La inversión parcial de series aplicada a la investigación del tanto de interés en las rentas ciertas

Por D. José Antonio ESTRUGO Y ESTRUGO

SUMARIO

IV. METODOS CLASICOS EN LA INVESTIGACION DEL TANTO DE INTERES EN LAS RENTAS CIERTAS:

a) Método de Gauss.

b) Método de Gauss-Cantelli.

c) Método de aproximaciones sucesivas o reiterativo.

d) Fórmula de Baily.

e) Comentario sobre el método de Vanlaer.

V. NUESTRA CONTRIBUCION ANTERIOR:

1) Resolución mecánica de la ecuación trinomia.

2) Método logarítmico.

3) Sobre un método con recursos elementales.

4) La fórmula de Baily como caso particular de una más general.

I

PLANTEO DEL PROBLEMA

El problema del cálculo del tanto de interés en las rentas ciertas es un problema al parecer totalmente resuelto desde hace mucho tiempo.

Analíticamente, tratándose de una ecuación numérica de grado n, quedó comprendido dentro de los distintos procedimientos de resolución de este tipo de ecuaciones.

Técnicamente, habiéndose construído tablas especiales que dan los valores de $a_{\overline{n|}}$; $a^{-1}_{\overline{n|}}$; $s_{\overline{n|}}$; $s^{-1}_{\overline{n|}}$; v^n ; con ellas y las fórmulas de interpolación, la técnica dejó superado el problema.

Sin embargo, no dejan de aparecer en revistas y publicaciones artículos exponiendo procedimientos particulares que tienden por distintos caminos hallar ese dato cuando es incógnito, contradiciendo aparentemente las anteriores afirmaciones.

La explicación a este hecho puede residir en que, si bien en su forma analítica el problema se resuelve irreprochablemente, su realización numérica concreta es sumamente laboriosa, de ahí que se investiguen otros procedimientos más prácticos y expeditivos que, adaptándose a las singularidades de la ecuación, reduzcan en todo lo posible las operaciones a realizar.

Del mismo modo, para que los resultados que necesita la técnica sean correctos, es preciso que el intervalo de valores del tanto de interés con que han sido calculadas las tablas sea suficientemente reducido, pues de otra manera la interpolación, aun considerando diferencias segundas, no logra la aproximación apetecida.

Como en tiempos ya pasados las tablas financieras eran escasas e incompletas, se comprende que primaran históricamente las consideraciones hechas al hablar de la solución analítica.

Dicha influencia histórica ha dado lugar a que se adquiera el conocimiento de fórmulas particulares muy difundidas y de concepción ingeniosa muchas de ellas.

Hablar de estas cuestiones y no citar la conocida y clásica fórmula de Baily (1774-1844), sería un olvido imperdonable.

Esta fórmula, que reconoce como antecedentes las de Edmundo Halley (1656-1742) y de Tomás Simpson (1710-1761), no obstante su valor histórico e ingeniosa concepción, tiene, en la actualidad, un valor muy relativo, pese a la corrección de Lenzi, por necesitar tablas de logaritmos.

Aunque la ecuación trinomia fundamental a que da lugar la investigación del tanto de interés

$$az^{n+1} - (1 + a)z^n + 1 = 0$$

fue estudiada por Gauss y Cantelli, el hecho de precisar para la obtención por tanteo de un primer valor aproximado, tablas trigonométricas y de logaritmos, alejaron dichos métodos de su utilización práctica, pero no así de su exposición teórica, por el carácter formativo y de aplicación de teoremas de Análisis que le integran.

De ahí en adelante han sido numerosísimas las fórmulas y métodos que han ido apareciendo y que se recogen en obras tan conocidas como las de: Sutton, Todhunter, Carboni, Santacroce, Sibirani, Lowey, Barriol, etc. (en esta última, el método de Achard, utilizando tablas de M. Muräi).

Por iguales fechas a las que estamos haciendo referencia, se perfeccionan los métodos basados en aproximaciones sucesivas, métodos reiterativos para grandes valores del tiempo n, y los que considerando un primer valor aproximado dado por las tablas financieras, tienden a corregirlos: primera fórmula de Baily, o regla de Newton.

En épocas recientes, indicaremos los muy interesantes trabajos de Barral Souto, y entre ellos, el titulado: "Sobre el problema de la tasa del interés en las rentas ciertas" (*), que considera la utilización de la máquina de calcular a la resolución de la ecuación por medio de los logaritmos de Gauss; el de J. E. Kerrich, "A Method of Determining the Rate of

(*) *Revista de Ciencias Económicas,* febrero 1936.

Interest Involveld a Given Transaction" (*); el de Lascurain, "Procedimiento para el cálculo de la tasa de interés en un tipo de renta cierta" (**) y, por último, el monumental trabajo de G. Vanlaer: "Méthodes et tables pour la calcul avec 15 chiffres du taux d'intérêt d'une annuité certain" (***), que perfeccionando el método de Achard le lleva, mediante el auxilio de tablas especialmente calculadas, a la mencionada aproximación, de inmenso valor teórico, pero desproporcionado desde el punto de vista práctico por la natural densidad de operaciones a realizar.

Por nuestra parte, no hemos estado ausentes a esta contribución y a partir del año 1941 hemos publicado algunos trabajos que hacemos aparecer en el capítulo V del presente estudio (****).

Resumiendo lo expuesto, vemos que la aplicación para el cálculo del tanto de interés en las rentas ciertas de los procedimientos directos del Análisis, así como los que consigue la técnica, resultan penosos por el cúmulo de operaciones a realizar, impropios de la agilidad en los cálculos que la práctica reclama. Los restantes métodos ideados para salvar esta dificultad, hasta ahora, precisan disponer en el momento oportuno de tablas especialmente hechas, o bien de tablas financieras o logarítmicas y algunas veces trigonométricas, con lo que el conjunto de operaciones aritméticas a realizar se mitiga, pero no se resuelve, llevándonos a la conclusión de que el ideal práctico no ha sido aún logrado.

Muy recientemente nos ha publicado la revista *Gaceta Matemática* (1.ª serie, tomo XV, números 1 y 2, 1963) un trabajo titulado: "Inversión de series y sus aplicaciones" que puede aplicarse satisfactoriamente a resolver el problema

(*) *Journal of Institute of Actuaries*, 1939.

(**) *Anales del Instituto Actuarial Argentino*, 1952. (Este método sigue las directrices de los primitivos de HALLEY y de SIMPSON, mejorándolos.)

(***) Boulletin trimestriel de l'Institut des Actuaries Francais, 1954.

(****) Fueron publicados en *Revista de la Universidad de Oviedo*, *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, Revista *Gaceta Matemática* y *Publicaciones del Seminario de Matemáticas Financieras*, de la Escuela Superior de Comercio de Madrid.

propuesto, con la ventaja de que mecaniza totalmente las operaciones a verificar.

El sugestivo resultado conseguido nos mueve a redactar este trabajo que tiende además a dar una idea del estado actual en que se encuentran estas investigaciones.

II

INVERSION PARCIAL DE SERIES

1. Justificación.

En la teoría de funciones complejas se demuestra que dada una serie de radio no nulo

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_kx^k + \dots \qquad [1]$$

puede ser encontrado otro desarrollo de la forma

$$x = c_0 + c_1y + c_2y^2 + c_3y^3 + \dots + c_ky^k + \dots \qquad [2]$$

Los coeficientes $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = - a_2$, $c_3 = 2a^2 - a_3$, etcétera, se calculan sustituyendo [2] en [1], e identificando los coeficientes de las sucesivas potencias de y.

Con lo anterior, el problema queda teóricamente resuelto; pero en la práctica, cuando conocido y se desea hallar x, el desarrollo [2] resulta lento y difícil de obtener por no existir un proceso mecánico para hallar los c_i. Este será, pues, el objeto del presente trabajo y su aplicación inmediata al problema del cálculo del tanto de interés en las rentas ciertas, ya que todos los métodos existentes en la actualidad no intentan siquiera iniciar este camino, vistas las dificultades que el mismo encierra.

Antes de entrar de lleno en el teorema fundamental, hemos de estudiar algunas propiedades de un determinante especial en que se apoya aquél facilitando los cálculos posteriores.

2. Determinante inversor y columna-vector: Definiciones y propiedades.

Dada la serie [1], se denominará "determinante inversor", $\Delta(k)$, de los k primeros coeficientes al que presenta la forma:

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} 1 & -y & 0 & \dots 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & -y & \dots 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 1 & \dots 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-2} & a_{k-3} & a_{k-4} & \dots 1 & -y & 0 \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots a_2 & 1 & -y \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots a_3 & a_2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{y columna-vector a la} \quad \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \dots \\ a_{k-1} \\ a_k \\ a_{k+1} \end{vmatrix}$$

que comprende del segundo coeficiente al de lugar $k + 1$. En todo lo que sigue se supone $y > 0$.

El determinante $\Delta(k)$ goza de las siguientes propiedades:

1.ª *Todos los términos del polinomio determinante son positivos.*

En efecto, como todos los términos negativos ocupan el lugar $(i, i + 1)$, son de clase impar y desarrollando el determinante de orden k y los sucesivos por los elementos de la última columna, que da lugar a otros determinantes de forma idéntica, se evidencia lo indicado.

2.ª *El número de elementos no nulos de $\Delta(k)$ es 2^{k-1}.*

Si desarrollamos como antes por la última columna a $\Delta(k)$, se obtienen dos determinantes de forma similar y siendo $N[A(k)] = 2N[A(k-1)]$ resultará $N[A(k)] = 2^{k-1}$, ya que el desarrollo de $\Delta(k-1)$ admite idéntica descomposición, y así sucesivamente hasta $N[A(2)] = 2$.

3.ª *Si sustituimos en $\Delta(k)$ su primera columna por la vector, se obtiene un determinante que es igual a los adjuntos de $\Delta(k)$ multiplicado cada uno por el siguiente coeficiente respectivo.*

Si denominamos $\nabla(k)$ al determinante resultado de realizar dicha operación, se tendrá:

$$\nabla(k) = \begin{vmatrix} a_2 & -y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 1 & -y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & 1 & -y & 0 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_2 & 1 & -y \\ a_{k+1} & a_k & a_{k-1} & \dots & a_3 & a_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando $\Delta(k)$ y $\nabla(k)$ por los elementos de la primera columna

$$\left.\begin{aligned} \Delta(k) &= A_{11} + a_2A_{21} + a_3A_{31} + \dots + a_kA_{k1} \\ \nabla(k) &= a_2A_{11} + a_3A_{21} + a_4A_{31} + \dots + a_{k+1}A_{k1} \end{aligned}\right\}$$

se evidencia lo afirmado.

4.ª *Existe la relación de recurrencia* $\Delta(k + 1) = \Delta(k) + \nabla(k)y$.

Basta para ello escribir el determinante inversor de orden $k + 1$ y desarrollarlo por la primera fila.

5.ª *Existe la relación* $A_{t1} = \Delta(k - t)y^{t-1}$.

Dicha relación, fácil de evidenciar, permite desarrollar un determinante inversor de orden k, en función de todos los de orden inferior, con lo que se obtiene:

$$\Delta(k) = \Delta(k - 1) + a_2\Delta(k - 2)y + a_3\Delta(k - 3)y^2 + \dots + a_ky^{k-1}$$

3. TEOREMA FUNDAMENTAL.

Dada una serie de radio no nulo

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_kx^k + \ldots$$

se pueden multiplicar ambos miembros sucesivamente por $\alpha_i x^i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$, siendo α_1 indeterminadas y sumar los resultados, con lo que se obtiene:

$$
\begin{array}{rcl|l|l|ll|l|l|l}
y & = & x + a_2 & x^2 + a_3 & x^3 + a_4 & x^4 + \ldots & + a_k & x^k + a_{k+1} & x^{k+1} + a_{k+2} & x^{k+2} + \ldots \\
+ y\alpha_1 x & = & + \alpha_1 & + a_2\alpha_1 & + a_3\alpha_1 & & + a_{k-1}\alpha_1 & + a_k\alpha_1 & + a_{k+1}\alpha_1 & \\
+ y\alpha_2 x^2 & = & & + \alpha_2 & + a_2\alpha_2 & & + a_{k-2}\alpha_2 & + a_{k-1}\alpha_2 & + a_k\alpha_2 & \\
+ y\alpha_3 x^3 & = & & & + \alpha_3 & & + a_{k-3}\alpha_3 & + a_{k-2}\alpha_3 & + a_{k-1}\alpha_3 & \\
 & & & & & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
+ y\alpha_{k-1} x^{k-1} & = & & & & & + \alpha_{k-1} & + a_2\alpha_{k-1} & + a_3\alpha_{k-1} & \\
+ y\alpha_k \; x^k & = & & & & & & + \alpha_k & + a_2\alpha_k &
\end{array}
\qquad [7]
$$

Por ser el desarrollo de y convergente y el proceso vertical limitado, será también convergente la suma creada en [7], ya que cada sumando es el resultado de haber multiplicado y por cantidades constantes, aunque de momento indeterminadas, y potencias sucesivas de x.

Si ahora hacemos cumplir a las indeterminadas α_i la condición de que los coeficientes de las potencias verticales del primer miembro, a partir de x^2, igualen a sus respectivos del segundo y además que el coeficiente de x^{k+1} sea nulo, tendremos

$$
\begin{array}{llllllll}
\alpha_1 & - y\alpha_2 & & & & & = - a_2 & \\
a_2\alpha_1 & + \alpha_2 & - y\alpha_3 & & & & = - a_3 & \\
a_3\alpha_1 & + a_2\alpha_2 & + \alpha_3 & & & & = - a_4 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & [8] \\
a_{k-2}\alpha_1 & + a_{k-3}\alpha_2 & + a_{k-4}\alpha_3 & + \ldots & \alpha_{k-2} & + y\alpha_{k-1} & = - a^{k-1} & \\
a_{k-1}\alpha_1 & + a_{k-2}\alpha_2 & + a_{k-3}\alpha_3 & + \ldots & a_2\alpha_{k-2} & + \alpha_{k-1} - y\alpha_k & = - a_k & \\
a_k\alpha_1 & + a_{k-1}\alpha_2 & + a_{k-2}\alpha_3 & + \ldots & a_3\alpha_{k-2} & + a_2\alpha_{k-1} + \alpha_k & = - a_{k+1} &
\end{array}
$$

Sustituyendo en [7] las condiciones [8] que se imponen, queda la primera con k términos nulos, pudiéndose escribir:

$$y + y\alpha_1 x = x + B_{k+2}x^{k+2} + B_{k+3}x^{k+3} + \ldots$$

$$\left[B_{k+t} = \sum_{i=0}^{i=k} a_{k+t-i}\alpha_i \right] \qquad \alpha_0 = 1$$

De la expresión anterior despejando x y designando por $\alpha_1^{(k)}$ la primera indeterminada al objeto de señalar el número de coeficientes que intervienen, queda

$$x = \frac{y}{1 - \alpha_1^{(k)} y} \qquad [9]$$

siendo

$$\varepsilon_{k+2} = \frac{1}{1 - \alpha_1^{(k)} y} \sum_2^{\infty} \beta_{k+t} x^{k+t}$$

lo que nos permite enunciar el siguiente teorema:

"Dada una serie potencial convergente cuya suma sea conocida, puede ser realizada una inversión parcial y determinarse el valor de la variable mediante la expresión

$$x = \frac{y}{1 - \alpha_1^{(k)} y}$$

con error igual al de potencias de dicha variable del orden $k + 2$ y sucesivas, conseguida la anulación de k *términos consecutivos en su desarrollo original."*

4. *Cálculo de la indeterminada.*

En aquellos casos prácticos en que el valor de ε_{k+2}, se considere despreciable a la aproximación pedida, o se controle en forma indirecta, el valor de x viene dado por el solo cálculo de la indeterminada $\alpha_1^{(k)}$, que seguidamente realizaremos.

Habida cuenta que [8] constituye un sistema determinado de orden k, se puede aplicar la regla de Cramer, dándonos para el valor de $\alpha_1^{(k)}$, un cociente cuyo numerador resulta ser $-\nabla(k)$, y el denominador el determinante inversor $\Delta(k)$; por tanto, podemos escribir:

$$\alpha_1^{(k)} = - \frac{\nabla(k)}{\Delta(k)} \qquad [10]$$

5. *Cálculo del valor principal de la variable.*

Cuando solamente se consideran en los cálculos el valor obtenido en [9], sin evaluar ε_{k+2}, le daremos el nombre de "valor principal" y lo designaremos por $x^{(k)}$, indicando el exponente simbólico el número de indeterminadas elegidas.

Sustituyendo el valor [10] en [9], se tiene como valor principal

$$x^{(k)} = \frac{y}{1 - \alpha_1^{(k)} y} = \frac{y}{1 + \dfrac{\nabla(k)}{\Delta(k)}\, y} =$$

$$= \frac{y\Delta(k)}{\Delta(k) + \nabla(k) y} = y\,\frac{\Delta(k)}{\Delta(k+1)} \qquad [11]$$

teniendo en cuenta la propiedad 4.ª del determinante inversor.

Consecuencia de lo anterior es el siguiente teorema:

"El valor principal de la variable, en cada caso, es igual al de la función multiplicado por el cociente de dos determinantes inversores consecutivos."

6. *Sobre la aproximación.*

Si realizamos el cociente en [11], se obtiene:

$$x = y + c_2y^2 + c_3y^3 + \dots + c_{k+1}y^{k+1} + \delta_{k+2}y^{k+2} + \\ + \delta_{k+3}y^{k+3} + \dots \qquad [12]$$

en donde los coeficientes c_2, c_3, c_4, ... c_{k+1}, coinciden con los expresados en [2] al definir la inversión total.

El error, expresado en [9] en función potencial de la variable, puede ahora ser establecido por la diferencia

$$\varepsilon_{k+2} = (c_{k+2} - \delta_{k+2})y^{k+2} + \\ (c_{k+3} - \delta_{k+3})y^{k+3} + \dots \qquad [13]$$

dependiente ahora exclusivamente de la función *y*.

El cálculo por [9] o bien por [13] del error, dependerá exclusivamente de la comodidad del calculador, debiendo hacerse resaltar que, tanto en uno como en otro caso, y salvo el caso de funciones cuya inversa sea conocida, su determinación resulta más laboriosa a medida que el valor de *k* aumenta.

La [13] indica claramente que el método establecido por nosotros para la inversión parcial conducirá a una mayor aproximación en general, que si calculáramos directamente los k + 1 coeficientes de [2] siempre que c_{k+t} y δ_{k+t} sean del mismo signo y $|\delta_{k+t}| < 2\,|c_{k+t}|$.

7. *Normas para el cálculo.*

Un ejemplo señalará con más elocuencia el proceso que, a nuestro entender, debe seguirse en el cálculo de la variable a fin de aprovechar al máximo la mecanización que introduce el procedimiento anteriormente expuesto.

Sea la serie

$$y = e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \qquad [14]$$

Según [11], tendremos

$$x^{(k)} = y \frac{\Delta(k)}{\Delta(k+1)} \qquad [14']$$

siendo ahora

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} 1 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2! & 1 & -y & 0 & 0 & 0 \\ 1/3! & 1/2! & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/(k-2)! & 1/(k-3)! & 1/(k-4)! & 1 & -y & 0 \\ 1/(k-1)! & 1/(k-2)! & 1/(k-3)! & 1/2! & 1 & -y \\ 1/k! & 1/(k-1)! & 1/(k-2)! & 1/3! & 1/2! & 1 \end{vmatrix} \qquad [15]$$

y el error cometido

$$\varepsilon_{k+2} = \frac{\Delta(k)}{\Delta(k+1)} \sum_{2}^{\infty} \beta_{k+t} x^{k+t}$$

Supongamos deseamos resolver la ecuación $e^x = 1{,}64872$ ($x = 0{,}5$). En este caso

$$y = e^x - 1 = 0{,}64872$$

Calculando las sucesivas Δ, para luego aplicar [14']:

$$\Delta(1) = 1$$

$$\Delta(2) = \begin{vmatrix} 1 & -0'64872 \\ \frac{1}{2!} & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0'32436 = 1{,}32436$$

$$\Delta(3) = \begin{vmatrix} 1 & -0'64872 & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & -0'64872 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 \end{vmatrix} = 1{,}71885$$

$$\Delta(4) = \begin{vmatrix} 1 & -0'64872 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & -0'64872 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & -0'64872 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 \end{vmatrix} = 2{,}22993$$

Limitándonos a los anteriores valores, obtenemos:

$$x^{(1)} = 0'64872 \frac{\Delta(1)}{\Delta(2)} = \frac{0'64872}{1'32436} = 0'4898$$

$$x^{(2)} = 0'64872 \frac{\Delta(2)}{\Delta(3)} = \frac{0'85914}{1'71885} = 0'4998$$

$$x^{(3)} = 0'64872 \frac{\Delta(3)}{\Delta(4)} = \frac{1'115052}{2'22993} = 0'50004$$

Si se deseara continuar el cálculo, no es preciso hallar directamente $\Delta(5)$; basta aplicar, por conocerse $\Delta(2)$, $\Delta(3)$ y $\Delta(4)$, la fórmula de recurrencia hallada en [6].

III

APLICACIONES A LA MATEMATICA FINANCIERA

1. Cálculo del tanto de interés en las rentas ciertas.

De la igualdad fundamental

$$a = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

se llega, desarrollando el binomio, simplificando y haciendo la unidad el coeficiente de i, a la expresión

$$A = \frac{n - a}{n(n+1)/2} = i - \frac{n+2}{3} i^2 +$$

$$+ \frac{(n+2)(n+3)}{12} i^3 - \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{60} i^4 + \ldots$$

que presenta la forma [1] y, por tanto,

$$i^{(k)} = A \frac{\Delta(k)}{\Delta(k+1)} \qquad [16]$$

dependiendo la aproximación que se consiga del valor que asignemos a k en los cálculos.

Si en lugar de limitarnos a obtener los valores aritméticos de los determinantes inversores que aparecen, seguimos su desarrollo algebraico, la [16] es punto de partida de infinitas fórmulas que se aproximan cada vez más al valor incógnito. Sin embargo, como aumentar k en una unidad representa el cálculo exacto de un término más de la serie inversa, como puede comprobarse por la fórmula [12], y éstos decrecen rápidamente, un valor para k igual a 3 ó 4, permite superar la aproximación que la técnica exige en este problema en la mayoría de los casos.

Siguiendo, como decíamos antes, un proceso algebraico, calculamos los sucesivos determinantes inversores

$$\Delta(1) = 1.$$

$$\Delta(2) = \begin{vmatrix} 1 & -A \\ -\dfrac{n+2}{3} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{n+2}{3} A$$

$$\Delta(3) = \begin{vmatrix} 1 & -A & 0 \\ -\dfrac{n+2}{3} & 1 & -A \\ \dfrac{(n+2)\,(n+3)}{12} & -\dfrac{n+2}{3} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - \frac{2(n+2)}{3} A + \frac{(n+2)\,(n+3)}{12} A^2$$

$$\Delta(4) = \begin{vmatrix} 1 & -A & 0 & 0 \\ -\dfrac{n+2}{3} & 1 & -A & 0 \\ \dfrac{(n+2)\,(n+3)}{12} & -\dfrac{n+2}{3} & 1 & -A \\ \dfrac{-(n+2)(n+3)(n+4)}{60} & \dfrac{(n+2)(n+3)}{12} & -\dfrac{n+2}{3} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - (n+2)A + \frac{(n+2)\,(5n+13)}{18} A^2$$
$$\frac{-(n+2)(n+3)(n+4)}{60} A^3$$

Sustituyendo ahora estos valores en [16], se tiene sucesivamente:

$$i^{(1)} = A \frac{\Delta(1)}{\Delta(2)} = A \frac{1}{1 - \frac{n+2}{3} A} = A \frac{3}{3 - (n+2)A}$$

$$i^{(2)} = A \frac{\Delta(2)}{\Delta(3)} = A \frac{1 - \frac{n+2}{3} A}{1 - \frac{2(n+2)}{3} A + \frac{(n+2)(n+3)}{12} A^2} =$$

$$= A \frac{12 - 4(n+2)A}{12 - 8(n+2)A + (n+2)(n+3)A^2}$$

$$i^{(3)} = A \frac{\Delta(3)}{\Delta(4)} =$$

$$= A \frac{180 - 120(n+2)A + 15(n+2)(n+3)A^2}{180 - 180(n+2)A + 10(n+2)(5n+13)A^2 - 3(n+2)(n+3)(n+4)A^3}$$

Como aplicación de las fórmulas anteriores, resolveremos el siguiente problema:

Se desea calcular el tipo de interés que sirvió para evaluar la renta $a_{\overline{20}|} = 13{,}5903263$.

Teniendo en cuenta el valor de A dado anteriormente

$$A = \frac{20 - 13{,}5903263}{210} = 0'030{,}522{,}2$$

Sustituyendo primero los valores algebraicos y luego verificando las operaciones obtenemos:

$$i^{(1)} = A \frac{3}{3 - (n+2)A} = \frac{0'0915666}{0'3285116} = 0'039.332{,}5$$

$$i^{(2)} = A \frac{12 - 4(n+2)A}{12 - 8(n+2)A + (n+2)(n+3)A^2} =$$

$$= \frac{0'284285187}{7'0994848} = 0'040{,}043$$

$$i^{(3)} = \frac{3'2503468}{81{,}245764} = 0{,}040.006$$

El tanto exacto es $i = 0{,}04$.

2. Estudio de la variación del tanto de interés al variar la renta.

A fin de fijar ideas, haremos en lo que sigue una modificación en las notaciones de las rentas con el objeto de poner de manifiesto el tanto de interés. Desde este punto de vista, representaremos la expresión $a_{\overline{n}|i}$ por $a_n(i)$.

Dado el valor actual $a_n(x)$, x incógnito, y conocido el de otra renta al tanto i, $a_n(i)$, podemos hacer $x = i + h$, y aplicar el desarrollo de Taylor, obteniendo

$$a_n(i + h) = a_n(i) + a'_n(i)h + a''_n(i)\,\frac{h^2}{2!} + \dots \qquad [16']$$

Siendo difíciles de obtener las derivadas sucesivas del valor actual de las rentas, conviene estudiar la posibilidad de conseguir una fórmula general. Para ello, si escribimos

$$a_n(i) = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = i^{-1} - i^{-1}(1 + i)^{-n}$$

y aplicamos al producto $i^{-1}(1 + i)^{-n}$, la regla de Leibnitz para la derivada de un orden cualquiera, se tiene:

$$a_n^{(k)}(i) = \frac{(-1)^k k!}{i^{k+1}}\left[1 - v^n\left(1 + \binom{n}{1} iv + \dots + \binom{n+k-1}{k} i^k v^k\right)\right] =$$

$$= \frac{(-1)^k k!}{i^k}\left[\begin{array}{l} a_n(i) - \binom{n}{1} v^{n+1} + \dots \\ -\binom{n+k-1}{k} i^k v^k \end{array}\right] \qquad [17]$$

En particular,

$$a'_n(i) = -\frac{1}{i}\left(a_n(i) - nv^{n+1}\right)$$

$$a''_n(i) = \frac{2}{i}\left(a_n(i) - nv^{n+1} - n\,\frac{(n+1)}{2}\,iv^{n+2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{i}\left(-2a'_n(i) - n(n+1)v^{n+2}\right)$$

En general con los dos valores anteriormente calculados sustituidos en [16] se obtiene una excelente aproximación.

3. MEJORA DE APROXIMACIÓN EN VALORES CONSEGUIDOS.

La [16'] permite este objetivo, puesto que haciendo el coeficiente de *h* la unidad, se transforma en esta forma

$$\frac{a_n(x) - a_n(i)}{a'_n(i)} = y = h + \frac{a''_n(t)\ h^2}{2\,a'_n(i)} + \frac{a'''_n(i)\ h^3}{3!\,a'_n(i)}$$

que permite proceder a la inversión parcial, en este caso resultando suficiente considerar a $k = 1$ por la complicación de cálculos que origina.

IV

METODOS CLASICOS EN LA INVESTIGACION DEL TANTO DE INTERES EN LAS RENTAS CIERTAS

1. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN TRINOMIA.

a) Método de Gauss (1777-1855).

Partiendo de la ecuación trinomia

$$z^{n+1} - (1 + \alpha)z^n + \alpha = 0 \qquad [1]$$

se tiene, dividiendo por z^{n+1}:

$$1 + \frac{\alpha}{z^{n+1}} = \frac{1 + \alpha}{z}$$

y haciendo

$$A_1 = \log \alpha - (n + 1) \log z$$
$$B_1 = \log (1 + \alpha) - \log z$$

donde A y B son los números que se encuentran en las tablas de logaritmos de sumas y diferencias de Gauss, Bremiker, Müller o Wittstein, resulta:

$$A_1 - (n + 1)\, B_1 = \log \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^{n+1}} \qquad [2]$$

y

$$\log z = \log (1 + \alpha) - B_1$$

La ecuación [1] se escribe también

$$1 + \frac{z^{n+1}}{\alpha} = \frac{1 + \alpha}{\alpha}\, z^n$$

y haciendo

$$A_2 = (n + 1) \log z - \log \alpha$$
$$B_2 = \log (1 + \alpha) - \log \alpha + n \log z$$

se tiene

$$n\, A_2 - (n + 1)\, B_2 = \log \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^{n+1}} \qquad [3]$$

y

$$\log z = \frac{A + \log \alpha}{n + 1}$$

Las ecuaciones [2] y [3], que se resuelven fácilmente empleando la interpolación lineal, permiten determinar el tanto en menos de una milésima.

b) *Método de Gauss-Cantelli.*

Dividiendo ambos miembros de la [1] de la página anterior por $(1 + a)z^n$, nos queda

$$\frac{az}{1 + a} + \frac{1}{(1 + a)^{n+1}} = 1 \qquad [4]$$

y como para z positivo debe verificarse simultáneamente

$$\frac{az}{1 + a} < 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{(1 + a)^{n+1}} < 1$$

podemos hacer

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{az}{1+a} \qquad [5]$$

con lo cual la [4] cumple una relación bien conocida

$$\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

y donde el ángulo φ, en virtud de [5], se determina por la condición

$$\operatorname{sen}^{2n} \varphi \cos^2 \varphi = \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}} = \lambda^2 \qquad [6]$$

Tomando logaritmos en [6], se tiene

$$n \log \operatorname{sen} \varphi + \log \cos \varphi = \log \lambda$$

de la que, con ayuda de las tablas de logaritmos y trigonométricas, se obtiene φ, mediante tanteos.

De la segunda igualdad de [5] se tiene

$$z = \frac{(1+a) \operatorname{sen}^2 \varphi}{a}$$

que nos permite hallar i, al ser $i = z - 1$.

(Como puede observarse, este procedimiento necesita la utilización de las tablas de logaritmos y trigonométricas, además de proceder por tanteos iniciales.)

2. Método de aproximaciones sucesivas o reiterativo.

La ecuación fundamental

$$a = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

puede ser escrita de la forma

$$i = \frac{1-(1+i)^{-n}}{a} = f(i)$$

e indicando i_0 un valor próximo a i, podemos calcular sucesivamente

$$\left.\begin{array}{l} i_1 = f(i_0) \\ i_2 = f(i_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ i_n = f(i_{n-1}) \end{array}\right\} \qquad \text{verificándose} \qquad i = \lim_{n\to\infty} i_n$$

En efecto, aplicando el teorema de la media al segundo miembro de la siguiente igualdad, se tiene

$$i_n - i = f(i_{n-1}) - f(i) = (i_{n-1} - i)\, f'(\Sigma_n) \qquad i_{n-1} < \Sigma_n < i$$

Como la derivada primera de f(i), respecto a i, es

$$f'(i) = \frac{n(1 + i)^{-(n+1)}}{a}$$

resulta positiva e inferior a la unidad para todo i positivo (*).

Por tanto, podemos hacer que $f'(i) < k < 1$. Luego

$$|i_{n+1} - i| < |i_{n-1} - i| k$$

y aplicando reiteradamente esta desigualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} |i_n - i| &< |i_{n-1} - i| k \\ &< |i_{n-2} - i| k^2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &< |i_0 - i| k^n \end{aligned}$$

En definitiva, por ser $k < 1$,

$$\lim_{n\infty} |i_n - i| = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \lim_{n\infty} i_n = i$$

El valor inicial puede ser obtenido por cualquier método, pero en general como sólo tiene aplicación este procedimien-

(*) Basta observar que $a = v + v^2 + \dots + v^n > nv^{n+1}$, luego $\dfrac{nv^{n+1}}{a} < 1$.

to para valores grandes de n, se emplea en la práctica un valor ya relativamente próximo cuando n es elevado:

$$\alpha = 1/a$$

3. MÉTODO BASADO EN EL DESARROLLO EN SERIE.

Fórmula de Baily.

Conocido el desarrollo en serie de la renta:

$$\frac{a}{n} = 1 - \frac{n+1}{2}\, i + \frac{(n+1)\,(n+2)}{6}\, i^2 - \\ - \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{24}\, i^3 + \\ + \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}{120}\, i^4 + \dots \qquad [7]$$

al matemático inglés Baily se debe la idea de elevar ambos miembros de [7] al recíproco del coeficiente de i, es decir, a $-2/n+1$, obteniendo:

$$\left[\frac{a}{n}\right]^{\frac{-2}{n+1}} = 1 + i - \frac{n-1}{12}\, i^2 - \\ - \frac{(n-1)\,(n+2)\,(n+3)}{1440}\, i^4 + \dots \qquad [8]$$

que tiene la particularidad de carecer del término en i^3.

Prescindiendo del último término escrito en [8], queda una ecuación de segundo grado en i que Baily resuelve por aproximaciones sucesivas, llegando a la expresión

$$i_1 = h\, \frac{12-(n-1)h}{12-2(n-1)h}$$

$$\left(h = \left[\frac{n}{a}\right]^{\frac{2}{n+1}} - 1\right)$$

que se considera como valor de la raíz de la ecuación.

Se puede demostrar que i_1 es un valor aproximado por exceso al valor de i. Nosotros propusimos corregir el valor encontrado mediante el cuarto término de [8], con lo cual se obtiene otro

$$i_2 = i_1 - \frac{(n-1)(n+2)(n+3)}{1440} i_1^4$$

que cumple la limitación de todo punto importante

$$i_2 < i < i_1$$

que permite darnos cuenta de la aproximación conseguida.

Comentario al método de Vanlaer.

El mérito que se atribuye a la fórmula de Baily es el de haber conseguido anular un término en un desarrollo en serie, en este caso el término en i^3. Modernamente, Vanlaer ha demostrado que los desarrollos logarítmicos producen una mejor aproximación, sobre todo si se considera en ellos el tanto continuo de interés, equivalente al anual *i*. En efecto, obtiene en este supuesto el desarrollo similar al [7], siendo

ahora $e^{\delta} - 1 = i \left[\delta = L_e(1+i)\right]$:

$$\log_e \frac{a}{n} = \log_e \frac{1 - e^{-n\delta}}{n(e^{\delta}-1)} = -\frac{n+1}{2}\delta +$$

$$+ \frac{n^2-1}{24}\delta^2 - \frac{n^4-1}{120 \cdot 4!}\delta^4 + \frac{n^6-1}{252 \cdot 6!}\delta^6 + \dots \qquad [9]$$

Como puede observarse, la [9] carece del término en δ^3 y de todos los impares, excepto el primero, pudiéndose proceder directamente a un planteo idéntico a la fórmula de Baily sin necesidad de artificio algebraico alguno. Aquí regula el Algebra lo que constituyó la idea feliz de Baily y que propagan todos los libros dedicados a esta especialidad.

V

NUESTRA CONTRIBUCION ANTERIOR

1. Resolución mecánica de la ecuación trinomia a que da lugar el cálculo del tanto de interés en las rentas ciertas.

Se trata de resolver con respecto a i, la ecuación

$$a = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

en la cual, haciendo $1 + i = z$, se obtiene:

$$az^{n+1} - (1 + a)z^n + 1 = 0 \qquad [1]$$

ecuación trinomia que presenta dos variaciones, luego, por la regla de signos, tendrá dos raices positivas o ninguna. Pero [1] se satisface para $z = 1$; por tanto, existirá una segunda raíz positiva, que es la objeto de nuestro estudio, por ser extraña a la naturaleza del problema la primera, que suministra para i el valor cero.

A nuestro objeto, si dividimos [1] por a y hacemos

$$z = \left(1 + \frac{1}{a}\right)x = (1 + \alpha)x$$

de donde

$$x = (1 + i)/(1 + \alpha)$$

tendremos

$$x^{n+1} - x^n + \alpha^n/(1 + \alpha)^{n+1} = 0$$

que podemos poner en la forma

$$x^n - x^{n+1} + \beta = 0 \qquad (\beta = \alpha^n/(1 + \alpha)^{n+1}$$

o bien

$$x^n - x^{n+1} = \beta$$

La ecuación trinomia [3] presenta la forma de diferencia de dos potencias consecutivas, sugiriéndonos la idea de resolver la misma mediante una tabla de valores previamente calculados, siempre que los que pueda alcanzar x en la práctica tengan un límite muy estrecho de oscilación.

Partiendo de [1], observamos que la ecuación [3] tiene las dos soluciones positivas

$$x_1 = 1/(1 + \alpha) \qquad y \qquad x_2 = \frac{1+i}{1+\alpha} < 1$$

siendo la primera extraña por dar para i el valor cero.

Como entre x_1 y x_2 se encuentra una raíz de la derivada de [3], que resulta ser $n/n + 1$, tendremos que

$$\frac{n}{n+1} < x < 1$$

y como en los casos prácticos $n \gg 20$, se comprueba la limitación:

$$0{,}95 < x < 1$$

lo que nos permite, a partir de dicho límite inferior, construir una tabla de diferencias de potencias consecutivas que facilitan la resolución de la ecuación.

Una vez obtenido el valor de x, el de i se calcula de la relación

$$x = \frac{1+i}{1+\alpha} \qquad ; \qquad i = (1 + \alpha)x - 1$$

(El Instituto de Cálculo del Consejo de Investigaciones Científicas realizó el cálculo de una tabla variando x desde 0,960 a 0,999, de milésima en milésima y n de 1 a 50).

2. Método logarítmico.

Las siguientes consideraciones nos llevaron a la deducción de este procedimiento.

Si en la ecuación fundamental

$$a = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad [1]$$

desarrollamos el binomio y se simplifican y dividen ambos miembros por *n*, queda

$$\frac{a}{n} = 1 - \frac{n+1}{2}\,i + \frac{(n+1)\,(n+2)}{6}\,i^2 - $$
$$- \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{24}\,i^3 + $$
$$+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{120}\,i^4 + \dots \quad [2]$$

en donde el segundo miembro es una serie alternada que converge tanto más rápidamente cuanto menores sean los valores de *n* y de *i* (*).

La [3] puede ser puesta en esta otra forma:

$$\frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{a}{n}\right) =$$
$$= i\left[1 - \frac{n+2}{3}\,i + \frac{(n+2)\,(n+3)}{12}\,i^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}{60}\,i^3 + \dots\right] = i\,\varphi(n, i) \quad [3]$$

Si en lugar de $\varphi(n, i)$ encontramos una función aproximada sólo dependiente de *a* y de *n*, que podamos escribir

$$\varphi(n, i) = \Phi(n, a) \quad [4]$$

se tiene, sustituyendo este valor en [3],

$$\frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{a}{n}\right) = i\Phi(n, a)$$

en donde podemos despejar fácilmente i, como ecuación de primer grado,

$$i = \frac{n - a}{n(n+1)/2}/\Phi(n, a)$$

(*) La relación $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \frac{k+n}{k+1}\,i$, siendo por tanto $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = i < 1.$

A este objeto, si elevamos ambos miembros de [2] a la potencia $2(n + 2)/3(n + 1)$, podemos escribir, desarrollando el segundo miembro:

$$\left[\frac{a}{n}\right]^{\frac{2(n+2)}{3(n+1)}} = 1 - \frac{n+2}{3}\, i + \frac{(n+2)\,(n+3)}{12}\, i^2 - \frac{(n+2)\,(n^2+38\,n+65)}{324}\, i^3 + \dots$$

que coincide en sus tres primeros términos con el valor de $\varphi(n, i)$ en [3].

Sustituyendo el anterior valor en [3], se tiene como primera aproximación, según [3],

$$i_1 = \frac{n-a}{n(n+1)/2} \Big/ \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{2(n+2)}{3(n+1)}} = \frac{n-a}{n(n+1)/2} \left(\frac{n}{a}\right)^{\frac{2(n+2)}{3(n+1)}}$$

expresión que puede ser fácilmente calculable por logaritmos y de ahí el nombre dado al método.

3. Un método elemental para el cálculo del tanto de interés en las rentas ciertas.

Partiendo de la igualdad básica de los métodos basados en el desarrollo en serie:

$$\frac{a}{n} = 1 - \frac{n+1}{2}\, i + \frac{(n+1)\,(n+2)}{6}\, i^2 - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{24}\, i^3 + \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}{120}\, i^4 \quad [1]$$

se deduce:

$$\alpha_1 = \frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{a}{n}\right) =$$

$$= i - \frac{n+2}{3} i^2 + \frac{(n+2)\,(n+3)}{12} i^3 -$$

$$- \frac{(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}{60} i^4 \qquad [2]$$

dándonos α_1 un valor de i, por defecto.

Si la [1] se eleva a la potencia —1, tendremos:

$$\frac{n}{a} = 1 + \frac{n+1}{2} i + \frac{n^2-1}{12} i^2 - \frac{n^2-1}{24} i^3 -$$

$$- \frac{(n^2-1)\,(n^2-19)}{720} i^4 + \ldots \qquad [3]$$

que puede ponerse en la forma:

$$\alpha_2 = \frac{2}{n+1}\left(\frac{n}{a} - 1\right) = i + \frac{n-1}{6} i^2 - \frac{n-1}{12} i^3 -$$

$$- \frac{(n-1)\,(n^2-19)}{360} i^4 + \ldots \qquad [4]$$

suministrándonos ahora α_2 un valor por exceso.

Si multiplicamos la [2] por $(n + 3)i/4$ y el resultado se lo sumamos; la [4] se multiplica por $i/2$ e igualmente se le suma, tendremos respectivamente:

$$\alpha_1 + \frac{n+3}{4} \alpha_1 i =$$

$$= i - \frac{n-1}{12} i^2 + \frac{(n-1)(n+2)(n+3)}{240} i^4 + \ldots$$

$$[5]$$

$$\alpha_2 + \frac{\alpha_2}{2} i =$$

$$= i + \frac{n+2}{6} i^2 - \frac{(n-1)(n-2)(n+2)}{360} i^4 + \ldots$$

Las dos expresiones que componen [5] carecen de la potencia en i^3.

Multiplicando ahora la segunda expresión por (n — 1)/ /2(n + 2), se igualan los coeficientes de las potencias segundas de *i*, y al sumar este resultado con la primera igualdad de [5] se anulan, quedándonos

$$\alpha_1 + \frac{n-1}{2(n+2)}\alpha_2 =$$

$$= \left(1 + \frac{n-1}{2(n+3)} - \frac{n+3}{4}\alpha_1 - \frac{n-1}{4(n+2)}\alpha_2\right) i + \\ + \frac{(n^2-1)(n+8)}{360} i^4 \qquad [6]$$

Luego, con error menor que potencias cuartas de *i*, podemos escribir, despejándola en la ecuación [6]:

$$i = 2\frac{2(n+2)\alpha_1 + (n-1)\alpha_2}{6(n+1) - (n+2)(n+3)\alpha_1 - (n-1)\alpha_2} \qquad [7]$$

Por último, si tenemos en cuenta que $\alpha_1/\alpha_2 = \dfrac{a}{n}$ se tiene sustituyendo este valor en [7] después de dividir por α_2 numerador y denominador:

$$i = 2\frac{2(n+2)a + n(n-1)}{6n(n+1) - (n+2)(n+3)a - n(n-1)} \qquad [8]$$

que es la fórmula deseada.

(Con el presente método se pueden conseguir, para las duraciones normales y tantos de interés actuales, de tres a cuatro cifras decimales exactas.)

La fórmula [8], como cualquiera de las obtenidas por los métodos anteriores, es aplicable al cálculo del tanto en las rentas prepagables y para los valores finales, puesto que en el primer caso

$$a_{\overline{n|}} = 1 + a_{\overline{n-1|}}$$

luego basta considerar el método para $a_{\overline{n-1|}} = a_{\overline{n|}} - 1$.

En cuanto al segundo, algebraicamente vemos se verifica

$$-a_{\overline{-n|}} = -\frac{1-(1+i)^n}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = s_{\overline{n|}}.$$

por tanto se sustituirán en las fórmulas n por $-n$, y $a_{\overline{n|}}$ por $-s_{\overline{n|}}$.

4. La fórmula de Baily como caso particular de una más general.

Elevando ambos miembros de la igualdad [1]

$$\frac{a}{n} = 1 - \frac{n+1}{2} i + \frac{(n+1)(n+2)}{6} i^2 - $$
$$- \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{24} i^3 +$$
$$+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{120} i^4$$

a la potencia $\theta/n + 1$, siendo θ una indeterminada, se llega a la expresión:

$$k_2 = \left[1 - \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{\theta}{n+1}} \right] \frac{2}{\theta} = i - \frac{3\theta + n + 5}{12} i^2 -$$
$$- \frac{\theta^2 + (n+5)\theta + 2(n+3)}{24} i^3 -$$
$$- \frac{15\theta^3 + 30(n+5)\theta^2 + 5(n^2+34n+97)\theta - 2(n^3 - n^2 - 109n - 251)}{24^2 \times 5} \qquad [9]$$

y dando a los valores que anulen el término en i^3, lo que obliga a resolver la ecuación de segundo grado

$$\theta^2 + (n+5)\theta + 2(n+3) = 0 \qquad [10]$$

encontramos como raíces $\theta_1 = -2$ (Baily) y otra $\theta_2 = -(n+3)$, resultando en este último caso

$$k_2 = i + \frac{n+2}{6} i^2 -$$
$$- \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{720} i^4 + \ldots \qquad [11]$$

que puede aplicársele idéntico procedimiento de resolución.

Como los valores que se obtienen de las fórmulas de Baily y la [11], son ambas por exceso, no nos sirven para acotar el tanto verdadero, pareciéndonos más interesante y útil a nuestro objeto considerarlas conjuntamente que por separado.

En efecto, la comparación de ambos desarrollos

$$\left(\frac{n}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}} - 1 = k_1 =$$

$$= i - \frac{n-1}{12} i^2 + \frac{(n-1)(n+2)(n+3)}{1440} i^4 + \dots$$

$$\left[\left(\frac{n}{a}\right)^{\frac{n+3}{n+1}} - 1\right]\frac{2}{n+3} = k_2 =$$

$$= i + \frac{n+2}{6} i^2 - \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{720} i^4 + \dots$$

nos sugiere la idea de aprovecharlos para eludir al planteo de la ecuación de segundo grado.

Basta para ello multiplicar la primera igualdad de [12] por $2(n + 2)/n - 1$, para obtener por suma y con error menor que potencias cuartas de *i*, un valor por defecto

$$i_1 = \frac{2(n + 2)k_1 + (n - 1)k_2}{3(n + 1)}$$

que promediado con el de Baily, permite una mejor aproximación.