

---

**CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN**

**Nº 84**

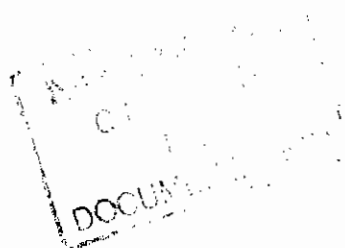
**\* \* \* \***

**ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA DE UNA  
CARTERA DE PÓLIZAS Y DE LA EFICIENCIA  
DE UN SISTEMA BONUS-MALUS**

---

**Autores: José Luis Vilar Zanón  
José Antonio Gil Fana  
Antonio Heras Martínez**

**Abril, 2004**



**ISBN: 84-89429-74-X**

**Depósito Legal: M-19.757-2004**

**Copyright: Fundación MAPFRE Estudios**

**Prohibida la reproducción total o parcial de este trabajo sin el permiso escrito de los autores o de la FUNDACIÓN MAPFRE ESTUDIOS**

## **LISTA DE CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN MAPFRE ESTUDIOS EDITADOS:**

1. Filosofía Empresarial
2. Resultados de la Encuesta sobre "Altos Profesionales de Seguros" (A.P.S.)
3. Dirección y Gestión de la Seguridad
4. Los Seguros en una Europa cambiante: 1990-1995 (No disponible)
5. La Distribución Comercial del Seguro: Sus Estrategias y Riesgos
6. Elementos de Dirección Estratégica de la Empresa
7. Los Seguros de Responsabilidad Civil y su Obligatoriedad de Aseguramiento
8. La Implantación de un Sistema de Controlling Estratégico en la Empresa
9. Técnicas de Trabajo Intelectual
10. Desarrollo Directivo: Una Inversión Estratégica
11. El Concepto de Seguridad en la Ciencia y la Ciencia de la Seguridad
12. Los Seguros de Salud y la Sanidad Privada
13. Calidad Total y Seguridad
14. El Reaseguro de Exceso de Pérdidas
15. El Coste de los Riesgos en la Empresa Española 1991
16. La Legislación Española de Seguros y su Adaptación a la Normativa Comunitaria

**Número Especial: Informe sobre el Mercado de Seguros 1993**

17. Medio Ambiente Seguro: Desarrollo Futuro
18. El Seguro de Crédito a la Exportación en los países de la OCDE (Evaluación de los resultados de los aseguradores públicos)
19. Una Teoría de la Educación
20. El Reaseguro en los Procesos de Integración Económica

**Número Especial: Informe sobre el Mercado de Seguros 1994**

21. La Nueva Regulación de las Provisiones Técnicas en la Directiva de Cuentas de la C.E.E. Provisiones Técnicas de Seguros de Vida en las Directivas Comunitarias
22. Rentabilidad y Productividad de Entidades Aseguradoras
23. Análisis de la Demanda de Seguro Sanitario Privado
24. El Seguro: Expresión de Solidaridad desde la Perspectiva del Derecho
25. El Reaseguro Financiero
26. El Coste de los Riesgos en la Empresa Española 1993
27. La Calidad Total como Factor para elevar la Cuota de Mercado en Empresas de Seguros
28. La Naturaleza Jurídica del Seguro de Responsabilidad Civil
29. Ruina y Seguro de Responsabilidad Civil Decenal

**Número Especial: Informe sobre el Mercado de Seguros 1995**

30. El Tiempo del Directivo

31. Tipos Estratégicos, Orientación al Mercado y Resultados Económicos: Análisis Empírico del Sector Asegurador Español
32. Decisiones Racionales en Reaseguro
33. La función del Derecho en la Economía
34. El Coste de los Riesgos en la Empresa Española 1995
35. El Control de Riesgos en Fraudes Informáticos
36. Cláusulas Limitativas de los Derechos de los Asegurados y Cláusulas Delimitadoras del Riesgo Cubierto. Las Cláusulas de Limitación Temporal de la Cobertura en el Seguro de Responsabilidad Civil

Número Especial: Informe sobre el Mercado de Seguros 1996

37. La Responsabilidad Civil por Accidente de Circulación. Puntual Comparación de los Derechos Francés y Español
38. Legislación y Estadísticas del Mercado de Seguros en la Comunidad Iberoamericana
39. Perspectiva Histórica de los Documentos Estadístico-Contables del Órgano de Control: Aspectos Jurídicos, Formalización y Explotación
40. Resultados de la Encuesta sobre la Organización y Gestión de la Seguridad en la Empresa (1996)
41. De Maastricht a Amsterdam: Un paso más en la integración europea

Número Especial: Informe sobre el Mercado de Seguros 1997

42. La Responsabilidad Civil por contaminación del entorno y su aseguramiento
43. Resultados de la Encuesta sobre Disponibilidad de Instalaciones de Protección contra Incendios en la Empresa 1997"

44. Resultados de la Encuesta sobre Implantación en la Empresa de la Ley de Prevención de Riesgos Laborales
45. Los Impuestos en una Economía Global
46. Evolución y Predicción de las Tablas de Mortalidad Dinámicas para la Población Española
47. El Fraude en el Seguro del Automóvil: Cómo detectarlo
48. Matemática Actuarial no Vida con MapleV
49. Solvencia y Estabilidad Financiera en la Empresa de Seguros: Metodología y Evaluación Empírica mediante Análisis Multivariante
50. Mixturas de Distribuciones: Aplicación a las variables más relevantes que modelan la siniestralidad en la Empresa Aseguradora
51. Seguridades y Riesgos del joven en los grupos de edad
52. La Estructura Financiera de las Entidades de Seguros
53. Habilidades Directivas: Estudio de sesgo de género en instrumentos de evaluación
54. El Corredor de Reaseguro y su legislación específica en América y Europa
55. Resultados de la Encuesta: "La Seguridad contra Intrusión (Seguridad Privada) en la Empresa. 1999"
56. Análisis económico y estadístico de los factores determinantes de la demanda de los seguros privados en España
57. Informe final. Encuesta: "La Organización y Gestión de la Seguridad en la Empresa. 1999"

58. Problemática contable de las operaciones de reaseguro
59. Estudios sobre el Euro y el Seguro
60. Análisis Técnico y Económico del conjunto de las empresas aseguradoras de la Unión Europea
61. Sistemas Bonus-Malus generalizados con inclusión de los costes de los siniestros
62. Seguridad Social. Temas generales y régimen de clases pasivas del Estado
63. Análisis de la repercusión fiscal del seguro de vida y los planes de pensiones. Instrumentos de previsión social individual y empresarial
64. Fundamentos técnicos de la Regulación del Margen de Solvencia
65. Ética Empresarial y Globalización
66. Encuesta: "Seguridad contra Incendios en la empresa. 2000"
67. Gestión Directiva en la Internacionalización de la Empresa
68. Los seguros de crédito y de caución en Iberoamérica
69. Provisiones para prestaciones a la luz del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados: Métodos Estadísticos de Cálculo
70. El Cuadro de Mando Integral para las entidades aseguradoras
71. Gestión de activos y pasivos en la cartera de un fondo de pensiones
72. Análisis del proceso de exteriorización de los compromisos por pensiones
73. Financiación del capital-riesgo mediante el seguro

74. Estructuras de propiedad, organización y canales de distribución de las empresas aseguradoras en el mercado español.
75. Incidencia de la Nueva Ley de Enjuiciamiento Civil en los procesos de responsabilidad civil derivada del uso de vehículos a motor.
76. La incorporación de los sistemas privados de pensiones en las pequeñas y medianas empresas.
77. Resultados de la Encuesta sobre *"El Coste de los Riesgos en la Empresa Española. 2001"*.
78. Nuevas perspectivas de la educación universitaria a distancia.
79. La actividad de las compañías aseguradoras de vida en el marco de la gestión integral de activos y pasivos.
80. Los Planes y Fondos de Pensiones en el contexto europeo: la necesidad de una armonización.
81. El Seguro de Dependencia. Una visión general.
82. Informe Final. Encuesta: "La Organización y Gestión de la Seguridad en la Empresa 2002".
83. La teoría del valor extremo: fundamentos y aplicación al seguro, ramo de responsabilidad civil autos.
84. Estudio de la estructura de una cartera de pólizas y de la eficiencia de un Sistema Bonus-Malus.



**ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA DE UNA  
CARTERA DE PÓLIZAS Y DE LA EFICIENCIA  
DE UN SISTEMA BONUS-MALUS**

**Autores:** José Luis Vilar Zanón  
José Antonio Gil Fana  
Antonio Heras Martínez

Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I  
Universidad Complutense de Madrid

Para la realización de este trabajo la Fundación MAPFRE ESTUDIOS concedió a sus autores una Beca Riesgo y Seguro.



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. El modelo teórico.</b>	<b>3</b>
2.1. Distribuciones estables. . . . .	3
2.2. Distribución del número de siniestros. . . . .	8
2.3. Cálculo numérico de la densidad estable $f_\alpha$ . . . . .	11
<b>3. El Ajuste del modelo.</b>	<b>13</b>
3.1. Ajuste de la distribución del número de siniestros. . . . .	13
3.2. Momentos de la distribución de $\Lambda$ . . . . .	14
3.3. Momentos de la distribución del número de siniestros. . . . .	15
<b>4. Discretización de la densidad de <math>\Lambda</math></b>	<b>17</b>
<b>5. Análisis del sistema Bonus-Malus.</b>	<b>18</b>
5.1. Preliminares. . . . .	18
5.2. Evaluación del Sistema Bonus-Malus. Criterios asintóticos. . . . .	21
5.2.1. Equilibrio Financiero. . . . .	22
5.2.2. Equidad. . . . .	24
<b>6. Conclusiones</b>	<b>26</b>
<b>7. Tablas y Figuras</b>	<b>28</b>
<b>8. Bibliografía</b>	<b>41</b>



# 1. Introducción

A lo largo de este trabajo se va a proceder a la modelización del número de siniestros de una cartera real para después pasar al estudio del Sistema Bonus-Malus (SBM) implantado en la misma. En el epígrafe 2 se expone el modelo teórico que se ajustará. En 3 se exponen con detalle los pasos seguidos para realizar el ajuste del modelo. En 4 se discretiza la densidad de estructura obteniéndose la distribución que al cabo será utilizada a lo largo del análisis del sistema bonus-malus. Finalmente en 5 se procede a analizar el SBM.

Los datos utilizados corresponden al *número de siniestros por póliza de una cartera de responsabilidad civil autos durante el año 2001*. Se resumen en la tabla 1 en donde

$N_k^i$  = Número de pólizas que han permanecido  $i$  meses en la cartera y han tenido  $k$  siniestros

Dada la naturaleza de nuestro estudio, se trata de ajustar una distribución de Poisson ponderada que dé cuenta de la estructura de este conjunto de riesgos. Para ello se intentó el ajuste de sucesivos modelos de este tipo, tomando sucesivamente como distribución del parámetro de Poisson  $\Lambda$  una *gamma*, una *inversa gaussiana* o también probando con *distribuciones de tipo discreto*. Finalmente el único modelo que ofreció un ajuste aceptable (y excepcionalmente bueno) es el de Poisson ponderado por una distribución que depende a su vez de una *distribución estable*.

Son conocidos los problemas que plantean las distribuciones de probabilidad estables, consistente en que en la mayoría de los casos no se dispone de una fórmula explícita y cerrada de la función de distribución o de su densidad, aunque sí de su transformada (por ejemplo de la función característica). Esto plantea serios inconvenientes en el momento de calcular probabilidades asociadas a un modelo de este tipo, ya que para llevarlo a cabo habrá

que proceder a antitransformar y a calcular numéricamente las integrales pertinentes. Estos problemas serán superados con la ayuda de lo expuesto en los epígrafes 2.1 y 2.3.

## 2. El modelo teórico.

Son numerosos los trabajos que tratan acerca de temas relacionados con las distribuciones estables. A lo largo de este trabajo tomamos como referencias básicas a Zolotarev (1986), y Nolan (1999 y 1997). En este último se demuestran las expresiones integrales (antitransformadas) que permiten calcular valores de las densidades o distribuciones estables, y que serán utilizadas a lo largo de este trabajo.

También existen numerosas referencias en donde se estudian aplicaciones de las distribuciones estables a la modelización del riesgo en seguros, tanto para el número de siniestros como para la cuantía de estos. Puesto que en este trabajo nos dedicamos a la modelización del número de siniestros, mencionaremos principalmente a Thyron (1960), Hougaard (1986), Klugman, Panjer y Willmot (1998).

### 2.1. Distribuciones estables.

Consideremos una sucesión de sumas de v.a. independientes e idénticamente distribuidas y normalizadas

$$Z_n = (X_1 + \dots + X_n) B_n^{-1} - A_n, \quad n = 1, 2, \dots, B_n > 0, A_n \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Se sabe cual es el comportamiento en el límite de las distribuciones  $F_n$  asociadas a las  $Z_n$  gracias al *Teorema Central del Límite* que establece la convergencia en distribución hacia una normal. Las distribuciones estables constituyen una generalización de esta propiedad asintótica ya que vienen a ser todas aquellas que pueden ser límite en el anterior esquema (1):

**Definición 1** *Una función de distribución  $G$  se dice estable si puede aparecer en (1) como:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n =^d G.$$

Además se puede demostrar que *toda distribución estable es infinitamente divisible (Zolotarev (1986) p. 3-4)*, propiedad esta que nos será muy útil a la hora de razonar en términos de equivalencia de distribuciones de Poisson ponderadas o compuestas.

Históricamente, las distribuciones estables se empezaron a estudiar como una generalización de la distribución normal. La función característica de esta última es

$$\exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\}$$

y se quería averiguar si generalizando la anterior expresión de la siguiente forma

$$\exp \{ -\rho |t|^\alpha \}, \quad (2)$$

estas también se correspondían con funciones de densidad. Para valores distintos de  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\rho > 0$ , la antitransformada correspondiente no es un función de densidad. La dificultad principal en el manejo de las distribuciones estables consistía en que las densidades asociadas a las funciones características (2) no se podían expresar en forma explícita. Excepciones a esta regla son los casos  $\alpha = 1$  y  $\alpha = 2$ , correspondientes a las distribuciones *Cauchy* y *normal* respectivamente.

Desde una perspectiva actual, la familia completa de las distribuciones estables admite varias parametrizaciones, utilizándose una u otra dependiendo del tipo de propiedades a estudiar, con la facilidad de uso como criterio de selección de una o de otra. En nuestro caso, y teniendo en cuenta que necesitamos calcular valores de ciertas densidades estables mediante cálculo numérico, utilizaremos una variación de la *parametrización (M) de Zolotarev*



(Zolotarev (1986) p. 10-11, Nolan (1997)), también conocida bajo el nombre de *parametrización*  $\mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$  (Nolan (1999)). En esta parametrización,  $\delta, \gamma$  son los parámetros de localización y escala respectivamente, mientras que  $\beta \in [-1, 1]$  es el parámetro que describe la asimetría de la distribución, estando los casos extremos representados por los valores  $\beta = -1, \beta = 1$ . Sin embargo se debe ser prudente en la interpretación de estos, ya que ambos no coinciden con la interpretación habitual, es decir, no se corresponden con la media y la desviación típica de la distribución.

Diremos que la v.a.  $\Lambda \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$  si su función característica se puede expresar de la siguiente forma:

$$E \{e^{it\Lambda}\} = \begin{cases} \exp \{-\gamma^\alpha |t|^\alpha [1 + i\beta(\text{sign } t) (\tan \frac{\pi\alpha}{2}) (\gamma^{1-\alpha} |t|^{1-\alpha} - 1)] + i\delta t\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp \{-\gamma |t| [1 + i\beta(\text{sign } t) \frac{2}{\pi} (\log |t| + \log \gamma)] + i\delta t\}, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (3)$$

El soporte de la distribución estable es entonces

$$\text{Sup } f(\lambda; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{cases} [\delta - \gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2}, \infty), & \alpha < 1, \beta = 1 \\ (-\infty, \delta + \gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2}], & \alpha < 1, \beta = -1 \\ (-\infty, +\infty), & \text{resto} \end{cases} \quad (4)$$

Las identidades que utilizaremos para calcular valores de la densidad  $f(\lambda; \alpha, \beta)$  son las deducidas en Nolan (1997), teorema 1 p.3, que son válidas para una v.a.  $\Lambda$  tipificada según los parámetros de escala ( $\gamma$ ) y localización ( $\delta$ ), es decir, para la cual se tome  $\gamma = 1, \delta = 0$ . A continuación detallamos dichas identidades. En primer lugar necesitamos establecer las siguientes identidades:

$$\varsigma = \varsigma(a, b) = \begin{cases} -\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1 \\ 0, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\theta_0 = \theta_0(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \arctan(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}), & \alpha \neq 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$c_1(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} (\frac{\pi}{2} - \theta_0), & \alpha < 1 \\ 0, & \alpha = 1 \\ 1, & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$V(\theta; \alpha, \beta) = \begin{cases} (\cos \alpha \theta_0)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \alpha(\theta_0 + \theta)} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{\cos(\alpha\theta_0 + (\alpha-1)\theta)}{\cos \theta}, & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \beta\theta}{\cos \theta} \right) \exp \left\{ \frac{1}{\beta} \left( \frac{\pi}{2} + \beta\theta \right) \tan \theta \right\}, & \alpha = 1, \beta \neq 0 \end{cases}$$

Entonces si  $\Lambda$  es una v.a. con función característica (3) con  $\gamma = 1, \delta = 0$ , la densidad y función de distribución de  $\Lambda$  vienen dadas por las siguientes expresiones:

(a) Cuando  $\alpha \neq 1$  y  $\lambda > \varsigma$ ,

$$f(\lambda; \alpha, \beta) = \frac{\alpha(\lambda - \varsigma)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\pi|\alpha-1|} \int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta; \alpha, \beta) \exp \left\{ -(\lambda - \varsigma)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\theta; \alpha, \beta) \right\} d\theta \quad (6)$$

y

$$F(\lambda; \alpha, \beta) = c_1(\alpha, \beta) + \frac{\text{sign}(1 - \alpha)}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \exp \left\{ -(\lambda - \varsigma)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\theta; \alpha, \beta) \right\} d\theta$$

(b) Cuando  $\alpha \neq 1$  y  $\lambda = \varsigma$ ,

$$f(\lambda; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}) \cos \theta_0}{\pi(1 + \varsigma^2)^{\frac{1}{2\alpha}}}$$

y

$$F(\lambda; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right)$$

(c) Cuando  $\alpha = 1$ ,

$$f(\lambda; \alpha, \beta) = f(-\lambda; \alpha, \beta)$$

y

$$F(\lambda; \alpha, \beta) = 1 - F(-\lambda; \alpha, \beta)$$

(d) Cuando  $\alpha = 1$ ,

$$f(\lambda; 1, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{2|\beta|} e^{-\frac{\pi\lambda}{2\beta}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta; 1, \beta) \exp \left\{ -e^{-\frac{\pi\lambda}{2\beta}} V(\theta; 1, \beta) \right\} d\theta, & \beta \neq 0 \\ \frac{1}{\pi(1+\lambda^2)}, & \beta = 0 \end{cases}$$

y

$$F(\lambda; 1, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp \left\{ -e^{-\frac{\pi\lambda}{2\beta}} V(\theta; 1, \beta) \right\} d\theta, & \beta > 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \lambda, & \beta = 0 \\ 1 - F(\lambda; \alpha, -\beta) \end{cases}$$

Valga como ejemplo la figura 1, en la que se representa gráficamente la densidad estable correspondiente al índice  $\alpha = ,6638189181$ , parámetros  $\beta = 1$ , tipificada (es decir con  $\delta = 0, \gamma = 1$ ), y por lo tanto con soporte igual a  $[-\tan \frac{\pi\alpha}{2}, \infty)$ . Para realizar los cálculos de los valores de la densidad, hemos utilizado la expresión integral (6).

## 2.2. Distribución del número de siniestros.

Consideremos la v.a.  $\Lambda \equiv$  parámetro de Poisson de una póliza perteneciente a la cartera durante un intervalo de tiempo de exposición considerado. La distribución de Poisson ponderada que consideramos para la v.a.  $N$  es aquella cuya función de densidad de la v.a.  $\Lambda$  es la siguiente:

$$u(\lambda) = \frac{e^{\lambda_1}}{\mu \lambda_1^{1/\alpha}} e^{-\lambda/\mu} f_\alpha \left( \frac{\lambda}{\mu \lambda_1^{1/\alpha}} \right), \lambda > 0 \quad (7)$$

en donde  $\lambda_1 > 0, \mu > 0, \alpha \in (0, 1)$ , y  $f_\alpha$  es una densidad estable de índice  $\alpha$  con función generadora de probabilidad y función característica respectivas:

$$P_\alpha(t) = E \{t^\Lambda\} = E \{e^{\Lambda \log t}\} = e^{-(\log t)^\alpha}, t \in \mathbb{R} \quad (8)$$

$$\phi_\alpha(t) = e^{-(it)^\alpha}, t \in \mathbb{R}$$

El significado de los parámetros  $\mu, \lambda_1$  se aclarará más adelante.

Como referencias dedicadas al estudio de propiedades generales de este modelo paramétrico (estimación, interpretaciones, etcétera...) podemos mencionar a Tripathi, Gurland y Bhalerao (1986), Willmot (1989), nuevamente a Klugman, Panjer y Willmot (1998), y también a Panjer, Willmot (1992). En esta última se demuestra la equivalencia con el modelo de Poisson compuesto con binomial negativa extendida y truncada.

Como ya hemos explicado, el manejo de esta densidad es complicado por depender de una estable. Sin embargo resulta ser un modelo *infinitamente divisible* (Klugman 1998, p.260-62), razón por la cual el modelo ponderado puede ser interpretado también como una *distribución de Poisson compuesta* con una *distribución binomial negativa extendida y truncada*  $BNET(r, \beta)$ ,  $r \in (-1, 0), \beta > 0$  (Panjer, Willmot 1992). Esta última propiedad resulta ser clave en el desarrollo de nuestro trabajo, ya que gracias a la equivalencia entre ambos

modelos podemos tomar uno u otro para llevar a cabo cada una de las tareas que debemos realizar, adoptando siempre la representación que simplifique nuestro trabajo. Así por ejemplo, a la hora del ajuste del modelo el cálculo de las probabilidades teóricas será más sencillo si utilizamos la distribución compuesta, ya que esto nos permitirá el cálculo mediante el algoritmo de Panjer.

La equivalencia entre ambos modelos se establece comprobando que tienen idéntica transformada. Creemos que merece la pena repasar los detalles de esta prueba ya que de esta forma queda aclarada la relación entre los parámetros del modelo ponderado  $(\alpha, \mu, \lambda_1)$  y los del compuesto  $(\lambda_1, r, \beta)$ . Esta será precisamente la reparametrización que utilizaremos para pasar de un modelo a otro. Para ello partiremos de la transformada  $P_\Lambda(z)$  de la v.a.  $\Lambda$ . Así pues,

$$\begin{aligned} P_\Lambda(z) &= \int_0^{+\infty} z^\lambda \frac{e^{\lambda_1}}{\mu \lambda_1^{1/\alpha}} e^{-\lambda/\mu} f_\alpha \left( \frac{\lambda}{\mu \lambda_1^{1/\alpha}} \right) d\lambda \\ &= e^{\lambda_1} \int_0^{+\infty} \left( z^{\mu \lambda_1^{1/\alpha}} e^{-\lambda_1^{1/\alpha}} \right)^\theta f_\alpha(\theta) d\theta = e^{\lambda_1} P_\alpha \left( z^{\mu \lambda_1^{1/\alpha}} e^{-\lambda_1^{1/\alpha}} \right) = \dots \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (8):

$$\begin{aligned} \dots &= e^{\lambda_1} \exp \left\{ - \left[ - \log \left( z^{\mu \lambda_1^{1/\alpha}} e^{-\lambda_1^{1/\alpha}} \right) \right]^\alpha \right\} = \\ &= e^{\lambda_1} \exp \left\{ - \left[ - \log \left( z^{\mu \lambda_1^{1/\alpha}} \right) - \log \left( e^{-\lambda_1^{1/\alpha}} \right) \right]^\alpha \right\} = \\ &= e^{\lambda_1} \exp \left\{ - \left[ -\mu \lambda_1^{1/\alpha} \log(z) + \lambda_1^{1/\alpha} \right]^\alpha \right\} = \\ &= \exp \left\{ \lambda_1 - \left[ \lambda_1^{1/\alpha} - \mu \lambda_1^{1/\alpha} \log(z) \right]^\alpha \right\} \end{aligned}$$

En resumen, la función generadora de probabilidad de la v.a.  $\Lambda$  es

$$P_\Lambda(z) = \exp \left\{ \lambda_1 (1 - [1 - \mu \log(z)]^\alpha) \right\} \quad (9)$$

Por otro lado, es conocido que la transformada del número  $N$  de siniestros distribuido según una Poisson ponderada por una densidad  $u(\lambda)$ , se puede expresar

$$\begin{aligned}
 P(z) &= E\{z^N\} = \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(1-z)} u(\lambda) d\lambda = \\
 &= \int_0^{+\infty} (e^{z-1})^\lambda u(\lambda) d\lambda = \\
 &= E_\Lambda\{e^{z-1}\} = P_\Lambda(e^{z-1}).
 \end{aligned}$$

Por tanto podemos establecer la identidad entre ambas transformadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 P(z) &= P_\Lambda(e^{z-1}) = \\
 &= \exp\{-\lambda_1([1 - \mu(z-1)]^\alpha - 1)\} = \dots
 \end{aligned} \tag{10}$$

y reparametrizando de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \alpha = -r \in (0, 1) \\ \mu = \beta > 0 \\ \lambda_1 = \frac{\lambda}{(1+\beta)^\alpha - 1} \end{cases} \tag{11}$$

en donde  $\lambda, r, \beta$  ( $\lambda > 0, r \in (-1, 0), \beta > 0$ ) son los parámetros de la distribución  $P(\lambda)$  compuesta con  $BNET(r, \beta)$ , resulta que:

$$\begin{aligned}
 \dots &= \exp\left\{-\frac{\lambda}{(1+\beta)^{-r} - 1} ([1 - \beta(z-1)]^{-r} - 1)\right\} = \\
 &= \exp\left\{\lambda \left(\frac{[1 - \beta(z-1)]^{-r} - (1+\beta)^{-r}}{1 - (1+\beta)^{-r}} - 1\right)\right\}
 \end{aligned}$$

Esta última expresión es la función generadora de probabilidad de una distribución de Poisson  $P(\lambda)$  compuesta con una  $BNET(r, \beta)$ . Desde nuestro punto de vista utilitario, el paso clave que permite pasar del modelo ponderado al compuesto es la reparametrización (11).

### 2.3. Cálculo numérico de la densidad estable $f_\alpha$

Volviendo a la densidad  $f_\alpha$  con función característica dada por (8), nos preguntamos de qué forma podemos aprovechar las expresiones (5) y (6) para calcular valores de esta función.

En primer lugar calcularemos cuales son los valores que corresponden para los parámetros  $\beta, \gamma, \delta$ . Para ello partiremos de la función característica (8) y la expresaremos al estilo de (3). Llamando

$$z = -it \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}$$

y recordando que el módulo de un número complejo es:

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{t^2} = |t|,$$

y también

$$\left\{ \begin{array}{l} t > 0 : z = -it = |z| e^{-\frac{\pi}{2}i} \\ t < 0 : z = -it = |z| e^{\frac{\pi}{2}i} \end{array} \right\} \Leftrightarrow z = |t| e^{-\operatorname{sign}(t) \frac{\pi}{2}i}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(t) &= e^{-(-it)^\alpha} && (12) \\ &= e^{-[|t|e^{-\operatorname{sign}(t) \frac{\pi}{2}i}]^\alpha} = \\ &= e^{-|t|^\alpha e^{-\operatorname{sign}(t) \frac{\alpha\pi}{2}i}} = \\ &= e^{-|t|^\alpha [\cos(-\operatorname{sign}(t) \frac{\alpha\pi}{2}) + i \sin(-\operatorname{sign}(t) \frac{\alpha\pi}{2})]} = \\ &= e^{-|t|^\alpha [\cos(\frac{\alpha\pi}{2}) - i \operatorname{sign}(t) \sin(\frac{\alpha\pi}{2})]} = \\ &= e^{-\cos(\frac{\alpha\pi}{2})|t|^\alpha [1 - i \operatorname{sign}(t) \tan(\frac{\alpha\pi}{2})]} \end{aligned}$$

Siguiendo con nuestro objetivo de determinar los parámetros  $\beta, \gamma, \delta$ , ahora vamos escribir la anterior función característica en la forma (3). Fijándonos únicamente en el exponente de

dicha expresión, este es (considerando el caso  $\alpha \neq 1$ ):

$$\begin{aligned}
 & -\gamma^\alpha |t|^\alpha \left[ 1 + i\beta(\text{sign } t) \left( \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) (\gamma^{1-\alpha} |t|^{1-\alpha} - 1) \right] + i\delta t = \\
 & = -\gamma^\alpha |t|^\alpha \left[ 1 - i\beta(\text{sign } t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right] + it \left[ \delta - \gamma\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right] \quad (13)
 \end{aligned}$$

Comparando (12) y (13) deducimos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
 \gamma^\alpha & = \cos \frac{\pi\alpha}{2} \Leftrightarrow \gamma = \cos^{1/\alpha} \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) \quad (14) \\
 \beta & = 1 \\
 \delta & = \cos^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) \sin \frac{\pi\alpha}{2}
 \end{aligned}$$

De esta forma hemos determinado los tres parámetros. Al observar que  $\delta \neq 0, \gamma \neq 1$ , nos damos cuenta de que la distribución  $f_\alpha$  no corresponde a una variable aleatoria "tipificada". Será por tanto necesario realizar un cambio de variable que haga efectiva esta tipificación y que permita aplicar la fórmula de la densidad (6) para el cálculo numérico. Así pues consideraremos:

$$\frac{1}{\gamma} f_\alpha \left( \frac{\lambda - \delta}{\gamma} \right) \quad (15)$$



### 3. El Ajuste del modelo.

#### 3.1. Ajuste de la distribución del número de siniestros.

Vamos a contrastar la hipótesis de que el número de siniestros de la cartera está distribuido según el modelo descrito en (7) y (8). Para no distorsionar el análisis, se ha procedido a distinguir las pólizas según la exposición temporal al riesgo (véase la tabla 1), de manera que se probará el ajuste del modelo en doce casos, desde las pólizas expuestas durante un mes a las expuestas durante doce meses.

En los doce casos se ha procedido de idéntica forma que describimos a continuación. En primer lugar se considera el modelo compuesto equivalente  $P(\lambda) - BNET(r, \beta)$  y se procede a la estimación de estos tres parámetros por el método de los momentos. A continuación se calculan las clases teóricas, se reagrupan si fuera necesario, y se comparan con la correspondiente columna de la tabla 1 que contiene las clases observadas para esa exposición. Para ello se calcula el estadístico de Pearson. Finalmente se calcula el  $p$ -valor y se procede al rechazo o no rechazo de la hipótesis nula.

Las características muestrales quedan resumidas en la tabla 2, particularizadas para los 12 conjuntos de expuestos. En la tabla 3 se resumen los resultados obtenidos al aplicar a los datos contenidos en la tabla 1, el proceso de ajuste anteriormente descrito. Es importante señalar que el anterior análisis solo ha sido posible para las clases de pólizas expuestas al riesgo durante 6 meses o más (hasta un año), ya que para exposiciones menores el número de clases teóricas reagrupadas que se obtienen finalmente es inferior a cuatro.

Concluimos que en ninguno de los 6 casos podemos rechazar el modelo propuesto, ya que los  $p$ -valores varían entre un 8.26 % y un 52.89 %. *Por tanto podemos asumir razonablemente*

esta distribución como modelo de la aleatoriedad del número de siniestros en la cartera y de ahora en adelante trabajaremos bajo este supuesto fundamental.

Recordemos además que otros modelos han sido ensayados, tomando como función de estructura la *gamma*, la *inversa gaussiana* o alguna *distribución de tipo discreto*, sin que jamás se hayan llegado a obtener *p-valores* significativos.

Como detalle del ajuste obtenido, en la(s) tabla(s) 4 quedan anotadas las clases teóricas  $Teo_k^i$  calculadas para su comparación con las respectivas clases observadas que figuran en la tabla 1.

### 3.2. Momentos de la distribución de $\Lambda$

Centrándonos de ahora en adelante en el grupo de expuestos al riesgo durante 12 meses, tomamos las estimaciones de los parámetros

$$\hat{\lambda} = ,0761, \quad \hat{r} = -,6638189181, \quad \hat{\beta} = ,2212355684,$$

y aplicando la reparametrización (11) se obtienen los siguientes valores para los parámetros  $\alpha, \lambda_1, \mu$  de la distribución de Poisson ponderada,

$$\hat{\alpha} = ,6638189181, \quad \hat{\lambda}_1 = ,5369524063, \quad \hat{\mu} = ,2212355684$$

que nos permiten escribir la distribución de  $\Lambda$  tal y como fue expuesta en (7) y (15):

$$u(\lambda) = \frac{e^{\hat{\lambda}_1}}{\hat{\mu}\hat{\lambda}_1^{1/\hat{\alpha}}} e^{-\lambda/\hat{\mu}} \frac{1}{\gamma} f_{\hat{\alpha}} \left( \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\lambda}{\hat{\mu}\hat{\lambda}_1^{1/\hat{\alpha}}} - \delta \right) \right), \lambda > 0 \quad (16)$$

Los valores de los parámetros de centralización y escala resultan de substituir la estimación del índice  $\alpha$  de estabilidad en (14):

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} &= \cos^{1/\hat{\alpha}}\left(\frac{\pi\hat{\alpha}}{2}\right) \\ \hat{\delta} &= \cos^{\frac{1-\hat{\alpha}}{\hat{\alpha}}}\left(\frac{\pi\hat{\alpha}}{2}\right) \sin \frac{\pi\hat{\alpha}}{2}\end{aligned}$$

Aplicando el esquema de cálculo numérico expuesto a lo largo de 2.3, se han calculado valores de esta densidad para su posterior representación gráfica en la figura 2.

Para calcular los momentos de  $U(\lambda)$  partimos de la transformada de Laplace

$$L_{\Lambda}(z) = \exp\{\lambda_1(1 - [1 + \mu z]^{\alpha})\}$$

y mediante derivadas sucesivas calculamos los momentos centrados en el origen:

$$E\{\Lambda\} = ,078857024, \quad E\{\Lambda^2\} = ,012083438, \quad E\{\Lambda^3\} = ,0036116177 \quad (17)$$

De aquí que la varianza y asimetría de  $\Lambda$  sean

$$\sigma_{\Lambda}^2 = ,0058650078, \quad \gamma_{\Lambda} = 8593,7577 \quad (18)$$

### 3.3. Momentos de la distribución del número de siniestros.

La identidad (10) permite, una vez substituidos los parámetros, trabajar con la función generadora de probabilidad de la v.a.  $N$ :

$$P(z) = P_{\Lambda}(e^{z-1}) = \exp\{-\lambda_1([1 - \mu(z-1)]^{\alpha} - 1)\}$$

Entonces los momentos centrados en el origen desde el primero al tercero son

$$E\{N\} = ,07885702138, \quad E\{N^2\} = ,09094045895, \quad E\{N^3\} = ,09818580412$$

Y la varianza y asimetría de la v.a.  $N$  son

$$\sigma_N^2 = ,08472202913, \quad \gamma_N = 3,981568374$$

## 4. Discretización de la densidad de $\Lambda$

Partiendo de la expresión (16) necesitamos obtener una distribución discreta equivalente. Para ello aplicamos un método de programación lineal por metas (véase Vilar (2000)), que básicamente consiste en buscar una distribución discreta con el momento de orden uno igual al original y el de orden dos lo más parecido posible.

La función de cuantía  $\{u_i\}_{i=1}^{85}$  queda anotada en la tabla 8. Su soporte es:

$$\begin{aligned} Sop = & \{0,008 k : k = 1, \dots, 10\} \cup \{0,080 + 0,01 k : k = 1, \dots, 48\} \cup \\ & \cup \{0,560 + 0,005 k : k = 1, \dots, 16\} \cup \{0,640 + 0,195 k : k = 1, \dots, 11\} \end{aligned}$$

Un simple cálculo demuestra que la media y la varianza de esta distribución coinciden con (17) y (18), valores respectivos de la distribución continua.

## 5. Análisis del sistema Bonus-Malus.

### 5.1. Preliminares.

Siguiendo a Lemaire (1995, pág. 6), una compañía de seguros utiliza un **Sistema Bonus-Malus** cuando se verifican las condiciones siguientes:

- Existen únicamente un número finito de clases  $C_1, \dots, C_n$ , tales que cada póliza permanece en una clase durante un periodo de tiempo (habitualmente un año).
- La prima correspondiente a cada póliza depende únicamente de la clase en que se encuentra.
- La clase a la que pertenece un asegurado durante un cierto periodo depende únicamente de la clase a la que pertenecía durante el periodo anterior y del número de siniestros durante dicho periodo (**Condición Markoviana**).

A su vez, un Sistema Bonus-Malus consta de tres elementos:

- La **clase inicial**,  $C_0$  a la que son asignados los nuevos asegurados.
- La **escala de tarifas**,  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  en la que se establecen las primas asociadas a cada clase.
- Las **reglas de transición**, que determinan cuándo se pasa de una clase a otra.

Ciertamente el sistema Bonus-Malus estudiado se adapta perfectamente a la definición anterior. Posee 13 clases, y cada una de ellas le corresponde una prima. Una de estas clases, la octava, es la clase inicial.

La clase a la que pertenece un asegurado depende de la del periodo anterior y del número de siniestros que ha tenido en el mismo. Las reglas de transición están resumidas en la tabla 5. Finalmente la escala de primas actualmente en vigor (opción 1) se muestra en la tabla 6.

Un Sistema Bonus-Malus como el anteriormente expuesto puede ser caracterizado matemáticamente en el marco de los procesos de Markov. Resumamos los principales resultados.

Las reglas de transición, que determinan el paso de una clase a otra vienen dadas por unas transformaciones  $T_k$  tales que  $T_k(i) = j$  si se pasa de  $C_i$  a  $C_j$  cuando se tienen  $k$  siniestros,  $T_k$  se puede expresar matricialmente:

$$T_k = (t_{ij}^k)$$

donde

$$t_{ij}^k = 1 \text{ si } T_k(i) = j$$

$$t_{ij}^k = 0 \text{ si } T_k(i) \neq j$$

La Probabilidad de Transición de  $C_i$  a  $C_j$  para un asegurado de parámetro  $\lambda$  (recordemos que el número de siniestros de cada asegurado sigue una ley de Poisson y que la distribución del parámetro viene dada por la función de estructura):

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) \cdot t_{ij}^k$$

donde

$$p_k(\lambda) = \Pr [N = k / \lambda]$$

Las matriz de transición condicionada es

$$\mathbf{P}(\lambda) = (p_{ij}(\lambda));$$

Las hipótesis anteriores permiten considerar el sistema Bonus-Malus como una cadena de Markov. En consecuencia, si suponemos, como es habitual, que la cadena es **ergódica** (es decir, que siempre es posible acceder a una clase dada a partir de cualquier otra, en un número finito de pasos) y *sin ciclos*, entonces la teoría de las Cadenas de Markov nos asegura la existencia de una *distribución estacionaria de probabilidades*.

Sean  $\pi(\lambda) = (\pi_1(\lambda), \dots, \pi_n(\lambda))$  las correspondientes probabilidades estacionarias condicionadas al valor de  $\lambda$  y  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  las no condicionadas con

$$\pi_j = \int_0^\infty \pi_j(\lambda) dU(\lambda), \quad j = 1, \dots, n$$

Notemos que  $\pi_j(\lambda)$  es la probabilidad de que una póliza de parámetro  $\lambda$  se encuentre en la clase  $C_j$  una vez que se ha alcanzado el estado estacionario.

La distribución estacionaria no es difícil de calcular. Se demuestra fácilmente que la distribución estacionaria de una Cadena de Markov coincide con el autovector por la izquierda de la matriz de transición asociado con el autovalor unidad (el autovalor de Fröbenius) y cuyas componentes suman la unidad.

Es claro que el conocimiento de la distribución estacionaria puede resultar muy útil a la hora de diseñar un sistema Bonus-Malus, ya que nos informa de cuál será aproximadamente su comportamiento cuando haya transcurrido cierto tiempo.

Asimismo puede ser útil el estudio de la evolución del sistema hasta que alcance el estado estacionario.

Representamos mediante  $\pi^0(\lambda) = (\pi_1^0(\lambda), \dots, \pi_n^0(\lambda))$  el vector de estado inicial donde  $\pi_j^0(\lambda)$  es la probabilidad de que una póliza de parámetro  $\lambda$  se encuentre inicialmente en la clase  $j$ . Notemos que, en el caso del sistema Bonus-Malus estudiado, para todo valor de



$\lambda$  se tiene que  $\pi_8^0(\lambda) = 1$  y  $\pi_j^0(\lambda) = 0$  ( $j = 1, \dots, 7, 9, \dots, 13$ ). También notaremos  $\pi^k(\lambda) = (\pi_1^k(\lambda), \dots, \pi_n^k(\lambda))$  al vector de estado correspondiente a  $k$  periodos después, siendo  $\pi_j^k(\lambda)$  es la probabilidad de que una póliza de parámetro  $\lambda$  se encuentre en la clase  $j$  en el periodo  $k$ .

Es sabido que

$$\pi^0(\lambda) P(\lambda) = \pi^1(\lambda)$$

y

$$\pi^0(\lambda) (P(\lambda))^k = \pi^k(\lambda)$$

Igualmente las probabilidades descondicionadas se calculan con facilidad:

$$\pi_j^k = \int_0^\infty \pi_j^k(\lambda) dU(\lambda), \quad j = 1, \dots, n$$

y por tanto los correspondientes vectores de estado descondicionados  $\pi^k = (\pi_1^k, \dots, \pi_n^k)$ .

La tabla 7 contiene los vectores de estado descondicionados para varios años así como caso estacionario.

## 5.2. Evaluación del Sistema Bonus-Malus. Criterios asintóticos.

Analizaremos el SBM implantado en la cartera empleando los criterios asintóticos habituales de la literatura actuarial.

Se aplican estos criterios una vez que el sistema ha alcanzado el estado estacionario, lo que en la práctica no sucede hasta varios años después (al menos diez) de iniciada su puesta en marcha. Por tanto no tienen en cuenta su evolución hasta ese momento y tampoco consideran la variación de la composición de la cartera por la entrada y salida de pólizas a lo largo de los años.

Un primer examen de la tabla anterior nos permite afirmar que el sistema bonus-malus presentado se caracteriza por una rápida acumulación de las pólizas en la clase de mayor descuento. Notemos que en el estado estacionario (y prácticamente a partir del decimoquinto año de funcionamiento) el 90 % de las pólizas se encuentra en dicha clase.

Este resultado puede predecirse fácilmente observando la tabla 2 que establece unas reglas de transferencia que penalizan escasamente a las pólizas con siniestro.

### 5.2.1. Equilibrio Financiero.

Diremos que un SBM posee la propiedad de equilibrio financiero cuando los ingresos por primas igualan a la esperanza matemática de la siniestralidad de las pólizas que componen la cartera.

Sabemos que la esperanza matemática de la siniestralidad se obtiene multiplicando el número medio de siniestros por el coste medio de un siniestro. Supuesto que el coste medio de un siniestro es la unidad, la esperanza de la siniestralidad coincidirá con el número medio de siniestros.

En un modelo ponderado como el que se ajusta a la distribución del número de siniestros el número esperado de siniestros por póliza coincide con la esperanza de la estructura esto es

$$E(\lambda) = 0,078857006$$

Así, siendo  $N$  el número de pólizas que componen la cartera, la esperanza matemática de su siniestralidad será

$$E(S) = N \times 0,078857006$$

Sabemos asimismo que una vez alcanzado el estado estacionario la probabilidad de que una

póliza se encuentre en cada una de las clases viene dada según el vector

$$\pi = (0,9083, 0,0674, 0,0128, 0,0040, 0,0021, 0,0015, 0,0012, 0,0011, 0,0005, 0,00023, 0,00025, 0,00007, 0,00021)$$

Multiplicando cada una de esas probabilidades por el número de pólizas tendremos el número esperado de pólizas que habrá en cada una de las clases. Si

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{13})$$

es el vector que nos proporciona la cuantía de las primas, es claro que se cumplirá la propiedad de equilibrio financiero cuando

$$E(S) = N (\pi \mathbf{b}^t)$$

esto es cuando

$$0,078857006 = \pi \mathbf{b}^t$$

Teniendo en cuenta la escala de primas de la tabla 2, es fácil deducir que para que se produzca el equilibrio financiero en el estado estacionario es necesario que la prima de la clase de entrada, la ocho, sea  $b_8 = 0,16052$ , siendo, por tanto,

$$\mathbf{b} = [0,07705, 0,08829, 0,10434, 0,11558, 0,12521, 0,13644, 0,15250, 0,16052, 0,17658, 0,19263, 0,20868, 0,22473, 0,24079]$$

En todo caso hasta que se alcanza el estado estacionario o se está próximo a él, la proporción de pólizas en las clases de mayor descuento es inferior por lo que si las primas cobradas son las del vector  $\mathbf{b}$ , ciertamente los ingresos por primas serán superiores a la siniestralidad

esperada. En la figura 3 se representa gráficamente la evolución del superávit medio por póliza en los sucesivos años hasta que se alcanza el estado estacionario en el que se produce equilibrio financiero.

Ciertamente este análisis puede considerarse poco ajustado a la realidad ya que lógicamente cada año van ingresando nuevas pólizas en la cartera.

Supongamos por ejemplo que a los diez años de puesta en marcha del sistema bonus malus, el 55 % de la cartera lleva diez años y un 5 % de la cartera cada uno de los restantes 9 años. En este caso es fácil comprobar que el vector de probabilidades para cada una de esas clases es

$$\pi^{10} = (0,5532, 0,1103, 0,0657, 0,0683, 0,0625, 0,0626, 0,0618, 0,0120, 0,00171, 0,000844, 0,000345, 0,000161, 0,00022)$$

En este caso para que se produzca equilibrio financiero basta que la prima de entrada sea ahora  $b_8 = 0,1325$ . La escala de primas

$$b^{10} = (0,06362, 0,072905, 0,08616, 0,09544, 0,10339, 0,11267, 0,12592, 0,13255, 0,14581, 0,15906, 0,17232, 0,18557, 19883)$$

### 5.2.2. Equidad.

Sabido es que la finalidad de la implantación de un sistema bonus malus es que cada riesgo pague una prima que sea función del riesgo que realmente comporta.

Una forma de analizar el grado de equidad que posee un SBM es para cada valor de  $\lambda$ , calcular la diferencia entre la prima media pagada por un asegurado que posea tal valor de

dicho parámetro y dicho valor, esto es, en el estado estacionario sería (para un valor  $\lambda_j$ )

$$\pi_1(\lambda_j) b_1 + \dots + \pi_{13}(\lambda_j) b_{13} - \lambda_j$$

Gráficamente es posible visualizar la equidad de un SBM representando la función

$$y(\lambda) = \pi_1(\lambda) b_1 + \dots + \pi_n(\lambda) b_{13} - \lambda$$

Notemos que un valor positivo de  $y(\lambda)$  nos indicará que la póliza de parámetro  $\lambda$  paga una prima media superior al riesgo que comporta y un valor negativo significará lo contrario.

Desde el punto de vista de la equidad cuanto más cercanos a cero se encuentren los valores que toma la función  $y(\lambda)$ , esto es más cercana se encuentre la gráfica de la función al eje de abscisas, mejor será el SBM.

Notemos que en el caso de no existir un SBM y por tanto todas las pólizas pagan la misma prima  $E(\lambda)$ , tendremos que

$$y(\lambda) = E(\lambda) - \lambda$$

En la figura 4 se representan gráficamente las funciones  $y(\lambda)$  para los casos de no existencia de bonus malus y asintótico. Comprobándose la escasa mejora en cuanto a equidad que el SBM estudiado presenta respecto de su no existencia.

## 6. Conclusiones

A lo largo de los anteriores epígrafes hemos analizado la estructura de la cartera a través del ajuste de una distribución de Poisson ponderada al número de siniestros. Hemos tomado como función de estructura una distribución infinitamente divisible que depende de una distribución estable, teniendo pues a nuestra disposición un modelo compuesto equivalente al anterior que es de Poisson- BNET (binomial negativa extendida y truncada). El ajuste es excepcionalmente bueno, más si tenemos en cuenta que el modelo no ha podido ser rechazado para ninguna de las exposiciones en las cuales existen suficientes clases observadas como para poder realizarse la prueba de bondad del ajuste de la  $\chi^2$ . Esto último significa que hemos conseguido modelizar no solo la estructura de la cartera para los expuestos al riesgo durante 12 meses, sino también para los expuestos durante 11,10,...,6 meses.

El hecho ya indicado de trabajar con una distribución estable nos ha obligado por otro lado a buscar expresiones de dicha densidad estable que sean manejables desde el punto de vista del Cálculo Numérico. A ello hemos dedicado buena parte del epígrafe 2.3.

Finalmente, dentro de la parte de modelización de la cartera, se ha procedido a la discretización de la función de estructura al objeto de poder usarla en el análisis del sistema bonus-malus.

A continuación hemos estudiado el sistema bonus-malus implantado en la cartera. En primer lugar modelizándolo como una cadena de Markov lo que nos ha permitido obtener las probabilidades (condicionadas a cada uno de los valores de  $\lambda$  también descondicionada) de que una póliza se encuentre en una de las clases de bonus. Estas probabilidades se han calculado tanto en el estado estacionario como en el caso anterior a la llegada a este estado.

Hemos observado una rápida concentración de las primas en las clases de mayor descuento: al cabo de diez años un 82%, y en el estado estacionario casi un 91% de las pólizas se encuentran en la clase de nivel 1). Es posible calificar a las reglas de transición del SBM como blandas para la estructura de la cartera.

Por otro lado, el hecho de que el abanico de las primas vaya porcentualmente desde el 48% hasta el 150% unido a la gran concentración de las primas en la clase de mayor descuento obliga, si se desea conseguir el equilibrio financiero, a que la cuantía de la prima de esta primera clase sea muy elevada, apenas menor que la esperanza de la siniestralidad. Una consecuencia de este hecho es que el objetivo de equidad (es decir, que cada póliza pague de acuerdo al riesgo que representa, o dicho de otro modo, que su prima esté cercana a su esperanza de siniestralidad  $\lambda$ ) se logre en una medida muy escasa.

## 7. Tablas y Figuras

$k$	$N_k^{12}$	$N_k^{11}$	$N_k^{10}$	$N_k^9$	$N_k^8$	$N_k^7$	$N_k^6$	$N_k^5$	$N_k^4$	$N_k^3$	$N_k^2$	$N_k^1$	Total
0	2196808	37801	44919	39900	43808	55164	57325	46386	44001	55683	55622	56586	2734003
1	161913	4240	4607	3703	3552	3993	3597	2472	1850	1698	1019	321	192965
2	10976	419	455	356	295	301	245	119	72	62	26	1	13327
3	882	66	65	34	28	23	27	15	8	3	2	0	1153
4	90	8	9	5	1	6	1	1	0	0	0	0	121
5	11	2	3	0	1	1	1	0	0	1	0	0	28
6	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Total	2370683	42536	50058	43998	47685	59488	61196	48993	45931	57447	56669	56908	2941592

Tabla 1: Frecuencias observadas para  $k$  siniestros en el grupo de expuestos durante  $i = 1, 2, \dots, 12$  meses al riesgo.



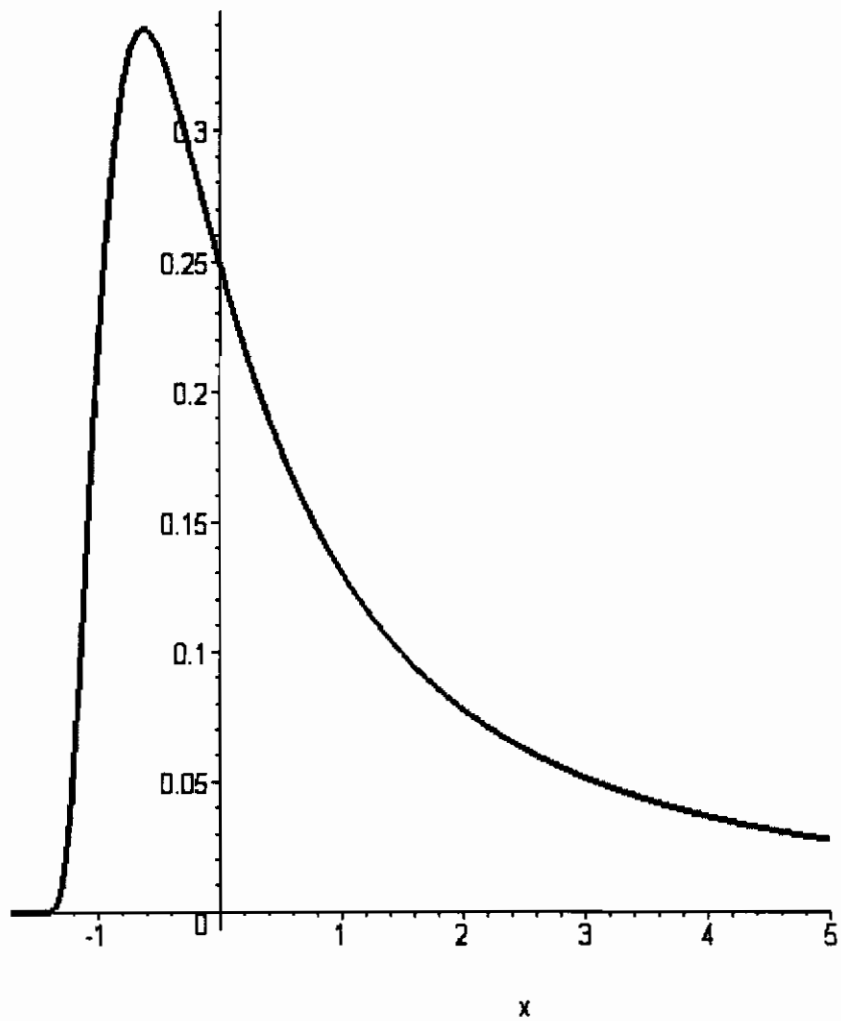


Figura 1: Gráfica de la densidad estable de índice  $\alpha = ,6638189181$

<i>Exposición</i>	$\mu^*$	$\sigma^{2*}$	$\gamma^*$
12	,078857	,084722	3,981568
11	,125023	,141600	3,438694
10	,115126	,131198	3,618702
9	,103118	,114667	3,617382
8	,088811	,097491	3,847590
7	,078889	,086652	4,139862
6	,068256	,074774	4,410338
5	,056314	,060082	4,694082
4	,043935	,046185	5,173371
3	,031959	,033758	6,208404
2	,019005	,019773	7,721978
1	,005675	,005678	13,283221

Tabla 2: Características muestrales (media, varianza y asimetría) de la cartera por grupos de expuestos al riesgo. La exposición se mide en meses.

<i>Exposición</i>	$\hat{\lambda}$	$\hat{r}$	$\hat{\beta}$	<i>Pearson</i>	<i>p-valor</i>
12	,0761	-,6638	,2212	1,5429	<b>,4623</b>
11	,1178	-,6497	,3785	2,5722	<b>,1087</b>
10	,1082	-,6484	,3970	1,3043	<b>,5209</b>
9	,0977	-,0767	,1213	,6399	<b>,4237</b>
8	,0848	-,4040	,1639	,3964	<b>,5289</b>
7	,0754	-,7125	,3423	3,0110	<b>,0826</b>
6	,0653	-,6432	,2676	,9786	<b>,3225</b>

Tabla 3: Estimadores por momentos, estadísticos de Pearson y p-valores para los grupos de expuestos entre 6 y 12 meses.

$k$	$N_k^{12}$	$Teo_k^{12}$	$k$	$N_k^{11}$	$Teo_k^{11}$	$k$	$N_k^{10}$	$Teo_k^{10}$	$k$	$N_k^9$	$Teo_k^9$
0	2196808	2196790	0	37801	37805	0	44919	44922	0	39900	39900
1	161913	161975	1	4240	4224	1	4607	4598	1	3703	3702
2	10976	10904	2	419	439	2	455	465	2	356	357
3	882	908	3	66	57	3	65	61	3	34	35
4	90	93	$\geq 4$	10	10	4	9	10	$\geq 4$	5	4
$\geq 5$	14	13				$\geq 5$	3	2			

$k$	$N_k^8$	$Teo_k^8$	$k$	$N_k^7$	$Teo_k^7$	$k$	$N_k^6$	$Teo_k^6$
0	43808	43807	0	55164	55163	0	57325	57325
1	3552	3554	1	3993	3999	1	3597	3595
2	295	293	2	301	291	2	245	248
3	28	27	3	23	30	3	27	24
$\geq 4$	2	3	$\geq 4$	7	5	$\geq 4$	2	3

Tabla(s) 4: Frecuencias teóricas y observadas reagrupadas para los seis grupos de expuestos al riesgo ( $k=6, \dots, 12$ ). Valores redondeados al entero más cercano.

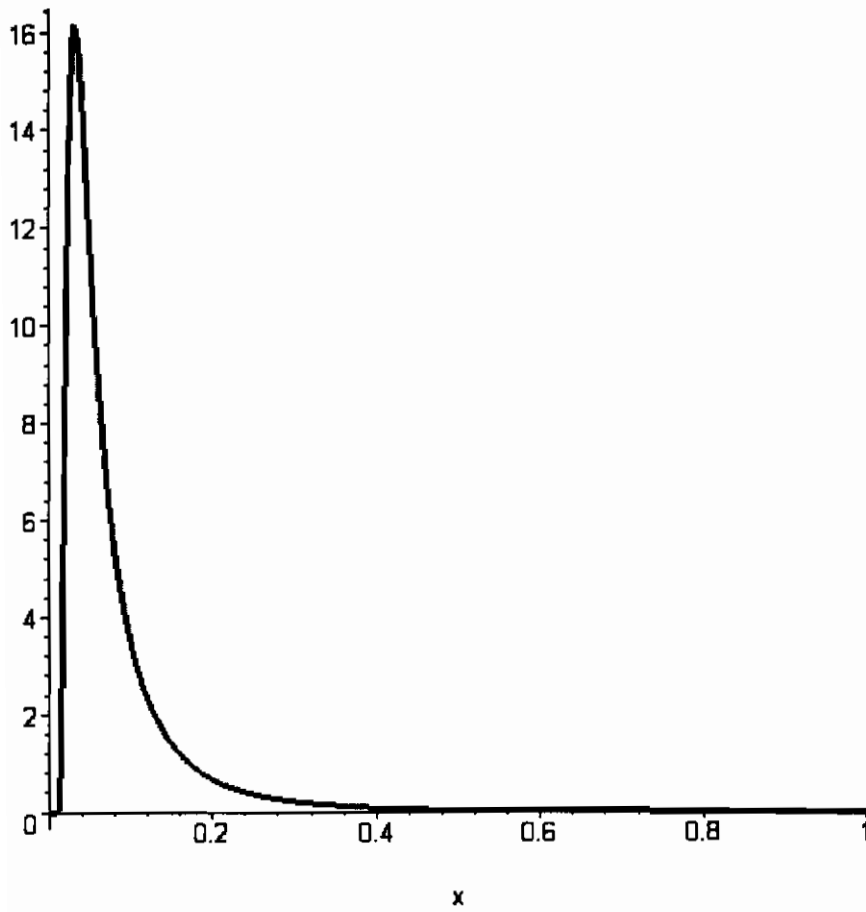


Figura 2: Gráfica de la densidad de  $\Lambda$ .

$\lambda_i$	.8e-2	.16e-1	.24e-1	.32e-1	.40e-1	.48e-1	.56e-1	.64e-1
$u_i$	.89449520e-3	.14451880e-1	.12982514	.91168428e-1	.15662344	.65764621e-1	.10723640	.42834871e-1
$\lambda_i$	.72e-1	.80e-1	.90e-1	.100	.110	.120	.130	.140
$u_i$	.70798256e-1	.32187112e-1	.57712420e-1	.22769452e-1	.37726380e-1	.15314752e-1	.25845884e-1	.10729766e-1
$\lambda_i$	.150	.160	.170	.180	.190	.200	.210	.220
$u_i$	.18376692e-1	.77638600e-2	.13456420e-1	.57647300e-2	.10089140e-1	.43711470e-2	.77121400e-2	.33723374e-2
$\lambda_i$	.230	.240	.250	.260	.270	.280	.290	.300
$u_i$	.59902128e-2	.26395197e-2	.47164184e-2	.20914976e-2	.37557624e-2	.16748487e-2	.30209320e-2	.13535704e-2
$\lambda_i$	.310	.320	.330	.340	.350	.360	.370	.380
$u_i$	.24502080e-2	.11027520e-2	.20027720e-2	.90459150e-3	.16478132e-2	.74674190e-3	.13638336e-2	.61980780e-3
$\lambda_i$	.390	.400	.410	.420	.430	.440	.450	.460
$u_i$	.11348880e-2	.51702160e-3	.94879600e-3	.43329320e-3	.79661040e-3	.36460660e-3	.67150520e-3	.30794312e-3

Tabla 5: Densidad  $u(\lambda)$  discretizada con 85 puntos en el soporte (sigue).

$\lambda_i$	.470	.480	.490	.500	.510	.520	.530	.540
$u_i$	.56804968e-3	.26098624e-3	.48211000e-3	.22186652e-3	.41043800e-3	.18913931e-3	.35039392e-3	.16170518e-3
$\lambda_i$	.550	.560	.565	.570	.575	.580	.585	.590
$u_i$	.29983016e-3	.10392618e-3	.13365616e-3	.64232840e-4	.12372996e-3	.59663460e-4	.11463264e-3	.55301020e-4
$\lambda_i$	.595	.600	.605	.610	.615	.620	.625	.630
$u_i$	.10652360e-3	.51231310e-4	.98882800e-4	.47548460e-4	.91861920e-4	.44168330e-4	.85320800e-4	.41084540e-4
$\lambda_i$	.635	.640	.835	1.030	1.225	1.420	1.615	1.810
$u_i$	.79266960e-4	.63498295e-3	.92373976e-3	.54516871e-4	.78444518e-4	.67916201e-5	.82163963e-5	.83663126e-6
$\lambda_i$	2.005	2.200	2.395	2.590	2.785			
$u_i$	.96333276e-6	.1074109449e-6	.1212107639e-6	1432805338e-7	.1600910698e-7			

Tabla 5: (Continuación) Densidad  $u(\lambda)$  discretizada con 85 puntos en el soporte.

clase de partida	sin siniestro	1 siniestro	2 siniestros	3 siniestros	4 o más
1	1	2	3	6	9
2	1	3	4	7	10
3	2	4	5	8	11
4	3	5	6	9	12
5	4	6	7	9	12
6	5	7	8	10	13
7	6	8	9	11	13
8	7	8	10	12	13
9	8	9	11	13	13
10	9	10	12	13	13
11	9	11	13	13	13
12	10	12	13	13	13
13	11	13	13	13	13

Tabla 6: Reglas de transición del sistema Bonus-Malus.



Nivel	% de la prima
1	48
2	55
3	65
4	72
5	78
6	85
7	95
8	100
9	110
10	120
11	130
12	140
13	150

Tabla 7: Escala de primas.

años	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$
1	0	0	0	0	0	0	0.9266	0.0683	0	0.00459	0	0.00038	0.00004
2	0	0	0	0	0	0.8625	0.0601	0.0674	0.0072	0.00183	0.00028	0.00032	0.00011
3	0	0	0	0	0.8052	0.0535	0.1130	0.0219	0.0032	0.00153	0.00035	0.00025	0.00018
4	0	0	0	0.7550	0.0481	0.1493	0.0256	0.0168	0.0030	0.00099	0.00040	0.00022	0.00020
5	0	0	0.7093	0.0435	0.1783	0.0280	0.0274	0.0094	0.0021	0.00085	0.00040	0.00018	0.00023
6	0	0.6677	0.0396	0.2018	0.0294	0.0384	0.0119	0.0075	0.0018	0.00067	0.00040	0.00016	0.00024
7	0.6298	0.0362	0.2207	0.0303	0.0493	0.0141	0.0109	0.0053	0.0015	0.00060	0.00038	0.00014	0.00024
10	0.8178	0.1095	0.0220	0.0234	0.0094	0.0076	0.0044	0.0032	0.0011	0.00043	0.00035	0.00011	0.00024
15	0.8976	0.0667	0.0158	0.0062	0.0043	0.0030	0.0023	0.0019	0.0008	0.00032	0.00031	0.00009	0.00023
20	0.9050	0.0672	0.0132	0.0047	0.0028	0.0021	0.0016	0.0014	0.0006	0.00027	0.00028	0.00008	0.00022
25	0.9070	0.0672	0.0129	0.0042	0.0023	0.0017	0.0014	0.0012	0.0006	0.00025	0.00027	0.00008	0.00022
30	0.9077	0.0673	0.0128	0.0041	0.0022	0.0016	0.0013	0.0011	0.0005	0.00024	0.00026	0.00007	0.00021
40	0.9082	0.0674	0.0128	0.0040	0.0021	0.0016	0.0012	0.0011	0.0005	0.00023	0.00025	0.00007	0.00021
$\infty$	0.9083	0.0674	0.0128	0.0040	0.0021	0.0015	0.0012	0.0011	0.0005	0.00023	0.00025	0.00007	0.00021

Tabla 8: Distribuciones de las pólizas a través de las clases de Bonus-Malus; horizonte desde 1 hasta 40 años. Distribución estacionaria de las pólizas ( $\infty$ ).

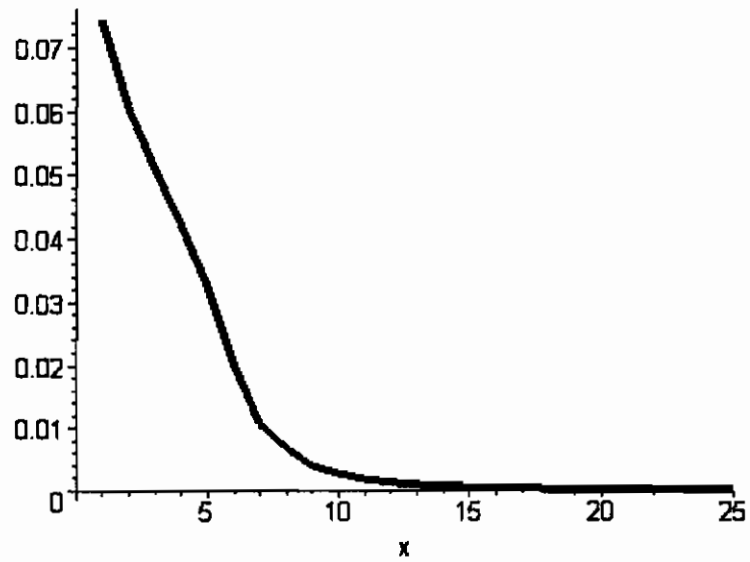


Figura 3: Evolución del superávit medio por póliza en los sucesivos años hasta que se alcanza el estado estacionario.

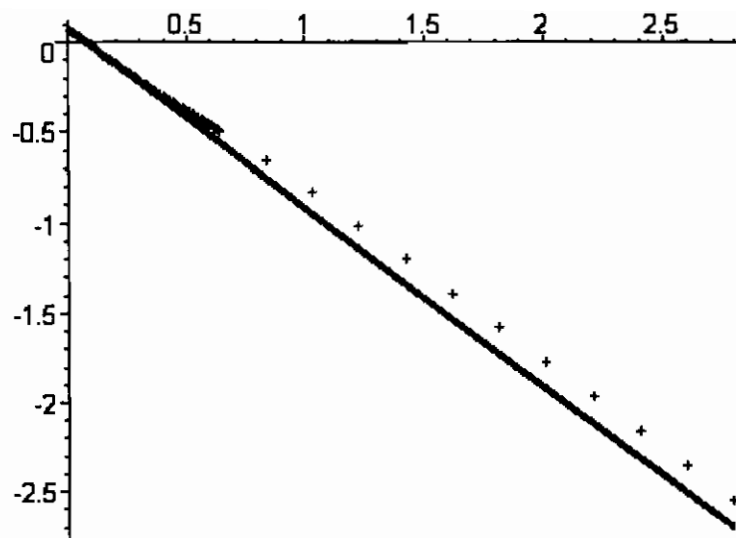


Figura 4. Comparación de la equidad del SBM (línea discontinua) con el caso de no existencia de SBM (línea continua). En abcisas el parámetro  $\lambda$ , en ordenadas la equidad asintótica del sistema.

## 8. Bibliografía

Heras A., Vilar J.L., Gil J.A.: *Asymptotic fairness of Bonus-Malus Systems and optimal scales of premiums*. The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory. Volumen 27, junio 2002, págs. 61-82.

Lemaire, J. (1995): *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*. Kluwer Academic Publishers.

Lemaire, J. (1998): *Bonus-Malus System: the European and Asian Approach to Merit-Rating*. North American Actuarial Journal. Volume 2, Number 1.

Klugman St. A., Panjer H. H, G.E. Willmot (1998): *Loss Models. From Data to Decisions*. Wiley.

Hougaard Ph. (1986): *Survival models for heterogeneous populations derived from stable distributions*. Biometrika. Volume 73, 2, pp. 387-96.

Nolan J. P. (1997): *Numerical calculations of stable densities and distribution functions*. Communications in Statistics- Stochastic Models 13, 759-774.

Nolan J. P. (1999): *Fitting data and assessing goodness-of-fit with stable distributions*. In J.P. Nolan and A. Swami (Eds.), Proceedings of the Conference on Heavy Tailed Distributions, American University, Washington, DC.

Panjer H.H., Willmot G.E. (1992): *Insurance risk models*. SOA.

Thyrion P. (1960): *Contribution à l'étude du bonus pour non sinistre en assurance automobile*. Astin Bulletin. Volume 1, 3, pp. 142-143.

Tripathi R.C., Gurland J., Bhalerao N.R. (1986): *A unified approach to estimating parameters in some generalized Poisson Distributions*. Communications in Statistics. Theory and Methods. Volume 15, 3, pp. 1017-1034.

Vilar J.L. (2000): *Arithmetization of distributions and linear goal programming*. Insurance: Mathematics and Economics. Volume 27, pp. 113-122.

Zolotarev V.M. (1986): *One-dimensional Stable Distributions*. Translations of Mathematical Monographs. Volume 65. American Mathematical Society.

Willmot G.E. (1989): *A remark on the Poisson-Pascal and some other contagious distributions*. Statistics & Probability Letters, 7, pp. 217-220.



