

Aspectos actuariales de la capitalización con sorteo

Por

Dr. JUAN RAMON OREJA RODRIGUEZ

Catedrático interino de Economía de la Empresa.
Universidad de La Laguna

I. LA OPERACION DE CAPITALIZACION CON SORTEO

Los aspectos actuariales de la operación de capitalización con sorteo nos permitirán determinar el precio del producto a ofertar al ahorrador: el título.

En la operación de capitalización con sorteo podemos resaltar las siguientes bases técnicas sobre las que se sustenta: constitución de capitales de cuantía determinada y a plazo convenido mediante la capitalización a interés compuesto de las cuotas únicas o periódicas satisfechas por los suscriptores (base financiera). Los capitales contratados podrán amortizarse mediante sorteo (base estadística) (1).

a) Base financiera: Al tener estas operaciones una implicación temporal, las prestaciones y contraprestaciones de los suscriptores y entidades están sometidas al principio de rentabilidad.

El componente temporal será determinado por la duración de la operación.

La valoración de los capitales intervinientes en la operación, a lo largo de su duración, serán estudiados en base del sistema financiero de capitalización compuesta (2).

(1) MINISTERIO DE HACIENDA, ESPAÑA: *Ley de 22 de diciembre de 1955, de las Entidades particulares de Ahorro y Capitalización*, art. 1.º

(2) Las distintas legislaciones nacionales determinan los tipos técnicos de interés, con o sin relación a la duración de la operación aplicable.

En España, la Orden del Ministerio de Hacienda de 3 de noviembre de 1978 recoge el siguiente cuadro:

DURACIÓN DE LA OPERACIÓN	PORCENTAJE ANUAL DE INTERÉS	
	Mínimo	Máximo
No superior a cinco años	5,5	7,5
Mayor de cinco años y no superior a diez años	5	7
Superior a diez años	4,5	4,5

b) Base estadística: El conocimiento de las leyes estadísticas de anticipación de los vencimientos de los capitales por la vía del sorteo vendrá determinado en función de los símbolos a amortizar en cada sorteo.

Su estudio será paso necesario para el planteamiento de las ecuaciones de equivalencia actuarial, que dará entrada a la determinación, en condiciones de equilibrio, del coste de la operación.

El planteamiento de las operaciones de capitalización con sorteo será en base del sistema que denominaremos clásico, sustentado en una concepción discreta de las variables consideradas, así como en los momentos en que prestación y contraprestación están determinados (3). Contractualmente las prestaciones se realizan al principio del período en cuestión (mes, trimestre, semestre, año...); el vencimiento será al final de la duración del contrato; los sorteos se realizan en momentos determinados *a priori* (mediado o finales de mes).

No obstante, se ha realizado por parte del doctor Nieto de Alba un estudio de esta operación desde un punto de vista estocástico-financiero (4).

2. BASE FINANCIERA

2.1. CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

Como ya es sabido, pero con objeto de enlazar con la concepción financiera de las cuotas únicas, podemos indicar que un capital (C_0), colocado en el origen de la operación a interés compuesto, se capitaliza al final de cada año a un tanto de interés fijo, alcanzando al vencimiento de la operación, al cabo de n años, una cuantía (C_n):

$$C_n = C_0(1 + i_a)^n \quad [2.1.1]$$

siendo:

i_a = Tanto de interés anual de la operación de capitalización.

Origen = Momento de imposición de la prestación por el suscriptor.

Vencimiento = Momento de la exigibilidad de la contraprestación por el portador.

(3) Sobre este tipo de planteamiento puede consultarse: DESVAUX, M.: *Les opérations des Sociétés de Capitalisation*, citado por A. WEBER: *Traité élémentaire des Sociétés de Capitalisation*, Paris, 1925, pág. 294; WEBER, A.: *Op. cit.*, págs. 294-320; ACERBONI, Argentino A.: "Valuación de las operaciones de capitalización con sorteo: primas y reservas", *Anales del Instituto de Actuarios Argentinos (AIDA)*, primer semestre 1952, págs. 5 y ss., Argentina.

(4) NIETO DE ALBA, U.: "Teoría matemática de las operaciones de capitalización con sorteo", *Riesgo y Seguro (RyS)* núm. 18, págs. 187 y ss., España, 1967.

La diferencia temporal entre el origen y el vencimiento es n , duración de la operación, que la expresamos en años. Si consideramos una partición del año en r períodos iguales (meses, trimestres...), tendríamos al vencimiento de la operación que la duración en períodos iguales habría sido $r \cdot n$.

El tanto de interés compuesto que corresponde al período de capitalización así definido es i , que denominaremos tanto de interés efectivo. La relación entre el tanto de interés anual (i_a) y el efectivo (i) es:

$$(1 + i_a) = (1 + i)^r$$

o bien:

$$i = (1 + i_a)^{1/r} - 1$$

El tanto nominal (J_r) se define en función del tanto efectivo (i), de la siguiente forma:

$$J_r = r \cdot i$$

De lo expuesto, la relación entre el tanto nominal (J_r) y el anual (i_a) será:

$$(1 + i_a) = \left(1 + \frac{J_r}{r} \right)^r$$

de aquí:

$$J_r = r[(1 + i_a)^{1/r} - 1]$$

Podemos expresar la contraprestación a efectuar por al empresa al portador, al vencimiento (C_n), en función del tanto de interés nominal (J_r):

$$C_n = C_o \left(1 + \frac{J_r}{r} \right)^{r \cdot n}$$

La cuota única a imponer en el origen de la operación de capitalización sin sorteo, en función del capital a formar (C_n), será:

$$C_o = C_n(1 + i_a)^{-n} = C_n \cdot V^n \quad [2.1.2]$$

siendo:

V = Factor de descuento al tanto de interés i_a , en régimen de capitalización compuesta: $V = (1 + i_a)^{-1}$.

2.2. FORMACIÓN DE CAPITALES

Esta operación financiera está compuesta de una prestación múltiple, a realizar por el suscriptor mediante la imposición periódica de cuotas, que tiene por finalidad el formar o constituir un capital, que es la contraprestación única que efectuará la entidad al portador de un título de capitalización sin sorteo.

Seguindo a Gil Peláez (5), plantearemos las ecuaciones de equivalencia financiera, fijando el tanto de interés anual (i_a) (6) y la cuantía de los capitales a imponer por el suscriptor, formando la prestación periódica C (7).

a) La duración de la operación de constitución o formación de capitales (n) coincide con el período de imposición de cuotas (m), es decir, $m = n$.

La equivalencia financiera al vencimiento de la operación será:

$$C_n = C \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i_a)^t = C S\bar{n}|i_a \quad [2.2.1]$$

en donde:

$S\bar{n}|i_a$ = Valor final de una renta unitaria prepagable y temporal a n años con un tanto de interés compuesto anual i_a .

La cuota a imponer al principio del período sería:

$$C = C_n \frac{1}{S\bar{n}|i_a} \quad [2.2.2]$$

Supuesta la partición del año en r períodos anuales, al principio de los mismos se imponen los capitales de la prestación, por lo que se tendría que la equivalencia [2.2.2] al vencimiento es:

$$C_n = C_r \sum_{t=0}^{r(n-1)} \left(1 + \frac{J_r}{r} \right)^t = C S\bar{n}^{(r)}|i_a \quad [2.2.3]$$

en donde:

$S\bar{n}^{(r)}|i_a$ = Valor final de una renta unitaria prepagable, temporal a n años, fraccionada en r períodos, con un tanto de interés compuesto anual (i_a).

La cuota a imponer al principio de cada período r -ésimo del año es:

$$C_r = C_n \frac{1}{S\bar{n}^{(r)}|i_a} \quad [2.2.4]$$

b) La duración de la operación de constitución del capital es superior al período de imposición de cuotas ($n > m$).

En el vencimiento de la operación, la equivalencia financiera tendrá la siguiente expresión:

$$C_n = \left[C \sum_{t=0}^{m-1} (1 + i_a)^t \right] (1 + i_a)^{n-m} = C S\bar{m}|i_a (1 + i_a)^{n-m} \quad [2.2.5]$$

(5) GIL PELÁEZ, L.: *Matemáticas de las operaciones financieras*, fasc. II, págs. 89 y 55, Madrid, 1969.

(6) Los tipos de interés anuales de capitalización compuesta son determinados legalmente, denominándose técnicos.

(7) Las cuotas pueden ser constantes o variables. En este estudio hemos fijado la cuota como constante. En caso de imponerse cuotas variables se variaría el componente prestación.

en donde:

$$\frac{h}{S\overline{m}|i_a} = (1+i_a)^h S\overline{m}|i_a$$

$$n - m = h$$

$h/S\overline{m}|i_a$ = Valor final de una renta unitaria pagable al principio del período anual de imposición, con una duración de m años, anticipada h períodos ($h = n - m$) y con un tanto de interés compuesto anual (i_a).

La cuota a imponer será:

$$C = C_n \frac{1}{S\overline{m}|i_a (1+i_a)^h} = C_n \frac{1}{h/S\overline{m}|i_a} \quad [2.2.6]$$

Supuesta la partición del período anual en r períodos iguales, al principio de los cuales se imponen los capitales de la prestación, se tendría que la equivalencia financiera al vencimiento es:

$$C = \left[C_r \sum_{t=0}^{r(m-1)} \left(1 + \frac{J_r}{r} \right)^t \right] \left(1 + \frac{J_r}{r} \right)^{r(m-n)} =$$

$$= C_r S\overline{m}|i_a \left(1 + \frac{J_r}{r} \right)^{r(m-n)} = C_r h/S\overline{m}|i_a \quad [2.2.7]$$

de donde decimos el valor de C_r , cuota a imponer al principio de cada período r -ésimo de año:

$$C_r = C_n \frac{1}{h/S\overline{m}|i_a} \quad [2.2.8]$$

3. BASE ESTADISTICA

3.1. EL SORTEO

El riesgo para el suscriptor de un título de capitalización con sorteo es el sorteo, factor aleatorio que determina el momento en que se anticipa el vencimiento de la contraprestación, dejando, en consecuencia, de efectuarse la prestación pendiente.

Es el azar, en forma de sorteo (8), la característica determinante de esta operación financiera, distinta de las descritas en el capítulo y de las típicamente aleatorias o de las de seguros (9).

(8) Los sistemas de premios o de anticipación, que aquí denominamos "sorteos", suelen estar relacionados en España con los sorteos de la Lotería Nacional o con otros sistemas objetivos autorizados por el órgano de control, de acuerdo con la legislación vigente.

(9) MARTÍN DE VIDALES, C.: "El riesgo de las operaciones de capitalización" (tesis actuarial), Madrid, 1953, pág. 2.

Cuenta la operación con ambas características, porque de forma cierta la contraprestación será exigible al vencimiento, o antes si éste es anticipado por sorteo.

Definimos la probabilidad de que un capital en formación, asociado a un símbolo (10), se anticipe por sorteo a q :

$$q = \frac{S}{N}$$

siendo:

S = Número de símbolos, entre los cuales giran los capitales en formación, que son designados por el azar en cada sorteo.

N = Número de símbolos distintos que, a efectos de sorteo, se consideran como casos posibles.

La probabilidad de no anticipación por sorteo (p) se define como:

$$p = 1 - q = 1 - \frac{S}{N} = \frac{N - S}{N}$$

Podemos distinguir dos formas de hacer los sorteos (11), lo que nos determina dos tipos de leyes, una de las cuales es la hasta ahora contemplada:

a) Sobre símbolos en curso: Los símbolos anticipados en cada sorteo son siempre los mismos (S), implicando un número decreciente de símbolos sujetos a sorteo. La ley resultante se denomina lineal.

b) Sobre los símbolos emitidos: El sorteo se efectúa sobre los símbolos emitidos, aunque algunos de ellos no estén en vigor. La ley resultante se denomina exponencial.

3.2. LEY LINEAL

El número de símbolos anticipados en cada sorteo es siempre el mismo: S .

N , es el número de símbolos en curso, que a efectos de sorteo se consideran casos posibles (13).

Podemos plantear un cuadro de anticipación de símbolos por sorteo (véase cuadro 1). El total de capital que gira sobre un símbolo determinado tiene

(10) Los símbolos son combinaciones de números o letras.

(11) Los títulos pueden llevar uno o más símbolos hasta agotar una serie de ellos ($29^3 = 24.389$), en cuyo caso se inicia otra serie. Cada símbolo lleva asociado un capital determinado. En el total de series de símbolos emitidas es conveniente que el capital sea inferior a un determinado límite o pleno.

(12) Ley de Moivre. *Vid.* WEBER, A.: *Op. cit.*, pág. 298.

(13) Los símbolos considerados son los de una serie, es decir, si partimos de lo indicado en (11): $29^3 = 24.389$, o el número de grupos distintos de tres letras (cuatro...) que se puedan formar con el alfabeto utilizado. Esto sin contar las combinaciones de números y letras.

que ser inferior a un máximo o techo denominado pleno. Cuando sale designado un símbolo, puede que existan j series del mismo, pero su capital total es igual o inferior al pleno, por lo cual son anticipadas todas las series.

Después de t sorteos quedarán en vigor N_t símbolos (14), siendo su expresión:

$$N_t = N_o - t \cdot S$$

Por lo tanto, dado el decrecimiento lineal de los símbolos en vigor, la probabilidad de que un símbolo sea anticipado por sorteo en la $t-1$ extracción es:

$$q_{t-1} = \frac{S}{N_o - t \cdot S}$$

q_{t-1} es una probabilidad creciente.

La probabilidad de que un símbolo permanezca en vigor tras el $t-1$ sorteo es:

$$P_t = 1 - q_t$$

$$P_t = \frac{N_o - (t-1) \cdot S - S}{N_o - (t-1) \cdot S} = \frac{N_o - t \cdot S}{N_o - (t-1) \cdot S} = \frac{N_t}{N_{t-1}}$$

CUADRO 1

Símbolos vivos antes del sorteo \bar{N}_{i-1}	Sorteo i	Símbolos anticipados en el sorteo \bar{M}	Símbolos en vigor tras el sorteo \bar{N}_i
—	—	—	N_o
N_o	1	$S = q_1 \cdot N_o$	$N_1 = N_o - S$
N_1	2	$S = q_2 \cdot N_1$	$N_2 = N_1 - S = N_o - 2S$
N_2	3	$S = q_3 \cdot N_2$	$N_3 = N_2 - S = N_o - 3S$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
N_{t-1}	t	$S = q_t \cdot N_{t-1}$	$N_t = N_{t-1} - S = N_o - t \cdot S$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
N_{n-1}	n	$S = q_n \cdot N_{n-1}$	$N_n = N_{n-1} - S = N_o - n \cdot S$

(14) Lo normal, en la práctica, es que vuelvan a ser emitidos los símbolos premiados en los sorteos.

Este sistema no se ha aplicado en la práctica dada la operatividad que implica, ya que las entidades emiten títulos con símbolos ya asignados a otros títulos, estén o no anticipados, lo que presenta el inconveniente de conocer antes de cada sorteo la ley de variación. La introducción de esta variabilidad en la determinación del coste sería, en definitiva, una complicación innecesaria, con muy escasa o nula utilidad (15).

3.3. LEY EXPONENCIAL

Los números de símbolos que son designados por el azar en cada sorteo, así como los que se consideran casos posibles, permanecen invariables para una determinada operación. En consecuencia, la probabilidad de anticipación por sorteo, para esa determinada operación, permanece constante para todos los sorteos.

El cuadro de anticipación de símbolos por sorteo, en el caso de la ley exponencial, está recogido en el cuadro 2.

Tras t sorteos quedarán en vigor N_t símbolos (16), siendo:

$$N_t = N \cdot (1 - q)^t$$

CUADRO 2

Símbolos vivos antes del sorteo \bar{N}_{t-1}	Sorteo t	Símbolos anticipados en un sorteo \bar{S}_t	Símbolos en vigor tras el sorteo \bar{N}_t
..	$N_0 = N$
N	1	$S_1 = q \cdot N$	$N_1 = N - S_1 = N - q \cdot N = N(1 - q)$
N_1	2	$S_2 = q \cdot N_1$	$N_2 = N_1 - S_2 = N_0(1 - q) -$ $- N_0 - (1 - q)(1 - q) = N_0(1 - q)^2$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
N_{t-1}	t	$S_t = q \cdot N_{t-1}$	$N_t = N_0 \cdot (1 - q)^t$
.	.	.	.

(15) MARTÍN DE VIDALES, C.: *Op. cit.*, pág. 6.

(16) Lo normal es que se vuelvan a emitir los símbolos anticipados por sorteo, por lo que se puede mantener la probabilidad (q) constante; teóricamente hemos supuesto dicha constancia, pero por necesidad de exposición en el cuadro 2, variamos los subíndices de los conceptos: símbolos anticipados en el sorteo (que en la realidad son siempre constantes, siempre que se encuentren en vigor) y símbolos en vigor tras el sorteo. La variación de símbolos en vigor da lugar a desviaciones entre las anticipaciones reales y las previstas, por lo que se hace necesario calcular esta desviación y dotar en base a la misma una provisión técnica de desviaciones por sorteo.

N_i = Función exponencial de los títulos emitidos (una serie).

La probabilidad teórica de que un símbolo sea designado por sorteo es constante: q .

$$q = \frac{S}{N}$$

De aquí, dado que $p + q = 1$ (un símbolo se anticipa o sigue en vigor), tendremos:

$$p = 1 - q$$

$$p = 1 - \frac{S}{N} = \frac{N - S}{N}$$

p = Probabilidad de que un símbolo permanezca en vigor tras el t -ésimo sorteo, estándolo antes.

Y definimos:

p^t = Probabilidad de que el capital asociado a un símbolo esté en vigor después del t -ésimo sorteo.

$t^p = p^t$ (al ser la probabilidades constantes o independientes).

$t - 1^p \cdot q$ = Probabilidad de que un símbolo resulte anticipado en el t -ésimo sorteo.

$t - 1^p \cdot q = p^{t-1} \cdot q$.

Es esta ley la aplicada en la práctica, pues los suscriptores prefieren conocer *a priori* la probabilidad de anticipación por sorteo de los símbolos de los títulos. El hecho de que sea constante parece permitir la objetivización del sistema, así como la aplicación de métodos de sorteos ajenos a las entidades.

Los títulos pueden tener de uno a k símbolos, por lo que la probabilidad de que se anticipe uno de los símbolos es $k \cdot q$. Los costes de tramitación y control de sorteos, así como el hecho de que algunas legislaciones hayan exigido relacionar los símbolos de los títulos con los de la Lotería Nacional, ha obligado a la utilización de una sola combinación de números como único símbolo por título, que suele coincidir con el número de orden de emisión, dentro de una determinada serie y plan de capitalización. Supuesta esta generalización, utilizaremos el término título en lugar del de símbolo.

(17) El hecho de que las operaciones tengan distintas características técnicas, como son el tipo de interés, cuota única o periódica, constantes o variables, igualdad o no en los períodos de imposición de cuotas y duración de la operación..., hacen aparecer los planes de capitalización, que se les distingue tradicionalmente por alguna de estas características: así, un CU 12 será una cuota única a doce años, y un 12/20 será un título con cuota periódica a imponer durante doce años y con una duración de la operación de constitución de capitales de veinte años. Y así sucesivamente.

4. EQUIVALENCIAS ACTUARIALES

4.1. CUOTAS ÚNICAS

La prestación del suscriptor será la imposición de un capital ya existente, en forma de cuota en el origen de la operación, que, capitalizada a un tanto (i_a) de interés compuesto anual, formará la contraprestación exigible al vencimiento, o antes si es anticipado éste por la vía del sorteo. Los sorteos se realizarán con frecuencia (r) (18).

La equivalencia actuarial en el origen de la operación será:

$$C_o = C_n [p^n (1 + i_a)^{-n} + \sum_{t=1}^{r \cdot n} V^t \cdot p^{t-1} \cdot q] \quad [4.1.1]$$

es decir, la cuota única (C_o) será equivalente en el origen al valor actual de la contraprestación exigible en el vencimiento, actualizada hasta el origen:

$$C_n \cdot p_n \cdot (1 + i_a)^{-n}$$

y el valor actual, en el origen, de los sorteos a celebrar al final de cada período hasta el vencimiento de la operación o su anticipación por sorteo:

$$C_n \cdot \sum_{t=1}^{r \cdot n} V^t \cdot p^{t-1} \cdot q$$

La expresión obtenida de la cuota única puede ser simplificada mediante la siguiente definición:

${}^{(n)}aq : \bar{n} | i_a =$ Valor actual de la renta unitaria, pagadera al final de cada período r -ésimo de año, en tanto un título no resulte amortizado por sorteo y, a lo más, durante n años.

$${}^{(n)}aq : \bar{n} | i_a = \sum_{t=1}^{r \cdot n} V^t \cdot p^{t-1}$$

Si sustituimos en [4.1.1] la expresión definida, tendremos:

$$C_o = C_n \cdot [p^n (1 + i_a)^{-n} + q \cdot \sum_{t=1}^{r \cdot n} V^t \cdot p^{t-1}] = C_n [p^n (1 + i_a)^{-n} + q \cdot {}^{(n)}aq : \bar{n} | i_a] \quad [4.1.2]$$

Efectuando un sorteo en el momento t , en el caso de seguir en vigor el título, definimos el fondo de capitalización en t (C_t) como el valor de la prestación y contraprestación en ese momento o como el saldo de la operación. Dado que en las cuantías únicas el suscriptor está eximido de posterior-

(18) Normalmente mensuales (a mediados o a fin de mes); puede ser que se celebren sorteos extraordinarios con otra frecuencia (r') durante el año, por lo que $r' \neq r$.

res prestaciones una vez impuesta su cuota, el saldo de la operación en el momento t será:

$$C_t = C_o(1 + i_a)^t \quad [4.1.3]$$

4.2. CUOTA PERIÓDICA

La prestación múltiple del suscriptor o cuota periódica a imponer se efectuará al principio de cada r -ésimo de período anual (19), en caso de imposición fraccionada, o al principio de cada período anual, en caso de no existir fraccionamiento. El período de imposición de cuotas será como máximo m años. Las imposiciones serán capitalizadas a un tanto (i_a) de interés compuesto anual hasta el vencimiento de la operación o hasta su anticipación por sorteo de la contraprestación. La cuantía de las cuotas a imponer, vamos a establecer, son constantes e igual a C_{r_1} .

Se plantean dos alternativas:

a) La duración de la operación y del período de imposición de cuotas coinciden: $m = n$.

La equivalencia actuarial en el origen de la prestación y de la contraprestación partirá de las siguientes definiciones:

Prestación: V_o .

Contraprestación: V'_o .

Siendo:

V_o = Valor actual de la renta de cuantía C_{r_1} , pagadera al principio de cada período r_1 -ésimo de año, en tanto un título no resulte anticipado por sorteo y, a lo más, durante n años.

O bien:

$$V_o = C_{r_1} \sum_{t=1}^{r_1(n-1)} V^t \cdot p^t = C_{r_1} \ddot{a}q : \overline{n} | i_a$$

V'_o = Valor actual de la contraprestación formada por el capital exigible al vencimiento, si antes no se anticipa por sorteo: $C_n \cdot p^n \cdot V^n$; y el valor actual de la probabilidad de anticipación por sorteo que tiene C_n durante toda la operación: q .

O bien:

$$V'_o = C_n [p^n (1 + i_a)^{-n} + \sum_{t=1}^{r_1 n} V^t \cdot p^{t-1} \cdot q] = C_n (p^n \cdot V^n + q \cdot \ddot{a}q : \overline{n} | i_a)$$

(19) Vid. "Fondo de capitalización", 6.

(20) Que puede coincidir o no con los períodos mensuales o extraordinarios de sorteo.

La equivalencia actuarial se dará donde $V_o = V'_o$, es decir:

$$C_{r_1} \cdot \ddot{a}q : \bar{n} | i_a = C_n (p^n \cdot V^n + q \cdot aq : \bar{n} | i_a) \quad [4.2.1]$$

de donde se puede determinar la cuantía de la cuota a imponer, C_{r_1} , despejando en [4.2.1]:

$$C_{r_1} = \frac{C_n (p^n \cdot V^n + q \cdot aq : \bar{n} | i_a)}{\ddot{a}q : \bar{n} | i_a} \quad [4.2.2]$$

Realizado el sorteo en el momento t , el fondo de capitalización nos recogerá la equivalencia actuarial de prestación y contraprestación; tras el sorteo, en caso de que el título continúe en vigor, el fondo de capitalización tendrá la siguiente expresión:

$$C_t = C_n [(pV)^{n-t} + q \cdot aq : \bar{n-t} | i_a] - C_{r_1} \cdot \ddot{a}q : \bar{n-t} | i_a \quad [4.2.3]$$

siendo la prestación pendiente:

$$C_n [(p \cdot V)^{n-t} + q \cdot aq : \bar{n-t} | i_a]$$

y la contraprestación pendiente:

$$C_{r_1} \cdot \ddot{a}q : \bar{n-t} | i_a$$

b) La duración de la operación es superior al período de imposición de cuotas, $n > m$.

La equivalencia actuarial [4.2.1] resultará modificada al ser reducida la duración del período de imposición de cuotas:

$$C_{r_1} \cdot \ddot{a}q : \bar{m} | i_a = C_n [(p \cdot V)^n + q \cdot aq : \bar{n} | i_a] \quad [4.2.4]$$

La cuota periódica a imponer podrá ser obtenida a partir de [4.2.4]:

$$C_{r_1} = \frac{C_n [(pV)^n + q \cdot aq : \bar{n} | i_a]}{\ddot{a}q : \bar{m} | i_a} \quad [4.2.5]$$

Realizado el sorteo en el momento t , el fondo de capitalización nos indicará el saldo de la operación; en la equivalencia actuarial en el momento t habrá que tener en cuenta si se está en el período de imposición de cuotas o no, es decir:

b.1) $t < m$ (la prestación está siendo realizada por el portador). El fondo de capitalización tendrá la siguiente expresión:

$$C_t = C_n [(p \cdot V)^{n-t} + q \cdot aq : \bar{n-t} | i_a] - C_{r_1} \cdot \ddot{a}q : \bar{m-t} | i_a \quad [4.2.6]$$

siendo la prestación pendiente de imponer por el tomador:

$$C_{r_1} \cdot \ddot{a}q : \bar{m-t} | i_a$$

y la contraprestación de la entidad:

$$C_n [(p \cdot V)^{n-t} + q \cdot aq : \bar{n-t} | i_a] \quad [4.2.7]$$

b.2) $m < t < n$ (la prestación ya ha sido completada por el tomador, quedando pendiente la contraprestación de la entidad). El fondo de capitalización en este caso será:

$$C_t \{ (p \cdot V)^{n-t} + q \cdot aq : \overline{n-t} | i_t \} \quad [4.2.8]$$

4.3. ESTUDIO DE LA DETERMINACIÓN ÓPTIMA DEL PERÍODO DE IMPOSICIÓN DE CUOTAS

Siendo la operación de capitalización con sorteo una operación de constitución de capitales a un plazo máximo de n años, el fondo de capitalización que se va constituyendo es creciente. En consecuencia, en caso de anticipación del vencimiento por sorteo, la entidad abonará la contraprestación estipulada en el momento t , teniendo formado en ese momento C_t , por la que el capital en riesgo para la entidad será decreciente e igual a $C_n - C_t$, $\forall t \{ 1, \dots, n \}$.

El suscriptor, con referencia al capital que puede obtener por vía del sorteo, ve disminuir su esperanza de beneficios cada vez que impone una cuota y no es designado por el sorteo. Si el título no es favorecido por el sorteo, el suscriptor va perdiendo la parte de cuota que corresponde al coste del sorteo: C^x .

Siguiendo a Martín de Vidales (21), podemos determinar la pérdida del suscriptor una vez transcurridos t períodos:

$$C^x \sum_{k=1}^t (1+i_t)^k$$

Esta pérdida creciente del suscriptor puede ser compensada si el título es anticipado en su vencimiento en los sorteos siguientes, siempre que el capital en riesgo sea superior a la pérdida de los costes de sorteo. Como el capital en riesgo es decreciente y la pérdida es creciente, se verificará en un determinado instante que:

$$C^x \cdot \sum_{k=1}^t (1+i_t)^k = C_n - C_t$$

o bien:

$$C^x \cdot S \overline{t} | i_t = C_n - C_t$$

El valor de t que verifica esta ecuación ofrece la peculiaridad de dividir la duración de la operación en dos períodos tales que, si el título resulta anticipado por sorteo en el primero, el suscriptor obtendrá como beneficio:

$$C_n - C_t \cdot S \overline{h} | i_t \quad \forall h(1, 2, \dots, t)$$

(21) *Op. cit.*, págs. 13 y 55.

pero si resulta anticipado el segundo período o si alcanza en vigor el vencimiento, habrá perdido:

$$C_n - C_t \cdot S^{\overline{h}} i_t \quad \forall h(t, t+1, \dots, n)$$

El momento t , en el que desaparece la posibilidad de beneficio, parece propicio para solicitar el rescate del título. Para evitar la rescisión, a partir del momento t , las empresas deben utilizar los siguientes procedimientos:

1. Acortar el período de imposición de cuotas, mn , haciéndolo de menor duración que el del título, con objeto de que m sea a su vez inferior que t ; en definitiva, se debe cumplir que: $mt < n$. En el caso que el suscriptor decida rescatar habrá impuesto todas las cuotas de la operación.
2. Crear estímulos para que el título permanezca en vigor durante el período de pérdida de las cuotas de sorteo, estableciendo sistemas de participación en beneficios y/u operaciones cuyo tipo de interés sobre la parte de constitución de capitales cubra la pérdida del coste de los sorteos.

5. LAS CUOTAS DE LA OPERACION

5.1. LOS COSTES COMERCIALES

Al igual que se ha calculado actuarialmente los costes técnicos de la operación de constitución de capitales y de la anticipación del vencimiento por la vía del sorteo, hay que determinar los costes de la empresa con objeto de incluirlos en la cuota que se va a solicitar al tomador del título, la cuota comercial.

Al determinar *a priori* el coste de los servicios que presta la empresa se está haciendo una estimación de lo que realmente puede suponer en un futuro la puesta en marcha de un determinado plan. Los costes así determinados, en base a los datos que se posean en la contabilidad, han de permanecer invariables durante toda la vigencia de la operación, sean cuales fueren los costes reales; las posibles desviaciones sólo podrán ser tenidas en cuenta en futuros planes, al estimar los costes *a priori* que hayan de ser introducidos.

Podemos distinguir distintos recargos que pueden girar sobre la cuota neta o sobre el capital:

(22) La libertad de impugnación de costes estándares, acorde con la gestión empresarial, está limitada por la legislación vigente en España, que fija los recargos máximos a repercutir, por estos conceptos, sobre las cuotas netas.

1. De gestión y administración, g_1 , que se destina a cubrir los gastos de esta índole producidos por la gestión interior de la empresa (23). Este recargo puede ser girado en forma de un tanto por mil anual sobre el capital a formar y por toda la duración de la operación; se considera que este gasto se produce mientras dure la operación, sea hasta el vencimiento de la misma o su anticipación por sorteo.

La repercusión de este recargo sobre la cuota neta determina la definición de la cuota de inventario.

2. De producción, g_2 . La oferta y suscripción de la operación implica una serie de gastos que hay que cubrir. Principalmente se consideran, entre ellos, la comisión del gestor de la operación, así como las retribuciones de las personas que intervienen en dichas gestiones directa o indirectamente, como son los inspectores, directores territoriales, comerciales... (24).

El recargo que por este concepto se añade a la cuota neta supondrá un incremento de la misma en un tanto por mil sobre el capital a formar, determinando la cuota *zillmer*. Frecuentemente la comisión al gestor, que puede coincidir con este recargo, se abona en el origen de la operación en forma descontada.

3. De cobro, g_3 . Los gestores que producen las operaciones se pueden encargar o no del cobro de las imposiciones. Es corriente que esta gestión sea realizada por una tercera persona, denominada (25) cobradores, o por la propia empresa.

El recargo de cobro girará en forma de un tanto por cien sobre la cuota comercial, añadiéndola a la cuota neta, siendo abonada, durante todo el período de imposición de cuotas, a los cobradores.

4. Margen de beneficios industriales, g_4 . Se admite por algunas legislaciones que las empresas incluyan un porcentaje o cantidad fija en concepto de beneficio industrial de la operación. Sólo razones de competencia comercial determinan la no inclusión de este concepto en la cuota comercial, esperando que los beneficios afloren indirectamente de la gestión global de la empresa.

(23) Sobre el problema de los costes de gestión y administración, en la práctica, puede consultarse: BORGES DE ANDRADE RAMOS, Mario: "Roteiro da Administração", págs. 31-34, *Anais do II Congresso Sulacap*, Brasil, 1954;

(24) NIKLAUS JUNIOR, Augusto: "Roteiro da Produção", págs. 34-55, *Anais do II Congresso Sulacap*, Brasil, 1954; MORESCHI, Remo: "Produção nos Grandes Centros", págs. 43-55, *Anais do II Congresso Sulacap*, Brasil, 1954; LESSA DE FARIA, A.: "Produção no interior", páginas 55-58, *Anais do II Congresso Sulacap*, Brasil, 1954.

(25) O'LEARY TEIXEIRA, J.: "Conservação da carteira nos Grandes Centros", págs. 10-17, *Anais do II Congresso Sulacap*, Brasil, 1954; MAGALHAES, Hugo: "Conservação da carteira no interior" págs. 17 y ss., *Anais do II Congresso Sulacap*, Brasil, 1954.

5.2. LAS CUOTAS DE LOS TÍTULOS

5.2.1. *Cuota neta o pura*

De las equivalencias actuariales, ya planteadas, se han obtenido las cuotas netas o puras [2.1.2], las cuotas únicas [4.2.2] y en operaciones de cuotas periódicas [4.2.5]; en cualquier caso, la cuota estará formada de dos componentes: cuota de constitución de capitales y cuota de sorteo, cuota de capitalización y cuota de riesgo.

Esta cuota estará centrada dentro de unos límites técnicos legalmente estipulados. Así, el tipo de interés técnico, las posibles duraciones de las operaciones, los distintos sistemas de sorteo..., al ser combinadas por las empresas, determinan planes de capitalización distintos dentro de los límites fijados; a ello hay que unir el control técnico por parte de los organismos de control, para el estudio de las bases técnicas y tarifas de las operaciones a ofertar a los suscriptores.

5.2.2. *Cuota de inventario*

Si a la cuota pura se le añaden los recargos de administración, estimados como necesarios para cubrir los gastos que se deriven por este concepto de la gestión de títulos, se tendrá una cuota de inventario (26).

La cuota de inventario tendrá la siguiente expresión:

$$C_o = C_o + g_1 C_n \ddot{a}q : \bar{n} | i_a \quad [5.2.1]$$

A su vez, la cuota periódica de inventario será:

$$C_{r_1} = C_{r_1} + C_n g_1 \frac{\ddot{a}q : \bar{n} | i_a}{(r_1)} \quad [5.2.2]$$

Si estamos en el caso de igualdad de periodos de imposición de cuotas y duración de la operación, se cumplirá que $m = n$.

5.2.3. *Cuota comercial*

Esta cuota es la que debe imponer el suscriptor. Se determina añadiendo a la cuota de inventario los recargos de producción y margen de beneficio (27).

(26) En España, el Real Decreto 2426/1978, de 15 de septiembre, del Ministerio de Hacienda, determina que el límite máximo para este recargo será del 4 por 1.000 anual sobre el capital del título, que se reducirá al 3 por 1.000 del mismo en caso de cuotas únicas.

(27) En España, el Real Decreto 2426/1978, ya citado, estipula los siguientes recargos máximos:

- Para comisiones y gastos de adquisición: el 4 por 100 de la cuota anual de tarifa (comercial) multiplicado por el número de años de duración de pago de cuota, con el límite máximo del 60 por 100 de la cuota de tarifa; si se trata de títulos a cuota única, se fija en el 4 por 100 de ésta.

- Para comisiones y gastos de cobro: el 5 por 100 sobre cada una de las cuotas periódicas de tarifa.

Podemos establecer tres tipos de cuotas comerciales:

1. Los recargos indicados son un porcentaje global sobre la cuota comercial durante el período de imposición de cuotas.

En cuotas periódicas: $K_2 C'_1 \ddot{a}q : \overline{m} | i_a$.

En cuotas únicas: $K_1 C''_o$.

La cuota única de tarifa (comercial) será:

$$C''_o = C_o + K_1 C'_o$$

de donde:

$$C''_o = \frac{C_o}{1 - K_1} \quad [5.2.5]$$

Las cuotas de tarifa las podemos expresar en función de [5.2.2], por lo que:

$$C'_1 \ddot{a}q : \overline{m} | i_a = C_{r_1} + K_2 C'_1 \ddot{a}q : \overline{m} | i_a$$

de donde se obtendría la expresión de la cuota periódica:

$$C'_1 = \frac{C_{r_1}}{(1 - K_2) \ddot{a}q : \overline{m} | i_a} \quad [5.2.4]$$

2. Los recargos de producción son un porcentaje único de la primera cuota de tarifa, girando el resto sobre las sucesivas.

La equivalencia actuarial de prestación y contraprestación nos permitirá determinar el alcance de la cuota periódica de tarifa:

$$C'_1 \ddot{a}q : \overline{m} | i_a = C_{r_1} \ddot{a}q : \overline{m} | i_a + g_2 C'_1 + (g_3 + g_4) \ddot{a}q : \overline{m} | i_a \cdot C'_1$$

de donde:

$$C'_1 = \frac{C_{r_1} \ddot{a}q : \overline{m} | i_a}{1 - (g_3 + g_4) \ddot{a}q : \overline{m} | i_a - g_2} \quad [5.2.5]$$

3. El recargo de producción es un porcentaje único del capital en formación, girando el resto sobre las cuotas de tarifa a imponer durante el período de cobro.

La ecuación de equilibrio sería:

$$C'_1 \ddot{a}q : \overline{m} | i_a = C_{r_1} \ddot{a}q : \overline{m} | i_a + g_2 C_n + (g_3 + g_4) C'_1 \ddot{a}q : \overline{m} | i_a$$

que nos permite calcular la cuota comercial periódica:

$$C'_1 = \frac{C_{r_1} \ddot{a}q : \overline{m} | i_a + g_2 C_n}{[1 - (g_3 + g_4) \ddot{a}q : \overline{m} | i_a]} \quad [5.2.6]$$

5.2.4. *Cuota Zillmer*

La posibilidad de descontar, en origen, la comisión al gestor productor implica la necesidad de periodificación de dicho gasto. La cuota Zillmer recogerá el incremento que por este concepto se incluirá en la cuota pura.

Podemos plantear dos alternativas:

1. El recargo de producción es un porcentaje único del capital en formación. En este caso la ecuación de equilibrio se puede plantear de la siguiente forma:

$$C_{\bar{i}_1}^{(r_1)} \ddot{a}q : \bar{m} | i_a = C_n [(pv)^n + q \cdot aq : \bar{n} | i_a + g_2]$$

o bien:

$$C_{\bar{i}_1}^{(r_1)} \ddot{a}q : \bar{m} | i_a = C_{r_1} \ddot{a}q : \bar{m} | i_a + g_2 C_n$$

siendo $C_{\bar{i}_1}^z$ cuota Zillmer, podremos despejarla, obteniendo:

$$C_{\bar{i}_1}^z = \frac{C_{r_1} \ddot{a}q : \bar{m} | i_a + g_2 C_n}{\ddot{a}q : \bar{m} | i_a} = C_{r_1} + C_n \frac{g_2}{\ddot{a}q : \bar{m} | i_a}$$

se puede denominar a g^z tanto de periodificación de la comisión descontada, siendo:

$$g^z = \frac{g_2}{\ddot{a}q : \bar{m} | i_a}$$

La cantidad resultante de esta periodificación será recuperada por la empresa mientras el suscriptor imponga las cuotas comerciales, donde se encuentra incluida.

2. El recargo de producción abonado por la empresa como comisión descontada es un porcentaje de la primera cuota de tarifa o comercial. Partiendo de la ecuación de equilibrio, obtendremos la expresión de la cuota Zillmer:

$$C_{\bar{i}_1}^{(r_1)} \ddot{a}q : \bar{m} | i_a = C_n [(pv)^n + q aq : \bar{n} | i_a] + g_2 C_{r_1}'$$

de aquí la cuota Zillmer será (*vid.* [4.2.4]):

$$C_{\bar{i}_1}^z = \frac{C_{r_1} \ddot{a}q : \bar{m} | i_a + g_2 C_{r_1}'}{\ddot{a}q : \bar{m} | i_a}$$

de donde podremos definir el tanto de periodificación de la comisión descontada:

$$y^z = \frac{g_2}{\ddot{a}q : \bar{m} | i_a}$$

A partir de la definición de esta cuota podemos determinar el fondo de capitalización Zillmer, de notable importancia práctica para las empresas (*vid.* [6.2]).

6. LOS FONDOS DE CAPITALIZACION

Los recursos ajenos van a fluir a la empresa durante un plazo indeterminado (un portador puede imponer cuotas hasta el fin del período de imposición o hasta su anticipación por sorteo) hasta que, pasado el período previsto en el plan correspondiente al título en cuestión, sea disponible un capital a favor del tenedor.

Independientemente de la posibilidad de anticipación del capital por sorteo, los tenedores tienen derecho a la recuperación de gran parte del capital formado, que se denomina rescate. Es este valor garantizado, calculado en base al fondo de capitalización (28), quien condiciona la liquidez de la empresa (29).

En base al capital a formar, así como ante la necesidad de garantizar la creación de fondos disponibles para el caso de que sea pedido el rescate, es necesario conocer el saldo de la operación de capitalización con sorteo (fondo de capitalización) al final de cada ejercicio. El saldo, que representará el montante de los recursos ajenos que están financiando a la empresa, se determinará actuarialmente en función de una equivalencia en la que se van a recoger tanto los principios financieros y estadísticos como la distinta influencia que los recargos han de tener en la misma, en base a los condicionantes legales que permite la periodificación o no de determinados gastos derivados de los títulos.

En el fondo de capitalización queda reflejada la dinámica de la operación, contraponiendo en un momento determinado (t) los compromisos adquiridos por el suscriptor (prestación), así como por la empresa de capitalización (contraprestación).

6.1. FONDOS DE CAPITALIZACIÓN A CUOTA DE INVENTARIO

Se parte para su determinación de la hipótesis de que el fondo de capitalización debe recoger en su equivalencia actuarial los recargos de administración que giran sobre las cuotas netas.

(28) En España. El artículo 26 del vigente Reglamento de Entidades Particulares de Capitalización y Ahorro (Decreto de 26 de abril de 1957), modificado por el Real Decreto 2426/1978, de 15 de septiembre: "... Los valores de rescates (serán) equivalentes al Fondo de Capitalización constituido...".

(29) *Ibidem*: en los títulos de cuotas periódicas, "... a partir del momento que haya transcurrido la décima parte del plazo previsto para el pago de cuotas..."; en los títulos a cuota única, "al término del primer año".

Planteamos a los fondos a cuota periódica:

Si el ejercicio al final del cual se efectúa el cálculo (t) está incluido en el período de pago de cuotas (m), de acuerdo con el método prospectivo, para un capital unitario se tendrá a partir de [4.2.6] y de [4.2.7]:

$${}^tVq:\bar{n} = [(pv)^{n-t} + q \cdot aq:\bar{n-t}|i_a + g_1 \ddot{a}q:\bar{n-t}|i_a] - C_1 \ddot{a}q:\bar{m-t}|i_a$$

y siendo la cuota periódica de inventario [5.2.2]:

$$C_1 = C_1 + g_1 \frac{\ddot{a}q:\bar{n}|i_a}{\ddot{a}q:\bar{m}|i_a}$$

El fondo de capitalización constituido al final del ejercicio (t) sería:

$${}^tVq:\bar{n} = [(pv)^{n-t} + q \cdot aq:\bar{n-t}|i_a + g_1 \ddot{a}q:\bar{n-t}|i_a] - \left[C_1 + g_1 \frac{\ddot{a}q:\bar{n}|i_a}{\ddot{a}q:\bar{m}|i_a} \right] \ddot{a}q:\bar{m-t}|i_a$$

cuyo significado es:

Valor en t de la contraprestación, incluidos los recargos administrativos que deben cubrir los correspondientes gastos de administración:

$$(pv)^{n-t} + q \cdot aq:\bar{n-t}|i_a + g_1 \ddot{a}q:\bar{n-t}|i_a$$

Valor en t de la prestación a imponer por el suscriptor, incluidos los recargos de administración a su cargo:

$$\left[C_1 + g_1 \frac{\ddot{a}q:\bar{n}|i_a}{\ddot{a}q:\bar{m}|i_a} \right] \ddot{a}q:\bar{m-t}|i_a$$

El fondo de capitalización así planteado coincide con el valor de rescate, a partir del transcurso de determinado período, según la normativa actual española.

Normalmente se puede demostrar que ${}^tVq:\bar{n} > {}^tVqi\bar{n}$, en caso de planes de menor período de imposición de cuotas que duración de la operación en el intervalo, o $0 < t \leq m$. Siendo igual en el resto de los casos: $m = n \forall t$ y $m < n$, para $m \leq t < n$.

6.2. FONDO DE CAPITALIZACIÓN A CUOTA ZILLMER

Ante la posibilidad legal del abono por descuento de la comisión al gestor de producción, con el objeto de incentivar la producción de estas operaciones, se ha permitido el cálculo del fondo de capitalización y del valor de rescate a cuota Zillmer.

Planteamos el fondo de capitalización a cuota periódica, teniendo en cuenta un valor unitario en el capital a formar:

$${}^tV\ddot{q}:\overline{n}| = (pv)^{n-t} + q \cdot a\ddot{q}:\overline{n}|i_a - C_r^z \cdot \ddot{a}q:\overline{m-t}|i_a$$

Si sustituimos C_r^z por su expresión:

$$C_r^z = C_r + \frac{g^2}{\ddot{a}q:\overline{m}|i_a}$$

tendremos que ${}^tV\ddot{q}:\overline{n}|$ será igual a:

$${}^tV\ddot{q}:\overline{n}| = (pv)^{n-t} + q \cdot a\ddot{q}:\overline{n}|i_a - \left[C_r + \frac{g^2}{\ddot{a}q:\overline{m}|i_a} \right] \cdot \ddot{a}q:\overline{m-t}|i_a$$

y haciendo operaciones:

$${}^tV\ddot{q}:\overline{n}| = [(pv)^{n-t} + q \cdot a\ddot{q}:\overline{n-t}|i_a - C_r \cdot \ddot{a}q:\overline{m-t}|i_a] - \frac{g^2}{\ddot{a}q:\overline{m}|i_a} \cdot \ddot{a}q:\overline{m-t}|i_a$$

de donde quedará:

$${}^tV\ddot{q}:\overline{n}| = {}^tVq:\overline{m}| - g^2 \ddot{a}q:\overline{m-t}|i_a$$

por lo que deducimos que:

$${}^tV\ddot{q}:\overline{n}| < {}^tVq:\overline{m}|$$

El fondo de capitalización calculado a cuota Zillmer es inferior al calculado a cuota pura en una cuantía:

$$g^2 \ddot{a}q:\overline{m-t}|i_a$$

la cual es decreciente hasta su total desaparición cuando sea amortizada la comisión descontada.

Se ha venido admitiendo la posibilidad de coincidencia del valor de rescate con este fondo, teniendo en cuenta el período de carencia del mismo, en base a la comisión pendiente de amortizar; también la posibilidad de constituir las provisiones técnicas en base a estas cuotas, por estar más ajustada a la realidad empresarial.

Es interesante resaltar la posibilidad de utilizar como instrumento antiinflacionista a estas operaciones, en base al planteamiento de los fondos de capitalización a cuota Zillmer. Si la administración juega con el tanto de zillmerización, dentro de unos límites, está aumentando o no la posibilidad de financiación de la expansión de la producción, permitiendo o no una mayor acumulación del ahorro por esta vía.

Si la administración obliga a la utilización del método de inventario, en lugar del de Zillmer, estará introduciendo un coeficiente obligatorio de "se-

guridad" (mayor fondo de capitalización que el que actualmente es necesario para cubrir las responsabilidades técnicas de la empresa), lo que incide negativamente en la producción y en la determinación del excedente económico de las empresas de capitalización. Desde este planteamiento, algunas Administraciones públicas actúan en contra del desarrollo de estas operaciones, bajo teóricos planteamientos técnicos de defensa de los suscriptores (30), pero lo que consiguen es no permitir a las empresas una gestión óptima de sus recursos, lo que implica un impedimento en la consecución de su único compromiso empresarial: formar el capital previsto para sus suscriptores haciéndoles participar en los beneficios de la empresa, obteniendo éstos a partir de sus aportaciones.

(30) En España, *vid.* medidas contenidas en el Real Decreto 2426/1978, de 15 de septiembre, sobre rescates y comisiones descontadas.