

Máster Universitario en Ciencias Actuariales y Financieras
2022-2023

Trabajo Fin de Máster

“Modelo Piggyback: Proyecciones de Mortalidad en entornos de Insuficiencia Muestral”

Daniel Rovira Domínguez

Tutores

José Miguel Rodríguez-Pardo Del Castillo

Jesús Ramón Simón Del Potro

Madrid, 5 de julio de 2023



Esta obra se encuentra sujeta a la licencia Creative Commons **Reconocimiento – No Comercial – Sin Obra Derivada**

RESUMEN

A lo largo de este trabajo se presenta el modelo *Piggyback*, un predictor de mortalidad en carteras de pocos asegurados. El modelo toma como base la modelización de una población grande que guarde relación con la cartera asegurada. Mediante GLM, se captura la distancia (*gap function*) entre la cartera asegurada y la población grande modelizada. Contando con la robustez de la amplitud muestral, se realiza una predicción de la cartera grande, para luego aplicar la función de enlace obtenida para la cartera asegurada.

Contando con datos entre el año 2000 y 2010, se realiza una predicción para la población de Islandia, basándose en la población española, para el período 2011–2019. Mediante esta predicción, se muestra que los resultados del modelo consiguen recoger la tasa central de mortalidad por edad.

El modelo muestra su valor consiguiendo salvar la situación de incertidumbre que se origina en las compañías aseguradoras cuando, en expansiones o especialización de productos, deben realizar estimaciones de mortalidad en carteras con poca experiencia.

Palabras clave: *Piggyback*, predicción de mortalidad, insuficiencia muestral.

ÍNDICE

1. Introducción	2
2. Modelos Análogos	5
3. Modelo <i>Piggyback</i>	9
3.1. Procedimiento	10
3.2. Modelo de Lee-Carter	19
3.2.1. Resultados para la población española	22
3.3. P-splines	30
3.3.1. Splines	30
3.3.2. B-splines.....	30
3.3.3. Suavización con B-splines y penalizaciones	32
3.3.4. Utilidad de la suavización en los modelos de mortalidad	36
3.4. Algoritmo de suavización DDE	39
3.4.1 Metodología del suavizador	41
3.5. Modelos Lineales Generalizados (GLM)	48
3.5.1. Aplicación en el modelo <i>Piggyback</i>	50
4. Resultados	52
4.1 Backtesting	64
5. Conclusiones	67
6. Bibliografía	69

1. Introducción

La mortalidad es un fenómeno que despierta gran interés en diferentes campos de estudio, como las ciencias actuariales, la demografía, la epidemiología y la estadística. En particular, el estudio de la mortalidad y la longevidad ha cobrado gran importancia en la última década debido al envejecimiento de la población y al impacto que esto tiene en diversos sectores, como el financiero y el asegurador.

Los modelos de mortalidad son herramientas utilizadas para describir y predecir la mortalidad en una población, lo que resulta fundamental en la planificación de programas de salud, la estimación de gastos en pensiones y seguros de vida, la evaluación de políticas públicas, y, con el foco en las entidades aseguradoras, predecir el gasto que tendrán que afrontar en siniestros de carteras de vida, con las consecuencias que esta estimación pueda tener en sus provisiones técnicas. En este sentido, la utilización de modelos predictivos de mortalidad se ha convertido en una práctica común para los actuarios.

Uno de los grandes problemas que enfrentan las compañías aseguradoras es la insuficiencia de datos de cartera a la hora de modelizar los patrones de mortalidad propios. Cuando una compañía trata de predecir la tasa de mortalidad de sus asegurados, puede enfrentar tres situaciones que le obstaculizarían la modelización:

- O bien no disponen de una cartera con historia suficiente, esto es, registros de fallecimientos en distintos años de calendario,
- O pueden no tener una masa de asegurados estadísticamente significativa de la cual se puedan obtener patrones de mortalidad propios bien definidos,
- O bien padecen ambas situaciones simultáneamente, una cartera pequeña y con poca historia.

La generación de modelos que repliquen el comportamiento de la mortalidad de una población es uno de los principales ejes sobre los que se mueve la ciencia actuarial. Los avances tecnológicos de los últimos años han permitido a la ciencia actuarial modelizar

más y de una forma más exacta los patrones de mortalidad de diferentes poblaciones, a través de la implementación de técnicas estadísticas, estocásticas y de optimización.

Este avance en las técnicas de modelización ha sido causa y a la vez consecuencia de una mayor competitividad en el sector asegurador. Esto se traduce en dos hechos: una mayor segmentación de productos más personalizada a los perfiles de los asegurados, junto a una disminución de los márgenes que permitan mejorar alinearse con los precios de los competidores. Estos dos elementos desembocan en una necesidad para el sector: modelizar la mortalidad de poblaciones cada vez más específicas. Modelizar, para así conseguir un precio lo más reducido posible, y en poblaciones específicas que permitan desplegar la oferta de la entidad en segmentos no cubiertos por el sector.

Este trabajo supone una propuesta desde el lado de la mortalidad, por lo que su uso concierne a todos los tipos de productos derivados de categorías de seguros más generales, como son los vida-riesgo, vida-ahorro y rentas.

En este contexto, el presente trabajo se enfoca en el estudio de un modelo de mortalidad para carteras pequeñas. Se utilizará un modelo de la familia de los modelos de riesgo base (Haberman et al., 2014), concretamente, el modelo llamado *Piggyback*. El modelo *Piggyback* se sustancia en la literatura sectorial, utilizando herramientas de uso actuarial tan amplio como el modelo de Lee-Carter y los Modelos Lineales Generalizados (*GLM*). De cada una de las herramientas utilizadas en la metodología *Piggyback*, se dedicarán breves apartados para otorgar un contexto a cada pieza del modelo final.

El modelo actuarial que se propone en este trabajo se basa en una modelización del riesgo base ("*basis risk*"), para conseguir una extrapolación efectiva de la mortalidad a una población específica. Para ello, se hará uso de los datos de la *Human Mortality Database* disponibles para España. Estos datos se tratan con el modelo de Lee-Carter para obtener su descomposición en mortalidad constante para cada edad y el factor de mejora de mortalidad ajustado por la edad.

Posteriormente, se realiza una suavización del vector de beta mediante el uso de metodología de P-splines dentro de la estimación de los parámetros de Lee-Carter. Esto

permitirá obtener una diferencia constante entre la mortalidad española y la cartera, para posteriormente realizar una predicción de la serie de kappa en n años posteriores (mediante modelo ARIMA). Toda esta modelización se podrá conformar como la constante de un GLM. La variable y_i del modelo (componente aleatorio) serán los fallecidos de la cartera, mientras que las variables explicativas (componente sistemático) pasan a ser las edades y los expuestos. La mejora de mortalidad vendrá implícita en la modelización de la población española, por lo que el modelo asume que las poblaciones “comparten” las mejoras de mortalidad. En términos del modelo Lee–Carter, utilizan el mismo vector de parámetros κ .

Los datos que se tratarán a lo largo de este trabajo son los siguientes (disponibles en *mortality.org*):

- Expuestos y fallecidos de la población española: se utilizará como población de referencia en el modelo. Se utilizarán los registros para las edades entre 40 y 90 años, y entre 1960 y 2010. En adelante, a esta población se la referenciará como población de referencia.
- Expuestos y fallecidos de la población islandesa: se utilizará como la cartera pequeña. Tan sólo se recogerán los datos para las edades comprendidas entre 40 y 90 años, y los años de calendario entre 2000 y 2010. Los años de calendario entre 1960 y 2009, y entre 2011 y 2019 se utilizarán como *backtesting* y análisis de predicciones. En adelante, a esta población se la referenciará como cartera.

Este trabajo sobre el modelo seguirá la siguiente estructura: en el capítulo 3 se presentan las distintas herramientas que utiliza el modelo Piggyback. Modelo de Lee–Carter, P-splines y una aplicación de esta suavización en la obtención de Lee–Carter, y GLM componen este capítulo. Se presenta tanto una revisión bibliográfica y metodológica como los resultados que se van obteniendo para los datos utilizados en este trabajo. En el capítulo 4 se presentan los resultados de la metodología *Piggyback* y en el capítulo 5 se muestra la predicción del modelo para la población de Islandia, mostrando gráficamente el ajuste entre los valores reales y predichos y un análisis *backtesting*.

2. Modelos Análogos

La modelización de la mortalidad es uno de los ejes fundamentales de la ciencia actuarial. En los inicios del estudio en este campo, los modelos se centraban en la búsqueda de unas leyes de mortalidad. Estas leyes son expresiones analíticas que tratan de dar una estimación de los patrones de mortalidad.

Entre las principales leyes de mortalidad...

1. Ley de De Moivre: propuesto en 1725. Consiste en una definición de la mortalidad como una función lineal decreciente de la edad. La población viva en la edad x se define como:

$$l(x) = l_0 \left(1 - \frac{x}{\omega}\right) \quad (2.1)$$

Donde ω es la máxima edad teórica de fallecimiento y l_0 es la población inicial.

La tasa instantánea de mortalidad, por tanto, se calcula como:

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x} \quad (2.2)$$

2. Ley de Dormoy: supone que la forma función de personas vivas a la edad x es exponencial:

$$l(x) = l_0 * S^x \quad (2.3)$$

Donde S es un valor entre 0 y 1.

La tasa instantánea de mortalidad es:

$$\mu_x = -\ln(S) \quad (2.4)$$

3. Ley de Sang: supone una adaptación de la Ley de Dormoy, en la que se añade una constante:

$$l(x) = a + Kb^x \quad (2.5)$$

Donde K es positivo y b es un valor entre 0 y 1.

La tasa instantánea de mortalidad queda como:

$$\mu_x = \frac{\ln(b)}{b^{\omega-x} - 1} \quad (2.6)$$

4. Ley de Gompertz–Makeham: propone un término dependiente de la edad que aumenta exponencialmente, junto a otro término independiente de la edad. La tasa instantánea de mortalidad crece de forma constante a tasa γ , por tanto:

$$\mu_x = e^{\gamma x + h} \quad (2.7)$$

Sin embargo, estos modelos fueron quedando obsoletos con el incremento de la experiencia de las entidades aseguradoras y, sobre todo en los últimos años, con la mejora de la calidad y la trazabilidad de los datos. Los modelos de mortalidad han pivotado desde soluciones analíticas hacia modelos basados en datos registrados por instituciones o por la propia experiencia de las entidades aseguradoras.

Entre los modelos que han surgido y han captado popularidad en el mundo actuarial, destacan aquellos estocásticos que tratan de explicar y suavizar la mortalidad observada. A continuación, se realiza un repaso de los más comunes.

1. Lee–Carter (Carter y Lee, 1992)

Este modelo será utilizado dentro del *Piggyback*. Este modelo propone tres componentes al explicar la mortalidad, dos en función de la edad y uno en función del tiempo.

$$\log(\mu(x, t)) = \alpha(x) + \beta(x)\kappa(t) + \varepsilon(x, t) \quad (2.8)$$

Sujeto a:

$$\sum_t \kappa_t = 0$$
$$\sum_x \beta_x = 1$$

Este modelo ha sido ampliamente estudiado y utilizado gracias a su sencillez y fácil interpretabilidad.

2. Modelo de Renshaw-Haberman (Haberman y Renshaw, 2010)

Supone una ampliación del modelo de Lee Carter, en el que se incluye un componente de cohorte.

$$\log(\mu(x, t)) = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t + \beta_x^{(2)} \gamma_{t-x} + \varepsilon(x, t) \quad (2.9)$$

Sujeto a:

$$\sum_t \kappa_t = 0$$

$$\sum_x \beta_x^{(1)} = 1$$

$$\sum_x \beta_x^{(2)} = 1$$

$$\sum_{t,x} \gamma_{t-x} = 0$$

3. Modelo APC

Se trata un caso singular del modelo anterior, que también incluye un componente de cohorte. En este caso, la especificación es la siguiente:

$$\log(\mu(x, t)) = \beta_x + \kappa_t + \gamma_{t-x} + \varepsilon(x, t) \quad (2.10)$$

Sujeto a:

$$\sum_t \kappa_t = 0$$

$$\sum_{t,x} \gamma_{t-x} = 0$$

Para la estimación de κ_t y β_x se hace uso de P-splines, herramienta que también tendrá lugar en el modelo *Piggyback*.

4. Modelo CBD (CBD-1)

Formulado en 2006, su especificación es la siguiente:

$$\text{logit } q(x, t) = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)} + \varepsilon(x, t) \quad (2.11)$$

5. Modelo CBD extendido (CBD-2)

Se enunció un año después del modelo CBD-1. En este modelo se implementa un componente de cohorte y un componente cuadrático que añade curvatura a la estimación. La especificación es la siguiente:

$$\text{logit } q(x, t) = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)} + \kappa_t^{(3)}[(x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2] + \gamma_{t-x}^{(4)} + \varepsilon(x, t) \quad (2.12)$$

Este modelo es sustantivamente mejor en edades avanzadas, donde la curvatura de la mortalidad toma un papel más relevante.

El modelo en el que se centra este trabajo, el modelo *Piggyback*, se puede enmarcar dentro de los llamados modelos de riesgo base. Esta categoría trabaja la idea de recoger el riesgo subyacente a la pertenencia de una población, para luego adaptar esta mortalidad a la especificidad de la muestra a analizar. En Blake et al, 2011, se encuentra un modelo llamado de gravitación de dos poblaciones, en el que se estudia la dinámica que relaciona los patrones de mortalidad para distintas poblaciones que comparten características.

Esta última condición también se debe cumplir en el modelo *Piggyback*. Para la población de referencia se debe utilizar una población que comparta características en sus patrones de mortalidad con la cartera a estudiar.

3. Modelo *Piggyback*

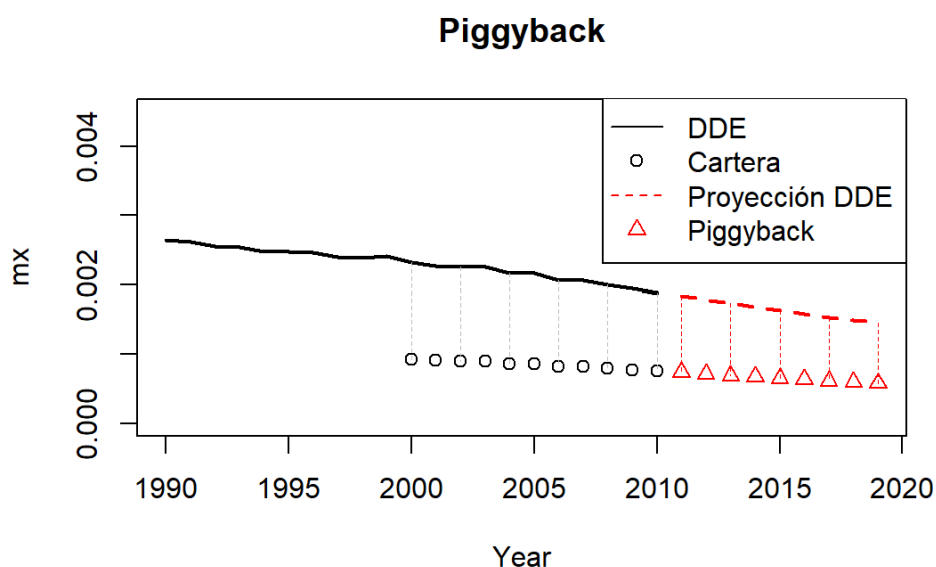
El modelo *Piggyback* surge como solución a uno de los grandes problemas que enfrentan las entidades aseguradoras cuando tienen carteras con poca masa muestral. Fue propuesto en 2011 por el profesor de la Universidad Heriot-Watt, Iain Currie. Entre otras aportaciones de Currie, destaca su trabajo en suavización, especialmente aportando al campo de los P-splines y en modelos de predicción de mortalidad (Currie et al., 2004, Currie, 2009, Currie, 2011).

El modelo que propone Currie ayuda a predecir la mortalidad por edad en carteras con pocos asegurados. El fundamento del *Piggyback* está en dejar que las predicciones de mortalidad de una cartera pequeña se apoyen en unas más robustas sobre una población grande, de ahí surge el término *Piggyback*.

Se presenta un gráfico ilustrativo del funcionamiento del modelo:

Figura 3.1

Funcionamiento del modelo Piggyback



Fuente: elaboración propia

DDE hace referencia a la mortalidad de la población de referencia. Primeramente, se capta la distancia entre la población de referencia y la cartera (líneas discontinuas grises). Aprovechando la robustez del uso de una población grande, se proyecta su

mortalidad (proyección DDE). Por último, la predicción del modelo toma de hipótesis que la distancia captada en la experiencia de la cartera sobre la población de referencia es válida para las proyecciones posteriores, dando unas predicciones útiles para carteras con registros escasos.

3.1. Procedimiento

Aunque un desglose exhaustivo de las herramientas utilizadas en el modelo se puede encontrar en los apartados posteriores, a continuación, se presentan los pasos que se siguen en el desarrollo del modelo *Piggyback*:

1. Se modeliza una población grande

La primera fase que se propone es la generación de un modelo que describa el patrón de mortalidad de una cartera grande. Esto se puede hacer mediante el modelo de Lee-Carter. El modelo de Lee-Carter tiene dos grandes ventajas en este contexto: su interpretabilidad y la posibilidad de realizar predicciones.

Cuando se habla de población grande, se habla de una población que tenga relación con la cartera asegurada. La lógica del modelo *Piggyback* reside en que las mejoras de mortalidad se recojan por medio de la población grande, por lo que esta población base debe seguir unos patrones de mortalidad similares.

En el contexto de este trabajo, se utilizará la cartera asegurada de una compañía con actividad en España, por lo que como población grande se utilizarán los datos disponibles para la población española.

Los datos de mortalidad de la población española, disponibles en la página web de la *Human Mortality Database*, tienen unas dimensiones desde 0 a 110+ en cuanto a edad, y desde 1908 hasta 2020 para años de calendario.

En este contexto, en los registros de mortalidad española se entiende 110+ como los fallecidos con una edad de fallecimiento igual o superior a 110, por lo que el registro de expuestos y fallecidos puede dar lugar a confusión cuando se calcula la tasa de mortalidad bruta. Esto es, fallecidos entre número de expuestos.

Para paliar con ratios de mortalidad bruta que no aportan información real, se entiende que la probabilidad de tener la edad 110+ y fallecer a los 110+ es igual a 1. Se manipulan los ratios brutos para esta edad límite y se fijan en 1.

2. Se suaviza la mortalidad para obtener unas proyecciones consistentes

La especificación de Lee–Carter anterior da como resultado tres vectores de parámetros (alpha, beta y kappa) en la siguiente forma:

$$\log(\mu(x, t)) = \alpha(x) + \beta(x)\kappa(t) + error \quad (3.1.1)$$

El vector kappa contiene la información sobre la mortalidad en relación con los años de calendario, mientras que tanto los vectores alpha como beta son funciones de la edad.

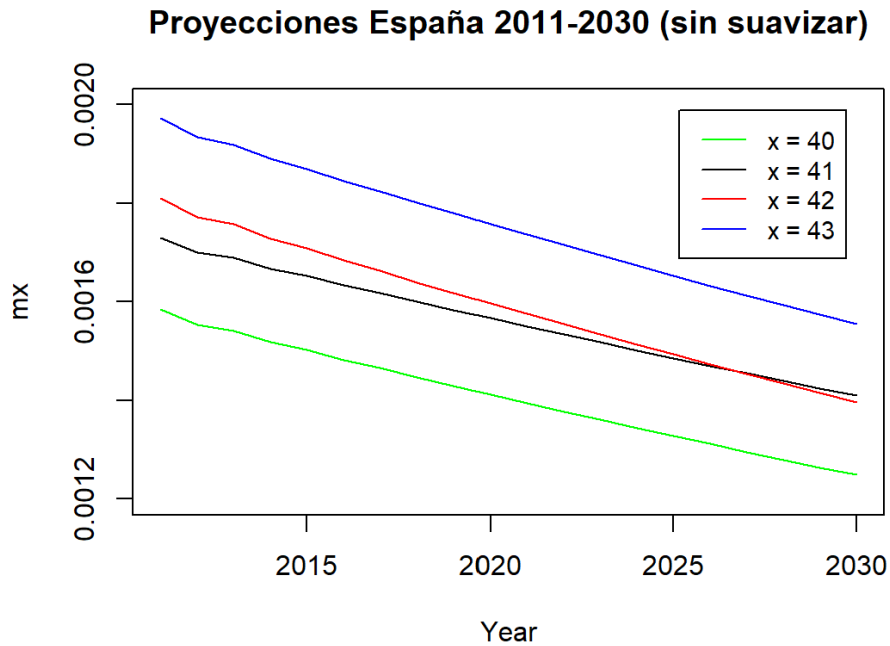
Por tanto, una proyección del vector kappa permitiría al usuario generar predicciones de mortalidad a n años.

Si bien esto no genera ningún problema cuando se trata de hacer los cálculos, la suavidad del vector beta es crucial para obtener proyecciones consistentes. Sin esta propiedad, el modelo sería inútil a la hora de generar tablas de mortalidad proyectadas, ya que se generarían situaciones en las que existen cruces en las mortalidades de edad incompatibles con la naturaleza humana.

El problema al que se refiere el párrafo anterior es el siguiente:

Figura 3.2.1

Predicciones de mortalidad para España



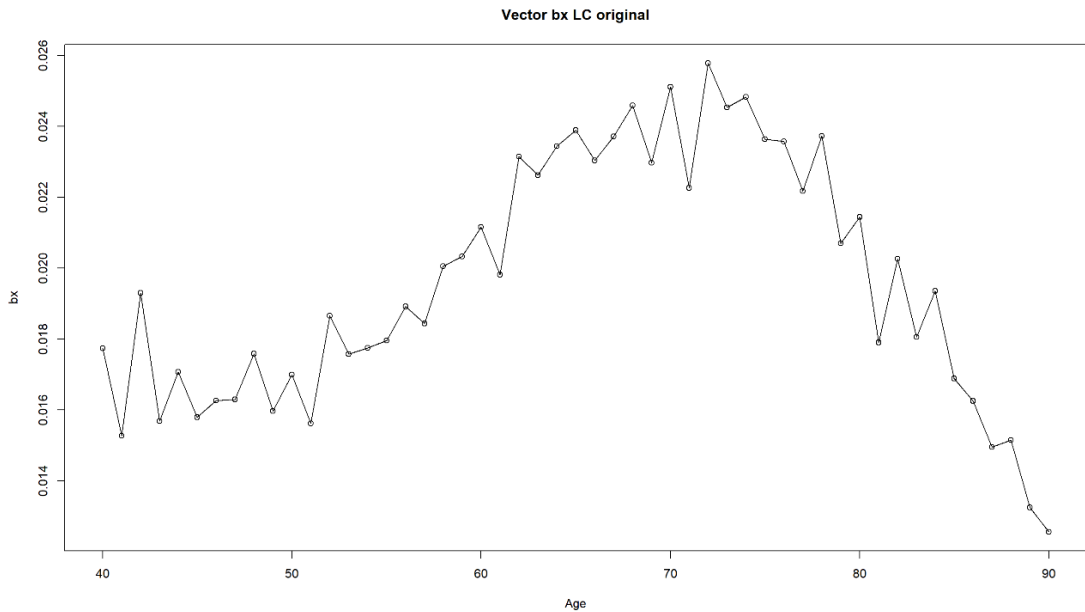
Fuente: elaboración propia

El gráfico anterior está generado mediante la proyección del vector kappa. La lógica hace pensar que la forma de ordenar las mortalidades por edad debe ser $q_{40} < q_{41} < q_{42} < q_{43}$. Sin embargo, las predicciones de este modelo dicen que a partir de 2026 (se ha modelizado hasta el año 2010) las personas con 42 años son menos probables de fallecer que las personas de 41 años, cosa implausible.

Recordando que el vector kappa es una función que afecta por igual a todas las edades, el error se encuentra en el vector de parámetros beta. Este vector de parámetros suele presentar un patrón muy rugoso. Este es el patrón que se encuentra cuando se modeliza mediante Lee-Carter para edades comprendidas entre los 40 y los 90 años:

Figura 3.2.2

Resultados vector beta de Lee-Carter



Fuente: elaboración propia

Como se observa, parece que las mejoras de mortalidad (entendiéndose estas como las recogidas por el vector kappa) afectan a las personas de 40 años más de lo que les afectan a las personas de 41 pero menos que a las de 42.

Este patrón irregular se encuentra a lo largo de toda la curva, y hace que cuando se aplican las mejoras de mortalidad a todas las edades, se generan proyecciones sin consistencia.

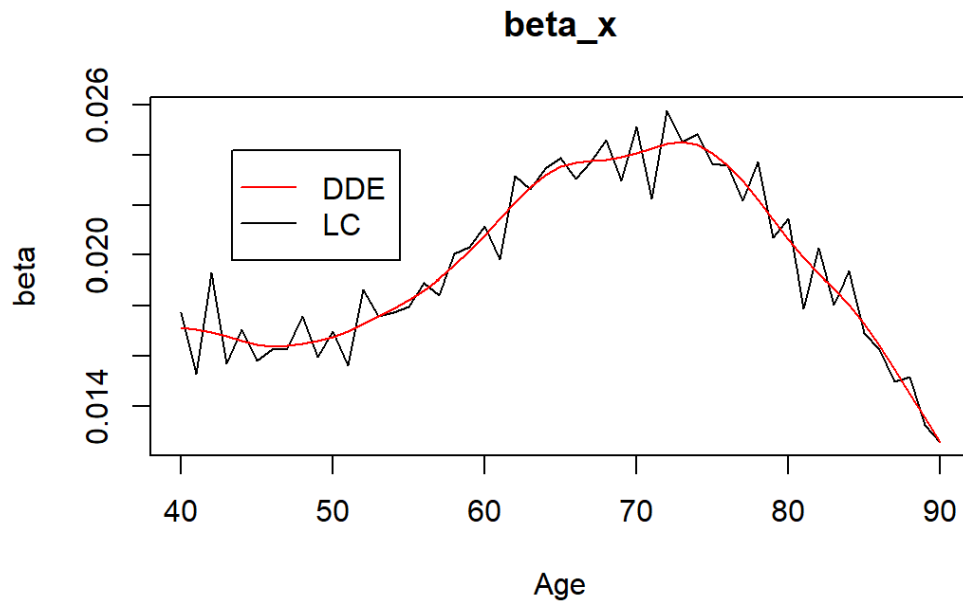
El parámetro beta debe ser suavizado. Sin embargo, en este contexto no es posible realizar un suavizado directo de la curva beta, ya que es uno de los tres vectores que dan forma al modelo de Lee-Carter. Cambiando sus valores, el modelo pierde totalmente el sentido. Se debe encontrar una solución de suavizado que permita que los cambios en el vector beta se trasladen al resto de la especificación del Lee-Carter, esto es, a los vectores alpha y kappa del modelo.

Aquí es donde aparece la solución propuesta por Delwarde, Denuit y Eiders (Delwarde et al., 2007). Estos autores ofrecen un algoritmo (apartado 3.4) que permite generar una suavización del vector beta mediante el uso de P-splines (apartado 3.3).

Este es el resultado que se consigue con el vector de parámetros β :

Figura 3.2.3

Resultados suavizados vector beta de Lee-Carter



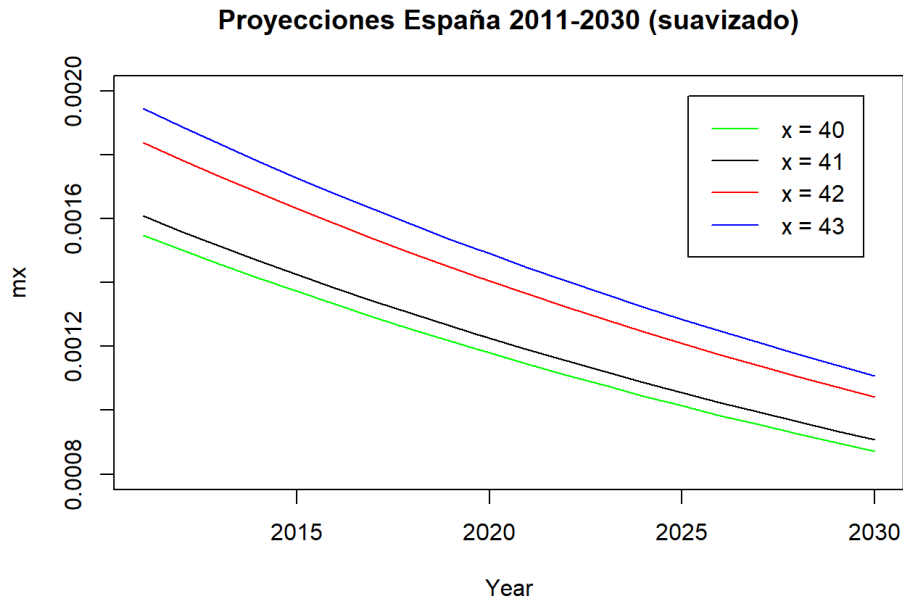
Fuente: elaboración propia

DDE hace referencia al resultado obtenido tras aplicar el algoritmo de Delwarde, Denuit y Eiders a los parámetros del modelo Lee-Carter. LC se refiere al vector beta obtenido originalmente por el modelo de Lee-Carter.

Esta suavización elimina los cambios abruptos en la continuidad del vector, ayudando a que las predicciones presentadas anteriormente tengan el patrón que sigue la lógica biológica.

Figura 3.2.4

Proyecciones suavizadas de mortalidad para España



Fuente: elaboración propia

Ahora, las proyecciones de mortalidad sí son plausibles.

3. Se mide la interacción entre la población grande y la cartera pequeña mediante

Este es el punto clave del modelo *Piggyback*. Para medir la relación entre la población base y la cartera asegurada, se utilizará la estimación por GLM.

La especificación tomará como variable respuesta el número de fallecidos de la cartera. Como variables explicativas se tendrán la edad y una constante tomada como el número de expuestos de la cartera y la probabilidad de fallecimiento ajustada de la población grande. La función enlace que se tomará será una Poisson.

La elección de constante y Poisson como función de enlace sigue la lógica de entender el número de fallecidos como una realización de una variable Poisson con esperanza igual al número de expuestos por la probabilidad de fallecimiento:

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t} * \mu_{x,t})$$

Tomando como referencia a la población grande, mediante GLM se obtendrán dos parámetros que cuantifican la distancia de la mortalidad entre la población y la cartera a estudiar.

La especificación del modelo *Piggyback* es la siguiente:

$$\log(\mu_{x,t}^{cartera}) = \log(\hat{\mu}_{x,t}^{población}) + d_0 + d_1 * x \quad (3.1.2)$$

Donde $\log(\hat{\mu}_{x,t}^{población})$ es el resultado de la modelización por Lee-Carter. Si se sustituye en la especificación:

$$\log(\mu_{x,t}^{cartera}) = \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x * \hat{\kappa}_t + d_0 + d_1 * x \quad (3.1.3)$$

Donde:

d_0 es una diferencia constante entre la mortalidad de la población de edad x en el período t y la cartera en la edad x y período t obtenida del primer parámetro del GLM.

d_1 es el parámetro de la edad de fallecimiento

El conjunto de parámetros d_0 y d_1 para la edad x_i es lo que se llamará *gap function*, la función que otorga información sobre la distancia entre la mortalidad de la población de referencia y la cartera estudiada.

4. Se realizan proyecciones de mortalidad de la población grande

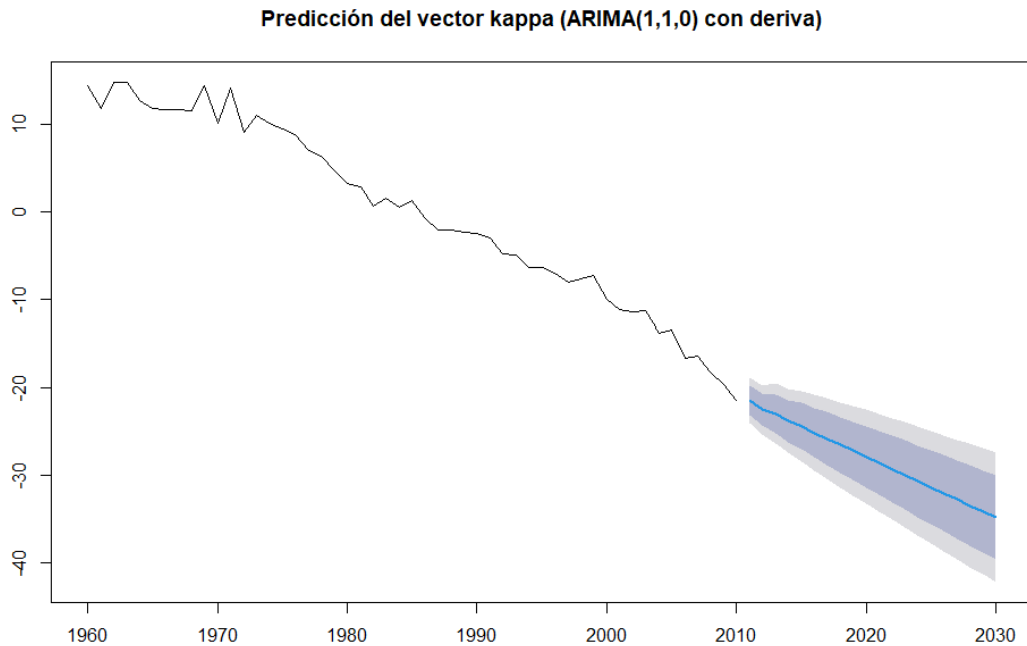
Una vez obtenida la especificación del modelo *Piggyback* y estimados los parámetros, se procede a realizar una predicción de mortalidad de la población de referencia.

Como ya se ha anunciado en este trabajo, la lógica de esta metodología reside en entender que las mejoras de mortalidad vienen recogidas por la población de referencia, por lo que la distancia de mortalidad entre la cartera y la población de referencia se puede entender como constante a lo largo de t .

Por lo anterior, se debe realizar una proyección utilizando la metodología ARIMA del vector kappa, ahora entendiéndose como una serie temporal.

Figura 3.2.5

Predicción para parámetro kappa



Fuente: elaboración propia

El resultado de esta proyección se puede integrar en el modelo Lee-Carter antes suavizado. Como α y β dependen de la edad, no se necesita realizar ningún ajuste adicional.

Las mortalidades predichas ajustadas por el modelo para la población de referencia se obtienen con la siguiente forma:

$$\log(\hat{\mu}(x,t)) = \alpha(x) + \beta(x)\hat{\kappa}(t) \quad (3.1.4)$$

Donde $\hat{\kappa}(t)$ incluye las predicciones del vector $\kappa(t)$ original.

5. Sobre las proyecciones anteriores, se aplica la *gap function* obtenida

Finalmente, se obtienen las predicciones de mortalidad en la cartera utilizada.

Siguiendo la lógica del modelo, por un lado, se tiene una población de referencia grande, lo que permite asumir unas proyecciones de mortalidad más robustas, y, por otro lado,

se tiene la *gap function* que enlaza la mortalidad de la población de referencia con la mortalidad de la cartera.

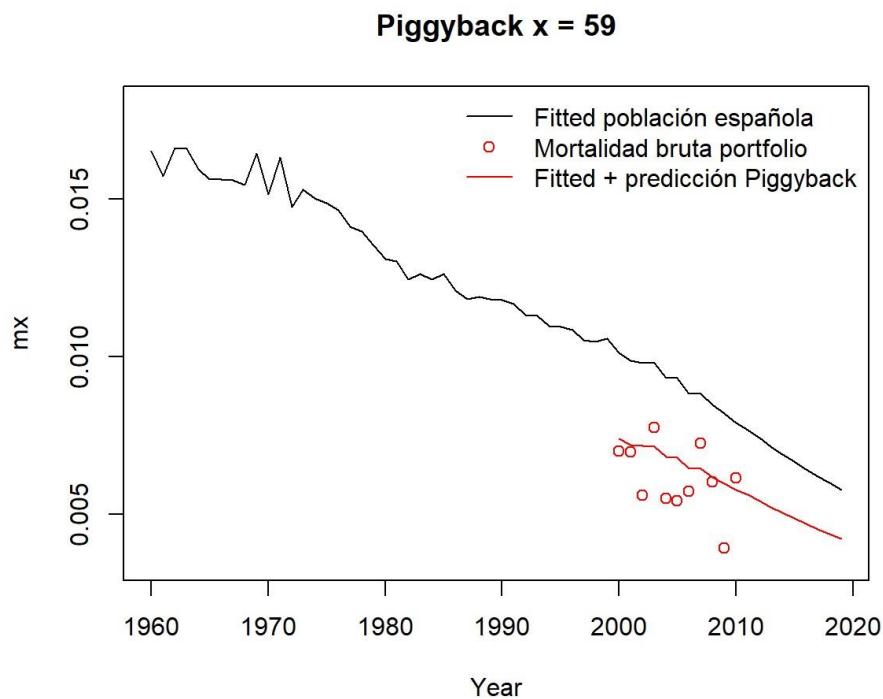
Haciendo las sustituciones pertinentes en la especificación del Piggyback, se obtendrán las predicciones de mortalidad para la cartera y por edad:

$$\log(\mu_{x,t}^{cartera}) = \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x * \hat{\kappa}_t + d_0 + d_1 * x \quad (3.1.5)$$

Se ofrece una predicción del modelo para la cartera asegurada con 59 años de edad:

Figura 3.2.5

Ajuste y resultados del modelo Piggyback para edad 59



Fuente: elaboración propia

En el gráfico anterior se observa tanto la mortalidad bruta del portfolio. Para una cartera con 11 años de experiencia (2000–2010) y unos expuestos medios anuales para la edad observada de 1.200 asegurados. Como se observa, al tratarse de una cartera pequeña, se observan patrones irregulares en su tasa de mortalidad. El modelo consigue captar esta mortalidad y predice para el período 2011–2019.

3.2. Modelo de Lee-Carter

El modelo de Lee-Carter es uno de los modelos más utilizados para modelar la mortalidad en poblaciones grandes. Fue propuesto por Ronald D. Lee y Lawrence R. Carter en 1992, y desde entonces ha sido objeto de numerosos estudios y aplicaciones en el campo de la mortalidad y la longevidad.

La historia del modelo Lee-Carter se remonta a principios de la década de 1990, cuando Ronald Lee y Lawrence Carter, profesores de la Universidad de California en Berkeley, buscaban un método más preciso para proyectar la mortalidad futura. Hasta ese momento, los modelos de mortalidad se basaban principalmente en tendencias históricas y suposiciones teóricas sobre la mortalidad, pero no habían sido rigurosamente validados empíricamente.

Lee y Carter observaron que los modelos existentes no tenían en cuenta la complejidad de las tendencias históricas de la mortalidad y, por lo tanto, desarrollaron un nuevo método para proyectar la mortalidad futura utilizando técnicas estadísticas avanzadas. Su método utiliza una técnica de descomposición de valores singulares para separar los efectos de la edad y el tiempo en la mortalidad y proyectar la probabilidad de fallecimiento futura en función de las tendencias históricas.

El modelo Lee-Carter fue presentado en un artículo de 1992 en el *Journal of the American Statistical Association*, titulado "*Modeling and Forecasting U.S. Mortality*". El artículo fue muy bien recibido en la comunidad académica y actuaria, y rápidamente se convirtió en uno de los artículos más citados en la literatura de mortalidad.

Desde entonces, el modelo Lee-Carter ha sido ampliamente utilizado en el campo de la ciencia actuarial y ha sido objeto de una serie de extensiones y modificaciones. Por ejemplo, algunos investigadores han desarrollado versiones del modelo para diferentes muestras, como hombres y mujeres o diferentes grupos o subpoblaciones. Otros han utilizado el modelo para incorporar factores de riesgo, como el tabaquismo y la obesidad, en las proyecciones de mortalidad.

El modelo de Lee–Carter se utiliza en numerosos estudios, tanto para la proyección de mortalidad como para la evaluación de la sostenibilidad de los sistemas de pensiones y seguros. Una de las ventajas de este modelo es su simplicidad y su capacidad para proporcionar proyecciones precisas de la mortalidad en poblaciones grandes, rasgo especialmente útil en el contexto del modelo *Piggyback*.

El modelo de Lee–Carter se basa en la descomposición de la probabilidad de fallecimiento en dos componentes principales: una función de edad y una función de tiempo. Usando el logaritmo de la mortalidad, el modelo se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\log(\mu(x, t)) = \alpha(x) + \beta(x)\kappa(t) + \varepsilon(x, t) \quad (3.2.1)$$

Sujeto a:

$$\sum_t \kappa_t^2 = 0$$

$$\sum_x \beta_x^2 = 0$$

Donde:

$\mu(x, t)$ es la probabilidad de fallecimiento a la edad x en el año t ,

$\alpha(x)$ es la mortalidad base para cada edad x ,

$\kappa(t)$ recoge la evolución de la mortalidad en el año t ,

$\beta(x)$ ajusta la evolución de la mortalidad producida en el año t para la edad x ,

y $\varepsilon(x, t)$ es un término de error aleatorio.

La lógica de esta especificación reside en la generación de un modelo que recoge la mortalidad de una población por dos vías: el paso de los años de calendario y la edad. Para una población, existe una tasa de mortalidad media ($\alpha(x)$) que evoluciona con el paso del tiempo y en función de la edad ($\beta(x)\kappa(t)$).

Por ejemplo, si mediante el modelo se recoge una mejora de la mortalidad en el año 2010 (específicamente, se habla del elemento $\kappa(t = 2010)$), esta mejora de mortalidad es una constante que no afecta de igual forma a todas las edades, por lo que el término $\kappa(t)$ debe ir ajustado por el según la sensibilidad en función de la edad $\beta(x)$, generándose así un vector de mejoras de mortalidad para el año 2010, con tantos componentes como edades modelizadas.

El input para el modelo de Lee Carter es una matriz de tasas de mortalidad, generalmente presentada con edades en filas (*Ages*) y años de calendario en columnas (*Years*):

$$\mu(x, t) = \begin{pmatrix} \mu(x_1, t_1) & \cdots & \mu(x_1, t_{Years}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu(x_{Ages}, t_1) & \cdots & \mu(x_{Ages}, t_{Years}) \end{pmatrix}_{Ages \times Years}$$

Esta matriz puede ser obtenida a partir de la división elemento a elemento de las matrices de expuestos y fallecidos.

El cálculo comienza obteniendo el valor central de la mortalidad por edad. Se computa el primer elemento de la especificación $\alpha(x)$ como la media de la mortalidad para la edad x tal que:

$$\alpha(x) = \frac{\sum_{t=1}^{Years} \log(\mu(x, t))}{Years} \quad (3.2.2)$$

Es decir, la media por filas de la matriz input.

Se crea la matriz de diferencias $A(x, t)$ para cada observación en (x, t) entre la mortalidad media de la edad correspondiente y la observada:

$$A(x, t) = \log(\mu(x, t)) - \alpha(x) \quad (3.2.3)$$

Con esta matriz, mediante la factorización por descomposición de valores singulares, se derivan $\beta(x)$ y $\kappa(t)$.

La descomposición de valores singulares, o SVD por sus siglas en inglés (*Singular Value Decomposition*), es una técnica muy utilizada en álgebra lineal y es de gran utilidad en muchas áreas como la ciencia de datos, el aprendizaje automático, etc.

La SVD de una matriz A es una factorización de la forma

$$A = U\Sigma V^* \tag{3.2.4}$$

Donde:

A es una matriz $x \times t$.

U es una matriz $x \times x$ unitaria (es decir, $UU^* = I$, donde I es la matriz identidad y \cdot^* indica la adjunta de la matriz).

Σ es una matriz $x \times t$ diagonal.

V^* (la conjugada traspuesta de V) es una matriz $t \times t$ unitaria.

La matriz Σ contiene en la diagonal los valores singulares de A , que son las raíces cuadradas de los autovalores de AA^* o de A^*A . Los valores singulares son siempre no negativos y se suelen ordenar en orden decreciente en la matriz Σ .

Las columnas de la matriz U se llaman vectores singulares por la izquierda de A , y las columnas de la matriz V se llaman vectores singulares por la derecha de A .

Una de las propiedades más importantes de la SVD es que siempre existe para cualquier matriz A , independientemente de si A es cuadrada o no, o de si A tiene datos reales o complejos.

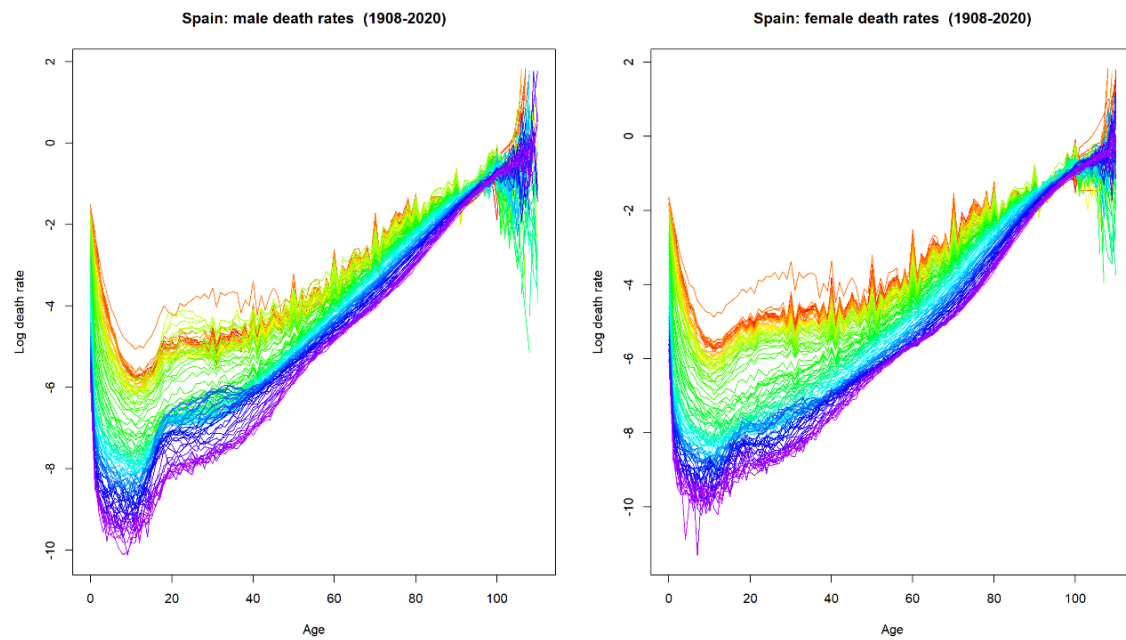
3.2.1. Resultados para la población española

Partiendo de los datos disponibles en la *Human Mortality Database*, se utilizan los publicados para España. En estos registros, se disponen de datos de expuestos y fallecidos para España desde 1908 hasta 2020, ambos inclusive.

En el siguiente gráfico se muestra la evolución de las tasas de mortalidad brutas (la ratio entre fallecidos y expuestos) para cada uno de los períodos (1908–2020) en las edades disponibles (0–110+). Se muestran los datos para hombres y mujeres, aunque de aquí en adelante, por simplicidad, se trabajará tan solo con los datos para hombres.

Figura 3.2.1.1

Mortalidad en logaritmo por sexo y edad en España entre 1908 y 2020



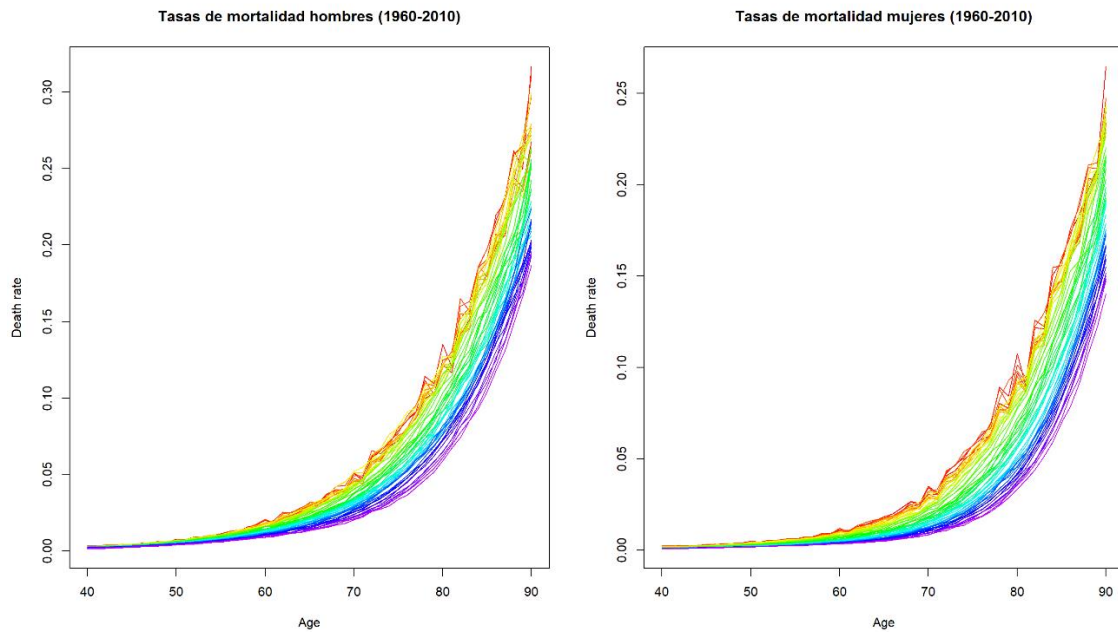
Fuente: elaboración propia

Para la metodología que será utilizada en el contexto del modelo *Piggyback*, se seleccionan las edades comprendidas entre 40 y 90 años, entendiéndose estas edades como las más útiles para el desarrollo de productos de seguros. En cuanto a la dimensión temporal, se escoge el tramo entre 1960 y 2010. Estas dimensiones aseguran que el modelo recoja las tendencias a medio plazo de la mortalidad.

La mortalidad bruta de las dimensiones escogidas, para ambos sexos, es la siguiente:

Figura 3.2.1.2

Mortalidad por sexo y edad en España entre 1908 y 2020



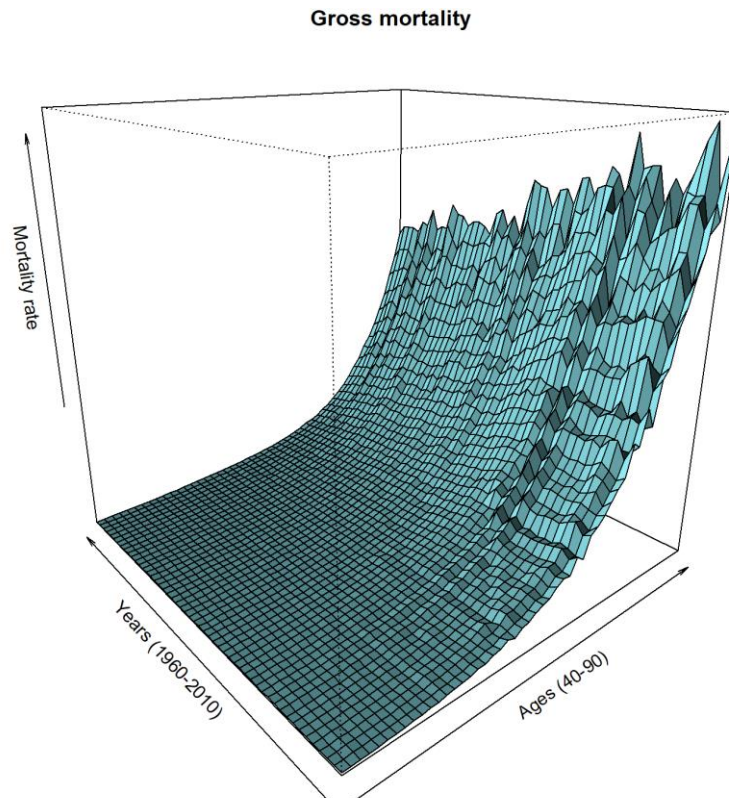
Fuente: elaboración natural

Posteriormente, se utilizarán los años comprendidos entre 2011 y 2019 para realizar algunas pruebas sobre las predicciones del modelo *Piggyback*. Se omite el año 2020 de la modelización por las implicaciones que puede tener en la mortalidad los efectos de la COVID-19.

La mortalidad bruta (*gross mortality*) de las dimensiones elegidas es la siguiente:

Figura 3.2.1.2

Superficie de mortalidad por sexo y edad en España entre 1908 y 2020



Fuente: elaboración propia

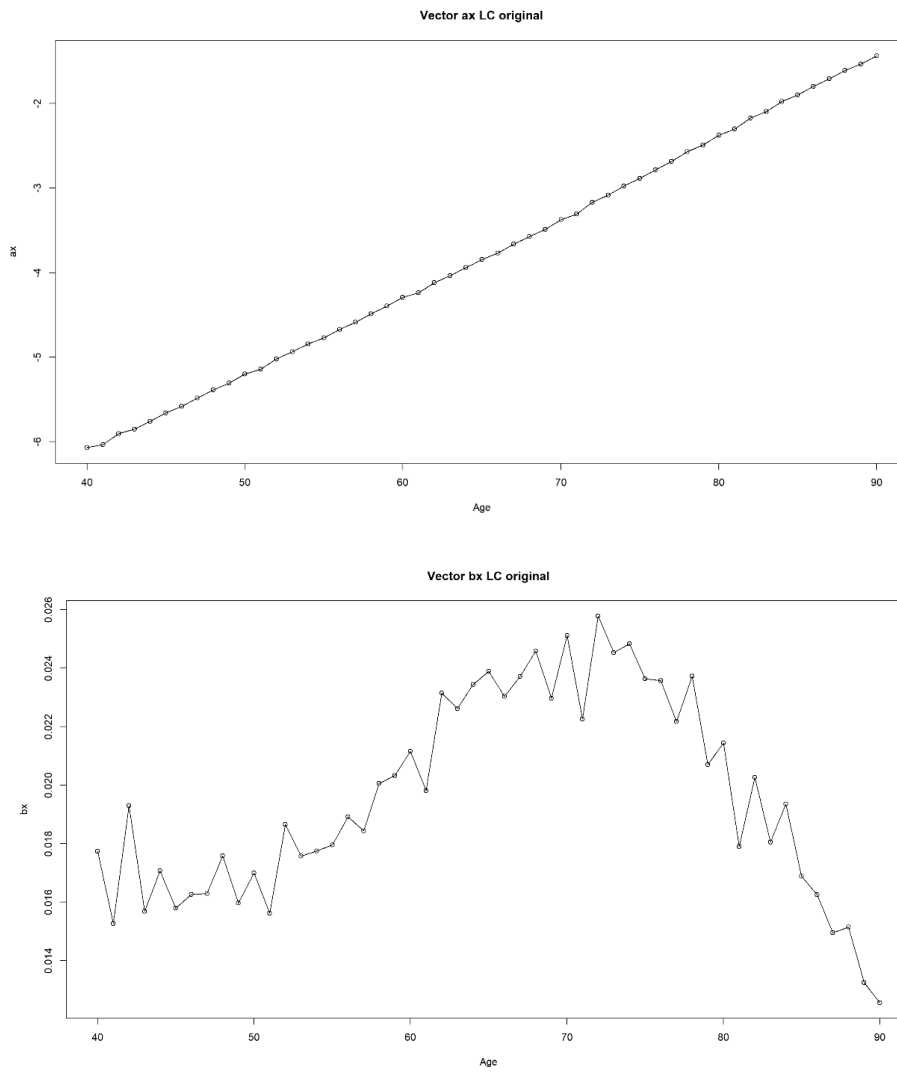
Como se observa en el gráfico anterior, existe una mortalidad creciente por edad (eje *Ages*) que se podría asociar como el análogo al vector de parámetros α_x de Lee-Carter. También se observa, si se dibuja una línea sobre la superficie a lo largo del eje *Years*, un efecto de mejora de mortalidad que se correspondería con el vector de parámetros κ_t . Sin embargo, no se puede asociar este elemento como lineal en función del tiempo para todas las edades. Aquí es donde entra en escena el vector de parámetros β_x , cuyo papel es de contextualizar las mejoras de mortalidad en función de la edad.

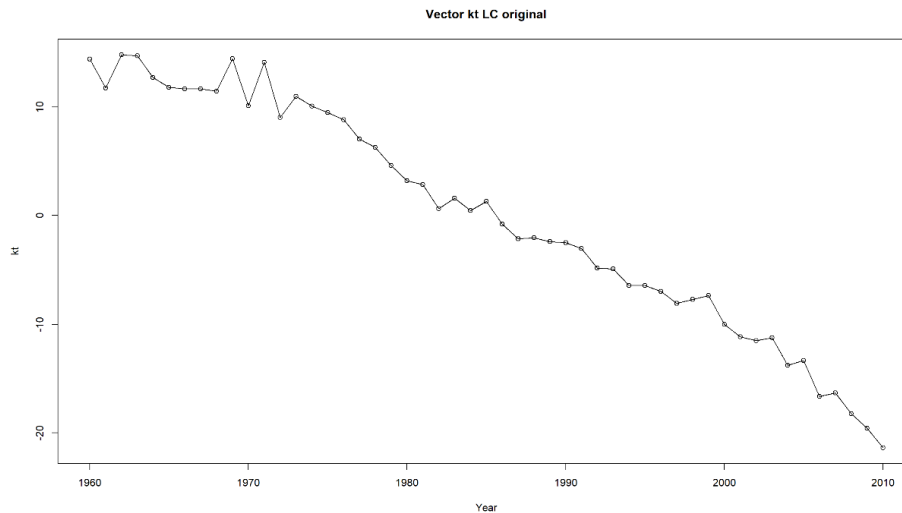
Las mayores tendencias de mortalidad ($\kappa(t)$) se concentran en las edades centrales, teniendo un impacto menor en edades tempranas y avanzadas. Este fenómeno provoca un movimiento de la edad modal de fallecimiento hacia edades más avanzadas con el paso del tiempo.

Los resultados de los parámetros estimados son los siguientes:

Figura 3.2.1.3

Parámetros de Lee-Carter





Fuente: elaboración propia

Por los gráficos anteriores, se puede observar cómo α es una función suave de la edad. Esto es lógico, ya que recoge la media de fallecimiento de cada edad en todos los años de calendario seleccionados (1960–2010).

κ también es una función suave del tiempo, recogiendo la mejora generalizada de la mortalidad en todas las edades. Se observa una fluctuación a principio de los años 70, que se corresponde con un cambio de metodología de cálculo del Instituto Nacional de Estadística.

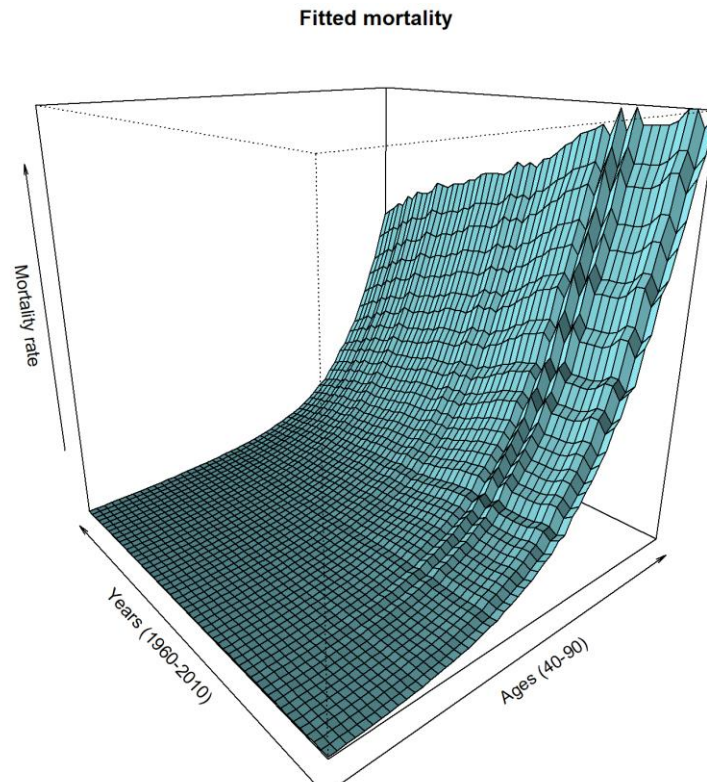
Poniendo el foco en la especificación del modelo, por un lado, se tienen unos componentes invariantes al tiempo (estos son, los términos dependientes de la edad $\alpha(x)$ y $\beta(x)$), y por otro lado el término en función del tiempo $\kappa(t)$. Dada esta composición, una primera aproximación a una predicción de la mortalidad futura puede darse mediante la predicción de la serie $\kappa(t)$ por un modelo ARIMA.

La predicción de la serie $\kappa(t)$ puede integrarse en la especificación de Lee–Carter y obtener así la predicción de la mortalidad para los años de calendario predichos en la serie $\kappa(t)$.

La mortalidad ajustada por el modelo Lee–Carter es la siguiente:

Figura 3.2.1.4

Superficie de mortalidad ajustada por Lee-Carter

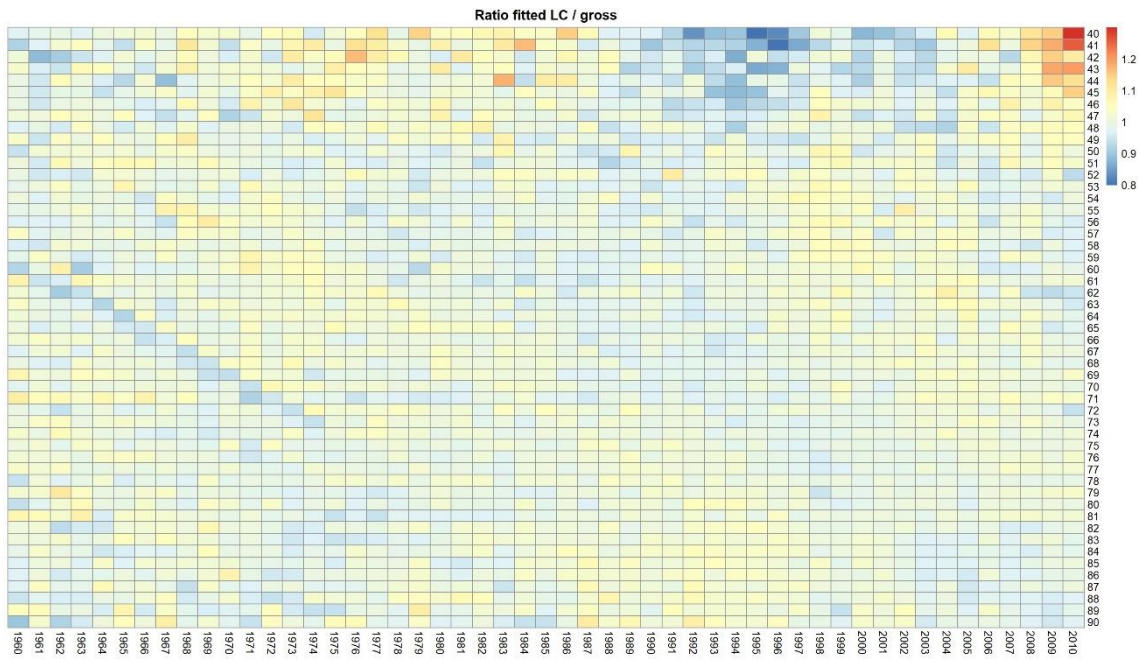


Fuente: elaboración propia

Parece que se ha suavizado ligeramente con respecto a (figura 3.2.1.2). Si se genera el ratio de estimado frente a tasa de mortalidad bruta, se puede dibujar el siguiente mapa:

Figura 3.2.1.5

Mapa de ratios mortalidad ajustada por Lee-Carter y mortalidad bruta



Fuente: elaboración propia

Como se observa, parece que la mayor parte de desviaciones en el ajuste del modelo Lee-Carter se producen para las edades más tempranas del modelo. El modelo se queda siempre dentro del rango del $\pm 20\%$, con la única excepción del dato de tasa de fallecidos con 40 y 41 años en 2010. Parece no haber un desequilibrio hacia la infraestimación o la sobreestimación.

3.3. P-splines

Los penalized splines (P-splines), también conocidos como basis splines (B-splines) penalizados, representan un importante avance en el campo de las técnicas de suavizado en estadística y, más específicamente, en el análisis de la mortalidad. Fueron propuestos por primera vez por Eilers y Marx en 1996 en su artículo "Flexible smoothing with B-splines and penalties" (Eilers y Marx, 1996). Esta técnica se basó en el deseo de superar las limitaciones inherentes en las técnicas de suavizado anteriores y proporcionar una herramienta que ofreciera una mayor flexibilidad en el ajuste de los datos. El objetivo principal de los P-splines es el de proporcionar un control flexible y afinado del suavizado, para evitar la sobreparametrización y el ruido en los datos.

3.3.1. Splines

Un spline es un tipo de interpolación matemática utilizada para crear una curva suave a través de una serie de puntos. Los splines se definen por segmentos de polinomios que están conectados en ciertos puntos, llamados nodos o "*knots*". Los splines se aseguran de que los segmentos de polinomios se conecten suavemente, sin discontinuidades ni cambios abruptos en la pendiente.

Para un conjunto de puntos dados, un spline cúbico $S(x)$ está definido por una función que se compone de polinomios cúbicos, uno para cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Cada polinomio tiene la forma:

$$P_i(x) = a_i + b_i * (x - x_i) + c_i * (x - x_i)^2 + d_i * (x - x_i)^3 \quad (3.3.1.1)$$

Donde los coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i deben ser determinados de tal manera que $S(x)$ sea continua en el intervalo y sus primeras y segundas derivadas también sean continuas.

3.3.2. B-splines

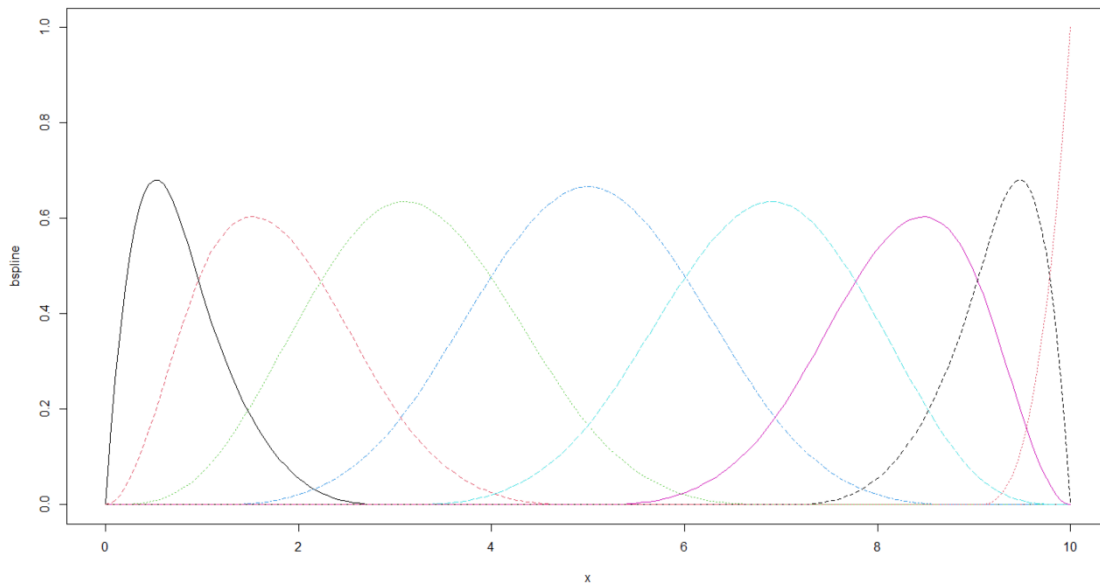
Los basis splines son una extensión de los splines básicos que proporcionan una mayor flexibilidad y control sobre el ajuste de los datos. Son funciones polinómicas por partes definidas sobre una serie de nodos. La localidad de las funciones B-spline (el hecho de que las funciones B-spline son cero en todas partes excepto en el intervalo entre los

nodos adyacentes) las hace particularmente adecuadas para la interpolación y el suavizado de los datos.

En el siguiente gráfico se dibujan las distintas funciones B-splines de grado 3 (cúbicas) para un conjunto de nodos (1, 3, 5, 7, 9):

Figura 3.3.2.1

Conjunto de polinomios B-splines



Fuente: elaboración propia

Los B-splines son una familia de funciones de base, cada una de las cuales es un polinomio definido en uno de los subintervalos. La curva B-spline es una combinación lineal de estas funciones de base. Para un B-spline de grado n con nodos t_i , la función de base $B_{i,n}$ se define recursivamente como:

$$B_{i,1}(x) = 1 \text{ si } t_i \leq x < t_{i+1},$$

$$B_{i,1}(x) = 0 \text{ si } x \notin [t_i, t_{i+1})$$

Agregando los elementos se tiene:

$$B_{i,n}(x) = \frac{(x - t_i)}{(t_{i+n-1} - t_i)} B_{i,n-1}(x) + \frac{(t_{i+n} - x)}{(t_{i+n} - t_{i+1})} B_{i+1,n-1}(x) \quad (3.3.2.1)$$

Entonces, un B-spline es una combinación de estas funciones de base, $B_{i,n}$, ponderada por los coeficientes c_i :

$$S(x) = \sum_i c_i * B_{i,n}(x) \quad (3.3.2.2)$$

A pesar de que los B-splines ofrecen un alto grado de flexibilidad, su utilidad puede verse limitada por la propensión al sobreajuste, especialmente cuando se utilizan muchos nodos. El sobreajuste es un problema que surge cuando un modelo se ajusta demasiado al ruido específico de los datos de entrenamiento, a expensas de su capacidad para generalizar y hacer predicciones precisas en datos nuevos.

3.3.3. Suavización con B-splines y penalizaciones

La solución a este problema fue introducir una penalización que limitara el sobreajuste, lo que llevó a la creación de los P-splines. La idea clave es que se puede mejorar la calidad del suavizado imponiendo una penalización a las segundas diferencias de los coeficientes de los B-splines. Esto significa que la estimación del modelo favorecerá soluciones que varían suavemente de un nodo a otro, mitigando el problema del sobreajuste.

Los P-splines, o penalized B-splines, son una extensión de los B-splines en los que se añade un término de penalización que restringe la suavidad de la curva. En este caso, la expresión para un P-spline puede verse como un problema de minimización, en el que se quiere encontrar la curva que minimiza la suma del error cuadrático y un término de penalización.

La matriz de penalización que se aplica a los datos tiene la forma:

$$P = \Delta' \Delta \quad (3.3.3.1)$$

donde Δ es la matriz de diferencias finitas de segundo orden. La matriz Δ es de tamaño $(N - k) \times N$, donde N es el número de B-splines y k es el grado del B-spline. En el caso más común de B-splines cúbicos ($k = 3$), los elementos de Δ son 1, -2, y 1:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{(N-k) \times N}$$

Analíticamente, se parte de un conjunto de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Entonces, un P-spline se ajusta minimizando:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int [f''(x)]^2 dx, \quad (3.3.3.2)$$

donde $f(x)$ es la función de suavizado representada como una B-spline, $f''(x)$ es la segunda derivada de $f(x)$, y λ es el parámetro de penalización de rugosidad que controla el grado de suavizado.

La primera parte de la ecuación, $\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$, representa la suma de los residuos al cuadrado, que es una medida del ajuste del modelo a los datos. La segunda parte de la ecuación, $\lambda \int [f''(x)]^2 dx$, es el término de penalización que favorece las soluciones más suaves. El parámetro λ controla el equilibrio entre el ajuste a los datos y la suavidad de la función de suavizado. En otras palabras, un valor alto de λ dará lugar a un ajuste más suave, mientras que un valor bajo de λ permitirá que el ajuste sea más flexible.

Los P-splines se utilizan en una amplia variedad de contextos en estadística, y uno de sus usos más importantes es en los modelos de mortalidad. En este contexto, los P-splines se utilizan para suavizar las tasas de mortalidad por edad, que a menudo presentan patrones complejos y variaciones significativas.

Una de las propiedades más valiosas de los P-splines es que, a diferencia de otras técnicas de suavizado, no se requiere la selección de un grado de suavizado óptimo a priori. En cambio, los P-splines automáticamente equilibran la fidelidad a los datos y la suavidad de la curva a través de su función de penalización. Esta es una ventaja significativa en el contexto de los modelos de mortalidad, donde las tasas de mortalidad pueden tener formas complicadas y no lineales.

En los modelos de mortalidad, la suavidad es una propiedad deseable porque refleja la realidad biológica de que las tasas de mortalidad no cambian bruscamente de una edad a otra. Además, las tasas de mortalidad suavizadas son más fáciles de interpretar y de usar en las proyecciones de mortalidad. La naturaleza volátil de las tasas de mortalidad

brutas puede llevar a proyecciones engañosas o inútiles. El suavizado efectivo permite una mejor interpretación y proyección de las tendencias en los datos.

Dicho esto, es importante tener en cuenta que el suavizado no siempre es la respuesta correcta. En algunos casos, puede ser necesario permitir cierta rugosidad en los datos para capturar las variaciones reales en las tasas de mortalidad por edad. Esto resalta la importancia de las técnicas de suavizado como los P-splines, que pueden adaptarse a diferentes niveles de suavidad.

Como se discutió en el apartado anterior, el modelo Lee-Carter es uno de los modelos de mortalidad más utilizados. En el modelo Lee-Carter, las tasas de mortalidad se modelan como una función de la edad y el tiempo. En particular, el logaritmo de la tasa de mortalidad se modela como la suma de un término de edad específico (α) y un término multiplicativo que representa la interacción entre la edad (β) y el tiempo (κ).

En el contexto del modelo Lee-Carter, los P-splines se pueden utilizar para suavizar el vector de parámetros β , es decir, las diferencias en la mortalidad por edad. La suavización del vector β es crucial para garantizar que las proyecciones de mortalidad sean realistas y consistentes. En particular, evita problemas como el cruce de las tasas de mortalidad, donde la tasa de mortalidad para una edad dada podría ser mayor que la tasa de mortalidad para una edad mayor.

La introducción de los P-splines en el modelo Lee-Carter mejora significativamente su capacidad para modelar y proyectar las tasas de mortalidad. El uso de los P-splines permite una mayor flexibilidad en la modelización de las tasas de mortalidad por edad, al mismo tiempo que se mantiene la simplicidad y la interpretabilidad del modelo original.

Una parte fundamental de la aplicación de los P-splines es la selección del parámetro de suavizado λ . Este parámetro controla el equilibrio entre el ajuste de los datos y la suavidad de la función de suavizado, y su elección tiene un impacto significativo en los resultados del modelo.

Existen varias formas de seleccionar el parámetro de suavizado en los P-splines. Una opción común es utilizar un criterio de información, como el Criterio de Información de Akaike (AIC) o el Criterio de Información Bayesiano (BIC). Estos criterios cuantifican el equilibrio entre la complejidad del modelo (en términos del número de parámetros) y el ajuste a los datos. Aunque estos métodos pueden ser efectivos, también pueden ser sensibles a las características particulares de los datos y pueden no siempre seleccionar el grado óptimo de suavizado.

Otra opción es utilizar técnicas de validación cruzada, que implican dividir los datos en un conjunto de entrenamiento y un conjunto de prueba, ajustar el modelo en el conjunto de entrenamiento para varios valores de λ , y luego seleccionar el valor de λ que minimiza el error de predicción en el conjunto de prueba.

Finalmente, también es posible seleccionar el parámetro de suavizado a través de un enfoque bayesiano, donde se coloca una distribución a priori sobre λ y luego se actualiza esta distribución con los datos para obtener una distribución a posteriori. Este enfoque tiene la ventaja de proporcionar una cuantificación de la incertidumbre en la selección del parámetro de suavizado.

En el contexto del modelo de mortalidad Lee-Carter, los P-splines proporcionan un enfoque flexible para modelar la estructura de edad y período de las tasas de mortalidad.

En el modelo Lee-Carter, los P-splines se utilizan para suavizar el componente de edad beta. El componente de edad beta en el modelo Lee-Carter captura los diferentes impactos de las mejoras de mortalidad en las tasas de mortalidad por edad. A medida que mejora la calidad de vida (entre otros muchos factores), la probabilidad de fallecimiento disminuye. Pero las tasas de mortalidad no disminuyen de manera en todas las edades. En lugar de eso, puede haber edades con gran disminución y edades con un impacto menor.

Cuando se aplican los P-splines al componente de edad beta, se está imponiendo un grado de suavidad en este patrón de mortalidad. En lugar de permitir que las tasas de

mortalidad salten de un año a otro, los P-splines suavizan estas tasas, lo que resulta en un patrón de mortalidad que cambia suavemente con la edad.

Esta suavidad tiene una interpretación importante. Significa que se está asumiendo que las tasas de mortalidad cambian gradualmente con la edad, en lugar de cambiar abruptamente. Esta es una suposición razonable que refleja la realidad biológica de que el riesgo de muerte aumenta gradualmente a medida que las personas envejecen.

En términos de modelización, la importancia de tener una beta suavizada conlleva que, en las proyecciones de probabilidad de fallecimiento por edades, estas no se crucen. Es decir, a partir de los 10–15 años (donde se encuentra el mínimo de probabilidad de fallecimiento de forma general en las poblaciones), un año más de edad supone un incremento en la probabilidad de fallecimiento.

3.3.4. Utilidad de la suavización en los modelos de mortalidad

Para ilustrar el problema anterior, se presentan proyecciones de la probabilidad de fallecimiento sin realizar suavizado del vector beta. Los datos utilizados son los disponibles en la *Human Mortality Database* para España, modelizando por Lee–Carter los años desde 1960 hasta 2010 y las edades comprendidas entre los 40 y los 90. Se proyecta el vector de parámetros kappa mediante la función `auto.arima()` en para R para 20 períodos: desde 2011 hasta 2030.

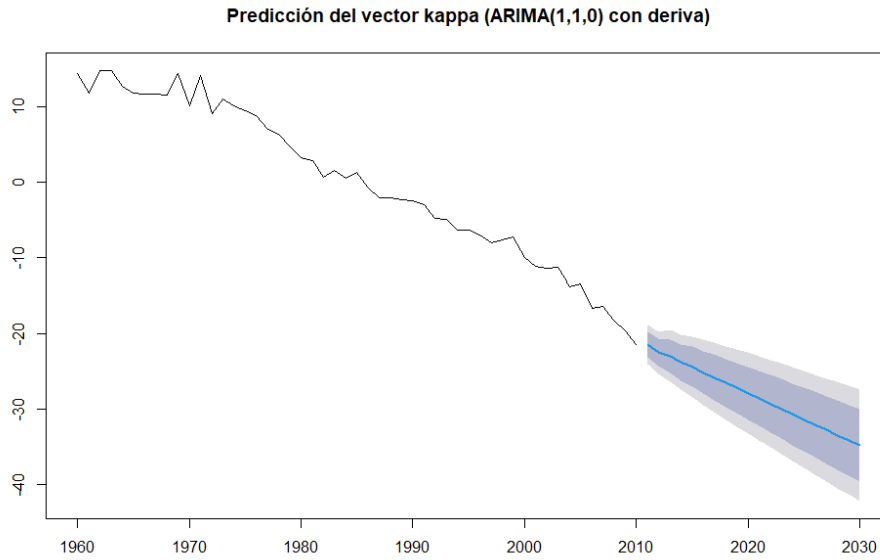
Se hace uso de una función integrada en R por agilidad, ya que la proyección del vector kappa no es el tema central de la tesis. Por otro lado, las proyecciones de este vector no suelen presentar mucha dificultad, al soler tratarse de series temporales suaves y con una tendencia generalmente clara. Para los datos utilizados, se obtiene un modelo ARIMA(1,1,0) con deriva con los siguientes valores (desviaciones estándar entre paréntesis):

$$\phi = -0.6221 (0.1103)$$

$$Drift = -0.6926 (0.1135)$$

Figura 3.3.4.1

Proyección de tendencia de mortalidad 2011-2030

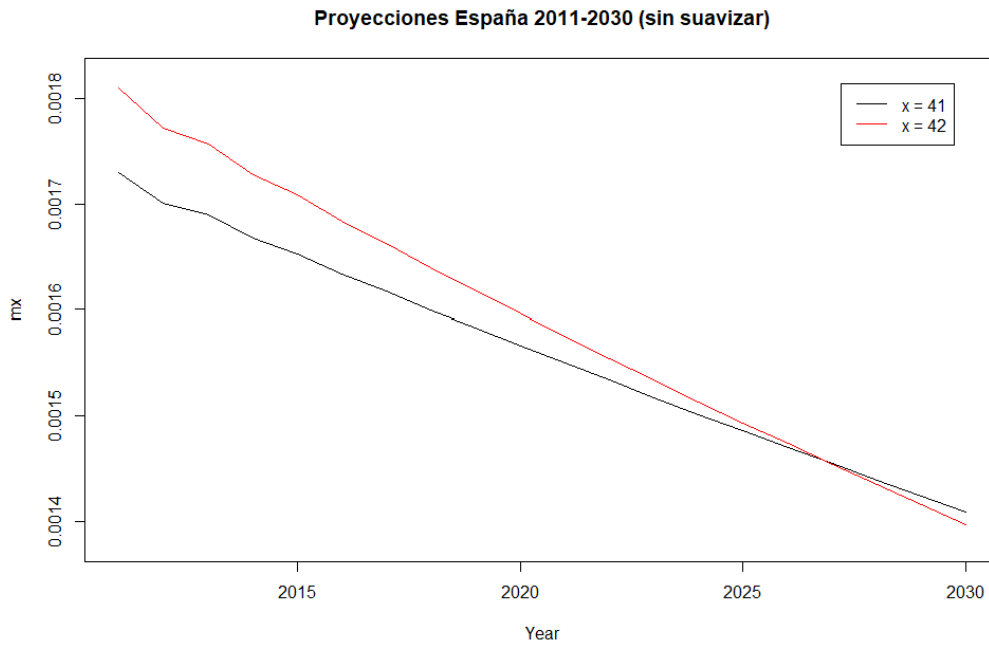


Fuente: elaboración propia

Las proyecciones de mortalidad para las edades 41 y 42 son las siguientes:

Figura 3.3.4.2

Proyección de tendencia de mortalidad sin suavizar parámetro beta 2011-2030



Fuente: elaboración propia

Como se observa en el gráfico, no tener el vector de parámetros beta suavizado influye de forma que se obtienen inconsistencias entre las probabilidades de fallecimiento para distintas edades. Concretamente, según el modelo, a partir de 2027, la probabilidad de fallecer a la edad 41 es mayor que la probabilidad de fallecer a la edad 42.

Esta inconsistencia, a la hora de generar tablas de mortalidad proyectadas, hace que este modelo Lee–Carter sin suavizar no pueda ser utilizado en modelos internos para ejercicios de práctica actuarial como el cálculo de reservas o la tarificación.

Una aplicación práctica de los P–splines reside en suavizar la beta del modelo Lee–Carter. Sin embargo, no pueden realizarse suavizaciones directas en el vector, ya que esto generaría una pérdida total del sentido del modelo.

Para esta suavización, es necesario tener en cuenta el impacto de los cambios de valor de beta con respecto a alpha y kappa. En el siguiente apartado se explica un algoritmo desarrollado por Delwarde, Denuit y Eiders (Delwarde et al., 2007) que aborda este problema.

3.4. Algoritmo de suavización DDE

Como se concluyó en el apartado anterior, a pesar de que los P-splines son una herramienta muy útil a la hora de suavizar, no es posible aplicar su metodología directamente sobre los elementos del vector β .

En 2007, Antoine Delwarde, Michel Denuit y Paul Eilers publican un paper titulado *“Smoothing the Lee-Carter and Poisson log-bilinear models for mortality forecasting: a penalized log-likelihood approach”*. En este artículo, los autores proponen un algoritmo iterativo que permite suavizar los parámetros beta haciendo los ajustes pertinentes en los otros dos conjuntos de parámetros.

Los autores, en esencia, proponen un algoritmo que estima los parámetros de Lee-Carter, aunque añadiendo una penalización de rugosidad de beta a sus estimaciones.

Se utiliza el método de mínimos cuadrados penalizados para la estimación. Los autores consideran oportuno utilizar como valores iniciales de las iteraciones, los valores obtenidos por la metodología tradicional del modelo Lee-Carter.

Los autores proponen la siguiente función objetivo:

$$\sum_x \sum_t (\log(\hat{\mu}_{x,t}) - \alpha_x - \beta_x * \kappa_t)^2 + \beta_x' * P_\beta * \beta_x \quad (3.4.1)$$

Donde:

$$P_\beta = \lambda_\beta * \Delta' * \Delta$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{(x-2) \times x}$$

El elemento x se refiere a la dimensión de edades: $x_{max} - x_{min} + 1$. Recordando del apartado en el que se trataron los P-splines, Δ se corresponde con la matriz de diferencias finitas de segundo orden. Aquí se utiliza el número de edades como el número de nodos.

Como se observa en la función objetivo (ecuación 3.4.1), existe una relación de intercambio a la hora de ajustar el modelo entre la bondad del ajuste $\log(\hat{\mu}_{x,t}) - \alpha_x - \beta_x * \kappa_t)^2$ y una penalización por la rugosidad del vector beta $\beta_x' * P_\beta * \beta_x$. Buscando la minimización, se consigue que las iteraciones consigan suavizar la beta sin perder el significado del modelo, es decir, el ajuste entre la mortalidad real y la estimada.

El papel del parámetro lambda es el de penalización de la rugosidad. Se tiene que cuando $\lambda \rightarrow \infty$ la suavización obtenida es una función lineal. Esto llevaría a una penalización de rugosidad igual a 0. Sin embargo, se perdería el sentido del modelo por completo, así que la bondad del ajuste no permitirá esta elección de parámetro.

Recordando el apartado anterior en el que se hablaba sobre los P-splines, se mencionó que la elección del parámetro de suavización se puede elegir por varias vías:

- a. Mediante criterios de información: AIC y BIC
- b. A través de validación cruzada
- c. Por enfoque bayesiano

Los autores en este caso eligen la validación cruzada. Concretamente, *Leave One Out Cross Validation* (LOOCV). LOOCV es un tipo de validación cruzada que consiste en estimar el modelo eliminando un dato individual, para luego medir el error del ajuste sobre ese dato eliminado.

En la práctica, se erige un vector de candidatos a parámetro de suavización λ . Se estima el modelo utilizando LOOCV para cada uno de los parámetros candidatos y se calcula el error. Como realizar este proceso es muy costoso computacionalmente, ya que supondría recalcularse el modelo un total de $(2010 - 1960 + 1) \times (90 - 40 + 1) = 2.601$. Se hace una búsqueda en cuadrícula (*grid search*). Esto es, se aplica LOOCV no eliminando todos los datos, si no para ciertos datos, separados uniformemente:

$$\begin{pmatrix} \odot & \dots & \odot & \dots & \odot \\ \vdots & \diagdown & \vdots & \diagdown & \vdots \\ \odot & \dots & \odot & \dots & \odot \\ \vdots & \diagdown & \vdots & \diagdown & \vdots \\ \odot & \dots & \odot & \dots & \odot \end{pmatrix}$$

La función de error es la siguiente:

$$e_{xt,\lambda_\beta} = \log(\hat{\mu}_{x,t}) - \hat{\alpha}_{x,\lambda_\beta}^{-(x,t)} - \hat{\beta}_{x,\lambda_\beta}^{-(x,t)} \hat{\kappa}_{t,\lambda_\beta}^{-(x,t)} \quad (3.4.2)$$

Donde $\hat{\alpha}_{x,\lambda_\beta}^{-(x,t)}$, $\hat{\beta}_{x,\lambda_\beta}^{-(x,t)}$ y $\hat{\kappa}_{t,\lambda_\beta}^{-(x,t)}$ son los parámetros estimados, y los superíndices $-(x,t)$ se refieren al elemento eliminado para LOOCV.

Por tanto, el valor óptimo de λ_β se obtiene minimizando:

$$error = \sum_x \sum_t e_{xt,\lambda_\beta}^2 \quad (3.4.3)$$

Finalmente, el parámetro de penalización utilizado es $\lambda = 1000$.

3.4.1 Metodología del suavizador

El algoritmo de DDE es una aplicación de los métodos de Newton–Rapshon. Es iterativo, por lo que se van creando secuencias de parámetros en cada iteración i de modo que $\hat{\alpha}^{(i)}$, $\hat{\beta}^{(i)}$ y $\hat{\kappa}^{(i)}$ hacen referencia a los parámetros estimados en la iteración i -ésima.

La construcción se realiza de la siguiente forma (Delwarde et al. 2007):

1. Se utilizan tres matrices y tres vectores columna auxiliares:

$C_\alpha^{(i)}$: matriz diagonal cuadrada con dimensión igual al número de edades

$C_\kappa^{(i)}$: matriz diagonal cuadrada con dimensión igual al número de años de calendario

$C_\beta^{(i)}$: matriz diagonal cuadrada con dimensión igual al número de edades

$r_\alpha^{(i)}$: vector columna con longitud igual al número de edades

$r_\kappa^{(i)}$: vector columna con longitud igual al número de años de calendario

$r_\beta^{(i)}$: vector columna con longitud igual al número de edades

2. Se comienza la iteración para el vector α , empezando por asignar valores a los elementos auxiliares:

$$C_\alpha^{(i)} = (t_{max} - t_{min} + 1) \quad (3.4.1.1)$$

$$r_\alpha^{(i)} = \sum_t (\log(\hat{\mu}_{x,t}) - \hat{\alpha}_x^{(i)} - \hat{\beta}_x^{(i)} \hat{\kappa}_t^{(i)}) \quad (3.4.1.2)$$

- El nuevo valor de α se puede actualizar mediante la siguiente igualdad, obteniéndose el valor en la iteración $i + 1$:

$$C_{\alpha}^{(i)} * \hat{\alpha}_x^{(i+1)} = C_{\alpha}^{(i)} * \hat{\alpha}_x^{(i)} + r_{\alpha}^{(i)} \quad (3.4.1.3)$$

3. En el siguiente paso ya se recoge el valor actualizado de α . Se continúa con la actualización del vector κ y la asignación de valores a sus elementos auxiliares:

$$C_{\kappa}^{(i)} = \sum_x (\hat{\beta}_x^{(i)})^2 \quad (3.4.1.4)$$

$$r_{\kappa}^{(i)} = \sum_x \hat{\beta}_x^{(i)} (\log(\hat{\mu}_{x,t}) - \hat{\alpha}_x^{(i+1)} - \hat{\beta}_x^{(i)} \hat{\kappa}_t^{(i)}) \quad (3.4.1.5)$$

- El nuevo valor de κ se puede actualizar mediante la siguiente igualdad, obteniéndose el valor en la iteración $i + 1$:

$$C_{\kappa}^{(i)} * \hat{\kappa}_t^{(i+1)} = C_{\kappa}^{(i)} * \hat{\kappa}_t^{(i)} + r_{\kappa}^{(i)} \quad (3.4.1.6)$$

4. En el último paso del algoritmo se utilizan los valores actualizados de α y κ . Se finaliza la primera iteración con la actualización del vector β y la asignación de valores a sus elementos auxiliares:

$$C_{\beta}^{(i)} = \sum_t (\hat{\kappa}_t^{(i+1)})^2 \quad (3.4.1.7)$$

$$r_{\beta}^{(i)} = \sum_t \hat{\kappa}_t^{(i+1)} (\log(\hat{\mu}_{x,t}) - \hat{\alpha}_x^{(i+1)} - \hat{\beta}_x^{(i)} \hat{\kappa}_t^{(i+1)}) \quad (3.4.1.8)$$

- El nuevo valor de β se puede actualizar mediante la siguiente igualdad, obteniéndose el valor del último vector de parámetros en la iteración $i + 1$:

$$(C_{\beta}^{(i)} + \text{diag}(P_{\beta})) \hat{\beta}_x^{(i+1)} = (C_{\beta}^{(i)} + \text{diag}(P_{\beta}) - P_{\beta}) \hat{\beta}_x^{(i)} + r_{\beta}^{(i)} \quad (3.4.1.9)$$

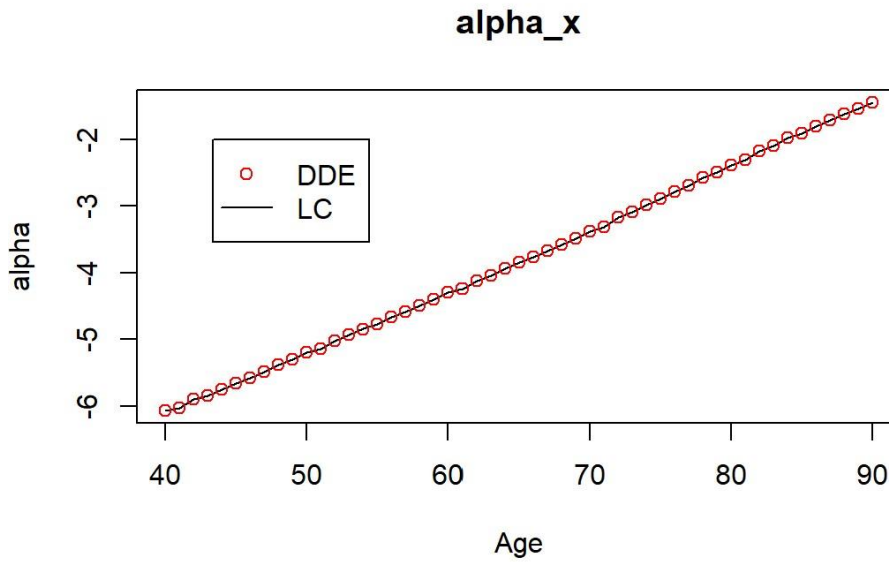
Donde el operador $\text{diag}(\cdot)$ hace los elementos fuera de la diagonal principal de una matriz iguales a 0.

Tras unas pocas iteraciones, se consigue la suavización deseada.

Se muestran los resultados de los parámetros suavizados:

Figura 3.4.1.1

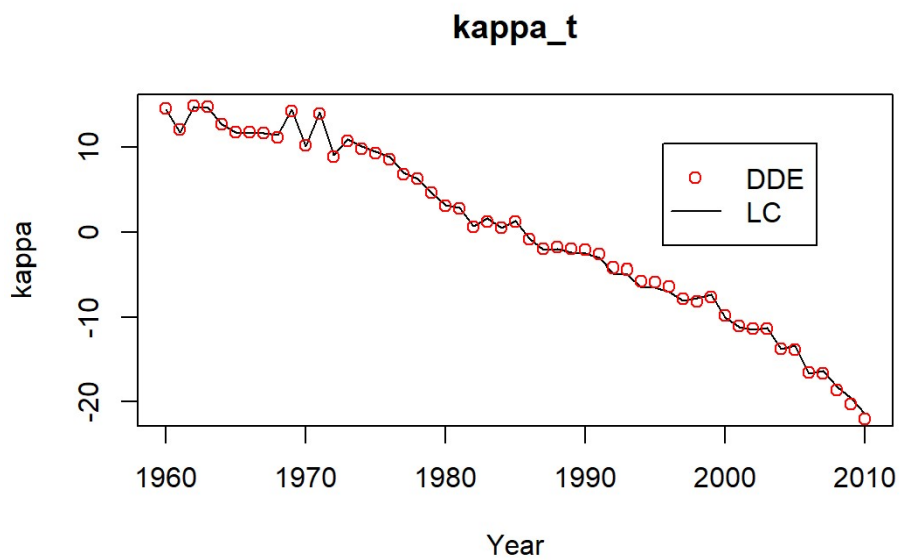
Parámetro alpha original y suavizado



Fuente: elaboración propia

Figura 3.4.1.2

Parámetro kappa original y suavizado



Fuente: elaboración propia

Como se observa, los cambios en los parámetros α y κ son poco significativos.

Figura 3.4.1.3

Parámetro beta original y suavizado

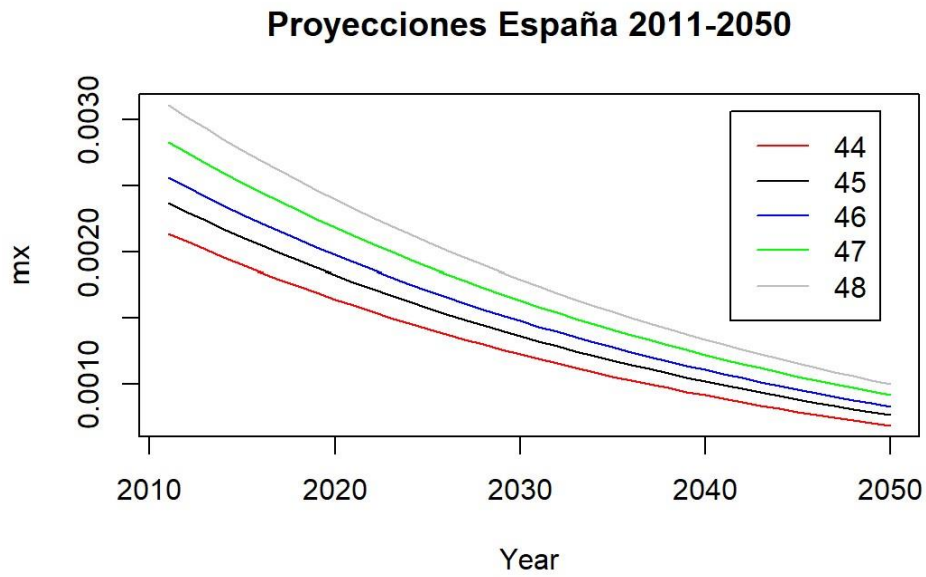


Fuente: elaboración propia

El impacto en el vector β es bastante efectivo, consiguiendo la suavización deseada. Ahora, las proyecciones de mortalidad de distintas edades serán consistentes, evitando los cruces entre edades a lo largo del tiempo:

Figura 3.4.1.4

Parámetro alpha original y suavizado



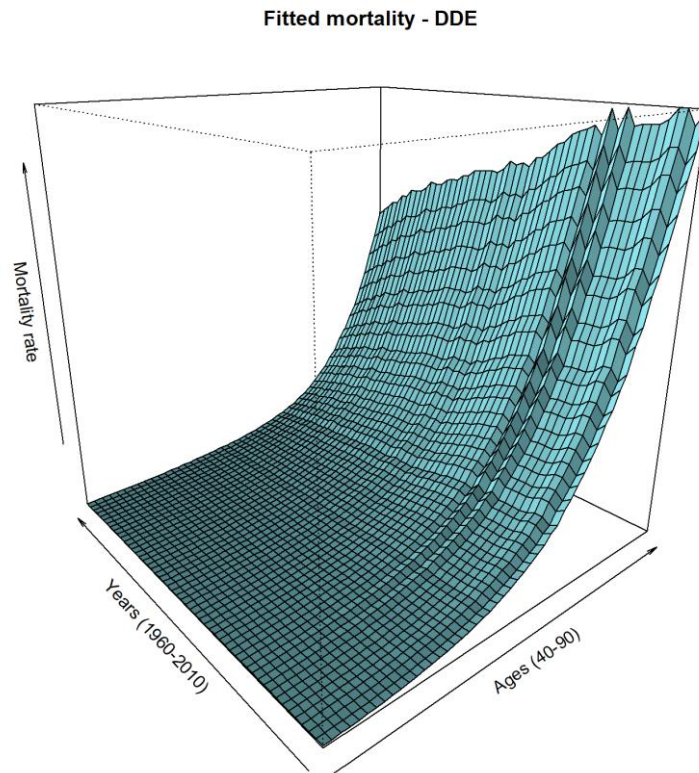
Fuente: elaboración propia

Con la suavización realizada se consigue, al menos hasta 2050, que las proyecciones sean robustas. Esto permitirá a los actuarios de la compañía generar tablas de mortalidad proyectadas para ejercicios tanto de tarificación como de reservas, consiguiendo unas cifras consistentes y plausibles.

Se grafica la superficie de la mortalidad ajustada por el modelo DDE:

Figura 3.4.1.5

Superficie de mortalidad ajustada por Lee-Carter suavizado

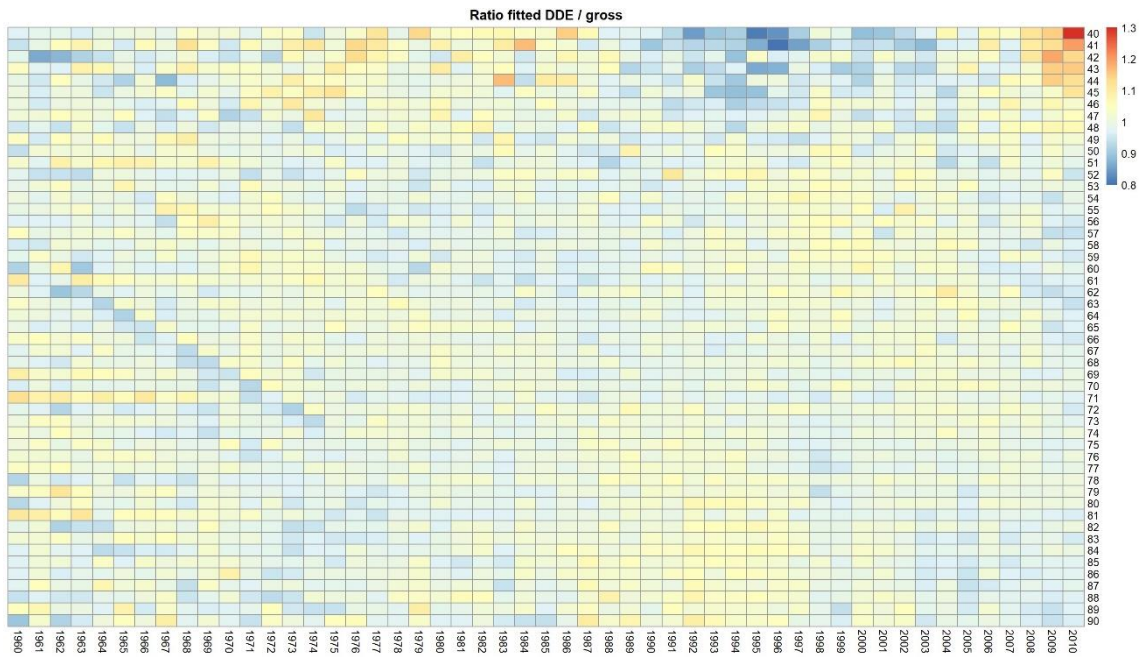


Fuente: elaboración propia

El mapa de infraestimaciones y sobreestimaciones es el siguiente:

Figura 3.4.1.6

Mapa de ratios mortalidad ajustada por Lee-Carter suavizado y mortalidad bruta



Fuente: elaboración propia

Como se observa en el mapa anterior, la estructura de errores es igual a la del modelo Lee-Carter (figura 3.2.1.5). De nuevo, el margen de sobreestimación está en el 20%, al igual que el margen de infraestimación. Igual que en el modelo Lee-Carter, se tiene la excepción de la edad 40 en 2010, que presenta una sobreestimación del 30%.

3.5. Modelos Lineales Generalizados (GLM)

Como se comentó en la explicación de los pasos del modelo *Piggyback*, los GLM toman un papel fundamental en la metodología. Para medir la relación entre la población base y la cartera asegurada, se utilizará la estimación mediante GLM.

Los Modelos Lineales Generalizados (GLM por sus siglas en inglés) representan una extensión de los modelos lineales tradicionales, como la regresión lineal, que permiten manejar una gama más amplia de tipos de datos y estructuras de correlación. Fueron introducidos por Nelder y Wedderburn en 1972 y han tenido un profundo impacto en la estadística y sus aplicaciones, incluyendo la modelización actuarial.

Los GLM se caracterizan por tres componentes:

1. Componente aleatorio: Las respuestas y_i (por ejemplo, la variable probabilidad de fallecimiento) que se supone que sigue alguna distribución.
2. Componente sistemático: Este componente representa la parte del modelo que es una combinación lineal de los predictores, de la forma

$$\eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p \quad (3.5.1)$$

3. Función de enlace: La función de enlace proporciona la relación entre el componente aleatorio y el componente sistemático. Es decir:

$$g(\mu_i) = \eta_i \quad (3.5.2)$$

Donde $g(\cdot)$ es la función de enlace y μ_i es el valor esperado de y_i .

En el contexto actuarial, los GLM son extremadamente útiles para modelar distintas variables de interés, ya que permiten manejar diferentes tipos de datos (como datos de conteo, binarios, continuos, etc.) y ajustar la complejidad del modelo a las características de los datos.

Una aplicación muy recurrente es, en el contexto de modelización de mortalidad, considerar un GLM suponiendo que la ocurrencia de muerte en un asegurado se distribuye como una binomial. La función de enlace a utilizar puede ser logit, y el

resultado de esto sería una regresión logística. Los predictores en el modelo podrían incluir la edad, el sexo, el estado de salud y otros factores que se espera que afecten a la mortalidad.

El modelo resultante proporcionaría estimaciones de las probabilidades de mortalidad para los asegurados en función de sus características individuales. Este modelo de mortalidad podría utilizarse para parametrizar decisiones sobre tarificación de pólizas o reserva de capital.

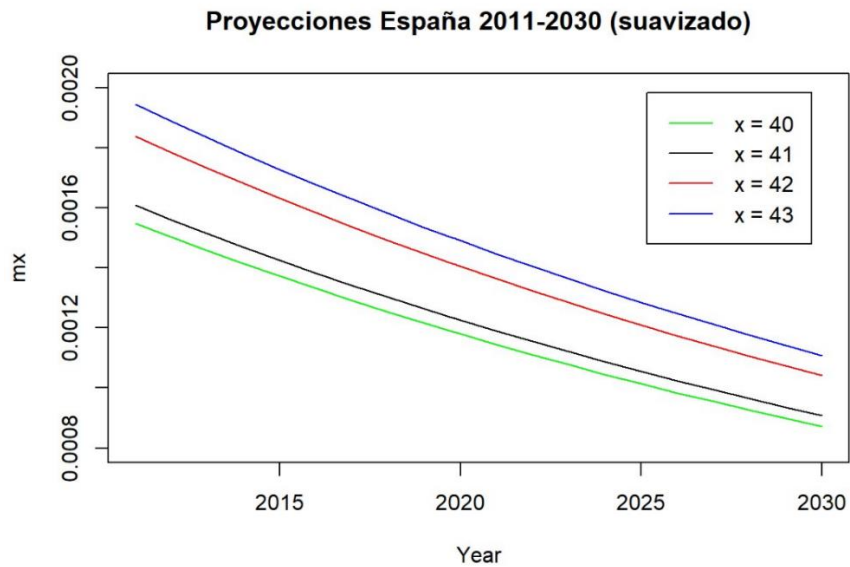
Los GLM son una herramienta valiosa para los actuarios, ya que proporcionan un marco flexible y robusto para la modelización de distintos tipos de datos. Su capacidad para manejar estructuras de correlación complejas, la flexibilidad en la elección de la distribución de los datos y la función de enlace, y la interpretación clara de los coeficientes del modelo son algunas de las características que los hacen especialmente útiles en la práctica actuarial.

En el contexto que se discute en este trabajo, el modelo *Piggyback* hace uso de los GLM para modelizar la distancia en términos de mortalidad entre la población de referencia y la cartera.

Se ha visto en apartados anteriores que la mortalidad proyectada en el tiempo de varias edades parece darse como paralelas:

Figura 3.5.1

Proyecciones de mortalidad Lee-Carter suavizado



Fuente: elaboración propia

Esta propiedad es esencial para la metodología. El paralelismo en la mortalidad entre las edades estudiadas es un requisito para que los resultados del GLM sean aplicables.

3.5.1. Aplicación en el modelo *Piggyback*

El modelo propone la hipótesis de que la variable número de fallecidos de la cartera sigue una distribución de Poisson con esperanza igual al número de expuestos por su probabilidad de fallecimiento:

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t} * \mu_{x,t})$$

Esta asunción es bastante lógica. Tomando como constante del modelo a la población española modelada por Lee-Carter, se puede obtener la *gap function* a través de GLM. La *gap function* tiene la forma:

$$gap_x = d_0 + d_1 * x \tag{3.5.1.1}$$

De modo que se establece una distancia constante entre la mortalidad de la población española y la cartera (d_0) y otro parámetro dependiente de la edad (d_1).

Los resultados de esta estimación se obtienen en R a partir del siguiente comando:

```
glm(D_portfolio ~ X + offset(log(E_portfolio)) + offset(Fitted_d_población), family = poisson)
```

Donde:

$D_{portfolio}$ son los fallecidos de la cartera, vectorizado

$E_{portfolio}$ son los expuestos de la cartera, vectorizado

X es un vector donde se enlaza la edad de exposición y fallecimiento de cada datos

$Fitted_{población}$ es la probabilidad de fallecimiento ajustada por DDE de la población española

Los resultados obtenidos para los parámetros son los siguientes:

$$d_0 = -1.010311$$

$$d_1 = 0.0118077$$

4. Resultados

El modelo *Piggyback*, como se ha explicado a lo largo de todo el ejercicio, permite realizar predicciones de probabilidad de fallecimiento en una cartera con pocos asegurados.

Todo el ejercicio se ha realizado para tratar de predecir la mortalidad de la población islandesa (considerada como la cartera pequeña), aproximándola a la población española (considerada como la población de referencia). Las razones de esta elección se dieron en la introducción del trabajo, aunque principalmente se sustentan en la hipótesis de que son poblaciones que pueden ser relacionadas. Aún las particularidades propias de cada una, se considera que los patrones y mejoras de mortalidad de ambas poblaciones se asemejan en gran medida.

Una vez que se obtuvieron las estimaciones de probabilidad de fallecimiento para la población española, se procedió a aplicar el modelo a la cartera pequeña de interés. Para ello, se recopiló una muestra representativa de individuos de la cartera: población entre 40 y 90 años, con registros recogidos entre el año 2000 y 2010. Estos datos se introdujeron en el modelo predictivo previamente desarrollado a través de GLM, obteniendo así las estimaciones de probabilidad de fallecimiento para cada individuo en la cartera.

Se recuerda que las predicciones de mortalidad se realizan a partir de la siguiente especificación:

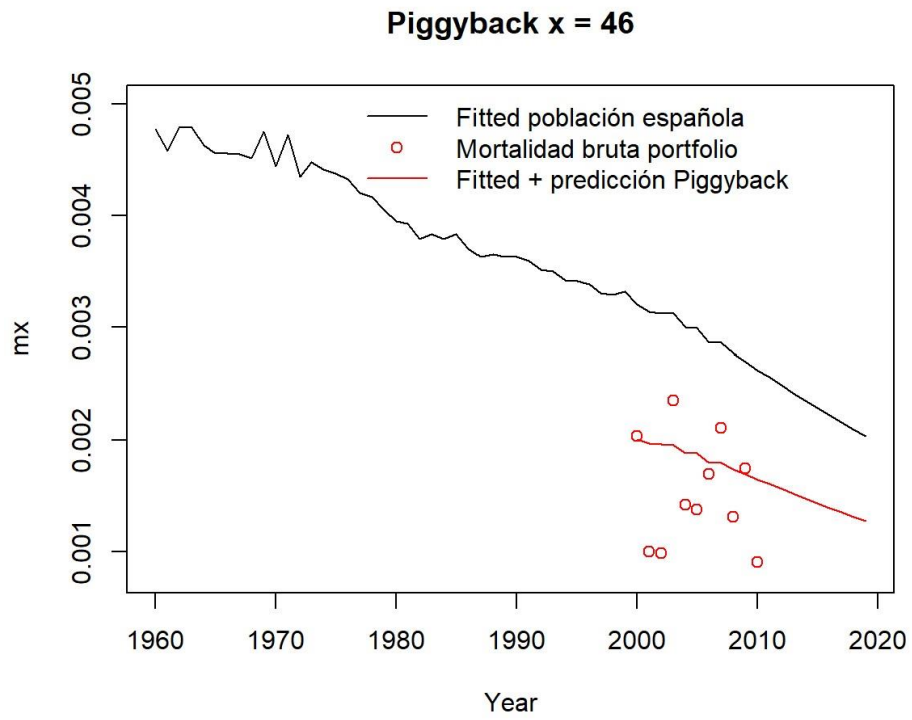
$$\widehat{\log m_x} = \alpha_x^{Pob} + \beta_x^{Pob} \kappa_t^{Pob} + d_0 + d_1 x \quad (4.1)$$

Al comparar las estimaciones de probabilidad de fallecimiento de la cartera pequeña con las tasas reales de mortalidad observadas, se encontró una correspondencia satisfactoria. Esto indica que el modelo propuesto es capaz de proporcionar estimaciones precisas incluso en contextos donde la disponibilidad de datos es limitada.

A continuación, se muestran gráficamente los resultados obtenidos para algunas de las edades analizadas:

Figura 4.1

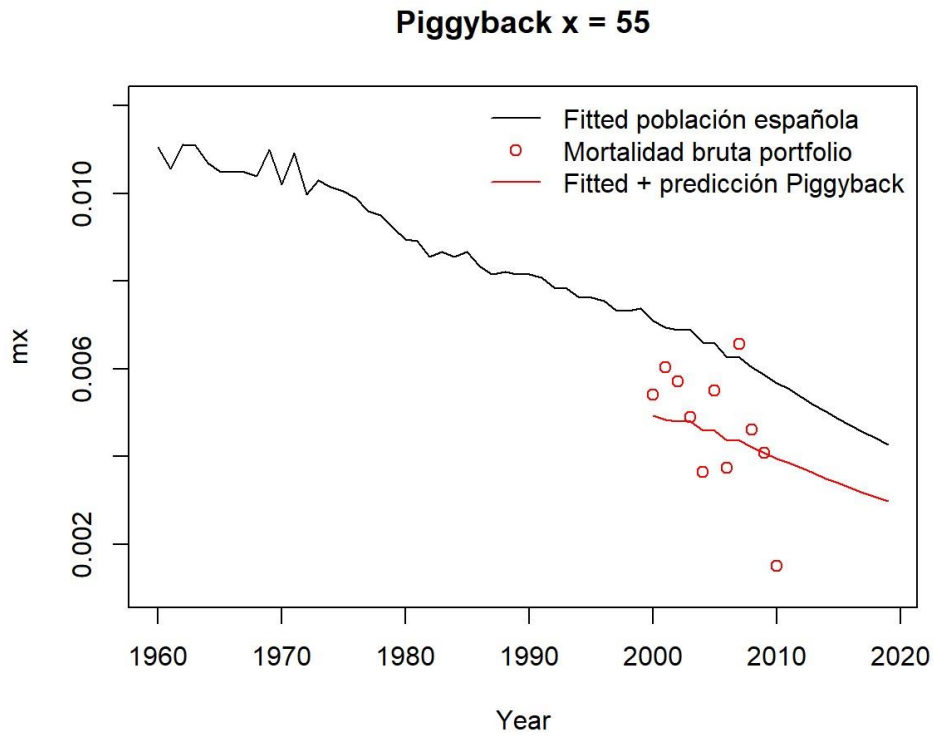
Ajuste y resultados del modelo Piggyback para edad 46



Fuente: elaboración propia

Figura 4.2

Ajuste y resultados del modelo Piggyback para edad 55

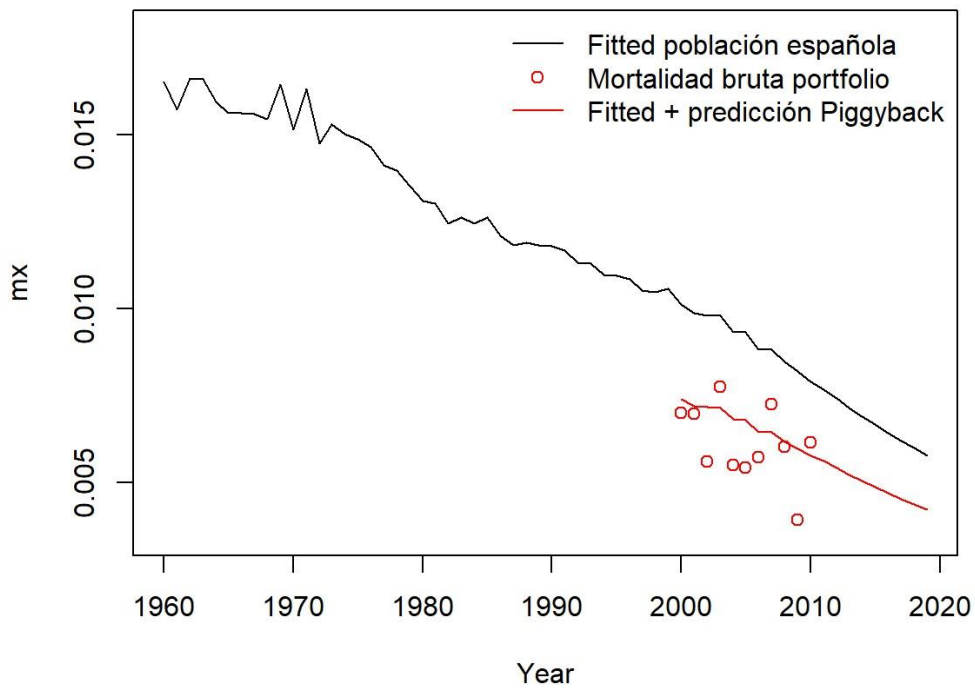


Fuente: elaboración propia

Figura 4.3

Ajuste y resultados del modelo Piggyback para edad 59

Piggyback x = 59

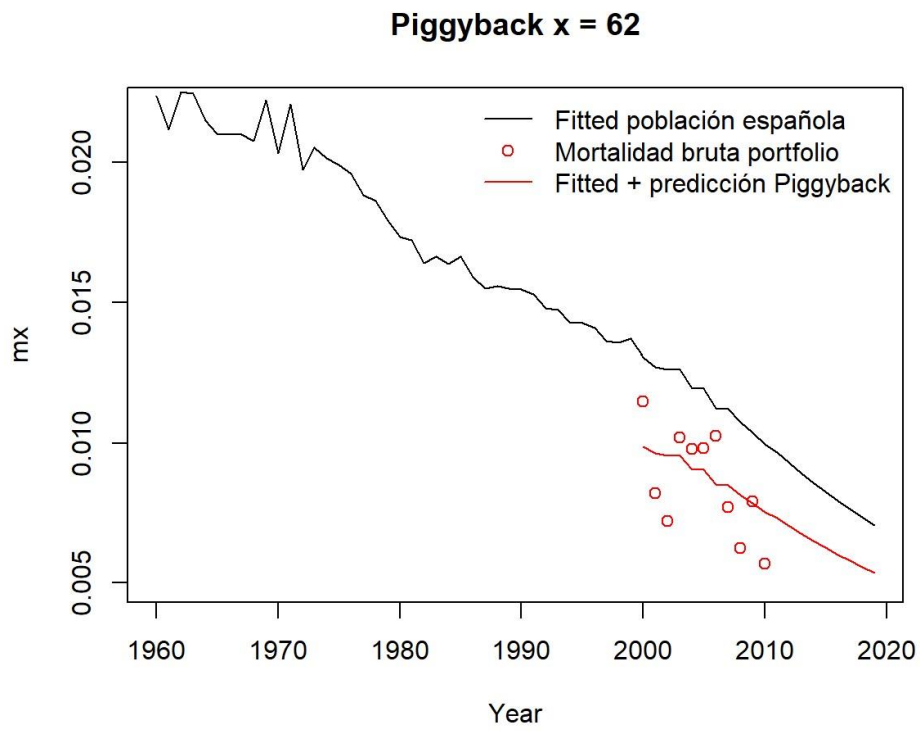


Fuente: elaboración propia

Como se puede observar, el modelo consigue recoger una estimación de la tasa central de mortalidad para la cartera, aunque la mortalidad real bruta refleja la baja cantidad de asegurados. Las oscilaciones alrededor de la tasa central se hacen notar, sin embargo, la captura de la mortalidad del modelo para tan sólo contar con una experiencia de 11 años de calendario se ajusta bastante.

Figura 4.4

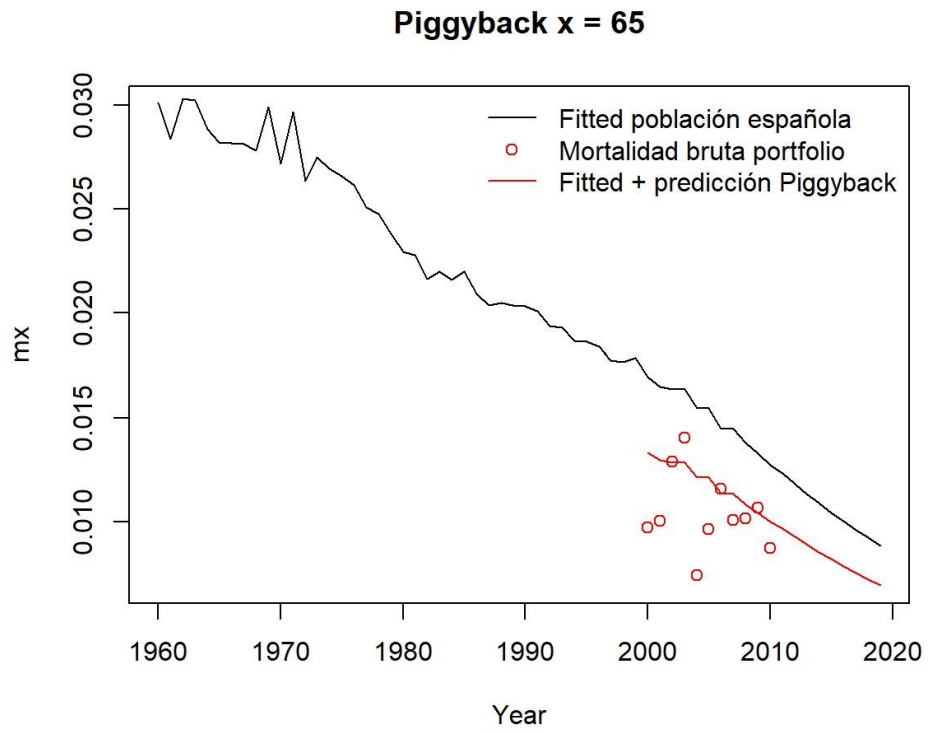
Ajuste y resultados del modelo Piggyback para edad 62



Fuente: elaboración propia

Figura 4.5

Ajuste y resultados del modelo Piggyback para edad 65

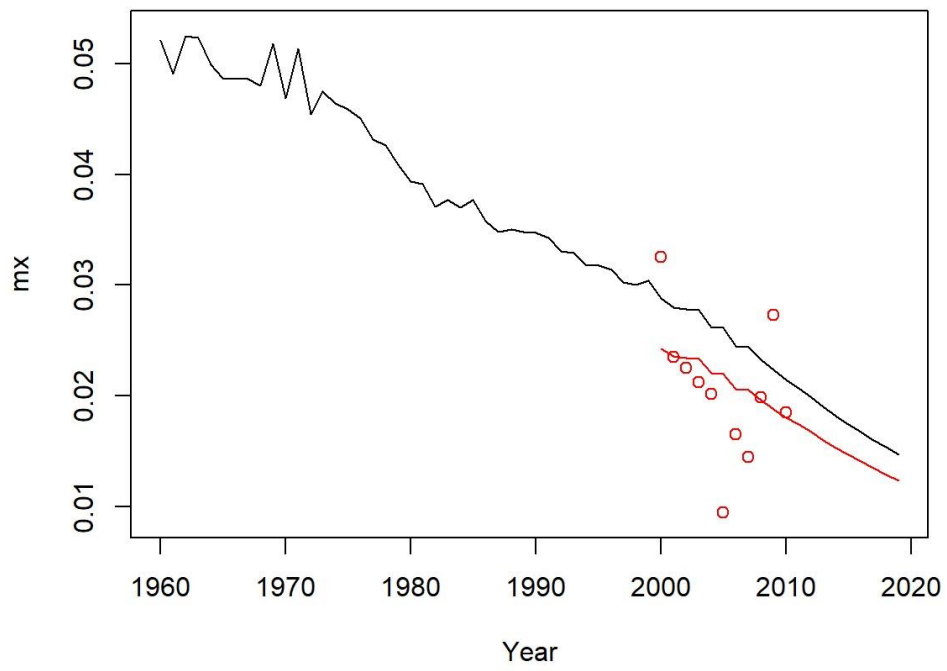


Fuente: elaboración propia

Figura 4.6

Ajuste y resultados del modelo Piggyback para edad 71

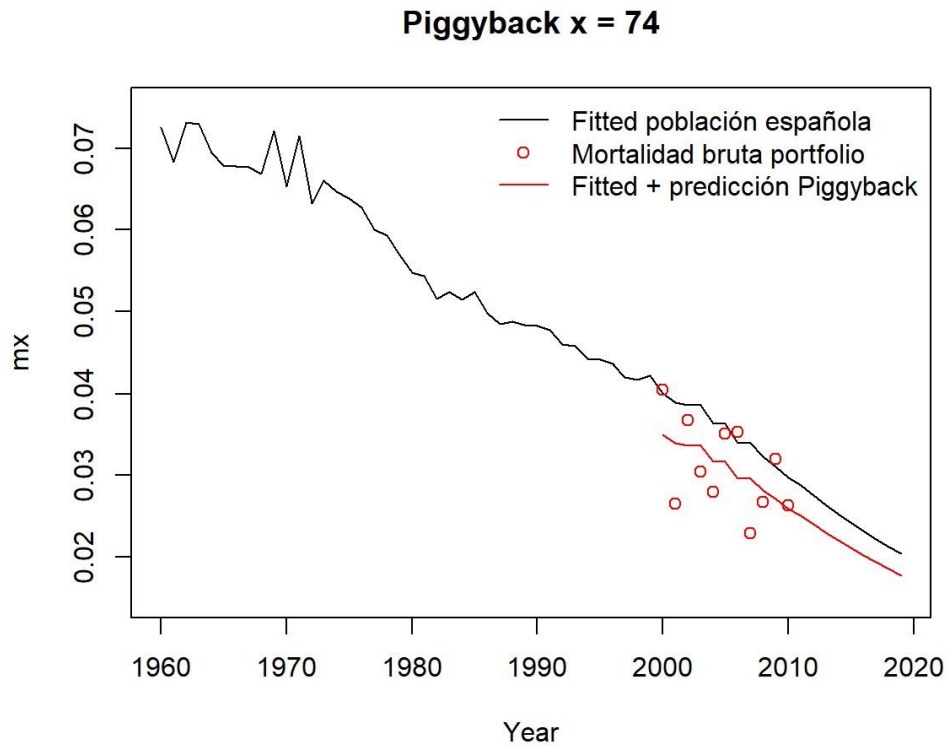
Piggyback x = 71



Fuente: elaboración propia

Figura 4.7

Ajuste y resultados del modelo Piggyback para edad 74



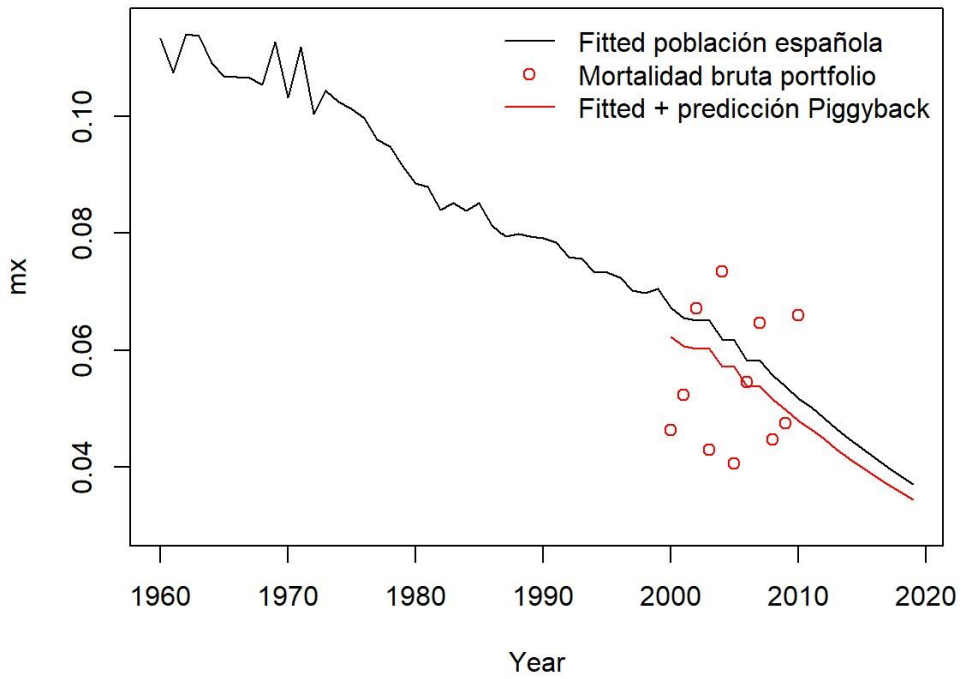
Fuente: elaboración propia

Para las edades anteriores, se observa como la probabilidad de fallecimiento de la población de referencia se mantiene por encima de la probabilidad para la cartera pequeña. Sin embargo, el modelo recoge este acercamiento entre la mortalidad de una población y otra, incluso el cruce entre ambas. A partir de los 87 años, el modelo estima que, estructuralmente, la mortalidad para la muestra de referencia tiene una mortalidad mayor que la población española.

Figura 4.8

Ajuste y resultados del modelo Piggyback para edad 79

Piggyback x = 79

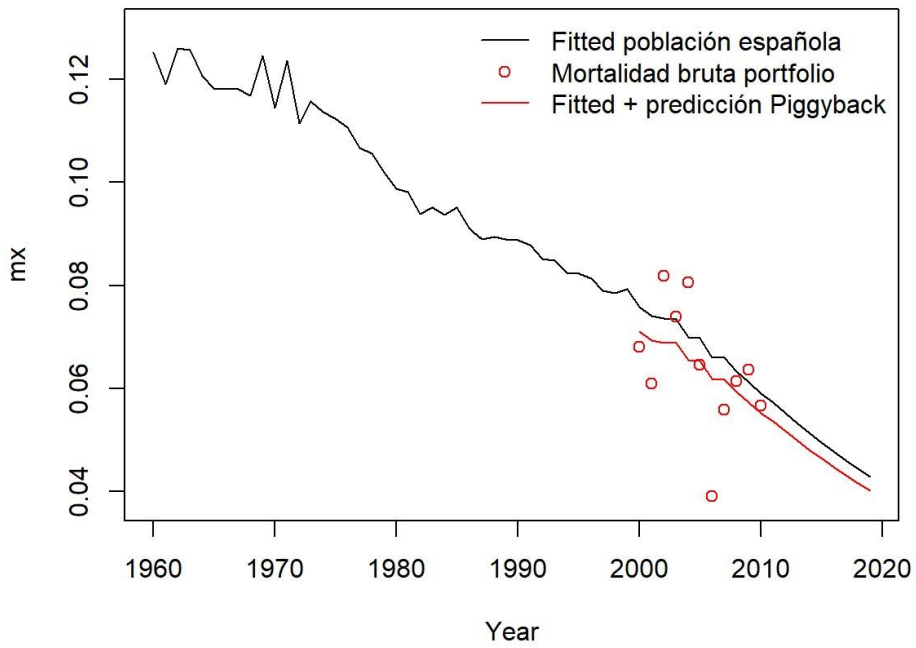


Fuente: elaboración propia

Figura 4.9

Ajuste y resultados del modelo Piggyback para edad 80

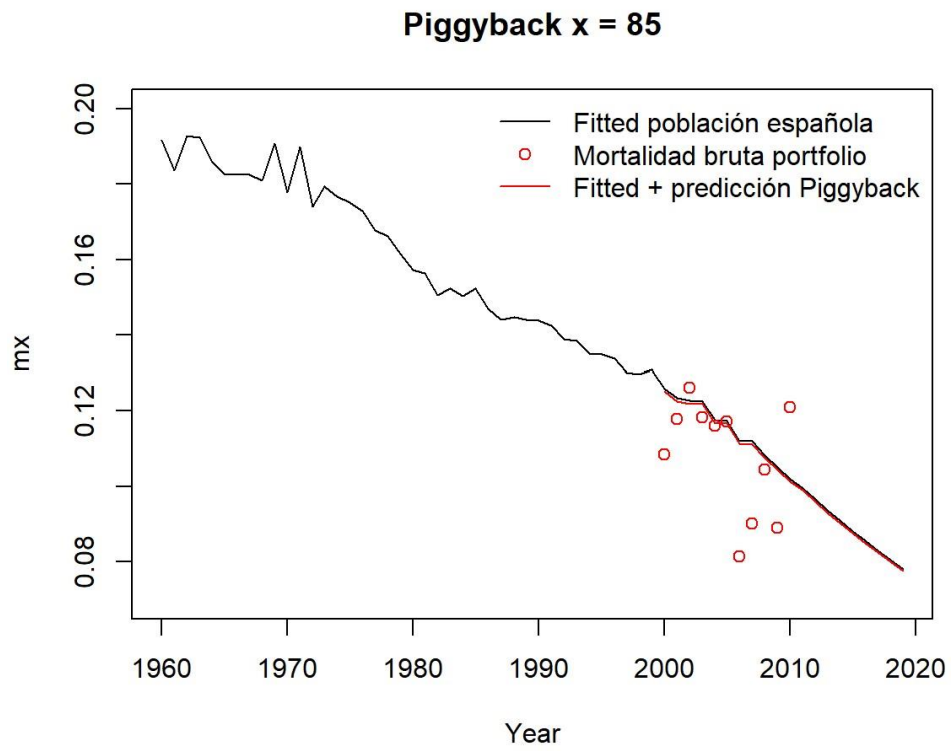
Piggyback x = 80



Fuente: elaboración propia

Figura 4.10

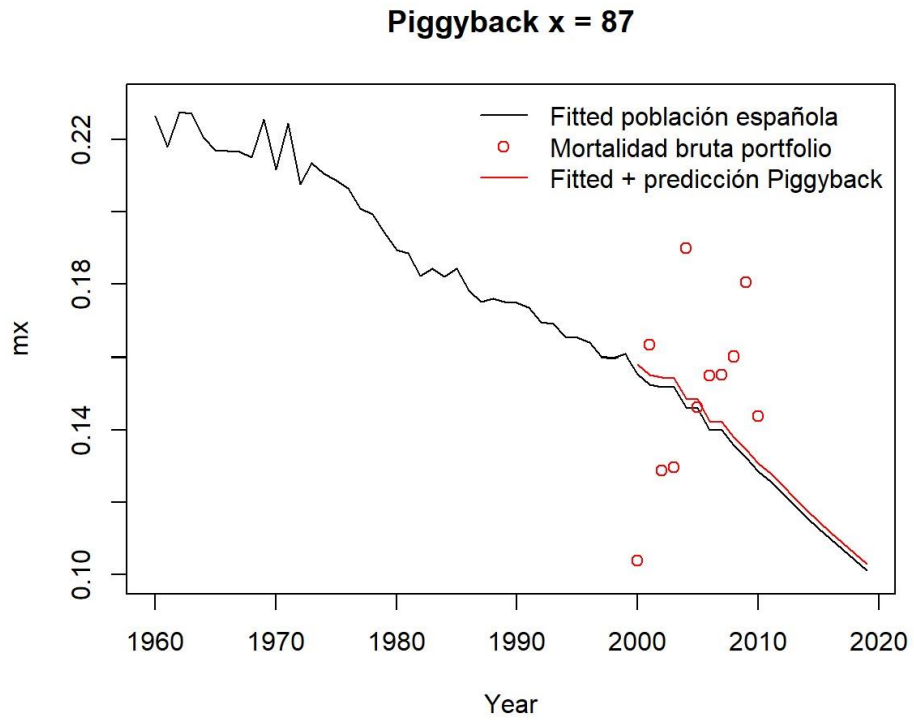
Ajuste y resultados del modelo Piggyback para edad 85



Fuente: elaboración propia

Figura 4.11

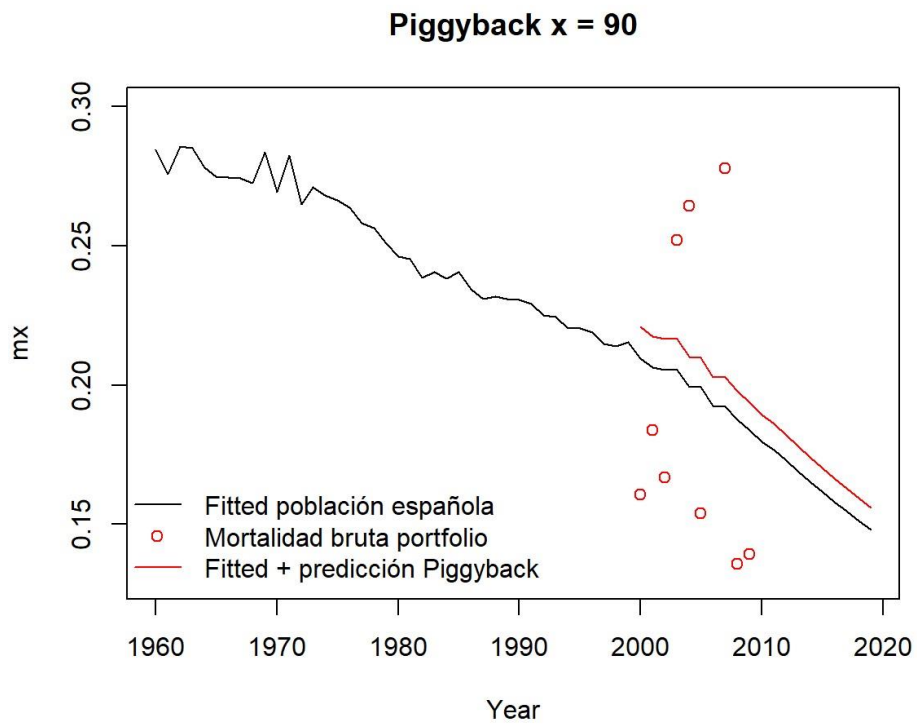
Ajuste y resultados del modelo Piggyback para edad 87



Fuente: elaboración propia

Figura 4.12

Ajuste y resultados del modelo Piggyback para edad 90



Fuente: elaboración propia

Es importante destacar que este enfoque no solo es aplicable al análisis de fallecimiento en carteras de seguros generales, sino que también puede ser aplicado, como se adelantó en la introducción, en despliegues de la oferta de la compañía. La capacidad de utilizar una población de referencia como base para estimar probabilidades de fallecimiento en carteras más pequeñas es una ventaja significativa en el análisis de riesgos. En productos para clientes con características específicas, la compañía sería capaz de salvar la situación de incertidumbre en el desarrollo de su negocio en estos segmentos.

4.1 Backtesting

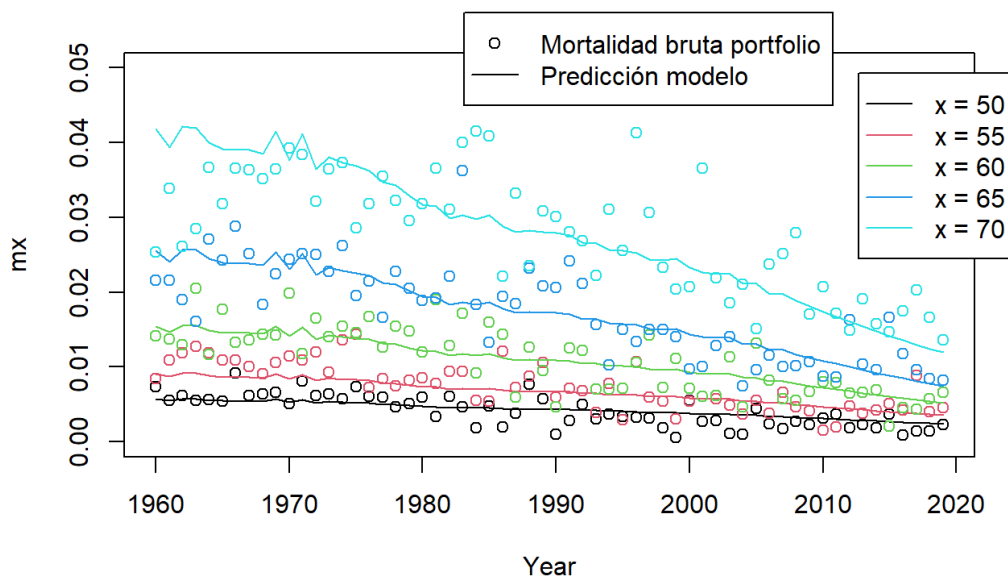
Como medida de calidad del ajuste del modelo, se presenta un análisis *backtesting* aprovechando la disponibilidad de datos de la cartera estudiada.

Se recuerda que, como cartera de referencia, se ha utilizado los datos de Islandia de la HMDB como población específica. Por ello, aunque se han utilizado tan solo datos 2000–2010 para el ajuste del *Piggyback*, se disponen de los mismos datos que se utilizaron para el ajuste de Lee–Carter de la población española (1960–2010) junto a los valores predichos (2011–2019).

Se presenta el *backtesting* para distintas edades:

Figura 4.1.1

Backtesting del modelo 1960-2019



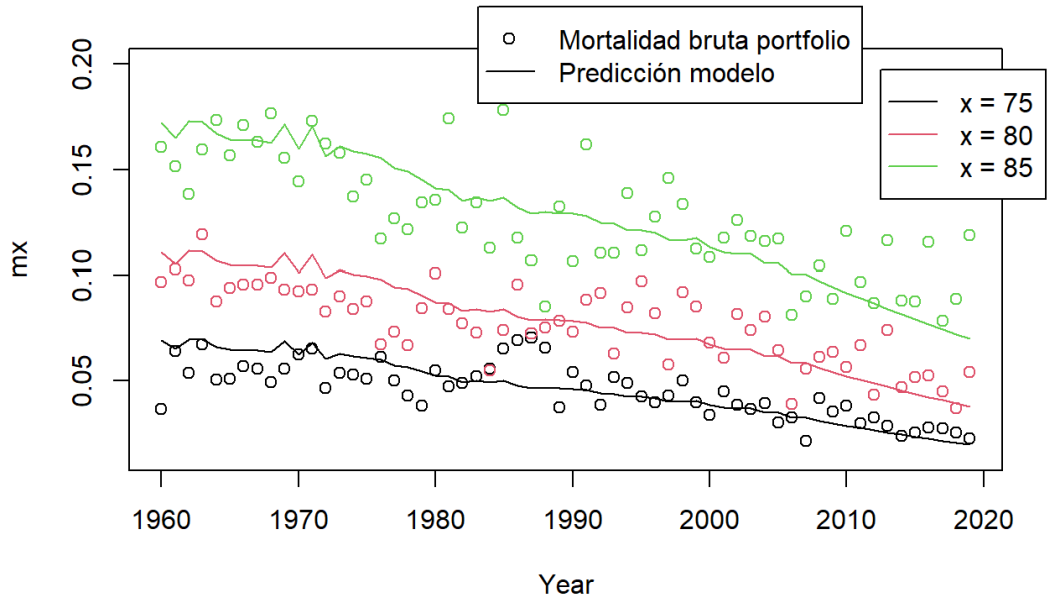
Fuente: elaboración propia

Como se comprueba, gracias a la suavización que se realizó mediante P-spline en la estimación de la mortalidad de la población de referencia, el modelo consigue arrojar resultados para distintas edades que tiende a aproximarse, pero sin cruzarse entre sí, manteniendo la consistencia de su funcionamiento.

Se muestra el mismo análisis para las edades más avanzadas:

Figura 4.1.2

Backtesting del modelo 1960-2019. Edades avanzadas

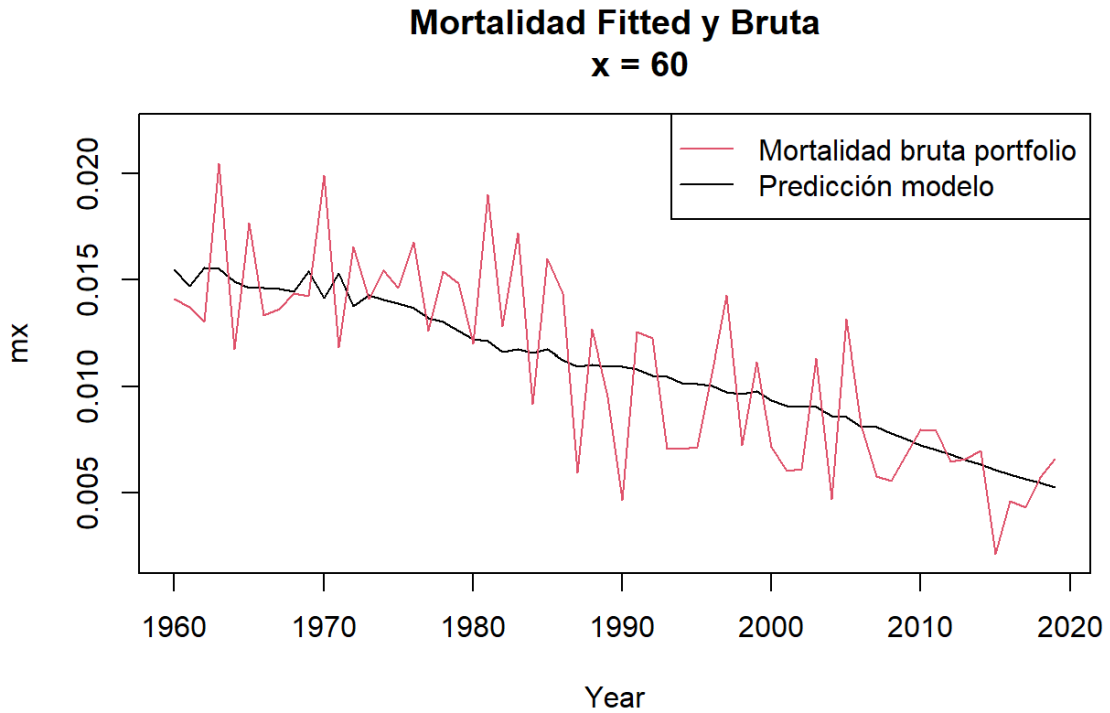


Fuente: elaboración propia

A través de los anteriores gráficos, se hace notable el hecho de que, aunque se generen estimaciones centrales de la fuerza de mortalidad para una edad x , los patrones de la probabilidad de fallecimiento cuando se trabaja con carteras pequeñas son insalvablemente irregulares.

Figura 4.1.3

Mortalidad ajustada por Piggyback y real para edad 60



Fuente: elaboración propia

A pesar de lo anterior, las estimaciones que arroja este modelo pueden ser útiles para obtener unas tasas de fallecimiento que la compañía puede tomar como esperadas en su cartera. La entidad puede esperar que los fallecidos en su producto rondan alrededor de lo estimado por el modelo *Piggyback*.

El valor del modelo puede relevarse por lo anterior. La validez del modelo se basa en su consistencia temporal, mostrando en este análisis *backtesting* que todas sus estimaciones no se alejan significativamente de las realizaciones de fallecidos en la cartera.

5. Conclusiones

En este trabajo se presenta un modelo que genera proyecciones de mortalidad en entornos de insuficiencia muestral. El modelo *Piggyback* es una opción para las aseguradoras de salvar la situación de incertidumbre en carteras con pocos asegurados, sin la necesidad de usar tablas regulatorias o proyecciones de mortalidad bruta de la cartera.

La robustez del *Piggyback* se basa en que sus proyecciones se apoyan en una población de referencia de gran dimensión. La población de referencia debe compartir una tasa de riesgo base con la cartera a proyectar, de modo que la elección de la población de referencia debe sustentarse en una población que comparta características biométricas con la población de la cartera.

Las tasas de mortalidad en carteras pequeñas inherentemente padecen de poca suavidad por su estructura: pocos asegurados conlleva un gran impacto en el ratio de fallecidos y expuestos cuando varía en una unidad el número de fallecidos. Sin embargo, mediante el modelo *Piggyback* se consigue estimar las tasa centrales de mortalidad, en torno a las que fluctúan las realizaciones de fallecidos de la cartera, eliminando el componente de incertidumbre.

La creación de un modelo interno mediante *Piggyback* permite realizar estimaciones centrales de mortalidad para usar en ejercicios de *reserving* y *pricing*, aunque la oscilación alrededor de esta estimación será de magnitud significativa.

Para corregir lo anterior, se podrían desarrollar alrededor de este modelo distintos ajustes, como agregaciones entre distintas carteras consideradas como insuficientes de muestra, que permita un *Piggyback* más consistente; medidas de cobertura para disminuir la magnitud de estas oscilaciones, entre otros ajustes.

Este modelo puede ayudar a las entidades aseguradoras a desplegar su oferta de productos en segmentos de clientes que antes no tenían cobertura comercial, o bien donde se utilizaban tablas de mortalidad que no se ciñen a los patrones de mortalidad específicos de los asegurados. El uso de *Piggyback* es capaz de generar, a partir de una

experiencia con asegurados (en torno a los 10 años), tablas proyectadas que se adaptan a los patrones específicos que sigue la mortalidad de unos asegurados. Esto es altamente útil para crear productos, por ejemplo, para pacientes o expacientes de distintas afecciones o cualquier grupo de personas que compartan patrones biológicos, entre un amplio abanico de aplicaciones.

6. Bibliografía

- Albarrán Lozano, I., Ariza Rodríguez, F., Cóbrecas Juárez, V.M., Durbán Reguera, M.L. y Rodríguez-Pardo del Castillo, J.M. (2014). El riesgo de longevidad y su aplicación práctica a Solvencia II. Modelos actuariales avanzados para su gestión, *Fundación Mapfre*
- Antonio, K., Bardoutsos, A. y Ouburg, W. (2015). Bayesian Poisson log-bilinear models for mortality projections with multiple populations, *European Actuarial Journal*, 5, 245–281
- Basellini, U., Camarda, C.G., y Booth, H. (2023). Thirty years on: A review of the Lee-Carter method for forecasting mortality. *International Journal of Forecasting*, 39:3, 1033–1049
- Blake, D., Cairns, A.J.G., Coughland, G.D., Dowd, K., y Khalaf-Allah, M. (2011). A Gravity Model of Mortality Rates of Two Related Populations, *North American Actuarial Journal*, 15:2, 334–356
- Brouhns, N., Denuit, M. y Vermunt, J.K. (2002). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables, *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 373–393
- Brouhns, N., Denuit, M. y Van Keilegom, I. (2006). Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality forecasting, *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005:3, 212–224
- Butt, Z. y Haberman, S. (2009). Ilc: A Collection of R Functions for Fitting a Class of Lee-Carter Mortality Models using Iterative Fitting Algorithms, Actuarial Research Paper No. 190, *City University of London*
- Carballo González, A. (2019). *A General Framework for Prediction in Generalized Additive Models* [Tesis doctoral, Universidad Carlos III de Madrid]
- Carter, L.R. y Lee, R.D. (1992). Modeling and Forecasting U.S. Mortality, *Journal of the American Statistical Association*, 87, 659–671

- Chen, F., Xu, J., Yu, M., Yuan J. y Zhang, G. (2019). A machine learning approach for mortality prediction only using non-invasive parameters, *Medical & Biological Engineering & Computing*, 58, 2195–2238
- Chen, L. Cairns, A.J.G. y Kleinow, T. (2017). Small population bias and sampling effects in stochastic mortality modelling, *European Actuarial Journal*, 7, 193–230
- Currie, I. (2009). *Adjusting for Bias in Mortality Forecasts*, Heriot-Watt University [Presentación de PowerPoint]
- Currie, I. (2011). *Acknowledging uncertainty in longevity*, Heriot-Watt University & LONGEVITAS [Presentación de PowerPoint]
- Currie, I.D., Durbán, M., y Eilers, P.H.C. (2004). Smoothing and forecasting mortality rates, *Statistical Modelling*, 4, 279–298
- Czado, C., Delwarde y A., Denuitt, M. (2005). Bayesian Poisson log-bilinear mortality projections, *Insurance: Mathematics and Economics*, 36, 260–284
- Delwarde, A., Denuit, M. y Eilers, P. (2007). Smoothing the Lee-Carter and Poisson log-bilinear models for mortality forecasting: a penalized log-likelihood approach, *Statistical Modelling*, 7, 29–48
- Eilers, P.H.C. y Marx, B.D. (1996). Flexible Smoothing with B-splines and penalties, *Statistical Science*, 11:2, 89–121
- Fazle Rabbi, A.M. y Mazzuco, S. (2021). Mortality Forecasting with the Lee-Carter Method: Adjusting for Smoothing and Lifespan Disparity. *European Journal of Population*, 37, 97–120
- Haberman, S., Kaishev, V., Millossovich, P. y Villegas, A. (2014). Longevity Basis Risk. A Methodology for Assessing Basis Risk, *Institute and Faculty of Actuaries y City University London*
- Haberman, S. y Renshaw, A. (2010). A comparative study of parametric mortality projections models, *Insurance: Mathematics and Economics*, 48, 35–55

- Hastie, T. y Tibshirani, R. (1986). Generalized Additive Models, *Statistical Science*, 1:3, 297–318
- Li, H. y Lu, Y. (2019). A Bayesian non-parametric model for small population mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, 7, 605–628
- Menzietti, M., Morabito, M.F. y Strangers. M. (2019). Mortality Projections for Small Populations: An Application to the Maltese Elderly, *Risks*, 7:2, 35
- Nelder, J.A. y Wedderburn, R.W.M. (1972). Generalized Linear Models, *Journal of the Royal Statistical Society*, 135:3, 370–384
- Salazar Vesga, N. (2020). *Longevity projections: Incorporating sample and population information through the modelization of differences in common sample points* [Trabajo de Fin de Máster, Universidad Carlos III de Madrid]
- Yue, J.C. y Wang, H.C. (2017). Using Life Table Techniques to Model Mortality Rates for Small Populations, *Society of Actuaries*