Determinación de la cantidad óptima de pedido en un modelo de stocks con demanda unitaria y restricción en el ciclo de pedido

Dr. RAMON FERNANDEZ LECHON
Profesor de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
de la Universidad de Valladolid

1. INTRODUCCION

Los modelos de stocks existentes en la literatura han sido analizados imponiéndoles o no restricciones a las variables que intervienen, algunas de estas restricciones vienen determinadas por las características propias de la política utilizada.

En este trabajo, se analiza un modelo de stocks con un único artículo y demanda unitaria, imponiendo la siguiente restricción al ciclo de pedido. «No se podrá realizar el pedido hasta que transcurra un cierto tiempo, el cual depende de la cantidad de mercancía que se ha pedido en el ciclo anterior». Así pues, el ciclo de pedido ha de verificar $t \geq \alpha Q$, siendo t la duración del ciclo, Q la cantidad que se pidió en el período anterior, que como utilizamos el método de revisión continua es idéntica para todos los períodos, y α es el coeficiente de tiempo requerido e impuesto por la fuente para poder servir una unidad de mercancía.

En el análisis del modelo, revisaremos el nivel de stocks continuamente a lo largo del tiempo, determinaremos la distribución del estado estacionario del número de unidades en stocks, así como la cantidad óptima de pedido.

2. VARIABLE DEL MODELO: RESULTADOS PRELIMINARES

Consideremos un modelo de stocks con demanda unitaria y revisión continua. Se realizará un pedido de Q unidades de mercancía cuando el nivel de stocks es cero, siempre que el intervalo de tiempo transcurrido desde el pedido anterior sea mayor o igual que αQ, es decir, no nos pueden servir hasta que transcurre un cierto tiempo que depende de la cantidad de mercancía pedida en el período anterior.

Supongamos que en el origen de tiempos $t=0$, existen en almacén «i» unidades de mercancía ($i=1, 2, ..., Q$) y consideremos que los intervalos de tiempo entre las sucesivas demandas son una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución común $\Phi(.)$, de densidad $\varphi(.)$ y media $E(T)$ finita.

Denotamos a estas variables del siguiente modo:

$T_{j,k}$ es el tiempo durante el cual hay en almacén k unidades de mercancía en el período j, $k=1, 2, ..., Q$; $j=1, 2, 3, ...$.

Sea Y_1 el tiempo que transcurre desde el origen hasta que se agota la mercancía; Y_2, el tiempo que transcurre desde que se realizó el primer pedido hasta que se agota la mercancía en el período 2, y así sucesivamente. La sucesión $\{Y_j\} j=1,2,...$ es un proceso de renovación en el que la función de distribución de Y_1 es:

$$P(Y_1 \leq y) = \int_0^y \varphi^{*(i)}(u)\, du$$

donde $\varphi^{*(i)}(u)$ es la convolución i-ésima de $\varphi(u)$ consigo misma. La función de distribución de Y_2, Y_3, ... es

$$P(Y \leq y) = \int_0^y \varphi^{*(Q)}(u)\, du$$

Sea Z_j el tiempo que transcurre desde el j—1 pedido hasta que se realiza el j-ésimo pedido. Entonces

$$Z_1 = Y_1$$
$$Z_j = Y_j + \tau_j \qquad j=2, 3, ...$$

siendo τ_j el intervalo de tiempo que transcurre desde que se agota la mercancía en el período j hasta que se realiza el pedido. Tenemos:

$$\text{Si } Y_j \geq \alpha Q \Longrightarrow \tau_j = 0$$
$$\text{Si } Y_i < \alpha Q \Longrightarrow \tau_j \neq 0$$

Las $\{\tau_j\}$ son una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con idéntica función de densidad y media $E(\tau)$.

Sea $A_{j,k}$ el suceso, en el instante t hay en el período j, k unidades de mercancía en almacén, $k = 1, 2, \ldots, Q; j = 1, 2, 3, \ldots$

Para $k = Q$ tendremos:

$$P(A_{1,Q}) = 0$$

$$P(A_{2,Q}) = P(Y_1 \leq t < Y_1 + T_{2,Q}) = P(Y_1 \leq t) - P(Y_1 + T_{2,Q} \leq t) =$$

$$= \int_0^t \varphi^{*(i)}(u)\,du - \int_0^t \varphi^{*(i+1)}(u)\,du$$

$$P(A_{3,Q}) = P(Y_1 + Y_2 + \tau_2 \leq t < Y_1 + Y_2 + \tau_2 + T_{3,Q}) =$$

$$= \{P(Y_1 + Y_2 \leq t) - P(Y_1 + Y_2 + T_{3,Q} \leq t)\} \cdot P(\tau_2 = 0) +$$

$$+ \{P(Y_1 \leq t - \alpha Q) - P(Y_1 + T_{3,Q} \leq t - \alpha Q)\} \cdot P(\tau_2 \neq 0) =$$

$$= \{\int_0^t \varphi^{*(i+Q)}(u)\,du - \int_0^t \varphi^{*(i+Q+1)}(u)\,du\} \cdot P(\tau_2 = 0) +$$

$$+ \{\int_0^{t-\alpha Q} \varphi^{*(i)}(u)\,du - \{\int_0^{t-\alpha Q} \varphi^{*(i+1)}(u)\,du\} \cdot P(\tau_2 \neq 0)$$

$$P(A_{4,Q}) = \{\int_0^t \varphi^{*(i+2Q)}(u)\,du - \{\int_0^t \varphi^{*(i+2Q+1)}(u)\,du\} \cdot P(\tau_2 = 0)\, P(\tau_3 = 0)$$

$$+ 2\{\int_0^{t-\alpha Q} \varphi^{*(i+Q)}(u)\,du - \int_0^{t-\alpha Q} \varphi^{*(i+Q+1)}(u)\,du\} \cdot P(\tau_2 \neq 0)\, P(\tau_3 = 0)$$

$$+ \{\int_0^{t-2\alpha Q} \varphi^{*(i)}(u)\,du - \int_0^{t-2\alpha Q} \varphi^{*(i+1)}(u)\,du\} \cdot P(\tau_2 \neq 0)\, P(\tau_3 \neq 0)$$

....

....

Denotemos por B_Q el suceso en el instante t hay Q unidades de mercancía en almacén.

PROPOSICION 1.—La transformada de Laplace de $P(B_Q)$ es:

$$\bar{P}(B_Q) = \frac{1}{s} \cdot \frac{[1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot [\bar{\varphi}(s)]^i}{1 - [\bar{\varphi}(s)]^Q \cdot P(\tau = 0) - P(\tau \neq 0) \cdot e^{-s\alpha Q}}.$$

Demostración

Se tiene que $B_Q = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{j,Q}$ y, por tanto,

$$P(B_Q) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_{j,Q}).$$

Calculemos las tranformadas de Laplace de $P(A_{j,Q})$ $j = 1, 2, 3, \ldots$, teniendo en cuenta la linealidad y sabiendo que

$$a) \mathcal{L}\{ \int_0^t f(u)\, du \} = \frac{1}{s} \bar{f}(s)$$

$$b) \mathcal{L}\{ f_1(u) * f_2(u) \} = \bar{f}_1(s) \cdot \bar{f}_2(s)$$

$$c) \text{ Si } F(t) = \int_0^{t-\alpha Q} f(u)\, du \text{ , con } F(0) = 0$$

$$\text{entonces } \mathcal{L}\ F[t] \} = \frac{1}{s}\ e^{\ s\alpha Q} \bar{f}(s)$$

$$\bar{P}_1(Q, s) = \mathcal{L}\{ P(A_{1,Q}) \} = 0$$

$$\bar{P}_2(Q, s) = \frac{1}{s}\ [1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot [\bar{\varphi}(s)]^i$$

$$\bar{P}_3(Q, s) = P(\tau = 0) \{ \frac{1}{s}\ [1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot [\bar{\varphi}(s)]^{i+Q} \} +$$

$$+ P(\tau \neq 0) \{ \frac{1}{s} e^{-s\alpha Q} [1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot [\bar{\varphi}(s)]^i \}$$

....

....

Luego, en general, se puede escribir

$$\bar{P}_j(Q, s) = \frac{1}{s} [\bar{\varphi}(s)]^i \cdot [1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot$$

$$\cdot \{ [\bar{\varphi}(s)]^Q \cdot P(\tau = 0) + P(\tau \neq 0)\, e^{-s\alpha Q} \}^{j-2}$$

$$j = 2, 3, \ldots$$

Por tanto,

$$\bar{P}(B_Q) = \frac{1}{s}\,[\bar{\varphi}(s)]^i \cdot [1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=2}^{\infty} \{[\bar{\varphi}(s)]^Q \cdot P(\tau = 0) + P(\tau \neq 0) e^{-s\alpha Q}\}^{j-2} =$$

$$= \frac{1}{s} \quad \frac{[1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot [\bar{\varphi}(s)]^i}{1 - [\bar{\varphi}(s)]^Q P(\tau = 0) - P(\tau \neq 0)\, e^{-s\alpha Q}} \qquad c.\,q.\,d.$$

Razonando del mismo modo para $Q-1$, tenemos

$$\bar{P}_1(Q-1, s) = 0$$

$$\bar{P}_j(Q-1, s) = \frac{1}{s}\,[\bar{\varphi}(s)]^{i+1} \cdot [1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot$$

$$\cdot \{[\bar{\varphi}(s)]^Q \cdot P(\tau = 0) + P(\tau \neq 0) \cdot e^{-s\alpha Q}\}^{j-2}$$

$$j = 2, 3, \ldots$$

y por consiguiente:

$$\bar{P}(B_{Q-1}) = \frac{1}{s} \quad \frac{[1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot [\bar{\varphi}(s)]^{i+1}}{1 - [\bar{\varphi}(s)]^Q \cdot P(\tau = 0) - P(\tau \neq 0)\, e^{-s\alpha Q}}$$

Luego podemos enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA 1.—La transformada de Laplace de $P(B_k)$ para

$k = i + 1, i + 2, \ldots, Q$ es:

$$\bar{P}(B_k) = \frac{1}{s} \quad \frac{[1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot [\bar{\varphi}(s)]^{i-k+Q}}{1 - [\bar{\varphi}(s)]^Q \cdot P(\tau = 0) - P(\tau \neq 0)\, e^{-s\alpha Q}}$$

PROPOSICION 2.—La transformada de Laplace de $P(B_i)$ es:

$$\bar{P}(B_i) = \frac{1}{s}\,[1 - \bar{\varphi}(s)] + \frac{1}{s}\,\frac{[1 - \bar{\varphi}(s) \cdot [\bar{\varphi}(s)]^Q}{1 - [\bar{\varphi}(s)]^Q \cdot P(\tau = 0) - P(\tau \neq 0)\, e^{-s\alpha Q}}$$

Demostración

Tenemos que $B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{j,i}$ luego

$P(B_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_{j,i})$; calculemos, por tanto, dichas probabilidades.

$$P(A_{1,i}) = P(T_{1,i} > t) = 1 - \int_0^t \varphi(u)\,du$$

$$P(A_{2,i}) = P(Y_1 + T_{2,Q} + \ldots + T_{2,i+1} \leq t < Y_1 + T_{2,Q} + \ldots + T_{2,i}) =$$

$$= \int_0^t \varphi *^{(Q)}(u)\,du - \int_0^t \varphi *^{(Q+1)}(u)\,du$$

$$P(A_{3,i}) = P(Y_1 + Y_2 + \tau_2 \ + T_{3,Q} + \ldots + T_{3,i+1} \leq t <$$

$$< Y_1 + Y_2 + \tau_2 + T_{3,Q} + \ldots + T_{3,i}) =$$

$$= \{ \int_0^t \varphi *^{(2Q)}(u)\,du - \int_0^t \varphi *^{(2Q+1)}(u)\,du \} \cdot P(\tau_2 = 0) +$$

$$+ \{ \int_0^{t-\alpha Q} \varphi *^{(Q)}(u)\,du - \int_0^{t-\alpha Q} \varphi *^{(Q+1)}(u)\,du \} \cdot P(\tau_2 \neq 0)$$

....

....

Las transformadas de Laplace de estas probabilidades, teniendo en cuenta las propiedades de linealidad, transformada de la convolución y de la integral, son:

$$\bar{P}_1(i, s) = \frac{1}{s}\ [1 - \bar{\varphi}(s)]$$

$$\bar{P}_2(i, s) = \frac{1}{s}\ [1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot [\bar{\varphi}(s)]^Q$$

$$\bar{P}_3(i, s) = \frac{1}{s}\ [1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot [\bar{\varphi}(s)]^{2Q} \cdot P(\tau = 0) +$$

$$+ \frac{1}{s}\ e^{-s\alpha Q} \cdot [1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot [\bar{\varphi}(s)]^Q \cdot P(\tau \neq 0)$$

....

....

Luego para $j = 2, 3, \ldots$, se tiene

$$\bar{P}_j(i, s) = \frac{1}{s}\ [1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot [\bar{\varphi}(s)]^Q \cdot$$

$$\cdot \{ [\bar{\varphi}(s)]^Q \cdot P(\tau = 0) + P(\tau \neq 0)\, e^{-s\alpha Q} \}^{j-2}$$

y, por tanto,

$$\bar{P}[B_i] = \frac{1}{s}[1 - \bar{\varphi}(s)] + \frac{1}{s}\frac{[1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot [\bar{\varphi}(s)]^Q}{1 - [\bar{\varphi}(s)]^Q P(\tau = 0) - P(\tau \neq 0)\, e^{-s\alpha Q}}$$

PROPOSICION 3.—La transformada de Laplace de $P(B_{i-1})$ es:

$$\bar{P}(B_{i-1}) = \frac{1}{s}[1 - \bar{\varphi}(s)][\bar{\varphi}(s)] + \frac{1}{s}\frac{[1 - \bar{\varphi}(s)] \cdot [\bar{\varphi}(s)]^{Q+1}}{1 - [\bar{\varphi}(s)]^Q P(\tau = 0) - P(\tau \neq 0)\, e^{-s\alpha Q}}$$

Demostración

Del mismo modo que antes:

$$P(A_{1,i-1}) = P(T_{1,i} \leq t < T_{1,i} + T_{1,i-1}) =$$

$$= \int_0^t \varphi(u)\, du - \int_0^t \varphi^{*(2)}(u)\, du$$

$$P(A_{2,i-1}) = P(Y_1 + T_{2,Q} + \ldots + T_{2,i} \leq t < Y_1 + T_{2,Q} + \ldots + T_{2,i-1}) =$$

$$= \int_0^t \varphi^{*(Q+1)}(u)\, du - \int_0^t \varphi^{*(Q+2)}(u)\, du$$

$$P(A_{3,i-1}) = P(Y_1 + Y_2 + \tau_2 + T_{3,Q} + \ldots + T_{3,i} \leq t <$$
$$< Y_1 + Y_2 + \tau_2 + T_{3,Q} + \ldots + T_{3,i-1}) =$$

$$= P(\tau_2 = 0)\left\{\int_0^t \varphi^{*(2Q+1)}(u)\, du - \int_0^t \varphi^{*(2Q+2)}(u)\, du\right\} +$$

$$+ P(\tau_2 \neq 0) \cdot \left\{\int_0^{t-\alpha Q} \varphi^{*(Q+1)}(u)\, du - \int_0^{t-\alpha Q} \varphi^{*(Q+2)}(u)\, du\right\}$$

....

....

y, por tanto,

$$\bar{P}_1(i-1, s) = \frac{1}{s}[1 - \bar{\varphi}(s)][\bar{\varphi}(s)]$$

$$\bar{P}_2(i-1, s) = \frac{1}{s}[1 - \bar{\varphi}(s)][\bar{\varphi}(s)]^{Q+1}$$

$$\bar{P}_3(i-1,s)=\frac{1}{s}P(\tau=0)[1-\bar{\varphi}(s)][\bar{\varphi}(s)]^{2Q+1}$$

$$+\frac{1}{s}P(\tau\neq 0)e^{-s\alpha Q}[1-\bar{\varphi}(s)][\bar{\varphi}(s)]^{Q+1}$$

....

....

Así pues, para $j=2,3,\ldots$

$$\bar{P}_j(i-1,s)=\frac{1}{s}[1-\bar{\varphi}(s)][\bar{\varphi}(s)]^{Q+1}\cdot$$

$$\cdot\{[\bar{\varphi}(s)]^{Q}\cdot P(\tau=0)+P(\tau\neq 0)e^{-s\alpha Q}\}^{j-2}$$

luego

$$\bar{P}(B_{i-1})=\frac{1}{s}[1-\bar{\varphi}(s)][\bar{\varphi}(s)]+\frac{1}{s}\frac{[1-\bar{\varphi}(s)][\bar{\varphi}(s)]^{Q+1}}{1-[\bar{\varphi}(s)]^{Q}P(\tau=0)-P(\tau\neq 0)e^{-s\alpha Q}}$$

c. q. d.

Razonando del mismo modo para $i-2$ tenemos:

$$\bar{P}_1(i-2,s)=\frac{1}{s}[1-\bar{\varphi}(s)][\bar{\varphi}(s)]^{2}$$

$$\bar{P}_j(i-2,s)=\frac{1}{s}[\bar{\varphi}(s)]^{Q+2}[1-\bar{\varphi}(s)]\cdot$$

$$\cdot\{[\bar{\varphi}(s)]^{Q}\cdot P(\tau=0)+P(\tau\neq 0)e^{-s\alpha Q}\}^{j-2}$$

$$j=2,3,\ldots\ldots$$

por consiguiente

$$\bar{P}(B_{i-2})=\frac{1}{s}[1-\bar{\varphi}(s)][\bar{\varphi}(s)]^{2}+\frac{1}{s}\frac{[1-\bar{\varphi}(s)][\bar{\varphi}(s)]^{Q+2}}{1-[\bar{\varphi}(s)]^{Q}P(\tau=0)-P(\tau\neq 0)e^{-s\alpha Q}}$$

Luego podemos enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA 2.—La transformada de Laplace de $P(B_k)$, con $k=i,\ i-1,\ldots,1$ es:

$$\bar{P}(B_k)=\frac{1}{s}[1-\bar{\varphi}(s)][\bar{\varphi}(s)]^{i-k}+$$

$$+\frac{1}{s}\frac{[1-\bar{\varphi}(s)][\bar{\varphi}(s)]^{Q+i-k}}{1-[\bar{\varphi}(s)]^{Q}P(\tau=0)-P(\tau\neq 0)e^{-s\alpha Q}}$$

Teniendo en cuenta los teoremas 1 y 2, tendremos calculado $\bar{P}(B_k)$ con $k=1,2,\ldots,Q$.

3. DISTRIBUCION ESTACIONARIA DEL NIVEL DE STOCKS

En el apartado anterior hemos determinado la transformada de Laplace de la probabilidad de que haya k unidades de mercancía en almacén en el instante t, $k = 1, 2, \dots, Q$. Puesto que el período horizonte es infinito, suponemos que el proceso se repite de forma indefinida y, después de un tiempo suficientemente grande, la distribución será aproximadamente invariante, las probabilidades asociadas a este proceso invariante nos proporcionarán la probabilidad de que haya k unidades de mercancía en almacén.

Sea P_k la probabilidad de que tengamos en almacén k unidades de mercancía, $k = 1, 2, \dots, Q$

$$P_k = \lim_{t \to \infty} P(B_k) = \lim_{s \to 0} s \cdot \bar{P}(B_k)$$

según el teorema del valor final de las transformadas de Laplace. Por tanto, teniendo en cuenta que $\bar{\varphi}(0) = 1$ y $\bar{\varphi}'(0) = -E(T)$, se tiene:

$$P_k = \lim_{s \to 0} \frac{1 - \bar{\varphi}(s)}{1 - [\bar{\varphi}(s)]^Q P(\tau = 0) - P(\tau \neq 0)\, e^{-s\alpha Q}} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{-\bar{\varphi}'(s)}{-Q[\bar{\varphi}(s)]^{Q-1} \cdot \bar{\varphi}'(s) P(\tau = 0) + \alpha Q P(\tau \neq 0)\, e^{-s\alpha Q}} =$$

$$= \frac{E(T)}{Q \cdot E(T) \cdot P(\tau = 0) + \alpha Q \cdot P(\tau \neq 0)} =$$

$$= \frac{E(T)}{Q \cdot E(T) + P(\tau \neq 0) \cdot E(\tau)}$$

$$P_0 = 1 - \sum_{k=1}^{Q} \frac{E(T)}{Q \cdot E(T) + P(\tau \neq 0) \cdot E(\tau)} =$$

$$= \frac{P(\tau \neq 0) \cdot E(\tau)}{Q \cdot E(T) + P(\tau \neq 0) \cdot E(\tau)}$$

y puesto que $P(\tau \neq 0) = \int_0^{\alpha Q} \varphi^{*(Q)}(u)\, du$ y $E(\tau) = Q(\alpha - E(T))$, podemos calcular la distribución estacionaria del nivel de stocks.

Sivazlian y Stanfel en [5] y [6], estudian un modelo semejante, pero sin imponer la restricción al ciclo de pedido. Los resultados que hemos obtenido coinciden con aquéllos, en el caso de que no tengamos en cuenta la restricción para poder pedir.

4. CANTIDAD OPTIMA DE PEDIDO

Conocida la distribución estacionaria del nivel de stocks, el propósito de este apartado es determinar la cantidad óptima Q^* que se ha de pedir.

La función objetivo a considerar estará asociada a la distribución estacionaria del nivel de stocks. Existen dos alternativas extremas en la elección de la función objetivo. Una sería considerar como función objetivo el coste total medio del estado estacionario para todo el ciclo por unidad de tiempo; y, la otra, el coste total medio del estado estacionario para el período hasta que se agota la mercancía por unidad de tiempo.

Si se considera esta última función objetivo, se estaría despreciando el tiempo que hemos de esperar hasta que se sirve la mercancía, estaríamos suponiendo que $\tau = 0$ y entonces el modelo coincidiría con el estudiado en [5] y [6].

Puesto que el tiempo durante el cual no hay mercancía en almacén, influye en el comportamiento del modelo, tomaremos como función objetivo el coste total medio del estado estacionario para el ciclo por unidad de tiempo.

Denotamos por $\bar{D}$ la demanda media por unidad de tiempo, $\bar{D}=1/E(T)$.

La esperanza del tiempo transcurrido entre dos pedidos consecutivos es

$$E(Z)=\begin{cases} Q\cdot E(T)=Q/\bar{D} & \text{si } \tau=0 \\ \alpha\cdot Q & \text{si } \tau\neq 0 \end{cases}$$

TEOREMA 3.—Si $\alpha \leq 1/\bar{D}$ el modelo desarrollado coincide con aquél en el que no se impone restricción al ciclo de pedido.

La demostración de este teorema no ofrece ninguna dificultad. En efecto, si

$$\alpha \leq 1/\bar{D}=E(T) \Rightarrow \alpha - E(T) \leq 0 \ \tau \Rightarrow$$

$$Q(\alpha - E(T)) \leq 0 \quad \Rightarrow \ E(\tau) \leq 0$$

luego se agota la mercancía y se puede realizar el pedido, pues si no fuese así $\tau > 0 = \quad E(\tau) > 0$.

La esperanza del nivel de stocks es:

$$E(B)=\sum_{k=0}^{Q} k\cdot P_k=\frac{Q+1}{2(1+(\alpha\bar{D}-1)\cdot P(\tau\neq 0))}$$

Los distintos costes que intervienen en el modelo son: el coste de pedido, el coste de posesión y suponemos también que durante el tiempo que no hay mercancía en almacén y tenemos que esperar, se incurre en un coste que consideramos proporcional al tiempo durante el cual no se dispone de mercancía.

El coste por unidad del tiempo del estado estacionario es

$$F(Q)=\frac{K+cQ}{E(Z)}+h\cdot E(B)+\frac{m\cdot E(\tau)}{E(Z)}$$

donde K es el coste fijo de pedido; c, el coste variable de una unidad de mercancía; h, el coste de posesión por unidad de tiempo, y m, el coste en que se incurre por no tener mercancía en almacén por unidad de tiempo.

Por tanto, la función que hemos de minimizar teniendo en cuenta que Q es entero y positivo es:

$$H(Q)=(F(Q)/\ \tau=0)\cdot P(\tau=0)+(F(Q)/\tau\neq 0)\cdot P(\tau\neq 0)=$$

$$=\left(\frac{K+cQ}{Q/\bar{D}}+h\cdot\frac{Q+1}{2}\right)\cdot P(\tau=0)+$$

$$+(\frac{K+cQ}{Q}+h\cdot\frac{Q+1}{2(1+(\alpha\bar{D}-1)P(\tau\neq 0))}+\frac{m}{\alpha}(\alpha-1/\bar{D}))\cdot P(\tau\neq 0)$$

Supongamos que el óptimo se alcanza en Q^*, entonces:

$$H(Q^*)-H(Q^*+1)\leq 0$$

$$H(Q^*)-H(Q^*-1)\leq 0$$

Sustituyendo en la primera de las inecuaciones $H(Q^*)$ y $H(Q^*+1)$ por sus valores respectivos y operando, se tiene:

$$\frac{2K\bar{D}}{h}\leq(M+1)\cdot Q^*\cdot(Q^*+1)$$

donde M viene dado por:

$$M=(\alpha\bar{D}-1)\left\{\frac{2}{h\alpha}\left[\left(\frac{K}{Q^*}+c-\frac{m}{\bar{D}}\right)P(\tau_{Q^*}\neq 0)-\right.\right.$$

$$\left.-\left(\frac{K}{Q^*+1}+c-\frac{m}{\bar{D}}\right)P(\tau_{Q^*+1}\cdot 0)\right]+$$

$$\left.+\frac{(Q^*+1)P(\tau_{Q^*}\neq 0)^2}{1+(\alpha\bar{D}-1)P(\tau_{Q^*}\neq 0)}-\frac{(Q^*+2)P(\tau_{Q^*+1}\neq 0)^2}{1+(\alpha\bar{D}-1)P(\tau_{Q^*+1}\neq 0)}\right\}$$

Del mismo modo, con la segunda desigualdad se tiene

$$\frac{2K\bar{D}}{h}\geq(N+1)\cdot Q^*\cdot(Q^*-1)$$

donde N es:

$$N = (\alpha \bar{D} - 1) \left\{ \frac{2}{h\,\alpha} \left[\left(\frac{K}{Q^* - 1} + c - \frac{m}{\bar{D}} \right) P(\tau_{Q^*-1} \neq 0) - \right. \right.$$

$$\left. - \left(\frac{K}{Q^*} + c - \frac{m}{\bar{D}} \right) P(\tau_{Q^*} \neq 0) \right] +$$

$$\left. + \frac{Q^* \, P(\tau_{Q^*-1} \neq 0)^2}{1 + (\alpha \bar{D} - 1) \, P(\tau_{Q^*-1} \neq 0)} - \frac{(Q^* + 1) \, P(\tau_{Q^*} \neq 0)^2}{1 + (\alpha \bar{D} - 1) \, P(\tau_{Q^* \neq 0})} \right\}$$

Teniendo en cuenta ambas expresiones, se tiene

$$(N + 1) \cdot Q^* \cdot (Q^* - 1) \leq \frac{2\,K\bar{D}}{h} \leq (M + 1) \cdot Q^* \cdot (Q^* + 1)$$

Así pues, para un valor dado de $2\,K\bar{D}/h$, se puede determinar la cantidad Q^* óptima a pedir.

Si en los resultados obtenidos tomamos límite cuando $m \rightarrow 0$, tendríamos las expresiones correspondientes del modelo en el cual no se incurre en ningún coste mientras no se dispone de mercancía en almacén.

BIBLIOGRAFIA

(1) FERNÁNDEZ LECHÓN, R.: «Modelos de stocks con restricciones en el ciclo de pedido». Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid. 1984.

(2) HADLEY, G., y WHITIN, T. M.: «Analysis of inventory systems». Ed. Prentice-Hall. 1975.

(3) PETERSON, R., y SILVER, E. A.: «Decision systems for inventory management and production planning». Ed. John-Wiley. 1979.

(4) SILVER, E. A.: «Operations research in inventory management: A review and critique». *Operations Research*. Vol. 29, n.º 4. 1981.

(5) SIVAZLIAN, B. D., y STANFEL, L. E.: «Analysis of systems in operations research». Ed. Prentice-Hall. 1975.

(6) SIVAZLIAN, B. D.: «A continous-review (s, S) inventory system with arbitrary interarrival distribution between unit demand». *Operations Researcj*. Vol. 22, n.º 1, 1974.