# Aplicaciones de la programación matemática a la gestión de la empresa aseguradora

Por
EUGENIO PRIETO PEREZ

## 1. – Problemática general de la programación de la empresa

La dirección de la empresa debe perseguir el comportamiento óptimo o el más cercano a él, que se concreta en una conjunto de normas de conducta que definen la política económica de la empresa. Una politita óptima para ser completa o global precisaría las siguientes condiciones:

a) Que se consideren simultaneamente las distintas alternativas posibles y todas las distribuciones también posibles entre estas alternativas;
b) Que se tenga en cuenta igualmente la incidencia probable de todos los acontecimientos exteriores, es decir, de aquellos que no están controlados por quién trata de encontrar el óptimo;
c) La maximización, sometida a ciertas restricciones iniciales, de la función de utilidad de la empresa.

Una empresa puede en general, elegir entre varías políticas y, cada política implica una forma de emplear sus recursos o posibilidades de obtenerlos, de modo que tienen un caracter alternativo.

La Teoría de la Programación matemática ofrece un conjunto de modelos matemáticos que permite resolver, en diferentes situaciones y ambientes (certeza, riesgo e incertidumbre), la problemática que plantea una conducta óptima, esto es, la considerada mejor en algún sentido.

En el ámbito de la empresa aseguradora es difícil construir un modelo completo de la actividad total de ella y, ello, fundamentalmente por el conflicto existente entre los distintos objetivos que se propone alcanzar.

La empresa aseguradora se plantea dos objetivos generales y fundamentales, constitutivos de una serie de objetivos parciales de diferente naturaleza y ante los que habrán de tomarse ciertas decisiones, a saber:

a) la obtención del *máximo beneficio*, inspirado en los principios *de economicidad, productividad* y *rentabilidad*;

b) el *crecimiento y desarrollo económico de la empresa, todo ello, bajo la hipótesis de solvencia y estabilidad financiera suficiente* y del equilibrio socio-económico entre las fuerzas productivas.

Los modelos matemáticos de programación han de permitir representar la estructura de la empresa, de tal forma que capten adecuadamente las relaciones e interacciones existentes entre las distinas variables y magnitudes empresariales. Esta formulación matemática debe permitir la obtención de *una solución que permita al empresario la adopción de sus decisiones bajo bases racionales y objetivas, portanto, científicas [12].* Son muchos los problemas que entraña la elaboración de un modelo matemático como el preconizado, entre los que parece oportuno destacar:

- La definición en terminos matemáticos de las variables del modelo. En los modelos en general cabe distinguir dos tipos de variables: *endogenas*, determinadas por el sistema representado por el modelo y las *exogenas* o *predeterminadas*. Entre estas últimas se distinguen las *variables controlables* y las *incontrolables*.
- Al lado de las variables se encuentran los *parámetros*. Es evidente que los parámetros también pueden ser controlables o no. Los *controlables* pueden utilizarse como elementos que al modificarlos a voluntad del sujeto (análisis de sensibilidad) permiten analizar la respuesta del sistema a ciertos cambios y valorar el peso de ciertos cambios, alternativas y restricciones.
- Con caracter previo, se plantean importantes problemas de estimación de los parámetros;
- Entre las variables existen relaciones que deben ser especificadas adecuadamente. A veces, la especificación de estas relaciones es *imperfecta* e implica la hipótesis de linealidad y otras similares.
- Por último se presentan los problemas propios de la resolución del problema de programación para el que se formuló el modelo y la interpretación de los resultados obtenidos.

A continuación damos una breve reseña de los modelos de Programación conocidos, aunque solamente daremos una aplicación de los modelos de programación lineal y programación lineal paramétrica, a la gestión de la empresa aseguradora. Estos modelos son de utilidad para ésta, bien en el análisis de los problemas o como técnicas de resolución cuantitativa de gran número de las cuestiones que aquella plantea.

## 2. – Descripción de los principales modelos de planifición economica en la empresa.

Nos proponemos describir los modelos de planificación más frecuentemente utilizados en el ámbito de la empresa y en general en economía.

Al contemplar los modelos utilizados en su conjunto, los encontramos de naturaleza *estática y dinámica.* En los primeros *el tiempo no es variable fundamental y en los segundos suele ser considerado como variable endogena fundamental.*

Otra clasificación del máximo interes que suele hacerse, es en *modelos de optimación y de previsión.* Entre los primeros se encuentran los modelos de programación matemática, en los que se pretenda optimizar determinada funciŏn objetivo, esto es, se busca la mejor actuación del agente planificador en el futuro.

Los *modelos de previsión* tratan de explicar el funcionamiento de un *sistema empresarial,* sin optimizarlo. Evidentemente, una vez conocidas las relaciones matemáticas que explican el sistema, es facil, asignando valores a las variables de decisión, saber cual va a ser el estado del sistema en un tiempo futuro. Sin embargo, debe notarse que con ello, no se garantiza que la solución sea un óptimo de la función objetivo considerada. Ello no es inconveniente, para que problemos diversos valores de las variables de decisión hasta que encontremos un resultado que se considere satisfactorio. De este modo y, aunque, no optimamente podemos planificar.

La última clasificación a que nos referiremos distingue, los modelos *deterministas,* de los *modelos estocásticos.* Estos últimos en el campo de la planificación empresarial estan menos desarrollados y, los formulados hasta el momento presente son de gran complejidad.

En esta Comunicación *nos limitaremos al análisis de las posibilidades de los modelos deterministas de programación matemática* (modelos de optimación), *para la gestión de la empresa aseguradora,* dejando para otra ocasión los modelos de planificación estocásticos y de simulación.

**2.1. Modelos de programación matemática deterministas y estaticos.** Suponiendo sobradamente conocidos los métodos de programación matemática clásicos, esto es, el problema de optimizar una determinada función objetivo sujeta a restricciones de igualdad y sus aplicaciones en la teoria de la producción, nos limitaremos a describir los *modelos de programación lineal y no lineal.*

La *Programación no-lineal pretende optimizar una función objetivo sujeta a restricciones en forma de desigualdad y de tal manera que las variables tomen valores positivos o nulos* es decir:

$$\max F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

sujeto a

$$\left.\begin{array}{c} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Este problema es mas general que el de la programación clásica.

La mayoría de las relaciones y funciones objetivos a considerar en el ámbito de la empresa en ambiente de certeza o son lineales o se consideran lineales, con lo que, la Programación lineal se constituye en un modelo fundamental para la programación de la gestión en la empresa. Tambien y como una generalización de la Programación lineal, podriamos considerar la Programación por objetivos [6].

La Programación lineal investiga los valores extremos absolutos de una función lineal

$$Z = c' \cdot X$$

sujeta a un sistema de relaciones lineales

$$A \cdot X = B$$

y para

$$X \geq 0$$

siendo

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

El llamado teorema fundamental de la Programación lineal, señala como los máximos y mínimos absolutos se encuentran un uno o varios vértices del donjunto poliedrico convexo definido por las relaciones

$$\begin{gathered} A \cdot X = B \\ X \geq 0 \end{gathered}$$

Puede demostrarse que hay máximo o mínimo en infinitos puntos, del conjunto poliédrico convexo, si fuesen alcanxados aquellos en más de un vértice.

Teoricamente el problema queda resuelto, pero, practicamente en muchos casos sería irrealizable, por la enorme cantidad de vértices del conjunto convexo; por tanto, se necesita un criterio que permita, dada una *solución básica* decir si existe algún otro vértice en el cual la función tome un valor mayor o menor que el correspondiente a la solución básica, segun se trate de determinar un máximo o mínimo, respectivamente.

El método del *Simplex*, suministra éste criterio, y si en el vértice básico no hubiese máximo o mínimo, nos permitiría pasar a otro vértice, al cual aplicariamos el criterio, y, asi sucesivamente, mediante un método iterativo hasta llegar a la obtención del vértice al cual corresponde el máximo o mínimo.

A pesar de la ventaja que supone el método del *Simplex* resulta a veces laborioso. Muchos problemas de Programación Lineal, se pueden simplificar mediante la resolución del *problema dual.*

El problema dual del programa lineal que venimos considerando, podría formularse así:

Encontrar el máximo de

$$Z^* = b' \cdot Y$$

sujeto a las condiciones

$$Y' \cdot A \leq C'$$

con

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Puede demostrarse que si el *problema primitivo tiene solución óptima finita,* el dual correspondiente también la tiene, verificandose que

$$\min Z = \max Z^*$$

Si uno de los problemas tiene una solución óptima ilimitada, el otro no tiene soluciones posibles.

Es de observar que mientras los problemas directos surgen del análisis y planteamiento de una cuestión practica, y, por tanto, tienen una significación clara; el significado del dual no es en ocasiones evidente y, en cada caso se presenta el problema de la interpretación del significado de la función que se máximiza o minimiza y desigualdades, en el problema dual.

El problema de la Programación lineal fué resuelto por George G. Dantzig, y, desde entonces, las aplicaciones a la gestión de empresas y en general, en Economía, no cesaron, destacando las aportaciones de *T. C. Koopmans* y otros economistas de la *Cowles commission* [11]. Con ella, se puede afirmar que nació «*una nueva metodología científica de caracter cuantitativo, operativo e interdisciplinario, cuya importancia practica y teorica ha ocasionado, ocasiona y motivará unas ventajas de indudable valor para la Ciencia*» [5]. Se inicia el desarrollo de una nueva etapa de la programación matemática, en continua evolución y creando en definitiva una forma de pensar en la actividad económica.

### 3. – Modelos de programación matematica deterministas y dinamicos.

En general, pretenden distribuir recursos escasos entre objetivos que compiten en un horizonte temporal $[t_0, t_n]$. En términos matemáticos se trata de elegir valores en el tiempo para ciertas variables llamadas *variables de control*, pertenecientes a un conjunto de valores posibles llamado *conjunto de control*.

En estos modelos intervienen además, las denominadas *variables de estado*. La dinámica del problema se recoge mediante un sistema de ecuaciones diferenciales, llamadas *ecuaciones de movimiento*, en que aparecen las variables de estado y sus derivadas, las variables de control y la variable tiempo.

Por último, existe una *función objetivo* a optimizar, denominada *funcional objetivo*.

A continuación consideraremos particularmente, el *Problema del Control óptimo* y la *Programación dinámica*.

**3.1. El problema del control optimo.** Denotaremos por $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la variable de estado, que toma valores en $A$, conjunto $n$-dimensional $y$, con $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ la variable de control definida en el conjunto $m$-dimensional $B$. El horizonte temporal del problema es $[t_0, t_n]$.

El sistema de ecuaciones de movimiento o transición, suponemos que es:

$$\frac{dx}{dt} = x' = \varphi(x, u, t) \tag{1}$$

Admitiremos que el valor inicial de la variable de estado es:

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

y, que son *valores finales admisibles* para la variable de estado *los pertenecientes al conjunto de valores $G$.*

El sistema de ecuaciones diferenciales (1), con las condiciones impuestas determina para cada $u(t)$, una función $x(t)$, tal que $x(t_0) = x^0$ y, además satisface el sistema (1).

Si existe solución $\forall t \in [t_0, t_n]$ y tal que $x(t) \in A$, tendriamos la evolución en el teimpo o trayectoria de la variable de estado correspondiente a la función de control $u(t)$.

El conjunto de los valores de $x$ en $t_n$, obtenidos a partir del instante inicial $t_0$ y de un valor inicial $x^0$ determinados por $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$[1] *se denomina conjunto alcanzable en $t_n$.*

Dado un conjunto objetivo $G$, el problema del control consiste en determinar de entre el conjunto de *funciones de control admisibles aquellos* que, con el sistema de ecuaciones determinantes de la dinámica del problema, trasladan la variable de estado $x$ del valor inicial $x^0$ en $t_0$, a algún valor final perteneciente al conjunto objetivo $G$ a través de una trayectoria contenida totalmente en $A$.

[1] Las funciones $u_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ se llaman funciones de control admissibles.

Cuando existe mas de una función de control admisible que traslada la variable de estado desde su valor inicial $x^0$ en $t$, a algún valor final perteneciente a $G$, a través de una trayectoria contenida toda ella en $B$, *cabe preguntarse cual será la mas conveniente de todas ellas de acuerdo con un cierto criterio derivado de las condiciones físicas o económicas del problema, llamado criterio de optimalidad.* Tal criterio ha de ser función del control $[Z(u)]$ y suele tener la *forma de un funcional* – llamado funcional objetivo – definido por una integral que depende de $u$, es decir:

$$Z(u) = \int_{t_0}^{t_n} F\left[x(t), u(t), t\right] dt$$

Para cada función de control que determine una trayectoria admisible para $x(t)$ que alcance el objetivo, el criterio de optimalidad $Z(u)$ tomará un cierto valor.

Se llama *control óptimo* a todo control admisible que optimice en algún sentido prefijado de antemano el funcional objetivo $Z(u)$. *La trayectoria óptima* es la correspondiente al control óptimo.

El óptimo de $Z(u)$ *es absoluto* entre todos los controles cuyas trayectorias satisfagan las condiciones enunciadas, de manera que, si existen varios controles óptimos, el funcional *objetivo* deberá tomar el mismo valor en todos ellos.

Entonces, la especificación de un problema de control óptimo, requiere un criterio de optimalidad.

Un caso particular importante del problema de control, fué ya estudiado por *Volterra* y su escuela; es, el conocido con el nombre de *Calculo de variaciones.* Podria formularse asi:

$$\max \int_{t_0}^{t_n} F\left[x(t), u(t), t\right] dt$$

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= u(t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ x(t_n) &= x_n \end{aligned}\right\}$$

Por tanto, en el *cálculo de variaciones existe una sola variable de control y una de estado y no hay ningún tipo de restricción excepto la de control inicial y final.*

En general la programación de la gestión de la empresa aseguradora implica la consideración de varias variables de estado y control.

Teoricamente el problema de control resuelve el problema de la programación de la gestión de la empresa, pero, tiene un grave inconveniente: *no es operativo* y excepto para casos muy sencillos no se puede resolver.

**3.2. La programación dinamica.** El problema de la Programación Dinámica tiene el mismo planteamiento formal, pero el método de resolución es diferente. Esta se basa en el principio de optimalidad de Bellman, que consiste en obtener una relación de recurrencia fundamental que vincule elementos de una clase de problema particular que forma parte de otra más amplia.

La Programación Dinámica, en principio, podriamos decir que busca el máximo (o mínimo) absoluto de una función.

$$U = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \ldots + g_N(x_N) \tag{1}$$

con las condiciones

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N = x$$
$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

El método de la Programación dinámica es especialmente util para tratar los llamados *procesos de decisión polietapicos o secuenciales.* En efecto, la forma particular de $U$, nos permite considerar un sistema de $N$ fases para cual $g_i(x_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, N$) seria la función objetivo asignada a cada fase, y $U$, la función objetivo asignada al conjunto de toadas la fases.

Son muchos los fenómenos económicos de naturaleza secuencial (administración de stocks, selección de proyectos de inversión, planificación de empresas, etc), para cuya descripción y análisis es posible utilizar la Programación Dinámica. En el campo asegurador los trabajos de *T. Pentikäinen* y *K. Borch* [13], [4], constituyen un prometedor comienzo.

La Programación Dinámica tiene sus antecedentes más próximos en la teoria de la decisión secuencial de *A. Wald.* Su desarrollo se debe casi en su totalidad a R. Bellman y su escuela en el transcurso de los últimos veinte años. El fundamento del método de R. Bellman, es el llamado *principio de optimalidad de Bellman.* A proposito del mismo escribe *A. Kaufman,* «este principio de optimalidad es tan simple que hasta parece evidente cuando se ha comprendido a fondo. Sin embargo, su importacia y la eficacia de los métodos de optimización secuenciales a los que ha dado origen se evidencian en cuanto se toma conciencia de que la verdadera naturaleza de numerosos problemas económicos es de caracter secuencial» [10].

Utilizaremos la terminaología siguiente:

*Una politica es una sucesión de decisiones determinada a priori, cumpliendo las condiciones del problema a resolver. Por subpolitica entendemos una sucesión de decisiones contiguas pertenecientes a una politica o trayectoria.*

Puede demostrarse que *una politica sólo puede formarse a partir de subpoliticas óptimas.*

Para la optimización secuencial, haremos: Para un $x_N = \xi_N$ fijo, se determina

$$\begin{aligned}
f_N(x) &= \max_{\substack{x_1 + x_2 + \cdots + x_N = x \\ x_i \geq 0}} \left[g_1(x_1) + g_2(x_2) + \cdots + g_N(x_N)\right] \\
&= \max_{0 \leq \xi_N \leq x} \left\{ \max_{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1} = x - \xi_N} \left[g_1(x_1) + g_2(x_2) + \cdots + g_{N-1}(x_{N-1}) + g_N(\xi_N)\right] \right\} \\
&= \max_{0 \leq \xi_N \leq x} \left\{ g_N(\xi_N) + \max_{\substack{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1} = x - \xi_N \\ x_i \geq 0}} \left[g_1(x_1) + g_2(x_2) + \cdots + g_{N-1}(x_{N-1})\right] \right\} \\
&= \max_{0 \leq \xi_N \leq x} \left\{ g_N(\xi_N) + f_{N-1}(x - \xi_N) \right\}
\end{aligned} \tag{2}$$

siendo

$$f_{N-1}(x-\xi_N) = \max_{\substack{x_1+x_2+\cdots+x_{N-1}=x-\xi_N \\ x_i \geq 0}} \left[g_1(x_1)+\cdots+g_{N-1}(x_{N-1})\right]$$

En esta ecuación funcional recurrente se apoya el método de resolución de la Programación dinámica. La solución consiste en determinar los $N$ valores $x_1, x_2, \cdots, x_N$ que hacen máxima a $U = \sum_{i=1}^{N} g_i(x_i)$ sujeta a las condiciones

$$\left.\begin{array}{c} x_1+x_2+\cdots+x_N = x \\ x_i \geq 0 \end{array}\right\} i = 1, 2, \cdots, N$$

Notese que son soluciones triviales del problema las siguientes:

$f_N(0) = 0$ para $N = 1, 2, \cdots$ si $g_i(0) = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$

$f_1(x) = g_1(x)$ si $N = 1$

Aplicando la ecuación de recurrencia (2) y partiendo de

$$f_1 x) = g_1(x)$$

podemos escribir:

$$f_2(x) = \max_{0 \leq x_2 \leq x} \left[g_2(x) + f_1(x - x_2)\right]$$

de donde obtenemos

$$x_2 = s_2(x)$$

y, en consecuencia

$$f_2(x) = g_2\left[s_2(x)\right] + f_1\left[x - s_2(x)\right]$$

Repitiendo el proceso sucesivamente, se llega a:

$$f_N(x) = \max\left[g_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N)\right] \tag{3}$$

y de aqui

$$x_N = s_N(x)$$

con lo que

$$f_N(x) = g_N\left[s_N(x)\right] + f_{N-1}\left[x - s_N(x)\right]$$

Se ha determinado, la sucesión de funciones óptimas:

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_N(x)$$

Fijados $x$ y $N$, la (3) nos permite determinar la decisión óptima $x_N$ quedando $x - x_N$, para el periodo de las $N-1$ primeras etapas. La ecuación

$$f_{N-1}(x) = \max_{0 \leq x_{N-1} \leq x} [g_{N-1}(x_{N-1}) + f_{N-2}(x - x_{N-1})]$$

previa la sustitución de $x$ por $x - x_N$, permite obtener la decisión óptima $x_{N-1}$ y asi sucesivamente, hasta alcanzar la $x_1$.

Se ha llegado de este modo – señala Sixto Ríos – a obtener la política óptima mediante una sucesión de decisiones o subpolíticas óptimas – principio de optimalidad de Bellman –, utilizando en el proceso la ecuación funcional recurrente (2) primero para obtener la función de rendimiento óptima, supuesto que se emplee la política óptima, y después para calcular las cesivas decisiones que dan la política óptima [15].

El planteamiento hecho aqui es susceptible de generalización en varios sentidos; pero, lo *importante desde nuestro punto de vista, es, que la Programación dinámica resuelve la cuestión de determinar la política óptima en los problemas de asignación.*

## 4. – Una aplicacion de la programación lineal a la empresa aseguradora.

La emisión de una póliza de seguros implica por parte de la empresa aseguradora el ingreso de la prima y un conjunto de obligaciones (pago de los siniestros, gastos de gestión, etc). Estas obligaciones absorben cada una un porcentaje de la prima, que en total y en su estimación a priori, podemos admitir que suman el cien por cien. En consecuencia, las diferentes clases de pólizas implican combinaciones diferentes, de siniestralidad, gastos de gestión, reaseguro, inversión, etc.

Veamos como podemos traducir este esquema en términos matemáticos. Denotemos por $U_0$, los recursos financieros iniciales de la empresa aseguradora y, con $U$, los recursos de la misma al final del periodo considerado.

La empresa cuenta con una cierta estructura (solvencia, red comercial, sistema informático, etc) y ello, en si mismo, supone una limitación. Es mas, el horizonte temporal contemplado es lo suficientemente corto para que no existan en la estructura de la empresa modificaciones significativas.

La cuestión que se trata de resolver es programar la política de suscripciones de modo que el beneficio sea máximo, considerando las limitaciones de la empresa señaladas, (la situación del mercado, nivel de la demanda, poder de la concurrencia etc.) y otras.

Se comprende que entre las limitaciones o restricciones a tener en cuenta está el hecho de que no es recomendable reducir el volumen global de primas de la entidad, eliminar o no desarrollar ciertos ramos sin correr el riesgo de pérdida de la clientela, crear problemas de personal, a la red comercial, etc. Evidentemente, todas estas son limitaciones a corto y medio plazo.

En el modelo que pretendemos elaborar, admitiremos las hipótesis básicas siguientes:

a) La estructura del coste, para el ramo $R_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ viene dada por el vector

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$$

Este vector es $n$-dimensional para todos los ramos, pero de uno a otro, los componentes son distintos, esto es:

$$a_{ij} \neq a_{kj} \quad i \neq k \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \\ k = 1, 2, \cdots, m \end{array} \right\}$$

Además es: $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

b) La empresa aseguradora está sujeta en su gestión a importantes restricciones, debidas a diferentes causas, de tipo comercial, financiero, laboral, mercado, etc. En general estas restricciones vendran dadas por un vector columna

$$c = (c_1, c_2, \cdots, c_p)$$

Si representamos por $X_i$ las primas del ramo $R_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$. Evidentemente, es $X_i \geq 0$.

Para el periodo considerado, en ciertos casos podemos plantear:

$$a_{1h} \cdot X_1 + a_{2h} \cdot X_2 + \cdots + a_{mh} \cdot X_m \leq c_h \tag{1}$$

pues con $c_h \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$, indicamos el coste total que la empresa aseguradora pretende desembolsar en el periodo de programación por el concepto considerado (gastos de gestión, beneficios, etc).

Las inecuaciones (1) son la expresión de cierto tipo de restricciones que condicionan la gestión.

En otras ocasiones, por ejemplo, cuando se trata del Margen de Solvencia, debe ser:

$$U_0 + (1-\beta)\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} X_i\right) \geq \alpha \sum_{i=1}^{m} X_i \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \left[\alpha - (1-\beta) a_{ik}\right] \cdot X_i \leq U_0$$

en donde $\alpha$ es el porcentaje sobre primas que se exige como margen de solvencia y, $\beta$ el porcentaje de beneficios que se reparte como dividendo.

Los valores de los $a_{ij}$ $(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ son conocidos, aunque su determinación puede exigir cálculos, análisis y decisiones que se situarian en una fase previa. Por ejemplo, supongamos que $a_{ij}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, es la componente del precio destinado a cubrir la siniestralidad. Evidentemente, seria necessario disponer de la información estadística y realizar los correspondientes cálculos actuariales. Así mismo, si $a_{ik}$, representa los márgenes de beneficio técnico; para la determinación de éstos, no puede olvidarse los precios en el mercado de las modalidades de seguros que se ofrecen a éste, el margen de solvencia mínimo que ha de cubrir la empresa aseguradora ($\alpha$) y su política de dividendos dada por $\beta$ etc. Algo análogo ocurre con la política de reaseguro y los modelos que garanticen la estabilidad de la empresa aseguradora.

Una vez definidas las desigualdades que caracterizan las restricciones que condicionan la gestión de la empresa, el modelo se completa proponiendo un objetivo para la empresa y traduciendolo matemáticamente en una función objetivo a maximizar o minimizar.

Supongamos que esta fuera lineal y dependiente de $X_1, X_2, \cdots, X_n$ o sea

$$Z = b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + \cdots + b_m \cdot X_m \tag{2}$$

Un objetivo podria ser maximizar el beneficio global de la empresa aseguradora, que sería la correspondiente componente del vector $a_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$.

Entonces, el problema de la programación del crecimiento equilibrado de la empresa aseguradora, se concreta en el problema de maximizar la función objetivo

$$z = b \cdot X$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} A \cdot X &\leq C \\ X &\geq O \end{aligned}$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \qquad b = [b_1, b_2, \cdots, b_m]$$

Es pues, un problema de Programación lineal, consistente en determinar el vector-columna $X$, cuyas componentes son las primas que deberan alcanzarse en cada ramo para maximizar $Z$, sujeto a las restricciones de gestión.

En el momento presente no sería facil encontrar una empresa aseguradora que en su gestión buscara un único objetivo como podría ser la maximización de los beneficios. Concretamente en el caso de la empresa aseguradora suele considerarse básicos, además el objetivo del crecimiento, mantener un determinado margen de solvencia, etc.

Aunque la Programación lineal en si misma solo puede cubrir a la vez uno de los objetivos fijados por los responsables de la empresa, por lo que diremos que resuelve casos de *decisiones unidimensionales.* Sin embargo, en la mayoria de los casos nos encontramos con *multiples objetivos* y por tanto las decisiones deben ser *multidimensionales* [9], [16]. Este proceso de decisión multidimensional queda muy bien recogido por la llamada Programación por objetivos, en la que, las proyecciones del futuro desarrollo de la empresa se hacen decidiendo el nivel de los objetivos del modelo. La puesta a punto del modelo e interpretación de la solución es en si misma – afirma *D. Villalba* – un intento de organizar una estrategia de la empresa con el fin de cumplir con los objetivos prefijados. En no pocas ocasiones es imposible cumplir todos los objetivos a la vez. En estos casos, la Programación por objetivos no solamente señala que no existe solución con las restricciones, sino que proporciona la que mas se aproxima a los mismos bajo determinado criterio.

No resulta posible aqui, analizar el modelo de la programación por objetivos múltiples y sus posibilidades de aplicación a la gestión de la empresa. Sin embargo y, a la luz de cuanto acabamos de exponer, una conclusión es evidente: El actuario debe tener una preocupación esencial por los problemas de la planificación y control de la empresa aseguradora y constituirse en especialista en los mismos, ampliando de este modo el campo de sus actividades convencionales en ella, e integrandose, con nuevas funciones entre los colaboradores mas directos de la Dirección, en la que debe tomar en general, un papel más activo.

La fijación de un conjunto de objetivos y subobjetivos coherente y en general el problema de la programación y control de las empresas aseguradoras, deben ser tareas en la que intervenga activamente el actuario.

Por último, parece oportuno señalar que los parámetros y objetivos suelen ser fijados considerando la evolución de las magnitudes que se consideren, de aqui que resulte imprescindible llevar a cabo estudios en que se analice la dependencia de la solución de estos objetivos, limitaciones o parámetros: Analisis de la sensibilidad del modelo respecto de tales datos.

## Bibliografia


[1] *R. Bellman:* «Dynamic Programming». Princeton University Press N. J. I. 957

[2] «Adaptative Control Processes, a Guided Tour». Princeton University Press N. J. I. 961

[3] *R. Bellman y S. Dreyfus:* «Applied Dynamic Programming». Princeton University Press N. J. I. 962

[4] *K. Borch:* «Payment of Dividend by Insurance Companies». Actas del XVII Congreso Internacional Actuarios

[5] *E. Bueno Campos:* «Del método operativo en el comportamiento económico de la empresa y un ensayo sobre los origines de la Investigación Operativa». Anales de Economía I. 971

[6] *Charnes y Cooper:* «Management models industrial applications of Linear Programming». John Wiley and Son I. 961

[7] *R. Dorfman:* «Programación Lineal (su aplicación a la Teoria de la Empresa)». Aguilar, S. A. Madrid, I. 962

[8] *R. Dorfman; P. A. Samuelson y R. M. Salow:* «Programación Lineal y Análisis económico» Madrid, I. 964

[9] *Y. Ijiri:* «Análisis de objetivos y control de gestión». Ediciones ICE. Madrid I. 976
[10] *A. Kaufmann:* «Métodos y modelos de la Programación Dinámica» CECSA, I. 966
[11] *T. C. Koopmans:* «Activity Analysis of production and allocation». John Wiley and Son, I. 957
[12] *D. W. Miller y M. K. Starr:* «Acuerdos ejecutivos e investigación operacional». Herrero Hnos. Sucesores, Mexico, I. 961
[13] *T. Pentikäinen:* «A model of stochastic-dynamic prognosis». Scandinavian Actuarial Journal, I. 975
[14] *E. Prieto Perez:* «Teoria de la Inversión». Ediciones I. C. E. Madrid I. 973
[15] *S. Rios:* «Procesos dinámicos de decisión en concurrencia». Madrid, I. 967
[16] *D. Villalba:* «Modelos económicos de Optimización Presupuestaria en la empresa». Tesis doctoral Universidad Autonoma de Madrid, I. 974

## Resumen

En este trabajo se describe el significado y la problemática que comporta la aplicación de la Programación matemática en la gestión de la empresa aseguradora. Asi mismo, se ofrece una aplicación concreta de la Programación lineal y Programación lineal paramétrica.

Se señala que el Actuario debe preocuparse esencialmente por los problemas de la planificación y control de la empresa aseguradora y constituirse en especialista en los mismos, ampliando de este modo el campo de sus actividades convencionales en ella, e integrandose, con nuevas funciones entre los colaboradores más directos de la Dirección, en la que debe tomar en general, un papel más activo. La fijación de un conjunto de objetivos y subobjetivos coherente y en general el problema de la programación y control de las empresas aseguradoras y financieras, debe ser una tarea del Actuario.

En el ámbito de la economía de la empresa en general estos problemas no han recibido aún, un tratamiento adecuado y completo; por esto, entendemos que está pleno de sentido, en un trabajo como el presente, que se analicen los resultados alcanzados en este campo científico y mas aún, la propuesta de nuevas aplicaciones y modelos en el ámbito de las empresas aseguradoras y financieras. Los trabajos de *K. Borch* y *T. Pentikäinen*, los considera el autor un prometedor comienzo.

En el trabajo se formulan brevemente los principales modelos de planificación, tanto estáticos como dinámicos, a fin de que los lectores no especialistas se encuentren en condiciones de juzgar y valorar la oportunidad de la propuesta. Los modelos de Programación lineal y sobre todo el tipo especial de ésta que se conoce como Programación por objetivos, pueden constituir un instrumento útil para el Actuario y un *revulsivo* en sus preocupaciones científicas y profesionales futuras.

## Summary

The meaning and problems involved in the application of the Mathematical Programming about the management of an Insurance Enterprise is described in this article. Also a concrete application of Linear Programming – parametric and non-parametric – is considered.

It is indicated that the Actuary must be essentially concerned with all the control and planning problems affecting the Insurance Enterprises, becoming a specialist in such problems, widening the field of its conventional activities and taking more active responsabilities in executive and managements positions. The determination of a set of consistent objectives and subobjectives as

well as the problem of control and programming of insurance and finantial institutions must be the actuary's duty.

In the economics of business, generally speaking, these problems have not received as yet an adequate and complete treatement; consequently, we understand that in an article like this one it is important achievements attained in this scientific field should be analysed and above all that new applications and models related to insurance and finantial enterprises should be proposed. The studies of *K. Borch* and *T. Pentikäinen* are considered by the author as a promising beginning.

In this article a short formulation of the main planning models – statics as well as dynamics – is considered in order to permit the non-specialized readers to judge and value the opportunity of the author's proposal. The linear programming models and above all the special type known as programming by objectives, can be a useful instrument for the actuary and at the same time it can represent a «revulsion» in his future scientific an professional worries.

## Résumé

Cet article traite de la signification et des difficultés que comporte l'application de la programmation mathématique dans la gestion d'une entreprise d'assurance. On y indique également une application concrète de la programmation linéaire, paramétrique et non-paramétrique.

Il y est indiqué que l'actuaire doit se préoccuper essentiellement des problèmes de planification et de conduite des entreprises d'assurances, qu'il doit même devenir un spécialiste dans ce domaine, élargissant le rayon de ses activités conventionnelles et prenant dans la direction un rôle toujours plus actif. La détermination d'un ensemble d'objectifs cohérents et, en général, le souci de la planification et de la conduite des entreprises d'assurances et financières doivent être les tâches de l'actuaire.

Dans le secteur de la gestion, ces problèmes n'ont pas encore tous reçu, en général, un traitement adéquat et complet; pour cette raison, nous pensons qu'il est indiqué, dans un article comme celui-ci, qu'on analyse les résultats obtenus dans ce domaine et, plus encore, qu'on indique de nouvelles applications et des modèles nouveaux dans le secteur des entreprises d'assurance et financières. Les travaux de K. Borch et de T. Pentikäinen sont considérés par l'auteur comme un commencement très prometteur.

Dans cet article, l'auteur formule brièvement les principaux modèles de planification, statique et dynamique, en espérant que les lecteurs non-spécialisés pourront juger et apprécier à leur juste valeur ses propositions. Les modèles de programmation linéaire et surtout ceux de la programmation par objectifs peuvent constituer un instrument utile pour l'actuaire et représenter une sorte de révolution dans ses préoccupations scientifiques et professionnelles.

## Zusammenfassung

Dieser Artikel handelt von der Bedeutung und den Problemen, die sich bei der Anwendung der Mathematischen Programmierung auf die Verwaltung einer Versicherungsgesellschaft ergeben. Des weiteren wird eine konkrete Anwendung der Linearen Programmierung und der Parametriesierten Linearen Programmierung betrachtet.

Es ist angebracht, dass sich der Versicherungsmathematiker eingehend mit den Planungs- und Kontrollproblemen eines Versicherungsunternehmens befasst und sich zum Spezialisten für derartige Probleme entwickelt. Er sollte den Bereich seiner herkömmlichen Tätigkeiten erweitern und vermehrt aktive Verantwortung in Exekutiv- und Managementpositionen übernehmen. Das

Festlegen konsistenter Unternehmensziele und Unterziele und das Problem, Versicherungs- und Finanzinstitute zu führen und zu kontrollieren, muss Aufgabe des Versicherungsmathematikers sein.

Im allgemeinen haben diese Probleme in der Betriebswirtschaft noch nicht eine gebührende und umfassende Behandlung erfahren; daher halten wir es für wichtig, dass in einem Artikel wie diesem die erzielten wissenschaftlichen Resultate analysiert werden und dass vor allem neue Anwendungen und Modelle für den Bereich des Versicherungs- und Finanzwesens vorgeschlagen werden. Die Studien von K. Borch und T. Pentikäinen werden vom Autor als vielversprechender Beginn gewertet.

Der Autor gibt in dieser Arbeit einen kurzen Überblick über die wichtigsten Planungsmodelle (statische und dynamische), um den nicht-spezialisierten Lesern die Möglichkeit zu geben, die Vorschläge des Autors zu beurteilen und zu bewerten. Die Modelle der Linearen Programmierung und vor allem die Modelle bekannt unter dem Namen Programming by objectives, können sich als nützliches Instrument für den Versicherungsmathematiker erweisen und stellen möglicherweise einen Wendepunkt in seiner zukünftigen wissenschaftlichen und beruflichen Arbeit dar.