal $(0,1)$ con matriz de covarianzas o correlaciones Σ según el proceso descrito para la cópula gaussiana.
2. Simular una variable χ_v^2 independiente de Y . Hacer $S = \chi_v^2/v$.
3. Obtener los cocientes $X_i = Y_i/\sqrt{S}$.
4. Calcular las probabilidades u que corresponden a cada valor simulado de t , es decir, a cada X_i .
5. Repetir el proceso.

Finalmente, simulamos 1000 puntos de la cópula t con parámetros $\rho = 0,7$ y $\nu = 6$.

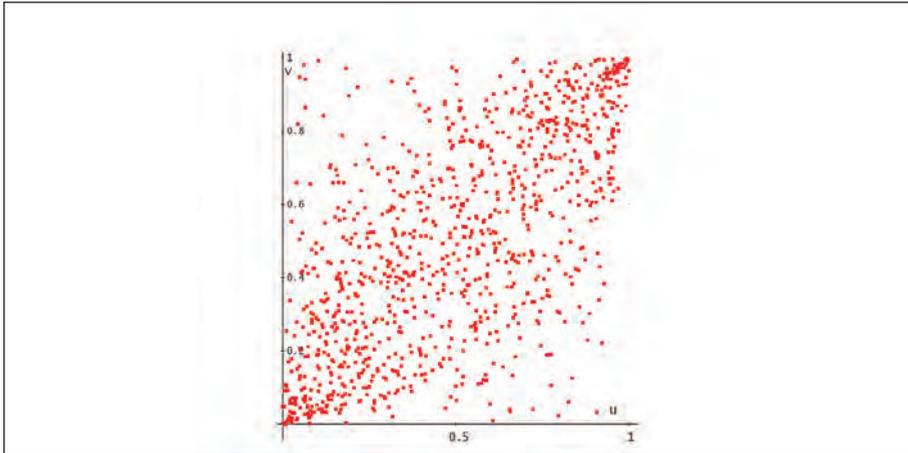


Figura 3.4: 1000 puntos simulados de la cópula t con $\rho = 0,7$ y $\nu = 6$.

En las proximidades de los vértices $(0, 1)$ y $(1, 0)$ aparecen más puntos que en los mismos lugares de la gráfica para la cópula gaussiana. Esto se debe a que la distribución t tiene unas colas más pesadas que la distribución normal. Si la correlación es moderada, pueden coincidir puntos de la cola derecha de X (lo que corresponde a valores altos de U) con puntos de la cola izquierda de Y (lo que corresponde a valores de V próximos a cero).

Procedimiento general

El método para simular cópulas que esbozaremos ahora se basa en la idea de que puede obtenerse un valor simulado de la variable X a partir de un número pseudoaleatorio uniforme $(0, 1)$, al que designamos R_i , mediante la inversión de la función de distribución $u = F(x)$ de X , es decir, resolviendo la ecuación $x_i = F^{-1}(R_i)$; ello suele exigir el recurso a métodos numéricos.

En el caso de las cópulas bivariantes $C(u, v)$, aplicar dicho método exige llegar a una función de distribución de una sola variable, lo que puede lograrse con la

función de distribución condicionada $C(u|v)$; en las cópulas multivariantes se recurre a las distribuciones marginales

$$C_i(u_1, u_2, \dots, u_d) = C(u_1, u_2, \dots, u_i, 1, 1, \dots, 1)$$

según veremos en seguida.

Así pues, para simular una cópula bivalente, el algoritmo es:

1. Generar dos números pseudo-aleatorios uniformes (0,1) e independientes, R_1 y R_2 .
2. Obtener la función de distribución condicionada $C(u|v)$ mediante (2.5) y hacer $C(u|R_1) = R_2$.
3. Encontrar la raíz de la anterior ecuación en u , a la que llamaremos u_1 ⁹³. El par $\{u_1, R_1\}$ es una simulación de la cópula C .

En la Figura 2.13b se representan 1000 puntos simulados de la cópula Gumbel con parámetro $\theta=2$, según un programa que reproduce el anterior algoritmo.

En el caso de una cópula multivariante $C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ ha de seguirse un método recurrente⁹⁴ en el que intervienen las funciones de distribución marginal de $C_i(u_1, \dots, u_i, 1, \dots, 1)$ (para $i < d$) y las funciones de distribución condicionada, buscando siempre en este proceso que aparezca una ecuación con una sola incógnita, resultante de igualar una de dichas funciones a un número pseudo-aleatorio previamente generado y sustituir uno de los valores condicionantes por otro de estos números.

⁹³ En la cópula Frank puede despejarse u algebraicamente y por tanto no hay necesidad de aplicar métodos numéricos:

$$u = \frac{1}{B} \ln \left(\frac{R_2 + B}{R_2 + e^{-R_2 + 1}} \right) + 1$$

⁹⁴ Embrechts, McNeil y Straumann, (2002). Por otra parte, T. Schmidt, (2006) describe un método de simulación aplicable a las cópulas arquimedianas que, como las examinadas en el presente trabajo, pertenecen a la clase llamada "cópulas arquimedianas de transformada de Laplace". En estas cópulas, la inversa de la función generador puede representarse como la transformada de Laplace de una cierta función, lo que puede aprovecharse para simular valores.

El proceso es el siguiente:

1. Obtener la función de distribución marginal

$$C_2(u_1, u_2) = C(u_1, u_2, 1, 1, \dots, 1).$$

2. Generar dos números pseudo-aleatorios R_1 y R_2 (como de costumbre, uniformes $(0, 1)$ e independientes entre sí).
3. Obtener la función $C_2(u_2 | u_1)$ mediante (2.5) y plantear la ecuación $C_2(u_2 | R_1) = R_2$.
4. Calcular la raíz u_2 de dicha ecuación. Resultan así los dos primeros valores simulados del vector $(U_1, U_2, \dots, U_d)'$, es decir, R_1 y la raíz u_2 , a los que llamaremos \check{u}_1 y \check{u}_2 respectivamente.
5. Obtener la función de distribución marginal $C_3(u_1, u_2, u_3)$.
6. Generar un número pseudo-aleatorio uniforme $(0, 1)$, R_3 .
7. Obtener la función $C_3(u_3 | u_1, u_2)$ por aplicación de (2.6) y plantear la ecuación $C_3(u_3 | \check{u}_1, \check{u}_2) = R_3$.
8. Determinar la raíz u_3 de dicha ecuación, a la que llamaremos \check{u}_3 .
9. Continuar este proceso hasta obtener d valores simulados:

$$\check{u}_1, \check{u}_2, \dots, \check{u}_d.$$

Ejemplo 3.5: Simulación de una cópula de Gumbel tri-variante

Como ilustración simularemos 5 realizaciones de la cópula Gumbel trivariante. Aunque no nos hemos referido hasta ahora sino a cópulas bivariantes, las introducimos ahora con el objeto de llevar a cabo el ejercicio de simulación. La cópula en cuestión es:

$$C(u, v, w) = \text{Exp}\left[-\left\{[-\text{LN}(u)]^\theta + [-\text{LN}(v)]^\theta + [-\text{LN}(w)]^\theta\right\}^{1/\theta}\right]$$

Al ser tres las variables de que depende la función C , necesitaremos dos funciones de distribución marginal y sus correspondientes funciones de distribución condicionada.

En primer lugar, la función marginal de U, V es:

$$C_2(u, v) = \text{Exp}\left[- \left[(-\text{LN}(u))^\theta + (-\text{LN}(v))^\theta\right]^{1/\theta}\right]$$

y la función de distribución condicionada $C_2(u | v)$ es:

$$\partial C_2(u, v) / \partial v =$$

$$\frac{e^{-\left((- \text{LN}(u))^\theta + (- \text{LN}(v))^\theta\right)^{1/\theta}} \cdot (- \text{LN}(v))^{\theta - 1} \cdot \left((- \text{LN}(u))^\theta + (- \text{LN}(v))^\theta\right)^{\theta(1 - \theta)/\theta}}{v}$$

Y, en segundo término, necesitaremos la función $C_3(w | u, v)$, que se identifica con la $C(w | u, v)$ y se obtiene según (2.6) como el cociente

$$[\partial^2 C(u, v, w) / \partial u \partial v] / [\partial^2 C_2(u, v) / \partial u \partial v] =$$

$$\frac{e^{-\left((- \text{LN}(u))^\theta + (- \text{LN}(v))^\theta + (- \text{LN}(w))^\theta\right)^{1/\theta}} \cdot (- \text{LN}(u))^{\theta - 1} \cdot (- \text{LN}(v))^{\theta - 1} \cdot \left((- \text{LN}(u))^\theta + (- \text{LN}(v))^\theta + (- \text{LN}(w))^\theta\right)^{\theta(2/\theta) + (\theta - 1) \cdot \left((- \text{LN}(u))^\theta + (- \text{LN}(v))^\theta + (- \text{LN}(w))^\theta\right)^{1/\theta}}}{u \cdot v \cdot \left((- \text{LN}(u))^\theta + (- \text{LN}(v))^\theta + (- \text{LN}(w))^\theta\right)^{\theta(2/\theta) + (\theta - 1) \cdot \left((- \text{LN}(u))^\theta + (- \text{LN}(v))^\theta + (- \text{LN}(w))^\theta\right)^{1/\theta}}}$$

Hagamos, por ejemplo, $\theta = 10$. Obtenidas las funciones que vamos a necesitar, el primer paso es generar dos números aleatorios⁹⁵, que resultan $R_1 = 0,3398$ y $R_2 = 0,5127$. A continuación, en $C(v | u)$ sustituimos u por R_1 e igualamos la función a R_2 . Por procedimientos numéricos determinamos la raíz v , que es $v = 0,3422$.

A continuación generamos otro número aleatorio $R_3 = 0,2311$ y hacemos

$$C(w | 0,3398; 0,3422) = 0,2311.$$

⁹⁵ Nos referimos siempre a números pseudo-aleatorios uniformes (0,1) e independientes.

Resolvemos la anterior ecuación en w con el resultado $w = 0,3130$; por tanto, la primera simulación da $(0,3398; 0,3422; 0,3130)$. El Cuadro 3.3 recoge las cifras de las cinco simulaciones practicadas.

Simulación nº	R_1	R_2	R_3	\check{u}	\check{v}	\check{w}
1	0,3398	0,5127	0,2311	0,3398	0,3422	0,3130
2	0,9311	0,5745	0,9085	0,9311	0,9322	0,9452
3	0,8353	0,7978	0,2206	0,8353	0,8535	0,8288
4	0,6458	0,7176	0,4321	0,6458	0,6606	0,6501
5	0,1992	0,3890	0,6288	0,1992	0,1881	0,2153

Cuadro 3.3: Cinco simulaciones de la cópula de Gumbel trivariante ($\theta=10$).

Cópula de Marshall-Olkin

El algoritmo para simularla sigue los pasos que, para llegar a ella, describimos en el Capítulo II, Epígrafe 9, es decir:

1. Determinar los valores de λ_1 , λ_2 y λ_{12} en función de los dos parámetros de esta cópula que son [Capítulo II, 9] α y β :

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = \alpha(1-\beta)/(\beta(1-\alpha)); \lambda_{12} = \alpha/(1-\alpha).$$

2. Generar 3 números pseudo-aleatorios uniformes $(0,1)$ e independientes, R_1, R_2 y R_{12} .
3. Hacer que $z_1 = -\text{LN}(R_1)/\lambda_1$; $z_2 = -\text{LN}(R_2)/\lambda_2$; $z_{12} = -\text{LN}(R_{12})/\lambda_{12}$.
4. Definir x e y como: $x = \min\{z_1, z_{12}\}$; $y = \min\{z_2, z_{12}\}$.
5. Obtener $u = \exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12})x]$; $v = \exp[-(\lambda_2 + \lambda_{12})y]$.
6. Repetir este proceso.

En la Figura 2.31 se representan simulaciones de la cópula Marshall-Olkin para distintos valores de sus parámetros α y β .

IV. OTRAS CUESTIONES SOBRE CÓPULAS. EJEMPLOS

1. CÓPULAS MIXTAS Y SU APLICACIÓN PRÁCTICA

Llamamos cópula mixta $C(u,v)$ a la que combina a otras dos: $C_1(u,v; \theta_1)$ y $C_2(u,v; \theta_2)$ de la siguiente forma:

$$C(u,v) = p \cdot C_1(u,v; \theta_1) + (1-p) \cdot C_2(u,v; \theta_2)$$

Su interés radica en la mayor flexibilidad que supone introducir en el modelo un parámetro más (el coeficiente de ponderación p) y de participar de las características de las dos cópulas intervinientes, C_1 y C_2 .

Observemos que la anterior función $C(u,v)$ es una cópula, puesto que⁹⁶

$$C(1,v) = p C_1(1,v; \theta_1) + (1-p) C_2(1,v; \theta_2) = v;$$

y de igual manera $C(u,1) = u$.

Además, es inmediato ver que $C(0,v) = C(u,0) = 0$.

En tercer lugar, también es fácil ver que $C(u,v)$ es 2-creciente, al serlo C_1 y C_2 .

Ejemplo 4.1: La cópula mixta

Como punto de partida para el ejemplo que vamos a estudiar, tomaremos 500 pares de números (x,y) representativos de siniestros o pérdidas observados en relación con dos riesgos, que denominaremos riesgo 1 y riesgo 2⁹⁷. Estos

⁹⁶ Ver II,2.

⁹⁷ Se trata de cifras resultantes de una simulación estocástica.

datos quedan representados en la Figura 4.1 y algunas de sus características se reflejan en el Cuadro 4.1.

Para centrarnos en la cuestión que ahora nos interesa, admitiremos que las distribuciones marginales son del tipo Pareto, con parámetros $\theta_1 = 5,2$; $\alpha_1 = 3,6$; $\theta_2 = 2,6$; $\alpha_2 = 3,6$. Ello determina que los valores medios son 2 y 1, respectivamente para el riesgo 1 y 2, mientras que las desviaciones típicas son 3 y 1,5. Llamamos F_1 y F_2 a dichas distribuciones marginales⁹⁸ y aplicando las transformaciones $u=F_1(x)$; $v=F_2(y)$ obtenemos los puntos (u_i, v_i) representados en la Figura 4.2 y que corresponden a la cópula empírica. Nos proponemos obtener un modelo que se ajuste a los datos que suponemos observados y representados en dicha Figura 4.1.

Al admitir que conocemos las distribuciones marginales el problema queda reducido al ajuste de un modelo de cópula a los datos reflejados en la Figura 4.2.

Comenzaremos por intentar dicho ajuste con los modelos de Frank y de Gumbel. La estimación máximo-verosímil de su respectivo parámetro está en el Cuadro 4.2, que incluye también las estimaciones obtenidas a través del coeficiente τ .

Adoptamos las estimaciones máximo-verosímiles y las sustituimos en la función K de (2.23). El resultado se representa en la Figura 4.3, en cuya parte (b) se amplía la zona correspondiente a las abscisas $0,6 < w < 0,9$, lo que facilita apreciar la escasa aptitud de los modelos propuestos para representar el fenómeno observado.

⁹⁸ Por tanto $F(x) = 1 - [\theta/(x + \theta)]^\alpha$.

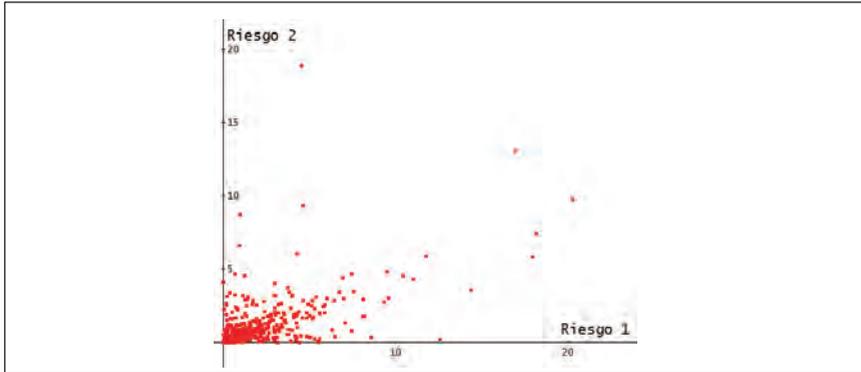


Figura 4.1: 500 puntos representativos, cada uno de ellos, de las pérdidas o siniestralidades de dos riesgos, Riesgo 1 y Riesgo 2.

	Riesgo 1	Riesgo 2	Distr. conjunta
Media	1,92	1,05	
Desv. típica	2,54	1,60	
Mediana	1,12	0,527	
VaR 99 %	13	8	
VaR 99,5 %	17,5	9,75	
Valor máximo	20,259	18,886	
Valor mínimo	0,0027	0,0005	
Coef.correlación			0,582
Coef. τ			0,4378

Cuadro 4.1: Estadísticos de los valores representados en la Figura 4.1.

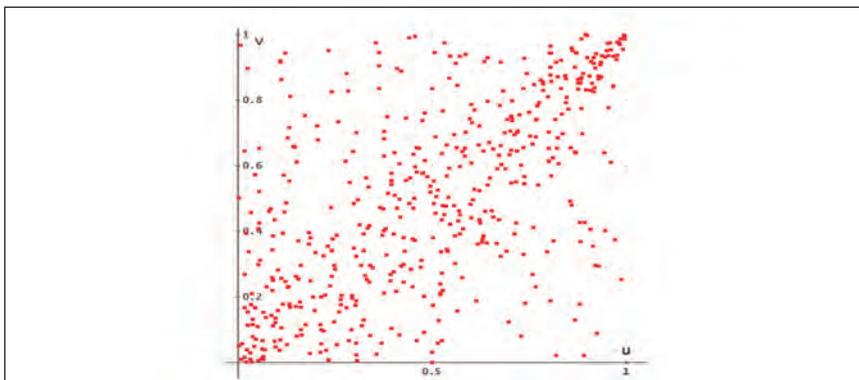


Figura 4.2: Valores de u y v correspondientes a los puntos representados en la Figura 4.1.

Modelo	$\hat{\theta}$ — en función de τ	$\hat{\theta}$ — máximo-verosímil	Log. máx. verosimilitud
Frank	4,70	4,70	115,754
Gumbel	1,779	1,730	128,273

Cuadro 4.2: Parámetros estimados de dos modelos de cópula para los datos representados en la Figura 4.2.

En esta misma Figura 4.3 se ve cómo en valores reducidos de w parece más adecuada la cópula de Frank, mientras que para $w > 0,8$, aproximadamente, resulta mejor la de Gumbel, sin que, en conjunto, ninguna de ambas sea satisfactoria. Ello hace pensar que, quizá, un modelo mixto de ambos pudiera ser más adecuado, es decir, una cópula $C(u, v)$ de la siguiente forma:

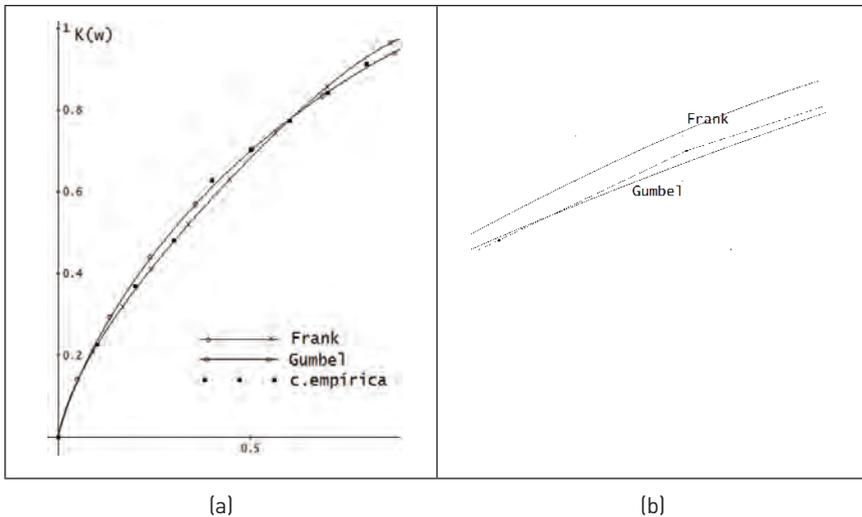


Figura 4.3: Función $K(w)$ para dos modelos de cópula y para los datos observados.

$$C(u, v) = p \cdot C_{FR}(u, v; \theta_1) + (1-p) \cdot C_{GU}(u, v; \theta_2)$$

en donde $0 \leq p \leq 1$ mientras que $C_{FR}(u, v; \theta_1)$ y $C_{GU}(u, v; \theta_2)$ representan las cópulas de Frank y Gumbel.

Tenemos, por tanto, tres parámetros, que procedemos a estimar por máxima verosimilitud⁹⁹, con el resultado que refleja el Cuadro 4.3.

El logaritmo de la verosimilitud que corresponde a las anteriores estimaciones es 136,74, superior a las cifras que figuran en el Cuadro 4.2.

Parámetro	Estimador máx.-verosímil
p	0,43
θ_1	1,71
θ_2	2,87

Cuadro 4.3: Estimación de los parámetros de la cópula mixta para los datos representados en la Figura 4.2.

La anterior cópula mixta no es arquimediana y por tanto no le es de aplicación la fórmula (2.23) ni el método gráfico de Genest-Rivest que acabamos de utilizar para rechazar los modelos de Frank y de Gumbel. Pero, según quedó expuesto en el III,2, cabe la posibilidad de estimar la función $K(w)$ mediante la simulación de Montecarlo, cosa que hemos hecho con el resultado que contiene el Cuadro 4.4.

w	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$K(w)$	0	0,221	0,3727	0,5038	0,6153	0,6976	0,7759	0,8476	0,9123	0,966

Cuadro 4.4: Varios valores de la función $K(w)$ de la cópula mixta obtenidos mediante simulación.

Por el método de los mínimos cuadrados obtenemos una función continua $K(w)$ que se adapta a los anteriores puntos y que es la siguiente:

$$K(w) = 0,116w^5 - 1,592w^4 + 3,541w^3 - 3,537w^2 + 2,471w.$$

La Figura 4.4 permite comprobar que el modelo mixto es mucho más adecuado que los dos anteriores arquimedianos. En la parte (a) de esta Figura se representa el anterior polinomio con los puntos que trata de aproximar, mientras que en la (b) está la gráfica $q-q$, que enfrenta las frecuencias empíricas

⁹⁹ Para determinar el máximo de la función de verosimilitud se ha utilizado el algoritmo de Nelder-Mead. Ver Klugman, Panjer y Willmott, (1998), página 595.

observadas (para $w = 0; 0,1; \dots, 0,9; 1$) con los valores de $K(w)$ de la cópula mixta (obtenidos mediante simulación) para dichas abscisas. Se observa en 4.4b la cercanía de los puntos $q-q$ a la línea recta.

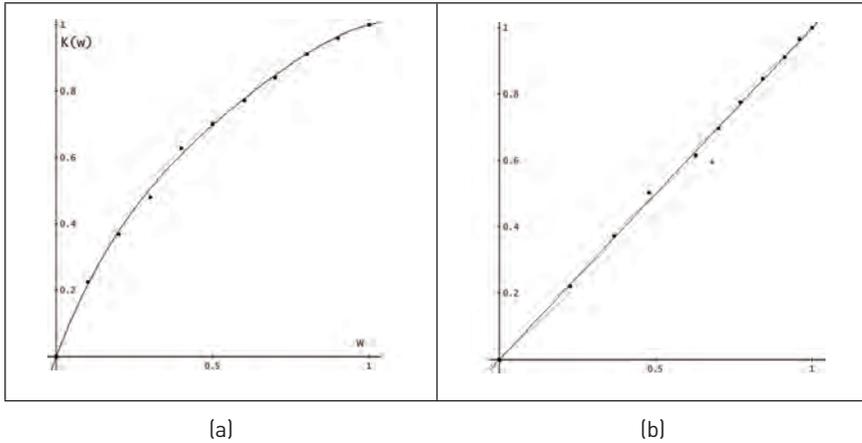


Figura 4.4: Función $K(w)$ y gráfica cuantil-cuantil para la cópula mixta.

Para confirmar la preferencia de la cópula mixta sobre los otros dos modelos contemplados, aplicamos a las diferentes cópulas la medida (3.1) propuesta por Frees y Valdez y calculamos también la de Akaike, con el siguiente resultado:

Cópula	Medida F y $V \times 10.000$	$AIC = -2 \times \text{LN}(\text{máx. verosimilitud}) + 2 \times \text{número de parámetros}$
Frank	2,74	$-2 \times 115,754 + 2 = -229,508$
Gumbel	1,43	$-2 \times 128,273 + 2 = -254,546$
Mixta	0,12	$-2 \times 136,74 + 2 = -267,486$

Cuadro 4.5: Medidas de Frees y Valdez y de Akaike.

Ambos criterios coinciden en que la mejor opción es el modelo mixto y la peor, la cópula de Frank.

2. REGRESIÓN MEDIANA

La regresión es un instrumento útil en el estudio de la dependencia entre variables estocásticas, al permitir asociar a cada valor de una de ellas una predicción sobre el valor que tomará la segunda. Esta predicción es, habitualmente, la media. La función de regresión $y = f(x)$, por tanto, nos da la predicción (valor medio) de la variable Y para cada valor de X . Si la regresión es una forma de describir la dependencia entre variables aleatorias y esta dependencia radica en la cópula, es natural buscar una regresión que dependa de dicha cópula: Ésta es la regresión mediana.

Así pues, en lugar de identificar a la predicción de la variable con su valor medio condicionado a la otra, tomamos como tal predicción a la mediana de la primera cuando la segunda tome el valor deseado. Se trata, en definitiva, del valor mediano de Y (o de X) condicionado a X (o bien a Y). En algunas aplicaciones puede ser interesante adoptar como dicha predicción otro cuantil de la variable en lugar de la mediana para cada valor de la otra y por eso hablamos, en general, de regresión cuantílica.

Si $F(x,y) = \text{Prob}\{X < x; Y \leq y\}$ la regresión de Y sobre X para el cuantil p será el valor y que satisfaga la ecuación

$$F(y|x) = p$$

para un valor de x prefijado; y si dejamos que x varíe, obtendremos la función de regresión $y = r_p(x)$ para el cuantil p .

Para obtener $F(y|x)$, recordemos que esta función equivale a

$$F(y|x) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \frac{1}{du(x)/dx}$$

siendo $u(x) = F(x)$ la función de distribución marginal de X .

Por otra parte sabemos que $F(x,y) = C[u(x), v(y)]$. De ahí que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \frac{du}{dx}$$

y, en definitiva,

$$F(y | x) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$$

A este mismo resultado se llega mediante un razonamiento más directo, si tenemos en cuenta que $F(y | x) = C(v | u)$ y que la expresión de $C(v | u)$ nos viene dada por (2.5).

La función de regresión cuantílica- p de Y sobre X a la que hemos llamado $y = r_p(x)$ resultará, por tanto, de

$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial v} = p \quad (4.1)$$

Pero lo que nos interesa es la función de regresión de Y sobre X (y no la de V sobre U). De ahí que en (4.1) hayamos de sustituir u por $u(x)$ y v por $v(y)$ para llegar a dicha función de regresión.

Ejemplo 4.2: Regresión cuantílica, curvas de regresión y su significado

Sean dos variables X, Y cuya función de distribución conjunta es

$$F(x, y) = [(1 - e^{-x})^{-2} + (1 - e^{-0,5y})^{-2} - 1]^{-0,5}$$

Se trata de variables cuya dependencia corresponde a la cópula de Clayton con parámetro $\theta = 2$; las distribuciones marginales son exponenciales, con medias 1 y 2, respectivamente. La derivada de dicha cópula con respecto a u , tiene la forma:

$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} = v^3 \cdot [u^2(1 - v^2) + v^2]^{-3/2}$$

La regresión mediana de V para $U = 0,7$, por ejemplo, resulta de resolver la ecuación

$$v^3 \cdot [(0,7^2(1 - v^2) + v^2]^{-3/2} = 0,5 \quad (4.2)$$

lo que nos da $v \approx 0,6744$. Para este valor de v , la función de distribución marginal de Y hace corresponder el importe $y = 2,244$ mientras que para $u = 0,7$ el valor de x es $x=1,20$.

Si en (4.2) sustituimos u y v por las distribuciones marginales $u(x)$ y $v(y)$ obtenemos una ecuación $g(x,y) = 0,5$; en la función de regresión mediana $y = r_{0,5}(x)$ la variable y representa las soluciones de dicha ecuación. La gráfica de esta función está en la Figura 4.5, junto con la curva de regresión para el cuantil $p = 0,9$. Se observan los valores de la regresión para $x=1,20$ según los cuantiles 0,5 y 0,9, respectivamente, que son 2,244 y 5,406. El primero de dichos valores (la mediana) puede interpretarse como la predicción para la variable Y , cuando sabemos que X ha tomado el de 1,20.

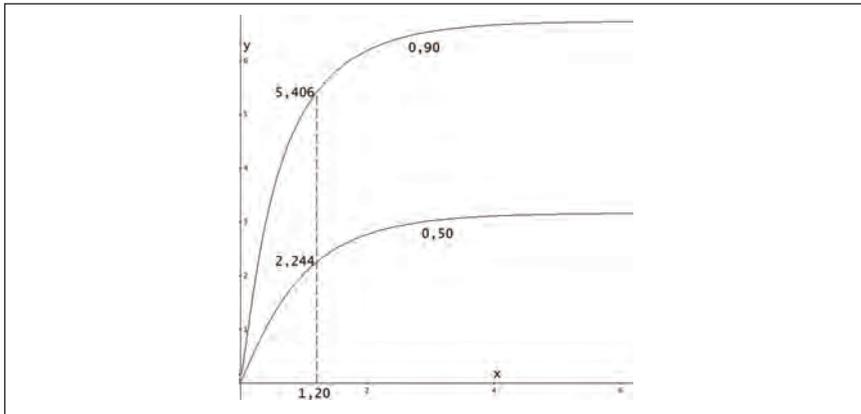


Figura 4.5: Curvas de regresión de Y sobre X para los cuantiles 0,50 y 0,90.

El segundo (5,406) significa el importe de Y que no va a superarse con probabilidad del 90%, cuando tenemos información de que X ha tomado el valor 1,20 (por tanto, el VaR al 90%).

Ejemplo 4.3: Regresión cuantílica: Aplicación a una aseguradora

Este ejemplo está basado en la cópula mixta examinada en el epígrafe anterior. Supongamos que los Riesgos 1 y 2 a que el Ejemplo 4.1 se refiere, consistieran en los importes de la siniestralidad a cargo de un asegurador en la

cobertura de cierto tipo de daños, pero así como el Riesgo 1 es la siniestralidad del seguro directo, la del Riesgo 2 es la del reaseguro aceptado, cuya información le llega con algún retraso. El asegurador tiene interés, por tanto, en hacer predicciones sobre el coste que para él supondrá el reaseguro aceptado, conociendo el incurrido en el seguro directo.

En la Figura 4.6 están las curvas de regresión del Riesgo 2 (siniestralidad del reaseguro aceptado) sobre el Riesgo 1 (del seguro directo) para los cuantiles 0,5, 0,95 y 0,99. Si, por ejemplo, en el seguro directo la siniestralidad ha sido de 30 unidades, su importe en el reaseguro aceptado puede preverse que será de 10,5, aproximadamente, sin que supere las 18,7 unidades con una probabilidad del 95%, ni las 22,6 con probabilidad del 99%.

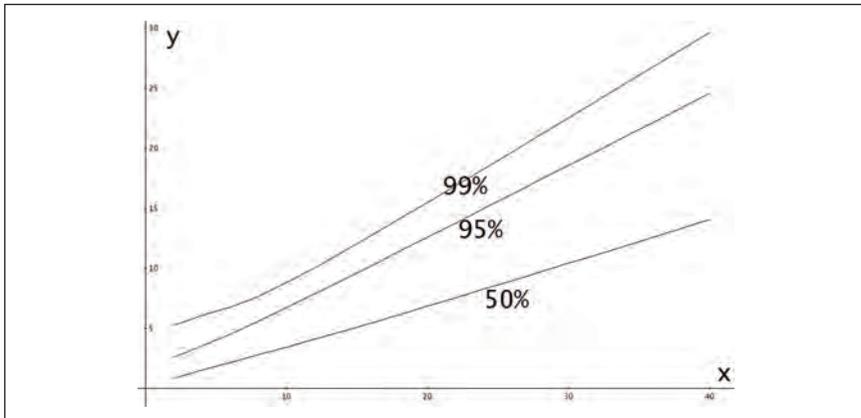


Figura 4.6: Curvas de regresión de x =Riesgo 2 sobre y = Riesgo 1 para los cuantiles 0,50, 0,95 y 0,99.

3. CÓPULAS ARQUIMEDIANAS MULTIVARIANTES

Cuando pretendemos pasar de las cópulas arquimedianas bivariantes¹⁰⁰ a las multivariantes, encontramos un nivel creciente de complejidad. Una posibilidad aparente de construir cópulas arquimedianas de dimensión superior a 2,

¹⁰⁰ Capítulo II, 4.

consistiría en aplicar reiteradamente la expresión (2.14) para ir incrementando el número de dimensiones, es decir:

$$C_2 = C(u_1, u_2) = \varphi^{-1}[\varphi(u_1) + \varphi(u_2)]$$

$$C_3 = C(u_1, u_2, u_3) = \varphi^{-1}[\varphi(C_2) + \varphi(u_3)] = \varphi^{-1}[\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \varphi(u_3)]$$

.....

$$C_n = C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \varphi^{-1}[\varphi(C_{n-1}) + \varphi(u_n)] = \varphi^{-1}[\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \dots + \varphi(u_n)] \quad (4.3).$$

Pero este procedimiento puede desembocar en funciones que no reúnen los requisitos constitutivos de las cópulas. Un ejemplo que propone Nelsen (2006)¹⁰¹ es el siguiente:

Para $\varphi(t) = 1 - t$ obtenemos la cópula bivalente $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$, es decir, la cópula mínima¹⁰². Para $n = 3$ resultaría $W(u, v, z) = \max(u + v + z - 2, 0)$ que no es una cópula, porque no es 3—creciente, según puede comprobarse calculando

$$d = W(u_2, v_2, z_2) - W(u_2, v_2, z_1) - W(u_2, v_1, z_2) - W(u_1, v_2, z_2) + W(u_2, v_1, z_1) + W(u_1, v_2, z_1) + W(u_1, v_1, z_2) - W(u_1, v_1, z_1) \text{ (para } u_1 < u_2; v_1 < v_2, z_1 < z_2).$$

Si, por ejemplo $(u_2, v_2, z_2) = (1, 1, 1)$ y $(u_1, v_1, z_1) = (1/2, 1/2, 1/2)$, $d = -0,5$. La pregunta que surge es, por tanto, qué condiciones tiene que reunir la función $\varphi(t)$ para que (4.3) sea una cópula¹⁰³; la respuesta tiene que ver con el concepto de función *completamente monótona*, que es aquella que, además de ser continua, cumple la condición

$$(-1)^k \frac{d^k g(t)}{dt^k} \geq 0 \quad (\text{para } k = 0, 1, 2, \dots).$$

¹⁰¹ Página 151.

¹⁰² Capítulo II, 2.

¹⁰³ Embrechts, Lindskog y MacNeil, (2001).

Pues bien, hay un teorema, debido a Kimberling,¹⁰⁴ que viene a afirmar que la función C_n de (4.3) será una cópula cuando $\varphi(t)$ es un generador estricto y su inversa $\varphi^{-1}(t)$ es completamente monótona para $t \geq 0$.

Si tomamos como ejemplo $\varphi(t) = [-\text{LN}(t)]^\theta$, que es el generador de la cópula de Gumbel, comprobamos que cumple las condiciones de dicho teorema y por tanto concluimos que

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \exp\{- [[-\text{LN}(u_1)]^\theta + [-\text{LN}(u_2)]^\theta + \dots + [-\text{LN}(u_n)]^\theta]^{1/\theta}\}$$

es una cópula. Pero esta función C tiene el inconveniente de que sus n variables son intercambiables entre sí en el sentido de que permutar el lugar que ocupan en la función resulta irrelevante, al ser único el generador empleado y, con ello, también único el parámetro θ ; como consecuencia, el grado de dependencia entre cualquier par de variables (u_i, u_j) ($i \neq j$) será el mismo, lo que limita la utilidad de esta cópula multivariante¹⁰⁵. Ello nos lleva a plantear si es posible construir una cópula arquimediana multivariante con distintos generadores. Una posibilidad consiste en seguir el proceso siguiente¹⁰⁶, en donde $\varphi_n \circ \varphi_j$ significa $\varphi_n[\varphi_j(t)]$:

$$C^2 = C(u, v) = \varphi^{-1}[\varphi_2(u) + \varphi_2(v)]$$

$$C^3 = C(u, v, w) = \varphi^{-1}[\varphi_1[C^2] + \varphi_1(w)] = \varphi^{-1}[\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}[\varphi_2(u) + \varphi_2(v)] + \varphi_1(w)] \quad (4.4a)$$

$$C^4 = C(u, v, w, z) = \varphi_1^{-1}[\varphi_1[C^3] + \varphi_1(z)] =$$

$$\varphi_1^{-1}\{\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}[\varphi_2 \circ \varphi_3^{-1}[\varphi_3(u) + \varphi_3(v)] + \varphi_2(w)] + \varphi_1(z)\} \quad (4.4b)^{107}$$

¹⁰⁴ Nelsen, (2006), página 152.

¹⁰⁵ La cópula arquimediana trivariante simulada en III,3 tenía esta característica, es decir, un solo parámetro.

¹⁰⁶ Seguimos aquí el trabajo citado en la anterior Nota 103.

¹⁰⁷ Para llegar a esta expresión hemos hecho $C^3 = \varphi_2^{-1}[\varphi_2 \circ \varphi_3^{-1}[\varphi_3(u) + \varphi_3(v)] + \varphi_2(w)]$

y así sucesivamente. Pero surge nuevamente la pregunta de si, en esta nueva situación (es decir, diversidad de generadores), este método para construir cópulas arquimedianas con distintos generadores conduce siempre a una función C^n que es una cópula o, por el contrario, no es suficiente la condición de que las funciones $\varphi_i(t)$ sean generadores estrictos y sus inversas completamente monótonas. La respuesta¹⁰⁸ es que se necesitan ahora más requisitos; así, cuando se trata de la cópula de Gumbel, ha de ser $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n$ ¹⁰⁹. Observemos ahora lo siguiente: Si, a partir de [4.4a] obtenemos la cópula marginal $C(u, v)$, resulta, teniendo en cuenta que, por definición de función generador, ha de ser $\varphi_1(w) = 0$, para $w = 1$,

$$C(u, v) = C(u, v, 1) = \varphi_1^{-1}[\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)) + 0] = \varphi_2^{-1}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)).$$

Y, según el mismo razonamiento, concluimos que las cópulas marginales $C(u, w)$ y $C(v, w)$ son:

$$C(u, w) = C(u, 1, w) = \varphi_1^{-1}[\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\varphi_2(u) + 0) + \varphi_1(w)] = \varphi_1^{-1}[\varphi_1(u) + \varphi_1(w)]$$

$$C(v, w) = C(1, v, w) = \varphi_1^{-1}[\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(0 + \varphi_2(v)) + \varphi_1(w)] = \varphi_1^{-1}[\varphi_1(v) + \varphi_1(w)].$$

¹⁰⁸ Embrechts, Lindskog y MacNeil, [2001].

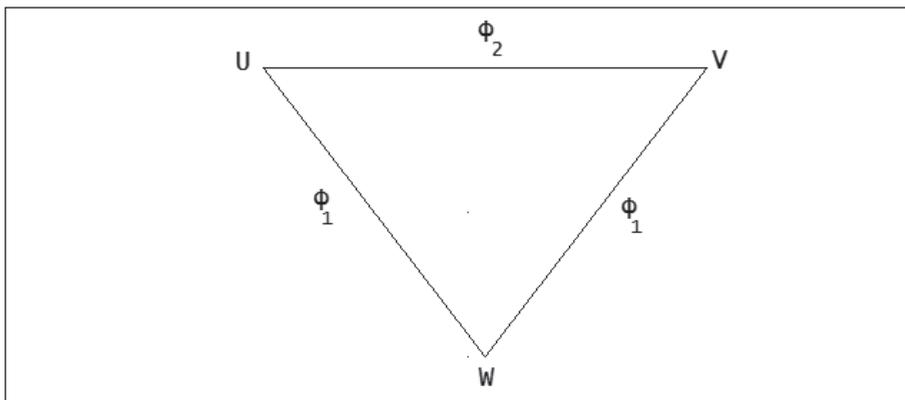
¹⁰⁹ Si no se cumple este requisito puede resultar una función que no es n-creciente. Por ejemplo, en la cópula de Gumbel trivariante con 3-1=2 generadores distintos, cuya expresión es:

$$C(u, v, w) = \exp\left(-\left(\left(-\ln(\exp(-\left(\left(-\ln(u)\right)^{\theta_2} + \left(-\ln(v)\right)^{\theta_2}\right)^{\frac{1}{\theta_2}}}\right)^{\theta_1} + \left(-\ln(w)\right)^{\theta_1}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}\right)\right)$$

si hacemos $\theta_1=10$ y $\theta_2=1,1$ (contraviniendo así el requisito de ser $\theta_1 \leq \theta_2$) tenemos que, para $(u_1, v_1, w_1) = (0,5; 0,04; 0,05)$ y $(u_2, v_2, w_2) = (0,95; 0,95; 0,1)$ el volumen según $C(u, v, w)$ del recinto definido por los anteriores puntos es negativo:

$$C(u_2, v_2, w_2) - C(u_2, v_2, w_1) - C(u_2, v_1, w_2) - C(u_1, v_2, w_2) + C(u_2, v_1, w_1) + C(u_1, v_2, w_1) + C(u_1, v_1, w_2) - C(u_1, v_1, w_1) = -0,0032.$$

Llegamos, por tanto, al siguiente esquema para representar las relaciones de dependencia entre U , V y W :



En él se ilustra que la cópula $C^3(u, v, w)$ da lugar a tres relaciones de dependencia, de las que sólo dos son distintas; la primera, representada por el generador φ_2 (ϕ_2 en la gráfica) entre U y V y la segunda y la tercera, representadas ambas por φ_1 (ϕ_1), se refiere o afecta a las relaciones entre U y W , por una parte, y entre V y W , por otra.

Si aplicamos esto mismo a (4.4b) llegamos a que en $C(u, v, w, z)$ puede haber tres relaciones de dependencia diferentes, de las cuatro existentes en total.

4. EJEMPLOS DE CÁLCULO DEL VaR

Examinaremos en este Epígrafe varios ejemplos de cálculo del cuantil de la distribución de la suma de dos o de tres riesgos.

A) Dos riesgos

Supondremos que las distribuciones marginales de ambos riesgos (representativa cada uno de ellos de cuantías de indemnizaciones a cargo de un asegurador por dos tipos de seguros, A y B) siguen la ley de Pareto. Designamos como X e Y el respectivo ratio de la siniestralidad sobre primas y admitimos que en ambos

casos su media es 1, con una varianza de 2,778. Ello determina las siguientes funciones de distribución de X e Y :

$$F_X = 1 - \frac{6,375^{3,125}}{(3x+6,375)^{3,125}}; \quad F_Y = 1 - \frac{6,375^{3,125}}{(3y+6,375)^{3,125}}$$

Admitimos también que la estructura de dependencia entre X e Y es la cópula de Gumbel con $\theta = 2$. Nuestro interés se centra en la distribución de la variable suma de ambos ratios, $X+Y$ ($X, Y, \geq 0$):

$$\text{Prob}[X + Y \leq s] = \int_0^s \text{Prob}[X + Y \leq s | Y = y] f(y) dy$$

siendo $f(y)$ la función de densidad del ratio Y . Por otra parte, la probabilidad condicionada que figura en el integrando equivale a

$$\frac{\text{Prob}[X + Y \leq s; Y = y]}{f(y)} = \frac{\text{Prob}[X \leq s - Y; Y = y]}{f(y)} = \frac{1}{f(y)} \left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right]_{x=s-y}$$

La función de distribución de la variable aleatoria suma, es decir, $S = X + Y$ será, llamando $f(x, y)$ a la función de densidad conjunta de ambos ratios, X e Y :

$$F(s) = \int_0^s \left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right]_{x=s-y} dy = \int_0^s \int_0^{s-y} f(x, y) dx dy \quad (4.5a)$$

y la función de densidad,

$$f(s) = \left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right]_{x=s-y} = \int_0^s f(s-y, y) dy. \quad (4.5b)$$

En la función de densidad conjunta $f(x, y)$ intervienen la densidad de la cópula de Gumbel y las densidades marginales, según la expresión (2.29); por tanto, para llegar a $f(s)$ seguiremos los pasos siguientes:

1. Obtener la función de densidad de la cópula de Gumbel y hacer $\theta = 2$.
2. En dicha función, sustituir u y v por las anteriores funciones F_X y F_Y .
3. Multiplicar la función resultante por las densidades marginales de X y de Y .

Con los tres pasos anteriores obtenemos la función de densidad $f(x,y)$.

4. Sustituir x por $s-y$, de forma que dicha función pasará a ser $f(s-y, y)$.

5. Integrar la función $f(s-y, y)$ desde cero a s , con respecto a y .

De este modo obtenemos la función de densidad de la suma de los ratios $S=X+Y$ que se representa en la Figura 4.7.

Conocida la función $f(s)$, podemos comparar el comportamiento en la cola derecha de dicha función con el de su aproximación logarítmica¹¹⁰. El resultado es el siguiente:

- El VaR al 99,5% según la aproximación lognormal es 19,3 (recordemos que nos estamos refiriendo a la distribución de la suma de los ratios, cuya media es, por tanto, igual a 2). Para este mismo valor, la función $f(s)$ daría lugar a una probabilidad de 99,6, aproximadamente.
- El VaR al 99,5% según la función $f(s)$ es 18,2, inferior, por tanto, al valor según la aproximación lognormal. Si en lugar de esta aproximación adoptáramos la normal (como sería propio si atendemos a la utilización de correlaciones como medida de la dependencia) el VaR al 99,5%, con los anteriores datos sería 10,2.

Veamos ahora otro supuesto, consistente en admitir las mismas distribuciones marginales que en el caso anterior, pero con cópula de independencia:

- El VaR al 99,5% según la aproximación lognormal es 14,35.
- El VaR al 99,5% calculado con la función de distribución de la suma de los ratios, nos da 13,5.

¹¹⁰ Según veremos más adelante la normativa de Solvencia II adopta, en ciertos casos, la hipótesis de distribución logarítmico-normal. De ahí el especial interés que esta ley de distribución tiene para nosotros.

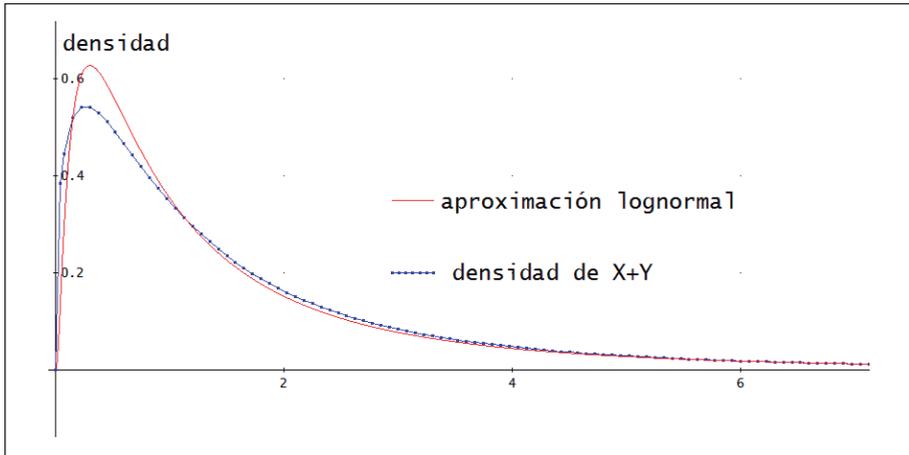


Figura 4.7. Función de densidad de la suma de los ratios de siniestralidad X e Y.

B) Tres riesgos

Primer ejemplo

El primero de los ejemplos que estudiaremos ahora se refiere a la normativa de Solvencia II. Al regular cómo se determina el capital de solvencia (SCR) del módulo “riesgo de suscripción del seguro de enfermedad”, dicha normativa distingue tres submódulos:

- a. El seguro de enfermedad que se identifica por las siglas SLT (“*Similar to Life insurance Technique*”, es decir, seguro de enfermedad planteado actuarialmente según técnica similar a la del seguro de vida).
- b. Seguro de enfermedad NSLT (“*Non-Similar to Life insurance Technique*”, es decir, restantes seguros de enfermedad).
- c. Riesgo de catástrofe en el seguro de enfermedad.

El capital obligatorio para el módulo “seguro de enfermedad”, ha de calcularse mediante la fórmula siguiente, que lleva implícita la hipótesis de normalidad en la distribución de los riesgos de suscripción de estos tres sub-módulos¹¹¹:

$$SCT_{\text{enfermedad}} = \sqrt{\sum_{i,j} \text{CorrH}(i,j) \cdot SCR(i) \cdot SCR(j)}$$

en donde $SCR(i)$ son los capitales correspondientes a cada uno de los tres sub-módulos, calculados según las reglas que se detallan en la normativa. Los coeficientes de correlación $\text{CorrH}(i,j)$ quedan fijados por dichas normas y son los siguientes:

- Entre los sub-módulos SLT y NSLT, $\rho_{12} = 0,5$.
- Entre los sub-módulos SLT y NSLT, por una parte, y el submódulo de riesgo de catástrofe, por otra, $\rho_{13} = \rho_{23} = 0,25$.

Pues bien, supongamos que el capital SCR o VaR al 99,5% para cada uno de los tres sub-módulos fuese igual a 10 unidades monetarias y nos preguntamos cuál sería el VaR o capital exigido para el módulo “riesgo de suscripción del seguro de salud” en caso de que la estructura de dependencia entre los tres riesgos que lo integran se apartara del modelo gaussiano. Concretamente, calcularemos dicho capital en los dos casos siguientes de estructura de dependencia entre las tres variables representativas de dichos riesgos: a) Cópula Gumbel con distintos valores del parámetro de dependencia, y b) Cópula t, con varios grados de libertad. Los márgenes son, en todo caso, normales, con media cero y desviación típica igual a $10/2,58 \approx 3,876$.¹¹² Es decir que referimos ambas distribuciones marginales al ratio de pérdida experimentada en el ejercicio económico sobre el volumen de negocio.

¹¹¹ La utilización de correlaciones como medida de la dependencia supone la hipótesis de cópula gaussiana con márgenes normales. Que bajo el signo radical aparezcan capitales en lugar de desviaciones típicas implica admitir que las medias marginales son nulas; el VaR al 99,5% coincide con los capitales de solvencia exigidos.

¹¹² Según veremos en el Capítulo V,1, la normativa de Solvencia II adopta como probabilidad mínima de solvencia el 99,5%. En la distribución normal $[0,1]$, el cuantil correspondiente es, aproximadamente, 2,58. Por tanto, si el SCR calculado para cada sub-módulo es 10, entonces $2,58 \times$ desviación típica de ese sub-módulo = 10.

a) Cópula Gumbel

Calculamos el VaR o SCR del módulo por medio de simulaciones (50.000 en cada caso) para dos grupos de valores de los parámetros de la cópula trivariante (θ_1, θ_2) , elegidos de forma que las correlaciones ρ_{12} , ρ_{13} y ρ_{23} sean, o bien similares a las que establece la normativa (es decir, 0,5, 0,25 y 0,25 respectivamente) o bien más altas (0,7, 0,5 y 0,5).

Uno de nuestros objetivos es comparar los resultados de estos cálculos con el SCR obtenido por aplicación de las normas de Solvencia II, y cuyo importe, para nuestros datos, sería:

$$\sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2 + 2 \times 0,50 \times 10 \times 10 + 2 \times 0,25 \times 10 \times 10 + 2 \times 0,25 \times 10 \times 10} \approx 22,36.$$

Hemos añadido el supuesto de independencia, al que corresponde un VaR o SCR igual a $\sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2} \approx 17,32$.

Las cifras son las siguientes:

(1) Parámetros	(2) correlaciones	(3) SCR	(4) 100x3/22,36
$\theta_1 = 1,17$ $\theta_2 = 1,47$	$\rho_{12} = 0,5$ $\rho_{13} = \rho_{23} = 0,25$	25,15	112,5
$\theta_1 = 1,45$ $\theta_2 = 2,00$	$\rho_{12} = 0,7$ $\rho_{13} = \rho_{23} = 0,5$	27,65	123,7
Independencia	$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0$	17,32	77,4

Cuadro 4.6: Capitales exigidos para el riesgo de suscripción del módulo “seguro de salud” según los modelos de Gumbel y de independencia de los sub-módulos que lo integran.

Por tanto, si las correlaciones (segunda fila, columna 2 del Cuadro 4.6) son similares a las que prescriben las normas de Solvencia II, la aplicación de éstas infravalora el capital necesario para que el módulo alcance una solvencia del 99,5%, puesto que dicho capital necesario —25,15— representa el 112,5% del requerido por la normativa, que es de 22,36. En el supuesto de que las correlaciones entre los tres sub-módulos fueran más altas, la infravaloración sería aún más importante (el 123,7 por 100).

b) Cópula t

Calcularemos ahora el VaR o SCR (con el mismo número de simulaciones que en el supuesto Gumbel), para 3, 10 y 30 grados de libertad de la cópula t. Los coeficientes de correlación son, en los tres casos, iguales a los establecidos en las normas de Solvencia II, es decir, 0,50, 0,25 y 0,25. El Cuadro 4.7 refleja los resultados de este ejercicio.

(1) Grados de libertad	(2) SCR	(3) $100 \times (2)/22,36$
3	24,7	110,5
10	23,1	103,1
30	22,3	100

Cuadro 4.7: Capitales exigidos para el riesgo de suscripción del módulo "seguro de salud" bajo la hipótesis de la cópula t como estructura de dependencia de los sub-módulos que lo integran.

Vemos también, como era de esperar, que la aplicación de la cópula da lugar a cifras del capital de solvencia superiores a la resultante de aplicar la normativa, si bien la diferencia disminuye hasta desaparecer al aumentar los grados de libertad.

Hemos de insistir en que, en casos como el que acabamos de examinar en relación con el seguro de salud, las normas de Solvencia II admiten la hipótesis de que las distribuciones marginales de los riesgos de suscripción de cada uno de los tres sub-módulos son normales centradas en cero (dichas distribuciones se refieren al ratio de pérdida del ejercicio económico sobre el volumen de negocio). En otros muchos supuestos, estas normas admiten la misma hipótesis.

Segundo ejemplo

Supongamos ahora tres líneas de seguro X, Y, Z, cuya siniestralidad total anual tuviera como media y desviación típica (10, 5), (3, 5) y (5, 10) respectivamente. La función de distribución de dicha siniestralidad es, en el riesgo X, la logarítmico-normal, mientras que las otras dos siguen la distribución de Pareto. Por tanto, las respectivas funciones de densidad son:

$$f_X(x) = \frac{\exp\{-0,5 \left[\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma} \right]^2\}}{\sigma \cdot x \sqrt{2\pi}}$$

$$f_{Y,Z}(w) = \frac{\alpha \cdot \beta^\alpha}{(w + \beta)^{\alpha+1}} \quad (w \equiv y \text{ ó } z).$$

Los parámetros de estas funciones están en el Cuadro 4.8. Los coeficientes τ de Kendall para cada par de riesgos figuran en el Cuadro 4.9.

Riesgo	Parámetros	Media	Desviación típica
X	$\mu = 2,191; \sigma = 0,472$	10	5
Y	$\alpha = 3,125; \beta = 6,375$	3	5
Z	$\alpha = 2,667; \beta = 8,333$	5	10

Cuadro 4.8: Parámetros de las distribuciones marginales.

Riesgos	X	Y	Z
X	-	0,5	0,3
Y	0,5	-	0,3
Z	0,3	0,3	-

Cuadro 4.9: Coeficientes τ entre X, Y, Z.

Nuestro propósito es calcular el VaR [cuantiles al 99, al 99,5 y al 99,9%] de la siniestralidad total¹¹³, suma de las tres líneas de seguro X, Y, Z, bajo diversas hipótesis acerca de la estructura de dependencia entre estos riesgos:

- Cópula gaussiana
- Cópula de Gumbel
- Cópula t (con 10 y con 3 grados de libertad)
- Independencia entre los riesgos.

¹¹³ Por tanto, en este ejemplo no nos referimos a la variable "suma de los ratios de siniestralidad y gastos de X más ratio de Y", sino a las cifras de dicha siniestralidad más gastos, en unidades monetarias.

En el caso de las cópulas gaussianas y t trivariantes determinaremos los parámetros ρ_{XY} , ρ_{XZ} y ρ_{YZ} mediante la expresión (3.2), que relaciona el coeficiente τ con los coeficientes de correlación en la cópula gaussiana; y así, tenemos que, con los datos del Cuadro 4.9, resulta:

$$\rho_{XY} = \text{sen}\left(\frac{0,5\pi}{2}\right) = 0,707$$

$$\rho_{XZ} = \rho_{YZ} = \text{sen}\left(\frac{0,3\pi}{2}\right) = 0,454.$$

En el caso de la cópula de Gumbel trivariante aplicamos la expresión de la anterior Nota 109, es decir:

$$C(u, v, w) := \text{EXP}\left(-\left(\left(-\text{LN}\left(\text{EXP}\left(-\left(-\text{LN}(u)\right)^{\theta_2} + \left(-\text{LN}(v)\right)^{\theta_2}\right)^{1/\theta_2}\right)\right)^{\theta_1} + \left(-\text{LN}(w)\right)^{\theta_1}\right)^{1/\theta_1}\right)$$

para $\theta_1 = 1,428$ y $\theta_2 = 2$, en virtud de (2.26).

Por medio de simulaciones de las variables X, Y, Z ¹¹⁴ obtenemos otros tantos valores de la suma y computamos las veces en que ésta no supera el importe deseado. El resultado de las 50.000 simulaciones realizadas para cada caso se recoge en el Cuadro 4.10.

Se observa que, para los datos de este ejemplo, son muy similares los resultados de la cópula gaussiana y los de la cópula t con 10 grados de libertad, mientras que la de 3 grados de libertad se acerca a la cópula de Gumbel. También queda manifiesta la gran diferencia de todos estos resultados con los de independencia.

Calcularemos ahora la probabilidad de que la siniestralidad total supere al VaR de la hipótesis de independencia para cada una de las cuatro restantes hipótesis que contemplamos (Cuadro 4.11); dicha probabilidad duplica, aproximadamente, la que corresponde a cada supuesto de estructura de dependencia; por ejemplo, si la cópula fuese gaussiana, la probabilidad de que la siniestralidad total superase el VaR al 99% para el caso de independencia sería 0,021.

¹¹⁴ Ver III,3.

VaR α según modelo de cópula					
α	Gaussiana	Gumbel	t con 10 g. de l.	t con 3 de g. de l.	Independencia
99%	71,5	75	71,5	75	57
99,5%	88,7	95	89	96,5	71,2
99,9%	145	170	150	170	123

Cuadro 4.10: Importes del VaR para distintos niveles de probabilidad y estructuras de dependencia entre los tres riesgos considerados (cálculo por simulación).

Por último, compararemos el importe del VaR al 99,5 por 100 calculado anteriormente para cada hipótesis, con el VaR obtenido según las normas de Solvencia II. Aquí hemos de abrir un breve paréntesis para aclarar que en tales normas subyace la hipótesis de que las variables que representan los riesgos de suscripción del seguro no-vida se distribuyen según la ley logarítmico-normal; el procedimiento para calcular el capital de solvencia obligatorio o SCR en este seguro es: Primero, determinar la desviación típica del ratio de siniestralidad y gastos sobre el volumen de negocio, para el conjunto de líneas de seguro mediante una fórmula como la (5.4), es decir, la raíz cuadrada de la suma de los productos de las desviaciones típicas por las correlaciones. A continuación, se ajusta una distribución log-normal cuya media sea la unidad y desviación típica la que acabamos de obtener. En tercer lugar, se determina el VaR al 99,5% según esta función de distribución y se le resta la unidad (la media), para así llegar al SCR por unidad de volumen de negocio.¹¹⁵ Ya dijimos que en este ejemplo las variables X , Y y Z no significan ratios —como ocurre en el procedimiento de Solvencia II que acabamos de resumir— sino cantidades de siniestralidad medidas en unidades monetarias; por tanto, hemos de abandonar necesariamente la hipótesis de que la media es igual a la unidad. El procedimiento que vamos a seguir para llegar al VaR según los criterios de Solvencia II adaptados a nuestro ejemplo, será:

¹¹⁵ En el Capítulo V, Epígrafe 1 hay una breve descripción de las normas de Solvencia II más relevantes a nuestros efectos. Aquí nos interesan especialmente las expresiones (5.2), (5.3) y (5.4). En el Epígrafe siguiente trataremos de la aproximación logarítmico-normal preconizada por Solvencia II como modelo del ratio de siniestralidad global “no-vida”.

Probabilidad, para cada modelo de cópula, de superar el VaR calculado para la hipótesis de independencia					
VaR	Gaussiana	Gumbel	t con 10 g. de l.	con 3 de de l.	Independencia
99%	0,021	0,022	0,018	0,02	0,01
99,5%	0,009	0,012	0,01	0,012	0,005
99,9%	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001

Cuadro 4.11.

1. Adopción de cada una de las hipótesis propuestas, cinco en total, en relación con la verdadera estructura de dependencia entre los riesgos X , Y y Z : Cópula gaussiana, de Gumbel, t con 10 y 3 grados de libertad e independencia.
2. Cálculo de los coeficientes de correlación ρ_{XY} , ρ_{XZ} y ρ_{YZ} para cada distribución trivariante que resulta de vincular cada modelo de dependencia con las tres distribuciones marginales de X , Y y Z respectivamente. Haremos esto por medio de 2000 simulaciones del vector (X, Y, Z) para cada una de dichas distribuciones (salvo para el caso de independencia, en que admitiremos que las tres correlaciones son nulas).
3. Obtención de la desviación típica total para la suma de los tres riesgos X , Y , Z , según la correspondiente fórmula [similar a la (5.4)], en que intervendrán las anteriores correlaciones.
4. Tras determinar los parámetros de una distribución logarítmico-normal cuya media sea $E[X] + E[Y] + E[Z] = 10 + 3 + 5 = 18$, con desviación típica determinada según el número anterior, se calcula el VaR al 99,5% bajo la hipótesis de que $X + Y + Z$ se distribuye según dicho modelo.

El resultado se recoge en el Cuadro 4.12. Las cifras de su última fila representan porcentajes del VaR correspondiente según el Cuadro 4.10, sobre los de la fila 3 del presente.

Hipótesis sobre el modelo de dependencia →	Gaussiana	Gumbel	t - 10 g de lib.	t - 3 g de lib.	indep
$\rho_{XY} / \rho_{XZ} / \rho_{YZ}$:	0,59/0,259/ 0,22	0,688/0,49/ 0,53	0,597/0,36/ 0,36	0,598/0,38/ 0,51	0
VaR 99,5 % [según el modelo log-normal]	90,30	101,9	95,23	98,60	72,90
Porcentaje del VaR al 99,5% según el Cuadro 4.10, en relación con el de la fila anterior.	98,2	93,2	93,5	97,9	97,7

Cuadro 4.12: Comparación del VaR según varias estructuras de dependencia entre los riesgos X, Y, Z con el determinado bajo la aproximación lognormal.

Se observa cómo, en todos los casos contemplados, el porcentaje de la última fila es menor que 100; ello significa que el VaR obtenido mediante modelos basados en cópulas es, en estos supuestos, inferior al que se obtiene siguiendo el criterio de Solvencia II y su aproximación logarítmico-normal. ¿Qué ocurriría si, en lugar de adoptar el modelo log-normal, Solvencia II aceptara en este caso el normal? En el Cuadro 4.13 tenemos la respuesta. La comparación de la última fila de este Cuadro con su homóloga del 4.12 es elocuente, porque muestra el efecto de acercamiento que produce el modelo log-normal hacia las cifras que dan las cópulas, con unos parámetros como los de nuestro ejemplo.

Hipótesis sobre el modelo de dependencia→	Gaussiana	Gumbel	t-10 gdl.	t-3 gdl.	indep
VaR 99,5 % [según modelo normal]	56,91	61,66	58,94	60,31	49,60
Porcentaje del VaR al 99,5% según el Cuadro 4.10, en relación con el de la fila anterior	155,86	154,07	151,00	160,01	143,55

Cuadro 4.13: Comparación del VaR según varias estructuras de dependencia entre los riesgos X, Y, Z con el determinado bajo la aproximación normal.

Para obtener las cifras de la tercera fila del Cuadro 4.13 hemos introducido en un modelo normal la desviación típica resultante de combinar las desviaciones marginales con las correlaciones, así como la media igual a 18 y calcular el VaR al 99,5%. Por ejemplo, en el caso del modelo gaussiano (segunda columna) resulta que los coeficientes de correlación que para él contiene el Cuadro 4.13 y las desviaciones típicas de las distribuciones marginales (recordemos que son 5, 5 y 10 respectivamente) conducen a una desviación típica global de 15,08 unidades, aproximadamente. El cuantil al 99,5% de la distribución normal [0,1] es, también aproximadamente, 2,58. Por tanto, en la distribución del riesgo global ese mismo cuantil o VaR —cuya media es $10+3+5=18$ — será $15,08 \times 2,58 + 18 \approx 56,91$. El importe de 88,7 que figura en el Cuadro 10 es el 155,86% de 56,91.

5. DETERMINACIÓN DEL VaR: COEFICIENTES DE CORRELACIÓN Y CÓPULAS. EXAMEN DE LA APROXIMACIÓN LOGNORMAL DE SOLVENCIA II (“NO-VIDA”)

Algunos resultados obtenidos en el Epígrafe anterior pueden parecer sorprendentes y ello aconseja detenerse en el examen de la aproximación log-normal y la utilización de las correlaciones para ilustrar qué efectos produce en relación al VaR determinado vía cópulas.

La normativa de Solvencia II para calcular los capitales de solvencia será objeto de un rápido repaso en el Capítulo V, en donde se expone el procedimiento para la agregación de riesgos “no-vida” que contienen dichas normas. Aquí nos limitaremos a decir que, según anticipamos en el Epígrafe anterior, para llevar a cabo dicha agregación las normas de Solvencia II en materia de capitales de solvencia para el riesgo de suscripción “no-vida” siguen un proceso que consta, en esencia, de tres pasos:

- Primero, determinación, para cada línea de seguro, de la desviación típica del “ratio” de siniestralidad más gastos sobre primas. Estas desviaciones vienen dadas en la propia normativa.
- Segundo, cálculo del ratio de la siniestralidad conjunta (es decir, de todas las líneas de seguro “no-vida”), mediante la conocida fórmula en que intervienen

los coeficientes de correlación entre cada par de riesgos o líneas de seguro, coeficientes que también aportan dichas normas.

- Tercero, adopción de la hipótesis de que dicho ratio conjunto se distribuye según una ley logarítmico-normal, de media 1 (porque se supone que las primas cubren exactamente, por término medio, todas las obligaciones a cargo del asegurador) y la desviación típica resultante del paso anterior. Con base en esta hipótesis, se calcula el capital de solvencia necesario: Determinación del VaR al 99,5% para una variable lognormal de media 1 y la desviación estándar resultante del paso 2º; el capital de solvencia por unidad de volumen de negocio es la diferencia entre dicho VaR y la unidad.

Para facilitar las cosas supondremos, en los ejemplos que examinaremos inmediatamente, que la cartera no-vida cuyo riesgo de primas trataremos de medir, se compone de dos líneas de seguro solamente, X e Y . También admitiremos, para mayor sencillez, que las distribuciones marginales de ambos riesgos son las mismas. En tercer lugar, en todos los ejemplos que vamos a estudiar trataremos de determinar el VaR al 99,5% de la variable suma de los dos riesgos $X+Y$. Dichos riesgos, X e Y , consistirán en el ratio de la siniestralidad más gastos sobre las primas¹¹⁶ a excepción del primero de estos ejemplos, en que las variables X e Y representan la siniestralidad más gastos medidos en unidades monetarias y no como proporción del volumen de negocio.

Ejemplo 1: t de Student bivalente

Según acabamos de decir, las variables X e Y representan la siniestralidad más gastos en unidades monetarias, procedentes de los riesgos X e Y ; tomaremos como media de ambas distribuciones marginales (que siguen el modelo t) un número suficientemente alto en relación con la varianza, para que podamos despreciar las probabilidades de valores negativos de las variables. En concreto, supondremos que la media es $m=10$.

¹¹⁶ Prescindimos de la casuística contemplada en la normativa de Solvencia II acerca de cómo determinar el volumen de primas que entra en el cálculo.

Sobre esta base, y una vez elegidos los parámetros ρ (coeficiente de correlación) y ν (número de grados de libertad) de la función de densidad conjunta t bivalente, la expresión (4.5a) nos permitirá calcular probabilidades $\text{Prob}\{X+Y < s\}$ y, en definitiva, llegar al importe de s que se identifique con el VaR al 99.5%. Así, la integral

$$\int_0^s \int_0^{s-y} \frac{\left(1 + \frac{(x-20)^2 + (y-20)^2 - 2\rho \cdot (x-20) \cdot (y-20)}{\nu \cdot (1-\rho^2)} \right)^{-\frac{(\nu+2)/2}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \cdot \sqrt{(1-\rho^2)} \cdot \pi \cdot \nu} dx dy$$

nos da el valor 0,995 para $s=45,49$ si los parámetros son:

$$\begin{aligned} \rho &= 0,5 \\ \nu &= 10. \end{aligned}$$

La solución obtenida, es decir, 45,49 es el VaR al 99,5 por 100 de la variable $S=X+Y$. El capital de solvencia para una cartera de estas características, integrada a partes iguales por riesgos X e Y y cuyo volumen total de primas fuera, por tanto, $20 + 20 = 40$, sería $45,49 - 40 = 5,49$ unidades monetarias.

Veamos ahora cuál sería el VaR resultante para esta misma cartera si seguimos las hipótesis subyacentes en las normas de Solvencia II. Para su cálculo hemos de determinar los parámetros de una distribución log-normal de media 40 y desviación típica igual a la de $X+Y$. La varianza de X (y de Y) es $\nu/(\nu-2)$ por tratarse de una t de Student. Por tanto, la desviación típica de la suma, teniendo en cuenta que la correlación elegida es 0,5, será:

$$(2 \times 10/8 + 2 \times 0,5 \times 10/8)^{1/2} \approx 1,94.$$

El VaR según los criterios implícitos en las reglas de Solvencia II, se determinará mediante la integral de la densidad logarítmico-normal (μ, σ) , es decir:

$$\int_0^s \frac{\text{EXP}\left(-0,5 \cdot \left(\frac{\text{LN}(x) - \mu}{\sigma}\right)^2\right)}{\sigma \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} dx$$

cuyos parámetros han de ser tales que la media sea 40 y la desviación estándar 1,94, o sea:

$$\int_0^{45.27} \frac{\text{EXP}\left[-0.5 \cdot \left(\frac{\text{LN}(x) - 3.68770471}{0.04847151525}\right)^2\right]}{0.04847151525 \cdot x \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)}} dx$$

pues bien, la anterior integral vale muy aproximadamente 0,995 y, por tanto, el VaR al 99,5% según este segundo procedimiento es 45,27.

El Cuadro 4.14 resume los resultados de cálculos como los anteriores, para distintos valores del parámetro ν . El coeficiente de correlación se ha fijado en 0,5.

(1) N (gr de lib)	(2) VaR 99,5% distrib exacta	(3) Desviación estándar cartera	(4) VaR 99,5% Aprox lognormal	(5) 100 x (2) /(4)
3	50,30	3,00	48,38	104,0
6	46,42	2,12	45,78	101,4
10	45,49	1,94	45,27	100,5
20	44,93	1,82	44,93	100,0
30	44,765	1,79	44,85	99,8

Cuadro 4.14: Comparación del VaR al 99,5% según el modelo t bivalente y según la aproximación lognormal (Ejemplo 1).

La Figura 4.8 es la representación gráfica de la columna (5) anterior en función de ν . Puede observarse en ella que el porcentaje que figura en dicha columna va descendiendo al aumentar el número de grados de libertad, de manera que llega a cruzar la línea del 100% y alcanza un resultado de 99,8, significativo de que el VaR según la cópula t (con márgenes igualmente t de Student) llega a ser inferior al calculado con la aproximación log-normal si el número de grados de libertad es alto (en nuestro ejemplo, mayor que 20).

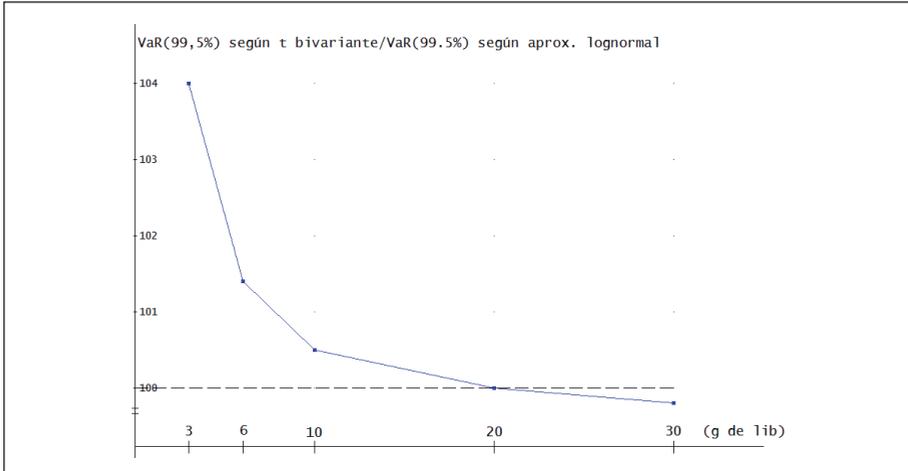


Figura 4.8: Porcentaje que representa el VaR al 99,5% sobre el calculado utilizando la aproximación lognormal.

Ejemplo 2: t de Student bivalente (modificada)

A partir de aquí nos limitaremos a casos en que la media es unitaria, como ocurre cuando las variables X e Y se identifican con el ratio de siniestralidad más gastos en relación al volumen de negocio. Si seguimos optando por el modelo t, esta nueva situación en cuanto al significado de las variables exigirá que introduzcamos modificaciones en la función de densidad log-normal bivalente, para que su media sea 1 y su desviación típica sea la deseada (y no la que resulte del parámetro ν). Por tanto, dicha función de densidad habrá de ser:

$$f(x, y) = \frac{\left[1 + \frac{\left(\frac{x-1}{s\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}} \right)^2 + \left(\frac{y-1}{s\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}} \right)^2 - 2\rho \frac{x-1}{s\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}} \frac{y-1}{s\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}} \right]^{-\frac{(\nu+2)/2}{\nu}} \cdot \Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \cdot \sqrt{(1-\rho)^2 + \rho^2 \nu s^2} \cdot (\nu-2)}$$

(4.6)

en donde s representa la desviación típica elegida para las variables X e Y , ρ el coeficiente de correlación y ν el número de grados de libertad. El procedimiento para obtener los resultados que se contienen en los Cuadros 4.15 y 4.16 es similar al del Ejemplo 1: Valiéndonos de la expresión (4.5a), en la que introducimos la función $f(x,y)$ anterior, calculamos el VaR al 99,5%, que comparamos con el que corresponde según la aproximación log-normal. Ésta ha de tener media 2 (puesto que es la suma de $X+Y$) y la desviación típica deseada, que es 0,1 o bien 0,2, según se ve en el Cuadro respectivo.

De manera análoga, el Cuadro 4.16 refleja los mismos datos, salvo que $\nu = 6$. Llama la atención la gran diferencia que presentan las cifras de la columna (6) cuando nos situamos en el caso de 3 grados de libertad y desviación típica 0,2, con respecto a los demás supuestos contemplados. En la Figura 4.9¹¹⁷ se ve con mayor claridad esta diferencia, así como la evolución de la proporción “VaR según cópula/VaR según aproximación log-normal”.

(1) ρ	(2) VaR 99,5% distrib. exacta	(3) s (desv. estándar de X y de Y)	(4) Desv estándar cartera	(5) VaR 99,5% aprox. lognormal	(6) $100 \times (2)$ /(5)
0	2,491	0,1	0,1414	2,392	104,1
0,25	2,548	0,1	0,1581	2,444	104,2
0,50	2,60	0,1	0,1732	2,490	104,4
0,75	2,646	0,1	0,1871	2,533	104,5
0	3,320	0,2	0,2828	2,845	116,7
0,25	3,450	0,2	0,3162	2,961	116,5
0,50	3,540	0,2	0,3464	3,069	115,3
0,75	3,596	0,2	0,3742	3,170	113,4

Cuadro 4.15: Comparación del VaR al 99,5% según el modelo t bivalente modificado con $\nu=3$ y según la aproximación lognormal [Ejemplo 2].

¹¹⁷ La escala de las ordenadas es, en esta Figura, muy distinta de la escala de las Figuras 4.8 y 4.10.

(1) ρ	(2) VaR 99,5% distrib. exacta	(3) s (desv. estándar de X y de Y)	(4) Desv estándar cartera	(5) VaR 99,5% aprox. lognormal	(6) $100 \times (2) / (5)$
0	2,429	0,1	0,1414	2,392	101,5
0,25	2,480	0,1	0,1581	2,444	101,5
0,50	2,525	0,1	0,1732	2,490	101,4
0,75	2,567	0,1	0,1871	2,533	101,3
0	2,893	0,2	0,2828	2,845	101,7
0,25	3,000	0,2	0,3162	2,961	101,3
0,50	3,090	0,2	0,3464	3,069	100,7
0,75	3,173	0,2	0,3742	3,170	100,

Cuadro 4.16: Comparación del VaR al 99,5% según el modelo t bivalente modificado con $\nu=6$ y según la aproximación lognormal [Ejemplo 2].

En todos los casos contemplados en este ejemplo resulta superior el VaR determinado mediante la cópula, al calculado bajo los criterios de Solvencia II.

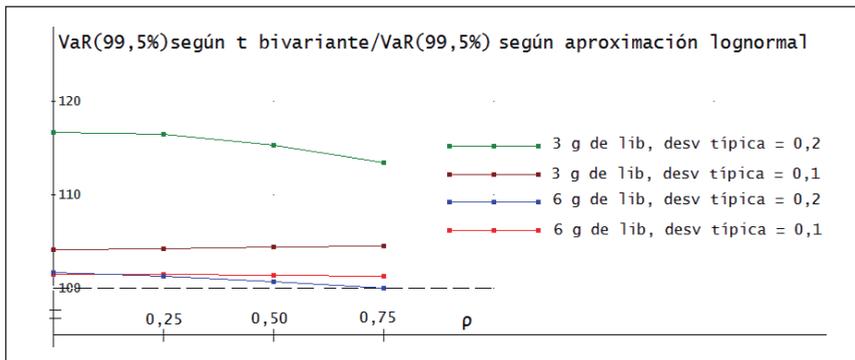


Figura 4.9: Porcentaje que representa el VaR al 99,5% según la distribución t, sobre el calculado utilizando la aproximación lognormal

Ejemplo 3: Distribución normal bivalente

Siguiendo similar procedimiento al ya descrito resultan las cifras del Cuadro 4.17, relativas al caso en que ambos ratios, X e Y, tuvieran como distribución conjunta la ley normal bivalente con media 1 y desviación típica 0,1.

(1) ρ	(2) VaR 99,5% distrib. exacta	(3) Desv estándar cartera	(4) VaR 99,5% aprox. lognormal	(5) $100 \times (2) / (4)$
0	2,365	0,1414	2,393	98,8
0,25	2,407	0,1581	2,444	98,4
0,50	2,447	0,1732	2,490	98,3
0,75	2,482	0,1871	2,533	98,0

Cuadro 4.17: Comparación del VaR al 99,5% según el modelo normal bivalente y según la aproximación lognormal (Ejemplo 3).

Como era de esperar el VaR según la distribución exacta es, en todos los casos, inferior a la aproximación logarítmica. La asimetría positiva propia de esta distribución tiende a exagerar el importe del VaR si nos situamos en el caso de variables simétricas, cuya cópula carece de dependencia en colas. La Figura 4.10 refleja estos resultados.

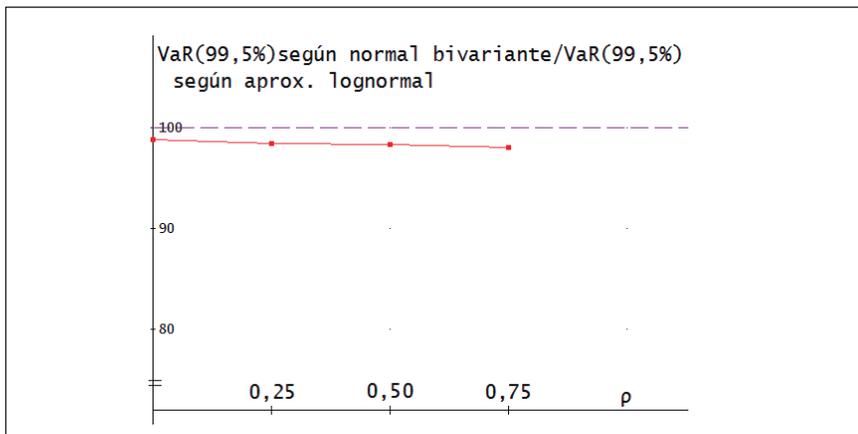


Figura 4.10: Porcentaje que representa el VaR al 99,5% según la distribución normal, sobre el calculado utilizando la aproximación lognormal.

Ejemplo 4: Cópula de Gumbel con márgenes lognormales

El último ejercicio que desarrollaremos tiene como eje la distribución resultante de vincular la cópula de Gumbel con márgenes logarítmico-normales con iguales parámetros. Los cálculos que realizaremos van encaminados a obtener el VaR al 99,5% bajo distintos supuestos de valores de los parámetros de la distribución y los resultados se recogen en los Cuadros 4.18 (desviación típica de las distribuciones marginales = 0,1) y Cuadro 4.19 (desviación típica = 0,2). La media de dichas marginales es, en todo caso, igual a 1 y lo que se refleja en ambas series de resultados es cómo varía dicho VaR y su porcentaje respecto al obtenido según la aproximación lognormal al variar el parámetro de dependencia de la cópula de Gumbel.

Las probabilidades de la función de distribución Gumbel—lognormales se obtienen mediante un procedimiento similar al ya descrito en el Epígrafe 4 (Ejemplo con dos riesgos).

Para calcular la varianza de la suma de ambos riesgos necesitamos la correlación entre ellos. Hemos estimado el coeficiente con 2000 simulaciones de pares (X,Y) , para cada valor del parámetro θ . Estas estimaciones están en la columna (3) de los Cuadros 4.18 y 4.19.

Por último, queda representada en la Figura 4.11 la evolución del porcentaje de las columnas (6) en función del parámetro de dependencia. Se observa que dicho porcentaje crece al principio, alcanza un máximo para descender después, según aumenta la dependencia.

(1) θ	(2) VaR 99,5% distrib. exacta	(3) ρ	(4) Desv estándar Cartera	(5) VaR 99,5% aprox. lognormal	(6) 100 x (2) /(5)
1	2,392	0,00	0,1414	2,392	100,0
1,1	2,459	0,16	0,152	2,424	101,4
1,5	2,538	0,55	0,176	2,498	101,6
2	2,557	0,70	0,184	2,523	101,3
4	2,570	0,92	0,196	2,560	100,4
6	2,571	0,97	0,198	2,567	100,2

Cuadro 4.18: Comparación del VaR al 99,5% según el modelo "Gumbel-lognormales" y según la aproximación lognormal (Ejemplo 4). Desviación típica marginal = 0,1.

(1) θ	(2) VaR 99,5% distrib. exacta	(3) ρ	(4) Desv estándar cartera	(5) VaR 99,5% aprox. lognormal	(6) 100 x (2) /(5)
1	2,846	0,00	0,2828	2,846	100,0
1,1	2,994	0,15	0,303	2,915	102,7
1,5	3,180	0,54	0,351	3,085	103,1
2	3,228	0,70	0,369	3,151	102,4
4	3,259	0,92	0,392	3,236	100,7
6	3,263	0,96	0,396	3,252	100,3

Cuadro 4.19: Comparación del VaR al 99,5% según el modelo "Gumbel-lognormales" y según la aproximación lognormal (Ejemplo 4). Desviación típica marginal = 0,2.

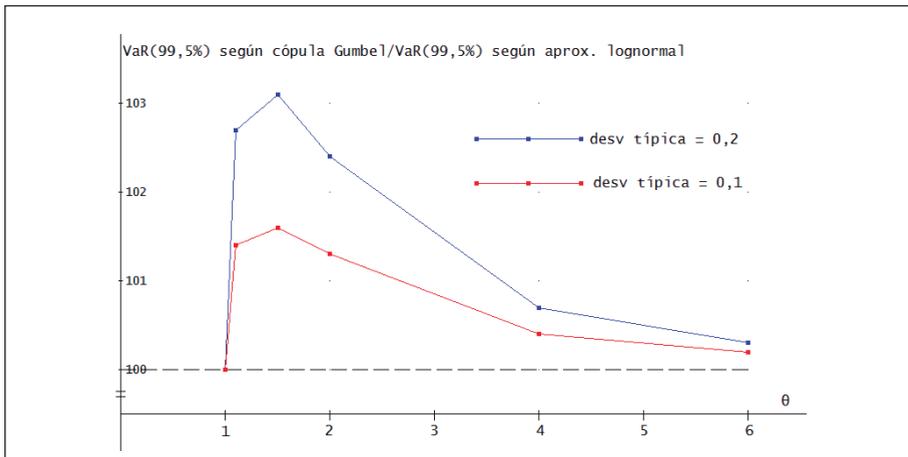


Figura 4.11: Porcentaje que representa el VaR al 99,5% según la distribución gumbel-lognormal, sobre el calculado utilizando la aproximación lognormal.

No es posible obtener reglas generales y precisas a partir de los ejercicios llevados a cabo, pero sí concluir que la proporción del VaR al 99,5% obtenido mediante cópulas, sobre el resultante de los criterios de Solvencia II, varía según el modelo de dependencia de los riesgos en cuestión y, dentro de cada uno, de los parámetros introducidos. También cabe deducir que en caso de varianzas moderadas, como las que se aplican en el modelo estándar de Solvencia II para los seguros “no-vida”, el porcentaje estudiado no es inferior a 100 (salvo, lógicamente, en el caso normal bivalente, uno de cuyos resultados es el 98%); en algún caso puede ser muy superior (más del 116 % en el ejemplo de la distribución t modificada, con $s = 0,1$). Esta gama relativamente amplia de porcentajes nos lleva a preferir el empleo de cópulas sobre el de correlaciones y aproximación log-normal, porque aquéllas pueden adaptarse mejor a la verdadera estructura de dependencia de las variables que intervengan en el fenómeno.

CAPÍTULO V. APLICACIÓN DE LAS CÓPULAS AL CÁLCULO DEL CAPITAL DE SOLVENCIA EXIGIDO A LAS EMPRESAS ASEGURADORAS POR “SOLVENCIA II”. ESTUDIO DE UN EJEMPLO NUMÉRICO

1. DESCRIPCIÓN DE LAS NORMAS MÁS RELEVANTES

La normativa principal en materia de solvencia para las empresas aseguradoras que operan en la Unión Europea (el sistema conocido como “Solvencia II”) se encuentra en:

- La Directiva 2009/138/EC, de 25 de noviembre de 2009 [publicada en el Diario Oficial de la Unión Europea el 17 de diciembre de 2009].
- El Reglamento Delegado (UE) 2015/35, de la Comisión, de 10 de octubre de 2014 [publicado en el Diario Oficial de la Unión Europea el 17 de enero de 2015].

El sistema “Solvencia II” tiene estructura modular, según veremos más adelante; los riesgos que contempla se evalúan o miden uno por uno; la medida se identifica con el capital necesario para afrontarlos individual o aisladamente; en un segundo paso las medidas de estos riesgos son objeto de agregación para determinar los recursos con que cubrir el conjunto de todos ellos. Se entiende por cubrir disponer de fondos necesarios para afrontar las pérdidas ocasionadas por dichos riesgos con una probabilidad suficientemente alta. Aquella agregación no es una simple suma aritmética, sino que, al tenerse en cuenta las posibilidades de compensación entre unos riesgos y otros, en la medida en que su acaecimiento simultáneo sea improbable, intervienen las oportunas correlaciones.

Son características de este sistema de solvencia:

1) La medida del riesgo que se adopta es el “Valor en Riesgo” (“Value at Risk” o VaR), con un nivel de confianza del 99,5 por 100. Este porcentaje tiene el siguiente origen. En el *Swiss Solvency Test* (sistema de solvencia aplicable en Suiza a los aseguradores) se abandonó el VaR como medida del riesgo por los inconvenientes

teóricos que presenta¹¹⁸ y se adoptó en su lugar el *expected shortfall* o *tail conditional expectation*¹¹⁹, que es:

$$ES_{\alpha}[X] = E \{X \mid X > \text{VaR}(X)\}$$

en donde el VaR es el valor en riesgo o cuantil de la variable X al que corresponde una probabilidad de α , es decir que $\text{Prob}[X \leq \text{VaR}] = \alpha$. Este *expected shortfall* o medida del riesgo referida a la variable aleatoria X , es su valor medio condicionado a los casos en que X supere el VaR_{α} . Uno de los inconvenientes del VaR como medida del riesgo es que nada informa acerca de la gravedad del daño que supere el cuantil VaR_{α} , sino que se refiere sólo a la probabilidad $1-\alpha$ (por ejemplo, el 1 por 100) de que la pérdida rebase cierto umbral (que es el VaR). El *expected shortfall*, en cambio, mide el importe de esos daños o pérdidas que superan el umbral o VaR y calcula su media. Pues bien, en las versiones iniciales del Proyecto Solvencia II se hacía referencia al *expected shortfall* para observar que, en la distribución normal, el valor de dicha medida de riesgo cuando $\alpha=0,99$, se acerca al cuantil $0,995$ ¹²⁰. En efecto, $ES_{0,99}[X] \approx \text{VaR}_{0,995}[X]$, ya que, si llamamos $\varphi(t)$ a la función de densidad de la variable normal(0,1):

$$\int_{2,32}^{\infty} \varphi(t) \cdot dt \approx 0,01$$

$$\frac{1}{0,01} \cdot \int_{2,32}^{\infty} t \cdot \varphi(t) \cdot dt \approx 2,66;$$

$$\int_{2,66}^{\infty} \varphi(t) \cdot dt \approx 0,004.$$

Por tanto, adoptar como criterio de solvencia el VaR al 99,5% resulta en la práctica aproximadamente similar al *expected shortfall* al 99%. Por otra parte, bajo la hipótesis que adopta Solvencia II al configurar el modelo estándar para el capital de solvencia básico, el VaR es una medida del riesgo que tiene carácter subaditivo, porque entre tales hipótesis está la de normalidad de los riesgos agregados¹²¹.

¹¹⁸ Véase Artzner, Delbaen, Eber y Heath, (1999); también, F.Luder, (2005).

¹¹⁹ Estos términos podrían traducirse por "déficit esperado" o "valor medio de la insuficiencia", el primero; el segundo equivale a "valor medio condicionado de la cola".

¹²⁰ Documento CEIOPS-PI-08/06, "Quantitative Impact Study 2", párrafo 1.9.

¹²¹ A. Ferri, [2012].

2) Otra característica de Solvencia II es que adopta el año como amplitud de su horizonte temporal.

3) Una tercera nota es el carácter finalista de Solvencia II; quiere ello decir que en el sistema se marcan unos objetivos que pueden lograrse, bien con el modelo estándar, que se describe con detalle en la propia normativa, o bien con los modelos internos de carácter total o parcial que decida instaurar cada entidad aseguradora, en su caso.

El sistema consta de tres “Pilares”.

- El Pilar 1 se refiere a las exigencias de Solvencia de orden cuantitativo: provisiones técnicas, capital de solvencia obligatorio y capital mínimo obligatorio.
- El Pilar 2 contiene normas sobre procedimientos internos y de supervisión.
- Y el Pilar 3 está dedicado a reglas relativas a la transparencia y publicidad.

Esta breve descripción del sistema “Solvencia II” se centrará sólo en el Pilar 1, por tener la máxima relevancia de los tres a nuestros efectos. Dentro de él, nos ceñiremos a los aspectos que más nos interesan sobre el capital de solvencia obligatorio (en lo sucesivo, SCR, por su denominación en inglés *Solvency Capital Requirement*) y prescindiremos de las cuestiones que no sean necesarias para nuestro propósito, que es comparar el importe del SCR a que conducen dichas normas con el que resultaría de la aplicación de las cúpulas. Diremos, no obstante, que otro concepto importante es el de *Minimum Capital Requirement* o Capital Mínimo Obligatorio: se trata del límite por debajo del cual los asegurados y beneficiarios de las pólizas de seguro estarían expuestos a un nivel inaceptable de riesgo en caso de que el asegurador o reasegurador continuara con su actividad.

El SCR (Capital de Solvencia Obligatorio) ha de calcularse con periodicidad mínima anual y es la suma de tres componentes (artículo 103 de la Directiva 2009/138, de Solvencia II):

- a. El capital de Solvencia Obligatorio Básico.

- b. El Capital Obligatorio para el Riesgo Operacional (este riesgo se refiere a la posible pérdida por procedimientos, personal o sistemas inadecuados o fallidos, o por acontecimientos externos; se incluyen los riesgos legales, pero no los derivados de decisiones estratégicas ni los de reputación).
- c. Y el ajuste por la capacidad de las provisiones técnicas y de los impuestos diferidos para absorber pérdidas. Si ocurren hechos negativos para la entidad pueden reducirse ciertas provisiones técnicas e impuestos futuros.

Sumar el capital básico y el de riesgo operacional implica admitir la perfecta dependencia entre ambos, lo que es discutible.

El SCR básico comprende los siguientes módulos¹²²:

- a. Riesgo de suscripción no-vida.
- b. Riesgo de suscripción vida.
- c. Riesgo de suscripción salud.
- d. Riesgo de mercado.
- e. Riesgo de insolvencia de “contraparte”.

Los tres primeros se refieren a la posibilidad de pérdidas en la actividad específicamente aseguradora; el riesgo de mercado es el de minusvalía en las inversiones por fluctuación desfavorable en los mercados y el de insolvencia consiste en la eventualidad de deterioro en los créditos del asegurador contra terceros.

A cada uno de estos riesgos se asigna un capital obligatorio en virtud de las normas de cálculo que se dictan. Y estos capitales se agregan, por vía de los coeficientes de correlación que también se establecen, para llegar a dicho capital

¹²² El artículo 87 del Reglamento Delegado 2015/35 añade un capital de solvencia obligatorio frente a los riesgos que afecten a los activos intangibles.

básico, al que ha de sumarse el capital obligatorio para el riesgo operacional y el ajuste (de signo negativo) por la capacidad de absorción de pérdidas de las provisiones técnicas y de los impuestos diferidos.

Fijamos ahora nuestra atención en el módulo de riesgo de suscripción no-vida. Comprende tres sub-módulos:

- a. Adversa modificación en el valor de las obligaciones, sea por fluctuaciones debidas a los hechos asegurados (riesgo de prima) o al momento e importe de la liquidación de los siniestros (riesgo de reserva).
- b. Riesgo de catástrofes.
- c. Riesgo de caída de cartera (más adelante haremos una breve referencia a él y al de catástrofes).

El Capital obligatorio para el riesgo de suscripción del seguro no-vida, es:

$$SCR_{\text{non-life}} = \sqrt{\sum \text{Corr NL}(i, j) \cdot SCR(i) \cdot SCR(j)} \quad (5.1)$$

Es decir, que se suman todas las combinaciones posibles, (i, j) de los tres sub-módulos anteriores (prima-reserva, catástrofe y caída de cartera). En esta fórmula subyace la hipótesis de que las variables correspondientes a los riesgos contemplados en ella se distribuyen normalmente, con media cero y desviación típica igual al cociente entre el respectivo SCR y el cuantil al 99,5 por 100 según la distribución normal (que es, aproximadamente, 2,58).

$\text{Corr NL}(i, j)$ = coeficiente de correlación entre los riesgos i, j de los seguros “no-vida” (NL= “non-life”).

$SCR(i), SCR(j)$ = capitales obligatorios para los sub-módulos i ó j .

Antes de describir cómo se calcula el capital obligatorio de estos riesgos, conviene que veamos qué elementos los integran. El artículo 105 de la Directiva dice que el módulo de riesgo de suscripción del seguro distinto al de vida reflejará el derivado de

las obligaciones de estos seguros, atendiendo a los eventos cubiertos y a los procesos seguidos en el ejercicio de la actividad; este módulo tendrá en cuenta la incertidumbre de los resultados de las empresas de seguros y de reaseguros en relación con las obligaciones de seguros y reaseguros ya existentes y las nuevas actividades que se espere realizar en los próximos doce meses. Es decir, que los riesgos propios de este módulo incluyen todas las desviaciones desfavorables de las obligaciones financiadas con las primas y las provisiones técnicas. Por lo que se refiere al riesgo de prima ello incluye todas las obligaciones que ésta ha de cubrir: No sólo la siniestralidad, sino también los gastos de administración.

El capital obligatorio para el sub-módulo de riesgo de prima y de reserva se calcula mediante la fórmula (Documento de la Comisión de la Unión Europea *QIS5 Technical Specifications*, de 5 de julio de 2010, párrafo SCR.9.16, páginas 198 y 199 y artículo 115 del Reglamento Delegado (UE) 2015/35 de la Comisión de 10 de octubre de 2014):

$$SCR_{nl, prem, res} = 3 \cdot \sigma_{nl} \cdot V_{nl} \quad (5.2)$$

σ_{nl} = desviación típica del riesgo de prima y de reserva (no-vida).

V_{nl} = medida del volumen de dichos riesgos.

Conviene detenerse en la fórmula anterior, porque al examinar su origen obtendremos algunas conclusiones útiles sobre las hipótesis implícitas en el cálculo de los capitales obligatorios.

Si suponemos que la tasa o ratio de riesgo de prima más reserva en relación con el volumen de negocio se distribuye como una función logarítmico-normal de parámetros (m, s) , cuya media sea la unidad, m ha de ser $-s^2/2$. Y si llamamos c al capital necesario —por cada unidad de volumen de negocio— para obtener una probabilidad de solvencia del 99,5%, resulta la siguiente relación:

$$\text{Prob}\left[e^{sN - s^2/2} < 1 + c\right] = 0,995$$

en donde N es el cuantil 0,995 de la variable aleatoria Normal $(0, 1)$.

El importe mínimo de c , será:

$$c = e^{sN - s^2/2} - 1$$

Por otra parte, en la distribución lognormal de media 1, la varianza σ^2 es:

$$\sigma^2 = e^{s^2} - 1$$

y por tanto:

$$s = \sqrt{\text{LN}(1 + \sigma^2)}$$

Al sustituir s en la expresión de c , nos queda:

$$c = \frac{\exp[N\sqrt{\text{LN}(1 + \sigma^2)}]}{\sqrt{1 + \sigma^2}} - 1 \quad (5.3)$$

El valor de N es, aproximadamente, 2,58 y resulta así una función $c=f(\sigma)$ que difiere muy poco¹²³ de la recta $c=3\sigma$. De ahí que se acepte como norma la expresión (5.2), en la que subyacen, por tanto, dos hipótesis:

- a. Que la distribución de la tasa total de siniestralidad de una cartera se comporta como una distribución logarítmico-normal; y ello, tanto si dicha cartera se integra por varias líneas o segmentos de seguro, como por sólo uno. Esta idea se aparta, por tanto, de la hipótesis de normalidad, implícita en la expresión (5.1) y otras similares que contiene la normativa de Solvencia II para determinar el SCR de un conjunto de riesgos.
- b. Que la media de dicha distribución es la unidad, lo que es congruente con lo expuesto acerca de los riesgos incluidos en el riesgo de prima. Es decir, la prima ha de equivaler al valor medio de todas las obligaciones a cargo del asegurador que aquélla ha de financiar (siniestralidad más gastos).

¹²³ Sólo para valores de σ no superiores a 0,2 aproximadamente.

Admitir que la tasa de siniestralidad o factor de riesgo de una cartera se comporta estadísticamente como una variable lognormal, sea cual fuere el número de segmentos que integren esa cartera, supone una incongruencia porque la suma de dos o más lognormales no es una variable logarítmico-normal¹²⁴.

Para intentar justificar que esta incongruencia no tiene en la práctica efectos demasiado perturbadores, partimos de la fórmula del coeficiente de asimetría de una variable logarítmico-normal de parámetros (m,s) :

$$Y = [\exp(s^2) + 2] \sqrt{\exp(s^2) - 1}$$

El Reglamento de Solvencia II establece las desviaciones típicas de los segmentos de seguro no-vida en niveles relativamente modestos, lo que da lugar a que el parámetro s tenga un valor similar a la desviación típica y el coeficiente de asimetría, a su vez, sea bajo. Ello puede permitir, sin cometer grandes errores, que tratemos como variables simétricas —y aproximadamente normales— a los factores de riesgo de cada segmento, con la consiguiente posibilidad —que sí se da en la distribución normal— de que la suma de estas variables lognormales dé lugar a otra que no se aparte demasiado de la distribución logarítmico normal¹²⁵.

Hemos de insistir, de todas formas, en que este intento de justificación sólo tiene alguna validez cuando las desviaciones típicas son bajas.

Clasificación del negocio asegurador

Examinaremos brevemente la clasificación del negocio de la empresa de seguros a efectos de Solvencia II.

En el Anexo I del Reglamento se enumeran 36 “líneas de negocio” agrupadas en cinco categorías:

¹²⁴ Sobre la suma de variables log-normales puede consultarse Dufresne (2008).

¹²⁵ Este hecho viene confirmado por la Figura 4.10 y la última columna del Cuadro 4.17. Ambos muestran la cercanía del VaR al 99,5% según la distribución normal bivalente y según la aproximación lognormal, cuando la desviación típica marginal es 0,1.

- A. Seguro no-vida, que comprende las líneas 1 a 12.
- B. Reaseguro proporcional no-vida, que incluye las siguientes 12 líneas, números 13 a 24 y que se corresponden con las 12 anteriores del seguro directo.
- C. Reaseguro no proporcional, no-vida; en este epígrafe hay 4 líneas de negocio; cada una comprende el reaseguro no proporcional de varias líneas de seguro directo que presentan cierta homogeneidad. Por ejemplo, las líneas de negocio 4 y 8 (Seguro de RC automóviles y RC general, respectivamente [RC = responsabilidad civil]), están encuadradas en la línea 26: "Reaseguro no proporcional de RC por daños.
- D. Seguro de vida, en las líneas de negocio 29 a 34.
- E. Reaseguro de vida, con dos líneas, la 35 (reaseguro de enfermedad cuando el seguro subyacente se ejerce con técnica similar a la del seguro de vida) y 36 (reaseguro de las líneas de negocio "Otro seguro de vida" y de ciertas rentas).

El Anexo II del Reglamento enumera los 12 segmentos en que se clasifican las anteriores líneas de negocio de seguro y reaseguro distintos del de vida. Así, el seguro y el reaseguro proporcional de RC automóviles son el segmento 1 y la RC general, con su reaseguro proporcional, el segmento 5. En cada segmento se hace constar la desviación típica del riesgo de primas y del riesgo de reserva, que son, en el segmento 1, del 10 y del 9 por 100, respectivamente. En el segmento 5 las desviaciones son del 14 y del 11 por 100.

Riesgo de prima y de reserva

El volumen de riesgo de prima y de reserva, designado por V_{nl} , se calcula (artículo 116 del Reglamento) de la forma siguiente:

1. Ante todo, han de determinarse sus dos componentes, que son el volumen del riesgo de prima y el de reserva, $V_{\text{prem},s}$ y $V_{\text{res},s}$ respectivamente, de cada segmento. El primero, $V_{\text{prem},s}$ es la suma de las primas de doce meses (de los próximos o de los últimos, según sea la cifra más alta) y el valor actual esperado de las

que se devengarán después de los doce meses siguientes, ya sea por los contratos existentes, ya por aquéllos cuya fecha de reconocimiento inicial se sitúe dentro de los doce meses siguientes. Las primas que entran en el cálculo son las devengadas o por devengar, con todos sus componentes (y no las primas de riesgo). El volumen del riesgo de reserva, $V_{res,s}$ es la “mejor estimación” de las provisiones para prestaciones pendientes.

- Al 25 por 100 de la suma $V_{pre,s} + V_{res,s}$ se aplica una reducción, en su caso, por diversificación geográfica. Pasamos por alto esta cuestión por no ser indispensable a nuestros efectos. El resultado de aplicar tal reducción es V_s , es decir, el volumen de riesgo de prima y de reserva del segmento s .

La desviación típica del riesgo de prima más el de reserva de cada segmento s , se obtiene admitiendo una correlación del 50 por 100 entre ambos riesgos. La fórmula es:

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{\sigma(\text{prem},s)^2 \cdot V(\text{prem},s)^2 + \sigma(\text{prem},s) \cdot V(\text{prem},s) \cdot \sigma(\text{res},s) \cdot V(\text{res},s) + \sigma(\text{res},s)^2 \cdot V(\text{res},s)^2}}{V(\text{prem},s) + V(\text{res},s)}$$

Las desviaciones típicas del sub-módulo “primas y reservas” entre los distintos segmentos son las especificadas en el Anexo II del Reglamento.

El último paso es “sumar” las desviaciones típicas de todos los segmentos, para llegar a la desviación típica del riesgo de primas y reservas de todo el negocio no-vida. Esto se logra por medio de la expresión:

$$\sigma_{nl} = \frac{\sqrt{\sum \text{Corr}(s,t) \cdot \sigma(s) \cdot V(s) \cdot \sigma(t) \cdot V(t)}}{V(nl)} \quad (5.4)$$

El sumatorio abarca todas las variaciones $\{s,t\}$.

$\text{Corr}(s,t)$ es el coeficiente de correlación entre los riesgos de primas más reservas del segmento s y del segmento t .

$\sigma(s)$ y $\sigma(t)$ son las desviaciones típicas del riesgo total primas y reservas, de los segmentos s y t respectivamente.

V_s y V_t representan los volúmenes de riesgo de prima más reserva de dichos segmentos, s y t .

Por último, σ_{nl} y V_{nl} son las mismas medidas, referidas a toda la cartera no-vida.

Los riesgos de caída de cartera y de catástrofe

El riesgo de caída de cartera es el de pérdida resultante del cese de una parte importante de los contratos de seguro.

El riesgo de catástrofe consta de varios sub-módulos (catástrofe natural, catástrofe del reaseguro no proporcional de daños a los bienes, catástrofe provocada por el hombre, etcétera). No nos detenemos en la descripción de estos riesgos por no ser necesaria para la finalidad de este trabajo.

Capital para el sub-módulo de prima y de reserva

Como recapitulación de lo expuesto en relación con el sub-módulo “riesgo de prima y de reserva”, que es el que más nos interesa para nuestro estudio, enumeraremos el proceso de su cálculo:

1. Una vez determinados los volúmenes de prima y de reserva para cada segmento, se obtiene la desviación típica del riesgo conjunto de prima y de reserva de cada segmento s , desviación típica a la que llamaremos σ_s (para $s=1,2,\dots$).
2. A continuación, hay que obtener la desviación típica del sub-módulo prima y reserva para el conjunto de todos los segmentos. Ello ha de hacerse teniendo en cuenta el volumen de riesgo de cada segmento y las correlaciones entre los segmentos. Así llegamos a σ_{nl} .
3. El siguiente paso es determinar el capital de solvencia para el sub-módulo prima y reserva, lo que se hace con la fórmula, ya vista, consistente en multiplicar el triple de σ_{nl} por el volumen de riesgo no-vida (que hemos designado por V_{nl}).

En los ejemplos del Capítulo IV, por razones de simplicidad, no hemos distinguido entre riesgo de prima y de reserva.

2. DATOS UTILIZADOS Y LIMITACIONES DE NUESTRO ESTUDIO

En este Capítulo nos proponemos ilustrar cómo las cópulas pueden ser un instrumento útil en los modelos de riesgo para aseguradores sujetos a la normativa de Solvencia II. Tal propósito vería muy limitado su alcance de no disponer de datos reales que prestaran indiscutible conexión con la realidad al análisis subsiguiente. Ahora bien, una de las dificultades planteadas por las aplicaciones de la Teoría de Cópulas estriba en la obtención de cifras empíricas suficientemente numerosas y fiables.

Hemos obtenido los números básicos que vamos a utilizar en nuestro estudio del documento del CEIOPS FS-14/07 titulado *QIS3, Calibration of the Underwriting Risk, Market Risk and MCR* de fecha Abril de 2007. Su finalidad es describir las hipótesis y lógica subyacentes en el calibrado de los antedichos riesgos (de suscripción y de mercado).

En la Sección 1, epígrafe tercero de ese documento se establecen los coeficientes de correlación entre las distintas líneas de seguro, así como las desviaciones típicas del ratio de siniestralidad y gastos sobre primas y otros factores, que siguen vigentes con alguna pequeña variación.

Ya hemos visto que el riesgo de suscripción no-vida se caracteriza como específicamente asegurador, al surgir de las operaciones de seguro constitutivas de la actividad principal de estas empresas. Y se relaciona, según el documento citado, con la incertidumbre que para el asegurador suponen las coberturas de riesgo en virtud de los contratos suscritos. Se aborda también cómo determinar las correlaciones entre los distintos ramos (o segmentos) de seguro, correlaciones que son necesarias para agregar los capitales exigidos por la solvencia de cada uno por medio de una expresión como la (5.1). Para ello toma como punto de partida un cuadro en que figuran los ramos o segmentos, tanto en las filas como en las columnas; en sus cillas interiores consta el respectivo coeficiente de correlación entre el ramo de la columna c y el de la fila r . A continuación, el texto del CEIOPS al que nos venimos

refiriendo reconoce que la escasez de datos disponibles impone un cierto grado de juicio o valoración subjetiva y añade algo importante para nosotros:

“Esto es cierto también porque, al elegir los coeficientes de correlación, ha de reconocerse la influencia de la correlación no lineal existente en la cola de la distribución y que no es captada si utilizamos el enfoque de la correlación lineal ‘pura’. Para tomar esto en cuenta, las correlaciones utilizadas deben ser superiores a lo que exigiría el simple análisis de los datos relevantes al efecto”.

Sentados estos principios, llega al punto que nos ha proporcionado los datos empíricos que vamos a utilizar (página 21 del Documento CEIOPS): dice que, para determinar la matriz de correlaciones para el riesgo de prima se llevó a cabo un análisis de las correlaciones entre ramos —a nivel de aseguradores individuales— en el mercado alemán. Se utilizaron ratios de siniestralidad del período comprendido entre 1988 y 2002 de forma que, para cada asegurador individual (en que hubiera disponibles al menos 10 ratios en cada par de ramos), se estimó el coeficiente de correlación y el coeficiente global como media de las correlaciones específicas de cada asegurador. Como ejemplo de lo dicho, muestra un diagrama de dispersión (página 22 del Documento) en que se representan los “residuos estándar” con respecto a los ratios de los seguros de RC automóviles, en abscisas y RC general, en ordenadas. Se trata de 1269 puntos representativos de otros tantos pares de ratios de siniestralidad y gastos sobre primas, procedentes de 89 empresas, para dichos segmentos de seguro. Además de esos 1269 puntos, el gráfico contiene la recta de regresión de las ordenadas sobre las abscisas y cuya pendiente es 0,28, igual al coeficiente de correlación lineal. Los datos a que nos referimos son residuos, es decir, diferencias entre los ratios individuales observados y los generales, y con desviación típica igual a la unidad. El documento no es muy explícito sobre esto; entendemos que los residuos positivos representan excesos sobre la media y los negativos, defecto. Y suponemos que la media general de estos ratios es la unidad, porque esta hipótesis subyace en la fórmula que, según vimos antes¹²⁶, conduce a la regla de que SCR_{ni} es el triple del producto de la desviación típica por el volumen de riesgo.

¹²⁶ Expresión (5.3)

Pues bien, es precisamente este gráfico el origen de los datos que utilizaremos a continuación. Al no haber resultado posible obtener las coordenadas de cada uno de estos puntos, no hemos tenido más remedio que calcularlas por medición de la abscisa y la ordenada respectiva; esta labor, además de tediosa, implica el riesgo de errores, que hemos de aceptar al carecer de alternativas y en la confianza de que no sean sustanciales en su cuantía ni sistemáticos en su signo.

Obtenidas las 1269 coordenadas cuya representación vemos en la Figura 5.1, es necesaria su conversión a cifras representativas de ratios de siniestralidad en relación a primas, es decir, a cifras estadísticas que, en lugar de haber sido modificadas para que su media sea nula y su varianza unitaria, tengan la media y desviación originales. Al desconocer estos dos datos, hemos admitido como tales la respectiva desviación que establece la normativa de Solvencia II, en concreto el Reglamento Delegado (UE) 2015/35 de la Comisión, a que hicimos referencia. En su Anexo, según ya vimos, se exponen las desviaciones típicas del sub-módulo de prima y reserva para los distintos segmentos del seguro no-vida. Las desviaciones correspondientes al seguro RC automóviles y RC general son, respectivamente, el 10 y el 14 por 100 en el riesgo de prima, que es el que aquí nos interesa. No podemos introducir en nuestro examen el riesgo de reserva, porque carecemos de datos estadísticos sobre él. Nos hemos de limitar, por tanto, a estudiar la dependencia del riesgo de primas entre las dos líneas citadas (RC automóviles y RC general). Esto sería, ciertamente, una seria limitación si nuestro objetivo fuese calcular el capital requerido en un supuesto concreto; pero lo que nos proponemos no es eso, sino contrastar si los modelos de dependencia de riesgos basados en cópulas pueden mejorar los resultados que se fundamentan en los coeficientes de correlación. De ahí que podamos permitirnos evitar todos aquellos detalles que la normativa prevé al regular el cálculo de los capitales en la medida en que no afecten a nuestro objetivo. Otra simplificación que vamos a introducir nos lleva a prescindir de los factores de ajuste por diversificación geográfica y de reaseguro no proporcional.

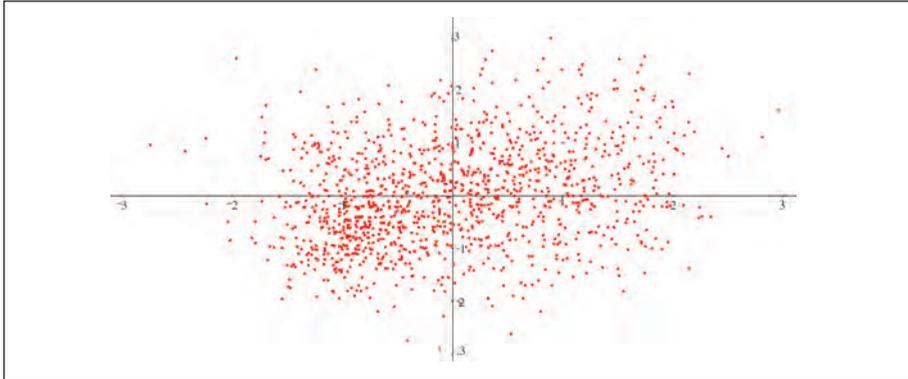


Figura 5.1: Diagrama de dispersión de los ratios de siniestralidad sobre primas una vez tipificados para que su media sea nula y su desviación típica la unidad, de los seguros de RC autos (abscisas) y RC general (ordenadas).

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de: *Documento CEIOPS FS-14/07 QIS3, "Calibration of the Underwriting Risk, Market Risk and MCR"*, abril 2007 y elaboración propia según lo explicado en el texto.

En definitiva, pues, admitimos que los datos representados en la Figura 5.1 tienen media nula y desviación típica igual a uno y proceden de una distribución bivalente (X,Y) , en donde X tiene una desviación típica de 0,1 e Y de 0,14, mientras que la media es la unidad en ambas variables. La Figura 5.2 contiene el diagrama de dispersión de (X,Y) .

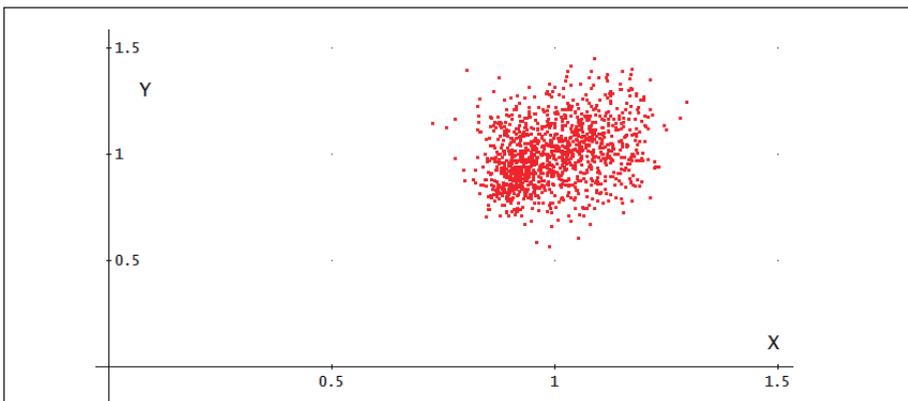


Figura 5.2: Diagrama de dispersión de los ratios de siniestralidad sobre primas, de los seguros de RC autos, en abscisas y RC general, en ordenadas.

Elaboración propia a partir de datos del *Documento CEIOPS FS-14/07 QIS3, "Calibration of the Underwriting Risk, Market Risk and MCR"*, abril 2007 y elaboración propia según lo explicado en el texto.

Estos pares de valores (X, Y) son el dato básico para nuestro trabajo. Sus características estadísticas principales se resumen en el Cuadro 5.1.

	Media	Desviación típica	Rango	Coef. de asimetría
X	0,99 \approx 1	0,095 \approx 0,10	0,726-1,295	+0,365
Y	0,99 \approx 1	0,145 \approx 0,14	0,565-1,450	+0,269

Cuadro 5.1: Valores de algunos estadísticos de los datos básicos.

Las diferencias entre las medias y las desviaciones típicas, por una parte, y los valores que hemos decidido atribuir a las mismas según lo ya indicado (1 para ambas medias y 0,1— 0,14 para las desviaciones) se deben a errores de redondeo. El coeficiente de correlación entre X e Y es 0,29.

3. ESTRUCTURA DE DEPENDENCIA DE LOS DATOS

Esta estructura viene determinada por la cópula, que no es directamente observable, sino que se obtiene a partir de la distribución estadística del vector \mathbf{X}_n , cuyos componentes X_i significan la variable aleatoria i -ésima de las que son objeto de observación. En nuestro caso, estamos ante una distribución bivalente (X, Y) . La cópula resultará de aplicar a dichas variables su respectiva función de distribución, $u=F_X(x)$, $v=F_Y(y)$. No conocemos de antemano cuáles son dichas funciones y de ahí que hayamos de estimarlas a partir de nuestros datos. Caben aquí las posibilidades examinadas en el Capítulo 3, Epígrafe 2, es decir, el procedimiento conocido como "IFM" y la estimación no paramétrica de las distribuciones marginales. Ésta es la solución que seguiremos, por las razones expuestas en dicho lugar aunque, en atención a consideraciones prácticas, recurriremos a la vía mixta, consistente en adoptar un modelo lognormal para los valores más altos de la distribución (cuantiles superiores al 99,9 por 100).

4. LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES EMPÍRICAS

La utilización que más adelante haremos de ellas requiere que sean continuas; para lograrlo, admitiremos la hipótesis de que, entre dos valores contiguos

cualesquiera de la distribución empírica, (x_i, x_{i+1}) o bien (y_j, y_{j+1}) la distribución de la densidad es uniforme.

Por ejemplo, en la función de distribución empírica de X , los puntos $x_i=0,85$; $x_{i+1}=0,851$ son contiguos, en el sentido de que no se ha observado ningún otro intermedio y admitimos, para hacer que la función de distribución sea continua, que los posibles puntos comprendidos entre ambas observaciones consecutivas tienen la misma densidad de probabilidad. Por tanto, para cualquier x tal que $x_i < x < x_{i+1}$, la función de distribución es:

$$F(x) = F(x_i) + [F(x_{i+1}) - F(x_i)] \cdot \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

La densidad en el intervalo x_i, x_{i+1} es constante e igual a:

$$\frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

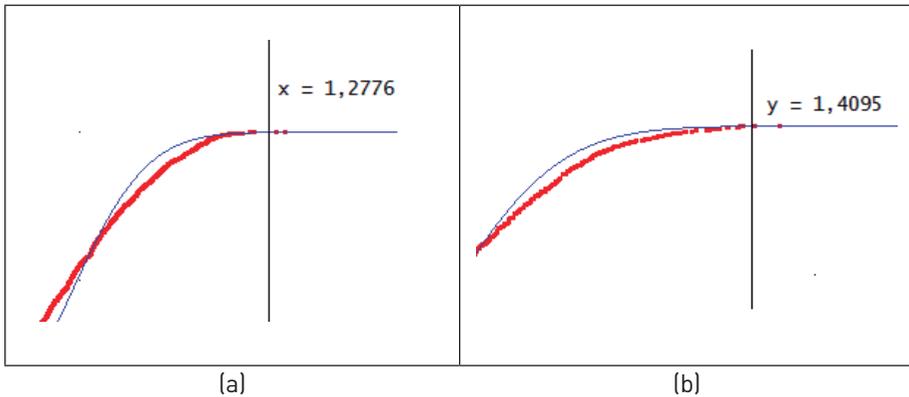
Si vamos a utilizar las funciones de distribución empíricas así obtenidas en aplicaciones en que sea de interés el comportamiento de la distribución marginal en su cola derecha, será conveniente ajustar una función analítica a dicha cola, para evitar la limitación que supone trabajar con una distribución truncada y que, además, contará con un número escaso de observaciones en esa zona extrema. En el caso de variables con distribución de cola larga suele recurrirse a la distribución de Pareto u otra similar pero, en nuestro caso, en que las frecuencias observadas decrecen rápidamente al alejarnos de la media, podemos hallar una solución satisfactoria sin abandonar el modelo lognormal. Ante todo, hemos de elegir un umbral x_0 (y_0 para la distribución de Y) a partir del cual sustituiremos la función empírica por la teórica o analítica. Si el umbral x_0 (y_0) es bajo, despreciaremos información empírica para, en su lugar, seguir el modelo teórico. Si, por el contrario, el umbral es demasiado alto, corremos el riesgo de confiar demasiado en la experiencia observada, que puede ser poco fiable en valores extremos, por el escaso número de observaciones obtenidas en esos tramos.

Una vez fijado el umbral, hay varias alternativas para determinar los parámetros del modelo teórico. Una solución posible es la siguiente: Admitimos que el modelo

lognormal que vamos a utilizar tiene media igual a 1, con lo cual $m=-s^2/2$, y determinamos el parámetro s de forma que:

$$\int_{x_0}^{\infty} L(x; m, s) = 1 - F(x_0) \quad (5.4a)$$

siendo $L(x; m, s)$ la función de densidad lognormal de parámetros $m=-s^2/2$ y s , mientras que $F(\cdot)$ es la función de distribución empírica continua.



Funciones de distribución de X —en (a)— e Y —en (b)—. En rojo la distribución empírica y en azul la curva logarítmico-normal ajustada a cada cola derecha a partir de $x > 1,2726$ y de $y > 1,4095$.

Figura 5.3.

Elegimos x_0 de forma que $F(x_0)=0,999$, lo que hace que $x_0=1,2726$. Al resolver la ecuación (5.4a) con dicho valor, resulta como solución $s=0,079$; por tanto, $m=-0,0031$. El mismo planteamiento, aplicado a la distribución de Y , nos lleva al umbral $y_0=1,4095$ y al valor $s=0,113$, con $m=-0,0064$. En la Figura 5.3 (a) y (b) se observan los ajustes realizados.

5. LA CÓPULA EMPÍRICA

Obtenidas las funciones de distribución marginales, empíricas y continuas (con el respectivo ajuste en la cola que acabamos de ver), obtenemos la cópula empírica al calcular el par $\{u, v\}$ que corresponde a cada par $\{x, y\}$ de nuestras observaciones.

El Cuadro 5.2 ofrece en forma resumida los datos de esta cópula empírica para nuestros datos básicos, constituidos por los 1269 puntos representados en la Figura 5.2. Cada fila del Cuadro representa un tramo de frecuencias acumuladas para la variable U , de forma que la primera fila se refiere a valores $u=F_x(x)$ con frecuencias no superiores a 0,1, la segunda a 0,2 y así sucesivamente hasta la décima, referente a frecuencias máximas. Y lo mismo para las columnas, referidas a la variable $v=F_y(y)$ (recordemos que las funciones F_x y F_y son las funciones empíricas y continuas, ajustadas según lo descrito en el Epígrafe anterior).

0.01339	0.03388	0.04176	0.052	0.06304	0.06934	0.07328	0.07959	0.09535	0.09929
0.03073	0.06698	0.09219	0.115	0.1347	0.1481	0.1576	0.1717	0.1914	0.1993
0.04018	0.09062	0.1315	0.1702	0.2033	0.2261	0.2403	0.2631	0.2876	0.2994
0.04964	0.1103	0.1678	0.2182	0.2647	0.2955	0.3215	0.349	0.3814	0.3995
0.06304	0.1386	0.2056	0.2663	0.3199	0.3624	0.4003	0.4357	0.4751	0.4996
0.07486	0.1568	0.2324	0.3026	0.3632	0.4192	0.4736	0.5185	0.5657	0.5996
0.08116	0.1694	0.2505	0.3301	0.4011	0.472	0.5397	0.5918	0.6509	0.6997
0.08983	0.182	0.2702	0.3553	0.4349	0.5153	0.5957	0.665	0.7407	0.7998
0.09456	0.1907	0.2884	0.3766	0.4672	0.5594	0.6524	0.7368	0.8226	0.8991
0.09929	0.1993	0.3057	0.3995	0.5003	0.602	0.7037	0.7998	0.8999	1

Cuadro 5.2: Cópula empírica presentada en forma de matriz 10 x10.

Es decir, que el elemento (i,j) de la matriz significa la proporción de pares (u,v) tales que $u < 0,1.i$, y, además, $v < 0,1.j$. Por ejemplo, para $i=3, j=5$ tenemos el número 0,2033, que representa lo siguiente, recapitulando todo lo dicho para mayor claridad:

1. Partimos de nuestra base de datos constituida por los 1269 puntos (Figura 5.2) representativos de nuestra distribución bivalente de ratios RC autos (variable X) y RC general (variable Y).
2. Obtenemos las distribuciones marginales empíricas continuas y ajustadas en la cola, de X y de Y , respectivamente, $u=F_x(x)$, $v=F_y(y)$.
3. Valiéndonos de ambas funciones, calculamos los correspondientes pares de valores (u,v) .

4. Computamos el número de dichos pares tales que $u < 0,3$, $v < 0,5$. La proporción de este número en relación con el total de 1269 pares, es 0,2033. Dicha proporción es, por tanto, el valor de la cópula empírica $C(u,v) = C(0,3;0,5)$ o bien la frecuencia de aquellos casos en que $u < 0,3$ y $v < 0,5$. Si las funciones de distribución marginales son continuas, se verificará que el valor de la cópula empírica en un punto, $C(u_0, v_0)$, significa también la proporción de pares (x,y) (en donde $x = F_X^{-1}(u)$, $y = F_Y^{-1}(v)$), tales que, simultáneamente, $x \leq F_X^{-1}(u_0)$, $y \leq F_Y^{-1}(v_0)$.

La cópula empírica puede representarse gráficamente por medio de los puntos (u,v) en $[0, 1]^2$ tal como se ve, para nuestros datos, en la Figura 5.4. En ella

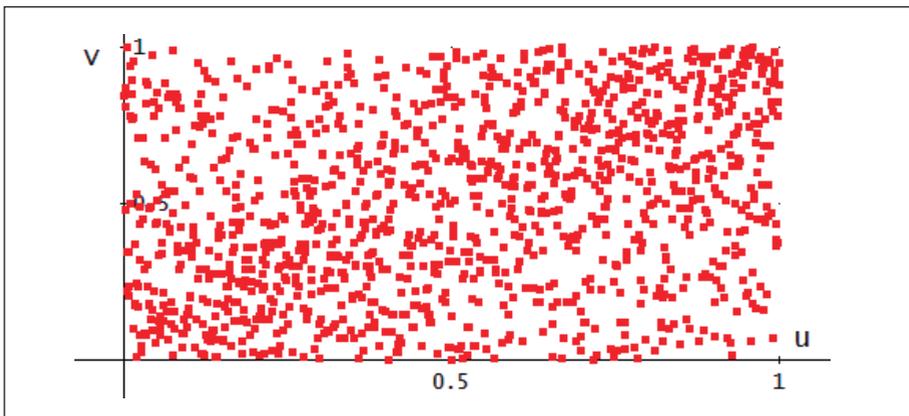


Figura 5.4: Cópula empírica correspondiente a los datos observados.

se aprecian algunas características de la dependencia entre X e Y , como su carácter débil y la ausencia de dependencia en las colas o extremos de la distribución. El coeficiente de correlación lineal es $\rho(u,v) = 0,302$. En las Figuras 5.5, 5.6 y 5.7 se muestran algunas curvas de nivel de la cópula empírica, para $C(u,v) = 0,1$, $0,3$, $0,5$, $0,7$ y $0,9$ ¹²⁷. En primer lugar, estas curvas de nivel se comparan con las correspondientes curvas de nivel de la cópula de independencia (Figura 5.5), lo que pone de manifiesto un cierto grado, aunque débil, de dependencia. En las Figuras 5.6 y 5.7

¹²⁷ Hemos obtenido la idea de estos gráficos como medio de evaluar a simple vista el signo y grado de dependencia, de R. Cintas del Río (2006).

se ve cómo las curvas de nivel de la cópula empírica están comprendidas entre las curvas de las cópulas máxima y mínima. El coeficiente τ de Kendall para la cópula empírica es $\tau=0,20289$.

El Cuadro 5.3 contiene la frecuencia con que, en la cópula empírica, $V > u_0 \mid U > u_0$, es decir, aproximaciones de la dependencia en la cola cuando elegimos valores de u_0 próximos a 1.

u_0	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99
Frec($V > u_0 \mid U > u_0$)	0.454	0.327	0.228	0.156	0.00

Cuadro 5.3: Aproximaciones de la dependencia en la cola de la cópula empírica.

La segunda fila de este Cuadro refleja cómo la frecuencia va disminuyendo cuando u_0 se va acercando a la unidad. Este resultado obliga a poner en tela de juicio, con los datos que manejamos y para el caso examinado, la práctica —preconizada por Solvencia II— de elevar el coeficiente de correlación para atender a la mayor dependencia en la cola de la distribución conjunta de los riesgos.

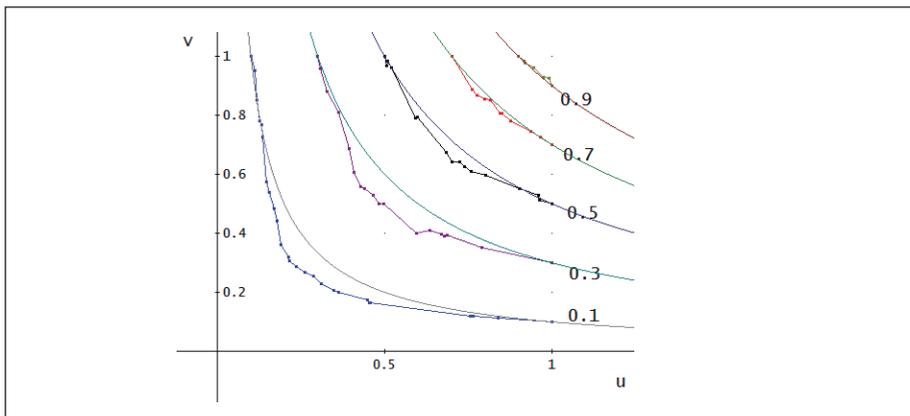


Figura 5.5: Curvas de nivel de la cópula empírica y su comparación con las de la cópula de independencia.

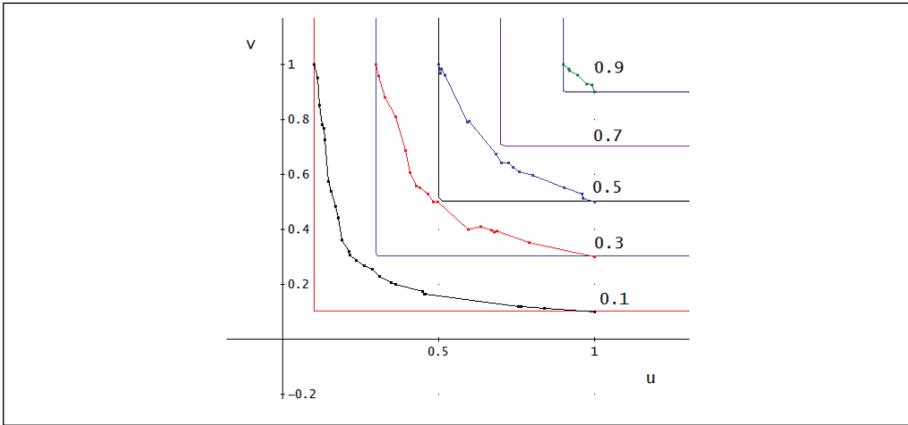


Figura 5.6: Curvas de nivel de la cópula empírica y su comparación con las de la máxima.

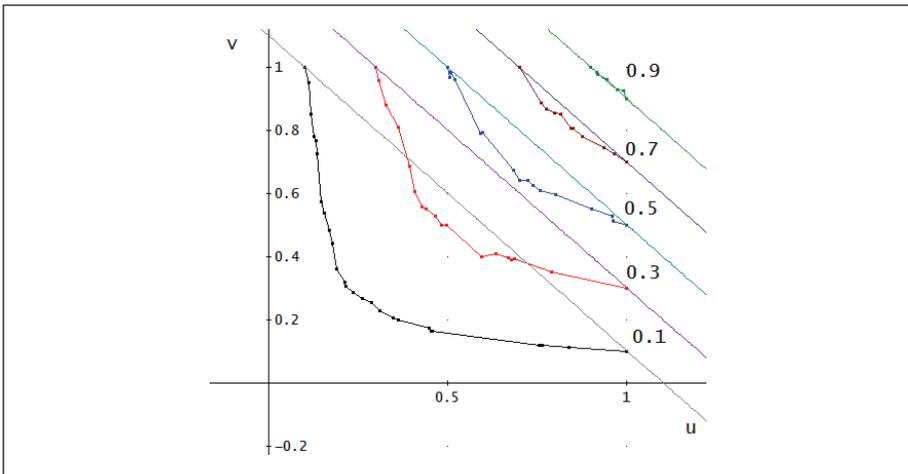


Figura 5.7: Curvas de nivel de la cópula empírica y su comparación con las de la mínima.

6. AJUSTE DE MODELOS DE CÓPULA POR PROCEDIMIENTOS GRÁFICOS

Nos planteamos ahora la búsqueda del modelo de cópula que se adapte mejor a nuestros datos.

En primer lugar, utilizaremos el método gráfico de Genest y Rivest, aplicable a las cópulas arquimedianas y que nosotros proponemos extender, en las condiciones que más adelante veremos, a otras cópulas bivariantes. Según quedó expuesto en III,2, este método consiste en comparar la gráfica de la función $K(w)=w-\varphi(w)/\varphi'(w)$ con las frecuencias del suceso $C(u,v)\leq w$, en donde $C(u,v)$ es la cópula empírica. Más concretamente: Recordemos que

$$K(w) = \text{Prob} [C(U,V) \leq w]$$

de manera que obtendremos su valor observado contando la proporción de los valores de la cópula empírica que no superan w . En el Cuadro 5.4 se recogen varias ordenadas de $K(w)$ para dicha cópula empírica.

w	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$K(w)$	0,183	0,293	0,378	0,449	0,519	0,57	0,615	0,669	0,772	0,774
w	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$K(w)$	0,812	0,852	0,885	0,911	0,931	0,953	0,967	0,984	0,998	1,00

Cuadro 5.4: Valores de la función $K(w)$ para la cópula empírica.

A continuación examinaremos algunas cópulas arquimedianas, a las que es de aplicación este método gráfico, y elegiremos la que mejor se adapte a nuestros datos.

Cópula de Gumbel

Ya vimos que su fórmula es: $C(u,v)=\text{Exp}\{-[(-\text{LN}(u))^\theta+(-\text{LN}(v))^\theta]^{1/\theta}\}$. Podemos calcular el parámetro θ por medio del método que, en este contexto, se denomina a veces, impropriamente, “método de los momentos” y que consiste en despejar θ en la fórmula que relaciona dicho parámetro con la τ de Kendall; en el caso de la cópula de Gumbel $\tau=(\theta-1)/\theta$. Al ser $\tau=0,202894$ resulta que $\theta=1,254$. Nos atenderemos, no obstante a la estimación máximo—verosímil que, como veremos más adelante, es $\theta=1,204$. Con este valor la función $K(w)$ resulta de tener en cuenta que:

$$\varphi(w) = (-\text{LN}(w))^\theta$$

de donde:

$$K(w) := w + \frac{(-\text{LN}(w))^{1.204}}{\frac{1.204 \cdot (-\text{LN}(w))^{1.204 - 1}}{w}}$$

La representación gráfica de $K(w)$, junto con los puntos $(w, K(w))$ de la cópula empírica, está en la Figura 5.8.

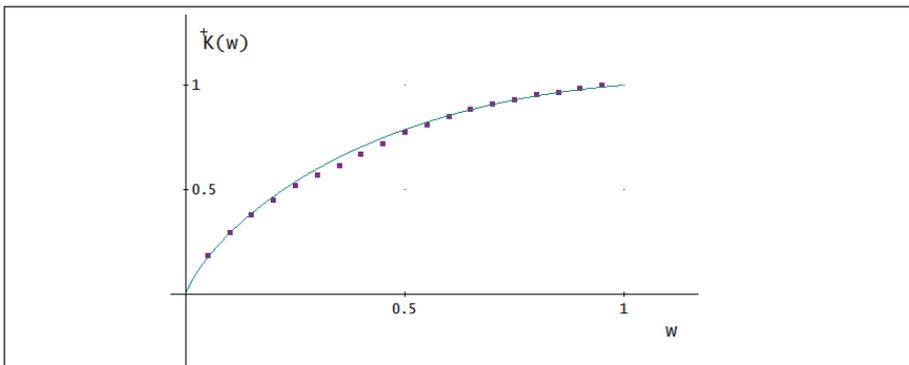


Figura 5.8: Función $K(w)$ para la cópula de Gumbel, con parámetro $\theta=1,204$ y su comparación con los valores de la cópula empírica.

Cópula de Clayton

Tiene la siguiente expresión: $C(u, v) = \text{Max}[(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0]$.

La fórmula para τ es:

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}$$

y de ella resulta (para $\tau=0,202894$) que $\theta=0,504$. La estimación máximo verosímil que obtendremos más adelante es 0,27. La función $\phi(w)$ es, para esta cópula:

$$\phi(w) = (w^{-\theta} - 1)/\theta$$

y, por tanto, $K(w)^{128}$:

$$K(w) := w - \frac{\frac{w}{-0.27} - 1}{-0.27 - 1}$$

Esta función $K(w)$ se representa en la Figura 5.9.

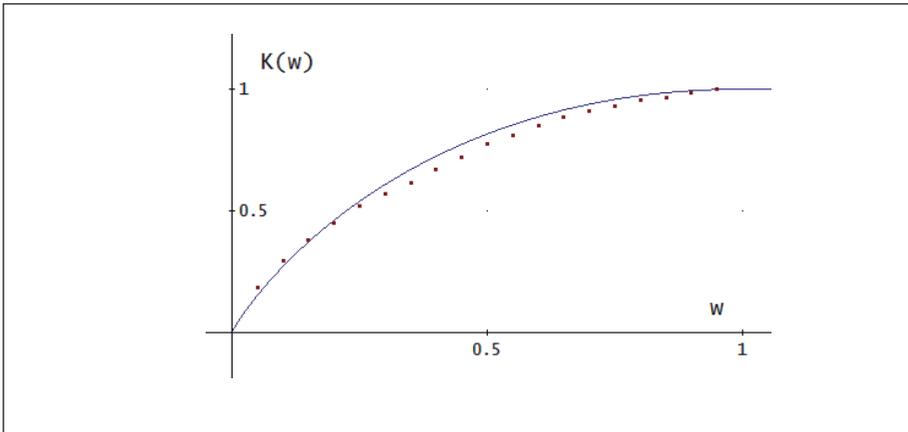


Figura 5.9: Función $K(w)$ para la cópula de Clayton, con parámetro $\theta=0,27$ y su comparación con los valores de la cópula empírica.

Cópula de Frank

Para este modelo la función $C(u,v)$ presenta la forma:

$$C(u, v) := -\frac{1}{\theta} \cdot \text{LN} \left(1 + \frac{(e^{(-\theta) \cdot u} - 1) \cdot (e^{(-\theta) \cdot v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$$

¹²⁸ Según se advirtió en la Introducción, las ecuaciones editadas mediante la aplicación informática utilizada para realizar cálculos y generar gráficos pueden presentar algunas diferencias en cuanto a tipo de letra y símbolos sobre el utilizado generalmente en este trabajo.

Por otra parte, recordemos que en el modelo de Frank,

$$\varphi(w) = -\text{LN} \frac{\exp(-\theta w) - 1}{\exp(-\theta) - 1}$$

mientras que la expresión para τ es:

$$\tau = 1 - \frac{1 - D(\theta, 1)}{\theta}$$

siendo $D(x, k)$ la función de Debye:

$$D(x, k) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt.$$

Para el valor empírico de τ resulta $\theta = 1,89$; el estimador de máxima verosimilitud nos da $\theta = 1,946$, valor éste que adoptamos. Por tanto, la función $K(w)$ es:

$$K(w) := w + \frac{\text{LN} \left(\frac{e^{-1.946 \cdot w} - 1}{e^{-1.946} - 1} \right)}{\frac{1.946}{1 - e^{-1.946}}}$$

La Figura 5.10 representa dicha función y su comparación con los puntos de la cópula empírica, significativos de las frecuencias en que el valor de ésta es menor que 0,1, 0,2, ... 0,9, 1.

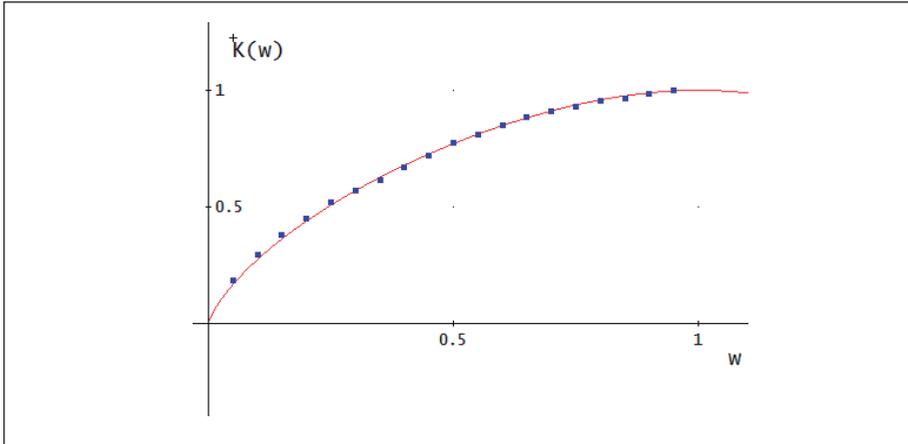


Figura 5.10: Función $K(w)$ para la cópula de Frank, con parámetro $\theta=1,946$ y su comparación con los valores de la cópula empírica.

Según hemos tenido ocasión de observar, sólo en las cópulas arquimedianas la función $K(w)$ es de carácter analítico y por ello el método gráfico para comparar modelos de cópula queda limitado a esta categoría de cópulas. La utilidad que vemos en este método nos anima a extender su aplicación (véanse III,2 y IV,1) y de ahí que propongamos utilizarlo, a guisa de ejemplo, en dos modelos más, la cópula gaussiana y la cópula t , en la forma que examinamos inmediatamente.

Cópula gaussiana

Tiene la siguiente forma:

$$C(u,v) = \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2)}} \iint_{-\infty, -\infty}^{x(u), y(v)} \exp[-.5(s^2 + t^2 - 2\rho st)/(1 - \rho^2)] ds dt$$

en donde $x(u)$ y $y(v)$ son las funciones de distribución inversas de X e Y , es decir que equivalen, respectivamente, a $x = \Phi^{-1}(u)$ e $y = \Phi^{-1}(v)$, como ya vimos en su momento; $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución normal estándar y ρ es el coeficiente de correlación.

Para obtener una aproximación de la función $K(w)$ para la abscisa $w=w_0$ recurrimos a la simulación estocástica mediante un programa que realiza los pasos siguientes:

1. Simula dos números aleatorios (pseudoaleatorios) normales (0,1) con el coeficiente de correlación ρ elegido.
2. Obtiene el valor de la función de distribución normal bivalente (0,1), $\Phi_\rho(x,y)$ para ese par de números.
3. Si $\Phi_\rho(x,y) = C_\rho(u,v) \leq w$, computa un "éxito".
4. Tras repetir los pasos anteriores muchas veces, da el cociente entre el número de éxitos y el de pares aleatorios generados.

Al no ser cópula arquimediana, no podemos recurrir a la expresión para la τ de Kendall

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \varphi(z) dz / \varphi'(z),$$

sino que podríamos utilizar la fórmula, válida en las cópulas elípticas:

$$\tau = (2/\pi) \cdot \arcsen(\rho), \text{ o bien: } \rho = \text{sen}(\pi \cdot \tau / 2).$$

Para $\tau=0,202894$ resulta que $\rho=0,313$. Elegimos, no obstante, el valor $\rho=0,29$, que es la estimación máximo-verosímil, según veremos más adelante.

Los resultados del proceso descrito están en el Cuadro 5.5.

Si queremos obtener una curva que se adapte a los puntos obtenidos y que se reflejan en el Cuadro 5.5, obtenemos la siguiente por el método de los mínimos cuadrados:

$$K(w) \approx 2,267w^5 - 7,275w^4 + 9,098w^3 - 6,306w^2 + 3,216w$$

w	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$K(w)$	0,16	0,27	0,37	0,44	0,52	0,59	0,65	0,70	0,74	0,79
w	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$K(w)$	0,83	0,86	0,88	0,91	0,94	0,96	0,97	0,99	0,996	1,00

Cuadro 5.5: Valores de la función $K(w)$ para la cópula gaussiana.

En la Figura 5.11 quedan representados los puntos (w, K) según la cópula empírica, así como la función ajustada $K(w)$.

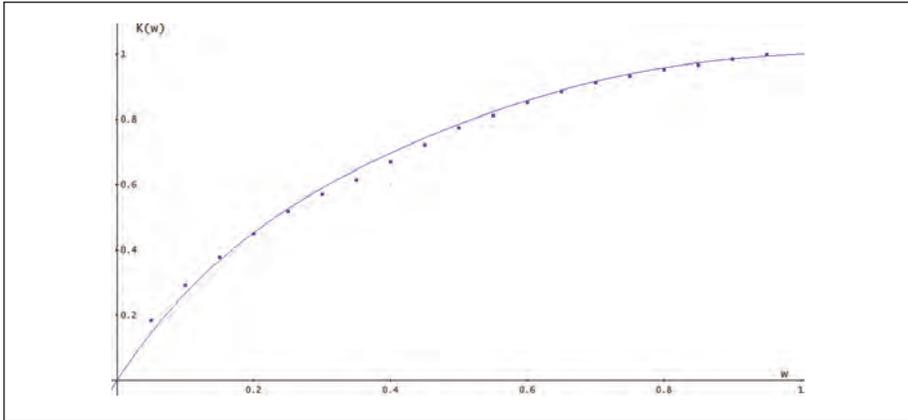


Figura 5.11: Aproximación de la función $K(w)$ para la cópula gaussiana, con parámetro $\rho=0,29$ y su comparación con los valores de la cópula empírica.

Cópula t

Su ecuación es:

$$C(u, v) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \pi n \sqrt{1-\rho^2}} \iint_{-\infty, -\infty}^{x(u), y(v)} \left[1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{n(1-\rho^2)} \right]^{-\frac{n+2}{2}}$$

Las funciones $x(u)$ e $y(v)$ son la inversa de la función de distribución univariante t de Student, en x y en y respectivamente.

Procedemos de manera similar a la descrita en la cópula de Gauss, es decir: Por medio de simulaciones obtenemos los valores de la función $K(w) = \text{Prob}\{C(U, V) \leq w\}$, para $w=0,05, 0,10$, etcétera y a continuación determinamos la curva mínimo-cuadrática. El resultado gráfico de la cópula t será tanto más próximo al de la gaussiana cuanto mayor sea el número n de grados de libertad. Por eso, examinaremos la cópula t para el caso en que n sea pequeño, por ejemplo $n=4$. Para el parámetro ρ seguimos adoptando el valor 0,29. La aproximación de $K(w)$ que obtenemos es entonces:

$$K(w) = 1,461w^5 - 5,027w^4 + 6,885w^3 - 5,411w^2 + 3,092w$$

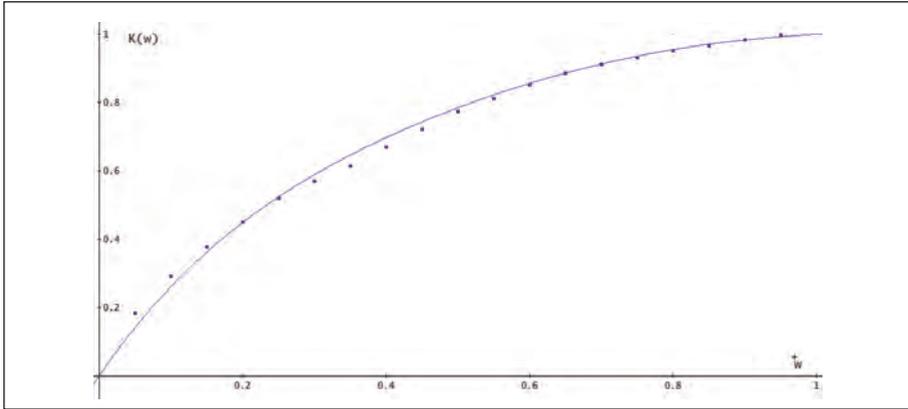


Figura 5.12a: Aproximación de la función $K(w)$ para la cópula t , con $n=4$ grados de libertad y parámetro $\rho=0,29$ y su comparación con los valores de la cópula empírica.

En la Figura 5.12a tenemos su representación gráfica, acompañada, como siempre, de los puntos (w, K) de la cópula empírica. Su apariencia, a simple vista, es difícil de distinguir de la gráfica 5.11 y para poner de manifiesto alguna diferencia representamos en la Figura 5.12b un tramo de ambas curvas suficientemente ampliado para apreciar que, sin ser muy satisfactoria ninguna de ambas cópulas, la de Gauss es algo mejor.

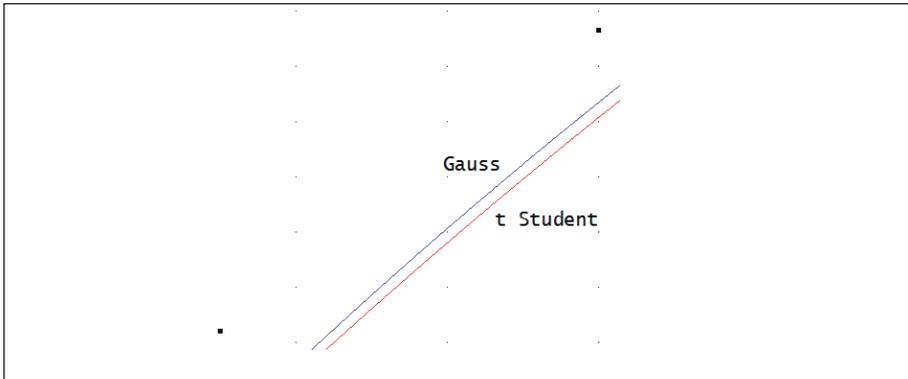


Figura 5.12b: Ampliación de las gráficas de la Función $K(w)$ ajustada por mínimos cuadrados de las cópulas de Gauss y t , en el tramo de abscisas $(0,04-0,16)$, aproximadamente.

En efecto, los dos únicos puntos que aparecen en esta ampliación, correspondientes a la función $K(w)$ de la cópula empírica, se hallan distanciados de las curvas y la correspondiente a la t de Student es la más alejada de ambas. En el Epígrafe 8, en que determinaremos la respectiva medida de Frees y Valdez, confirmaremos esta conclusión.

7. LOS GRÁFICOS “CUANTIL-CUANTIL” (q—q)

Hacemos ahora un breve apartado para referirnos a este tipo de gráficos, que ya utilizamos en IV,1. En lugar de las anteriores comparaciones entre la función $K(w)$ de cada modelo, representada como una curva, y varios valores de la misma función, pero procedentes de la cópula empírica y que representamos por varios puntos, podríamos habernos servido de los gráficos q—q, que dan imagen del grado de cercanía entre dos funciones de distribución, F_1 y F_2 por medio de los puntos $(F_1(x_i), F_2(x_i))$ ($i=1,2, \dots, n$). Cuanto más próximos se encuentren dichos puntos a la recta $y=x$, más cercanas están ambas funciones de distribución. Aplicaremos este método sólo a dos casos de los examinados: Las cópulas de Frank y de Clayton. El gráfico obtenido representará los puntos $(K_E(w_i), K(w_i))$, siendo la abscisa $K_E(w_i)$ de cada uno el valor de la función K para el punto w_i según la cópula empírica, mientras que la ordenada significará el mismo concepto, pero según el respectivo modelo teórico; distinguiremos a dicha ordenada con el subíndice F o C según se trate del modelo de Frank o del de Clayton).

En el caso de Frank, tenemos los puntos $(K_E(w_i), K_F(w_i))$ que se representan en la Figura 5.10; la abscisa $K_E(w_i)$ es la probabilidad de que la cópula empírica no supere a w_i ; la ordenada $K_F(w)$ es la misma probabilidad, pero referida a la cópula de Frank; si ésta se aproxima a la cópula empírica, abscisa y ordenada serán también cercanas, para todos los x_i . Para $x=0,1, 0,2, \dots, 1$ las cifras se reflejan en el Cuadro 5.6, que incluye también las correspondientes a la cópula de Clayton:

w	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$K_E(w)$	0,293	0,449	0,57	0,669	0,774	0,852	0,911	0,953	0,984	1,0
$K_F(w)$	0,274	0,439	0,57	0,679	0,771	0,849	0,911	0,959	0,989	1,0
$K_C(w)$	0,271	0,461	0,608	0,725	0,816	0,886	0,938	0,973	0,993	1,0

Cuadro 5.6: Valores de la función $K(w)$ para las cópulas empírica, de Frank ($\theta=1,9460$) y de Clayton ($\theta=0,27$).

En la Figura 5.13 se representan los gráficos q—q para las cópulas de Frank y de Clayton. Se observa que es mucho más adecuada para nuestros datos la primera de ellas, al estar más próximos sus puntos a la línea continua, expresión gráfica de la recta $y=x$.

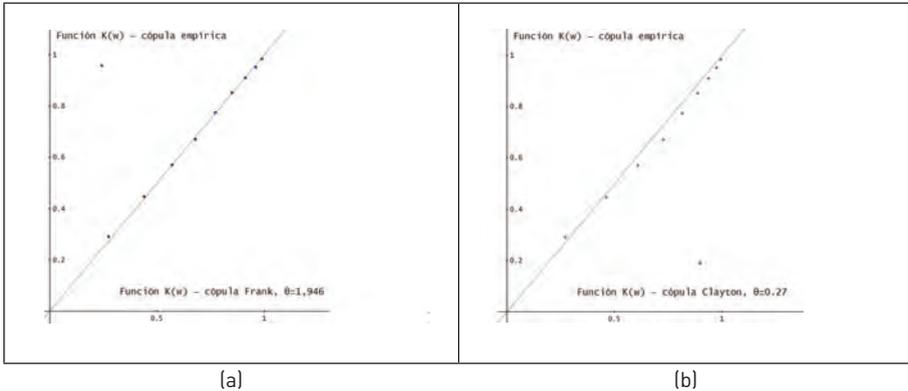


Figura 5.13: Gráfico q—q para comparar la cópula empírica con las de Frank (a) y de Clayton (b).

8. LA MEDIDA DE FREES Y VALDEZ

En su trabajo ya citado¹²⁹ proponen estos autores una medida de la proximidad entre las funciones representadas en las Figuras 9 a 13. Esta medida viene dada por la expresión (3.1) y como ya dijimos en III,2, puede aplicarse si determinamos una función analítica $P(t, \hat{\theta})$ que sustituya a las observaciones realizadas.

Obtenemos una aproximación $P(t, \hat{\theta})$ de la función empírica observada mediante el ajuste mínimo—cuadrático de una curva a los puntos cuya abscisa w y ordenada $K_E(w)$ figuran en el Cuadro 5.4, que nos da el resultado siguiente:

$$K_E(w, n) \approx P(t, \hat{\theta}) = 7,5158w^5 - 21,4353w^4 + 22,5168w^3 - 11,4751w^2 + 3,8358w$$

El Cuadro 5.7 contiene la medida resultante para cada una de las cópulas consideradas:

¹²⁹ Frees y Valdez (1998).

Cópula	Parámetro	Medida de Frees y Valdez x 1000
Frank	1,946	0,114
Gauss	0,29	0,277
Gumbel	1,204	0,294
t	$\rho=0,29; n=4$	0,440
Clayton	0,27	0,886

Cuadro 5.7: Medida de Frees y Valdez para los distintos modelos de cópula, ordenados de mejor a peor.

9. LA FUNCIÓN DE VEROSIMILITUD

Otro método para seleccionar el modelo de cópula más adecuado a los datos consiste en calcular la verosimilitud y determinar el parámetro que la hace máxima. Dicho método se llama “de la máxima pseudo-verosimilitud” o “máxima verosimilitud canónica”, porque los valores de la cópula que entran en el cómputo no resultan de una cópula empírica obtenida a partir de las distribuciones marginales de las variables observadas, sino de una estimación no paramétrica de dichas distribuciones marginales.

Pues bien, el Cuadro siguiente refleja los valores del logaritmo de la máxima verosimilitud de cada modelo de cópula —de los cinco que venimos examinando— y el valor correspondiente del parámetro¹³⁰. El importe reflejado es, por tanto,

$$\sum_{i=1}^{1269} \text{LN} [c(u, v, \theta)] \quad (5.4b)$$

siendo $c(u, v, \theta)$ la función de densidad del respectivo modelo de cópula, mientras que u, v son los pares de valores obtenidos mediante:

$$u=F_1(x), v=F_2(y).$$

F_1 y F_2 son las funciones de distribución empíricas, continuas y ajustadas definidas en el Epígrafe 4; x e y son los ratios de siniestralidad de primas y θ es el valor del parámetro que maximiza la expresión (5.4b).

¹³⁰ Excepto en el caso de la cópula t, en que hemos optado por el parámetro $n=4$

Cópula	Parámetro	Máximo Logaritmo verosimilitud
Frank	1,946	61,596
Gauss	0,29	56,01
Gumbel	1,2040	48,627
t [4 g de l]	0,29	36,92
Clayton	0,27	25,14

Cuadro 5.8: Logaritmo del máximo de la función de verosimilitud de cada modelo de cópula, y estimación máximo verosímil del parámetro de dependencia. Los modelos están ordenados de mejor a peor.

El orden de los modelos coincide con el del Cuadro 5.7, basado en la medida de Frees y Valdez. Y también los métodos gráficos utilizados en los Epígrafes 6 y 7 nos llevan a igual desenlace. Por otra parte, es evidente que el criterio de Akaike conduce a idéntica jerarquía; dicho criterio consiste en asignar a cada modelo el valor:

$$AIC = -2 \cdot [\ln f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_0) - q]$$

y elegir el que tenga importe inferior; f es la función de densidad respectiva, \mathbf{X} el vector muestral, $\boldsymbol{\theta}_0$ el vector de las estimaciones máximo-verosímiles de los parámetros del modelo y q el número de parámetros estimados.

La **conclusión** es la siguiente: el modelo de cópula más adecuado es el de Frank, con parámetro $\theta=1,9460$. Recordemos que la cópula de Frank carece de dependencia en las colas.

10. MODELOS PARA LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES

En la Figura 5.14 tenemos representadas las funciones de distribución empíricas de las variables X e Y (ratios de siniestralidad y demás gastos, sobre primas de RC autos y RC general, respectivamente).

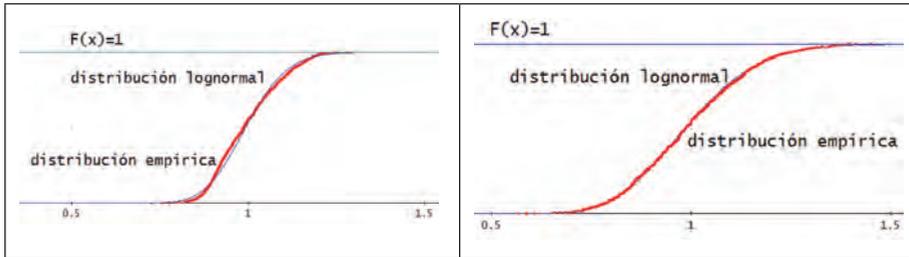


Figura 5.14: Funciones de distribución empírica de X e Y (a) y (b) respectivamente (en rojo) y lognormal máximo-verosímil (en azul).

En ambas gráficas se ha superpuesto la correspondiente función de distribución logarítmico-normal con los parámetros máximo-verosímiles que se muestran en el Cuadro 5.9.

	m	s
X	-0,00695	0,0944
Y	-0,01687	0,1465

Cuadro 5.9: Estimaciones máximo-verosímiles de los parámetros del modelo lognormal para X e Y .

Se ha llevado a cabo el contraste χ^2 de la bondad del ajuste de dichos modelos lognormales con un nivel de significación del 5 por 100 y el resultado ha sido el siguiente:

a) Distribución de X :

Intervalos de X	Frecuencias observadas	Frecuencias teóricas
0 - 0,82	8	9,6
0,82 - 0,88	99	106,8
0,88 - 0,94	318	27,1
0,94 - 1,00	274	331,3
1,00 - 1,06	237	256,6
1,06 - 1,12	175	154,2
1,12 - 1,18	111	79,5
1,18 - 1,30	46	53,8
>1,30	0	0,0

Cuadro 5.10: Frecuencias de X , observadas y teóricas según el modelo lognormal.

Las frecuencias teóricas de cada intervalo (a,b) se obtienen con la integral:

$$1269 \cdot \int_a^b \frac{\text{EXP}\left[-0.5 \cdot \left(\frac{\text{LN}(x) + 0.00695}{0.0944}\right)^2\right]}{0.0944 \cdot x \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)}} dx$$

El estadístico χ^2 para estos datos es 34,7. Al haberse estimado 2 parámetros a partir de la muestra, el número de grados de libertad es $8-1-2=5$; para un nivel de significación del 5 por 100 el valor χ_5^2 es 11,07, con un valor p nulo, por lo que hemos de rechazar la hipótesis de que la distribución de X sigue el modelo lognormal con los parámetros que muestra el Cuadro 5.9.

b) En el caso de la distribución marginal de Y , la comparación entre las frecuencias observadas y las teóricas, que se obtienen mediante cálculo similar al anterior aunque sustituyendo adecuadamente los parámetros de la lognormal, son:

Intervalos de Y	Frecuencias observadas	Frecuencias teóricas
0 – 0,7	9	13
0,7 – 0,8	93	88,1
0,8 – 0,9	250	245,4
0,9 – 1,0	347	346,3
1,0 – 1,1	272	294,6
1,1 – 1,2	191	171,3
1,2 – 1,3	75	74,5
>1,3	31	28,4

Cuadro 5.11: Frecuencias de Y , observadas y teóricas según el modelo lognormal.

El valor del estadístico χ^2 es ahora 5,68 y el número de grados de libertad es, igualmente, 5. El valor de las tablas para el nivel de significación 5 por 100 es 11,07, por lo que no rechazamos la hipótesis nula, consistente en admitir que la muestra de valores de Y proviene de una población logarítmico-normal con parámetros $m=-0,01687$, $s=0,1465$. El valor p es 0,338.

En resumen: al nivel de significación 5 por 100,

- Rechazamos la hipótesis de que X se distribuye según la lognormal ($m = -0,00695$; $s = 0,0944$).
- No hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis de que Y sigue dicho modelo ($m = -0,01687$; $s = 0,1465$).

Y a la vista de ello, las **conclusiones** son las siguientes:

- a. En relación con la distribución marginal de X , al ser los datos numerosos, nos decantamos por adoptar como modelo a la distribución empírica continua, si bien la cola de ésta (para $x > 1,2726$) queda sustituida por una lognormal con parámetros $m = -0,0031$; $s = 0,079$. Ésta es la función que definimos en el Epígrafe 4 en relación con las distribuciones marginales empíricas.
- b. Como distribución marginal de Y adoptamos el modelo lognormal con los parámetros que acabamos de exponer y que muestra el Cuadro 5.9.

Para obtener una gráfica de la función de densidad de X recurrimos a la densidad kernel. Se trata de un modo de suavizar las funciones de densidad empíricas por medio de la fórmula:

$$f(x) = \frac{1}{h \cdot n} \sum_{i=1}^n K \left[\frac{x - x_i}{h} \right]$$

en donde $K(\cdot)$ es una función de densidad, que en nuestro caso será la normal; x_i , el valor i -ésimo observado, n el número de elementos de la muestra y h es un parámetro que mide el grado de suavizado que logra la fórmula: A mayor valor de h , más alta es la dispersión de la densidad representada por la función $K(\cdot)$; por tanto, más amplio es cada sumando de la fórmula y más fuerte el suavizado que ésta opera. Si h es pequeño ocurre lo contrario: La dispersión de la densidad que aporta cada sumando y que se centra en la respectiva abscisa x_i queda más concentrada en ella y el suavizado es menor. El valor de h no debe elegirse arbitrariamente, sino que ha de guardar relación con la desviación típica de la distribución de X a la que pretende aproximar. Una fórmula práctica para elegir el valor de h es: $h \approx 1,06\sigma/n^{0,2}$;

en nuestro caso, $\sigma=0,10$ y por tanto $h\approx 0,0254$. El resultado es una función de densidad empírica y suavizada, que se representa en la Figura 5.15.

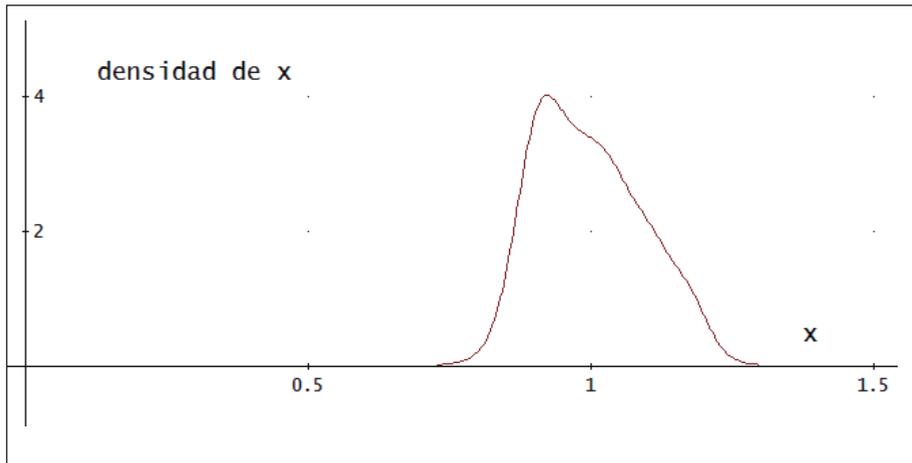


Figura 5.15: Densidad kernel de la variable X .

La gráfica de la densidad de Y , según el modelo lognormal, está en la Figura 5.16:

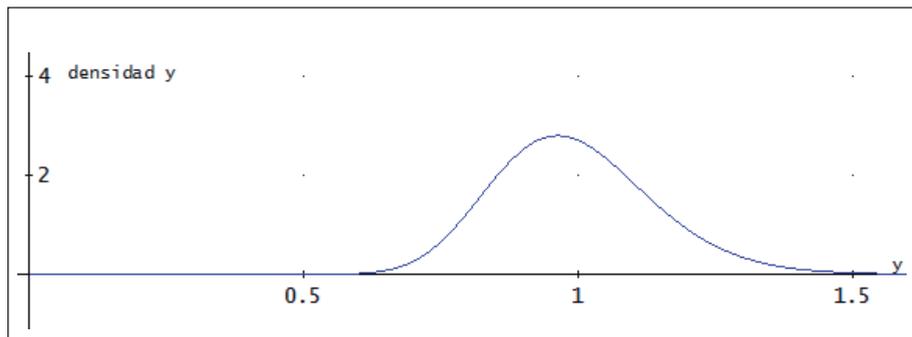


Figura 5.16: Densidad de la variable Y , según el modelo lognormal.

11. MEDIDAS DE RIESGO PARA UNA CARTERA DE SEGUROS COMPUESTA POR RIESGOS X O POR RIESGOS Y

Empezaremos con el cálculo del VaR al 99,5 por 100 (nivel de confianza exigido por la normativa de Solvencia II) de cada uno de los riesgos X e Y . Se trata de resolver la ecuación

$$F_i\{\text{VaR}\}=0,995$$

en donde F_i es la función de distribución marginal de las variables X ó Y respectivamente. En el caso de X , su distribución empírica continua nos da el valor $\text{VaR}=1,2236$, mientras que, para Y , el modelo logarítmico-normal aceptado le asigna un VaR de 1,4343.

La pérdida media condicionada (*expected shortfall* o *tail conditional expectation*) es:

$$ES\{Z\}_\alpha = E\{Z \mid Z > \text{VaR}_\alpha\}$$

es decir, la media de Z , condicionada a que Z supere el VaR al 100α por 100.

Pues bien, utilizamos ahora el modelo de distribución marginal adoptado en el Epígrafe 10 para X y para Y , respectivamente. Para X tenemos:

$$ES_{99,5}(X) = \frac{1}{0,005} \left(\sum_1^6 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} x dx + \int_{x(7)}^{\infty} x \cdot L(x; m, s) \cdot dx \right)$$

$F(\cdot)$ es la función de distribución empírica y continua de X ; $L(x; m, s)$ es la densidad lognormal adoptada como modelo en la cola de la distribución (Epígrafe 10); el número de términos del sumatorio es 6 debido a que entre el valor x tal que $F(x)=0,999$ (que es $x=1,2726$) y el que hace que $F(x)=0,995$, la distribución empírica presenta 6 tramos; así, $x_1=1,2236$; $x_2=1,224$; ...; $x_7=1,2726$. Este último valor coincide con el límite inferior de la integral). El resultado de este cálculo es $ES_{99,5}(X)=1,25$.

Para determinar $ES_{99,5}(Y)$ calculamos el valor de

$$\frac{1}{0,005} \int_{VaR=1,4343}^{\infty} y \cdot L(y; -0,01687; 0,1465) \cdot dy$$

en donde $L(y;m,s)$ es la función de densidad correspondiente. Por tanto, $ES_{99,5}(Y) = 1,501$.

El Cuadro 5.12 recoge los anteriores resultados.

Riesgo	VaR 99,5%	ES 99,5%
$X = RC$ automóviles	1,2236	1,25
$Y = RG$ gral.	1,4343	1,501

Cuadro 5.12. Medidas de riesgo para las carteras X e Y , individualmente consideradas.

12. CÁLCULO DEL CAPITAL DE SOLVENCIA DE UNA CARTERA COMPUESTA POR RIESGOS X E Y , SEGÚN EL MÉTODO DE LAS CORRELACIONES ESTABLECIDO EN SOLVENCIA II

Supondremos que la cartera está integrada por ambos tipos de riesgos, X e Y (ratios de siniestralidad sobre primas en el seguro de RC automóviles y RC general, respectivamente) en proporciones respectivas p y q ($p+q=1$). Dichas proporciones se refieren al volumen de primas.

La fórmula para el cálculo del capital de solvencia mínimo, según la normativa de Solvencia II, es:

$$\sigma_{nl} = \frac{1}{V_{nl}} \sqrt{[\sigma_x \cdot V_x]^2 + [\sigma_y \cdot V_y]^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y V_x V_y}$$

ρ es el coeficiente de correlación entre los riesgos X e Y (que, según la normativa expuesta en el Epígrafe 1 de este Capítulo, es igual a 0,5).

V_x , V_y y V_{nl} representan el volumen de riesgo en X , en Y o en total, respectivamente; admitimos como tal volumen el de las primas, sin más análisis ni distinciones y suponemos que $V_x = p \cdot V_{nl}$ y $V_y = q \cdot V_{nl}$.

Por tanto,

$$\sigma_{nl} = \sqrt{[(\sigma_x \cdot p]^2 + [\sigma_y \cdot q]^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot \sigma_x \sigma_y}$$

Si sustituimos las desviaciones típicas por sus valores respectivos según la normativa de Solvencia II ($\sigma_x=0,10$; $\sigma_y=0,14$) y tenemos en cuenta que $q = 1-p$, resulta que la desviación típica σ_{nl} es una función únicamente de p , al igual que el capital mínimo obligatorio por unidad de volumen de primas, cuya expresión será:

$$SCR_{nl}/V_{nl} = 3 \cdot \sigma_{nl} = 3 \cdot \sqrt{0,1^2 p^2 + 0,14^2 (1-p)^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,014 p (1-p)}$$

El Cuadro 5.13 recoge el importe de capital de solvencia obligatorio por unidad de volumen de primas de toda la cartera, es decir, SCR_{nl}/V_{nl} , para algunos valores de p :

p	0,10	0,30	0,50	0,70	0,90
SCR_{nl}/V_{nl}	0,394	0,348	0,313	0,294	0,293

Cuadro 5.13. Capital de solvencia obligatorio por unidad de volumen de primas, calculado según la normativa de Solvencia II para el modelo estándar.

En los anteriores cálculos hemos tenido en cuenta exclusivamente el riesgo de primas, al carecer de datos reales sobre el de reservas.

13. CÁLCULO DEL CAPITAL DE SOLVENCIA DE UNA CARTERA COMPUESTA POR RIESGOS X E Y, CON APLICACIÓN DE LAS CÓPULAS

El objetivo principal de este Capítulo es comparar el importe del SCR, según se determine con la normativa del modelo estándar de Solvencia II o mediante la aplicación de las cópulas y dentro de ellas, de la cópula de Frank con parámetro 1,946 (véase la conclusión del Epígrafe 9, “La función de verosimilitud”) y distribuciones marginales que hemos tomado como modelo (Epígrafe 10, “Modelos para las distribuciones marginales”, especialmente las conclusiones).

En estas condiciones, la función de distribución conjunta de las tasas o ratios de siniestralidad y gastos sobre primas para los seguros de RC automóviles (X) y RC general (Y), será:

$$\text{Prob}(X \leq x; Y \leq y) = F(x, y) = F[x^{-1}(u), y^{-1}(v)] = C(u, v)$$

$x^{-1}(u)$ e $y^{-1}(v)$ son las inversas de las funciones de distribución marginal de X e Y , cuya forma respectiva quedó definida en el Epígrafe 10. $C(u, v)$ es la cópula que modeliza la dependencia entre ambos riesgos, en concreto la de Frank con $\theta=1,946$.

Nuestro problema es calcular la probabilidad de que la suma $X+Y$ sea inferior a cualquier número $t>0$, es decir, $\text{Prob}(X+Y \leq t)$. Este cálculo puede hacerse por tres vías o métodos distintos, ordenados de menor a mayor en cuanto a nuestra preferencia en el caso concreto que nos ocupa:

a) Método de la simulación de Montecarlo

Consiste en realizar los pasos siguientes:

1. Simular un par de números aleatorios (u_0, v_0) de la cópula Frank (véase Capítulo III, 3 y Nota 93) con el parámetro deseado (en este caso, 1,946).
2. Obtener los números x_0 e y_0 tales que:

$$x_0 = F_X^{-1}(u); y_0 = F_Y^{-1}(v)$$

3. Sumar $x_0 + y_0$ y computar como "éxito" el suceso $x_0 + y_0 \leq t$.
4. Repetir los pasos anteriores un gran número de veces y calcular el cociente entre el número de éxitos y número total de repeticiones, cociente que tomaremos como la probabilidad buscada.

Este método tiene la ventaja de que es fácil de plantear y programar y que es flexible, al prestarse sin problemas a complejidades que exija el caso particular que interese. Su inconveniente, en casos como el que ahora nos ocupa, es que requiere un número muy elevado de repeticiones; por ejemplo, cuando la probabilidad de "éxito" esté en torno al 99,5 por 100 y deseemos una probabilidad muy alta (por ejemplo, del 95 por 100) de que el error de la estimación resultante del proceso sea muy pequeña (por ejemplo, una diezmilésima, de modo que si la verdadera probabilidad de insolvencia es el 0,5 por 100, la estimación quede comprendida entre 0,49 y 0,51 por 100), el número de simulaciones no deberá ser inferior a 1.911.196, que resulta de despejar n en la inequación $1.96\sqrt{0,995 * 0,005/n} < 0,0001$.

b) Método del ajuste de una función de distribución a n simulaciones de la suma $X+Y$

Se simula un número elevado (por ejemplo, 2000) de sumas $X+Y$ mediante el procedimiento descrito en los párrafos anteriores. Obtenidos los n valores, se busca una función de distribución que se adapte a la muestra simulada y se toma esta función como modelo de la suma $T = X+Y$.

A continuación describimos la aplicación de este procedimiento a nuestros datos.

En primer lugar, simulamos 2000 pares (u,v) de la cópula Frank ya especificada. La representación gráfica de estos puntos está en la Figura 5.17.

A continuación, por medio de las correspondientes funciones de distribución marginal de X y de Y , "invertimos" u y v para obtener sus correspondientes valores (x,y) , y sumamos cada par de éstos; obtenemos así 2000 valores muestrales de la suma. En la Figura 5.18 se representan los puntos (x,y) mientras que en el Cuadro 5.14 aparecen algunas características estadísticas de dichos valores muestrales de la indicada suma.

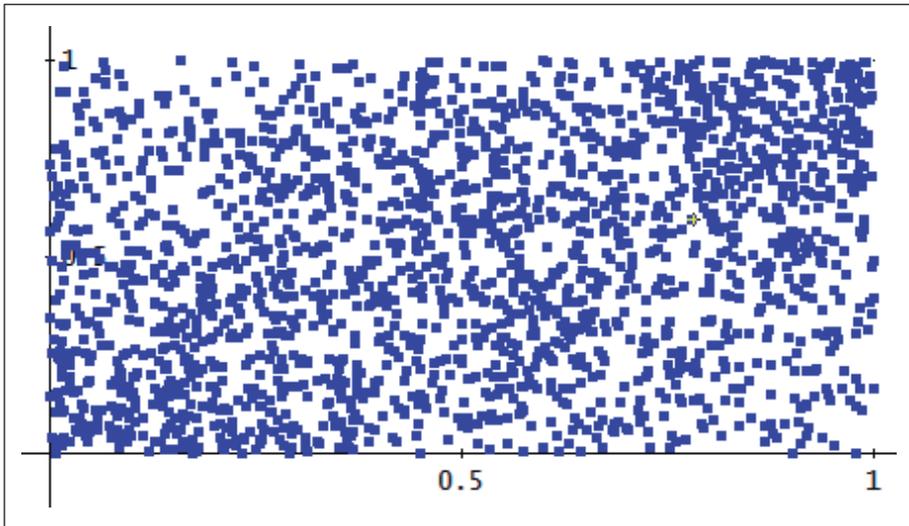


Figura 5.17: Simulación de 2000 puntos (u,v) de la cópula de Frank con $\theta=1,946$.

La distribución empírica de la variable $T=X+Y$ queda representada en la Figura 5.19.

El paso siguiente es ajustar una función de distribución a la empírica obtenida.

Probamos con una lognormal con media igual a 2. la estimación máximo-verosímil de los parámetros nos da

$$m = 0,6848$$

$$s = 0,09724.$$

El contraste χ^2 produce el resultado que muestra el Cuadro 5.15.

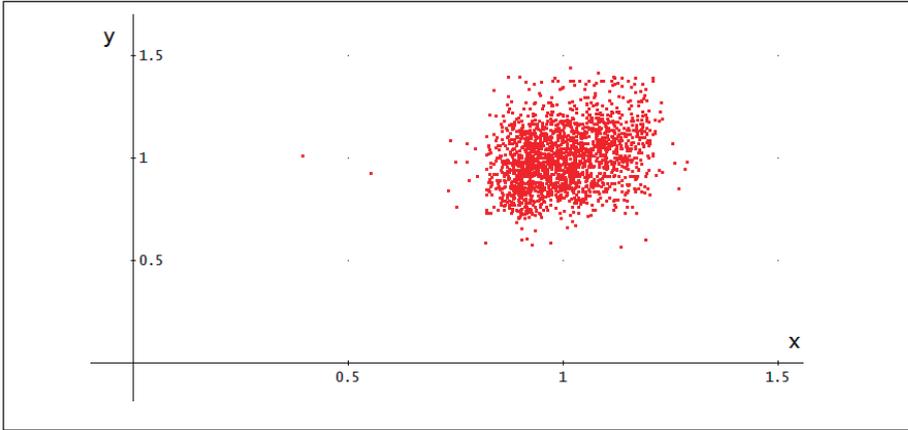


Figura 5.18: Los 2000 puntos (x,y) correspondientes a los representados en la Figura 5.17.

Valor máximo	Valor mínimo	Media	Desviación típica	Coefficiente de asimetría
2,5960	1,4010	1,993	0,194	+0,244

Cuadro 5.14: Algunas características de la muestra de $T=X+Y$ obtenida por simulación.

El valor del estadístico χ^2 es 9,75; para un nivel de significación del 95 por 100, el valor para $11-1-2 = 8$ grados de libertad, según las tablas, es 15,507; el valor p es 0,28; por tanto, no rechazamos la hipótesis de que el modelo lognormal con parámetros $m=0,6848$; $s=0,09724$ sea adecuado para la variable $T=X+Y$.

Sobre esta base, calculamos el VaR al 99,5 por 100, de la variable T ; dicho valor es 2,548 y el *expected shortfall* 2,63; pero si referimos los resultados a una cartera que, en lugar de tener media 2 tuviera media unitaria quedaría:

$$\text{VaR}_{0,995} = 1,274$$

$$\text{ES}_{0,995} = 1,315$$

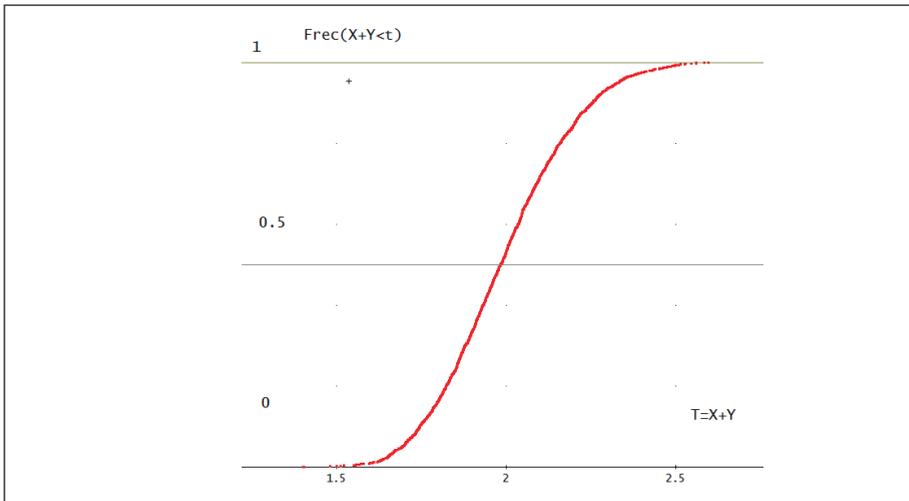


Figura 5.19: Función de distribución empírica de las 2000 simulaciones de T .

Intervalo	Frecuencias observadas	Frecuencias teóricas
0 – 1,60	19	27,1
1,60 – 1,70	90	85,6
1,70 – 1,80	218	205,5
1,80 – 1,90	345	340,4
1,90 – 2,00	389	409,8
2,00 – 2,10	377	374,9
2,10 – 2,20	255	270,4
2,20 – 2,30	181	158,7
2,30 – 2,40	78	77,8
2,40 – 2,50	35	32,6
>2,50	14	17,2

Cuadro 5.15: Frecuencias de T , observadas y teóricas, según el modelo lognormal.

La simulación realizada se refería a una cartera integrada, a partes iguales, por riesgos X e Y . Para otras combinaciones habría que proceder según hemos descrito, a partir de los 2000 puntos (x,y) de manera que la variable “suma”, designada por T , pasara a ser: $T=pX+(1-p)Y$; ($0 \leq p \leq 1$).

c) Método del cálculo directo

Se trata de resolver la ecuación $\text{Prob}[X+Y \leq t] = 0,995$. Es evidente que X e Y son variables dependientes estadísticamente y ello exige introducir en el planteamiento las probabilidades condicionales. En IV, 4 ya tratamos de esta cuestión y llegamos a las expresiones (4.5a) y (4.5b). Pese a ello, y para mayor claridad, preferimos abordar el tema desde el principio, porque ahora hemos de introducir en el planteamiento una función de distribución obtenida a partir de una cópula. Comenzamos, igual que en IV, 4, con la igualdad:

$$\text{Prob}[X + Y \leq t] = \int_0^t \text{Prob}[X \leq t - y | Y = y] \cdot f_Y(y) dy \quad (5.5)$$

$f_Y(y)$ es la función de densidad de la variable Y . En la anterior expresión admitimos que las variables X e Y son positivas.

Ahora bien, la probabilidad condicionada, siendo $F(x,y)$ la función de distribución conjunta de X e Y , es:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[X \leq t - y | Y = y] &= F[t - y | Y = y] = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Prob}[X \leq t - y; y < Y \leq y + h]}{\text{Prob}[y < Y \leq y + h]} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t - y; y + h) - F(t - y; y)}{F_Y(y + h) - F_Y(y)} \\ &= \frac{\partial F(t - y; y)}{\partial y} \frac{1}{f_Y(y)} \end{aligned}$$

Sustituimos en (5.5) la probabilidad condicionada:

$$\text{Prob}[X + Y \leq t] = \int_0^t \frac{\partial F(t - y; y)}{\partial y} dy$$

Llamamos $u(x)$ y $v(y)$ a las funciones de distribución de X e Y ,

$$F(x,y) = C[u(x), v(y)]$$

por tanto,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \frac{dv}{dy} = \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} f_Y(y)$$

y, definitivamente,

$$\Psi(t) = \text{Prob}[X + Y \leq t] = \int_0^t \frac{\partial C(u^*;v)}{\partial v} f_Y(y) dy.$$

u^* es el valor de la función de distribución de X en el punto $t-y$, es decir que $u^* = F_X(t-y)$. Obsérvese que la primera función que aparece en el integrando (la derivada de C con respecto a v) depende de u y de v , mientras que la segunda depende de y . Cabe expresar ambas funciones con el argumento de y (ya que $u^* = F_X(t-y)$), pero también es posible programar el cálculo de $\Psi(t)$ de la siguiente forma:

- Dividimos el intervalo $(0,t)$ en n subintervalos.
- Hacemos y_i = punto intermedio del intervalo i -ésimo.
- Calculamos $t-y_i$; a continuación obtenemos:

$$u_i^* = F_X(t-y_i)$$

$$v_i = F_Y(y_i).$$

- Hallamos el valor de la derivada parcial que figura en el integrando en el punto (u_i^*, v_i) y lo multiplicamos por $f_Y(y_i)$ y por la longitud del subintervalo, t/n .
- Sumamos los n resultados obtenidos.

Si n es grande podremos tomar el valor resultante como la probabilidad de que $X+Y$ no supere a t . Por tanteos obtenemos que

$$\text{Prob}[X+Y \leq 2,532] = 0,995$$

Para una cartera con un volumen de primas igual a la unidad, el VaR es, por tanto, $2,532/2 = 1,266$. Si la media de la distribución de dicha cartera $X+Y$ es la unidad, resultará un capital de solvencia obligatorio de 0,266. El capital determinado

anteriormente por el método de las correlaciones para la misma cartera es 0,313, superior, por tanto, en un 18 por 100, aproximadamente.

Lo anterior puede generalizarse para cualquier composición de la cartera. Si llamamos p y q a las proporciones respectivas de los riesgos X e Y ($p+q=1$), por procedimiento análogo al que acabamos de describir calcularemos

$$\text{Prob}[pX + qY \leq t] = \text{Prob}\left[X \leq \frac{t}{p} - \frac{q}{p}Y\right] = \int_0^{t/p} \frac{\partial C(u^*, v)}{\partial v} f_Y(y) dy$$

en donde u^* representa ahora el valor de la función de distribución de X en el punto

$$x = \frac{t}{p} - \frac{q}{p}y$$

Fijados t y p , el proceso de cálculo es enteramente análogo al anterior:

- Para cada y_i determinamos $x_i = t/p - (q/p)y_i$.
- Además $u_i^* = F_X[x_i]$; $v_i = F_Y[y_i]$
- Multiplicamos la derivada parcial $\partial C(u, v)/\partial v$ en el punto $\{u_i^*, v_i\}$ por la densidad de Y en el punto y_i ; multiplicamos el resultado por $t/(n \cdot q)$. La suma, cuando introducimos un alto número de sub-intervalos, se acerca a la probabilidad buscada.

Así, calculamos el VaR al 99,5 por 100 para distintos valores de p y el resultado lo tenemos en el Cuadro 5.16.

Para obtener el *expected shortfall* recurrimos a un procedimiento que aprovecha la posibilidad de obtener valores de la función $\Psi(t;p) = \text{Prob}(T_p \leq t)$; ($T_p = pX+qY$). Dicho procedimiento se basa en la fórmula¹³¹:

$$\text{ES}_\alpha(T_p) = \text{VaR}(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha} \int_{\text{VaR}(\alpha)}^{\infty} \bar{\Psi}(t;p) \cdot dt \quad (5.6)$$

¹³¹ Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbit, (1986) página 62. Hay ediciones posteriores.

en donde:

$$\alpha = \Psi(x_0; p)$$

$$\bar{\Psi}(t; p) = 1 - \Psi(t; p)$$

Demostración: Partimos de la hipótesis de que la variable T_p es positiva y de que su valor medio existe; admitimos también que su función de distribución $\Psi(t; p)$ es continua y se anula en $t=0$. Integramos por partes la expresión del valor medio condicionado (*expected shortfall*):

$$ES_\alpha(T_p) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\text{VaR}(\alpha)}^{\infty} t \cdot \Psi'(t; p) dt$$

teniendo en cuenta ahora que $d\bar{\Psi}(t; p) = -\Psi'(t; p)dt$:

$$ES_\alpha(T_p) = \frac{1}{1-\alpha} \left[t \bar{\Psi}(t; p) \Big|_{\infty}^{\text{VaR}(\alpha)} + \frac{1}{1-\alpha} \int_{\text{VaR}(\alpha)}^{\infty} \bar{\Psi}(t; p) dt \right] =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \text{VaR}(\alpha) \cdot \bar{\Psi}(\text{VaR}(\alpha); p) - \frac{1}{1-\alpha} \lim_{t \rightarrow \infty} t \bar{\Psi}(t; p) + \frac{1}{1-\alpha} \int_{\text{VaR}(\alpha)}^{\infty} \bar{\Psi}(t; p) dt$$

El primer término equivale al $\text{VaR}(\alpha)$ y el segundo se anula, ya que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \bar{\Psi}(t; p) = 0 \quad (5.7).$$

En efecto,

$$E(T_p) = \int_0^{\infty} s \cdot \Psi'(s; p) ds \geq \int_t^{\infty} s \cdot \Psi'(s; p) ds \geq t \bar{\Psi}(t; p)$$

Ahora bien, por hipótesis $E(T_p) < \infty$. Con mayor razón, la integral desde t a infinito será también finita y tenderá a cero al aumentar el límite inferior de integración. Como quiera que $t \bar{\Psi}(t; p) \geq 0$ y, además, es no superior a una cantidad que se hace arbitrariamente pequeña al tender t a infinito, queda demostrada la expresión (5.7) y con ello la fórmula (5.6), cuyo cálculo es fácil de programar.

En el Cuadro 5.16 tenemos las dos medidas de riesgo para distintas composiciones de la cartera (X, Y) cuyo ratio de siniestralidad sobre las primas sea la unidad:

p	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
VaR _{99,5}	1,434	1,396	1,325	1,266	1,226	1,214	1,224
ES(T) _{99,5}	1,507	1,447	1,373	1,302	1,250	1,236	1,250
SCR	0,434	0,396	0,325	0,266	0,226	0,214	0,224

Cuadro 5.16: Medidas de riesgo y capital de solvencia para diversas composiciones de la cartera.

14. LAS CORRELACIONES EN LA COLA DE LA DISTRIBUCIÓN

Según veremos en seguida, los datos estudiados no apoyan la práctica de elevar el coeficiente de correlación en un intento de replicar correlaciones no lineales existentes en la cola de la distribución. Esa práctica, defendida en diversos documentos relativos a Solvencia II¹³² tiene la ventaja de su simplicidad, pero tropieza con un grave inconveniente, señalado por Shaw y Spivak (2009), página 42:

“Más altas correlaciones no modelizan la dependencia en la cola; ésta es una medida de la dependencia en el límite entre los factores de riesgo. Si se utiliza una cópula gaussiana, su dependencia en la cola será cero, sean altos o no los parámetros de correlación elegidos.”

Estos mismos autores proponen un ejemplo numérico para comparar el coeficiente de correlación en la cola con el parámetro de correlación de un modelo gaussiano o t con diversos grados de libertad, para un mismo capital de solvencia. Los cálculos se hacen para diversos cuantiles, es decir, para diversas “colas”. Una de las conclusiones que obtienen es que si un asegurador opta por utilizar correlaciones más altas en el contexto del método de las varianzas-covarianzas en sustitución de la dependencia en colas y las cópulas, ha de ser extremadamente cuidadoso, ante los errores a que tal práctica puede llevar.

En nuestro caso hemos llegado a determinar que, con la cópula de Frank y las distribuciones marginales que admitimos como modelos para los riesgos X e Y

¹³² Por ejemplo, el ya citado CEIOPS FS-14-07.

(coberturas del riesgo de responsabilidad de automóviles y general respectivamente), el capital de solvencia obligatorio (SRC) era de 0,266 por unidad de volumen de una cartera 50%-50% de ambos riesgos. Si queremos conocer el importe del coeficiente ρ que, según el método de las correlaciones auspiciado por Solvencia II, conduciría a un capital de solvencia equivalente a nuestro resultado de 0,266, no tenemos más que despejarlo en la ecuación:

$$3 \cdot \sqrt{0,1^2 \cdot 0,5^2 + 0,14^2 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot \rho \cdot 0,1 \cdot 0,14 \cdot 0,5^2} = 0,266,$$

es decir, $\rho = 0,066$, resultado muy alejado del coeficiente 0,5 según la normativa de Solvencia II para los ramos o segmentos que nos ocupan. Y si introduyéramos en el anterior cálculo el coeficiente de correlación de los datos originales, que, según vimos en el Epígrafe 2, es 0,28, el resultado sería:

$$3 \cdot \sqrt{0,1^2 \cdot 0,5^2 + 0,14^2 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 0,28 \cdot 0,1 \cdot 0,14 \cdot 0,5^2} = 0,279,$$

que sigue siendo superior al capital determinado por aplicación de la Cópula de Frank.

Los coeficientes de correlación en la cola de nuestra distribución de (X, Y) , representada en la Figura 5.2, son los siguientes:

Cuantil	0,90	0,95	0,99	0,995
ρ	-0,434	-0,646	-0,890	-0,978

Cuadro 5.17: Correlaciones en la cola de la distribución, según varios cuantiles de ésta.

Estos coeficientes de correlación se han obtenido utilizando tan sólo los puntos (X, Y) cuya suma supera el cuantil correspondiente. El que sean negativos en todos los casos sugiere que los datos que manejamos no justifican elevar la correlación para intentar modelizar dependencias en la cola que, en nuestro caso, no existen.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTZNER, DELBAEN, EBER y HEATH: "Coherent Measures of Risk", (1999).- *Mathematical Finance*, 9(3), (203-228).

BAHRAOUI, BOLANCÉ y PÉREZ MARÍN, (2014): "Testing extreme value copulas to estimate the quantile".- *Institut d'Estadística de Catalunya*, Enero-Junio 2014.

BERMÚDEZ, FERRI y GUILLÉN, (2013): "A correlation sensitivity analysis of non-life underwriting risk in solvency capital requirement estimation", 2011/2013.- Universidad de Barcelona.

BOWERS, GERBER, HICKMAN, JONES y NESBIT, (1986): "Actuarial Mathematics", *The Society of Actuaries*.

CEBRIÁN, DENUIT y LAMBERT, (2003): "Analysis of bivariate tail dependence using extreme value copulas: An application to the SOA medical large claims database".- *Belgian Actuarial Bulletin*, 3(1).

CEIOPS, Documento -PI-08/06, "Quantitative Impact Study 2".

CINTAS DEL RÍO, (2006): "Teoría de cópulas y control del riesgo financiero". Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Matemáticas. Madrid.

COMISIÓN EUROPEA, *QIS5 Technical Specifications*, Brussels, 5 de julio de 2010.

DE MEY, "Insurance and the Capital Markets", (2007): *The Geneva Papers*, 2007, 32 (35-41).

DUFRESNE, (2008): "Sum of lognormals", *Centre of Actuarial Studies*.

DONNELLY y EMBRECHTS, (2010): "*The Devil is in the tails: actuarial mathematics and the subprime mortgage crisis*".- <http://www.macs.hw.ac.uk/~cd134/2010/donemb.pdf>

DURÁN y OTERO, (2010): "El análisis financiero dinámico como herramienta para el desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II".- Fundación MAPFRE, 153, Cuadernos de la Fundación, Madrid.

EMBRECHTS, (2009): "*Copulas: A personal view*".
https://people.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/copulas_personalview.pdf

EMBRECHTS, LINDSKOG y MACNEIL, (2001): "*Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*".
<https://people.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/copchapter.pdf>

EMBRECHTS, MCNEIL y STRAUMANN, (2002): "*Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls*".- *Risk Management, Value at Risk and beyond*. Ed. by M. Dempster y H.K. Moffat, Cambridge University Press.

FERRI, (2012): "Estructuras de dependencia aplicadas a la gestión de riesgos en Solvencia II". Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona.

FORSLUND y JOHANSSON, (2012): "*Gaussian Copulas. What happens when models fail?*" http://www.math.chalmers.se/~rootzen/finrisk/gr15_forslund_johansson_gaussian_cop.pdf

FREES y VALDEZ, (1998): "*Understanding relationships using copulas*", *North American Actuarial Journal*, 2,1 (1.25).

GROUP CONSULTATIF ACTUARIEL EUROPÉEN, "*Diversification. Technical Paper*", 31 de octubre de 2005.

HÜRLIMANN, (2014): "*On actuarial applications of bivariate extreme value copulas*".- https://www.researchgate.net/publication/275336039_On_actuarial_applications_of_bivariate_extreme_value_copulas

INTERNATIONAL ACTUARIAL ASSOCIATION, "A Global Framework for Insurer Solvency Assessment". *Research Report of the Insurer Solvency Assessment Working Party*, 2004.

JONES, "The formula that felled Wall Street", *Financial Times*, 24 de abril de 2009.

KLUGMAN, PANJER y WILLMOTT, (1998): "Loss Models".- Wiley.

LUDER, (2005): "Swiss Solvency Test in Non-Life Insurance", *ASTIN Colloquia*, Zurich.

MCNEIL, FREY, EMBRECHTS, (2005): "Quantitative Risk Management".- *Princeton Series in Finance*.

MIKOSCH, (2006): "Copulas: Tales and Facts". <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10687-006-0015-x#/page-1>

MOSCADELLI, (2004): "The modelling of operational risk: experience with de data collected by the Basel Committee".- Banca d'Italia, Julio 2004.

NELSEN, (2006): "An Introduction to Copulas", 2nd edition, Springer.

RIVAS, PÉREZ y CUESTA, (2004): "Aplicación de la teoría de cópulas al cálculo de la prima de emisión de los bonos sobre catástrofes".- *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, número 10 (115-148).

RIVAS, PÉREZ y CUESTA, (2007): "Cálculo empírico basado en la teoría de cópulas de un 'Industry Loss Warranty'", *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, número 13 (57-88).

SCHMIDT, (2006): "Coping with copulas", 2006. http://archiv.stochastik.uni-freiburg.de/homepages/schmidt/publications/TSchmidt_Copulas.pdf

SHAW y SPIVAK, (2009): "Correlations and dependencies in Economic Capital Models". <https://www.actuaries.org.uk/sites/default/files/documents/pdf/c05shaw.pdf>

STAUDT, (2010): "*Tail Risk, Systemic Risk and Copulas*".- Casualty Actuarial Society E- Forum, Volume 2, 2010.

UNIÓN EUROPEA, Directiva 2009/138/EC, de 25 de noviembre de 2009, "Sobre el seguro de vida, el acceso a la actividad aseguradora y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II)".- Publicada en el Diario Oficial de la Unión Europea el 17 de diciembre de 2009.

UNIÓN EUROPEA, Reglamento Delegado (UE) 2015/35, de la Comisión, de 10 de octubre de 2014, "Por el que se completa la Directiva 2009/138/EC, de 25 de noviembre de 2009, sobre el seguro de vida, el acceso a la actividad aseguradora y de reaseguro y su ejercicio".- Publicado en el Diario Oficial de la Unión Europea el 17 de enero de 2015.

VENTER (2002): "*Tails of Copulas*".- *Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Volume LIX*, (68-113).

VENTER, (2003): "*Quantifying Correlated Reinsurance Exposures Using Copulas*".- *Casualty Actuarial Society Forum, Volume Spring*, 2003, (215-229).

WILKIE, (1986): "*A Stochastic Investment Model for Actuarial Use*", *Transactions of the Faculty of Actuaries*, 1984-1986, (341-406).

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL

AKAIKE, (1973): "*Information Theory and An Extension of the Maximum likelihood Principle*". Petrov, B. N. y Csaki, F. (Eds.). *The second International Symposium on Information Theory*. Budapest: Akademiai Kiado.

http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-1-4612-1694-0_15#page-1

AKAIKE, (1977): "*On Entropy Maximization Principle. Krishnaia*", P. R. (Ed.). *Applications of Statistics*. Holland: North-Holland. Publishing Co.

BARGEST, COSSETTE y MARCEAU, (2009): "*TVaR-based capital allocation with copulas*," *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, Vol. 45, No. 3, 348-361.

BARNETT, KREPS, MAJOR y VENTER, (2007) "*Multivariate copulas for financial modeling*," *Variance*, 2007, Vol. 1, No. 1, 103-119.

BOUYÉ, DURRLEMAN, NIKEGHBALI, RIBOULET y RONCALLI, (2000): "*Copulas for finance: A reading guide and some applications*". <http://ssrn.com/abstract=1032533>

CHERUBINI, LUCIANO, y VECCHIATO, (2004): "*Copula Methods in Finance*". Wiley, New York.

CROUHY, GALAI, y MARK, (2001): "*Risk Management*". McGraw-Hill. New York.

DANIELSSON, DE VRIES, (1997): "*Value-at-Risk and extreme returns*". *School of Economics and Political Science. Paper No 273*: 1-33.

DEHEUVELS, (1979): "*La Fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d'indépendance*". *Acad.Roy. Belg. Bull. Cl. SCi (5) 65*: 274-292.

DEHEUVELS, (1981): "*A non parametric test for independence*". *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 26*: 29-50.

DEMARTA y MCNEIL, (2005): "*The t copula and related copulas*," *International Statistical Review*, 2005, Vol. 73, 111-129.

DESMEDT y WAHLIN, (2008) "On the subadditivity of tail value at risk: An investigation with copulas," *Variance*, 2008, Vol. 2, No. 2, 231-252.

EMBRECHTS, KLÜPPELBERG, y MIKOSCH (1997): "Modelling extremal events for insurance and finance". Springer. New York.

EMBRECHTS, RESNICK y SAMORODNITSKY, (1998): "Living in the edge". *Risk Magazine*, 11 (1): 96-100.

EMBRECHTS, RESNICK y SAMORODNITSKY, (1999): "Extreme value theory as a risk management tool". *North American Actuarial Journal*, 3 (2): 30-41.

FERMANIAN y WEGKAMP, (2004): "Time dependent copulas".
http://www.crest.fr/ckfinder/userfiles/files/pageperso/cond_copula13_JMVA.pdf

FISHER y SWITZER, (1985): "Chi-plot for assessing dependence". *Biometrika* 72 (2): 253-265

FISHER, y SWITZER, (2001): "Graphical assessment of dependence: Is a picture worth 100 tests?". *The American Statistician*, 55: 233-239.

FRAHM, JUNKER y SCHMIDT, (2006): "Estimating of tail-dependence coefficient : Properties and pitfalls". *Insurance: Mathematics and Economics*. 37: 80-100.

FRÉCHET, (1957): "Les tableaux de corrélation dont les marges sont données". *Annals Univ. Lyon, Sci.*, 20:13-31.

GARDNER, y DANNENBRING, (1980): "Forecasting with exponential smoothing: Some guidelines for model selection". *Decision Sciences*. Vol. 11, Num 2: 370-383.

GENEST y BOIES (2003): "Detecting dependence with Kendall plots". *The American Statistician*, 57, 275-284.

GENEST y FAVRE, (2007): "Everything you always wanted to know about copula modelling but were afraid to ask". *Journal of Hydrologic Engineering*, <http://citeseerx.>

ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=CC1B2A1F9164365AAF6BE126F5790123?doi=10.1.1.160.8266&rep=rep1&type=pdf

GENEST, GHOUDI, y RIVEST, (1995): "A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distribution". *Biometrika*, 40: 543-552.

GENEST y MCKEY, (1986): "The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals". *American Statistics*, 40: 280-285.

GENEST y RIVEST, (1993): "Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas". *Journal of the American Statistical Association*, 88 (423): 1034-1043.

JOE, (1997): "Multivariate models and dependence concepts". Chapman & Hall.

DE LEEUW: "Introduction to Akaike (1973) information theory and an extension of the maximum likelihood principle".- http://www.sortie-nd.org/lme/Statistical%20Papers/Akaike_1973%20with%20commentary.pdf

MARSHALL, (2001): "Measuring and managing operational risk in financial institutions: Tools, techniques and other resources". John Wiley & Sons.

DE MATTEIS, (2001): "Fitting copulas to data. Diploma thesis Institute of Mathematics of the University of Zurich".

NELSEN, (2002): "Concordance and copulas: a survey". Kluwer. Dordrecht, pgs 169-177.

PICKANDS, (1975): "Statistical inference using extreme order statistics". *The Annals of Statistics* 3: 199-131.

SAMARA y RANGLES, (1988). "Kendall 's tau". *Comm. Statist. Theory Methods*, 17: 3191-3205.

SHIH, y LOUIS, (1995): "Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data". *Biometrics*, 51: 1384-1399.

SKLAR, (1959): "*Fonctions de répartition à n-dimensions et leur marges*". *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris.* 8: 229-231.

SKLAR, (1996): "*Random variables, distribution functions and copulas. A personal look backward and forward in distributions with fixed marginals and related topics*". Rüschendorf, L., Schweizer, B. y Taylor, M. *Institute of Mathematical Statistics.* Hayward, CA:1-14.

SCHMIDT y STADMÜLLER, (2003): "*Nonparametric estimation of tail dependence. Working Paper*". *London Bussiness School. London. U.K.*

SMITH, (2002): "*Risk management: Value at risk and beyond*". Cambridge U.P.

TAJVIDI, (2004): "*Confidence intervals and accuracy estimation for heavy-tailed generalized Pareto distributions*". *Extremes* 6: 111-123. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

TRIVEDI y ZIMMER, (2005): "*Copula modeling: An introduction for practitioners,*" *Foundations and Trends in Econometrics*, 2007.

ÍNDICE ALFABÉTICO

- Akaike: 152, 168, 232
- Algoritmo de Nelder Mead: 167
- Bermúdez, Ferri y Guillén: 34
- Bonos de catástrofes: 36
- C-medida: 103, 106, 108, 132, 133
- Capital de solvencia (SCR): 181 y ss.,
201 y ss., 238 y ss.
- Cholesky, factorización: 153 y ss.
- Cintas del Río: 146, 218
- Coefficiente de correlación: 30, 43 y ss.,
189 y ss., 210, 211, 249, 250
- Coefficiente de Spearman: 60 y ss., 82 y
ss.
- Coefficiente τ de Kendall: 61 y ss., 109 y ss.
- Comonotonidad: 63
- Concordancia: 60, 61
- Contraste χ^2 : 233, 242
- Cópula de Clayton: 134, 137, 222
coeficiente τ : 109
definición: 97
densidad: 120
dependencia en colas: 112
- Cópula de Cuadras- Augé: 130, 136
- Cópula de Frank: 223
coeficiente τ : 111
definición: 98
dependencia en colas: 112
- simulación: 159
- Cópula de Gumbel: 46, 47, 115, 123,
124, 137, 180, 183, 221
- coeficiente τ : 109
- definición: 97
- densidad: 116
- dependencia en colas: 112
- simulación: ver "simulación de
cópulas"
- Cópula de independencia: 79, 183
- Cópula de Marshall-Olkin: 128 y ss.
simulación: 162
- Cópula de supervivencia: 117 y ss.
- Cópula de valores extremos: 136 y ss.
- Cópula empírica: 102, 141 y ss., 216 y
ss.
dependencia en colas: 144 y ss.
- Cópula gaussiana: 23, 68 y ss., 113,
183, 225
dependencia en colas: 90
simulación: 153 y ss.
- Cópula HRT: 120, 136
- Cópula max-estable: 137, 138
- Cópula máxima y cópula mínima: 79,
103
- Cópula t: 33, 35, 44, 69 y ss., 183, 227 y
ss.,
dependencia en colas: 90 y ss
simulación: 156 y ss.
- Cópulas
ajuste: 37, 144 y ss., 220 y ss
arquimedianas: 91 y ss.
definición: 73 y ss.

densidad: 78
 idea intuitiva: 65 y ss.
 implícitas: 38, 88, 124
 mixtas: 163 y ss.
 multivariantes: 172 y ss.
 probabilidad condicionada: 78, 79
 simulación: 152 y ss, 158
 Correlación por rangos: 34, 62, 65
 Densidad kernel: 235
 Dependencia: 43 y ss., 82 y ss.
 Dependencia en colas: 87 (*ver también la de cada tipo de cópula*)
 Directiva 2009/138EC: 199
 Distribución
 de Cauchy: 53
 logarítmico-normal: 178, 182, 189, 205, 233 y ss.
 normal bivalente: 43
 Pareto: 135, 164, 176, 182
 t bivalente: 44
 Distribuciones elípticas: 43, 47 y ss., 53 y ss.
 Distribuciones esféricas: 45 y ss., 51 y ss.
 Distribuciones marginales empíricas: 150 y ss.
 Durán y Otero: 33
 Embrechts: 24, 25
 Embrechts, Lindskog y McNeil: 173, 175
 Embrechts, McNeil y Straumann: 43, 45, 60, 64
 Estadístico de orden: 143, 151
 Estimación máximo-verosímil canónica o pseudo-verosímil: 151
 Estimación no paramétrica: 151
Expected shortfall: 200, 237 y ss
 Ferri: 34
 Fréchet y Hoeffding, cotas: 79, 82, 134
 Frees y Valdez: 32, 134
 Frees y Valdez, medida: 147, 168, 230, 231
 Función arco seno: 78
 Función completamente monótona: 173
 Función de Debye: 110, 111
 Función generador: 94 y ss.
 Generador estricto: 94, 95
 Genest y Rivest, método gráfico de ajuste: 146, 221
 H-medida: 102
 H-volumen: 102
 IFM (*Inference function for margins*): 151, 214
 Iman y Conover, método: 33
 Independencia de variables aleatorias: 60
Industry loss warranties: 36
 Jacobiano: 57
 Kimberling, teorema: 174
 Klugman, Panjer y Willmott: 167
 Li, David X.: 23
 Matriz
 de correlaciones: 47
 de covarianzas: 47, 59
 ortogonal: 52
 Máxima verosimilitud, método: 149, 231 y ss.
 McNeil, Frey y Embrechts: 77, 82 y 152

Meta-distribuciones: 26, 113
 densidad: 114
 Método del "tau acumulativo" o "tau parcial": 147, 148
 Mikosch: 149
 Modelo estándar (de Solvencia II): 200
 Moscadelli: 51
 National Association of Insurance Commissioners (NAIC): 28
 Nelsen: 66, 75, 86, 93, 94, 96, 99, 100, 102, 128, 131, 133, 137
 Propiedades invariantes al cambio de escala: 60, 75, 82
 Pseudo-inversa: 94
 Pseudo-observaciones: 151
 Ratio de siniestralidad: 176 y ss., 188
 Reglamento Delegado 2015/35 de la Comisión: 199
 Regresión mediana y cuantílica: 169 y ss
 Riesgo
 de catástrofes: 207, 208, 213, 214
 de caída de cartera: 207, 208, 213, 214
 de prima: 203 y ss.
 de reserva: 203 y ss.
 Rivas, Pérez y Cuesta: 36
 Schmidt: 124, 128
 Schweizer y Wolf, medida: 85
 Simulación de cópulas: 152 y ss, 158
 Simulación de números aleatorios normales: 52
 Sklar, Teorema: 25, 75, 113
 Solvencia II: 30, 31, 178 y ss., 188 y ss., 199 y ss.
 hipótesis implícitas: 204, 205
 Suma de variables aleatorias: 176 y ss., 245 y ss.
 Staudt: 32, 151
 Swiss Solvency Test: 28
Tail conditional expectation: 200, 237 y ss
 The Economist: 25
 Transformación
 afín: 53, 55
 monótona: 76, 77
 ortogonal: 51, 52
 VaR (*Value at risk*): 185 y ss., 188 y ss., 199, 237
 Venter: 32, 115, 122, 145

COLECCIÓN “CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN”

Para cualquier información sobre nuestras publicaciones consulte:
www.fundacionmapfre.org

219. Teoría de cópulas. Introducción y aplicaciones a Solvencia II. 2017
218. Cualificación profesional del actuario. Estudio internacional comparado. 2016
217. El seguro de responsabilidad civil derivada de la navegación de buques. 2016
216. El impacto de las últimas reformas en materia de jubilación: envejecimiento activo, sostenibilidad financiera y planes de pensiones. 2016
215. Previsión complementaria empresarial: estudio comparado internacional 2016
214. Normas sobre protección de los derechos de los consumidores en el contrato de seguro en Chile. 2016
213. *Gamificación*: un modelo de fomento y gestión de comportamientos deseados en las relaciones entre individuos y organizaciones. 2015
212. Modelo de gestión integral para el sector atunero. 2015
211. Opções embutidas em planos *unit-linkeds* brasileiros: avaliação sob a medida de probabilidade real. 2015
210. El enfoque de Solvencia II para las pensiones ocupacionales españolas. 2015
209. El seguro privado de obras de arte. 2015
208. Definición y medición de la cultura aseguradora. Aplicación al caso español. 2015

207. Tipos de interés para valorar las provisiones técnicas de seguros. 2015
206. Teledetección aplicada a la elaboración de mapas de peligrosidad de granizo en tiempo real y mapas de daños en cultivos e infraestructuras. 2015
205. Current Topics on Risk Analysis: ICRA6 and Risk 2015 Conference. 2015
204. Determinantes do Premio de Default de (Res)seguradores. 2014
203. Generación de escenarios económicos para la medición de riesgos de mercado en Solvencia II a través de modelos de series temporales. 2014
202. Valoración de los inmuebles del patrimonio histórico y los riesgos sísmicos en el contrato de seguro: el caso de Lorca. 2014
201. Inteligencia computacional en la gestión del riesgo asegurador: operadores de agregación OWA en proceso de tarificación. 2014
200. El componente transfronterizo de las relaciones aseguradoras. 2014
199. El seguro basado en el uso (Usage Based Insurance). 2014
198. El seguro de decesos en la normativa aseguradora. Su encaje en Solvencia II. 2014
197. El seguro de responsabilidad civil en el arbitraje. 2014
196. La reputación corporativa en empresas aseguradoras: análisis y evaluación de factores explicativos. 2014
195. La acción directa del perjudicado en el ordenamiento jurídico comunitario. 2013
194. Investigaciones en Seguros y Gestión del Riesgo: RIESGO 2013
193. Viability of Patent Insurance in Spain. 2013

192. Viabilidad del seguro de patentes en España. 2013
191. Determinación de zonas homogéneas de riesgo para los rendimientos de distintos cultivos de la región pampeana en Argentina. 2013
190. Género y promoción en los sectores financiero y asegurador. 2013
189. An Introduction to Reinsurance. 2013
188. El control interno y la responsabilidad penal en la mediación de seguros privados. 2013
187. Una introducción al gobierno corporativo en la industria aseguradora en América Latina. 2013
186. Mortalidad de jóvenes en accidentes de tráfico. 2012
185. Las reclamaciones derivadas de accidentes de circulación por carretera transfronterizos. 2012
184. Efecto disuasorio del tipo de contrato sobre el fraude. 2012
183. Claves del Seguro Español: una aproximación a la Historia del Seguro en España. 2012
182. La responsabilidad civil del asegurador de asistencia sanitaria. 2012
181. Colaboración en el contrato de Reaseguro. 2012
180. Origen, situación actual y futuro del seguro de Protección Jurídica. 2012
179. Experiencias de microseguros en Colombia, Perú y Brasil. Modelo socio agente. 2012
178. El agente de seguros y su Responsabilidad Civil. 2012

177. Riesgo operacional en el marco de Solvencia II. 2012
176. Un siglo de seguros marítimos barceloneses en el comercio con América. (1770-1870). 2012
175. El seguro de Caución. 2012
174. La contabilidad de los corredores de seguros y los planes y fondos de pensiones. 2012
173. El seguro de Vida en América Latina. 2011
172. Gerencia de riesgos sostenibles y Responsabilidad Social Empresarial en la entidad aseguradora. 2011
171. Investigaciones en Seguros y Gestión del Riesgo. RIESGO 2011
170. Introdução ao Resseguro. 2011
169. La salud y su aseguramiento en Argentina, Chile, Colombia y España. 2011
168. Diferencias de sexo en conductas de riesgo y tasa de mortalidad diferencial entre hombres y mujeres. 2011
167. Movilización y rescate de los compromisos por pensiones garantizados mediante contrato de seguros. 2011
166. Embedded Value aplicado al ramo No Vida. 2011
165. Las sociedades cautivas de Reaseguro. 2011
164. Daños del amianto: litigación, aseguramiento de riesgos,y fondos de compensación. 2011
163. El riesgo de tipo de interés: experiencia española y Solvencia II. 2011

162. I Congreso sobre las Nuevas Tecnologías y sus repercusiones en el Seguro: Internet, Biotecnología y Nanotecnología. 2011
161. La incertidumbre bioactuarial en el riesgo de la longevidad. Reflexiones bioéticas. 2011
160. Actividad aseguradora y defensa de la competencia. La exención antitrust del sector asegurador. 2011
159. Estudio empírico sobre la tributación de los seguros de vida. 2010
158. Métodos estocásticos de estimación de las provisiones técnicas en el marco de Solvencia II. 2010
157. Introducción al Reaseguro. 2010
156. Encuentro Internacional sobre la Historia del Seguro. 2010
155. Los sistemas de salud en Latinoamérica y el papel del seguro privado. 2010
154. El Seguro de Crédito en Chile. 2010
153. El análisis financiero dinámico como herramienta para el desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II. 2010
152. Características sociodemográficas de las personas con doble cobertura sanitaria. Un estudio empírico. 2010
151. Solidaridad impropia y seguro de Responsabilidad Civil. 2010
150. La prevención del blanqueo de capitales en las entidades aseguradoras, las gestoras y los corredores de seguros 2010
149. Fondos de aseguramiento agropecuario y rural: la experiencia mexicana en el mutualismo agropecuario y sus organizaciones superiores. 2010

148. Avaliação das Provisões de Sinistro sob o Enfoque das Novas Regras de Solvência do Brasil. 2010
147. El principio de igualdad sexual en el Seguro de Salud: análisis actuarial de su impacto y alcance. 2010
146. Investigaciones históricas sobre el Seguro español. 2010
145. Perspectivas y análisis económico de la futura reforma del sistema español de valoración del daño corporal. 2009
144. Contabilidad y Análisis de Cuentas Anuales de Entidades Aseguradoras (Plan contable 24 de julio de 2008). 2009
143. Mudanças Climáticas e Análise de Risco da Indústria de Petróleo no Litoral Brasileiro. 2009
142. Bases técnicas dinámicas del Seguro de Dependencia en España. Una aproximación en campo discreto. 2009
141. Transferencia Alternativa de Riesgos en el Seguro de Vida: Titulización de Riesgos Aseguradores. 2009
140. Riesgo de negocio ante asegurados con múltiples contratos. 2009
139. Optimización económica del Reaseguro cedido: modelos de decisión. 2009
138. Inversiones en el Seguro de Vida en la actualidad y perspectivas de futuro. 2009
137. El Seguro de Vida en España. Factores que influyen en su progreso. 2009
136. Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos. RIESGO 2009.
135. Análisis e interpretación de la gestión del fondo de maniobra en entidades aseguradoras de incendio y lucro cesante en grandes riesgos industriales. 2009

134. Gestión integral de Riesgos Corporativos como fuente de ventaja competitiva: cultura positiva del riesgo y reorganización estructural. 2009
133. La designación de la pareja de hecho como beneficiaria en los seguros de vida. 2009
132. Aproximación a la Responsabilidad Social de la empresa: reflexiones y propuesta de un modelo. 2009
131. La cobertura pública en el seguro de crédito a la exportación en España: cuestiones prácticas-jurídicas. 2009
130. La mediación en seguros privados: análisis de un complejo proceso de cambio legislativo. 2009
129. Temas relevantes del Derecho de Seguros contemporáneo. 2009
128. Cuestiones sobre la cláusula cut through. Transferencia y reconstrucción. 2008
127. La responsabilidad derivada de la utilización de organismos genéticamente modificados y la redistribución del riesgo a través del seguro. 2008
126. Ponencias de las Jornadas Internacionales sobre Catástrofes Naturales. 2008
125. La seguridad jurídica de las tecnologías de la información en el sector asegurador. 2008
124. Predicción de tablas de mortalidad dinámicas mediante un procedimiento bootstrap. 2008
123. Las compañías aseguradoras en los procesos penal y contencioso-administrativo. 2008
122. Factores de riesgo y cálculo de primas mediante técnicas de aprendizaje. 2008

121. La solicitud de seguro en la Ley 50/1980, de 8 de octubre, de Contrato de Seguro. 2008
120. Propuestas para un sistema de cobertura de enfermedades catastróficas en Argentina. 2008
119. Análisis del riesgo en seguros en el marco de Solvencia II: Técnicas estadísticas avanzadas Monte Carlo y Bootstrapping. 2008
118. Los planes de pensiones y los planes de previsión asegurados: su inclusión en el caudal hereditario. 2007
117. Evolução de resultados técnicos e financeiros no mercado segurador iberoamericano. 2007
116. Análisis de la Ley 26/2006 de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2007
115. Sistemas de cofinanciación de la dependencia: seguro privado frente a hipoteca inversa. 2007
114. El sector asegurador ante el cambio climático: riesgos y oportunidades. 2007
113. Responsabilidade social empresarial no mercado de seguros brasileiro influências culturais e implicações relacionais. 2007
112. Contabilidad y análisis de cuentas anuales de entidades aseguradoras. 2007
111. Fundamentos actuariales de primas y reservas de fianzas. 2007
110. El Fair Value de las provisiones técnicas de los seguros de Vida. 2007
109. El Seguro como instrumento de gestión de los M.E.R. (Materiales Especificados de Riesgo). 2006
108. Mercados de absorción de riesgos. 2006

107. La exteriorización de los compromisos por pensiones en la negociación colectiva. 2006
106. La utilización de datos médicos y genéticos en el ámbito de las compañías aseguradoras. 2006
105. Los seguros contra incendios forestales y su aplicación en Galicia. 2006
104. Fiscalidad del seguro en América Latina. 2006
103. Las NIC y su relación con el Plan Contable de Entidades Aseguradoras. 2006
102. Naturaleza jurídica del Seguro de Asistencia en Viaje. 2006
101. El Seguro de Automóviles en Iberoamérica. 2006
100. El nuevo perfil productivo y los seguros agropecuarios en Argentina. 2006
99. Modelos alternativos de transferencia y financiación de riesgos "ART": situación actual y perspectivas futuras. 2005
98. Disciplina de mercado en la industria de seguros en América Latina. 2005
97. Aplicación de métodos de inteligencia artificial para el análisis de la solvencia en entidades aseguradoras. 2005
96. El Sistema ABC-ABM: su aplicación en las entidades aseguradoras. 2005
95. Papel del docente universitario: ¿enseñar o ayudar a aprender? 2005
94. La renovación del Pacto de Toledo y la reforma del sistema de pensiones: ¿es suficiente el pacto político? 2005
92. Medición de la esperanza de vida residual según niveles de dependencia en España y costes de cuidados de larga duración. 2005

91. Problemática de la reforma de la Ley de Contrato de Seguro. 2005
90. Centros de atención telefónica del sector asegurador. 2005
89. Mercados aseguradores en el área mediterránea y cooperación para su desarrollo. 2005
88. Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación. 2004
87. Dependencia en el modelo individual, aplicación al riesgo de crédito. 2004
86. El margen de solvencia de las entidades aseguradoras en Iberoamérica. 2004
85. La matriz valor-fidelidad en el análisis de los asegurados en el ramo del automóvil. 2004
84. Estudio de la estructura de una cartera de pólizas y de la eficacia de un Bonus-Malus. 2004
83. La teoría del valor extremo: fundamentos y aplicación al seguro, ramo de responsabilidad civil autos. 2004
81. El Seguro de Dependencia: una visión general. 2004
80. Los planes y fondos de pensiones en el contexto europeo: la necesidad de una armonización. 2004
79. La actividad de las compañías aseguradoras de vida en el marco de la gestión integral de activos y pasivos. 2003
78. Nuevas perspectivas de la educación universitaria a distancia. 2003
77. El coste de los riesgos en la empresa española: 2001.

76. La incorporación de los sistemas privados de pensiones en las pequeñas y medianas empresas. 2003
75. Incidencia de la nueva Ley de Enjuiciamiento Civil en los procesos de responsabilidad civil derivada del uso de vehículos a motor. 2002
74. Estructuras de propiedad, organización y canales de distribución de las empresas aseguradoras en el mercado español. 2002
73. Financiación del capital-riesgo mediante el seguro. 2002
72. Análisis del proceso de exteriorización de los compromisos por pensiones. 2002
71. Gestión de activos y pasivos en la cartera de un fondo de pensiones. 2002
70. El cuadro de mando integral para las entidades aseguradoras. 2002
69. Provisiones para prestaciones a la luz del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados; métodos estadísticos de cálculo. 2002
68. Los seguros de crédito y de caución en Iberoamérica. 2001
67. Gestión directiva en la internacionalización de la empresa. 2001
65. Ética empresarial y globalización. 2001
64. Fundamentos técnicos de la regulación del margen de solvencia. 2001
63. Análisis de la repercusión fiscal del seguro de vida y los planes de pensiones. Instrumentos de previsión social individual y empresarial. 2001
62. Seguridad Social: temas generales y régimen de clases pasivas del Estado. 2001
61. Sistemas Bonus-Malus generalizados con inclusión de los costes de los siniestros. 2001

60. Análisis técnico y económico del conjunto de las empresas aseguradoras de la Unión Europea. 2001
59. Estudio sobre el euro y el seguro. 2000
58. Problemática contable de las operaciones de reaseguro. 2000
56. Análisis económico y estadístico de los factores determinantes de la demanda de los seguros privados en España. 2000
54. El corredor de reaseguros y su legislación específica en América y Europa. 2000
53. Habilidades directivas: estudio de sesgo de género en instrumentos de evaluación. 2000
52. La estructura financiera de las entidades de seguros, S.A. 2000
51. Seguridades y riesgos del joven en los grupos de edad. 2000
50. Mixturas de distribuciones: aplicación a las variables más relevantes que modelan la siniestralidad en la empresa aseguradora. 1999
49. Solvencia y estabilidad financiera en la empresa de seguros: metodología y evaluación empírica mediante análisis multivariante. 1999
48. Matemática Actuarial no vida con MapleV. 1999
47. El fraude en el Seguro de Automóvil: cómo detectarlo. 1999
46. Evolución y predicción de las tablas de mortalidad dinámicas para la población española. 1999
45. Los Impuestos en una economía global. 1999
42. La Responsabilidad Civil por contaminación del entorno y su aseguramiento. 1998

41. De Maastricht a Amsterdam: un paso más en la integración europea. 1998
39. Perspectiva histórica de los documentos estadístico-contables del órgano de control: aspectos jurídicos, formalización y explotación. 1997
38. Legislación y estadísticas del mercado de seguros en la comunidad iberoamericana. 1997
37. La responsabilidad civil por accidente de circulación. Puntual comparación de los derechos francés y español. 1997
36. Cláusulas limitativas de los derechos de los asegurados y cláusulas delimitadoras del riesgo cubierto: las cláusulas de limitación temporal de la cobertura en el Seguro de Responsabilidad Civil. 1997
35. El control de riesgos en fraudes informáticos. 1997
34. El coste de los riesgos en la empresa española: 1995
33. La función del derecho en la economía. 1997
32. Decisiones racionales en reaseguro. 1996
31. Tipos estratégicos, orientación al mercado y resultados económicos: análisis empírico del sector asegurador español. 1996
30. El tiempo del directivo. 1996
29. Ruina y Seguro de Responsabilidad Civil Decenal. 1996
28. La naturaleza jurídica del Seguro de Responsabilidad Civil. 1995
27. La calidad total como factor para elevar la cuota de mercado en empresas de seguros. 1995

26. El coste de los riesgos en la empresa española: 1993
25. El reaseguro financiero. 1995
24. El seguro: expresión de solidaridad desde la perspectiva del derecho. 1995
23. Análisis de la demanda del seguro sanitario privado. 1993
22. Rentabilidad y productividad de entidades aseguradoras. 1994
21. La nueva regulación de las provisiones técnicas en la Directiva de Cuentas de la C.E.E. 1994
20. El Reaseguro en los procesos de integración económica. 1994
19. Una teoría de la educación. 1994
18. El Seguro de Crédito a la exportación en los países de la OCDE (evaluación de los resultados de los aseguradores públicos). 1994
16. La legislación española de seguros y su adaptación a la normativa comunitaria. 1993
15. El coste de los riesgos en la empresa española: 1991
14. El Reaseguro de exceso de pérdidas 1993
12. Los seguros de salud y la sanidad privada. 1993
10. Desarrollo directivo: una inversión estratégica. 1992
9. Técnicas de trabajo intelectual. 1992
8. La implantación de un sistema de controlling estratégico en la empresa. 1992

7. Los seguros de responsabilidad civil y su obligatoriedad de aseguramiento. 1992
6. Elementos de dirección estratégica de la empresa. 1992
5. La distribución comercial del seguro: sus estrategias y riesgos. 1991
4. Los seguros en una Europa cambiante: 1990-95. 1991
2. Resultados de la encuesta sobre la formación superior para los profesionales de entidades aseguradoras (A.P.S.). 1991
1. Filosofía empresarial: selección de artículos y ejemplos prácticos. 1991

LIBROS

El Ahorro en perspectiva histórica. 2016

Lo bueno, si breve... Microrrelatos de Seguros. 2016

The risk of longevity and its practical application to Solvency II. 2015

Historia de FIDES –Federación Interamericana de Empresas de Seguros. 2015

El riesgo de longevidad y su aplicación práctica a Solvencia II. 2014

Historia del Seguro en España. 2014

Actas del III Congreso Internacional de Nuevas Tecnologías: sus repercusiones en el seguro: internet, biotecnología y nanotecnología: 12 y 13 de noviembre de 2012, Santiago de Chile. 2013

Emergencia y reconstrucción: el antes y después del terremoto y tsunami del 27F en Chile. 2012

Riesgo sistémico y actividad aseguradora. 2012

La historia del seguro en Chile (1810-2010). 2012

Modelo de proyección de carteras de seguros para el ramo de decesos. 2011

Desarrollo comercial del seguro colectivo de dependencia en España. 2010

La mediación de seguros en España: análisis de la Ley 26/2006, de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2010

Museo del Seguro. Catálogo. 2010

Diccionario MAPFRE de Seguros. 2008

Teoría de la credibilidad: desarrollo y aplicaciones en primas de seguros y riesgos operacionales. 2008

El seguro de caución: una aproximación práctica. 2007

El seguro de pensiones. 2007

Las cargas del acreedor en el seguro de responsabilidad civil. 2006

Diccionario bilingüe de expresiones y términos de seguros: inglés-español, español-inglés. 2006

El seguro de riesgos catastróficos: reaseguro tradicional y transferencia alternativa de riesgos. 2005

La liquidación administrativa de entidades aseguradoras. 2005

INFORMES Y RANKINGS

Desde 1994 se publican anualmente estudios que presentan una panorámica concreta de los mercados aseguradores europeos, de España e Iberoamérica y que pueden consultarse en formato electrónico desde la página Web:

www.fundacionmapfre.org

Mercado español de seguros

Mercado asegurador latinoamericano

Ranking de grupos aseguradores europeos

Ranking de grupos aseguradores iberoamericanos

Los millennials y el seguro en España. 2016

Tendencias de crecimiento de los mercados aseguradores de América Latina para 2016

Estudio social sobre la jubilación: expectativas y experiencias. 2015

La percepción social del seguro en España 2014

Informe de predicción de la actividad aseguradora en España. 2014

La internacionalización de la empresa española: riesgos y oportunidades. 2014

El seguro en la sociedad y la economía españolas. 2013

Papel del seguro en el desarrollo sostenible. ICEA, 2013

Emprender en momentos de crisis: riesgos y factores de éxito. 2012

La percepción social del seguro en España. 2012



CENTRO DE DOCUMENTACIÓN

Todas nuestras publicaciones a tu alcance

Además del acceso gratuito a nuestro fondo documental especializado en:

- Seguros
- Gerencia de riesgos
- Prevención



Centro de Documentación

www.fundacionmapfre.org/documentacion

Fundación **MAPFRE**



Paseo de Recoletos, 23
28004 Madrid (España)
www.fundacionmapfre.org

P.V.P.: 30 €

ISBN 978-84-9844-647-0

