6-25

CONSIDERACIONES SOBRE LA POLITICA DE DISTRIBUCION DEL EXCEDENTE RESULTANTE PROPIEDAD DE UN ASEGURADOR DE RIESGOS MONOGRADOS

Julio G. Villalón

Publicado en la Revista TRABAJOS DE ESTADISTICA

Volumen XIX - Cuaderno I y II, 1968

CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

IBERICA - Tarragona, 34
MADRID

a mi querido amigo
Miguel Linares sin-
ceramente.
Julio G. Villalón

CONSIDERACIONES SOBRE LA POLITICA DE DISTRIBUCION DEL EXCEDENTE RESULTANTE PROPIEDAD DE UN ASEGURADOR DE RIESGOS MONOGRADOS

Julio G. Villalón

I. Introducción

Vamos a tratar de obtener un modelo matemático, que nos permita determinar la política óptima que ha de adoptar el Asegurador con respecto a los excedentes anuales que pudieran surgir a su favor en la cobertura de riesgos monógrados anuales o no anuales, con reparto horizontal y sin tener en cuenta la influencia contributiva que sobre los excedentes pueda tener el interés generado por una materialización de reservas.

Denominaremos por C' el capital que tendrá que entregar el Asegurador en caso de siniestro, y P la cantidad recibida por el Asegurador en concepto de prima del seguro. Ahora bien, con el fin de dar mayor simplicidad a los razonamientos que utilizaremos para obtener el modelo matemático, operaremos con una prima igual a 1 y con un capital igual a C que es la relación por cociente entre C' y P, lo que no significa ninguna restricción, pues cualquier caso que pudiera presentarse, se resolvería teniendo en cuenta que operamos mediante módulos.

En primer lugar, determinamos la expresión funcional de la esperanza matemática de la suma de los valores actuales de las cantidades a retirar según la estrategia de banda $W^{(U)}$ que, como se debe saber, es estacionaria y óptima, a la vez que como va implicado en su misma notación, es una reunión de estrategias de barrera. Procedemos a esta obtención porque $W^{(U)}$ será la estrategia que proporcionará al Asegurador la política óptima.

En el apartado IV y V, obtenemos una expresión sencilla de la esperanza matemática de la suma de los valores actuales de las cantidades a retirar según una determinada estrategia y su máximo para los casos en que las estrategias sean de barrera o de banda.

Finalmente, recogemos las conclusiones obtenidas de nuestra investigación y la Bibliografía que hemos consultado.

II. Relaciones básicas

Consideraremos un Asegurador de riesgos monógrados dotado en el instante inicial de un capital d_0, el que por la misma naturaleza del seguro irá variando a lo largo del tiempo, debido a las contribuciones aleatorias $\{B_i\}$ de cuantías $-C$ (C, entero positivo) y 1, con espacio de probabilidad q y p respectivamente.

Por ser la estrategia de barrera una estrategia estacionaria, se verificarán las relaciones siguientes:

$$\left\{ \ddot{a}(d_0;\ W^{(U)} = (d_0 - d_0^{00}) + \ddot{a}(d_0^{00};\ W^{(I)}) \right\} C_{(d_0^{00},\ \aleph_0)} (d_0) \quad (^*)$$

y

$$\left\{ \ddot{a}(d_0;\ W^{(I)}) = {}_1/\ddot{a}(d_0;\ W^{(I)}) \right\} C_{(0,\ d_0^{00})} (d_0) \qquad [1]$$

de donde se deduce que

$$\left\{ \ddot{a}(d_0;\ W^{(I)}) = \right.$$

$$\left. = vp\ \ddot{a}(d_0 + 1;\ W^{(I)}) + vq\ \ddot{a}(d_0 - c;\ W^{(I)}) \right\} C_{(0,\ d_0^{00})} (d_0) \qquad [2]$$

(*) Utilizamos aquí la notación $C_{(d_0^{00},\ \aleph_0)}$ (d_0), siguiendo la notación internacional para expresar la función indicatriz del conjunto abierto $(d_0^{00},\ \aleph_0)$, donde $\aleph_0$ representa el cardinal transfinito más pequeño.

La relación [2], tiene estructura de ecuación en diferencias, que cumple las condiciones

$$\ddot{a}(0;\ W^{(I)}) = \ddot{a}(-1;\ W^{(I)}) =$$
$$= \dots\dots\dots = \ddot{a}(-c+1;\ W^{(I)}) = 0 \qquad [3]$$

y por ser la estrategia consecuente

$$\ddot{a}(d_0^{oo} + 1;\ W^{(I)}) = 1 + \ddot{a}(d_0^{oo};\ W^{(I)}) \qquad [4]$$

Utilizaremos con frecuencia, el valor actual de una contribución positiva diferida en un año, el que en principio acotaremos superiormente por el cociente $\frac{c}{c+1}$.

III. Estudio de la política a adoptar como función de las acotaciones a *vp*

Veamos que cuando $vp \in \left(\frac{1}{2}, \frac{c}{c+1}\right]$, la única decisión posible para el Asegurador viene dada por la estrategia de barrera $W^{(1)}$ y cuando $vp \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ la decisión posible viene dada por la estrategia de barrera $W^{(0)}$.

En efecto, considerada una estrategia estacionaria y óptima $W^{(0)}$, sabemos que define una estrategia de banda para la sucesión de conjuntos cerrados

$$[d_0^o = 0,\ d_0^{oo}],\ [d_1^o,\ d_1^{oo}],\ \dots\dots\dots,\ [d_m^o,\ d_m^{oo}]$$

en los que las retiradas son nulas y para la sucesión de conjuntos abiertos

$$(d_0^{oo},\ d^o),\ (d_1^{oo},\ d_2^{oo}),\ \dots\dots\dots,\ (d_{m-1}^{oo},\ d_m^o)$$

en los que las retiradas son mayores que cero.

Por una parte, $d_m^{oo} \leqslant c$, ya que si $vp < \dfrac{c}{c+1}$ y la estrategia $W^{(o)}$ es estacionaria y óptima, entonces el conjunto

$$\left\{ d_j \colon d_j > C;\ W^{(o)}(d_j) = 0 \quad \text{y} \quad W^{(o)}(d_j + 1) > 0 \right\}$$

es vacío, pues si este conjunto constara de un elemento $d_j > c$, entonces por ser $W^{(o)}(d_j + 1) = 1$ y también

$$\ddot{a}(d_j;\ W^{(o)}) > c + \ddot{a}(d_j - C;\ W^{(o)})$$

Por la [2]

$$(1 - vp)\ \ddot{a}(d_j,\ W^{(o)}) = vp + vq\ \ddot{a}(d_j - C;\ W^{(o)})$$

y

$$\ddot{a}(d_j - C;\ W^{(o)}) < \left[(c+1)vp - c\right](1 - v) \leqslant 0$$

Ahora bien,

$$\ddot{a}(d_j - C;\ W^{(o)}) \geqslant d_j - C > 0$$

contradictorio a la supuesta optimabilidad de $W^{(o)}$, luego efectivamente el conjunto de los d_j es vacío.

Por otra parte, si $2 \leqslant d_m^{oo} \leqslant C$, entonces por tratarse de una estrategia de banda

$$W^{o}(d_m^{oo}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{a}(d_m^{oo};\ W^{o}) = vp\ \ddot{a}(d_m^{oo} + 1;\ W^{o}) + vq\ \ddot{a}(d_m^{oo} - C;\ W^{o})$$
$$= vp + vp\ \ddot{a}(d_m^{oo};\ W^{o})$$

por las condiciones recogidas en [3] y [4].

De donde

$$\ddot{a}(d_m^{oo};\ W^{o}) = \frac{vp}{1 - vp} < \ddot{a}(d_m^{oo};\ W^{(1)})$$

contradictorio a la optimabilidad de W^{o}.

Visto que si $2 \leqslant d_m^{00} \leqslant C$, la W^0 no puede ser óptima, los únicos posibles valores de d_m^{00} entero positivo, son 0 y 1, lo que nos indica que nada más pueden existir dos posibles estrategias óptimas $W^{(0)}$ y $W^{(1)}$ definidas por las relaciones

$$\ddot{a}(d_0;\ W^{(0)}) = d_0, \qquad d_0 \geqslant 1$$

y

$$\ddot{a}(d_0;\ W^{(1)}) = d_0 - 1 + \frac{vp}{1 - vp}, \quad d_0 \geqslant 1$$

por ello

$$\ddot{a}(d_0;\ W^{(1)}) < d_0,$$

$$\forall\ vp \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \ddot{a}(d_0;\ W^{(1)}) < \ddot{a}(d_0;\ W^{(0)})$$

$$\ddot{a}(d_0;\ W^{(1)}) = d_0,$$

$$vp = \frac{1}{2} \Rightarrow \ddot{a}(d_0;\ W^{(1)}) = \ddot{a}(d_0;\ W^{(0)})$$

$$\ddot{a}(d_0;\ W^{(1)}) > d_0,$$

$$vp > \frac{1}{2} \Rightarrow \ddot{a}(d_0;\ W^{(1)}) > \ddot{a}(d_0;\ W^{(0)})$$

Debido a que se presenta un problema de ambigüedad para el caso en que $vp = \frac{1}{2}$ según las dos estrategias $W^{(0)}$ y $W^{(1)}$, tenemos que recurrir al criterio de preferencia basado en la ley de subestimación de las necesidades futuras (*), para adoptar la estrategia $W^{(0)}$.

IV. Formulación adecuada de $\ddot{a}(d_0;\ W^{(1)})$ para su estudio

Para llevar a cabo esta formulación, haremos uso de la propiedad definida por la ecuación en diferencias [2], de ecuación característica

$$f(r) = (vp)r^{C+1} - r^C + vq = 0 \qquad [5]$$

(*) Castañeda, J.: *Lecciones de Teoría Económica*, p. 223. Madrid, 1965.

cuyas $(C + 1)$ raíces, son distintas entre sí y no nulas. En el caso de ser C impar existen dos únicas raíces reales pertenecientes a los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$ y el resto son raíces complejas. Cuando C es par, existen solamente tres raíces reales pertenecientes a los intervalos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 2)$ y el resto son raíces complejas.

Suponiendo que $vp > \frac{C}{C + 1}$, lo que mantendremos en lo sucesivo salvo mención expresa, el módulo de cada una de las raíces complejas de $f(r) = 0$ está acotado superiormente por la unidad.

Puesto que la ecuación [5] carece de raíces múltiples y siendo la dimensión del espacio vectorial integrado por las soluciones de la [2] de orden $C + 1$, la expresión de su solución general será

$$\left\{ \ddot{a}(d_0;\, W^{(t)}) = \sum_{S=1}^{C+1} k_S\, r_S^{d_0} \right\} C_{[1,\, d_0^{00}]}\,(d_0) \qquad [6]$$

y de la [3] y [4] se deduce el sistema en las k_S siguiente:

$$\sum_{S=1}^{C+1} k_S\, r^j{}_S = 0, \qquad [7]$$

$\forall\, j$, entero perteneciente a $[0, \cdots C + 1]$

$$\sum_{S=1}^{C+1} k_S\, r_S^{d_0^{00}}\,(r_S - 1) = 1 \qquad [8]$$

cuyas raíces vienen dadas por expresiones del tipo

$$k_S = \frac{R_S}{\Delta R(d_0^{00})}, \qquad S = 1, 2, \ldots, (C + 1) \qquad [9]$$

donde $\Delta R(d_0^{00})$ es el determinante del sistema y R_S es el determinante que resulta del $\Delta R(d_0^{00})$ al sustituir en éste la columna s-ésima por la columna formada por los términos independientes.

Sustituyendo en la [6] los valores de k_s, obtenemos la expresión

$$\left\{ \ddot{a}(d_0;\ W^{(I)}) = \sum_{s=1}^{C+1} \frac{R_s}{\Delta R(d_0^{00})}\, r_s^{d_0} \right\} C_{[1,\ d_0^{00}]}\ (d_0)$$

$$= \frac{R(d_0)}{\Delta R(d_0^{00})}\, C_{[1,\ d_0^{00}]}\ (d_0) \qquad [10]$$

Ahora bien, con el fin de operar con funciones reales y dado que las funciones $R(d_0)$ son reales para

$$C \in (\dot{4} + 1) \cup (\dot{4} + 2)$$

e imaginarias puras para

$$C \in (\dot{4}) \cup (\dot{4} + 3)$$

definiremos la función

$$T(d_0) = h\ R(d_0) \qquad [11]$$

donde $h = 1$ cuando $R(d_0)$ es real y

$$h = \frac{1}{\sqrt{-1}}$$

cuando $R(d_0)$ es imaginaria pura.

Finalmente, teniendo en cuenta que siempre se puede suponer que $T(1)$ es positivo y por tanto $\Delta T(d_0) > 0$, lo que implica que $T(d_0)$ es una función no negativa creciente para todo d_0 no negativo, podemos expresar el valor de $\ddot{a}(d_0;\ W^{(I)})$ bajo la forma adecuada

$$\left\{ \ddot{a}(d_0;\ W^{(I)}) = \frac{T(d_0)}{\Delta T(d_0^{00})} \right\} C_{[0,\ d_0^{00}]}\ (\mathrm{d}_0) \qquad [12]$$

En virtud de la [4]

$$\ddot{a}(d_0^{00} + 1;\ W^{(I)}) = \frac{T(d_0^{00} + 1)}{\Delta T(d_0^{00})}$$

de donde la [12] se puede prolongar a

$$\ddot{a}(d_0;\ W^{(I)}) = \frac{T(d_0)}{\Delta T\,(d_0^{00})}\ C_{[0,\ d_0^{00}+1]}\ (d_0) \qquad [13]$$

V. Cálculo del máximo de $\ddot{a}(d_0;\ W)$

A) Caso de estrategia de barrera

1. Si observamos la expresión de $\ddot{a}(d_0;\ W^{(I)})$ según la [13], vemos que para maximizar esta función con respecto a la estrategia a elegir $W^{(I)}$, bastará minimizar con respecto a d_0^{00} (infimun del conjunto de excedentes que generan retiradas no nulas) el denominador $\Delta T(d_0^{00})$.

Para ello, tengamos en cuenta que

$$\Delta T(d_0^{00}) = \sum_{s=1}^{C+1} h\ R_s(r_s - 1)\ \cdot\ r_s^{d_0^{00}}$$

$$= \sum_{s=1}^{C+1} t_s\ \cdot\ r_s^{d_0^{00}}$$

donde

$$t_s = h\ R_s(r_s - 1)$$

y observemos que $\Delta T(d_0^{00})$ es creciente para $d_0^{00} \in [1,\ C]$, oscilante para $d_0^{00} > C$ debido a que $r_s \in (-1,\ 0)$ o que r_m sea compleja. No obstante, podemos suponer que para un d_0^{00} suficientemente grande, la contribución del $t_1 \cdot r_1^{d_0^{00}}$ para $r_1 \in (1,\ 2)$ neutraliza estas influencias oscilatorias y por ser $t_1 > 0$ la $\Delta T(d_0^{00})$ será creciente con d_0^{00}. Las estrategias de barrera que surgen a partir de un cierto valor de d_0^{00} están dominadas por estrategias del mismo tipo obtenidas para valores de d_0^{00} menores que aquél.

Si el crecimiento de la $\Delta T(C)$ se verifica $\forall C > 1$, entonces $W^{(1)}$ es la estrategia óptima de entre las de barrera.

En efecto, teniendo en cuenta que

$$\Delta T(d_0) = \frac{q}{p} \sum_{s=1}^{c} \Delta T(d_0 - S) + \frac{i}{p} T(d_0)$$

obtenemos

$$\Delta^2 T(d_0) = \frac{q}{p} \sum_{s=1}^{c} \Delta^2 T(d_0 - S) + \left(\frac{i}{p}\right) \Delta T(d_0) \geqslant 0,$$

$$\forall C \geqslant 1$$

Por otra parte,

$$\ddot{a}(d_0;\ W^{(1)}) = d_0 - 1 + \frac{T(1)}{\Delta T(1)}$$

$$\ddot{a}(d_0;\ W^{(d_0^{00})}) = \frac{T(d_0)}{\Delta T(d_0^{00})} = \frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{d_0-1} \Delta T(s) + T(1)}{\Delta T(d_0^{00})}$$

por tanto

$$\ddot{a}(d_0;\ W^{(1)}) > \ddot{a}(d_0;\ W^{(d_0^{00})}),$$

$$\forall\ d_0 \leqslant d_0^{00} \quad \text{y} \quad \forall\ d_0^{00} > 1.$$

Análogamente se demuestra que $\forall\ d_0 > d_0^{00}$ se verifica

$$\ddot{a}(d_0;\ W^{(1)}) > \ddot{a}(d_0;\ W^{(d_0)}),$$

$$\forall\ d_0 \geqslant 1 \quad \text{y} \quad \forall\ d_0^{00} > 1.$$

2. Ahora vamos a hacer algunas consideraciones respecto al concepto de preferencia para elegir la estrategia óptima.

En el caso de que

$$\Delta T(d_i^{00}) = \Delta T(d_i^{00} + 1)$$

implica que

$$\ddot{a}(d_0;\ W^{(d_i^{00})}) = \ddot{a}(d_0;\ W^{(d_i^{00}+1)}), \qquad \forall\ d_0$$

Ante tal circunstancia, aplicando la ley de la subestimación de las necesidades futuras adoptaríamos la estrategia $W^{(d_i^{00})}$. Pero esta decisión vamos a ver que en algunos casos no es la correcta.

Efectivamente, para

$$\Delta T(d_i^{00}) = \Delta T(d_i^{00} + d^0), \qquad \forall\ d^0 > 1$$

y

$$\Delta T(d_i^{00} + S) > \Delta T(d_i^{00}), \qquad S = 1, 2, \ldots, (d^0 - 1)$$

existe una relación de dominio de la estrategia

$$W^{(d_i^{00}+d^0)} \quad \text{respecto a} \quad W^{(d_i^{00})}$$

Para demostrar esto, nos vamos a apoyar en la relación

$$\left\{\ddot{a}(d_0;\ W^{(d_i^{00})}) = \frac{T(d_0)}{\Delta T(d_i^{00})} = \right.$$

$$\left. = \frac{T(d_0)}{\Delta T(d_i^{00} + d^0)} = \ddot{a}(d_0;\ W^{(d_i^{00}+d^0)})\right\} \quad C_{[1,\ d_i^{00}+1]}\ (d_0)$$

Por otra parte, se verifica la relación

$$\left\{\ddot{a}(d_i^{00} + 1 + S;\ W^{(d_i^{00})}) = \right.$$

$$\left. = S + \frac{T(d_i^{00} + 1)}{\Delta T(d_i^{00})} < \ddot{a}(d^{00} + 1 + S;\ W^{(d_i^{00}+d^0)})\right\} \quad C_{[1,\ d^0]}\ (S)$$

Además

$$\left\{\ddot{a}(d_0;\ W^{(d_i^{00})}) = d_0 - (d_i^{00} + d^0 + 1) + \right.$$

$$+\ \ddot{a}(d_i^{00} + d^0 + 1;\ W^{(d_i^0)}) <$$

$$\left. < \ddot{a}(d_0;\ W^{(d_i^{00} + d^0)}) \right\} C_{(d_i^{00} + d^{00} + 1,\ N_0)}(d_0)$$

Por tanto,

$$\ddot{a}(d_0;\ W^{(d_i^{00} + d^0)}) = \ddot{a}(d_0;\ W^{(d_i^{00})}),$$
$$\forall\ d_0 \in [1,\ d_i^{00} + 1]$$

$$\ddot{a}(d_0;\ W^{(d_i^{00} + d^0)}) > \ddot{a}(d_0;\ W^{(d_i^{00})}),$$
$$\forall\ d_0 \in (d_i^{00} + 1,\ N_0)$$

c.q.d.

B) Caso de estrategias de banda

Debido a que en el caso anterior el máximo de $\ddot{a}(d_0;\ W^{(I)})$ puede depender de d_0, daría lugar a un conjunto de estrategias de barrera que gozaran de la propiedad de optimabilidad con estructura de grafo (*), en tal caso procedería la determinación de un camino crítico (**), el que en nuestro caso equivale a una estrategia de banda.

1. Considerada la estrategia de banda $W^{(U)}$, definida para la sucesión de conjuntos de excedentes que dan lugar a retiradas nulas

$$[d_0^0,\ d_0^{00}],\ [d_1^0,\ d_1^{00}],\ \ldots\ldots\ldots,\ [d_n^0,\ d_n^{00}]$$

(*) PIRLA, FZ. J.: *Economía y Gestión de la Empresa.* Pablo López, Madrid, 1967.

(**) TROCONIZ, FZ. A.: *Nuevo método para la investigación de los caminos hamiltonianos de un grafo.* Facultad de Ciencias Políticas, Económicas y Comerciales de Bilbao. Bilbao, 1965.

y por la sucesión de conjuntos de excedentes que dan lugar a retiradas distintas de cero

$$(d_0^{00}, d_1^{0}), (d_1^{00}, d_2^{0}), \ldots\ldots\ldots, (d_{n-1}^{00}, d_n^{0})$$

que además de ser óptima, cumple la relación

$$\ddot{a}(d_n^{00}; W^{(U)}) \geqslant \frac{E(Bs)\ (*)}{i} - C$$

entonces

$$d_m^{00} \in (0, d_n^{00} + C).$$

Ya que si existiera un $d^{00} \in [d^{00} + C, N_0]$ tal que la retirada para un excedente d_i^{00} fuera nula e igual a uno para el mismo excedente incrementado en una unidad, entonces

$$\ddot{a}(d_i^{00}; W^{(U)}) = \frac{vp + vq\ \ddot{a}(d_i^{00} - C; W^{(U)})}{1 - vp}.$$

Ahora teniendo en cuenta la optimabilidad de $W^{(U)}$, se verifica

$$\ddot{a}(d_i^{00} - C; W^{(U)}) < \frac{E[B_s]}{i} - C = \frac{(C+1)vp - C}{1 - v}$$

y de aquí

$$\ddot{a}(d_i^{00} - C; W^{(U)}) \geqslant \ddot{a}(d_n^{00}; W^{(U)})$$

y

$$\frac{E(B_s)}{i} - C > \ddot{a}(d_n^{00}; W^{(U)})$$

lo que al ser contradictorio al enunciado, nos indica que el

$$d_i^{00} \in [d_n^{00} + C, N_0]$$

no es límite inferior de una barrera.

(*) $E(Bs)$, es la esperanza matemática de la variable aleatoria de las contribuciones.

2. Para la misma estrategia $W^{(U)}$ que verificase la hipótesis complementaria respecto a la acotación de la $\ddot{a}(d_n^{00}; W^{(U)})$, podemos afirmar que existe una estrategia $W'^{(U)}$ definida por los mismos conjuntos que la $W^{(U)}$ y ampliada en el conjunto abierto

$$(d_n^{00}, d_{n+1}^{0} = d_{n+1}^{00} = d_n^{00} + C = d_m^{00})$$

que niega la optimabilidad de la estrategia $W^{(U)}$.

Para ver que se verifica lo anteriormente enunciado, bastaría demostrar que

$$\ddot{a}(d_n^{00} + C; W^{(U)}) < \ddot{a}(d_n^{00} + C; W'^{(U)})$$

lo cual se deduce de la hipótesis complementaria utilizando un procedimiento análogo al anterior.

2.1. En el caso de que $n = 0$ y si para una estrategia de barrera se cumple la hipótesis complementaria citada anteriormente, existe una estrategia de banda $W^{(U)}$ definida por el conjunto abierto (d_0^{00}, d_1^{0}) y por el conjunto cerrado

$$[d_1^{0} = d_1^{00} = d_0^{00} + C = d_m^{00}]$$

que niega la optimabilidad de $W^{(I)}$.

2.2. Para toda estrategia $W^{(U)}$ óptima no puede existir un d_m^{00} que verifique la hipótesis complementaria.

3. Para toda estrategia de banda óptima $W^{(U)}$ que verifique

$$\ddot{a}(d_n^{00}; W^{(U)}) \in \left[\frac{E(B_S)}{i} - (C + 1), \frac{E(B_S)}{i} - C\right]$$

se verifica que

$$d_m^{00} \in [d_n^{00} + 2, d_n^{00} + C]$$

En efecto, puesto que

$$\ddot{a}(d_n^{00}; W^{(U)}) \in \left(0, \frac{E(B_S)}{i} - C\right)$$

se ha demostrado anteriormente que $d_{n}^{00} \in [d_{n}^{00} + 2, N_0]$. Luego bastará probar que

$$d_{n}^{00} \in [0, d_{n}^{00} + C]$$

Para lo cual, si suponemos que $d_{i}^{00} \in (d_{n}^{00} + 2, N_0)$ y para este d_{i}^{00}

$$W^{(U)}(d^{00}) = 0 \qquad \text{y} \qquad W^{(U)}(d_{i}^{00} + 1) = 1$$

entonces

$$\frac{E(B_s)}{i} - (C + 1) > \ddot{a}(d_{n}^{00}; W^{(U)})$$

lo cual al ser contradictorio con el enunciado nos lleva a que

$$d_{i}^{00} \notin (d_{n}^{00} + C, N_0)$$

C) Caso particular para $C = 2$

En este caso se pueden presentar como estrategias óptimas tanto las estrategias de barrera como de banda, donde cada banda es tal que

$$d_{n+1}^{00} - d_{n}^{00} = 2$$

La función característica correspondiente obtenida de la [5] al hacer $C = 2$ sería

$$f(r) = (vp)r^3 - r^2 + vq = 0$$

Recordando la hipótesis $vp > \frac{C}{C+1}$, que en este caso se convertiría en $vp > \frac{2}{3}$, existen tres raíces

$$r_1 \in (1, 2); \quad r_2 \in (-1, 0) \quad \text{y} \quad r_3 \in (0, 1).$$

Ahora bien,

$$\Delta T(d_0^{00}) = \sum_{s=1}^{3} k_s \, r_s^{d_0^{00}}$$

y cuando d_0^{00} sea lo suficientemente grande, e igual a d_n^{00}, como para que predomine el primer térinmno del sumatorio, la estrategia óptima es una estrategia de barrera en d_n^{00}. Ahora bien, todo d_j^{00} para el cual $\Delta T(d^{00})$ sea oscilante, dará lugar a una estrategia de banda óptima respecto a todas las estrategias de barrera.

VI. Conclusiones

1. Cuando hacemos el estudio de la política a adoptar por el Asegurador en función del dominio del valor actual unitario y contingente vp, vemos que cuando éste se encuentra acotado superiormente por $\frac{C}{C+1}$, únicamente son posibles dos estrategias estacionarias del tipo de barrera que quedan unívocamente determinadas por los intervalos del recorrido de vp, $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{C}{C+1}\right]$ respectivamente.

2. En el caso de que el valor actual unitario y contingente estuviera acotado inferiormente por $\frac{C}{C+1}$, hemos obtenido una expresión fraccionaria de la esperanza matemática de la suma de los valores actuales de las cantidades a retirar según una estrategia de barrera, que presenta la particularidad de que solamente depende su denominador del ínfimun del conjunto que permite retiradas no nulas. Debido a esta particularidad, la determinación de la estrategia óptima para el Asegurador se logra de forma simple calculando el valor que hace mínimo el denominador.

3. Hemos probado que para las estrategias de barrera, se pueden presentar casos en los que la elección de la estrategia óptima

a adoptar por el Asegurador, en base a una preferencia apoyada en la ley de la subestimación de las necesidades futuras, no es la adecuada.

4. Se han estudiado los casos en que el máximo de $\ddot{a}(d_0; W^{(I)})$ con respecto a $W^{(I)}$ dependa de d_0 y se ha obtenido como resultado una estrategia de banda, en la que el supremun del conjunto de excedentes de retiradas nulas pertenece a $(0, d_n^{00} + C)$.

5. Podríamos hacer consideraciones de tipo teórico desde un punto de vista colectivo suponiendo que el seguro es un juego equitativo, lo que implica la no existencia de recargos de seguridad y la completa absorción de los recargos, que en España llamamos de administración y comerciales. Nos referimos al caso particular en que $C = 1$ y $P = 1$, lo que significaría que el montante total de las reclamaciones es igual al total de las primas recibidas. En este caso, las únicas estrategias estacionarias óptimas, si existieren, son las estrategias de barrera.

El modelo matemático que recoge el caso de seguro teórico mencionado anteriormente tal es, que la decisión adecuada a seguir por el Asegurador ha de ser dada por una estrategia de barrera óptima frente a todas las estrategias de barrera. La estrategia de barrera óptima es

$$W^{(d_0^{00})} \left\{ \begin{array}{llll} \text{cuando} & d_0^{00} = 0 & \text{para} & vp \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \text{cuando} & d_0^{00} \geqslant 1 & \text{para} & vp > \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

En este caso, cabe considerar la estrategia más general

$$W^{(d_r^{00},\, e)}(d_0) = \left\{ \begin{array}{l} 0.\ C_{[0,\, d_0^{00}]}\,(d_0) \\ d_0 - (d_0^{00} + 1 - e)\ C_{(d_0^{00},\, N_0)}\,(d_0) \end{array} \right.$$

que es consecuente y tal que para $e = 1$ se reduce a la estrategia hasta ahora utilizada, $W^{(d_0^{00})}$.

6. En el caso de que $C = 1$ y $P = 2$, asociaríamos el tipo de seguro considerado en forma colectiva donde hubiera recargos de seguridad y gastos de administración no totalmente consumidos.

En este caso, la expresión de $\ddot{a}(d_0;\ W^{(1)})$ es un cociente de funciones de d_0 que no permite calcular fácilmente su máximo, luego la estrategia a seguir por el Asegurador es muy difícil de calcular. Por ello, creemos podría intentarse otro procedimiento para salvar esta dificultad.

VII. Bibliografía

1. AUMANN, R. J.: "Markets with a Continium of Tradors". *Econometrica,* vol. 32, 1964.

2. ARNÁIZ, G.: *Introducción a la Estadística Teórica.* Lex Nova, Valladolid, 1965.

3. BELLMAN, R. E.: *Dynamic Programming.* Princeton, Princeton University Press, 1957.

4. BORCH, K.: *Payment of Dividend by Insurance Companies.* Econometrica Research Memorandum 31, Princeton University, January, 1963.

5. CASTAÑEDA, J.: *Lecciones de Teoría Económica (Consumo, Producción, Precios y Rentas).* Madrid, 1965.

6. DEBREU, G.: *Preference Functions on measure spaces of Economic Agents.* Lecture at the Rome Congress of the Econometric Society, 1965.

7. DRESHER, M.; SHAPLEY, L. S.; TUCKER, A. W. (Ed.): *Advances in Game Theory.* Princeton University Press, Princeton N. J., 1964.

8. DUNCAN, R.; HOWARD RAIFFA: *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey.* Willey, New York, 1957.

9. LASHERAS-SANZ, A.: *Teoría Matemática del Seguro.* Dossat, Madrid, 1948.

10. PIRLA, FZ. J.: *Economía y Gestión de la Empresa.* Pablo López, Madrid, 1967.

11. Ríos, S.: "Conceptos de utilidad en los problemas de decisión". *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid,* tomo LX, cuaderno tercero, 1966.

— *Procesos dinámicos de decisión en concurrencia.* Memorias de la Real Academia de Ciencias Eaxctas, Físicas y Naturales de Madrid, Serie de Ciencias exactas, tomo VII, Memoria núm. 1. Madrid, 1967.

12. ROBINSON, J.: "An Iterative Method of Solvien a Game". *Annals of Mathematics,* vol. 54, 1951.

13. SHUBIK, M.: *Strategy and Market Structure.* John Willey, 1958.

14. TROCONIZ, A. FZ. DE: *Lecciones de Estadística Teórica.* Facultad de Económicas de Bilbao. 1967.

15. VEGAS, A.: *Lógica de la Decisión e Inferencia Estadística.* Facultad de Economia. Universidad de los Andes. Mérida, Venezuela, 1965.