Sobre las distintas medias de una distribución estadística. Análisis y comparación

Por

Profesor Dr. ANTONIO ALEGRE ESCOLANO

1. Introducción

Considerada la distribución estadística correspondiente a una variable X, y dada ésta mediante la tabla siguiente,

X	n_r	$f_r = \frac{n_r}{n}$
x_1	n_1	f_1
x_2	n_2	f_2
.	.	.
x_r	n_r	f_r
.	.	.
x_k	n_k	f_k
	$\sum_{r=1}^{k} n_r = n$	$\sum_{r=1}^{k} f_r = 1$

en la que n_r representa la frecuencia absoluta del valor x_r y con f_r representamos su correspondiente relativa, y supondremos que los valores de X están ordenados de forma que $x_1 < x_2 < \cdots < x_r < \cdots < x_k$; se desea frecuentemente representar el conjunto de valores observados x_r afectados de sus correspondientes frecuencias, por un valor único deducido de éstos, que suele denominarse *Medida de posición* correspondiente a la variable X; de entre las diversas medidas de posición atenderemos fundamentalmente a las denominadas *Medias o Valores medios del conjunto.*

Para ello partiremos de la definición general de Φ-*Media*, o media de tipo aritmético según la función Φ, donde Φ es una función continua, y monótona creciente o decreciente en el intervalo de aplicación (x_1, x_k), para pasar en primer lugar al caso en que Φ es potencial de la forma $\Phi(x) = x^\alpha$ y que denominamos *Media potencial de orden* α, con α, un número real cualquiera. Obtendremos posteriormente las medias más comúnmente utilizadas como casos particulares de esta media potencial de orden α, así se obtendrán la media aritmética, la cuadrática, la geométrica y la armónica, pasando finalmente a efectuar una comparación entre ellas, basándose en las propiedades que antes demostraremos, para la media potencial de orden α, que simbolizaremos como $M(\alpha)$. Posteriormente analizaremos el caso en que Φ sea exponencial de la forma $\Phi(x) = q^x$ y la denominaremos *Media exponencial de base* q, con q un número real estrictamente positivo, y que simbolizaremos como $\mu(q)$. Este tipo de media, no tan usual en estadística como las medias potenciales, la aplicaremos al cálculo del diferimiento medio de un conjunto de capitales financieros.

2. Definición de Φ-Media

Dada la distribución de frecuencias correspondientes a una variable estadística X, la medida de tendencia central más frecuentemente utilizada para representar el conjunto de valores de X, es la *Media Aritmética* que, simbolizada por $\overline{X}$, se define como:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{r=1}^{k} x_r \cdot n_r}{n} = \sum_{r=1}^{k} x_r \cdot f_r$$

siendo la característica peculiar de esta media el que «representa bien» al conjunto de los valores de X, ya que aun produciéndose unas desviaciones entre los valores de X y $\overline{X}$, éstas son tales que quedan compensadas unas con otras, aquellas que son por exceso con aquellas que lo son por defecto, pues:

$$\sum_{r=1}^{k} d_r \cdot n_r = \sum_{r=1}^{k} (x_r - \overline{X}) \cdot n_r = \sum_{r=1}^{k} x_r \cdot n_r - \overline{X} \cdot \sum_{r=1}^{k} n_r = 0$$

y siendo además,

$$x_1 = \sum_{r=1}^{k} x_1 \cdot f_r < \sum_{r=1}^{k} x_r \cdot f_r = \overline{X} < \sum_{r=1}^{k} x_k \cdot f_r = x_k$$

Partiendo de esta definición correspondiente a la media aritmética de la variable X, con su propiedad característica, podría ser preciso, para dotar de cierto sentido peculiar a los datos, transformar los valores de X antes de calcular sobre ellos una medida de tendencia central, como la media aritmética.

Supongamos que Φ es una función de transformación, que consideraremos continua y monótona creciente o decreciente en todo el intervalo de aplicación (x_1, x_k), de forma que:

$$\begin{aligned} \Phi : R &\longrightarrow R \\ x_r &\longrightarrow \Phi(x_r) \end{aligned}$$

entonces, a partir de Φ, el conjunto de valores observados de X, $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, quedaría transformado en el conjunto de imágenes $\{\Phi(x_1), \Phi(x_2), ..., \Phi(x_k)\}$, cuya media aritmética, que podríamos simbolizar por M, sería:

$$M = \sum_{r=1}^{k} \Phi(x_r) \cdot f_r$$

tal que si Φ es monótona creciente tendríamos $\Phi(x_1) < M < \Phi(x_k)$ y si es monótona decreciente $\Phi(x_k) < M < \Phi(x_1)$.

Al ser Φ monótona y además continua se habrá establecido una biyección entre el intervalo (x_1, x_k) y el $(\Phi(x_i), \Phi(x_j))$, siendo $i=1$ y $j=k$ cuando Φ sea monótona creciente e $i=k$ y $j=1$ cuando sea monótona decreciente.

Al producirse dicha biyección, tendrá sentido hablar de la función inversa de Φ,

$$\Phi^{-1} : (\Phi(x_i), \Phi(x_j)) \longrightarrow (x_1, x_k)$$

Existiría entonces de forma unívoca la imagen de M por la función de transformación inversa Φ^{-1}, y con ello tendremos que:

$$\Phi^{-1}(M) = M_\Phi$$

de aquí, M_Φ será la imagen inversa por Φ de la media aritmética de los valores de X transformados previamente por la aplicación de la función Φ.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, definimos la Φ-*Media o media de tipo aritmético según la función* Φ, continua y monótona en el intervalo (x_1, x_k), como:

$$M_\Phi = \Phi^{-1}\left(\sum_{r=1}^{k} \Phi(x_r) \cdot f_r \right)$$

que cumplirá siempre las propiedades características de la media aritmética, o sea:

$$\sum_{r=1}^{k} \left(\Phi(x_r) - \Phi(M_\Phi) \right) \cdot n_r = 0$$

y también

$$x_1 < M_\Phi < x_k$$

por la monotonía de la transformación Φ.

3. Definición de media potencial de orden α

En particular, si consideramos $\Phi(x) = x^\alpha$ definida en $]0, \infty[$, para cualquier α real menos el 0, Φ será continua y derivable por ser una función potencial y su primera derivada

$$\Phi'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

tendrá constantemente el signo de α, con lo que Φ será monótona creciente para $\alpha > 0$ y monótona decreciente para $\alpha < 0$. Consideraremos por tanto que X toma valores positivos y entonces la *Media potencial de orden* α vendrá dada por

$$(M^*(\alpha))^\alpha = \sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r$$

de forma que despejando $M^*(\alpha)$ mediante la función inversa de Φ queda

$$M^*(\alpha) = \left(\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r \right)^{1/\alpha}$$

válida para cualquier α real menos 0, siendo continua y derivable por ser composición de funciones que poseen dichas características.

Analicemos seguidamente el comportamiento de la función $M^*(\alpha)$ en el entorno de $\alpha=0$, calculando su límite en dicho punto. Así,

$$\lim_{\alpha \to 0} M^*(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \left(\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r \right)^{1/\alpha}$$

que resulta ser un límite indeterminado de la forma (1^∞) y cuya solución, de existir, es e^p, siendo:

$$p = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \left(\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r \right)$$

que resulta nuevamente indeterminado pero de la forma (∞/∞) y aplicando la regla de L'Hôpital, calcularemos el límite:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sum_{r=1}^{k} (\ln x_r) \cdot x_r^\alpha \cdot f_r}{\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r} = \sum_{r=1}^{k} (\ln x_r) \cdot f_r = \sum_{r=1}^{k} \ln x_r^{f_r}$$

con lo que

$$p = \sum_{r=1}^{k} \ln x_r^{f_r}$$

y el límite buscado será por tanto

$$\lim_{\alpha \to 0} M^*(\alpha) = e^{\sum_{r=1}^{k} \ln x_r^{f_r}} = \prod_{r=1}^{k} x_r^{f_r} = \prod_{r=1}^{k} (x_r)^{\frac{n_r}{n}} = \left(\prod_{r=1}^{k} x_r^{n_r} \right)^{1/n} = M_G$$

que no es otra cosa sino la media geométrica de la variable X, dada por la distribución de frecuencias considerada. Por todo ello, podemos redefinir la *Media potencial* como sigue,

$$M(\alpha) = \begin{cases} = M^*(\alpha) = \left(\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r \right)^{1/\alpha} & \text{con } \alpha \neq 0 \\ = M_G = \prod_{r=1}^{k} x_r^{f_r} & \text{con } \alpha = 0 \end{cases}$$

con lo que hemos aplicado el campo de definición de $M(\alpha)$ a todo el conjunto de los números reales, de tal forma que $M(\alpha)$ resulta continua, ya que en el punto $\alpha=0$, en el que $M^*(\alpha)$ poseía una discontinuidad evitable, le hemos asignado su «verdadero valor», esto es, el valor de su límite en dicho punto.

4. Las medias más comunes como casos particulares de la media potencial de orden α

A partir de la definición general de media potencial de orden α, consideraremos los casos particulares siguientes:

a) *Media armónica*

Si hacemos $\alpha=-1$, tendremos que:

$$M(-1)=\left(\sum_{r=1}^{k} x_r^{-1}\cdot f_r\right)^{-1}=\frac{1}{\sum_{r=1}^{k}\frac{f_r}{x_r}}=\frac{n}{\sum_{r=1}^{k}\frac{n_r}{x_r}}=M_H$$

donde con M_H se simboliza corrientemente a la media armónica de la variable X, que resulta ser la media potencial de orden -1.

b) *Media geométrica*

Como hemos visto en la definición de $M(\alpha)$, $M_G=M(0)$ y, por tanto, la media geométrica de la variable X no es otra cosa sino la media potencial de orden 0.

c) *Media aritmética*

Haciendo $\alpha=1$, tenemos que:

$$M(1)=\sum_{r=1}^{k} x_r\cdot f_r=\frac{\sum_{r=1}^{k} x_r\cdot n_r}{n}=\overline{X}$$

donde, como es común, simbolizamos con $\overline{X}$ la media aritmética de la variable X, que no es otra cosa sino la media potencial de orden 1.

d) *Media cuadrática*

Si hacemos ahora $\alpha = 2$, tendremos que:

$$M(2) = \left(\sum_{r=1}^{k} x_r^2 \cdot f_r \right)^{1/2} = M_Q$$

obteniéndose la media cuadrática, simbolizada por M_Q, como la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los valores de la variable X, que no es otra cosa, por tanto, que la media potencial de orden 2.

Por todo lo cual, hemos obtenido las principales medias estadísticas de una variable, como casos particulares de la media potencial de orden α.

5. Análisis de la media potencial de orden α

El análisis de la media potencial $M(\alpha)$ lo efectuaremos mediante los siguientes pasos:

a) *Ordenada en el origen*

Por la definición de $M(\alpha)$ tenemos que para $\alpha = 0$ es $M(0) = M_G$, luego la media potencial cortará al eje de ordenadas en el punto que corresponde a la media geométrica de la variable X.

b) *Estudio del comportamiento de* M(α) *en los extremos del campo de definición*

Realizaremos el estudio de la variación de la media potencial $M(\alpha)$ como función de la variable α, mediante los siguientes puntos:

1. Para obtener la posible rama asintótica para $\alpha \to -\infty$, calcularemos:

$$\lim_{\alpha \to -\infty} M(\alpha) = \lim_{\alpha \to -\infty} \left(\sum_{r=1}^{k} x_r^{\alpha} \cdot f_r \right)^{1/\alpha}$$

distinguiendo para el cálculo de este límite tres casos:

I. La variable X satisface la condición $0 < x_1 < 1$, por lo que el límite es indeterminado de la forma (∞^0).

II. La variable X satisface $x_1 = 1$, entonces:

$$\lim_{\alpha \to -\infty} M(\alpha) = (f_1)^0 = 1 = x_1.$$

III. Sea aquí $x_1 > 1$, entonces el límite vuelve a ser indeterminado, esta vez, de la forma (0^0).

Ahora bien, en los casos indeterminados I y III, de existir límite será de la forma e^p con,

$$p = \lim_{\alpha \to -\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot \ln\left(\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r\right)$$

que en I. será indeterminado de la forma $(\infty/-\infty)$ y en II. será también indeterminado pero de la forma $(-\infty/-\infty)$.

En ambos casos, de existir el límite será el que resulte de aplicar la regla de L'Hôpital, dando

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \frac{\sum_{r=1}^{k} (\ln x_r) \cdot x_r^\alpha \cdot f_r}{\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r} = \lim_{\alpha \to -\infty} \frac{(\ln x_1) \cdot f_1 + \sum_{r=2}^{k} (\ln x_r) \cdot \left(\frac{x_r}{x_1}\right)^\alpha \cdot f_r}{f_1 + \sum_{r=2}^{k} \left(\frac{x_r}{x_1}\right)^\alpha \cdot f_r} =$$

$$= \frac{(\ln x_1) \cdot f_1}{f_1} = \ln x_1$$

con ello $p = \ln x_1$ y el límite buscado será:

$$\lim_{\alpha \to -\infty} M(\alpha) = e^{\ln x_1} = x_1.$$

2. Para obtener ahora la posible rama asintótica para $\alpha \to +\infty$, calcularemos de forma similar a la anterior, el límite:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} M(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} \left(\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r\right)^{1/\alpha}$$

distinguiéndose también los tres casos siguientes:

I. Caso en que $x_k > 1$, por lo que el límite es indeterminado de la forma (∞^0).

II. Sea $x_k = 1$, entonces tendremos que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} M(\alpha) = (f_k)^0 = 1 = x_k$$

III. Sea por último $0 < x_k < 1$, entonces el límite resultará también indeterminado de la forma (0^0).

En los casos indeterminados I y III, de existir límite será de la forma e^p con,

$$p = \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot ln \left(\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r \right)$$

que en el caso I será inteterminado de la forma $(+\infty/+\infty)$ y en el caso II indeterminado de la forma $(-\infty/+\infty)$.

En ambos casos, aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene como antes:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\sum_{r=1}^{k} (\ln x_r) \cdot x_r^\alpha \cdot f_r}{\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r} =$$

$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\sum_{r=1}^{k-1} (\ln x_r) \cdot \left(\frac{x_r}{x_k}\right)^\alpha \cdot f_r + (\ln x_k) \cdot f_k}{\sum_{r=1}^{k-1} \left(\frac{x_r}{x_k}\right)^\alpha \cdot f_r + f_k} =$$

$$= \frac{(\ln x_k) \cdot f_k}{f_k} = \ln x_k.$$

con ello $p = \ln x_k$ y el límite buscado será:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} M(\alpha) = e^{\ln x_k} = x_k$$

c) Análisis del crecimiento de la función $M(\alpha)$

Para estudiar el crecimiento de la función $M(\alpha)$ respecto a la variable α, orden de la media potencial, lo haremos analizando su función derivada, y para ello consideraremos los dos casos siguientes:

1. Analizaremos en primer lugar el caso en que $\alpha \neq 0$, para el cual sabemos que,

$$M(\alpha)=M^*(\alpha)=\left(\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r\right)^{1/\alpha}$$

es continua y derivable; para obtener su derivada $M'(\alpha)$, tomaremos la transformación logarítmica de $M(\alpha)$ que será:

$$H(\alpha)=\ln M(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\cdot \ln\left(\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r\right)$$

con lo que $H'(\alpha)=\dfrac{M'(\alpha)}{M(\alpha)}$ y de aquí $M'(\alpha)=M(\alpha)\cdot H'(\alpha)$ obtendremos seguidamente $H'(\alpha)$, que después de ligeras transformaciones da:

$$H'(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\left[\frac{\sum_{r=1}^{k}(\ln x_r^\alpha)\cdot x_r^\alpha\cdot f_r}{\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha\cdot f_r}-\ln\left(\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha\cdot f_r\right)\right]$$

y al ser $M(\alpha)>0$, el signo de $M'(\alpha)$ coincidirá con el de $H'(\alpha)$, y por lo tanto será suficiente estudiar el comportamiento del término entre paréntesis de la expresión anterior, o lo que es lo mismo, el signo de,

$$\sum_{r=1}^{k}(\ln x_r^\alpha)\cdot x_r^\alpha\cdot f_r-\left(\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha\cdot f_r\right)\cdot\ln\left(\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha\cdot f_r\right)$$

ya que $\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha\cdot f_r>0$ y esto equivale a estudiar el signo de,

$$\sum_{r=1}^{k}(\ln x_r^\alpha)\cdot x_r^\alpha\cdot f_r-\sum_{r=1}^{k}\left(\ln\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha\cdot f_r\right)\cdot x_r^\alpha\cdot f_r$$

Para analizar el signo de esta diferencia estudiaremos los valores que puede tomar el minuendo, mediante la determinación de sus valores extremos, haciendo:

$$x_r^\alpha=y_r \qquad \text{y} \qquad x_r^\alpha\cdot f_r=z_r$$

quedando $\sum_{r=1}^{k} (\ln y_r) \cdot z_r$ con la condición de que

$$\sum_{r=1}^{k} y_r \cdot f_r = \sum_{r=1}^{k} z_r$$

y considerando las z_r como constantes.

Formamos la función de Lagrange,

$$L(y_1, \ldots, y_k; \lambda) = \sum_{r=1}^{k} (\ln y_r) \cdot z_r + \lambda \cdot \left(\sum_{r=1}^{k} y_r \cdot f_r - \sum_{r=1}^{k} z_r \right)$$

de la que se obtienen las condiciones necesarias de extremo, igualando a cero las derivadas parciales respecto a las y_r junto con la ecuación de condición.

Llegamos a que un posible extremo se encuentra en el punto donde,

$$y_r = \frac{z_r}{f_r} = x_r^{\alpha} \qquad \text{para} \qquad r = 1, 2, \ldots, k$$

para ver si se trata de un máximo o de un mínimo, formaremos la matriz Hessiana, asociada a la forma cuadrática, que nos da la condición de suficiencia de segundo orden, a través de las derivadas segundas en dicho punto, obteniéndose después de algunas pequeñas transformaciones:

$$H = \begin{bmatrix} -f_1^2 \cdot \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_k} \right), & \frac{-f_1 \cdot f_2}{z_k}, & \ldots\ldots, & \frac{-f_1 \cdot f_{k-1}}{z_k} \\ \frac{-f_2 \cdot f_1}{z_k}, & -f_2^2 \cdot \left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_k} \right), & \ldots\ldots, & \frac{-f_2 \cdot f_{k-1}}{z_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{-f_{k-1} \cdot f_1}{z_k}, & \frac{-f_{k-1} \cdot f_2}{z_k}, & \ldots\ldots, & -f_{k-1}^2 \cdot \left(\frac{1}{z_{k-1}} + \frac{1}{z_k} \right) \end{bmatrix}$$

en la que puede verse con facilidad que sus menores principales de orden 1, 2, 3, etc., alternan su signo, siendo:

$$H_1 < 0, \; H_2 > 0, \; H_3 < 0, \; H_4 > 0, \; \ldots, \; \text{etc.},$$

con lo que queda demostrado que se trata de un máximo y, por tanto, para cualesquiera otros valores que aisgnemos a y_r distintos de x_r^α, como podría ser:

$$y_r = \sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r$$

constante para $r=1, 2, ..., k$, nos daría un valor más pequeño de

$$\sum_{r=1}^{k} (\ln y_r) \cdot z_r$$

y, por tanto, independientemente de α tenemos que:

$$\sum_{r=1}^{k} (\ln x_r^\alpha) \cdot x_r^\alpha \cdot f_r > \sum_{r=1}^{k} \left(\ln \sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r\right) \cdot x_r^\alpha \cdot f_r$$

luego el signo de $H'(\alpha)$ es positivo para cualquier α distinto de 0, y por tanto $M'(\alpha) > 0$.

2. Veamos seguidamente qué ocurre para $\alpha = 0$, donde tendremos que:

$$\lim_{\alpha \to 0} M'(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} M(\alpha) \cdot H'(\alpha) = M_G \cdot \lim_{\alpha \to 0} H'(\alpha)$$

siendo

$$\lim_{\alpha \to 0} H'(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{\alpha \cdot \sum_{r=1}^{k} (\ln x_r) \cdot x_r^\alpha \cdot f_r}{\alpha^2 \cdot \sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r} - \frac{\left(\ln \sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r\right) \cdot \left(\sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r\right)}{\alpha^2 \cdot \sum_{r=1}^{k} x_r^\alpha \cdot f_r} \right]$$

que resulta indeterminado de la forma (0/0), y se resuelve aplicando la regla de L'Hôpital dos veces consecutivas, llegando a que,

$$\lim_{\alpha \to 0} H'(\alpha) = \frac{\sum_{r=1}^{k} (\ln x_r)^2 \cdot f_r - \left(\sum_{r=1}^{k} (\ln x_r) \cdot f_r\right)^2}{2}$$

cuyo numerador es positivo por la conocida propiedad de los momentos ordinarios de una variable, que dice que: el momento ordinario de segundo orden siempre es mayor que el cuadrado del momento ordinario de primer orden, siempre que la variable no sea una constante, aplicándolo aquí a la variable $\ln X$.

Resumiendo lo obtenido hasta aquí, podemos decir que $M'(\alpha)>0$ para todo α real, y por lo tanto. $M(\alpha)$ es estrictamente creciente con α.

Sólo en el caso en que $x_1=x_2=\cdots=x_k$, tendríamos que $M'(\alpha)=0$ para todo α real, pues:

$$M(\alpha)=\begin{cases} =M^*(\alpha)=\left(\sum\limits_{r=1}^{k} x_1^{\alpha}\cdot f_r\right)^{1/\alpha} \quad =x_1 & \text{con } \alpha\neq 0 \\ =M_G=\prod\limits_{r=1}^{k} x_1^{f_r}=x_1 & \text{con } \alpha=0 \end{cases}$$

luego $M(\alpha)=x_1$ constantemente igual al único valor de X, independientemente de α, orden de la media potencial.

6. Conclusiones. Comparación entre las diversas medias potenciales

Por todo el análisis realizado para $M(\alpha)$, podemos concluir que:

a) Para todo α real tenemos que,

$$x_1<M(\alpha)<x_k$$

o sea, que la media potencial, independientemente del orden α, se encuentra comprendida siempre entre el valor menor y el mayor de la variable X.

b) Además, al ser creciente la función $M(\alpha)$ respecto a la variable α, tendremos que para todo α_1 y α_2 con $\alpha_1<\alpha_2$, la relación entre las correspondientes medias potenciales de órdenes α_1 y α_2 es que,

$$M(\alpha_1) \ < \ M(\alpha_2)$$

siendo la desigualdad estricta por ser $M(\alpha)$ estrictamente creciente para todo α real.

De aquí se desprende la relación fundamental entre las principales medias potenciales, esto es:

$$M_H=M(-1)<M_G=M(0)<\overline{X}=M(1)<M_Q=M(2)$$

que se transformará en un conjunto de igualdades: $M_H=M_G=\overline{X}=M_Q=$ $=x_1$, sólo en el caso extremo en que la variable X fuese una constante, o sea $x_1=x_2=\cdots=x_k$, en cuyo caso $M(\alpha)=x_1$ independientemente de α, como hemos visto.

7. Definición de media exponencial de base q

Ahora consideraremos el caso en que la función Φ es tal que, $\Phi(x) = q^x$ definida para q un número real estrictamente positivo y distinto de 1, entonces $\Phi(x)$ será continua y derivable, por ser una función exponencial con base positiva, siendo su derivada

$$\Phi'(x) = (\ln q) \cdot q^x$$

cuyo signo permanece constante, siendo positivo para $q > 1$, con lo que la función Φ será monótona creciente y negativa para $0 < q < 1$, con lo que en este caso Φ será monótona decreciente.

De este modo, la *Media exponencial de base q*, vendrá dada por,

$$q^{\mu^*(q)} = \sum_{r=1}^{k} q^{x_r} f_r$$

de forma que despejando $\mu^*(q)$, mediante la función inversa de Φ que es el logarítmo con base q, quedará:

$$\mu^*(q) = \frac{\log_q \sum_{r=1}^{k} q^x r \cdot f_r}{\log_q q} = \log_q \sum_{r=1}^{k} q^{x_r} f_r$$

que puede expresarse mediante la utilización de logaritmos con cualquier otra base positiva, sin más que efectuar el correspondiente cambio de base, que, por comodidad para los posteriores análisis, consideraremos los logaritmos neperianos, o sea tomando como base el número e, quedando entonces la expresión de la *Media exponencial de base q*, como:

$$\mu^*(q) = \frac{\ln \sum_{r=1}^{k} q^{x_r} f_r}{\ln q}$$

dicha función está definida para todo q positivo excepto $q = 1$ en que se anula el denominador.

Analizaremos seguidamente el comportamiento de la función $\mu^*(q)$ en el entorno de $q = 1$, calculando su límite en dicho punto. Así,

$$\lim_{q \to 1} \mu^*(q) = \lim_{q \to 1} \frac{\ln \sum_{r=1}^{k} q^{x_r} f_r}{\ln q}$$

que resulta ser indeterminado de la forma (0/0) y cuya solución podremos obtener aplicando la regla de L'Hôpital, de modo que calculemos el límite:

$$\lim_{q \to 1} \frac{\sum_{r=1}^{k} x_r \cdot q^{x_r - 1} \cdot f_r}{\sum_{r=1}^{k} q^{x_r} \cdot f_r} : \frac{1}{q} =$$

$$= \lim_{q \to 1} \frac{\sum_{r=1}^{k} x_r \cdot q^{x_r} \cdot f_r}{\sum_{r=1}^{k} q^{x_r} \cdot f_r} = \sum_{r=1}^{k} x_r \cdot f_r = \overline{X}$$

que no es otra cosa sino la media aritmética de la variable X. Por todo ello podemos redefinir la *Media exponencial de base* q como sigue:

$$\mu(q) = \begin{cases} = \mu^*(q) = \dfrac{\ln \sum_{r=1}^{k} q^{x_r} \cdot f_r}{\ln q} & \text{para } q \neq 1 \text{ y } q > 0 \\ = \overline{X} = \sum_{r=1}^{k} x_r \cdot f_r & \text{para } q = 1 \end{cases}$$

con lo que hemos ampliado el campo de definición correspondiente a la función $\mu(q)$ a todo el conjunto de los números reales positivos, pues en el punto $q=1$, en que $\mu^*(q)$ poseía una discontinuidad por no estar definida y, siendo ésta evitable, la hemos salvado asignando a $\mu^*(q)$ en $q=1$ su «verdadero valor», esto es, el valor de su límite en dicho punto.

8. Utilización más común de la media exponencial. Diferimiento medio de un conjunto de capitales financieros.

La media exponencial de base q surge de una forma espontánea al considerar el problema financiero de la sustitución de un conjunto de capitales,

$$\{(C_r, T_r)\}_r = 1, 2, ..., k$$

donde las C_r representan las cuantías de los capitales y T_r los correspondientes diferimientos, por un único capital de cuantía $\sum_{r=1}^{k} C_r$ y cuyo diferimiento T_0, en el que deberá hacerse efectivo este único capital, recibe el nombre de *Diferimiento medio.*

Si la equivalencia entre capitales financieros se plantea a través de un tanto instantáneo de interés, o precio financiero constante ρ, de la igualdad entre las cuantías valoradas en el origen correspondientes a conjuntos equivalentes, se obtiene:

$$\left(\sum_{r=1}^{k} C_r\right) \cdot e^{-\rho \cdot T_0} = \sum_{r=1}^{k} C_r \cdot e^{-\rho \cdot T_r}$$

o lo que es idéntico,

$$e^{-\rho \cdot T_0} = \sum_{r=1}^{k} e^{-\rho \cdot T_r} \cdot \left(C_r \Big/ \sum_{r=1}^{k} C_r\right)$$

que no es otra cosa, sino la media exponencial de base $q = e^{-\rho}$, correspondiente a los diferimientos del conjunto de capitales, considerando como ponderaciones las cuantías relativas de los capitales del conjunto, esto es, con nuestra nomenclatura usual será,

$$T_r = x_r \quad \text{y} \quad \frac{C_r}{\sum_{r=1}^{k} C_r} = f_r$$

con lo que el diferimiento medio será:

$$T_0 = \mu(q) = \frac{\ln\left(\sum_{r=1}^{k} q^{x_r} \cdot f_r\right)}{\ln q} = \frac{\ln\left(\sum_{r=1}^{k} e^{-\rho \cdot T_r} \cdot \left(C_r / \sum_{r=1}^{k} C_r\right)\right)}{\ln e^{-\rho}} =$$

$$= \frac{\ln \sum_{r=1}^{k} C_r - \ln \sum_{r=1}^{k} C_r \cdot e^{-\rho \cdot T_r}}{\rho}$$

expresión que podemos encontrar en todo tratado de Matemática Financiera.

9. Análisis de la media exponencial de base q

El análisis de la media exponencial $\mu(q)$ lo efectuaremos mediante los siguientes pasos:

a) *Ordenada en el origen*

Al estar definida la media exponencial $\mu(q)$ solamente para valores estrictamente positivos de q, $\mu(q)$ no cortará al eje de ordenadas.

b) *Estudio de $\mu(q)$ en los extremos de su campo de definición*

Analicemos seguidamente cada uno de los extremos.

1. Observemos el comportamiento de la función $\mu(q)$ en el semi-entorno derecho de $q=0$, mediante el cálculo de su correspondiente límite en dicho punto.

$$\lim_{q \to 0^+} \mu(q) = \lim_{q \to 0^+} \frac{\ln\left(\sum_{r=1}^{k} q^{x_r} \cdot f_r\right)}{\ln q}$$

dicho límite es indeterminado de la forma $(-\infty/-\infty)$, y lo resolveremos aplicando la regla de L'Hôpital, calculando:

$$\lim_{q \to 0^+} \frac{\sum_{r=1}^{k} x_r \cdot q^{x_r - 1} \cdot f_r}{\sum_{r=1}^{k} q^{x_r} \cdot f_r} : \frac{1}{q} = \lim_{q \to 0^+} \frac{\sum_{r=1}^{k} x_r \cdot q^{x_r} \cdot f_r}{\sum_{r=1}^{k} q^{x_r} \cdot f_r} =$$

$$= \lim_{q \to 0^+} \frac{x_1 \cdot f_1 + \sum_{r=2}^{k} x_r \cdot q^{x_r - x_1} \cdot f_r}{f_1 + \sum_{r=2}^{k} q^{x_r - x_1} \cdot f_r} = \frac{x_1 \cdot f_1}{f_1} = x_1$$

con lo que el límite considerado será:

$$\lim_{q \to 0^+} \mu(q) = x_1$$

2. Para obtener ahora la posible rama asintótica para $q \to +\infty$, calcularemos de forma similar a la anterior el límite:

$$\lim_{q \to +\infty} \mu(q) = \lim_{q \to +\infty} \frac{\ln \sum_{r=1}^{k} q^{x_r} \cdot f_r}{\ln q}$$

que resulta indeterminado de la forma (∞/∞) y como antes aplicando la **regla de L'Hôpital nos lleva a considerar el** límite:

$$\lim_{q\to+\infty} \frac{\sum_{r=1}^{k} x_r \cdot q^{x_r} \cdot f_r}{\sum_{r=1}^{k} q^{x_r} \cdot f_r} =$$

$$= \lim_{q\to+\infty} \frac{\sum_{r=1}^{k-1} x_r \cdot q^{x_r - x_k} \cdot q_r + x_k \cdot f_k}{\sum_{r=1}^{k-1} q^{x_r - x_k} \cdot f_r + f_k} = \frac{x_k \cdot f_k}{f_k} = x_k$$

con lo que el límite buscado será:

$$\lim_{q\to+\infty} \mu(q) = x_k$$

c) *Análisis del crecimiento de la función* $\mu(q)$

Para estudiar el crecimiento de la función $\mu(q)$ analizaremos el comportamiento de su derivada, y para ello consideraremos los dos casos siguientes:

1. Cuando $q \neq 1$ tenemos que,

$$\mu(q) = \mu^*(q) = \frac{\ln \sum_{r=1}^{k} q^{x_r} \cdot f_r}{\ln q}$$

y de esta expresión la derivada respecto a q será, después de ligeras transformaciones,

$$\mu'(q) = \frac{\sum_{r=1}^{k} (\ln q^{x_r}) \cdot q^{x_r} \cdot f_r - \sum_{r=1}^{k} \left(\ln \sum_{r=1}^{k} q^{x_r} \cdot f_r\right) \cdot q^{x_r} \cdot f_r}{q \cdot (\ln q)^2 \cdot \sum_{r=1}^{k} q^{x_r} \cdot f_r}$$

cuyo numerador toma una expresión análoga a la analizada en el apartado 5-c-1, haciendo $y_r = q^{x_r}$ y $z_r = q^{x_r} \cdot f_r$, por lo que podemos asegurar que será siempre estrictamente positiva, y al serlo también el denominador tenemos que $\mu'(q) > 0$.

2. Para $q=1$ tenemos que:

$$\lim_{q\to 1} \mu'(q) = \lim_{q\to 1} \frac{\sum_{r=1}^{k} (\ln q^{x_r}) \cdot q^{x_r} \cdot f_r - \sum_{r=1}^{k} \left(\ln \sum_{r=1}^{k} q^{x_r} \cdot f_r\right) \cdot q^{x_r} \cdot f_r}{(\ln q)^2 \cdot \sum_{r=1}^{k} q^{x_r+1} \cdot f_r}$$

que resulta ser un límite indeterminado de la forma (0/0), cuya solución obtendremos sin más que aplicar la regla de L'Hôpital dos veces consecutivas como de forma similar a lo hecho en 5-c-2, llegando a que:

$$\lim_{q\to 1} \mu'(q) = \frac{\sum_{r=1}^{k} x_r^2 \cdot f_r - \left(\sum_{r=1}^{k} x_r \cdot f_r\right)^2}{2}$$

que, por el mismo razonamiento aplicado allí, será estrictamente positivo, siempre y cuando X no sea constante.

Luego, $\mu'(q)>0$ para todo q estrictamente positivo, con lo que $\mu(q)$ es estrictamente creciente con q.

Sólo en el caso en que $x_1 = x_2 \ldots = x_k$, tendremos que $\mu'(q)=0$ para todo q real estrictamente positivo, pues

$$\mu(q) = \begin{cases} = \mu^*(q) = \dfrac{\ln \sum_{r=1}^{k} q^{x_1} \cdot f_r}{\ln q} = x_1 & \text{con } q \neq 1 \\ = \overline{X} = \sum_{r=1}^{k} x_1 \cdot f_r = x_1 & \text{con } q = 1 \end{cases}$$

luego $\mu(q)=x_1$ constantemente igual al único valor de X_1 independientemente de q, base de la media exponencial.

10. Conclusiones. Aplicación al diferimiento medio de las propiedades de la media exponencial

Por todo el análisis realizado para $\mu(q)$, podemos concluir que:

a) Para todo q real estrictamente positivo tenemos que

$$x_1 < \mu(q) < x_k$$

o sea, que la media exponencial independientemente de la base q se encuentra comprendida entre el menor y el mayor valor de la variable X.

b) Al ser creciente respecto a q, tenemos que para todo q_1 y q_2 con $q_1 < q_2$, la relación entre las correspondientes medias exponenciales con bases respectivas q_1 y q_2 es:

$$\mu(q_1) < \mu(q_2)$$

siendo la desigualdad estricta por ser $\mu(q)$ estrictamente creciente para todo q positivo.

Por lo que se refiere a su aplicación financiera, para el cálculo del diferimiento medio de un conjunto de capitales, estas conclusiones nos dicen que, haciendo $q = e^{-\rho}$, el diferimiento medio, por ser la media exponencial de los diferimientos del conjunto, con base q dependiente del tanto instantáneo ρ, podemos asegurar:

1. Que el diferimiento medio es:

$$\mu(q) = \mu(e^{-\rho}) = T_0(\rho)$$

con lo que independientemente de ρ tendremos que

$$T_1 < T_0(\rho) < T_k$$

y además:

2. Al ser,

$$\frac{d\,T_0(\rho)}{d\rho} = \frac{d\,\mu(q)}{dq} \cdot \frac{dq}{d\rho}$$

como además,

$$\frac{dq}{d\rho} = \frac{d\,e^{-\rho}}{d\rho} = e^{-\rho} \cdot (-\rho) < 0$$

lo que significa que q es una transformación monótona decreciente de ρ, tendremos que $T_0(\rho)$ será una función estrictamente decreciente respecto al precio de ρ, que es el tanto de valoración con el que se obtiene el diferimiento medio, y por tanto a mayor ρ el diferimiento medio disminuye, de forma que se dan las siguientes propiedades:

I. Si $\rho \to -\infty$ tenemos que $q \to +\infty$ y entonces $\mu(\rho) = T_0(\rho)$ se acerca a $x_k = T_k$.

II. Si $\rho \to +\infty$ tenemos que $q \to 0$ y entonces $\mu(q) = T_0(\rho)$ se acerca a $x_1 = T_1$.

III. Si $\rho=0$ tenemos que $q=1$ y por tanto

$$T_0(0)=\mu(1)=\sum_{r=1}^{k} x_r \cdot f_r=\overline{X}=\overline{T}=\frac{\sum_{r=1}^{k} T_r \cdot C_r}{\sum_{r=1}^{k} C_r}$$

que nos indica que el diferimiento medio de un conjunto de capitales valorados a un tanto de interés nulo es la media aritmética de los diferimientos ponderados por las cuantías respectivas.

11. Definición de media lineal

Finalmente, consideraremos ahora que la función Φ es lineal de la forma $\Phi(x)=\alpha+\beta \cdot x$, siendo α un número real cualquiera y β también real excepto 0. La función Φ estará definida, en este supuesto, en el campo de los números reales; siendo continua y derivable, con derivada dada por:

$$\Phi'(x)=\beta$$

cuyo signo permanece constante, siendo el que corresponde al parámetro β. Así, si $\beta>0$ la transformación lineal correspondiente es monótona creciente, siendo monótona decreciente en el caso en que $\beta<0$.

De este modo, la *Media lineal de parámetros* α y β, que simbolizaremos $M_L(\alpha, \beta)$, vendrá dada por:

$$\alpha+\beta \cdot M_L(\alpha, \beta)=\sum_{r=1}^{k} (\alpha+\beta \cdot x_r) \cdot f_r$$

en la que despejando $M_L(\alpha, \beta)$ obtenemos:

$$M_L(\alpha, \beta)=\frac{\sum_{r=1}^{k} (\alpha+\beta \cdot x_r) \cdot f_r-\alpha}{\beta}=$$

$$=\frac{\alpha \cdot \sum_{r=1}^{k} f_r+\beta \cdot \sum_{r=1}^{k} x_r \cdot f_r-\alpha}{\beta}=\sum_{r=1}^{k} x_r \cdot f_r=\overline{X}$$

Este resultado nos dice que la *Media Lineal* es constantemente igual a la *Media Aritmética*, independientemente de los parámetros α y β, correspondientes a la transformación. Esto concuerda con la *Propiedad de Linealidad* que posee el operador Media Aritmética, resultando de ella que la Media Aritmética de la transformación lineal de una variable es el resultado de aplicar la misma transformación a la Media Aritmética correspondiente a la variable original.

12. Aplicación al cálculo del diferimiento medio de un conjunto de capitales

Dado un conjunto de capitales financieros, si deseamos sustituirlos por uno solo, cuya cuantía sea igual a la suma aritmética de sus cuantías, tal como hemos hecho en el epígrafe 8, pero utilizando ahora un régimen de descuento comercial a un tanto anual d, se plantearía aquí la equivalencia mediante la siguiente igualdad, correspondiente a las cuantías de sus valores actuales.

$$\left(\sum_{r=1}^{k} C_r\right) \cdot (1 - d \cdot T_0) = \sum_{r=1}^{k} C_r \cdot (1 - d \cdot T_r)$$

o lo que es idéntico:

$$1 - d \cdot T_0 = \sum_{r=1}^{k} (1 - d \cdot T_r) \cdot \left(C_r \Big/ \sum_{r=1}^{k} C_r\right)$$

donde T_0, diferimiento medio calculado en descuento comercial, no es otra cosa que la media lineal con parámetros $\alpha = 1$ y $\beta = -d$, correspondiente a la variable diferimiento $x_r = T_r$, actuando como frecuencias relativas,

$$f_r = \frac{C_r}{\sum_{r=1}^{k} C_r}$$

proporción que representa la correspondiente cuantía C_r, respecto al total.

Asi tendremos que:

$$T_0 = M_L(1, \ -d) = \sum_{r=1}^{k} T_r \cdot \left(C_r \Big/ \sum_{r=1}^{k} C_r\right) = \frac{\sum_{r=1}^{k} C_r \cdot T_r}{\sum_{r=1}^{k} C_r} = \overline{T}$$

con lo que se obtiene el resultado, bien conocido y que aparece en cualquier texto de cálculo comercial, en el que el *Diferimiento Medio es independiente del tanto de descuento comercial, e igual a la media aritmética de los diferimientos, ponderada ésta por las cuantías de los capitales.*

De forma similar, si el diferimiento medio se calculase utilizando un régimen financiero de interés simple vencido al tanto anual i, se plantearía entonces la equivalencia mediante la siguiente igualdad correspondiente a las cuantías de sus valores finales en un diferimiento T cualquiera, tal que cumpla $T \geqslant T_k$,

$$\left(\sum_{r=1}^{k} C_r\right) \cdot (1 + i \cdot (T - T_0)) = \sum_{r=1}^{k} C_r \cdot (1 + i \cdot (T - T_r))$$

o lo que es idéntico:

$$(1 + i \cdot T) - i \cdot T_0 = \sum_{r=1}^{k} (1 + i \cdot T) - i \cdot T_r) \cdot \left(C_r \Big/ \sum_{r=1}^{k} C_r\right)$$

donde, por tanto, el diferimiento medio T calculado a través de un régimen financiero de interés simple no es otra cosa que la media lineal con parámetros $\alpha = 1 + i \cdot T$ y $\beta = -i$, correspondiente a la variable diferimiento $x_r = T_r$, con las frecuencias relativas ya utilizadas anteriormente.

Así tendremos que:

$$T_0 = M_L(1 + i \cdot T, \ -i) = \overline{T}$$

Con lo que obtenemos, de forma análoga a la correspondiente al descuento comercial, que el *Diferimiento medio es independiente del tanto de interés simple y del diferimiento $T \geqslant T_k$ utilizado*, siendo igual a la media de los diferimientos, ponderada por la cuantía de los capitales.

Finalmente, resta por decir que otros tipos de media podrían ser analizados, haciendo que Φ fuese una función de otro tipo, pero las potenciales, exponenciales y lineales son las que tienen una mayor utilización y a ellas hemos dedicado el presente trabajo.

Bibliografía

— CALOT, Gérard: «Cours de Statistique Descriptive». Dunod, Paris 1965 (existe traducción castellana. Ed. Paraninfo) (pág. 38-51).

— FERNANDEZ BAÑOS, Olegario: «Tratado de Estadística». Madrid, 1945 (pág. 11-20).

— LEVI, Eugenio: «Curso de Matemática Financiera y Actuarial». Ed.

Bosch, Barcelona 1973 (original por Giuffre, Editore Milano, 1964) (pág. 559-564).

— RICHARD, G., et CHAPPELLET, R.: «Statistique Descriptive». Dunod, París 1967 (segunda edición) (pág. 56-71).

— RODRIGUEZ RODRIGUEZ, Alfonso: «Matemática de la Financiación». Ediciones de la Universidad de Barcelona 1974 (pág. 241-255).