PROBABILIDADES DE TRANSICION. APLICACION AL ESTUDIO DE LA INCAPACIDAD TEMPORAL

ANA HERRERA CABEZON

Profesora Universidad del País Vasco

RESUMEN

El presente artículo muestra las etapas que se pueden considerar en las probabilidades de transición, teniendo en cuenta el número de transiciones dado un modelo de tres estados: Activo, Incapacidad Temporal y Fallecido. Así mismo, se definen los tantos instantáneos de transición para su utilización en el modelo de tres estados.

ABSTRACT

This paper presents the steps that can be considered in the transition probabilities taking into account the number of transitions in a given model of three states: Active, Temporary Disability and Deceased. Besides the transition intensities are defined to be used in the three states model.

KEY WORDS

Multistate models; The steps in the transition probabilities; Transition intensities.

INTRODUCCION

Una de las tendencias que se observa en el campo actuarial para el estudio de aquellos riesgos en los cuales intervienen diferentes estados o se pueden dar diversas situaciones para una misma persona y a su vez que dichos cambios de estado o situación se pueden producir como entradas y salidas en cada estado, es la aplicación de las probabilidades de transición.

Se define un proceso estocástico $\{Z_x : x \geq 0\}$, donde el parámetro tiempo continuo x, que indica la edad biológica alcanzada, está asociado a un espacio finito de S estados, donde S es un número entero positivo mayor que 1 y uno de los S estados es un estado absorbente (fallecimiento). Al menos dos de los S estados no absorbentes supondrán comunicación en el sentido de asegurar incrementos a, tanto como decrementos para, algunos estados del modelo.

Las probabilidades de transición entre los estados condicionan que ocupen un estado determinado a la edad x y las probabilidades de transición definidas para el parámetro tiempo continuo x son:

$$ {}_{n}^{i}p_{x}^{j} = \mathrm{pr}\left(Z_{x+n} = j / Z_{x} = i\right) $$

siendo i, j estados de los S estados considerados y n el espacio de tiempo transcurrido desde el momento que se alcance la edad x.

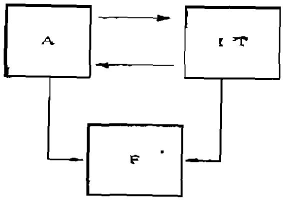
Por otra parte, hay que tener en cuenta que en este caso las probabilidades de transición son no homogéneas debido a que:

$$ {}_{n}^{i}p_{x}^{j} = pr\left(Z_{x+n} = j / Z_{x} = i\right) \neq pr\left(Z_{y+n} = j / Z_{y} = i\right) = {}_{n}^{i}p_{y}^{j} $$

siendo x e y dos edades distintas.

Para calcular las probabilidades de transición que interesan en el estudio de un proceso cualquiera hay que concretar los S espacios considerados y por ello se va a tomar como ejemplo la aplicación al estudio de la Incapacidad Temporal en donde se consideran tres estados: el estado de Activo, el de Incapacidad Temporal y por último el de Fallecido.

Gráficamente se puede representar de la siguiente forma:



El espacio de estados finito esta constituido por dos estados no absorbentes, el estado de Activo que se representa en el gráfico con la letra A y el de Incapacidad Temporal o IT, y el estado absorbente de Fallecido que se representa por F. Del estado de Activo se pueden producir transiciones al estado de Incapacidad Temporal y al estado de Fallecido, y del estado de Incapacidad Temporal se pueden producir transiciones al estado de Activo y al estado de Fallecido.

PROBABILIDADES DE TRANSICION

Una vez concretados los estados del modelo se pueden expresar las distintas probabilidades de transición del modelo, ${}_n^i p_x^j$, que indican la probabilidad de que una persona de edad x en estado i se encuentre en estado j a la edad x+n.

Teniendo en cuenta que las probabilidades de transición relativas al estado absorbente de Fallecido son iguales a cero en el caso de un cambio de estado, puesto que no se puede salir de dicho estado, e igual a la unidad, en caso de permanencia en dicho estado, se obtiene la siguiente Matriz de Probabilidades de Transición:

$$ {}_nP_x = \begin{bmatrix} {}_n^A p_x^A & {}_n^A p_x^{IT} & {}_n^A p_x^F \\ {}_n^{IT} p_x^A & {}_n^{IT} p_x^{IT} & {}_n^{IT} p_x^F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

donde

$$ {}_n^i p_x^j \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{j \in S} {}_n^i p_x^j = 1 \qquad \forall i, j \in S $$

Por otra parte se podría hablar de las probabilidades de transición de cero etapas, una etapa, dos etapas, etc. teniendo en cuenta que se puede producir más de una transición entre los estados considerados, siempre y cuando el período n lo permita.

Si se establece que en el período n, se pueden dar como mucho dos procesos de Incapacidad Temporal por persona, se obtiene que:

$$ {}_{n}^{A}p_{x}^{A} = {}_{n}^{A}p_{x}^{A(0)} + {}_{n}^{A}p_{x}^{A(2)} + {}_{n}^{A}p_{x}^{A(4)} $$

siendo

${}_{n}^{A}p_{x}^{A(r)}$ para r=0, 2 y 4, la probabilidad de que una persona Activa a la edad x se encuentre en el mismo estado despues de transcurrido el período n habiéndose realizado r transiciones. Si r=0, no se considera ninguna transición. Si r=2, se contempla el caso en que se produce una transición del estado de Activo al de Incapacidad Temporal y otra transición del estado de Incapacidad Temporal al estado de Activo . Por último si r=4 se indica que se consideran las siguientes transiciones: del estado de Activo al de Incapacidad Temporal, del estado de Incapacidad Temporal al estado de Activo, nuevamente del estado de Activo al de Incapacidad Temporal y por último del estado de Incapacidad Temporal al de Activo.

$$ {}_{n}^{A}p_{x}^{IT} = {}_{n}^{A}p_{x}^{IT(1)} + {}_{n}^{A}p_{x}^{IT(3)} $$

donde

${}_{n}^{A}p_{x}^{IT(r)}$ representa la probabilidad de que una persona Activa a la edad x se encuentre en estado de Incapacidad Temporal después de transcurrido el período n. Si r=1 significa que se encuentra en su primer proceso de Incapacidad Temporal.

PROBABILIDADES DE TRANSICION

Una vez concretados los estados del modelo se pueden expresar las distintas probabilidades de transición del modelo, ${}_n^i p_x^j$, que indican la probabilidad de que una persona de edad x en estado i se encuentre en estado j a la edad x+n.

Teniendo en cuenta que las probabilidades de transición relativas al estado absorbente de Fallecido son iguales a cero en el caso de un cambio de estado, puesto que no se puede salir de dicho estado, e igual a la unidad, en caso de permanencia en dicho estado, se obtiene la siguiente Matriz de Probabilidades de Transición:

$$
{}_nP_x = \begin{bmatrix} {}_n^A p_x^A & {}_n^A p_x^{IT} & {}_n^A p_x^F \\ {}_n^{IT} p_x^A & {}_n^{IT} p_x^{IT} & {}_n^{IT} p_x^F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

donde

$$
{}_n^i p_x^j \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{j \in S} {}_n^i p_x^j = 1 \qquad \forall i, j \in S
$$

Por otra parte se podría hablar de las probabilidades de transición de cero etapas, una etapa, dos etapas, etc. teniendo en cuenta que se puede producir más de una transición entre los estados considerados, siempre y cuando el período n lo permita.

Si se establece que en el período n, se pueden dar como mucho dos procesos de Incapacidad Temporal por persona, se obtiene que:

$$ {}_{n}^{A}p_{x}^{A} = {}_{n}^{A}p_{x}^{A(0)} + {}_{n}^{A}p_{x}^{A(2)} + {}_{n}^{A}p_{x}^{A(4)} $$

siendo

${}_{n}^{A}p_{x}^{A(r)}$ para r=0, 2 y 4, la probabilidad de que una persona Activa a la edad x se encuentre en el mismo estado despues de transcurrido el período n habiéndose realizado r transiciones. Si r=0, no se considera ninguna transición. Si r=2, se contempla el caso en que se produce una transición del estado de Activo al de Incapacidad Temporal y otra transición del estado de Incapacidad Temporal al estado de Activo . Por último si r=4 se indica que se consideran las siguientes transiciones: del estado de Activo al de Incapacidad Temporal, del estado de Incapacidad Temporal al estado de Activo, nuevamente del estado de Activo al de Incapacidad Temporal y por último del estado de Incapacidad Temporal al de Activo.

$$ {}_{n}^{A}p_{x}^{IT} = {}_{n}^{A}p_{x}^{IT(1)} + {}_{n}^{A}p_{x}^{IT(3)} $$

donde

${}_{n}^{A}p_{x}^{IT(r)}$ representa la probabilidad de que una persona Activa a la edad x se encuentre en estado de Incapacidad Temporal después de transcurrido el período n. Si r=1 significa que se encuentra en su primer proceso de Incapacidad Temporal.

Si r=3 significa que se encuentra en el segundo proceso de Incapacidad Temporal en el período considerado.

$$ {}_{n}^{A}p_{x}^{F} = {}_{n}^{A}p_{x}^{F(1)} + {}_{n}^{A}p_{x}^{F(2)} + {}_{n}^{A}p_{x}^{F(3)} + {}_{n}^{A}p_{x}^{F(4)} + {}_{n}^{A}p_{x}^{F(5)} = \sum_{r=1}^{5} {}_{n}^{A}p_{x}^{F(r)} $$

siendo

${}_{n}^{A}p_{x}^{F(r)}$ la probabilidad de que una persona Activa de edad x se encuentre en el estado de Fallecido antes de que finalice el período n. Si r=1 indica que la única transición que se ha producido es la de Activo a Fallecido, si r=2 implica que antes de fallecer ha tenido lugar una transición al estado de Incapacidad Temporal desde donde se ha producido el fallecimiento, si r=3 significa que ha fallecido en estado Activo despues de producirse un proceso de Incapacidad Temporal, si r=4 indica que ha fallecido durante el segundo proceso de Incapacidad Temporal y si r=5 indica que ha fallecido en estado Activo despues de producirse dos procesos de Incapadidad Temporal en el período n.

$$ {}_{n}^{IT}p_{x}^{A} = {}_{n}^{IT}p_{x}^{A(1)} + {}_{n}^{IT}p_{x}^{A(3)} $$

donde

${}_{n}^{IT}p_{x}^{A}(r)$ representa la probabilidad de que una persona de edad x en estado de Incapacidad Temporal, considerando este su primer proceso de Incapacidad Temporal, se encuentre en estado Activo despues del período n . Si r=1 implica que sólo ha tenido lugar un proceso de Incapacidad Temporal y si r=3 implica que ha existido un nuevo proceso de Incapacidad Temporal a partir de la edad x y dentro del período n considerado.

$$ {}^{IT}_{n}p_x^{IT} = {}^{IT}_{n}p_x^{IT(0)} + {}^{IT}_{n}p_x^{IT(2)} $$

siendo

${}^{IT}_{n}p_x^{IT(r)}$ la probabilidad de que una persona en estado de Incapacidad Temporal a la edad x, considerando este su primer proceso de Incapacidad Temporal, se encuentre en dicho estado después de transcurrido el período n. Si r=0 indica que no se ha producido ninguna transición y si r=2 indica que se encuentra en el segundo proceso de Incapacidad Temporal.

$$ {}^{IT}_{n}p_x^{F} = {}^{IT}_{n}p_x^{F(1)} + {}^{IT}_{n}p_x^{F(2)} + {}^{IT}_{n}p_x^{F(3)} + {}^{IT}_{n}p_x^{F(4)} = \sum_{r=1}^{4} {}^{IT}_{n}p_x^{F(r)} $$

donde

${}^{IT}_{n}p_x^{F(r)}$ representa la probabilidad de que una persona de edad x en estado de Incapacidad Temporal, fallezca en el transcurso del período n. Si r=1 implica que ha fallecido durante el primer proceso de Incapacidad Temporal, si r=2 indica que ha fallecido en estado Activo después de recuperarse del primer proceso de Incapacidad Temporal, si r=3 implica que ha fallecido durante el segundo proceso de Incapacidad Temporal y si r=4 indica que ha fallecido en estado Activo después de recuperarse del segundo proceso de Incapacidad Temporal.

TANTOS INSTANTANEOS DE TRANSICION

Una vez elaborada la Matriz de Probabilidades de Transición es posible construir la Matriz correspondiente a los tantos instantáneos de transición partiendo de las siguientes expresiones:

$$ {}^{i}\mu_x^{j} = \lim_{n\to 0}\left(\frac{{}_n^{i}p_x^{j}}{n}\right) \qquad i \neq j \qquad [1]$$

y teniendo en cuenta que: $1-{}_n^{i}p_x^{i} = \sum_{i\neq j} {}_n^{i}p_x^{j}$

$$ {}^{i}\mu_x^{i} = -\lim_{n\to 0}\left(\frac{1-{}_n^{i}p_x^{i}}{n}\right) = -\sum_{i\neq j} {}^{i}\mu_x^{j} \qquad [2]$$

siendo i = A, IT, F y j = A, IT, F

La Matriz de los Tantos Instantáneos de Transición resultante es:

$$\mu_x = \begin{bmatrix} {}^{A}\mu_x^{A} & {}^{A}\mu_x^{IT} & {}^{A}\mu_x^{F} \\ {}^{IT}\mu_x^{A} & {}^{IT}\mu_x^{IT} & {}^{IT}\mu_x^{F} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde

${}^{i}\mu_x^j$ representa el tanto instantáneo de transición del estado i al estado j de una persona de edad x, siendo i, j estados del espacio de estados considerado, en nuestro caso A, IT y F.

La Matriz de los Tantos Instantáneos de Transición μ_X, debe cumplir las siguientes propiedades:

$${}^{i}\mu_x^i \leq 0, {}^{i}\mu_x^j \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{\forall j \in S} {}^{i}\mu_x^j = 0 \qquad \forall i, j \in S$$

VARIACION DE LAS PROBABILIDADES DE TRANSICION

Considerando la Ecuación de Chapman-kolmogorov se obtiene la siguiente relación:

$${}_{n}^{i}p_x^j = \sum_{k \in S} {}_{t}^{i}p_x^k \; {}_{n-t}^{\;k}p_{x+t}^j \qquad 0 \leq t \leq n \qquad [3]$$

Teniendo en cuenta las relaciones [1], [2] y [3] se obtiene la derivada parcial con respecto a n, período de tiempo considerado, de las probabilidades de transición cuando no se produce ningún cambio de estado.

$$\lim_{\Delta n \to 0} \frac{{}_{\Delta n+n}^{\quad i}p_x^i - {}_{n}^{i}p_x^i}{\Delta n} = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{{}_{n}^{i}p_x^i \left({}_{\Delta n}^{\;i}p_{x+n}^i - 1 \right)}{\Delta n} = -{}_{n}^{i}p_x^i \sum_{i \neq j} {}^{i}\mu_{x+n}^j$$

Luego

$$\frac{\partial\, {}_{n}^{i}p_x^i}{\partial n} = -{}_{n}^{i}p_x^i \left(\sum_{i \neq j} {}^{i}\mu_{x+n}^j \right) \qquad [4]$$

Igualmente

$$\lim_{\Delta n\to 0}\frac{{}_{\Delta n+n}^{\;\;i}p_x^j-{}_n^ip_x^j}{\Delta n}=\lim_{\Delta n\to 0}\frac{{}_n^ip_x^j\,{}_{\Delta n}^{\;j}p_{x+n}^j+\sum\limits_{k\neq j}{}_n^ip_x^k\,{}_{\Delta n}^{\;k}p_{x+n}^j-{}_n^ip_x^j}{\Delta n}$$

$$=\lim_{\Delta n\to 0}\frac{{}_n^ip_x^j\left({}_{\Delta n}^{\;j}p_{x+n}^j-1\right)+\sum\limits_{k\neq j}{}_n^ip_x^k\,{}_{\Delta n}^{\;k}p_{x+n}^j}{\Delta n}$$

$$=-{}_n^ip_x^j\sum_{i\neq j}{}^j\mu_{x+n}^i+\sum_{k\neq j}{}_n^ip_x^k\,{}^k\mu_{x+n}^j$$

Por tanto

$$\frac{\partial\,{}_n^ip_x^j}{\partial n}=-{}_n^ip_x^j\sum_{i\neq j}{}^j\mu_{x+n}^i+\sum_{k\neq j}{}_n^ip_x^k\,{}^k\mu_{x+n}^j \qquad [5]$$

que representa la variación con respecto a n cuando se produce algún cambio de estado.

PROBABILIDADES DE TRANSICION EN FUNCION DE LOS TANTOS INSTANTANEOS DE TRANSICION

Partiendo de la expresión [4] e introduciendo un cambio de variable resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Log}_e\,{}_t^ip_x^i=-\sum_{i\neq j}{}^i\mu_{x+t}^j$$

Integrando los dos miembros de la igualdad entre 0 y n y sabiendo que ${}_0^ip_x^i=1$ se obtiene:

$$\mathrm{Log}_e\, {}_n^i p_x^i = -\int_0^n \sum_{i \neq j} {}^i\mu_{x+t}^j\, dt \qquad [6]$$

De la relación anterior se deduce la expresión de las probabilidades de transición en términos de los tantos instantáneos de transición, en el caso de permanencia en el mismo estado desde la edad x hasta la edad x+n, es decir, probabilidades de transición de cero etapas y que tomando el ejemplo anterior en el cual intervienen tres estados son:

$${}_n^A p_x^{A(0)} = \exp\left[-\int_0^n \left({}^A\mu_{x+t}^{IT} + {}^A\mu_{x+t}^{F}\right)dt\right]$$

$${}_n^{IT} p_x^{IT(0)} = \exp\left[-\int_0^n \left({}^{IT}\mu_{x+t}^{A} + {}^{IT}\mu_{x+t}^{F}\right)dt\right]$$

Por otra parte, si se toma la expresión [5] llamando t a la variable n y multiplicando los dos miembros de la igualdad por el término ${}_{n-t}^{\ j} p_{x+t}^{j(0)}$ se obtiene:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\, {}_t^i p_x^j\right] {}_{n-t}^{\ j} p_{x+t}^{j\ (0)} = \left[-{}_t^i p_x^j \sum_{i \neq j} {}^j\mu_{x+t}^i + \sum_{k \neq j} {}_t^i p_x^k\, {}^k\mu_{x+t}^j\right] {}_{n-t}^{\ j} p_{x+t}^{j\ (0)}$$

Integrando ambos miembros de la igualdad entre los límites 0 y n resulta:

a) para el primer miembro de la ecuación e integrando por partes,

$${}_n^i p_x^j - \int_0^n {}_t^i p_x^j \left(\sum_{j \neq 1} {}^j\mu_{x+t}^i\right) {}_{n-t}^{\ j} p_{x+t}^{j\ (0)}\, dt$$

b) para el segundo miembro de la ecuación,

$$\int_0^n \left[-{}_t^i p_x^j \sum_{i \neq j} {}^j\mu_{x+t}^i + \sum_{k \neq j} {}_t^i p_x^k \, {}^k\mu_{x+t}^j \right] {}_{n-t}^{\;j} p_{x+t}^{j\;(0)} \, dt$$

Igualando el resultado de los apartados a y b se obtiene la expresión:

$${}_n^i p_x^j = \int_0^n \sum_{k \neq j} {}_t^i p_x^k \, {}^k\mu_{x+t}^j \; {}_{n-t}^{\;j} p_{x+t}^{j\;(0)} \, dt \qquad [7].$$

expresión que permite obtener las probabilidades de transición en términos de los valores de la Matriz de los Tantos Instantáneos de Transición.

En la aplicación o modelo en el que se consideran los estados de Activo, el de Incapacidad Temporal y el de Fallecido, se representan las probabilidades de transición cuando hay algún cambio de estado, de acuerdo con la expresión [7]:

- *Probabilidades de transición del estado de Activo al estado de Activo después de realizada alguna transición al estado de Incapacidad Temporal.*

$${}_n^A p_x^{A(2)} = \int_0^n {}_t^A p_x^{IT(1)} \, {}^{IT}\mu_{x+t}^A \; {}_{n-t}^{\;A} p_{x+t}^{A(0)} dt$$

$${}_n^A p_x^{A(4)} = \int_0^n {}_t^A p_x^{IT(3)} \, {}^{IT}\mu_{x+t}^A \; {}_{n-t}^{\;A} p_{x+t}^{A\;(0)} dt$$

siendo ${}_{n}^{A}p_{x}^{IT(1)}$ y ${}_{n}^{A}p_{x}^{IT(3)}$ las probabilidades de transición que se analizan a continuación.

- *Probabilidades de transición del estado de Activo al estado de Incapacidad Temporal.*

Teniendo en cuenta las etapas que se pueden presentar se obtiene:

$${}_{n}^{A}p_{x}^{IT} = {}_{n}^{A}p_{x}^{IT(1)} \text{ y } {}_{n}^{A}p_{x}^{IT(3)}$$

donde

$${}_{n}^{A}p_{x}^{IT(1)} = \int_{0}^{n} {}_{t}^{A}p_{x}^{A\,(0)} \quad {}^{A}\mu_{x+t}^{IT} \quad {}_{n-t}^{IT}p_{x+t}^{IT\,(0)}\, dt$$

$${}_{n}^{A}p_{X}^{IT(3)} = \int_{0}^{n} {}_{t}^{A}p_{x}^{A\,(2)} \quad {}^{A}\mu_{x+t}^{IT} \quad {}_{n-t}^{IT}p_{x+t}^{IT\,(0)}\, dt$$

- *Probabilidades de transición del estado de Activo al estado de Fallecido.*

Si se tienen en cuenta las distintas etapas que se pueden dar en la transición del estado de Activo al de Fallecido al considerar como máximo dos procesos de Incapacidad Temporal:

$${}_{n}^{A}p_{x}^{F} = \sum_{r=1}^{5} {}_{n}^{A}p_{x}^{F(r)}$$

se obtiene la expresión

$$ {}_{n}^{A}p_{x}^{F} = \int_{0}^{n} \left[{}_{t}^{A}p_{x}^{A\,(0)} + {}_{t}^{A}p_{x}^{A\,(2)} + {}_{t}^{A}p_{x}^{A\,(4)} \right] {}^{A}\mu_{x+t}^{F} dt $$

$$ + \int_{0}^{n} \left[{}_{t}^{A}p_{x}^{IT\,(1)} + {}_{t}^{A}p_{x}^{IT\,(3)} \right] {}^{IT}\mu_{x+t}^{F} dt $$

- *Probabilidades de transición del estado de Incapacidad Temporal al estado de Activo.*

Teniendo en cuenta las distintas etapas:

$$ {}_{n}^{IT}p_{x}^{A} = {}_{n}^{IT}p_{x}^{A\,(1)} + {}_{n}^{IT}p_{x}^{A\,(3)} $$

$$ {}_{n}^{IT}p_{x}^{A} = \int_{0}^{n} \left[{}_{t}^{IT}p_{x}^{IT\,(0)} + {}_{t}^{IT}p_{x}^{IT\,(2)} \right] \; {}^{IT}\mu_{x+t}^{A} \;\; {}_{n-t}^{A}p_{x+t}^{A\,(0)} dt $$

la expresión de ${}_{n}^{IT}p_{x}^{IT(2)}$ se indica en el siguiente apartado.

- *Probabilidades de transición del estado de Incapacidad Temporal al mismo estado de Incapacidad Temporal después de realizada alguna transición al estado de Activo.*

La única posibilidad que se puede producir es,

$$ {}_{n}^{IT}p_{x}^{IT(2)} = \int_{0}^{n} {}_{t}^{IT}p_{x}^{A\,(1)} \;\; {}^{A}\mu_{x+t}^{IT} \;\; {}_{n-t}^{IT}p_{x+t}^{IT\,(0)} dt $$

- *Probabilidades de transición del estado de Incapacidad Temporal al estado de Fallecido.*

Teniendo en cuenta las distintas etapas que se pueden considerar

$$ {}^{IT}_{n}p^{F}_{x} = \sum_{r=1}^{4} {}^{IT}_{n}p^{F(r)}_{x} $$

$$ {}^{IT}_{n}p^{F}_{x} = \int_0^n \left[{}^{IT}_{t}p^{IT(0)}_{x} + {}^{IT}_{t}p^{IT(2)}_{x} \right] {}^{IT}\mu^{F}_{x+t}\,dt + \int_0^n \left[{}^{IT}_{t}p^{A(1)}_{x} + {}^{IT}_{t}p^{A(3)}_{x} \right] {}^{A}\mu^{F}_{x+t}\,dt $$

Quedan expresadas por tanto todas las probabilidades de transición del modelo de tres estados en el campo continuo, es decir, en función de los tantos instantaneos de transición.

BIBLIOGRAFÍA

AMSLER, M. H. (1968). "Les chaînes de Markov des assurances vie, invalidité et maladie". Decimoctavo Congreso Internacional de Actuarios.

ENRIQUEZ DE SALAMANCA NAVARRO, R. (1980). "Metodos cuantitativos para el estudio financiero de la protección por incapacidad laboral transitoria e invalidez provisional". *Revista de Seguridad Social.* Vol. 7.

FIX, EVELYN y NEYMAN, JERZY (1951). " A simple stochastic model of recovery, relapse, death and loss of patients". *Human biology.* Vol. 23, Nº 3.

HABERMAN, S. (1983). "Decrement tables and the measurement of morbidity: I". *Journal of the Institute of Actuaries.* Vol. 110.

HABERMAN, S. (1984). "Decrement tables and the measurement of morbidity: II". *Journal of the Institute of Actuaries.* Vol. 111.

HOEM, J. M. (1970). "Point estimation of forces of transition in demographic models". University of Oslo.